

Atractores en dominios tipo dumbbell

JOSÉ M. ARRIETA¹, ALEXANDRE N. CARVALHO²,
GERMÁN LOZADA-CRUZ³

¹ *Dpto. de Matemática Aplicada, Universidad Complutense de Madrid, 28040, Madrid, España. E-mail: arrieta@mat.ucm.es.*

² *Dpto. de Matemática, Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo-Campus de São Carlos, Caixa Postal 668, 13560-970 São Carlos, SP, Brasil. E-mail: andcarva@icmc.usp.br.*

³ *Dpto. de Matemática, IBILCE, UNESP-Universidade Estadual Paulista, 15054-000 São José do Rio Preto, SP, Brasil. E-mail: german@ibilce.unesp.br*

Palabras clave: reacción-difusión; atractores; semicontinuidad superior; perturbación de dominio; dominios dumbbell

Resumen

En este trabajo, analizamos el comportamiento de la dinámica asintótica de una ecuación de reacción-difusión con condiciones de contorno Neumann homogéneas cuando el dominio se perturba de una forma singular, como en el caso de los dominios de tipo “dumbbell”. Proporcionaremos un marco funcional adecuado para tratar este problema y probaremos que los atractores son semicontínuos superiormente.

1. Introducción

Consideremos una ecuación de reacción y difusión del tipo

$$\begin{cases} u_t - \Delta u + u = f(u) & x \in \Omega_\epsilon \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0, & x \in \partial\Omega_\epsilon \end{cases} \quad (1)$$

donde $\Omega_\epsilon \subset \mathbb{R}^N$, $N \geq 2$, es un dominio de tipo dumbbell, que consiste en dos dominios disjuntos fijos, que denotaremos por Ω , unidos por un canal fino, R_ϵ , el cual se contrae a un segmento de recta cuando el parámetro ϵ tiende a cero, ver Figura 1. Ver la referencia [2] Sección 2, para una completa y rigurosa definición del dominio dumbbell que estamos considerando. Los canales R_ϵ que estamos considerando son bien generales.

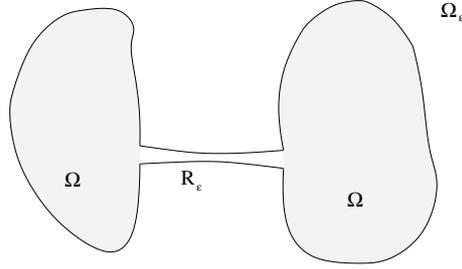


Figura 1: Dominio Dumbbell.

Pasando al límite cuando $\epsilon \rightarrow 0$, el “dominio límite” consistirá del dominio Ω y el segmento de recta R_0 , que sin pérdida de generalidad podemos suponer que $R_0 = \{(x, 0, \dots, 0) : 0 < x < 1\}$, ver la Figura 2.

La ecuación límite viene dada por

$$\begin{cases} w_t - \Delta w + w = f(w), & x \in \Omega, t > 0 \\ \frac{\partial w}{\partial n} = 0, & x \in \partial\Omega \\ v_t - \frac{1}{g}(gv_x)_x + v = f(v), & x \in (0, 1) \\ v(0) = w(P_0), v(1) = w(P_1) \end{cases} \quad (2)$$

donde w es una función definida en Ω , v está definida en el segmento R_0 y P_0, P_1 son los puntos de $\partial\Omega$ donde se junta el segmento R_0 . La función g esta relacionada con la geometría del canal R_ϵ , mas exáctamente, en la forma como el canal R_ϵ se contrae en el segmento de recta R_0 . Por ejemplo, en \mathbb{R}^2 , si el canal R_ϵ viene dado por $R_\epsilon = \{(x, y), 0 < x < 1, 0 < y < \epsilon g(x)\}$, entonces la función g que aparece en la ecuación límite (2) es la que aparece en la definición de R_ϵ . En general, si $R_\epsilon = \{(x_1, \epsilon x') : (x_1, x') \in R_1\}$, entonces, $g(s) = |\Gamma_s|_{N-1}$ donde $\Gamma_s = \{x' \in \mathbb{R}^{N-1}; (s, x') \in R_1\}$, y $|\cdot|_{N-1}$ es la medida de Lebesgue en \mathbb{R}^{N-1} , ver [2] para los detalles.

