

## Problemas de control en procesos de eutrofización

L. J. ÁLVAREZ-VÁZQUEZ<sup>1</sup>, F. JAVIER FERNÁNDEZ<sup>2</sup>,  
R. MUÑOZ-SOLA<sup>3</sup>

<sup>1</sup> Dpto. Mat. Apl. II. E.T.S.I. Telecomunicación. Universidad de Vigo. E-mail: aurea@dma.uvigo.es.

<sup>2</sup> Dpto. Mat. Apl. Universidad de Santiago de Compostela. E-mail: rafams@usc.es.

<sup>3</sup> Dpto. Mat. Apl. Universidad de Santiago de Compostela. E-mail: franfdz@usc.es.

**Palabras clave:** Control Óptimo, Eutrofización, Biorreactores

### Resumen

El aumento de los niveles de nitrógeno y fósforo (nutrientes principales para determinadas algas) en grandes masas de agua debido a la acción contaminante del hombre, puede traer consigo una disminución de la calidad del agua (procesos de eutrofización). En este trabajo estudiamos un método de control de esta clase de procesos, basado en el uso de biorreactores (tanques en donde se desarrollarán una serie de procesos que reducirán los niveles de nitrógeno y/o fósforo del agua por debajo de unos umbrales máximos). Matemáticamente estos métodos de control se pueden formular como problemas de control óptimo con restricciones sobre el estado en donde las ecuaciones de estado son un tipo de sistema de ecuaciones cuasilineales.

## 1. Las ecuaciones de estado. Un sistema de ecuaciones cuasilineales.

Las ecuaciones que modelan los procesos de eutrofización se pueden considerar como un caso particular del siguiente sistema de ecuaciones no lineal:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u^l}{\partial t} - \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} a_i^l(t, x, u^l, \nabla u^l) + c^l(t, x, \mathbf{u}, \nabla \mathbf{u}) = g^l \quad \text{en } Q, \\ \nu \cdot \mathbf{a}^l(t, x, u^l, \nabla u^l) + b^l(t, x, u^l) = h^l \quad \text{sobre } \Sigma, \\ u^l(0) = u_0^l \quad \text{en } \Omega, \end{array} \right. \quad (1)$$

donde:

- $l = 1, \dots, N_e$ ,
- $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  es un dominio con frontera  $\partial\Omega$  suficientemente regular,
- $Q = [0, T] \times \Omega$  y  $\Sigma = [0, T] \times \partial\Omega$ ,
- $c^l(t, x, \mathbf{u}, \nabla \mathbf{u}^l) = \sum_{k,m=1}^{N_e} c_{k,m}^l(t, x, u^k, \nabla u^m) + \sum_{k,m=1}^{N_e} c_{0,k,m}^l(t, x, u^k, u^m)$ .

Dentro del sistema de ecuaciones anterior consideraremos los dos subtipos siguientes:

▪ **Simplificación Cuasilineal.**

$$a_i^l(t, x, u^l, \nabla u^l) = \sum_{j=1}^n a_{i,j}^l(t, x) \frac{\partial u^l}{\partial x_j} + a_{i,0}^l(t, x, u^l), \quad (2)$$

$$c_{k,m}^l(t, x, u^k, \nabla u^m) = \delta_{k,m} \sum_{j=1}^n \Psi_{1,0,m,j}^l(t, x, \frac{\partial u^m}{\partial x_j}), \quad (3)$$

$$c_{0,k,m}^l(t, x, u^k, u^m) = \Psi_{0,k,0,0}^l(t, x, u^k) + \Psi_{0,k,m,0}^l(t, x, u^k) u^m. \quad (4)$$

