XX Congreso de Ecuaciones Diferenciales y Aplicaciones
X Congreso de Matemática Aplicada
Sevilla, 24-28 septiembre 2007
(pp. 1–??)

Algunos resultados sobre periodicidad global de ecuaciones en diferencias de orden dos y tres

F. Balibrea[1], A. Linero[1]

[1] *Dpto. de Matemáticas, Universidad de Murcia, E-30100 Murcia. E-mails:* `balibrea@um.es`, `lineroba@um.es`.

Palabras clave: Ecuaciones en diferencias; periodicidad global; p-ciclo; ecuaciones funcionales

Resumen

En esta nota repasamos algunos resultados sobre periodicidad global en ecuaciones (autónomas) en diferencias finitas de órdenes dos y tres, y aportamos algún modesto avance en el tema.

1. Introducción

Existe una gran cantidad de modelos biológicos, económicos, ... cuya evolución se describe a partir de ecuaciones (autónomas) en diferencias. Un ejemplo paradigmático es la ecuación logística

$$x_{n+1} = (1 + a - bx_n)x_n,$$

que modela cómo evoluciona la densidad de población x_n de una cierta especie biológica (insectos, ratones, ...), donde a es un valor positivo relacionado con la tasa máxima de crecimiento en ausencia de factores negativos, mientras que b es una medida de la capacidad o resistencia del medio para albergar cantidades cada vez mayores de población (véase [14]). El modelo anterior es una discretización del modelo logístico continuo

$$x'(t) = (a - bx(t))x(t).$$

En [15], Volterra reemplaza la ecuación diferencial anterior por esta otra,

$$x'(t) = [a - \int_0^t b(t-\tau)x(\tau)d\tau]x(t).$$

Una ecuación en diferencias de orden k paralela a la ecuación diferencial anterior es $x_{n+k+1} = (1+a-\sum_{j=0}^{k} \alpha_j x_{n+j})x_{n+k}$, conocida como función logística generalizada, donde $a > 0$ y los coeficientes α_j son no negativos (véase [12]).

Hay casos particulares del modelo discreto anterior que se ajustan a ecuaciones de la forma $x_{n+3} = x_{n+2}f(x_{n+1}, x_n)$, donde f es una función definida en $(0, \infty)^2$ que toma valores positivos.

El objeto de la presente comunicación es considerar el tópico de la periodicidad (global) en este tipo de ecuaciones de orden tres, así como presentar nuevos resultados sobre periodicidad de algunas ecuaciones en diferencias de orden dos y sus generalizaciones. Los artículos en que aparecen recogidos estos resultados son [4, 5, 6, 7, 8].

Pasamos a presentar las definiciones que permitirán al lector entender sin dificultad los resultados reseñados en esta comunicación.

Sea $\mathbb{X}$ un espacio métrico y $\Phi : \mathbb{X}^k \to \mathbb{X}$ una función continua, con $k \in \mathbb{N}$. Consideramos la ecuación (autónoma) en diferencias finitas

$$x_{n+k} = \Phi(x_n, x_{n+1}, \cdots, x_{n+k-1}). \tag{1}$$

A partir de una condición inicial $C_0 = (x_1, x_2, \cdots, x_k) \in \mathbb{X}^k$ generamos de forma unívoca la sucesión $\{x_n\}_{n\geq 1}$. Conocer la dinámica de la ecuación en diferencias finitas consiste en averiguar el comportamiento cualitativo de todas las posibles sucesiones $\{x_n\}_{n\geq 1}$ generadas a través de la recurrencia que define a la ecuación. Salvo en casos excepcionales, la solución a este problema suele ser incompleta, y debemos contentarnos con conocer ciertos aspectos de la dinámica generada a través de (1). La situación más sencilla es el caso periódico, cuando se verifica que $x_{n+p} = x_n$ para algún $p \in \mathbb{N}$ y para todo $n \in \mathbb{N}$. El valor p más pequeño para el que se verifica la condición anterior se denomina el *periodo* de $\{x_n\}_{n\geq 1}$. Denotamos por $\mathrm{Per}_{edf}(\Phi)$ al conjunto de todos los periodos de la ecuación (1). Además se dice que (1) es un *k-ciclo* cuando todas las sucesiones generadas por la ecuación son periódicas, y k es el mínimo común múltiplo de los periodos de $\mathrm{Per}_{edf}(\Phi)$. Aparece entonces el fenómeno de la periodicidad global.