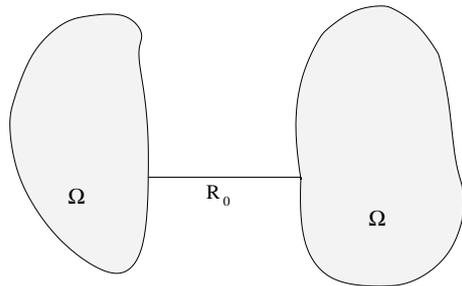


Figura 2: “Dominio límite”

Sobre la no linealidad f , asumiremos que es suficientemente regular, globalmente Lipschitz (i.e. $\exists L > 0, |f(u) - f(v)| \leq L|u - v|, \forall u, v \in \mathbb{R}$) y satisface la condición de disipatividad

$$\limsup_{|s| \rightarrow +\infty} \frac{f(s)}{s} \leq 0.$$

Bajo estas condiciones, se puede probar que el problema (1) tiene para cada $\epsilon > 0$ un atractor $\mathcal{A}_\epsilon \subset H^1(\Omega_\epsilon)$ y que el problema límite (2) tiene un atractor $\mathcal{A}_0 \subset H^1(\Omega) \oplus H^1(R_0)$.

En este trabajo analizaremos la relación entre \mathcal{A}_ϵ y \mathcal{A}_0 cuando $\epsilon \rightarrow 0$. Obviamente, los conjuntos \mathcal{A}_ϵ y \mathcal{A}_0 están en distintos espacios y por lo tanto será necesario en primer lugar aclarar el significado de “cercanía” o “convergencia” para elementos de distintos espacios. Una vez aclarado este concepto, mostraremos la semicontinuidad superior de los atractores.

En la sección 2 nos detendremos en plantear, de forma adecuada, el problema, definir los espacios en los que vamos a trabajar. Luego, en la sección 3, recogeremos los resultados de [4] sobre el comportamiento de los operadores lineales, resolventes y los puntos de equilibrio bajo esta perturbación. En la sección 4 probaremos tomando como punto de partida los resultados obtenidos para el operador resolvente, la continuidad de los semigrupos lineales. En la sección 5, utilizaremos la fórmula de variación de las constantes para probar la convergencia de los semigrupos no lineales y con esto probaremos la semicontinuidad superior de los atractores.

2. Planteamiento del problema

Para comparar dos funciones u_ϵ y $u_0 = (w, v)$ definidas en Ω_ϵ y $\Omega \cup R_0$ respectivamente, extendemos las funciones de $\Omega \cup R_0$ a todo Ω_ϵ con el operador de extensión,

$$E_\epsilon(w, v)(x) = \begin{cases} w(x), & x \in \Omega, \\ v(s), & x \in R_\epsilon \end{cases}$$

y fijamos una norma en el espacio de funciones definidas en Ω_ϵ , donde compararemos u_ϵ y $E_\epsilon(u_0)$. La elección de esta norma es fundamental y tiene que ser realizada de forma adecuada para que el comportamiento de las funciones en el canal R_ϵ sea relevante. Por esto, resulta natural considerar los siguientes espacios de Banach con sus respectivas normas

$$U_\epsilon^p = L^p(\Omega_\epsilon), \|u\|_{U_\epsilon^p} = \|u\|_{L^p(\Omega)} + \epsilon^{\frac{-N+1}{p}} \|u\|_{L^p(R_\epsilon)}$$

$$U_0^p = L^p(\Omega) \oplus L_g^p(0, 1), L_g^p(0, 1) = L^p(0, 1), \|u\|_{L_g^p(0, 1)}^p = \left(\int_0^1 g(s) |u(s)|^p ds \right)^{\frac{1}{p}}.$$

De esta forma, la norma de U_ϵ^p amplifica el comportamiento de una función en el canal R_ϵ . Facilmente podemos ver que se verifica $\|E_\epsilon(w, v)\|_{U_\epsilon^p} = \|(w, v)\|_{U_0^p}$. En relación a la convergencia de funciones de U_ϵ^p a funciones de U_0^p , consideramos la siguiente definición,

Definición 2.1 *Decimos que la sucesión $\{u_\epsilon\}_{\epsilon \in (0,1]}$, $u_\epsilon \in U_\epsilon^p$, E_ϵ -converge a $u_0 \in U_0^p$ si se tiene $\|u_\epsilon - E_\epsilon u_0\|_{U_\epsilon^p} \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} 0$.*