Para esta clase de sistemas diremos que  $u^l \in W^{1,2,2}(I; H^1(\Omega), H^1(\Omega)^*)^1 \cap \mathcal{C}(I; L^2(\Omega))$  con  $u_l(0, x) = u_0^l(x)$  y  $l = 1, \dots, N_e$ , es una **solución débil** si:

$$\begin{aligned} & \sum_{l=1}^{N_e} \left\{ \left\langle \frac{du^l}{dt}, v^l \right\rangle + \int_{\Omega} \mathbf{a}^l(t, x, u^l, \nabla u^l) \cdot \nabla v^l(x) + c^l(t, x, \mathbf{u}, \nabla \mathbf{u}) v^l(x) dx + \right. \\ & \left. \int_{\Gamma_1^l} b^l(t, x, u^l) v^l(x) d\gamma \right\} = \sum_{l=1}^{N_e} \left\{ \int_{\Omega} g^l(t, \cdot) v^l dx + \int_{\Gamma_1^l} h^l(t, \cdot) v^l d\gamma \right\} \text{ c.p.t. } t \in I, \\ & \forall \mathbf{v} \in H^1(\Omega)^{N_e}. \end{aligned} \quad (5)$$

▪ **Simplificación Semilineal.**

$$a_i^l(t, x, u^l, \nabla u^l) = \sum_{j=1}^n a_{i,j}^l(t, x, u^l) \frac{\partial u^l}{\partial x_j} + a_{i,0}^l(t, x, u^l), \quad (6)$$

$$c_{k,m}^l(t, x, u^k, \nabla u^m) = \sum_{j=1}^n \Psi_{1,k,m,j}^l(t, x, u^k) \frac{\partial u^m}{\partial x_j}, \quad (7)$$

$$c_{0,k,m}^l(t, x, u^k, u^m) = \Psi_{0,k,0,0}^l(t, x, u^k) + \Psi_{0,k,m,0}^l(t, x, u^k) u^m. \quad (8)$$

Para esta clase de sistemas diremos que  $u^l \in L^2(I; H^1(\Omega)) \cap \mathcal{C}_w(I; L^2(\Omega))$  con  $l = 1, \dots, N_l$  es una **solución muy débil** cuando:

$$\begin{aligned} & \sum_{l=1}^{N_e} \left\{ \int_{\Omega} u^l(T, x) v^l(T, x) dx + \int_Q \mathbf{a}^l(t, x, u^l, \nabla u^l) \cdot \nabla v^l + c^l(t, x, \mathbf{u}, \nabla \mathbf{u}) v^l - \frac{\partial v^l}{\partial t} u^l dx dt + \right. \\ & \left. \int_{\Sigma_1^l} b^l(t, x, u^l) v^l d\gamma dt \right\} = \sum_{l=1}^{N_e} \left\{ \int_Q g^l v^l dx dt + \int_{\Sigma_1^l} h^l v^l d\gamma dt + \int_{\Omega} u_0^l \cdot v^l(0, \cdot) dx \right\}, \\ & \forall \mathbf{v} \in W^{1,\infty,\infty}(I; [W^{1,\infty}(\Omega)]^{N_e}, ([H^1(\Omega)]^{N_e})^*). \end{aligned} \quad (9)$$

---

<sup>1</sup> $W^{1,p,q}(I; V, V^*) = \{u \in L^p(I; V) : \frac{du}{dt} \in L^q(I; V^*)\}$ .

La existencia de solución de esta clase de sistemas se obtiene empleando técnicas similares a las descritas en [3]. La idea básica para demostrar la existencia de solución débil consiste en imponer hipótesis sobre los coeficientes para garantizar una serie de condiciones sobre el operador asociado al sistema tales como la acotación y la pseudomonotonía. Por otro lado, para garantizar la existencia de soluciones muy débiles, será necesario imponer restricciones sobre los coeficientes que nos permitan asegurar propiedades sobre el operador como la acotación y la continuidad débil en ciertos espacios.

