XX Congreso de Ecuaciones Diferenciales y Aplicaciones
X Congreso de Matemática Aplicada
Sevilla, 24-28 septiembre 2007
(pp. 1–8)

Primera generalización de la Extrapolación Recíproca

S. Amat[1], F. Manzano[1]

[1] *Departamento de Matemática Aplicada y Estadística*
Universidad Politécnica de Cartagena, Paseo Alfonso XIII, 52 Cartagena (Murcia). E-mails:
`sergio.amat@upct.es, fmg1@alu.upct.es.`

Palabras clave: Extrapolación, Estabilidad, ODE's

Resumen

Partiremos de una alternativa no lineal a la extrapolación clásica; la extrapolación recíproca. Revisaremos la primera generalización del método de Richardson y realizaremos una generalización de la extrapolación recíproca. Por último, veremos como esta nueva generalización tiene un mejor comportamiento en problemas donde la región de estabilidad es demasiado pequeña.

1. Motivación de las extrapolaciones

Dado un problema numérico, además de aproximarnos con precisión a una cantidad determinada, (una integral, una EDO), perseguimos otros objetivos, como la velocidad de convergencia, el menor número de operaciones y la estabilidad.

Para lograr estos objetivos se usan muchas estrategias, aumentando en muchos casos el coste computacional. En ocasiones, para obtener buenas aproximaciones se suele necesitar discretizaciones muy finas, que, además de generar errores de redondeo, hace que los métodos sean demasiado lentos.

En general, se trata de obtener métodos de orden más alto. Una de las estrategias más conocidas para aumentar el orden de un método es la extrapolación, que además de ser una buena herramienta para resolver EDO's, desde el punto de vista numérico, tiene un buen comportamiento al abordar problemas rígidos.

También podemos considerar extrapolaciones no lineales, en concreto la extrapolación racional y otra extrapolación no lineal, que llamaremos extrapolación recíproca. La gran ventaja que poseen algunas extrapolaciones no lineales es que en los problemas rígidos, donde hay problemas de estabilidad, éstas tienen una mayor región de convergencia.

En [1] se estudia con detalle la extrapolación recíproca. Se realiza un estudio comparativo de la extrapolación polinómica, racional y recíproca. Las dos extrapolaciones no lineales se comportan mejor que la clásica a medida que aumenta la rigidez del problema. Además, la extrapolación recíproca tiene una región de estabilidad mayor que la racional y la polinómica.

Consideremos un problema clásico de valores iniciales

$$y' = f(x, y)$$
$$y(x_0) = y_0$$

Aproximaremos un valor a_0 mediante un método numérico, y obtendremos una aproximación que dependerá de la escala utilizada $F(h)$, donde

$$\lim_{h \to 0} F(h) = a_0 \tag{1}$$

El error de los métodos clásicos puede expresarse como un desarrollo de Taylor

$$F(h) = a_0 + a_1 h^{p_1} + a_2 h^{p_2} + ... \tag{2}$$

Los métodos de extrapolación eliminan términos $a_i h^{p_i}$ mediante combinaciones lineales de $F(h)$ para distintos h. Obtendremos entonces una nueva extrapolación $F(h, \tilde{h})$ donde el error será

$$F(h, \tilde{h}) = a_0 + \tilde{a}_1 h^{p_j} + ... \tag{3}$$

con $p_j > p_1$.

El problema aparece cuando el error en algunos métodos no puede expresarse como un desarrollo de Taylor. Esto origina la primera generalización de Richardson.

2. Primera Generalización de la extrapolación de Richardson.

Recordemos que en el proceso de extrapolación de Richardson partíamos de un método $F(h)$ que satisfacía

$$F(h) = A + \sum_{i=1}^{s} a_i h^{p_i} + O(h^{s+1}) \tag{4}$$

con $p_i < p_{i+1}$

siendo A la cantidad a aproximar. Considerábamos nuevas discretizaciones $A_m = F(h_m)$ con $h_m = q^{-m}h$, $m = 0, 1, 2...$ que mediante ciertas manipulaciones algebraicas aumentaban el orden del método original.