Por otra parte, debemos tener en cuenta que el estudio de la ecuación en diferencias (1) es equivalente a conocer la dinámica del sistema discreto

$$\begin{aligned} F &: \mathbb{X}^k \to \mathbb{X}^k, \\ F(x_1, ..., x_k) &= (x_2, ..., x_k, \Phi(x_1, x_2, ..., x_k)). \end{aligned}$$

Esta estrategia ha permitido, por ejemplo, conocer la estructura periódica de las ecuaciones del tipo

$$x_{n+k} = f(x_n), \quad k \geq 2,$$

donde $f : I \to I$ ó $f : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ es una función continua (aquí $\mathbb{S}^1$ denota la circunferencia unidad). En [4], y como un simple corolario de los resultados aparecidos en [2] y [3], se ha demostrado que existe una relación de forzamiento entre todos los periodos de $\mathrm{Per}_{edf}(\Phi)$, y, además, viene heredada de la estructura periódica de la función f.

Otra estrategia para encontrar funciones Φ tales que la correspondiente ecuación en diferencias (1) es un k-ciclo, consiste en trasladar el problema a una ecuación funcional, cuya solución nos determinará qué funciones Φ dan lugar a un k-ciclo en (1). Esta idea se ha desarrollado con éxito en los artículos [6], [7] y [8].

2. Resultados principales

Desde hace mucho tiempo se ha tenido constancia de la existencia de ecuaciones en diferencias cuyas soluciones son siempre periódicas, y además con un periodo mínimo común a todas ellas. El ejemplo paradigmático es el de la ecuación de Lyness

$$x_{n+1} = \frac{1+x_n}{x_{n-1}}.$$

Se trata de un 5-ciclo que aparece registrado por vez primera en la literatura en [13], en relación con la búsqueda de tres enteros cuyas sumas y diferencias son cuadrados perfectos, y que más tarde encontró una motivación geométrica con los llamados patrones de friso (ver [11]).

Una pregunta interesante es saber si este comportamiento dinámico de la periodicidad global se restringe a unas pocas ecuaciones aisladas, o si por el contrario, aun siendo un fenómemo muy particular, es posible encontrar familias de ecuaciones con esta característica.

En el caso ecuaciones en diferencias de primer orden $x_{n+1} = f(x_n)$ se sabe que los únicos k-ciclos aparecen cuando $k = 1, 2$ (véase, por ejemplo, [1] ó [9]).

Para las ecuaciones autónomas de orden dos $x_{n+1} = f(x_n, x_{n-1})$, es fácil deducir que el único 2-ciclo viene dado por $x_{n+2} = x_n$. Se sabe también, por ejemplo, que en el caso de funciones continuas $f : (0,\infty) \to (0,\infty)$ que separan las variables, es decir, tales que $f(x,y) = f_1(x)f_2(y)$, los únicos 3-ciclos que encontramos atienden a la forma

$$x_{n+1} = \frac{C}{x_n x_{n-1}},$$

donde C es una constante positiva arbitraria (véase [6]).

Teorema 1 *Sea $f : (0,\infty)^2 \to (0,\infty)$ una función continua de la forma $f(x,y) = f_1(x)f_2(y)$. Entonces la ecuación en diferencias asociada*

$$x_{n+2} = f_1(x_n)f_2(x_{n+1})$$

es un 3-ciclo si, y sólo si, $f(x,y) = \frac{C}{xy}$ para alguna constante positiva C.

La estrategia para demostrar el teorema anterior se basa en estudiar la ecuación funcional asociada

$$x = f(f(y,x), y),$$

y en analizar las funciones fibra $f(\cdot, z)$ y $f(z, \cdot)$. A la vista de esta ecuación funcional, es fácil deducir que ambas fibras son funciones biyectivas estrictamente decrecientes definidas del intervalo $(0,\infty)$ en sí mismo. Apoyándonos en ciertas relaciones de tipo funcional, se llega finalmente a que sólo las ecuaciones de la forma $x_{n+1} = \frac{C}{x_n x_{n-1}}$ dan lugar a 3-ciclos formados a través de una función f que separa las variables.

Cabe destacar que en [8] se ha generalizado el resultado anterior, y se han obtenido todos los $k+1$-ciclos de la ecuación de orden k

$$x_{n+k+1} = f_1(x_{n+1}) \cdot f_2(x_{n+2}) \cdot \ldots \cdot f_k(x_{n+k}), \tag{2}$$

donde $f_j : (0,\infty) \to (0,\infty)$ son funciones continuas.

