

## Análisis numérico de un modelo de remodelación ósea

J.R. FERNÁNDEZ, R. MARTÍNEZ, J.M. VIAÑO

*Departamento de Matemática Aplicada, Universidade de Santiago de Compostela, Facultade de Matemáticas, Campus Sur s/n, 15782 Santiago de Compostela. E-mails: jramon@usc.es, rebecca.martinez2@rai.usc.es, maviano@usc.es.*

**Palabras clave:** Remodelación ósea, aproximaciones discretas, estimaciones del error, soluciones numéricas.

### Resumen

En este trabajo se estudia, desde el punto de vista numérico, un modelo de remodelación ósea. Este modelo se caracteriza por una ecuación variacional elíptica para el campo de desplazamientos y una ecuación diferencial ordinaria de primer orden en tiempo para describir el proceso fisiológico de remodelado óseo. Utilizando el método de elementos finitos para aproximar la variable espacial y un esquema de Euler para discretizar las derivadas temporales, obtenemos aproximaciones discretas de este problema variacional y probamos un resultado de estimación del error. Bajo condiciones de regularidad adecuadas, deducimos la convergencia lineal del algoritmo respecto de los parámetros de discretización. Finalmente, presentamos algunos resultados numéricos, en un ejemplo bidimensional, para mostrar la validez del algoritmo.

## 1. Formulación mecánica y variacional

Denotemos por  $\cdot$  el producto interior en  $\mathbb{R}^d$  y su correspondiente norma por  $|\cdot|$ . Sea  $\mathbb{S}^d$  el espacio de los tensores simétricos de segundo orden en  $\mathbb{R}^d$ , o equivalentemente, el espacio de las matrices simétricas de orden  $d$ , y sea  $:$  su producto interior y  $|\cdot|$  su norma.

Sea  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ,  $d = 1, 2, 3$ , un dominio abierto y acotado y sea  $\Gamma = \partial\Omega$  su frontera, que suponemos Lipschitz continua y dividida en dos partes disjuntas  $\Gamma_D$  y  $\Gamma_N$ . El cuerpo está sometido a una fuerza volúmica de densidad  $\mathbf{f}$ , fijado en  $\Gamma_D$  y sometido a una fuerza de tracción superficial de densidad  $\mathbf{g}$  actuando en  $\Gamma_N$ . Finalmente, denotemos por  $\boldsymbol{\nu}$  el vector normal exterior unitario (véase la Figura 1). Denotamos por  $\mathbf{x} = (x_i)_{i=1}^d$  un punto genérico de  $\bar{\Omega}$  y por  $t \in [0, T]$ ,  $T > 0$ , un instante cualquiera en el intervalo de tiempo  $[0, T]$ . Sea  $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$  el campo de desplazamientos en el punto  $\mathbf{x}$  y en el instante  $t$ ,  $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) = (\varepsilon_{ij}(\mathbf{u}))_{i,j=1}^d$  el tensor de deformaciones linealizado dado por  $\varepsilon_{ij}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$ .

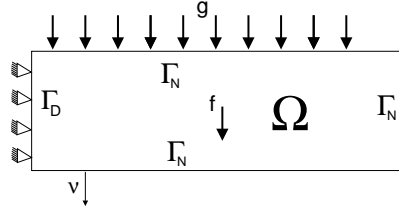


Figura 1: Problema de remodelación ósea.

Denotamos por  $e = e(\mathbf{x}, t)$  la medida del cambio en la fracción volúmica del hueso desde la configuración de referencia y que denominaremos función de *remodelación ósea*.

Denotamos por  $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t)$  el tensor de tensiones en el punto  $\mathbf{x}$  y en el instante  $t$ . El modelo de remodelación ósea que consideramos aquí fue postulado en [2, 5]. Se trata de un modelo no lineal con una ley constitutiva que se escribe como

$$\boldsymbol{\sigma} = (\xi_0 + e)\mathcal{C}(e)\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}),$$

donde  $\xi_0$  representa la fracción volúmica de referencia y  $\mathcal{C}(e) = (C_{ijkl}(e))_{i,j,k,l=1}^d$  los coeficientes de elasticidad que dependen de  $e$ . Nótese que si  $\xi_0 = 1$  y  $e = 0$ , la ley constitutiva corresponde a la ley de Hooke clásica.