Los modelos que gobiernan los procesos de eutrofización están basados en ecuaciones en derivadas parciales de una gran complejidad debido a la variedad de fenómenos que intervienen. En este trabajo hemos considerado un modelo relativamente simple en donde sólo se consideran las siguientes cinco especies ([1]):

1. Fitoplancton ( $u_1$ ),
2. Nutriente Genérico, por ejemplo, el Nitrógeno ( $u_2$ ),
3. Zooplancton ( $u_3$ ),
4. Oxígeno Disuelto ( $u_4$ ),
5. Detritos Orgánicos ( $u_5$ ).

La interacción entre ellas en un dominio  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  (que vamos a suponer fijo) se puede modelar mediante el siguiente sistema de ecuaciones en derivadas parciales:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u^1}{\partial t} + \mathbf{w} \cdot u^1 - \nabla \cdot (\mu_1 \nabla u^1) - A \frac{u^2}{K_N + u^2} u^1 + (K_r + K_{mf}) u^1 + K_z \frac{u^1}{K_F + u^1} u^3 = g^1 \quad \text{en } Q, \\ \frac{\partial u^2}{\partial t} + \mathbf{w} \cdot u^2 - \nabla \cdot (\mu_1 \nabla u^1) + C_{nc} A \frac{u^2}{K_N + u^2} u^1 - C_{nc} K_r u^1 - C_{nc} K_{rd} \Theta^{\theta-20} u^5 = g^2 \quad \text{en } Q, \\ \frac{\partial u^3}{\partial t} + \mathbf{w} \cdot u^3 - \nabla \cdot (\mu_1 \nabla u^1) - C_{fz} K_z \frac{u^1}{K_F + u^1} u^3 + K_{mz} u^3 = g^3 \quad \text{en } Q, \\ \frac{\partial u^4}{\partial t} + \mathbf{w} \cdot u^4 - \nabla \cdot (\mu_1 \nabla u^1) - C_{oc} A \frac{u^2}{K_N + u^2} u^1 + C_{oc} K_r u^1 + C_{oc} K_{rd} \Theta^{\theta-20} u^5 = g^4 \quad \text{en } Q, \\ \frac{\partial u^5}{\partial t} + \mathbf{w} \cdot u^5 - \nabla \cdot (\mu_1 \nabla u^1) - K_{mf} u^1 - K_{mz} u^3 + K_{rd} \Theta^{\theta-20} u^5 - W_{fd} \frac{\partial u^5}{\partial z} = g^5 \quad \text{en } Q, \\ i = 1, \dots, 5, \quad \mu_i \nabla u^i \cdot \mathbf{n} + \alpha_i u^i = h^i \quad \text{sobre } \Sigma, \\ i = 1, \dots, 5, \quad u_i(0) = u_{0i} \quad \text{en } \Omega. \end{array} \right. \quad (10)$$

donde  $\mathbf{w}$  es la velocidad del agua,  $C_{oc}$  es el coeficiente estequiométrico oxígeno-carbono,  $C_{nc}$  es el coeficiente estequiométrico nitrógeno-carbono,  $K_{rd}$  es la tasa de regeneración de los detritos,  $\Theta$  es la constante de regeneración térmica de los detritos,  $\theta$  es la temperatura del agua,  $K_r$  es la tasa de respiración endógena del fitoplancton,  $K_{mf}$  es la tasa de mortalidad del fitoplancton,  $K_{mz}$  es la tasa de mortalidad del zooplancton,  $K_z$  es el coeficiente de predación del zooplancton,  $W_{fd}$  es la velocidad de sedimentación de los detritos orgánicos,  $K_F$  es la constante de saturación media del fitoplancton,  $K_N$  es la constante de saturación

media del nitrógeno,  $\mu_i$ ,  $i = 1, \dots, 5$  son los coeficientes de difusión de las especies y  $A$  es la función de luminosidad:

$$A = \mu C_t^{\theta-20} \frac{I_0}{I_s} e^{-(\phi_1 + \phi_2 u_2)z}, \quad (11)$$

con  $I_0$  la intensidad de luz incidente,  $I_s$  la saturación de luz,  $C_t$  la constante de crecimiento térmico del fitoplancton,  $\phi_1$  la atenuación de la luz debida a la profundidad del agua,  $\phi_2$  es la atenuación de la luz debida a la presencia de fitoplancton y  $\mu$  la tasa máxima de crecimiento para el fitoplancton.

