

## Conexiones Globales en Sistemas Tridimensionales Lineales a Trozos

VICTORIANO CARMONA<sup>1</sup>, FERNANDO FERNÁNDEZ-SÁNCHEZ<sup>1</sup>,  
ELISABETH GARCÍA<sup>1</sup>, ANTONIO E. TERUEL<sup>2</sup>

<sup>1</sup> *Dpto. de Matemática Aplicada II, Universidad de Sevilla, Escuela Superior de Ingenieros, E-41092 Sevilla. E-mails: vcarmona@us.es, fefesan@us.es, egarme@us.es.*

<sup>2</sup> *Dpto. de Matemáticas e Informática, Universidad de las Islas Baleares, E-07122 Palma de Mallorca. E-mail: antonioe.teruel@uib.es.*

**Palabras clave:** Sistemas lineales a trozos, homoclina, heteroclina, punto-T

### Resumen

Presentamos en esta comunicación una técnica para probar de forma analítica la existencia de conexiones globales en sistemas dinámicos continuos lineales a trozos. Más concretamente, utilizamos esta técnica para demostrar la existencia de dos conexiones homoclinas directas (aquellas que cortan al plano de separación exactamente dos veces) y un ciclo heteroclino directo tipo punto-T (cuya conexión por las variedades unidimensionales corta exactamente tres veces al plano de separación mientras que su conexión por las variedades bidimensionales sólo lo hará en un punto) en una familia uniparamétrica de sistemas tridimensionales continuos lineales a trozos con dos zonas, reversibles y con trazas nulas.

## 1. Introducción.

En el análisis del comportamiento dinámico de un sistema tridimensional de ecuaciones diferenciales resulta interesante la determinación de sus posibles conexiones homoclinas y heteroclinas ya que, como es bien sabido, organizan una estructura dinámica rica y complicada, véase [10]. No obstante, suele ser una tarea ardua y difícil probar que un determinado sistema dinámico posee una conexión global y, por ello, se suele recurrir frecuentemente a técnicas numéricas para mostrar su existencia.

Por otra parte, los sistemas lineales a trozos están siendo extensivamente estudiados en la actualidad porque modelan fielmente determinados procesos físicos, véase por ejemplo [7]. Además, estos sistemas son capaces de reproducir comportamientos dinámicos

análogos a los de los sistemas diferenciables, ver [2], incluyendo, entre otros, los fenómenos relacionados con las conexiones homoclinas y heteroclinas, ver [7]. A pesar de la linealidad en cada zona, la prueba de la existencia de estas conexiones globales queda muy lejos de ser trivial y, en consecuencia, también es frecuente usar, como se hace en [8], herramientas numéricas para su determinación.

En este trabajo probamos analíticamente la existencia de dos conexiones homoclinas y un punto-T en una familia uniparamétrica de sistemas tridimensionales continuos y lineales a trozos, con dos zonas de linealidad separadas por un plano, que posee reversibilidad y trazas nulas. Un representante de esta familia es el sistema

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = z, \quad \dot{z} = 1 - y - \lambda(1 + \lambda^2)|x|, \quad \text{con } \lambda > 0, \quad (1)$$

que también puede entenderse como una versión lineal a trozos del sistema de Michelson, ver [9]. Nuestra principal aportación, en relación al sistema (1), la enunciamos a continuación.

**Teorema.** Existen dos valores  $\lambda_1, \lambda_2 > \frac{1}{2}$  de forma que el sistema (1) para  $\lambda = \lambda_1$  posee dos homoclinas y para  $\lambda = \lambda_2$  un ciclo heteroclinto tipo punto-T.

En la presente comunicación analizaremos, en primer lugar, los elementos geométricos del sistema lineal a trozos (1). A continuación, en la sección 3, se detallarán las condiciones que han de darse para que exista una homoclinta directa asociada a los puntos de equilibrio del sistema (1) y probaremos la existencia de dicha homoclinta. Concluimos el trabajo especificando las condiciones necesarias para que exista un ciclo heteroclinto de tipo punto-T en el sistema lineal a trozos y probando su existencia.