Teorema 2 *Sea $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$. Supongamos que $f_i : (0, +\infty) \to (0, +\infty)$ es continua para cada $i \in \{1, \ldots, k\}$. Entonces (2) es un $(k+1)$-ciclo si, y sólo si, una de las siguientes alternativas ocurre:*

1. *k es par y*
$$x_{n+k+1} = \frac{C}{x_{n+1}x_{n+2}\cdots x_{n+k}}, \qquad \textit{para algún } C > 0;$$
2. *k es impar, y o bien*
$$x_{n+k+1} = \frac{C}{x_{n+1}x_{n+2}\cdots x_{n+k}}, \qquad \textit{para algún } C > 0,$$
o bien
$$x_{n+k+1} = \frac{\prod_{j=1}^{(k+1)/2} x_{n+2j-1}}{\prod_{j=1}^{(k-1)/2} x_{n+2j}}.$$

Queda como problema abierto determinar si para la ecuación (2) se puede obtener un resultado similar para el caso de $(k+2)$-ciclos.

Pasamos ahora a considerar ecuaciones en diferencias autónomas de orden tres, $x_{n+1} = f(x_n, x_{n-1}, x_{n-2})$. Puesto que el caso general de detectar p-ciclos es muy difícil, nos restringimos a ecuaciones de tercer orden de la forma
$$x_{n+3} = x_i f(x_j, x_k), \tag{3}$$
donde los índices $i, j, k \in \{n, n+1, n+2\}$ son distintos dos a dos, la función $f : (0,\infty) \times (0,\infty) \to (0,\infty)$ es continua, y las condiciones iniciales x_1, x_2, x_3 son cantidades reales positivas. En [7] hemos obtenido todos los p-ciclos de la forma (3) para $p = 3, 4, 5$.

Teorema 3 *Se cumple:*

1. *La ecuación (3) es un 3-ciclo si, y sólo si, $x_{n+3} = x_n$.*
2. *La ecuación (3) es un 4-ciclo si, y sólo si, $x_{n+3} = x_n \frac{x_{n+2}}{x_n}$.*
3. *La ecuación (3) es un 5-ciclo si, y sólo si,*
$$x_{n+3} = x_n \left(\frac{x_{n+2}}{x_{n+1}}\right)^{\Phi} \quad \acute{o} \quad x_{n+3} = x_n \left(\frac{x_{n+2}}{x_{n+1}}\right)^{\phi},$$
donde Φ es el número de oro, $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, y $\phi = -\frac{1}{\Phi}$.

Para demostrar el resultado anterior, básicamente utilizamos dos estrategias. Por un lado, para probar el caso $p \leq 4$ necesitamos simplemente hacer unos cálculos directos de las sucesiones generadas por la ecuación en diferencias (3). Por otra parte, el caso

$p = 5$ requiere un estudio más preciso que, en cierta forma, está estrechamente ligado a las ecuaciones funcionales. De hecho, resolver el problema de encontrar los 5-ciclos equivale a resolver la ecuación funcional

$$c = bf(c, af(b, c))f(a, b), \quad a, b, c > 0.$$

Por tanto, las soluciones de esta ecuación funcional son $f(x, y) = \left(\frac{y}{x}\right)^{\Phi}$ y $f(x, y) = \left(\frac{y}{x}\right)^{\phi}$.

3. Algunos avances

A continuación, presentamos un par de modestos avances en relación a los resultados expuestos en la sección anterior.

El primero de ellos, a través del empleo de la estrategia de la conjugación topológica, muy socorrida en el marco de los sistemas dinámicos discretos, nos hace comprender que el fenómeno de la periodicidad global es más abundante de lo que en principio podríamos suponer atendiendo a la dinámica tan exigente de dicho fenómeno. La ilustraremos con ecuaciones en diferencias de segundo orden

$$x_{n+2} = f(x_{n+1}, x_n). \tag{4}$$

Para hacer más comprensible la idea de la conjugación topológica, damos el siguiente resultado cuya versión general se encuentra en [10].

Proposición 1 *Supongamos que (4) es un k-ciclo ($k \geq 2$) y sea $\alpha : (0, \infty) \to (0, \infty)$ un homeomorfismo. Entonces*

$$x_{n+2} = \alpha\left(f[\alpha^{-1}(x_{n+1}), \alpha^{-1}(x_n)]\right)$$

es un nuevo k–ciclo.