Si suponemos que  $\phi_2 = 0$  (el caso distinto de cero es análogo y sólo requiere unas pequeñas modificaciones en el sistema que hemos presentado al comienzo de este artículo) el sistema anterior se puede considerar como un caso particular del sistema (1) y, dependiendo de la regularidad del término de convección y los datos, lo incluiremos como un caso particular de la simplificación cuasilineal o un caso particular de la simplificación semilineal. En concreto, suponiendo que los términos fuente y de frontera son nulos y que las condiciones iniciales tienen la regularidad requerida en cada caso, si:

- $\mathbf{w} \cdot \nabla u \in L^2(I; H^1(\Omega)^*)$ ,  $\forall u \in L^2(I; H^1(\Omega))$ , se incluye en la simplificación cuasilineal,
- $\mathbf{w} \cdot \nabla u \in L^{1+\epsilon^*}(I; W^{1,q}(\Omega)^*)$ ,  $\forall u \in L^2(I; H^1(\Omega))$ , con  $\epsilon^* > 0$  y  $1 < q < \infty$ , se incluye en la simplificación semilineal.

En este trabajo supondremos que la velocidad  $\mathbf{w}$ , los términos fuente  $g^i$ , de contorno  $h^i$  y  $\alpha_i$  en (10) son cero y que las condiciones iniciales son suficientemente regulares ( $u_0^i \in W^{\frac{7}{5}, \frac{10}{3}}(\Omega)$ ). Bajo estas hipótesis tiene sentido la formulación débil del problema y, además, puede obtenerse regularidad adicional ( $u^i \in W^{\frac{2,1}{\frac{10}{3}}}(Q)^2 \cap \mathcal{C}(\overline{Q})$ ) empleando técnicas y resultados de [2]. Una vez demostrada la regularidad adicional para la solución, podemos demostrar la unicidad de la misma, la continuidad y la derivabilidad con respecto a las condiciones iniciales.

## 2. El problema de control. Depuración de aguas en Biorreactores.

La idea fundamental de los biorreactores consiste en estancar el agua rica en nitrógeno en grandes tanques a los cuales añadiremos una cierta cantidad de fitoplancton que dejaremos desarrollarse para que absorba el nitrógeno del agua.

En el problema de control que planteamos tenemos dos tanques de igual volumen. El agua rica en nitrógeno llegaría al primer tanque, al cual añadiríamos una cierta cantidad de fitoplancton que dejaríamos crecer para que hiciese descender los niveles de nitrógeno hasta un cierto umbral máximo. En este primer tanque nos interesaría también que se produjera una cierta cantidad de detritos orgánicos pues serían una buena fuente de abono agrícola. Alcanzados los niveles máximo de nitrógeno y mínimo de detritos, filtramos los

---

<sup>2</sup> $W_p^{2,1}(Q) = \{u \in L^p(Q) : \|u\|_{L^p(Q)} + \|\frac{\partial u}{\partial t}\|_{L^p(Q)} + \sum_{j=1}^3 \|\frac{\partial u}{\partial x_j}\|_{L^p(Q)} + \sum_{i,j=1}^3 \|\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}\|_{L^p(Q)} < \infty\}$

detritos y pasamos el agua a un segundo tanque para volver a repetir la operación. El agua que salga de este segundo tanque será agua pobre en nitrógeno, pero sin embargo, puede contener una gran cantidad de fitoplancton que también nos interesaría minimizar. Por lo tanto, se trata de controlar la cantidad de fitoplancton que tenemos que añadir a cada uno de los dos tanques, para que los niveles de nitrógeno estén por debajo de unos máximos y los de detritos por encima de unos mínimos y de forma que la concentración final de fitoplancton sea lo más reducida posible.