La primera generalización de la extrapolación de Richardson consiste en que podemos generalizar las potencias de h tomadas. Dicho de forma más precisa, en la primera generalización de Richardson podemos considerar métodos que no tienen porqué expresarse como potencias de h, sino como funciones decrecientes de h.

Consideremos $F(h)$ con una expansión de la forma:

$$F(h) = A + \sum_{k=1}^{s} \alpha_k \phi_k(h) + O(\phi_{s+1}(h)) \tag{5}$$

con A y α_i escalares independientes de h. y $\phi_{k+1}(h) = o\left(\phi_k(h)\right)$ cuando $h \to 0$, para $k = 1, 2, ...$

Evidentemente si consideramos el caso particular en el que $\phi_i(h) = h^{p_i}$ con $p_i < p_{i+1}$ tendríamos el proceso de extrapolación de Richarson habitual.

3. Primera Generalización de la extrapolación recíproca.

Si consideramos en la expresión (5) para el caso particular $s = 1$ tenemos

$$F(h) = A + \alpha_1\phi_1(h) + O(\phi_2(h)) \tag{6}$$

con $\phi_2(h) = o(\phi_1(h))$
Dividimos la expresión (6) por la cantidad A

$$\frac{F(h)}{A} = 1 + \frac{\alpha_1\phi_1(h) + O(\phi_2(h))}{A} \tag{7}$$

y operando obtenemos

$$\frac{A}{F(h)} = 1 - \frac{\alpha_1}{A}\phi_1(h) + \frac{\left(\frac{\alpha_1}{A}\right)^2\phi_1^2(h) + \frac{\alpha_1}{A}\phi_1(h)O(\phi_2(h)) - O(\phi_2(h))}{1 + \frac{\alpha_1}{A}\phi_1(h) + O(\phi_2(h))} \tag{8}$$

Veamos que $f(h) = \dfrac{\left(\frac{\alpha_1}{A}\right)^2\phi_1^2(h) + \frac{\alpha_1}{A}\phi_1(h)O(\phi_2(h)) - O(\phi_2(h))}{1 + \frac{\alpha_1}{A}\phi_1(h) + O(\phi_2(h))}$ es una $O(\phi_2(h))$.

$$\frac{f(h)}{\phi_2(h)} = \frac{\left(\frac{\alpha_1}{A}\right)^2\phi_1^2(h) + \frac{\alpha_1}{A}\phi_1(h)O(\phi_2(h)) - O(\phi_2(h))}{\phi_2(h) + \frac{\alpha_1}{A}\phi_1(h)\phi_2(h) + O(\phi_2(h))\phi_2(h)} \tag{9}$$

Dividimos por la "menor potencia de h"$(\phi_2(h))$ y tenemos

$$\frac{f(h)}{\phi_2(h)} = \frac{\left(\frac{\alpha_1}{A}\right)^2\dfrac{\phi_1^2(h)}{\phi_2(h)} + \frac{\alpha_1}{A}\dfrac{\phi_1(h)O(\phi_2(h))}{\phi_2(h)} - \dfrac{O(\phi_2(h))}{\phi_2(h)}}{1 + \frac{\alpha_1}{A}\phi_1(h) + O(\phi_2(h))}$$

Como

$$1 + \tfrac{\alpha_1}{A}\phi_1(h) + O(\phi_2(h)) \to 1$$

Y los sumandos del numerador

$$\frac{\phi_1(h)O(\phi_2(h))}{\phi_2(h)} = \phi_1(h)\frac{O(\phi_2(h))}{\phi_2(h)} \to \phi_1(h)cte$$

$$\frac{O(\phi_2(h))}{\phi_2(h)} \to cte$$

El problema lo presenta $\dfrac{\phi_1^2(h)}{\phi_2(h)}$ que para que $f(h)$ sea una $O(\phi_2(h))$, entonces debe converger a cero o a una constante. O lo que es lo mismo $\phi_1^2(h) = O(\phi_2(h))$. Esto nos aparece como una nueva condición para desarrollar la primera generalización recíproca. Notar que esa condición no es descabellada ya que se da en la mayoria de los métodos numéricos. Tambien podemos considerar que se de en los métodos que consideremos.