## 2. Versión lineal a trozos del sistema de Michelson. Elementos geométricos.

El sistema diferenciable de Michelson surge al estudiar soluciones de ondas viajeras en la ecuación de Kuramoto-Sivashinsky unidimensional, véase [9]. Por otro lado, también aparece de forma natural cuando se realiza un blow-up en una forma normal para el triple cero truncada a tercer orden, ver [4]. Tras realizar un cambio de variable adecuado en el sistema de Michelson y sustituir el término cuadrático por un valor absoluto obtenemos (1). Tomando  $\mathbf{x} = (x, y, z)^T$ , el sistema obtenido se escribe matricialmente como

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{cases} A^- \mathbf{x} + \mathbf{e}_3 & \text{si } x < 0, \\ A^+ \mathbf{x} + \mathbf{e}_3 & \text{si } x \geq 0, \end{cases} \quad (2)$$

con

$$A^- = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \lambda(1 + \lambda^2) & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A^+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\lambda(1 + \lambda^2) & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

El sistema anterior posee una única frontera, el plano  $\{x = 0\}$ ; y, por tanto, dos semiespacios de linealidad,  $R^- = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : x < 0\}$  y  $R^+ = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : x > 0\}$ . El sistema (2) tiene dos puntos de equilibrio:  $\mathbf{p}^- = (-1/\lambda(1 + \lambda^2), 0, 0) \in R^-$  y  $\mathbf{p}^+ = (1/\lambda(1 + \lambda^2), 0, 0) \in R^+$ .

Estos puntos son de tipo silla-foco y poseen configuraciones de estabilidad intercambiadas. Es decir, la matriz  $A^-$  tiene un único autovalor real  $\lambda > 0$  y dos autovalores complejos,

$$\alpha + \beta i = -\frac{\lambda}{2} + \frac{\sqrt{4 + 3\lambda^2}}{2} i \quad \text{y} \quad \alpha - \beta i = -\frac{\lambda}{2} - \frac{\sqrt{4 + 3\lambda^2}}{2} i$$

y los autovalores asociados a la matriz  $A^+$  son  $-\lambda, -\alpha \pm \beta i$ . Obsérvese que los autovalores asociados a  $A^-$  son los simétricos de los asociados a  $A^+$  debido a que el sistema (2) pertenece a la clase de sistemas reversibles.

Dado  $\mathbf{p} = (x_{\mathbf{p}}, y_{\mathbf{p}}, z_{\mathbf{p}})^T \in \mathbb{R}^3$  denotaremos por  $\mathbf{x}_{\mathbf{p}}(t, \lambda) = (x_{\mathbf{p}}(t, \lambda), y_{\mathbf{p}}(t, \lambda), z_{\mathbf{p}}(t, \lambda))^T$  a la solución del problema de valores iniciales asociado al sistema lineal a trozos (2) junto con la condición inicial  $\mathbf{x}_{\mathbf{p}}(0, \lambda) = \mathbf{p}$ .

Para analizar el comportamiento dinámico del sistema (2) usaremos la extensión natural de la aplicación de Poincaré asociada a este sistema en cada uno de los semiespacios, ver [5]. Mediante el campo del sistema  $\dot{\mathbf{x}} = A^- \mathbf{x} + \mathbf{b}$  con  $x \leq 0$  algún punto  $\mathbf{p}$ , perteneciente al plano de separación, puede ser transformado en otro punto  $\mathbf{q}$  de ese plano, entonces la semiaplicación de Poincaré izquierda  $\Pi^-$  puede definirse como  $\mathbf{q} = \Pi^-(\mathbf{p})$ . Análogamente, podemos definir la semiaplicación de Poincaré derecha  $\Pi^+$ . De este modo, una aplicación de Poincaré asociada a (2) se define como  $\Pi = \Pi^+ \circ \Pi^-$ .