La evolución de la función de remodelación ósea se obtiene de la siguiente ecuación diferencial ordinaria donde  $\dot{e}$  denota la derivada temporal:

$$\dot{e} = a(e) + \mathcal{A}(e) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}),$$

donde  $a(e)$  es una función constitutiva y  $\mathcal{A}(e) = (A_{ij}(e))_{i,j=1}^d$  incluye los coeficientes de remodelación ósea.

**Observación 1.** *Notemos que las funciones  $\mathcal{C}(e)$ ,  $a(e)$  y  $\mathcal{A}(e)$  caracterizan las propiedades del material y los datos experimentales determinan su forma. En algunos artículos, se emplean aproximaciones polinómicas (véase, por ejemplo, [6]):*

$$\begin{aligned} C_{ijkl}(e) &= \frac{1}{\xi_0 + e} (\xi_0 C_{ijkl}^0 + C_{ijkl}^1 e), \\ a(e) &= a_0 + a_1 e + a_2 e^2, \\ A_{ij}(e) &= A_{ij}^0 + A_{ij}^1 e, \end{aligned}$$

donde  $C_{ijkl}^0$ ,  $C_{ijkl}^1$ ,  $a_0$ ,  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $A_{ij}^0$  and  $A_{ij}^1$  son constantes que dependen de las propiedades del material.

Definimos el siguiente operador de truncamiento  $\Phi_L : \mathbb{R} \rightarrow [-L, L]$  por

$$\Phi_L(r) = \begin{cases} -L & \text{si } -L \leq r, \\ r & \text{si } -L \leq r \leq L, \\ L & \text{si } r \geq L. \end{cases}$$

Finalmente, suponemos que el proceso es cuasiestático y, en consecuencia, los efectos de inercia son ignorados. Además, denotamos por  $e_0$  la función de remodelación ósea inicial.

El problema mecánico, obtenido de las leyes de la mecánica de medios continuos en el caso de pequeñas deformaciones, es el siguiente (véase [4, 6]):

**Problema P.** *Encontrar el campo de desplazamientos  $\mathbf{u} : \Omega \times (0, T) \rightarrow \mathbb{R}^d$ , el tensor de tensiones  $\boldsymbol{\sigma} : \Omega \times (0, T) \rightarrow \mathbb{S}^d$  y la función de remodelación ósea  $e : \Omega \times (0, T) \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $e(0) = e_0$  y para todo  $t \in (0, T)$ :*

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma}(t) &= (\xi_0 + e(t))\mathcal{C}(e(t))\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(t)) \quad \text{en } \Omega \times (0, T), \\ \dot{e}(t) &= a(e(t)) + \mathcal{A}(e(t)) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(t)) \quad \text{en } \Omega \times (0, T), \\ -\text{Div } \boldsymbol{\sigma}(t) &= \gamma(\xi_0 + \Phi_L(e(t)))\mathbf{f}(t) \quad \text{en } \Omega \times (0, T), \\ \mathbf{u}(t) &= \mathbf{0} \quad \text{en } \Gamma_D \times (0, T), \\ \boldsymbol{\sigma}(t)\boldsymbol{\nu} &= \mathbf{g}(t) \quad \text{en } \Gamma_N \times (0, T). \end{aligned}$$

donde  $\gamma > 0$  es la densidad del material que ocupa  $\bar{\Omega}$  (se considera constante para simplificar).

Intentemos ahora obtener una formulación variacional del problema P. Denotemos por  $Y = L^2(\Omega)$  y  $H = [L^2(\Omega)]^d$  y definimos los siguientes espacios variacionales:

$$\begin{aligned} V &= \{\mathbf{w} \in [H^1(\Omega)]^d ; \mathbf{w} = \mathbf{0} \quad \text{en } \Gamma_D\}, \\ Q &= \{\boldsymbol{\tau} = (\tau_{ij})_{i,j=1}^d \in [L^2(\Omega)]^{d \times d} ; \tau_{ij} = \tau_{ji}, \quad 1 \leq i, j \leq d\}. \end{aligned}$$

Suponemos las siguientes hipótesis sobre los datos:

- los coeficientes de elasticidad  $C_{ijkl}(e)$  son continuamente diferenciables con respecto a  $e$  y satisfacen las siguientes propiedades:

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad & C_{ijkl}(e) = C_{jikl}(e) = C_{klij}(e) \quad \text{para } i, j, k, l = 1, \dots, d. \\ \text{(b)} \quad & \text{Existe } m_C > 0 \text{ tal que } (\xi_0 + e)\mathcal{C}(e)\boldsymbol{\tau} : \boldsymbol{\tau} \geq m_C |\boldsymbol{\tau}|^2. \end{aligned} \quad (1)$$