Desde el punto de vista matemático este problema se puede plantear como un problema de control óptimo con restricciones sobre el estado, en donde el control  $(\rho^1, \rho^2)$  será la concentración de fitoplancton que añadiremos a cada uno de los tanques.

- **Ecuaciones de estado.** Tenemos dos sistemas de ecuaciones de estado, uno para cada tanque ( $\Omega_1$  y  $\Omega_2$ ). En principio, vamos a prescindir de la ecuación del oxígeno disuelto pues no juega un papel relevante. Al cambiar de tanque, supondremos que el agua se mezcla y es por ello que las condiciones iniciales para el tanque 2 serán la media de las concentraciones, en el tiempo final, del tanque 1.

- **Tanque 1.** Las variables de estado para el tanque 1 serán:  $u^{1,1}$  (nitrógeno),  $u^{2,1}$  (fitoplancton),  $u^{3,1}$  (zooplancton) y  $u^{5,1}$  (detritos orgánicos). El tiempo de permanencia en el primer tanque será  $T_1$ , siendo  $Q_1 = [0, T_1] \times \Omega_1$  y  $\Sigma_1 = [0, T_1] \times \partial\Omega_1$ .

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u^{1,1}}{\partial t} - \nabla \cdot (\mu_1 \nabla u^{1,1}) - A \frac{u^{2,1}}{K_N + u^{2,1}} u^{1,1} + (K_r + K_{mf}) u^{1,1} + K_z \frac{u^{1,1}}{K_F + u^{1,1}} u^{3,1} = 0 \text{ en } Q_1, \\ \frac{\partial u^{2,1}}{\partial t} - \nabla \cdot (\mu_2 \nabla u^{2,1}) + C_{nc} A \frac{u^{2,1}}{K_N + u^{2,1}} u^{1,1} - C_{nc} K_r u^{1,1} - C_{nc} K_{rd} \Theta^{\theta-20} u^{5,1} = 0 \text{ en } Q_1, \\ \frac{\partial u^{3,1}}{\partial t} - \nabla \cdot (\mu_3 \nabla u^{3,1}) - C_{fz} K_z \frac{u^{1,1}}{K_F + u^{1,1}} u^{3,1} + K_{mz} u^{3,1} = 0 \text{ en } Q_1, \\ \frac{\partial u^{5,1}}{\partial t} - \nabla \cdot (\mu_5 \nabla u^{5,1}) - K_{mf} u^{1,1} - K_{mz} u^{3,1} + K_{rd} \Theta^{\theta-20} u^{5,1} - W_{fd} \frac{\partial u^{5,1}}{\partial z} = 0 \text{ en } Q_1, \\ i = 1, 2, 3, 5, \quad \nabla u^{i,1} \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ sobre } \Sigma_1, \\ i = 1, 3, \quad u^{i,1}(0) = u_0^{i,1} \text{ en } \Omega_1, \\ u^{2,1}(0) = u_0^{2,1} + \rho^1 \text{ en } \Omega_1, \\ u^{5,1}(0) = 0, \text{ en } \Omega_1. \end{array} \right. \quad (12)$$

- **Tanque 2.** Las variables de estado para el tanque 1 serán:  $u^{1,2}$  (nitrógeno),  $u^{2,2}$  (fitoplancton),  $u^{3,2}$  (zooplancton) y  $u^{5,2}$  (detritos orgánicos). El tiempo de permanencia en el segundo tanque será  $T_2$ , siendo  $Q_2 = [0, T_2] \times \Omega_2$  y  $\Sigma_2 = [0, T_2] \times \partial\Omega_2$ .