En relación a los operadores lineales, sea $0 < \epsilon \leq 1$ y consideremos el operador lineal $A_\epsilon : \mathcal{D}(A_\epsilon) \subset U_\epsilon^p \rightarrow U_\epsilon^p$, $1 \leq p < \infty$ definido por

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(A_\epsilon) &= \{u \in W^{2,p}(\Omega_\epsilon) : \partial u / \partial n = 0 \text{ in } \partial\Omega_\epsilon\} \\ A_\epsilon u &= -\Delta u + u, \quad u \in \mathcal{D}(A_\epsilon) \end{aligned} \tag{3}$$

Para $p > \frac{N}{2}$, definamos el operador $A_0 : \mathcal{D}(A_0) \subset U_0^p \rightarrow U_0^p$ por

$$D(A_0) = \left\{ (w, v) \in U_0^p : w \in D(\Delta_N^\Omega), (gv')' \in L^p(0, 1), v(0) = w(P_0), v(1) = w(P_1) \right\} \quad (4)$$

$$A_0(w, v) = \left(-\Delta w + w, -\frac{1}{g}(gv')' + v \right), \quad (w, v) \in D(\bar{A}_0), \quad (5)$$

donde Δ_N^Ω es el operador de Laplace con condiciones de Neumann homogéneas en $L^p(\Omega)$ con $D(\Delta_N^\Omega) = \{u \in W^{2,p}(\Omega) : \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \text{ in } \partial\Omega\}$.

Para $p > \frac{N}{2}$ tenemos la inmersión continua $D(\Delta_N^\Omega) \hookrightarrow C(\bar{\Omega})$. Esto garantiza que las funciones de $D(\Delta_N^\Omega)$ tienen traza en P_0 and P_1 , y por tanto el operador está bien definido.

El operador A_ϵ genera un semigrupo analítico $\{e^{A_\epsilon t} : t \geq 0\}$ en U_ϵ^p mientras (de los resultados de [3]) A_0 genera un *semigrupo singular* en U_0^p que lo denotaremos por $\{e^{A_0 t} : t \geq 0\}$.

Las ecuaciones (1) y (2) las podemos escribir de forma abstracta

$$(P_\epsilon) \quad \begin{cases} \dot{u}_\epsilon + A_\epsilon u_\epsilon = f_\epsilon(u_\epsilon) \\ u_\epsilon(0) = u_0^\epsilon \in U_\epsilon^p \end{cases} \quad (P_0) \quad \begin{cases} \dot{u} + A_0 u = f(u) \\ u(0) = u_0 \in U_0^p \end{cases} \quad (6)$$

Asociados a estos dos problemas tenemos los semigrupos no lineales $\{T_\epsilon(t) : t \geq 0\}$, $\{T_0(t) : t \geq 0\}$. Utilizando ahora las propiedades de disipación y compacidad de los semigrupos T_ϵ y T_0 , se prueba fácilmente que estos tienen atractores globales compactos $\mathcal{A}_\epsilon \subset U_\epsilon^p$ y $\mathcal{A}_0 \subset U_0^p$ respectivamente, ver [6] para una referencia general sobre atractores y [3] para este problema en particular. Utilizando las propiedades de regularidad del semigrupo se puede obtener que los atractores tienen estimaciones en la norma $C(\bar{\Omega}_\epsilon)$ uniformemente en ϵ .

Probaremos la semicontinuidad de los atractores, es decir,

Definición 2.2 Sea $\mathcal{A}_\epsilon \subset U_\epsilon^p$, $\epsilon \in [0, 1]$ y $\mathcal{A}_0 \subset U_0^p$. Denotemos por $\text{dist}(\cdot, \cdot)$ la métrica inducida por la norma en U_ϵ^p , $\epsilon \in [0, 1]$, es decir $\text{dist}(u_\epsilon, v_\epsilon) = \|u_\epsilon - v_\epsilon\|_{U_\epsilon^p}$. Decimos que la familia de conjuntos $\{\mathcal{A}_\epsilon\}_{\epsilon \in [0,1]}$ es E_ϵ -semitcontinua superiormente en $\epsilon = 0$ si $\sup_{u_\epsilon \in \mathcal{A}_\epsilon} \text{dist}(u_\epsilon, E_\epsilon \mathcal{A}_0) \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} 0$.