El punto de equilibrio  $\mathbf{p}^-$  tiene asociado una variedad estable bidimensional y una inestable unidimensional, que denotaremos por  $W^s(\mathbf{p}^-)$  y  $W^u(\mathbf{p}^-)$  respectivamente. La variedad  $W^u(\mathbf{p}^-)$  es lineal en el semiespacio  $R^-$  y contiene a la semirrecta dada por la expresión

$$\mathcal{L}^- = \left\{ \mathbf{p}^- - \mu(1, \lambda, \lambda^2)^T : \frac{-1}{\lambda(1 + \lambda^2)} \leq \mu < \infty \right\},$$

la cual interseca al plano de separación en el punto  $\mathbf{m}^- = (0, 1/(1 + \lambda^2), \lambda/(1 + \lambda^2))^T$ . Por otra parte, la variedad estable de  $\mathbf{p}^-$ ,  $W^s(\mathbf{p}^-)$ , está contenida localmente en el semiplano focal  $\mathcal{P}^- = \{\lambda(1 + \lambda^2)x + \lambda^2 y + \lambda z = -1, x \leq 0\}$ , que pasa por  $\mathbf{p}^-$  y que está generado por los autovectores asociados a los autovalores complejos de  $A^-$ . La intersección de  $\mathcal{P}^-$  con el plano de separación es la recta dada por  $\mathcal{D}^- = \{\lambda^2 y + \lambda z = -1; x = 0\}$ . Destaquemos que no todos los puntos de  $\mathcal{D}^-$  pertenecen a la variedad estable de  $\mathbf{p}^-$ , la zona correspondiente a  $W^s(\mathbf{p}^-)$  está marcada por un segmento  $\mathcal{S}^-$  delimitado por el punto de  $\mathcal{P}^-$  que interseca al eje  $z$ , y por su imagen por  $(\Pi^-)^{-1}$ . Es fácil comprobar que los extremos de  $\mathcal{S}^-$  son  $\mathbf{q}^- = (0, 0, -1/\lambda)^T$  y  $(\Pi^-)^{-1}(\mathbf{q}^-)$ .

A partir de las ecuaciones de las variedades invariantes en el subespacio izquierdo podemos determinar, aplicando reversibilidad, las ecuaciones para el caso del semiespacio  $R^+$ . De ese modo, la variedad estable de  $\mathbf{p}^+$ ,  $W^s(\mathbf{p}^+)$ , está contenida localmente en la semirrecta

$$\mathcal{L}^+ = \left\{ \mathbf{x} = \mathbf{p}^+ + \mu(1, \lambda, \lambda^2)^T : \frac{1}{\lambda(1 + \lambda^2)} \leq \mu < \infty \right\},$$

que interseca al plano de separación en el punto  $\mathbf{m}^+ = (0, 1/(1 + \lambda^2), -\lambda/(1 + \lambda^2))^T$ . La variedad inestable de  $\mathbf{p}^+$ ,  $W^u(\mathbf{p}^+)$ , está contenida localmente en el semiplano focal

$$\mathcal{P}^+ = \{\lambda(1 + \lambda^2)x - \lambda^2 y + \lambda z = 1, x \geq 0\},$$

que interseca al plano de separación en la recta  $\mathcal{D}^+ = \{-\lambda^2 y + \lambda z = 1; x = 0\}$ . Análogamente, no todos los puntos de  $\mathcal{D}^+$  pertenecen a la variedad inestable de  $\mathbf{p}^+$ . La zona

correspondiente a  $W^u(\mathbf{p}^+)$  está determinada por el segmento  $\mathcal{S}^+$  delimitado por los extremos  $\mathbf{q}^+ = (0, 0, 1/\lambda)^T$  y  $\Pi^+(\mathbf{q}^+)$ . Observemos que las rectas  $\mathcal{D}^+$  y  $\mathcal{D}^-$  se cortan en el punto  $\mathbf{q} = (0, -1/\lambda^2, 0)^T$ , cuya importancia se pondrá de manifiesto en las siguientes secciones.