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u^{1,2}}{\partial t} - \nabla \cdot (\mu_1 \nabla u^{1,2}) - A \frac{u^{2,2}}{K_N + u^{2,2}} u^{1,2} + (K_r + K_{mf}) u^{1,2} + K_z \frac{u^{1,2}}{K_F + u^{1,2}} u^{3,2} = 0 \text{ en } Q_2, \\ \frac{\partial u^{2,2}}{\partial t} - \nabla \cdot (\mu_2 \nabla u^{2,2}) + C_{nc} A \frac{u^{2,2}}{K_N + u^{2,2}} u^{1,2} - C_{nc} K_r u^{1,2} - C_{nc} K_{rd} \Theta^{\theta-20} u^{5,2} = 0 \text{ en } Q_2, \\ \frac{\partial u^{3,2}}{\partial t} - \nabla \cdot (\mu_3 \nabla u^{3,2}) - C_{fz} K_z \frac{u^{1,2}}{K_F + u^{1,2}} u^{3,2} + K_{mz} u^{3,2} = 0 \text{ en } Q_2, \\ \frac{\partial u^{5,2}}{\partial t} - \nabla \cdot (\mu_5 \nabla u^{5,2}) - K_{mf} u^{1,2} - K_{mz} u^{3,2} + K_{rd} \Theta^{\theta-20} u^{5,2} - W_{fd} \frac{\partial u^{5,2}}{\partial z} = 0 \text{ en } Q_2, \\ i = 1, 2, 3, 5, \quad \nabla u^{i,2} \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ sobre } \Sigma_2, \\ i = 1, 3, \quad u^{i,2}(0) = \frac{1}{\mu(\Omega_1)} \int_{\Omega_1} u^{i,1}(T_1) dx \text{ en } \Omega_2, \\ u^{2,2}(0) = \frac{1}{\mu(\Omega_1)} \int_{\Omega_1} u^{2,1}(T_1) dx + \rho^2 \text{ en } \Omega_2, \\ u^{5,2}(0) = 0 \text{ en } \Omega_2. \end{array} \right. \quad (13)$$

- **Funcional de coste.** Tal y como hemos explicado antes, nos interesa minimizar la concentración de fitoplancton que sale del tanque 2:

$$J(\rho^1, \rho^2) = \frac{1}{2} \|u^{2,2}(T_2)\|_{L^2(\Omega_2)}^2. \quad (14)$$

- **Restricciones sobre el estado.** La concentración final de nitrógeno en cada uno de los tanques debe de estar por debajo de unos niveles máximos y la concentración final de detritos por encima de unos niveles mínimos:

$$\left\{ \begin{array}{l} B_1(\rho^1, \rho^2) = \frac{1}{\mu(\Omega_1)} \int_{\Omega_1} u^{1,1}(T_1) dx \leq \sigma_1, \quad B_2(\rho^1, \rho^2) = \frac{1}{\mu(\Omega_2)} \int_{\Omega_2} u^{1,2}(T_2) dx \leq \sigma_2, \\ B_3(\rho^1, \rho^2) = \frac{1}{\mu(\Omega_1)} \int_{\Omega_1} u^{5,1}(T_1) dx \geq \theta_1, \quad B_4(\rho^1, \rho^2) = \frac{1}{\mu(\Omega_2)} \int_{\Omega_2} u^{5,2}(T_2) dx \geq \theta_2. \end{array} \right. \quad (15)$$

Por lo tanto, la formulación del problema de control óptimo será la siguiente:

$$(\mathcal{P}) \quad \inf \{ J(\rho^1, \rho^2) \text{ t.q. } (\rho^1, \rho^2) \in \mathcal{U}_{ad}, \text{ con } (u^{1,1}, u^{5,1}, u^{1,2}, u^{5,2}) \text{ verificando (15)} \}, \quad (16)$$

donde  $\mathcal{U}_{ad} \subset W^{\frac{7}{5}, \frac{10}{3}}(\Omega_1) \times W^{\frac{7}{5}, \frac{10}{3}}(\Omega_2)$  es un subconjunto acotado, convexo, cerrado y no vacío.