3. Algunas resultados sobre los operadores resolvente

La semicontinuidad superior de los atractores se obtendrá de un análisis exhaustivo de la parte lineal del operador.

Para $\epsilon \in (0, 1]$ fijo, el operador A_ϵ es sectorial y verifica la siguiente desigualdad

$$\|(\lambda + A_\epsilon)^{-1}\|_{\mathcal{L}(L^p(\Omega_\epsilon))} \leq \frac{C}{|\lambda|}, \quad \text{para } \lambda \in \Sigma_\theta, \quad (7)$$

donde $\Sigma_\theta = \{\lambda \in \mathbb{C} : \theta < |\arg(\lambda)| \leq \pi\}$, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ y C es una constante que no depende de ϵ , aunque sí depende de p y explota cuando $p \rightarrow \infty$.

También vale el siguiente resultado

Lema 3.1 Para todo $\lambda \in \Sigma_\theta$ tenemos que

$$\|(\lambda + A_\epsilon)^{-1}\|_{\mathcal{L}(U_\epsilon^p)} \leq \|(\lambda + A_\epsilon)^{-1}\|_{\mathcal{L}(L^p(\Omega_\epsilon), U_\epsilon^p)} \leq C \frac{\epsilon^{\frac{-N+1}{p}}}{|\lambda|}, \quad \text{para } \lambda \in \Sigma_\theta. \quad (8)$$

Para el problema limite, de la Proposición 2.1 in [3], tenemos el siguiente resultado.

Proposición 3.2 El operador A_0 definido por (4) tiene las siguientes propiedades

- i) A_0 es densamente definido, cerrado y tiene resolvente compacto
- ii) A_0 es tal que, $\rho(A_0) \supset \Sigma_\theta$ para todo $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ donde $\Sigma_\theta = \{\lambda \in \mathbb{C} : \theta < |\arg(\lambda)| \leq \pi\}$, y para $p \geq q > \frac{N}{2}$ se tiene

$$\|(\lambda + A_0)^{-1}\|_{\mathcal{L}(U_0^q, U_0^p)} \leq \frac{C}{|\lambda|^\alpha} \quad (9)$$

con $0 < \alpha < 1 - \frac{N}{2q} - \frac{1}{2}(\frac{1}{q} - \frac{1}{p}) < 1$.

También se tiene,

$$\|(\lambda + A_0)^{-1}\|_{\mathcal{L}(U_0^\infty)} \leq \frac{C}{|\lambda|}, \quad \|(\lambda + A_0)^{-1}\|_{\mathcal{L}(U_0^\infty, U_0^p)} \leq \frac{C}{|\lambda|}. \quad (10)$$

Para poder comparar operadores definidos en U_ϵ^p y en U_0^p vamos a necesitar también el operador $M_\epsilon : U_\epsilon^p \rightarrow U_0^p$ definido por

$$(M\psi_\epsilon)(z) = \begin{cases} \psi_\epsilon(z), & z \in \Omega \\ \frac{1}{|\Gamma_\epsilon^z|} \int_{\Gamma_\epsilon^z} \psi(z, y) dy, & z \in (0, 1), \end{cases} \quad (11)$$

donde $\Gamma_\epsilon^z = \{y : (z, y) \in R_\epsilon\}$. Podemos ver facilmente, usando el Teorema de Fubini-Tonelli y la desigualdad de Hölder que M_ϵ es un operador bien definido y limitado con $\|M_\epsilon\|_{\mathcal{L}(U_\epsilon^p, U_0^p)} = 1$. También se tiene que $M_\epsilon \circ E_\epsilon = I$, el operador identidad en U_0^p .