### 3. Existencia de conexiones homoclinas.

En esta sección probamos la existencia de una conexión homoclina en el sistema (2) para un cierto valor del parámetro  $\lambda$ . Más aún, la reversibilidad del sistema asegura la existencia de otra homoclina para el mismo valor del parámetro.

El tipo de homoclinas que consideramos se puede entender como el más simple en un sistema lineal a trozos con dos zonas, ya que corta sólo dos veces al plano de separación. Denominamos homoclina directa a una órbita de este tipo. La condición de existencia de una homoclina directa asociada al punto  $\mathbf{p}^-$  en el sistema (2) es

$$\Pi^+(\mathbf{m}^-) \in \mathcal{S}^-.$$

Ahora bien, para la demostración de la existencia de dicha homoclina para un cierto valor de  $\lambda$  hemos de dividir esta condición en tres:

- C1** Existe  $t > 0$  tal que  $\mathbf{x}_{\mathbf{m}^-}(t, \lambda) \in \mathcal{D}^-$  (la órbita ha de cruzar al plano de separación  $\{x = 0\}$  a través de la recta  $\mathcal{D}^-$ ).
- C2**  $\mathbf{x}_{\mathbf{m}^-}(\tau, \lambda) > 0 \forall \tau \in (0, t)$  (las únicas intersecciones de la órbita con el plano  $\{x = 0\}$  corresponden a los puntos  $\mathbf{m}^-$  y un punto perteneciente a  $\mathcal{D}^-$ ).
- C3**  $\mathbf{x}_{\mathbf{m}^-}(t, \lambda) \in \mathcal{S}^-$  (la órbita homoclina ha de entrar al semiplano  $\mathcal{P}^-$  a través de  $\mathcal{S}^-$ ).

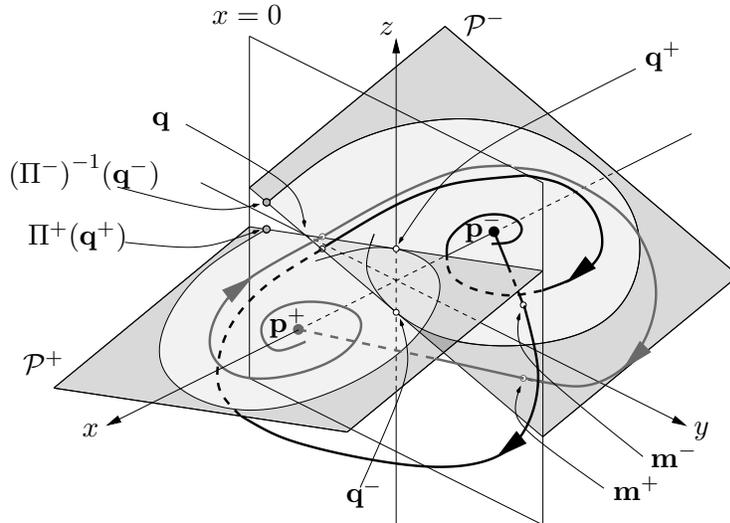


Figura 1: Conexiones homoclinas directas en el sistema lineal a trozos.

Integrando el sistema (2) con condición inicial  $\mathbf{m}^-$  y realizando algunas manipulaciones algebraicas, la condición **C1** se puede escribir como

$$\begin{cases} E_1(t, \lambda) = 2\lambda^2 e^{\frac{3\lambda}{2}t} [2\beta \cos \beta t - 3\lambda \operatorname{sen} \beta t] + 2\beta [(1 + \lambda^2) - (1 + 3\lambda^2)e^{\lambda t}] = 0, \\ E_2(t, \lambda) = 2\lambda^2 e^{\frac{3\lambda}{2}t} [2\beta \cos \beta t + \lambda \operatorname{sen} \beta t] + e^{\lambda t} (1 + \lambda^2) 2\beta = 0. \end{cases} \quad (3)$$