Demostración. Sea $F : (0, \infty)^2 \to (0, \infty)^2$ el sistema dinámico asociado a (4),

$$F(x, y) = (y, f(y, x)).$$

Entonces, de la periodicidad global de la ecuación se deduce que $F^k = \mathrm{Id}|_{(0,\infty)^2}$. A continuación, consideramos la aplicación $H : (0, \infty)^2 \to (0, \infty)^2$ dada por $H(x, y) = (\alpha(x), \alpha(y))$, y construimos la composición $G := H \circ F \circ H^{-1}$. Teniendo en cuenta que $H^{-1}(x, y) = (\alpha^{-1}(x), \alpha^{-1}(y))$, es sencillo comprobar que

$$G(x, y) = \left(y, \alpha(f[\alpha^{-1}(y), \alpha^{-1}(x)])\right).$$

Además,

$$G^k = H \circ F^k \circ H^{-1} = \mathrm{Id}|_{(0,\infty)^l},$$

de donde se deduce que

$$x_{n+2} = \alpha(f\left[\alpha^{-1}(x_{n+1}), \alpha^{-1}(x_n)\right])$$

es un nuevo k-ciclo. ■

Ejemplo 1 *Como consecuencia del resultado anterior, las siguientes ecuaciones de orden dos son* 3*-ciclos:*

- $x_{n+2} = \exp\left(\dfrac{c}{\log(x_n+1)\log(x_{n+1}+1)}\right) - 1,\ c \in (0,\infty);$
- $x_{n+2} = \dfrac{\left(-1+\sqrt{1+\frac{4}{x_{n+1}}}\right)^2\left(-1+\sqrt{1+\frac{4}{x_n}}\right)^2}{4c\left[4c+\left(-1+\sqrt{1+\frac{4}{x_{n+1}}}\right)\left(-1+\sqrt{1+\frac{4}{x_n}}\right)\right]},\ c \in (0,\infty).$

Ambas ecuaciones se obtienen a partir del 3*–ciclo* $x_{n+2} = \frac{c}{x_n x_{n+1}}$, $c \in (0,\infty)$*. Para la primera se toma* $\alpha(x) = e^x - 1$*, y para la segunda se considera* $\alpha(x) = \frac{1}{x(1+x)}$*.*

El segundo avance hace referencia al estudio de p-ciclos, $p = 6,7$, para la ecuación en diferencias

$$x_{n+3} = x_n f(x_{n+1}, x_{n+2}), \tag{5}$$

donde, como en el resto de ecuaciones de orden 3 que se han analizado en esta nota, $f : (0,\infty)^2 \to (0,\infty)$ es una función continua, y las condiciones iniciales x_1, x_2, x_3 son cantidades reales positivas arbitrarias.

En el caso de 6-ciclos, empezamos buscando ciclos de la forma

$$x_{n+3} = x_n\left(x_{n+1}^{\alpha} x_{n+2}^{\beta}\right),$$

donde α, β son parámetros reales que deberemos determinar. Si x, y, z son las condiciones iniciales, iterando obtendremos

$$\begin{aligned}
x_4 &= xy^{\alpha}z^{\beta}, \qquad x_5 = yz^{\alpha}\left(xy^{\alpha}z^{\beta}\right)^{\beta} = x^{\beta}y^{1+\alpha\beta}z^{\alpha+\beta^2},\\
x_6 &= z\left(xy^{\alpha}z^{\beta}\right)^{\alpha}\left(x^{\beta}y^{1+\alpha\beta}z^{\alpha+\beta^2}\right)^{\beta} = x^{\alpha+\beta^2}y^{\alpha^2+\beta+\alpha\beta^2}z^{1+2\alpha\beta+\beta^3},\\
x_7 &= x^{1+2\alpha\beta+\beta^3}y^{2\alpha+2\alpha^2\beta+\beta^2+\alpha\beta^3}z^{2\beta+\alpha^2+3\alpha\beta^2+\beta^4}.
\end{aligned}$$