Por tanto, podemos probar el siguiente resultado sobre la convergencia de los operadores resolventes,

Teorema 3.3 Para $p > N$, existe una constante C independiente de ϵ tal que, para todo $\lambda \in \Sigma_\theta$,

$$\|(\lambda + A_\epsilon)^{-1} - E_\epsilon(\lambda + A_0)^{-1}M_\epsilon\|_{\mathcal{L}(C(\bar{\Omega}_\epsilon), U_\epsilon^p)} \leq C\epsilon^{\frac{1}{p}} \quad (12)$$

Demostración. Observemos que mediante la siguiente descomposición

$$(\lambda + A_\epsilon)^{-1} - E_\epsilon(\lambda + A_0)^{-1}M_\epsilon = A_\epsilon(\lambda + A_\epsilon)^{-1}(A_\epsilon^{-1} - E_\epsilon A_0^{-1}M_\epsilon)[I - E_\epsilon \lambda(\lambda + A_0)^{-1}M_\epsilon],$$

y utilizando las estimaciones (8), (9), (10), reducimos el problema a obtener una buena estimación de $A_\epsilon^{-1} - E_\epsilon A_0^{-1}M_\epsilon$, que fue obtenida en [2].

4. Convergencia de los semigrupos lineales

Del Lemma 3.1 se deduce que el operador $-A_\epsilon$ genera un semigrupo analítico $\{e^{-A_\epsilon t} : t \geq 0\}$ en U_ϵ^p dado por

$$e^{-A_\epsilon t} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} e^{\lambda t} (\lambda + A_\epsilon)^{-1} d\lambda, \quad t > 0, \quad (13)$$

donde $\Gamma \subset \rho(-A_\epsilon)$ es la frontera de Σ_θ orientada tal que la parte imaginaria cuando λ recorre Γ , y Σ_θ es el sector definido en la Proposición 3.2 (ii).

Por otra parte, en [3], se prueba que el operador A_0 no genera un semigrupo fuertemente continuo. Sin embargo es generador de un semigrupo singular como veremos brevemente.

Sea Σ_θ el sector definido en la Proposición 3.2 (ii) y sea Γ la frontera de $-\Sigma_\theta$ orientada de tal forma que la parte imaginaria crezca cuando λ recorre Γ . Observese que la integral

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} e^{\lambda t} (\lambda + A_0)^{-1} d\lambda,$$

converge en la Topología uniforme de operadores de $\mathcal{L}(U_0^p)$ para todo $t > 0$. Siguiendo como en [3] definimos

$$e^{-A_0 t} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} e^{\lambda t} (\lambda + A_0)^{-1} d\lambda, \quad t > 0. \quad (14)$$

Entonces, $e^{-A_0 t}$ satisface todas las propiedades de semigrupo excepto por la continuidad fuerte en $t = 0$ para datos iniciales que no sean suficientemente regulares. Sin embargo, varias de las propiedades de semigrupo analítico se verifican para datos suficientemente regulares. Diremos que $\{e^{-A_0 t} : t \geq 0\}$ es un semigrupo generador por A_0 e no haremos mención alguna sobre la continuidad.

El semigrupo $\{e^{-A_0 t} : t \geq 0\}$ es la solución para el siguiente problema lineal

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(w, v) + A_0(w, v) &= 0 \\ (w(0), v(0)) &= (w_0, v_0) \in U_0^p. \end{aligned}$$

Con las estimaciones de la convergencia de los operadores resolventes de la sección anterior y la expresión de los semigrupos dada en (13) y (14) se puede probar el siguiente resultado

Teorema 4.1 *Para cada $\beta \in [0, 1]$, existe una constante C , independiente de ϵ y t , tal que*

$$\|e^{-A_\epsilon t} - E_\epsilon e^{-A_0 t} M_\epsilon\|_{\mathcal{L}(C(\bar{\Omega}_\epsilon), U_\epsilon^p)} \leq C \epsilon^{\frac{\beta}{p}} t^{-\beta}, \quad \forall t > 0. \quad (15)$$

5. Convergencia de los semigrupos no lineales y semicontinuidad superior de atractores

Ahora que ya tenemos la continuidad de los semigrupos lineales dada por el Teorema 4.1, vamos a obtener la continuidad de los semigrupos no lineales usando la Fórmula de Variación de las Constantes. Después de obtener la continuidad de los semigrupos no

lineales podremos obtener la continuidad superior de la familia de atractores $\{\mathcal{A}_\epsilon : \epsilon \in [0, 1]\}$.