Realizando diversas transformaciones al sistema (3) se obtienen las siguientes condiciones equivalentes

$$\begin{cases} E(t, \lambda) = -2\beta [2e^{\lambda t} (1 + 2\lambda^2) - (1 + \lambda^2)] \cos \beta t + \lambda [2e^{\lambda t} + (1 + \lambda^2)] \operatorname{sen} \beta t = 0, \\ p(t, \lambda) = -16\lambda^6 e^{3\lambda t} + (1 + \lambda^2)^2 [4(1 + 3\lambda^2)e^{2\lambda t} - 2(2 + 3\lambda^2)e^{\lambda t} + 1 + \lambda^2] = 0, \\ \operatorname{sen} \beta t < 0, \end{cases} \quad (4)$$

donde la expresión de  $p(t, \lambda)$  se ha obtenido utilizando la fórmula trigonométrica fundamental.

Con el objetivo de demostrar que el sistema (4) posee solución se utilizará el teorema de Poincaré-Miranda, véase [6], que puede considerarse como una generalización del teorema de Bolzano en dimensión dos. Para poder aplicar este teorema al sistema será necesario analizar previamente el comportamiento de las funciones que lo componen. Es inmediato comprobar que la función  $E(t, \lambda)$  es positiva en el caso donde  $\beta t = k\pi$  y negativa cuando  $\beta t = 2k\pi$ , para cualquier  $k$  perteneciente a los números naturales. En relación a la función  $p(t, \lambda)$  podemos deducir, tras realizar un estudio adecuado, que  $p(t, \sqrt{3})$  es negativo para todo  $t \geq 0$  y que  $p(t, 1/2)$  es positivo para  $t \in [\pi/\beta, 2\pi/\beta]$ . Por tanto, aplicando el teorema de Poincaré-Miranda deducimos que el sistema (4) tiene, al menos, una solución  $(t_1, \lambda_1)$  en el interior de la región  $\Omega_1 = [\pi/\beta, 2\pi/\beta] \times [1/2, \sqrt{3}]$ , además se verifica que  $\operatorname{sen} \beta t < 0$  en el interior de esta región.

Por otro lado, tenemos que probar que la variedad unidimensional  $W^u(\mathbf{p}^-)$  ha de cortar únicamente en dos puntos al plano de separación. De ese modo, es necesario imponer que  $x_{\mathbf{m}^-}(t, \lambda) > 0$  cuando  $t$  pertenece  $(0, t_1)$ . Es fácil ver que  $\dot{x}_{\mathbf{m}^-}(t, \lambda) = y_{\mathbf{m}^-}(t_1, \lambda_1) < 0$  y, por tanto, se verifica trivialmente que  $x_{\mathbf{m}^-}(t, \lambda_1) > 0$  para todo  $t \in (0, t_1)$ .

Por último para asegurar la existencia de una órbita homoclina quedará verificar que se cumple la condición **C3**. Veremos, en la siguiente sección que la existencia de una órbita heteroclina bidimensional directa es suficiente para que se verifique la condición **C3**. De este modo, estamos en condiciones de enunciar el siguiente teorema:

**Teorema 1** *Existe un valor  $\lambda_1 > \frac{1}{2}$  de forma que el sistema (1) para  $\lambda = \lambda_1$  posee dos homoclinas directas.*

## 4. Existencia de un ciclo heteroclino tipo punto-T.

Consideraremos uno de los ciclos heteroclinos tipo punto-T más simples que puede aparecer en el sistema (2). Como se puede observar en la figura 2, la órbita heteroclina correspondiente a las variedades unidimensionales ha de cortar exactamente tres veces al plano de separación mientras que la correspondiente a las variedades bidimensionales sólo lo hará en un punto. Las condiciones necesarias para que exista un ciclo heteroclino tipo punto-T se detallan en las siguientes secciones.