Supongamos que se cumple esa condición extra y $f(h) = O(\phi_2(h))$. Entonces tenemos que

$$\frac{A}{F(h)} = 1 - \frac{\alpha_1}{A}\phi_1(h) + O(\phi_2(h))$$

y así

$$\frac{1}{F(h)} = \frac{1}{A} - \frac{\alpha_1}{A^2}\phi_1(h) + O(\phi_2(h)) \tag{10}$$

De este modo consideramos en la expresión (5) $\tilde{\alpha}_i = -\dfrac{\alpha_i}{A^2}$ para extrapolar $\dfrac{1}{A}$ por $\dfrac{1}{F(h)}$.

La primera generalización de la extrapolación recíproca consiste en generalizar la exprexión de $\dfrac{1}{F(h)}$. Podemos condiderar que $\dfrac{1}{F(h)}$ tiene una expansión de la forma:

$$\frac{1}{F(h)} = \frac{1}{A} + \sum_{k=1}^{s} \tilde{\alpha}_k \phi_k(h) + O(\phi_{s+1}(h)) \tag{11}$$

donde $y \longrightarrow 0$, $\phi_{k+1}(h) = o(\phi_k(h))$ y $\phi_k^2(h) = O(\phi_{k+1}(h))$. Con A y $\tilde{\alpha}_k$ escalares independientes de h.

Definición 1 *Sea $\dfrac{1}{A(h)}$ como el descrito en (11) Sea $\{h_n\}_n \subset (0, b]$ una sucesión decreciente con $b > 0$ Se define la aproximación A_n^j a $\dfrac{1}{A(h)}$ a través del sistema lineal*

$$\frac{1}{A(h_l)} = A_n^j + \sum_{k=1}^{n} \tilde{\beta}_k \phi_k(h_l), \qquad j \le l \le j+n \tag{12}$$

donde $\tilde{\beta}_1, ..., \tilde{\beta}_n$ son desconocidos. Llamaremos a este proceso que genera A_n^j la primera generalización del proceso de extrapolación recíproca.

Notar que tenemos n+1 ecuaciones con n+1 incógnitas $(\tilde{\beta}_1 ... \tilde{\beta}_n A_n^j)$

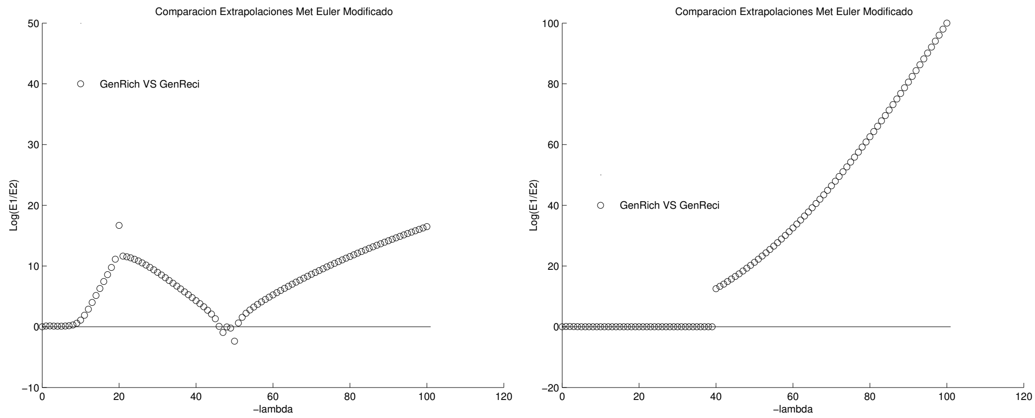

Figura 1: Error de la Gen. Richardson y la Gen. recíproca en el Método de Euler Modificado. Izquieda: h=0.1 .Derecha: h=0.01