Para $\epsilon \in [0, 1]$, sea $\{T_\epsilon(t) : t \geq 0\}$ el semigrupo no lineal definido en U_ϵ^p por la formula de variaci3n de las constantes

$$T_\epsilon(t, u_\epsilon) = e^{-A_\epsilon t} u_\epsilon + \int_0^t e^{-A_\epsilon(t-s)} f_\epsilon(T_\epsilon(s, u_\epsilon)) ds. \quad (16)$$

Mostraremos el siguiente resultado

Proposici3n 5.1 *Existe $0 \leq \gamma < 1$ y una funci3n $c(\epsilon)$ con $c(\epsilon) \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} 0$ tal que, para cada $\tau > 0$ tenemos*

$$\|T_\epsilon(t, u_\epsilon) - E_\epsilon T_0(t, M_\epsilon u_\epsilon)\|_{U_\epsilon^p} \leq M(\tau) c(\epsilon) t^{-\gamma}, \quad t \in (0, \tau], \quad u_\epsilon \in \mathcal{A}_\epsilon, \quad \epsilon \in (0, \epsilon_0]. \quad (17)$$

Adem3s, la familia de atractores $\{\mathcal{A}_\epsilon : \epsilon \in [0, \epsilon_0]\}$ es semicontinua superiormente en $\epsilon = 0$ en el espacio U_ϵ^p , en el sentido que

$$\sup_{u_\epsilon \in \mathcal{A}_\epsilon} \left[\inf_{u_0 \in \mathcal{A}_0} \{\|u_\epsilon - E_\epsilon u_0\|_{U_\epsilon^p}\} \right] \rightarrow 0, \quad \text{cuando } \epsilon \rightarrow 0 \quad (18)$$

Tambi3n, se \mathcal{E}_ϵ denota el conjunto de puntos de equilibrio de (6), $\epsilon \in [0, \epsilon_0]$, entonces $\{\mathcal{E}_\epsilon : \epsilon \in [0, \epsilon_0]\}$ es semicontinuo superiormente en $\epsilon = 0$ en el espacio U_ϵ^p ; es decir,

$$\sup_{u_\epsilon \in \mathcal{E}_\epsilon} \left[\inf_{u_0 \in \mathcal{E}_0} \{\|u_\epsilon - E_\epsilon u_0\|_{U_\epsilon^p}\} \right] \rightarrow 0, \quad \text{cuando } \epsilon \rightarrow 0 \quad (19)$$

Demostraci3n: Seguiremos las ideas contenidas en [1, 5] para probar este resultado. Obs3rvese que los semigrupos no lineales $T_\epsilon(t)$ vienen dados por (16). Por lo tanto, estimando $T_\epsilon(t, u_\epsilon) - E_\epsilon T_0(t, M_\epsilon u_\epsilon)$ y con algunos calculos elementales obtenemos

$$\begin{aligned} \|T_\epsilon(t, u_\epsilon) - E_\epsilon T_0(t, M_\epsilon u_\epsilon)\|_{U_\epsilon^p} &\leq \|e^{-A_\epsilon t} u_\epsilon - E_\epsilon e^{-A_0 t} M_\epsilon u_\epsilon\|_{U_\epsilon^p} + \\ &\quad \int_0^t \|(e^{-A_\epsilon t} - E_\epsilon e^{-A_0 t} M_\epsilon) f_\epsilon(T_\epsilon(s, u_\epsilon))\|_{U_\epsilon^p} \\ &\quad + \int_0^t \|E_\epsilon e^{-A_0 t} (M_\epsilon f_\epsilon(T_\epsilon(s, u_\epsilon)) - f_0(T_0(s, M_\epsilon u_\epsilon))\|_{U_\epsilon^p} \\ &\leq M \epsilon^{\frac{\theta}{p}} t^{-\theta} \|u_\epsilon\|_{C(\bar{\Omega}_\epsilon)} + M \epsilon^{\frac{\theta}{p}} \int_0^t (t-s)^{-\theta} \|f_\epsilon(T_\epsilon(s, u_\epsilon))\|_{C(\bar{\Omega}_\epsilon)} \\ &\quad + MC \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \|T_\epsilon(s, u_\epsilon) - E_\epsilon T_0(s, M_\epsilon u_\epsilon)\|_{U_\epsilon^p} \end{aligned}$$

Como tenemos cotas de los atractores \mathcal{A}_ϵ en $C(\bar{\Omega}_\epsilon)$ que son uniformes en el par3metro ϵ , los dos primeros terminos en la desigualdad anterior pueden ser acotados por $M(\tau) \epsilon^{\frac{\theta}{p}} t^{-\theta}$. El resultado se obtiene aplicando el Lema de Gronwall singular (ver [7]).