Puesto que $x_7 = x_1 = x$, debemos resolver el sistema

$$1+2\alpha\beta+\beta^3 = 1, \quad 2\alpha+2\alpha^2\beta+\beta^2+\alpha\beta^3 = 0, \quad 2\beta+\alpha^2+3\alpha\beta^2+\beta^4 = 0,$$

cuyas soluciones son $(\alpha,\beta) = (0,0)$ y $(\alpha,\beta) = (-2,2)$ (compruébelo el lector). La primera pareja conduce a la ecuación $x_{n+3} = x_n$, que es un 3-ciclo. En cuanto a $\alpha = -2, \beta = 2$, es rutinario comprobar que

$$x_{n+3} = x_n\left(\frac{x_{n+2}}{x_n}\right)^2$$

es un 6-ciclo. Por tanto, hemos obtenido:

Proposición 2 *El único* 6*-ciclo de la forma* $x_{n+3} = x_n\left(x_{n+1}^{\alpha}x_{n+2}^{\beta}\right)$ *viene dado a través de*

$$x_{n+3} = x_n\left(\frac{x_{n+2}}{x_n}\right)^2.$$

Como problema abierto, tenemos la cuestión de analizar si el ciclo anterior es el único que existe de la forma (5). Creemos que las técnicas de tipo funcional desarrolladas en [7] pueden aplicarse a este problema, aunque no se tratará en modo alguno de un simple ejercicio de extensión.

Haciendo un estudio similar al comentado para el caso de 6-ciclos, en el caso de buscar 7-ciclos de la forma $x_{n+3} = x_n \left(x_{n+1}^{\alpha} x_{n+2}^{\beta} \right)$ se deja al lector que compruebe que el sistema de ecuaciones que se debe resolver es el siguiente

$$\begin{cases} (i): & 2\beta + \alpha^2 + 3\alpha\beta^2 + \beta^4 = 1, \\ (ii): & 1 + 4\alpha\beta + 3\alpha^2\beta^2 + \beta^3 + \alpha^3 + \alpha\beta^4 = 0, \\ (iii): & 2\alpha + 3\beta^2 + 3\alpha^2\beta + 4\alpha\beta^3 + \beta^5 = 0. \end{cases}$$

Multiplicando (i) por α, y restándole la segunda se llega a $\beta^3 + 2\alpha\beta = -1 - \alpha$, es decir,

$$(iv): \alpha = \frac{-1 - \beta^3}{1 + 2\beta}.$$

Según esta última igualdad, se tendrá $\alpha = -\beta$ si, y sólo si, β cumple $\beta^3 - 2\beta^2 - \beta + 1 = 0$.

Si ahora multiplicamos la primera ecuación por β, y le restamos (iii), obtenemos

$$(v): 2\alpha + \beta^2 + 2\alpha^2\beta + \alpha\beta^3 = -\beta.$$

Sustituyendo (iv) en (v) se consigue $\beta^6 - 2\beta^4 - 5\beta^3 - 5\beta^2 + \beta + 2 = 0$. Esta ecuación se factoriza como sigue

$$(vi): (\beta + 1)(\beta^2 + \beta + 2)(\beta^3 - 2\beta^2 - \beta + 1) = 0.$$

Para $\beta = -1$, por (iv) se tiene que $\alpha = 0$, pero entonces la correspondiente ecuación en diferencias $x_{n+3} = x_n \frac{1}{x_{n+2}}$ no es un 7-ciclo, como puede comprobarse sin dificultad.

Las raíces de $\beta^2 + \beta + 2$ son complejas, y en cuanto a las raíces de $\beta^3 - 2\beta^2 - \beta + 1 = 0$, son

$$\beta_1 = -{,}8019..., \beta_2 = 0{,}5549..., \beta_3 = 2{,}2470...$$

Observemos que los correspondientes valores α_j asociados a β_j verifican que $\alpha_j = -\beta_j$, $j = 1, 2, 3$. En ese caso, es rutinario comprobar, teniendo presente la relación $\beta^3 - 2\beta^2 - \beta + 1 = 0$, que las ecuaciones en diferencias asociadas son, en efecto, 7-ciclos. Todo el estudio hecho se resume así:

Proposición 3 *Sea β una de las raíces de $\beta^3 - 2\beta^2 - \beta + 1 = 0$. Entonces*

$$x_{n+3} = x_n \left(\frac{x_{n+2}}{x_n} \right)^{\beta}$$

es un 7-ciclo. De hecho, son los únicos 7-ciclos de la forma $x_{n+3} = x_n \left(x_{n+1}^{\alpha} x_{n+2}^{\beta} \right)$.