- La función constitutiva  $a(e)$  y los coeficientes de remodelación ósea  $A_{ij}(e)$  son continuamente diferenciables con respecto a  $e$ .
- La fracción volúmica de referencia  $\xi_0$  satisface las siguientes condiciones para algún  $\xi_0^m, \xi_0^M < 1$ :

$$\xi_0 \in C^1(\bar{\Omega}), \quad 0 < \xi_0^m \leq \xi_0(\mathbf{x}) \leq \xi_0^M < 1 \quad \text{para todo } \mathbf{x} \in \bar{\Omega}. \quad (2)$$

- Las fuerzas de densidad tienen la siguiente regularidad:

$$\mathbf{f} \in C([0, T]; [C(\Omega)]^d), \quad \mathbf{g} \in C([0, T]; [C(\Gamma_N)]^d), \quad (3)$$

y el valor inicial de la función de remodelación  $e_0$  verifica que

$$e_0 \in C^1(\bar{\Omega}). \quad (4)$$

Dado  $e \in L^\infty(\Omega)$ , definimos la siguiente forma bilineal  $c(e; \cdot, \cdot) : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ :

$$c(e; \mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Omega} (\xi_0 + e) \mathcal{C}(e) \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) \, d\mathbf{x} \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V,$$

y la forma lineal  $L(e; \cdot) : V \rightarrow \mathbb{R}$  dada por:

$$L(e; \mathbf{v}) = \int_{\Omega} \gamma(\xi_0 + \Phi_L(e)) \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x} + \int_{\Gamma_N} \mathbf{g} \cdot \mathbf{v} \, d\Gamma \quad \forall \mathbf{v} \in V.$$

Mediante un procedimiento habitual, obtenemos la siguiente formulación variacional del problema mecánico P.

**Problema PV.** *Encontrar el campo de desplazamientos  $\mathbf{u} : [0, T] \rightarrow V$  y la función de remodelación ósea  $e : [0, T] \rightarrow L^\infty(\Omega)$  tales que:*

$$\begin{aligned} c(e(t); \mathbf{u}(t), \mathbf{v}) &= L(e(t); \mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in V, \quad \text{c.p.t. } t \in (0, T), \\ \dot{e}(t) &= a(e(t)) + \mathcal{A}(e(t)) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(t)), \quad \text{en } \mathcal{D}'(0, T; L^2(\Omega)), \\ e(0) &= e_0. \end{aligned}$$

En [7] se demuestra el siguiente resultado de existencia y unicidad de solución del problema PV.

**Teorema 1.** *Supongamos que se cumplen las hipótesis (1)-(4) Entonces, existe una única solución del problema PV con la siguiente regularidad:*

$$\mathbf{u} \in C^1([0, T]; [H^2(\Omega)]^d), \quad e \in C^1([0, T]; C(\bar{\Omega})).$$

## 2. Aproximaciones numéricas: estimaciones del error

Introducimos ahora un algoritmo basado en el método de elementos finitos para aproximar las soluciones del problema PV y obtener una estimación del error a partir de ellas.

La discretización del problema PV se hace como sigue. Primero, consideramos dos espacios de dimensión finita  $V^h \subset V$  y  $B^h \subset L^\infty(\Omega) \subset Y$ , aproximación de los espacios  $V$  y  $L^\infty(\Omega)$ , respectivamente.

**Observación 2.** *En las simulaciones numéricas que se presentan en la siguiente sección,  $V^h$  y  $B^h$  son espacios de funciones continuas afines a trozos y funciones constantes a trozos, respectivamente; es decir:*

$$V^h = \{\mathbf{w}^h \in [C(\bar{\Omega})]^d; \mathbf{w}^h|_{Tr} \in [P_1(Tr)]^d, Tr \in \mathcal{T}^h, \quad \mathbf{w}^h = \mathbf{0} \text{ en } \Gamma_D\}, \quad (5)$$

$$B^h = \{\xi^h \in L^\infty(\Omega); \xi^h|_{Tr} \in P_0(Tr), \quad Tr \in \mathcal{T}^h\}, \quad (6)$$

donde  $\Omega$  es un dominio poligonal,  $\mathcal{T}^h$  denota una triangulación tipo elementos finitos de  $\bar{\Omega}$ , y  $P_q(Tr)$ ,  $q = 0, 1$ , representa el espacio de los polinomios de grado menor o igual que  $q$  en  $Tr$ .