Para obtener la semicontinuidad superior de los atractores lo hacemos de la siguiente forma.

Si consideramos el conjunto $B = \{M_\epsilon \psi_\epsilon, \psi_\epsilon \in \mathcal{A}_\epsilon, 0 < \epsilon \leq 1\}$, que es un conjunto acotado en U_0^p y por las propiedades de atractividad de \mathcal{A}_0 , fijado un par3metro $\eta > 0$ suficientemente peque1o, tendremos que existe un $t_0 > 0$ tal que

$$\sup_{\phi \in B} \text{dist}_{U_0^p}(T_0(t_0, \phi), \mathcal{A}_0) = \sup_{u_\epsilon \in \mathcal{A}_\epsilon, 0 < \epsilon \leq 1} \text{dist}_{U_0^p}(T_0(t_0, M_\epsilon u_\epsilon), \mathcal{A}_0) \leq \eta.$$

Utilizando ahora la estimación (17) y las propiedades del operador de extensión E_ϵ , eligiendo un $\epsilon_0 = \epsilon_0(\eta) > 0$ suficientemente pequeño tendremos

$$\text{dist}_{U_\epsilon^p}(T_\epsilon(t_0, u_\epsilon), E_\epsilon \mathcal{A}_0) \leq 2\eta, \quad u_\epsilon \in \mathcal{A}_\epsilon, \quad 0 < \epsilon \leq \epsilon_0(\eta)$$

Utilizando ahora la invarianza del atractor \mathcal{A}_ϵ bajo el semigrupo no lineal T_ϵ probamos que

$$\text{dist}_{U_\epsilon^p}(u_\epsilon, E_\epsilon \mathcal{A}_0) \leq 2\eta, \quad u_\epsilon \in \mathcal{A}_\epsilon, \quad 0 < \epsilon \leq \epsilon_0(\eta)$$

lo que demuestra la semicontinuidad superior de los atractores.

La semicontinuidad superior de los puntos de equilibrio, (19) se obtiene de (18) y del hecho de que si $u_\epsilon \in \mathcal{E}_\epsilon$ entonces $T_\epsilon(t, u_\epsilon) = u_\epsilon$, for all t . ■

Agradecimientos

J. M. Arrieta ha sido parcialmente financiado por el “Programa de Financiación de Grupos de Investigación UCM-Comunidad de Madrid GR69/06. Grupo 920894”, el proyecto PHB2006-0003-PC de ayudas de Cooperación Hispano-Brasileño del MEC y por el proyecto MTM2006-08262 del MEC.

A. N. Carvalho ha sido financiado parcialmente por el CNPq # 305447/2005-0 y de la FAPESP # 03/10042-0, Brasil. G. Lozada-Cruz, ha sido financiado parcialmente por FAPESP # 06/04781-3, Brasil.

Referencias

- [1] J.M. Arrieta, Spectral Behavior and Uppersemicontinuity of Attractors, *International Conference on Differential Equations (EQUADIFF'99)* Berlin, World Scientific, 615-621 (2000).
- [2] J.M. Arrieta, A.N. Carvalho, A.N. and G. Lozada-Cruz, Dynamics in dumbbell domains I. Continuity of the set of equilibria, *Journal of Differential Equations*, **231**, 551-597 (2006).
- [3] J.M. Arrieta, A. N. Carvalho and G. Lozada-Cruz, Dynamics in Dumbbell Domains II: The Limiting Problem. *In preparation*
- [4] J.M. Arrieta, A. N. Carvalho and G. Lozada-Cruz, Dynamics in dumbbell domains III. Continuity of attractors, *In preparation*
- [5] A.N. Carvalho and S. Piskarev, A general approximation scheme for attractors of abstract parabolic problems', *Numerical Functional Analysis and Optimization*, 27(7-8), 785-829 (2006).
- [6] J.K. Hale, *Asymptotic behavior of dissipative systems* Mathematical Surveys and Monographs **25** American Mathematical Society, Providence 1988.
- [7] D.B. Henry, *Geometric theory of semilinear parabolic equations*, 2 ed., *Lecture Notes in Mathematics*, vol. 840, Springer Verlag, New York, 1981.