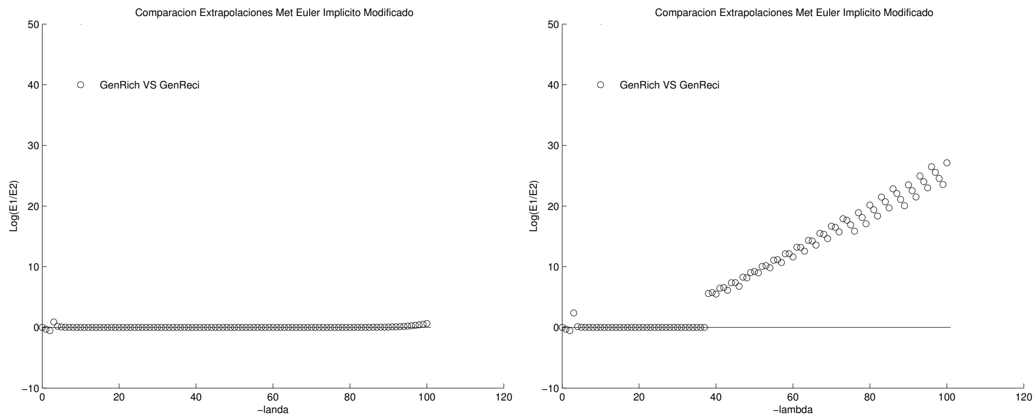

Figura 2: Error de la Gen. Richardson y la Gen. recíproca en el Método de Implicíto Euler Modificado. Izquierda h=0.1. Derecha h=0.01

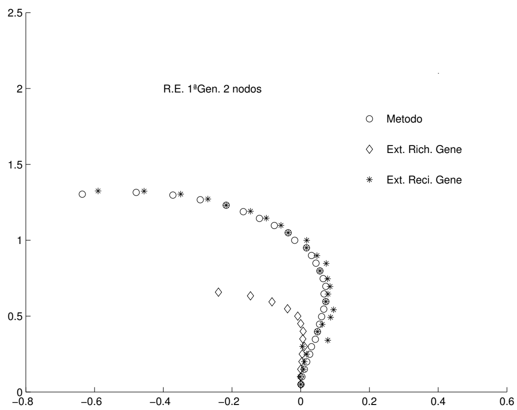

Figura 3: Región de estabilidad del Método de Euler Modificado

4. Ejemplos numéricos, estabilidad y conclusiones

Vamos a resolver el problema Test

$$y' = \lambda y$$
$$y(0) = 1$$

cuya solucion conocemos. Por sencillez, analogía y comparación a los métodos numéricos clásicos vamos a considerar la siguiente modificación del método de Euler.

Como la solucion al problema Test es $A = y(x) = \exp(\lambda x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda x)^n}{n!}$

planteamos la aproximación

$$F(h) = 1 + \lambda h + \frac{\lambda^2}{2} h \sin(h) + \frac{\lambda^2 h^2}{2!} \tag{13}$$

Calculamos el error local

$$F(h) - A = \frac{\lambda^2}{2} h \sin(h) - \frac{\lambda^3 h^3}{3!} - ... \tag{14}$$

Así

$$F(h) = A + [F(h) - A] = A + \frac{\lambda^2}{2} h \sin(h) + O(h^3) \tag{15}$$

que satisface (5) con $s = 1$. Tenemos entonces

$$F(h) = A + \alpha_1 \phi_1(h) + O(\phi_2(h)) \tag{16}$$

donde $\phi_1(h) = h \sin(h)$ y $O(\phi_2(h)) = O(h^3)$

Que cumple $\phi_2(h) = o(\phi_1(h))$

$$\frac{h^3}{\frac{\lambda^2}{2} h \sin(h)} = \frac{2h^3}{\lambda^2 h \sin(h)} = \frac{2h^2}{\lambda^2 \sin(h)} =^{Lh} \frac{4h}{\lambda^2 \cos(h)} \to 0 \text{ si } h \to 0$$

además de la condición adicional exigida $\phi_1^2(h) = O(\phi_2(h))$ a la extrapolación recíproca

ya que

$$\frac{h^2 \sin^2(h)}{h^3} = \frac{\sin^2(h)}{h} =^{L'H} \frac{2\sin(h)\cos(h)}{1} \to 0$$

De modo que tambien podemos considerar

$$\frac{1}{F(h)} = \frac{1}{A} + \tilde{\alpha}_1 \phi_1(h) + O(\phi_2(h)) \tag{17}$$

y resolver el sistema para diferentes valores de h.

Usaremos distintos valores de landa y distintas discretizaciones. Realizaremos las extrapolaciones tomando las discretizaciones de tamaño $h, 2h$.