Podemos probar que este problema de control admite solución no necesariamente única. Además, si  $(\rho_0^1, \rho_0^2)$  es una solución del problema de control, entonces existirá una constante  $\gamma \geq 0$ ,  $\vec{\lambda} \in \mathbb{R}^4$  y elementos  $(u_0^{1,1}, u_0^{2,1}, u_0^{3,1}, u_0^{5,1})$ ,  $(p_0^{1,1}, p_0^{2,1}, p_0^{3,1}, p_0^{5,1}) \in W_{\frac{10}{3}}^{2,1}(Q_1) \cap \mathcal{C}(\overline{Q_1})$ ,  $(u_0^{1,2}, u_0^{2,2}, u_0^{3,2}, u_0^{5,2})$ ,  $(p_0^{1,2}, p_0^{2,2}, p_0^{3,2}, p_0^{5,2}) \in W_{\frac{10}{3}}^{2,1}(Q_2) \cap \mathcal{C}(\overline{Q_2})$  únicos tales que:

- $(u_0^{1,1}, u_0^{2,1}, u_0^{3,1}, u_0^{5,1})$  y  $(u_0^{1,2}, u_0^{2,2}, u_0^{3,2}, u_0^{5,2})$  verifican las **ecuaciones de estado** (12)-(13),
- $\vec{\lambda} \in \partial \kappa_E(\mathbf{B}(\rho_0^1, \rho_0^2))$ , donde  $E = [0, \sigma_1] \times [0, \sigma_2] \times [\theta_1, \infty) \times [\theta_2, \infty)$ ,

- $(p_0^{1,1}, p_0^{2,1}, p_0^{3,1}, p_0^{5,1})$  y  $(p_0^{1,1}, p_0^{2,1}, p_0^{3,1}, p_0^{5,1})$  verifican las **ecuaciones del estado adjunto**:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \mathbf{p}_0^1}{\partial t} - \operatorname{div}(A_\mu \nabla \mathbf{p}_0^1) = DE(\mathbf{c}_0^1)^T \mathbf{p}_0^1 \text{ en } Q_1, \\ \frac{\partial \mathbf{p}_0^2}{\partial t} - \operatorname{div}(A_\mu \nabla \mathbf{p}_0^2) = DE(\mathbf{c}_0^2) \mathbf{p}_0^2 \text{ en } Q_2, \\ \nabla \mathbf{p}_0^1 \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ sobre } \Sigma_1, \\ \nabla \mathbf{p}_0^2 \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ sobre } \Sigma_2, \\ p_0^{1,1}(T^1) = \lambda_1 + \frac{1}{\mu(\Omega_1)} \int_{\Omega_2} p_0^{1,2}(0) dx \text{ en } \Omega_1, \\ p_0^{2,1}(T^1) = \frac{1}{\mu(\Omega_1)} \int_{\Omega_2} p_0^{2,2}(0) dx \text{ en } \Omega_1, \\ p_0^{3,1}(T^1) = \frac{1}{\mu(\Omega_1)} \int_{\Omega_2} p_0^{3,2}(0) dx \text{ en } \Omega_1, \\ p_0^{5,1}(T^1) = \lambda_3 \text{ en } \Omega_1, \\ p_0^{1,2}(T^2) = \lambda_2, p_0^{5,2}(T^2) = \lambda_4, p_0^{i,2}(T^2) = 0, i = 2, 3, \text{ en } \Omega_2, \end{array} \right. \quad (17)$$

donde  $\mathbf{u}^i = (u^{1,i}, u^{2,i}, u^{3,i}, u^{5,i})$  y  $DE(\mathbf{u}^i)$  es la siguiente matriz:

$$\left( \begin{array}{cccc} -C_{nc} A \frac{K_N}{(K_N + u^{1,i})^2} u^{2,i} & -C_{nc} A \frac{u^{1,i}}{K_N + u^{1,i}} + C_{nc} K_r & 0 & C_{nc} K_{rd} \Theta^{\theta-20} \\ A \frac{K_N}{(K_N + u^{1,i})^2} u^{2,i} & A \frac{u^{1,i}}{K_N + u^{1,i}} - (K_r + K_{mf}) - K_z \frac{K_F}{(K_F + u^{2,i})^2} u^{3,i} & -K_z \frac{u^{2,i}}{K_F + u^{2,i}} & 0 \\ 0 & C_{fz} K_z \frac{K_F}{(K_F + u^{2,i})^2} u^{3,i} & C_{fz} K_z \frac{u^{2,i}}{K_F + u^{2,i}} - K_{mz} & 0 \\ 0 & K_{mf} & K_{mz} & -K_{rd} \Theta^{\theta-20} \end{array} \right) \quad (18)$$