Al igual que en el caso de los 6-ciclos, queda pendiente averiguar si la ecuación reseñada en el último resultado es el único 7-ciclo de la forma $x_{n+3} = x_n f(x_{n+1}, x_{n+2})$, $f : (0, \infty) \to (0, \infty)$ continua.

Cabe destacar que en las Proposiciones 2 y 3 los valores α, β verifican que $\alpha = -\beta$. Además, si, en la línea de las cuentas efectuadas en dichas proposiciones, buscamos 8-ciclos del tipo $x_{n+3} = x_n \left(x_{n+1}^{\alpha} x_{n+2}^{\beta} \right)$, se obtiene que

$$x_{n+3} = x_n \left(\frac{x_{n+2}}{x_{n+1}} \right)^{1+\sqrt{2}} \quad \text{y} \quad x_{n+3} = x_n \left(\frac{x_{n+2}}{x_{n+1}} \right)^{1-\sqrt{2}}$$

son los únicos 8-ciclos con esa morfología. Las operaciones no son triviales, pero preferimos no cansar al lector con más relaciones algebraicas. Con el desarrollo efectuado en las Proposiciones 2 y 3 se puede hacer una idea del procedimiento seguido. Lo que sí merece destacarse es que, de nuevo, $\alpha = -\beta$. Esto da pie a plantear el problema de averiguar si, en el caso en que $x_{n+3} = x_n \left(x_{n+1}^{\alpha} x_{n+2}^{\beta} \right)$ produzca un k-ciclo, deberá cumplirse forzosamente que $\alpha = -\beta$.

Agradecimientos

Este trabajo ha sido financiado parcialmente por los proyectos 00684/PI/04 (Fundación Séneca, Comunidad Autónoma de la Región de Murcia), y MTM 2005-03868 (Ministerio de Educación y Ciencia, España, y Fondos Europeos FEDER).

Referencias

[1] R. M. Abu–Saris. *A self–invertibility condition for global periodicity of difference equations.* Applied Math. Letters **19** (2006), 1078–1082.

[2] F. Balibrea, A. Linero. *Periodic structure of σ-permutation maps on I^n.* Aequationes Math. **62** (2001), 265–279.

[3] F. Balibrea, A. Linero. *Periodic structure of σ-permutation maps. II. The case $\mathbb{T}^n$.* Aequationes Math. **64** (2002), 34-52.

[4] F. Balibrea, A. Linero. *On the periodic structure of delayed difference equations of the form $x_n = f(x_{n-k})$ on I and S^1.* J. Difference Equ. Appl. **9** (2003). 359-371.

[5] F. Balibrea, A. Linero. *Some new results and open problems on periodicity of difference equations.* Grazer Math. Ber. **350** (2006), 15-38.

[6] F. Balibrea, A. Linero. *On global periodicity of $x_{n+2} = f(x_{n+1}, x_n)$.* World Scientific Publ., Proceedings of the Conference On Difference Equations, Munich (Germany), 2005.

[7] F. Balibrea, A. Linero. *On the global periodicity of some difference equations of third order.* J. Difference Equ. Appl., en prensa, 2007.

[8] F. Balibrea, A. Linero, G. Soler, S. Stević. *Global periodicity of $x_{n+k+1} = f_k(x_{n+k}) \cdot \ldots \cdot f_2(x_{n+2}) f_1(x_{n+1})$.* J. Difference Equ. Appl., en prensa, 2007.

[9] M. Budincevic. *On the periodic solution of a class of difference equations.* Novi Sad J. Math. **34** (2004), 131–133.

[10] J.S. Cánovas, A. Linero, G. Soler. *On global perioidicity of difference equations.* Preprint, 2007.

[11] J.H. Conway, H.S.M. Coxeter. *Triangulated polygons and frieze patterns.* Math. Gaz. **57** (400) (1973), 87-94.

[12] S.H. Levine, D.J. Plunkett, F.M. Scudo. *Persistence and convergence of ecosystems: an analysis of some second order difference equations.* J. Math. Biol. **4** (1977), 171-182.

[13] R.C. Lyness. *Note 1581. Cycles.* Math. Gaz. **26** (1942), 62.

[14] R. M. May. *Biological populations obeying difference equations: stable points, stable cycles and chaos.* Journal of Theoretical Biology, **51** (1975), 511-525.

[15] V. Volterra. *Variazoni e fluctuazioni del numero d'individui in specie animal conviventi.* Mem. Accad. Lincei **2**(1926), 31-114.