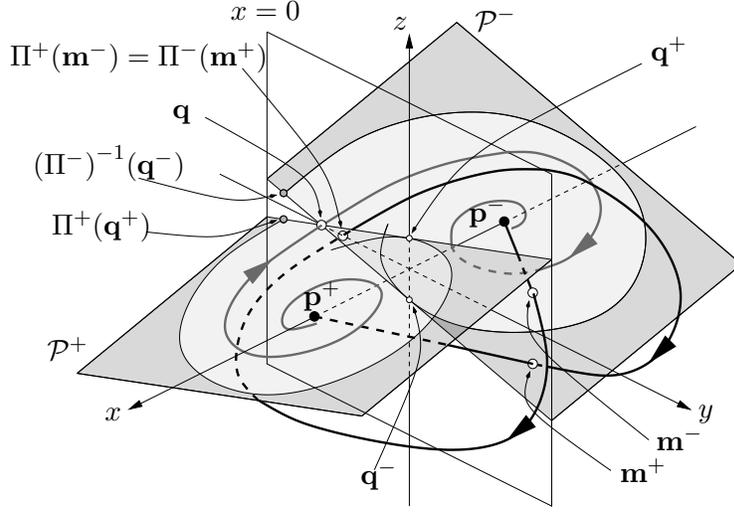


Figura 2: Esquema gráfico de un ciclo heteroclino tipo punto-T.

#### 4.1. Heteroclina bidimensional.

En esta sección probaremos la existencia de una órbita heteroclina bidimensional,  $\rho_{\pm}$ , en el sistema (2). Una condición necesaria y suficiente para la existencia de una órbita heteroclina bidimensional con un único intersección con el plano de separación es que el punto de dicha intersección,  $\bar{\mathbf{q}}$ , pertenezca a  $\mathcal{S}^- \cap \mathcal{S}^+$ . Esta condición es equivalente a **i)**  $\bar{\mathbf{q}} \in \mathcal{D}^- \cap \mathcal{D}^+$  y **ii)**  $\bar{\mathbf{q}} \in \mathcal{S}^-$ .

La intersección de las rectas  $\mathcal{D}^-$  y  $\mathcal{D}^+$  es  $\bar{\mathbf{q}} = (0, -1/\lambda^2, 0)^T$ , y los extremos del segmento  $\mathcal{S}^-$  son  $\mathbf{q}^-$  y  $(\Pi^-)^{-1}(\mathbf{q}^-)$ . Por tanto, que se verifique las condiciones **i)** y **ii)** es equivalente a que se verifique que  $(\Pi^-)^{-1}(\mathbf{q}^-) \in \{x = 0\} \cup \{z \geq 0\}$ . De ese modo, el sistema (2) tiene una órbita heteroclina bidimensional directa  $\rho_{\pm}$  si y sólo si existe una solución  $(t^*, \lambda^*)$ , con  $t^* > 0$  y  $\lambda^* > 0$ , de

$$\begin{cases} x_{\mathbf{q}^-}(-t, \lambda) = 0, \\ z_{\mathbf{q}^-}(-t, \lambda) \geq 0. \end{cases} \quad (5)$$

satisfaciendo  $x_{\mathbf{q}^-}(-t, \lambda^*) < 0$  para todo  $t \in (0, t^*)$ . Las condiciones dadas en (5) lleva, después de integrar el sistema (2) en tiempo reversible con condición inicial  $\mathbf{x}(0, \lambda) = \mathbf{q}^-$ , a que exista algún par de valores  $(t^*, \lambda^*)$  para los que se verifique el sistema

$$\begin{cases} -\frac{1}{\lambda(1+\lambda^2)} \left[ 1 - e^{\frac{\lambda}{2}t} \left( \cos \beta t - \frac{2\lambda}{\beta} \sin \beta t \right) \right] = 0, \\ -\frac{1}{\lambda} e^{\frac{\lambda}{2}t} \left[ \cos \beta t + \frac{2\lambda}{\beta} \sin \beta t \right] \geq 0, \end{cases} \quad (6)$$