Para discretizar las derivadas en tiempo, utilizamos una partición uniforme de  $[0, T]$ , denotada por  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_N = T$ , y sea  $k$  el tamaño del paso de tiempo,  $k = T/N$ . Además, para una función continua  $f(t)$  sea  $f_n = f(t_n)$ .

En esta sección,  $c$  denota una constante positiva que depende de los datos del problema, pero es independiente de los parámetros de discretización  $h$  y  $k$ .

Utilizando el esquema de Euler explícito, la discretización del problema variacional PV resulta de la forma siguiente.

**Problema  $PV^{hk}$ .** Encontrar el campo de desplazamientos  $\mathbf{u}^{hk} = \{\mathbf{u}_n^{hk}\}_{n=0}^N \subset V^h$  y una función de remodelación ósea discreta  $e^{hk} = \{e_n^{hk}\}_{n=0}^N \subset B^h$  tales que  $e_0^{hk} = e_0^h$ ,  $\mathbf{u}_0^{hk} = \mathbf{u}_0^h$  son adecuadas aproximaciones de  $e_0$  y  $\mathbf{u}_0$  respectivamente y para  $n = 1, \dots, N$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_n^{hk} \in V, \quad c(e_n^{hk}; \mathbf{u}_n^{hk}, \mathbf{v}^h) &= L(e_n^{hk}; \mathbf{v}^h) \quad \forall \mathbf{v}^h \in V^h, \\ \frac{e_n^{hk} - e_{n-1}^{hk}}{k} &= a(e_{n-1}^{hk}) + \mathcal{A}(e_{n-1}^{hk}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_{n-1}^{hk}). \end{aligned}$$

De las propiedades (1) es inmediato obtener la existencia y unicidad de la solución discreta como enunciamos a continuación.

**Teorema 2.** Supongamos que se verifican las hipótesis (1)-(4). Entonces, el problema  $PV^{hk}$  tiene una única solución  $(\mathbf{u}^{hk}, e^{hk}) \subset V^h \times B^h$ .

El objetivo de esta sección es obtener estimaciones del error para  $\|\mathbf{u}_n - \mathbf{u}_n^{hk}\|_V$  y  $\|e_n - e_n^{hk}\|_Y$ . Tenemos el siguiente resultado para la estimación del error principal.

**Teorema 3.** Supongamos que se cumplen las hipótesis (1)-(4). Sean  $(\mathbf{u}, e)$  y  $(\mathbf{u}^{hk}, e^{hk})$  las respectivas soluciones de los problemas PV y  $PV^{hk}$ . Bajo la condición de regularidad  $\mathbf{u} \in C([0, T]; [W^{1,\infty}(\Omega)]^d)$ , tenemos, para todo  $\{\mathbf{v}_n^h\}_{n=0}^N \subset V^h$ :

$$\begin{aligned} \max_{0 \leq n \leq N} \{ \|e_n - e_n^{hk}\|_Y^2 + \|\mathbf{u}_n - \mathbf{u}_n^{hk}\|_V^2 \} &\leq \|e_0 - e_0^h\|_Y^2 + c \left( k \sum_{j=1}^N \left[ \|\dot{e}_j - (e_j - e_{j-1})/k\|_Y^2 \right. \right. \\ &\left. \left. + \|\mathbf{u}_j - \mathbf{u}_{j-1}\|_V^2 \right] + k^2 + \max_{1 \leq n \leq N} \|\mathbf{u}_n - \mathbf{v}_n^h\|_V^2 + \|\mathbf{u}_0 - \mathbf{u}_0^{hk}\|_V^2 \right). \end{aligned} \quad (7)$$

Las estimaciones del error (7) son básicas para el análisis de la convergencia del algoritmo. A continuación presentamos un ejemplo.

Sea  $\Omega$  un dominio poliédrico y denotemos por  $\mathcal{T}^h$  una triangulación de  $\Omega$  compatible con la partición de la frontera  $\Gamma = \partial\Omega$  en  $\Gamma_D$  y  $\Gamma_N$ . Sean  $V^h$  y  $B^h$  definidos por (5) y (6), respectivamente, y supongamos que la condición inicial discreta  $e_0^h$  se obtiene por  $e_0^h = \pi^h e_0$ , donde  $\pi^h : C(\bar{\Omega}) \rightarrow B^h$  es el operador de interpolación de elementos finitos (véase, e.g., [1]) y  $\mathbf{u}_0^h = \pi^h \mathbf{u}_0$  donde  $\Pi^h = (\pi_i^h)_{i=1}^d : [C(\bar{\Omega})]^d \rightarrow V^h$ .