Mostraremos los errores con el método de Euler, con el nuevo método y realizaremos las extrapolaciones de la primera generalización de Richardson y de la primera generalización recíproca. Ambas extrapolaciones aplicadas al nuevo método de Euler.

En el caso la generalización recíproca cuando los datos sean de la forma $1 > \tilde{F}_i > 0$, realizaremos la translación $1 + \tilde{F}_i$ para asegurarnos siempre la proximidad de los datos. Así $1 + \tilde{F}_i \simeq 1 + A \Rightarrow \dfrac{1}{1+\tilde{F}_i} \simeq \dfrac{1}{1+A}$, para al final corregir la traslación.

Datos de entrada	**Met. Euler**	**Met. Modi**	**1^a GenRich**	**1^aGenReci**
$\lambda = -1, h = 0{,}02$	$3{,}70e-3$	$3{,}79e-3$	$2{,}43e-4$	$2{,}20e-4$
$\lambda = -1, h = 0{,}01$	$1{,}84e-3$	$1{,}86e-3$	$5{,}95e-5$	$5{,}41e-5$
$\lambda = -10, h = 0{,}1$	$4{,}53e-5$	$9{,}91e-1$	$2{,}38e+2$	$5{,}02e-3$
$\lambda = -10, h = 0{,}01$	$1{,}88e-5$	$3{,}47e-5$	$4{,}86e-5$	$4{,}86e-5$
$\lambda = -40, h = 0{,}01$	$4{,}24e-18$	$1{,}20e-12$	$1{,}63e-4$	$1{,}63e-4$
$\lambda = -80, h = 0{,}01$	$1{,}80e-35$	$2{,}67e-8$	$4{,}09e+14$	$5{,}00e-1$
$\lambda = -100, h = 0{,}01$	$3{,}72e-44$	$9{,}99e-1$	$7{,}16e+23$	$4{,}66e-4$
$\lambda = -100, h = 0{,}001$	$3{,}70e-44$	$1{,}09e-41$	$1{,}37e-38$	$3{,}72e-44$

Observamos que ambas generalizaciones cuando convergen son del mismo orden pero la generalización recíproca tiene una mayor región de estabilidad cuando el problema empieza a ser rígido.

En la Fig. 1 y en la Fig. 2 podemos ver mejor el comportamiento de estas extrapolaciones en el Método modificado de Euler introducido al comienzo de esta sección y tambien en un método modificado de Euler Implícito construido de forma análoga.

Hemos fijado un h y movemos λ para aumentar la rigidez del problema ver el comportamiento numérico de las extrapolaciones. Para ello consideraremos el cociente $\log(E1/E2)$, siendo $E2$ el error de la generalización recíproca y $E1$ el error cometido con la generalización polinómica. La conclusión es que cuando el problema comienza a ser rígido, la generalización recíproca tiene un mejor comportamiento.

Por último, para estudiar la estabilidad, consideramos la ecuación lineal

$$y\prime = \lambda y \tag{18}$$

Cuando usamos cualquier método Runge-Kutta, obtenemos la siguiente expresión

$$y_n = R(h\lambda)y_0 = R(z)y_0 \tag{19}$$

donde $R(z)$ nos dará la región de estabilidad.

$$R.E = \{z\epsilon C : |R(z)| \leq 1\}\,.$$

Como podemos observar en la Fig 3. la región de estabilidad es mayor cuando aplicamos la extrapolación recíproca y que la del propio método, tal y como ocurría en las extrapolaciones no generalizadas.

Agradecimientos

La investigación ha sido en parte subvencionada por MTM2004-07114 y 00675/PI/04.

Referencias

[1] S. Amat, S. Busquier, V. Candela, *Reciprocal polynomial extrapolation.*, J. Comput. Math. 22 (2004), no. 1, 1–10.

[2] R. Bulirsch, J. Stoer, *Introduction to Numerical Analysis*, Springer, 2002.

[3] A. Sidi, *Practical Extrapolation Methods: Theory and Applications.*, No. 10 in Cambridge Monographs on Applied and Computational Mathematics. Cambridge University Press, 2003.