junto a la condición  $x_{\mathbf{q}^-}(-t, \lambda^*) < 0$  si  $t \in (0, t^*)$ . Utilizando la función auxiliar de Andronov  $\varphi(\tau, \gamma) = 1 - e^{\gamma\tau}(\cos \tau - \gamma \sin \tau)$ , definida en [1], podemos deducir que la existencia de una solución  $(t^*, \lambda^*)$  de (6) satisfaciendo la desigualdad  $x_{\mathbf{q}^-}(-t, \lambda^*) < 0$  es equivalente

a la existencia de una solución del sistema

$$\begin{cases} \varphi\left(-\beta t, -\frac{2\lambda}{\beta}\right) = 0, \\ \varphi\left(\beta t, -\frac{2\lambda}{\beta}\right) \geq 1. \end{cases} \quad (7)$$

tal que  $\varphi(-\beta t, -2\lambda/\beta) > 0$  en el intervalo  $(0, t^*)$ . Un análisis de las ecuaciones (7), nos permite probar el siguiente teorema (para más detalles ver el preprint [3]).

**Teorema 2** *Existe un único valor  $\lambda^*$  en  $(0, 1/2)$  tal que:*

1. *si  $\lambda \geq \lambda^*$  el sistema (2) tiene una órbita heteroclina bidimensional con un única intersección con el plano de separación.*
2. *si  $0 < \lambda < \lambda^*$  el sistema (2) no tiene órbitas heteroclinas bidimensionales con una única intersección con el plano de separación.*

Este teorema nos asegura que se verifique la condición **C3** para la existencia de homoclina directa en el sistema (2).

## 4.2. Heteroclina unidimensional.

En esta sección probaremos la existencia una órbita heteroclina unidimensional en el sistema (2). Dicha conexión por las variedades unidimensionales ha de cortar exactamente tres veces al plano de separación  $\{x = 0\}$ . Las primeras intersecciones de la heteroclina unidimensional con el plano de separación corresponden a los puntos  $\mathbf{m}^-$  y  $\mathbf{m}^+$ . De ese modo, para que exista una órbita heteroclina unidimensional asociada al sistema (2) sólo necesitamos imponer que  $\Pi^+(\mathbf{m}^-) = \Pi^-(\mathbf{m}^+)$  o, más aún, debido a la reversibilidad del sistema, esto ocurre si el punto  $\Pi^+(\mathbf{m}^-)$  pertenece al eje de reversibilidad. Por tanto, la primera y tercera componente de  $\Pi^+(\mathbf{m}^-)$  deben ser nulas. De ese modo, el sistema (2) tiene una órbita heteroclina unidimensional con exactamente tres puntos de corte con el plano de separación  $\{x = 0\}$  si, y sólo si, existe una solución  $(t_2, \lambda_2)$ , con  $t_2 > 0$  y  $\lambda_2 > 0$ , de

$$\begin{cases} x_{\mathbf{m}^-}(t, \lambda) = 0, \\ z_{\mathbf{m}^-}(t, \lambda) = 0, \end{cases} \quad (8)$$

satisfaciendo la desigualdad  $x_{\mathbf{m}^-}(t, \lambda_1) > 0$  para todo  $t \in (0, t_2)$ .

Integrando el sistema (2) con condición inicial inicial  $\mathbf{x}(0, \lambda) = \mathbf{m}^-$ , el sistema (8) puede escribirse como

$$\begin{cases} \frac{e^{-\lambda t}}{1 + 3\lambda^2} \left\{ \frac{1}{\lambda} + \frac{e^{\frac{3\lambda}{2}t}}{1 + \lambda^2} \left[ 2\lambda \cos \beta t - \frac{6\lambda^2}{\sqrt{4 + 3\lambda^2}} \operatorname{sen} \beta t \right] \right\} = \frac{1}{\lambda(1 + \lambda^2)} \\ \frac{e^{-\lambda t}}{1 + 3\lambda^2} \left\{ -\lambda + \frac{2\lambda}{1 + \lambda^2} e^{\frac{3\lambda}{2}t} \left[ (1 + 2\lambda^2) \cos \beta t - \frac{\lambda}{\sqrt{4 + 3\lambda^2}} \operatorname{sen} \beta t \right] \right\} = 0, \end{cases} \quad (9)$$