Supongamos la siguiente condición de regularidad en la solución continua:

$$e \in C([0, T]; H^2(\Omega)) \cap H^2(0, T; Y). \quad (8)$$

Del Teorema 3 se tiene que  $\mathbf{u} \in C([0, T]; [H^2(\Omega)]^d)$  (por tanto,  $\mathbf{u}_0 = \mathbf{u}(0) \in [H^2(\Omega)]^d$ ) El siguiente resultado se sigue de la estimación (7).

**Corolario 1.** Bajo las hipótesis del Teorema 3 y la condición de regularidad (8), el esquema discretizado basado en el método de elementos finitos descrito anteriormente es

linealmente convergente, es decir, existe una constante positiva  $c$ , independiente de  $h$  y  $k$ , tal que

$$\max_{0 \leq n \leq N} \left\{ \|\mathbf{u}_n - \mathbf{u}_n^{hk}\|_V + \|e_n - e_n^{hk}\|_Y \right\} \leq c(h + k).$$

### 3. Resultados numéricos

En esta sección describimos brevemente el esquema numérico que hemos implementado, y presentamos un ejemplo bidimensional para mostrar su comportamiento.

#### 3.1. Esquema numérico

Para aproximar los espacios  $V$  y  $L^\infty(\Omega)$  utilizamos los espacios de elementos finitos  $V^h$  y  $B^h$  definidos por (5) y (6), respectivamente.

En primer lugar, señalemos que, en la práctica,  $\mathbf{u}_0^{hk}$  se obtiene resolviendo el siguiente problema variacional:

$$\mathbf{u}_0^{hk} \in V^h, \quad c(e_0^h; \mathbf{u}_0^{hk}, \mathbf{v}^h) = L(e_0^h; \mathbf{v}^h), \quad \forall \mathbf{v}^h \in V^h.$$

Se trata de un problema de elasticidad lineal discreto equivalente a un sistema lineal que se resuelve utilizando el método de Cholesky.

Para  $n \in \{1, \dots, N\}$  se tiene que  $\mathbf{u}_{n-1}^{hk}$  y  $e_{n-1}^{hk}$  son conocidos. La función de remodelación ósea discreta  $e_n^{hk}$  se calcula explícitamente como:

$$e_n^{hk} = e_{n-1}^{hk} + ka(e_{n-1}^{hk}) + k\mathcal{A}(e_{n-1}^{hk}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_{n-1}^{hk}).$$

Llevando esto a la ecuación (7), el campo de desplazamientos discreto  $\mathbf{u}_n^{hk}$  se obtiene resolviendo la siguiente ecuación variacional (problema de elasticidad lineal):

$$\mathbf{u}_n^{hk} \in V^h \quad c(e_n^{hk}; \mathbf{u}_n^{hk}, \mathbf{v}^h) = L(e_n^{hk}; \mathbf{v}^h), \quad \forall \mathbf{v}^h \in V^h.$$

De nuevo, esto nos lleva a un sistema lineal que resolvemos por el método de Cholesky.

El esquema numérico fue implementado en lenguaje MATLAB en un PC con 3.2Ghz. Una ejecución de un ejemplo 1D necesita alrededor de 3.5 segundos de tiempo CPU y una ejecución de un ejemplo 2D alrededor de 10 minutos.

#### 3.2. Resultados numéricos en un problema bidimensional

Como ejemplo bidimensional, consideramos el dominio  $\Omega = (0, 1,2) \times (0, 6)$  que está siendo sometido a una fuerza de compresión creciente de forma lineal actuando en la frontera horizontal superior mientras que la frontera horizontal inferior permanece fija. No hay fuerzas de volumen en  $\Omega$  (véase la Figura 2).

Se han utilizado los siguientes datos en las simulaciones numéricas de este ejemplo:

$$\begin{aligned} T &= 80 \text{ días}, \quad k = 0,01, \quad \mathcal{C}(e) = \frac{1}{\xi_0 + e}(\mathcal{C}^0 + \mathcal{C}^1 e), \quad a(e) = a_0 + a_1 e + a_2 e^2, \\ \mathcal{A}(e) &= \mathcal{A}^0 + \mathcal{A}^1 e, \quad \xi_0 = 0,892, \quad \gamma = 1740 \text{ Kg/m}^3, \quad \mathbf{f} = \mathbf{0} \text{ N/m}^3, \\ a_0 &= -1296 \times 10^{-4} (100 \text{ días})^{-1}, \quad a_1 = -1296 \times 10^{-2} (100 \text{ días})^{-1}, \\ a_2 &= 216 \times 10^{-2} (100 \text{ días})^{-1}, \end{aligned}$$