Tras un laborioso análisis del sistema (9), análogo al caso de la conexión homoclina directa, se puede probar el siguiente lema:

**Lema 3** *El sistema (9) tiene al menos una solución  $(t_2, \lambda_2)$  en la región*

$$\Omega_2 = \left[ \frac{\pi}{\beta}, \frac{2\pi}{\beta} \right] \times \left[ \frac{1}{2}, 1 \right].$$

Además, como se hace para la homoclina directa, se tiene que en el interior de la región  $\Omega_2$  se verifica que  $x_{\mathbf{m}^-}(t, \lambda_2) > 0$  para todo  $t \in (0, t_2)$ .

Este lema nos permite probar el siguiente teorema.

**Teorema 4** *Para  $\lambda = \lambda_2$ , el sistema (2) tiene una órbita heteroclina por las variedades unidimensionales con tres puntos de intersección con el plano de separación.*

Uniando los tres teoremas tenemos el resultado principal de nuestra comunicación, el cual enunciamos a continuación.

**Teorema 5** *Existen dos valores  $\lambda_1, \lambda_2 > \frac{1}{2}$  de forma que el sistema (1) para  $\lambda = \lambda_1$  posee dos homoclinas directas y para  $\lambda = \lambda_2$  un ciclo heteroclino tipo punto-T.*

## Agradecimientos

Este trabajo ha sido financiado por los proyectos EXC/2005/FQM-872 del Proyecto de Excelencia de la Junta de Andalucía, MTM2006-00847 del Plan Nacional del 2.006 y MTM2004-04066 del Ministerio de Ciencia y Tecnología, Plan Nacional I+D+I.

## Referencias

- [1] A. Andronov, A. Vit & S. Khaikin, *Theory of oscillators*, Dover, 1987.
- [2] V. Carmona E. Freire, E. Ponce & F. Torres, *Invariant Manifolds of Periodic Orbit for Piecewise Linear Three-Dimensional System*, IMA J. Appl. Math, **69** (2004), 71–91.
- [3] V. Carmona, F. Fernández-Sánchez & A. E. Teruel, *Existence of a reversible Bykov cycle in a piecewise linear version of the Michelson system*, preprint.
- [4] E. Freire, E. Gamero, A. J. Rodríguez-Luis, A. J. & A. Algaba, *A note on the triple-zero linear degeneracy: normal forms, dynamical and bifurcation behaviors of an unfolding*, Internat. J. Bifur. Chaos Appl. Sci. Engrg., **12** (2002), 2799–2820.
- [5] C. Kahlert, *The ranges of transfer and return maps in three-region piecewise-linear dynamical systems*, Internat. J. Circuit Theory Appl., **16** (1988), 11–23.
- [6] W. Kulpa, *The Poincaré-Miranda theorem*, Amer. Math. Monthly, **104** (1997), 545–550.
- [7] R. N. Madan, *Chua's Circuit: A Paradigm for Chaos*, ser. B Singapore: World Scientific, (1993).
- [8] R. O. Medrano, M.S. Baptista & I.L. Caldas; *Homoclinic orbits in a piecewise systems and their relation with invariant sets*, Physica D, **186** (2003), 133–147.
- [9] D. Michelson, *Steady solutions of the Kuramoto Sivashinsky equation*, Physica D, **19** (1986), 89–111.
- [10] L. P. Shil'nikov, *A contribution to the problem of the structure of an extended neighbourhood of a rough equilibrium state of saddle-focus type*, Math. USSR Sbornik, **10** (1970), 91–102.