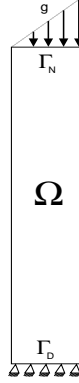


Figura 2: Descripción física.

donde los tensores de cuarto orden  $\mathcal{C}^0 = (C_{ijkl}^0)_{i,j,k,l=1}^2$  y  $\mathcal{C}^1 = (C_{ijkl}^1)_{i,j,k,l=1}^2$  y el tensor de segundo orden  $\mathcal{A}^0 = (A_{ij}^0)_{i,j=1}^2$  y  $\mathcal{A}^1 = (A_{ij}^1)_{i,j=1}^2$  tienen las siguientes componentes:

$$\begin{aligned} C_{1111}^0 &= 25,69 (GPa)^{-1}, & C_{2211}^0 &= 11,67 (GPa)^{-1}, & C_{2222}^0 &= 25,69 (GPa)^{-1}, \\ C_{1211}^0 &= C_{1222}^0 = 0 (GPa)^{-1}, & C_{1212}^0 &= 7 (GPa)^{-1}, & C_{1111}^1 &= 252,08 (GPa)^{-1}, \\ C_{2211}^1 &= 114,58 (GPa)^{-1}, & C_{2222}^1 &= 252,08 (GPa)^{-1}, \\ C_{1211}^0 &= C_{1222}^0 = 0 (GPa)^{-1}, & C_{1212}^1 &= 68,75 (GPa)^{-1}, \\ A_{11}^0 &= 216 (100días)^{-1}, & A_{22}^0 &= -216 (100días)^{-1}, & A_{12}^0 &= A_{21}^0 = 0, \\ A_{11}^1 &= 216 (100días)^{-1}, & A_{22}^1 &= 216 (100días)^{-1}, & A_{12}^0 &= A_{21}^0 = 0. \end{aligned}$$

La fuerza aplicada tiene la forma:

$$\mathbf{g}(x, y, t) = -28 (0, x) MPa \quad \text{si } y = 6$$

y tomamos como función de remodelación ósea inicial  $e_0 = 0$ .

Utilizando como parámetro de discretización temporal  $k = 0,01$ , en las Figuras 3 y 4 se muestran los desplazamientos (multiplicados por 20) y la función de remodelación ósea en el instante final. Como podemos observar, el desplazamiento decrece a causa de la remodelación ósea. Además, esta función toma valores positivos donde el cuerpo está sometido a una compresión y valores negativos donde se produce una extensión.

## Agradecimientos

Este trabajo fue parcialmente financiado por el Ministerio de Educación y Ciencia (Proyecto MTM2006-13981).

## Referencias

- [1] P.G. Ciarlet, *The Finite Element Method for Elliptic Problems*, en Handbook of Numerical Analysis, Volumen II, Parte 1, Eds. P.G. Ciarlet and J.L. Lions, North Holland (1991), 17–352.
- [2] S.C. Cowin y D.H. Hegedus, *Bone remodeling I: theory of adaptive elasticity*, J. Elasticity 6 (3) (1976) 313–326.
- [3] S.C. Cowin y R.R. Nachlinger, *Bone remodeling III: uniqueness and stability in adaptive elasticity theory*, J. Elasticity 8 (3) (1978) 285–295.



Figura 3: Configuración inicial y desplazamientos (x20) en el instante inicial (izquierda) y  $t=80$  (derecha).

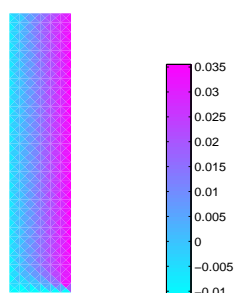


Figura 4: Función de remodelación ósea en el instante final ( $t=80$ ).

- [4] M.A. Fernández, *Resolución numérica de modelos de elasticidad adaptativa en formación de huesos*, Tesina de licenciatura, Universidad de Santiago, 1999.
- [5] I.N. Figueiredo, *Approximation of bone remodeling models*, J. Math. Pures Appl. 84 (2005) 1794–1812.
- [6] D.H. Hegedus y S.C. Cowin, *Bone remodeling II: small strain adaptive elasticity*, J. Elasticity 6(4) (1976) 337–352.
- [7] J. Monnier y L. Trabucho, *Existence and uniqueness of a solution to an adaptive elasticity model*, Math. Mech. Solids 3 (1998) 217–228.