- Se satisface la siguiente **condición de optimalidad**:

$$\begin{aligned} & \gamma J'(\rho_0^1, \rho_0^2)(\rho^1 - \rho_0^1, \rho^2 - \rho_0^2) + \\ & \frac{1}{\mu(\Omega_1)} \int_{\Omega_1} (\rho^1 - \rho_0^1) p^{2,1} dx + \frac{1}{\mu(\Omega_2)} \int_{\Omega_2} (\rho^2 - \rho_0^2) p^{2,2} dx \geq 0, \quad \forall (\rho^1, \rho^2) \in \mathcal{U}_{ad}. \end{aligned} \quad (19)$$

### 3. Resolución numérica del problema. Un algoritmo de puntos interiores.

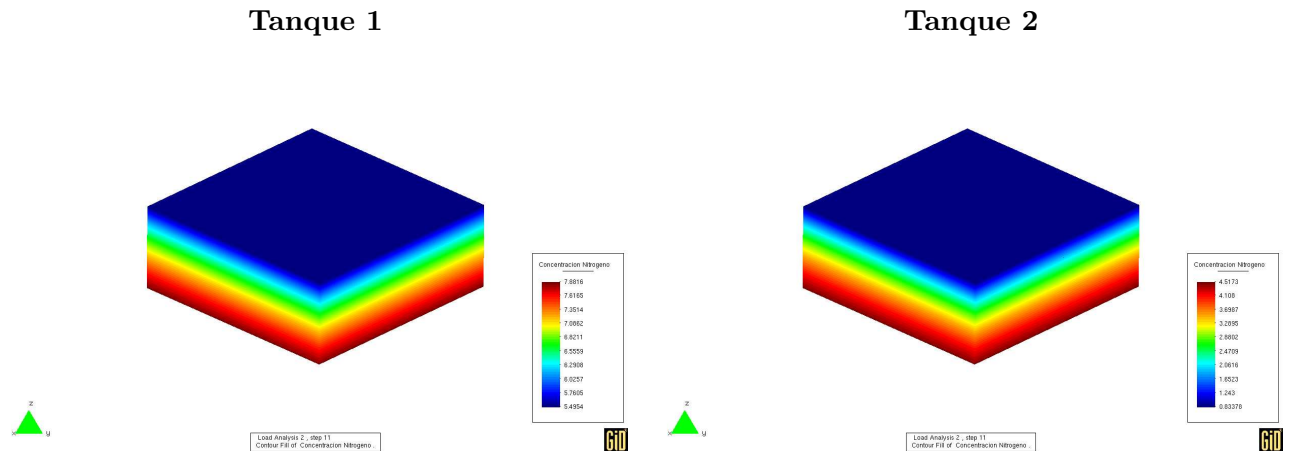
La resolución numérica del problema de control que hemos planteado, presenta una serie de complejidades como son la resolución de la ecuación de estado, la resolución de las ecuaciones linealizadas (necesarias para el cálculo del gradiente del funcional de coste

y de las restricciones) o la propia resolución del problema de minimización asociado. Para la resolución numérica de la ecuación de estado hemos empleado una discretización por elementos finitos combinada con un algoritmo de punto fijo para resolver la no linealidad y, en el caso de las ecuaciones linealizadas, hemos empleado un algoritmo de relajación para tratar el acoplamiento entre especies. Por último, la resolución del problema de minimización asociado, la hemos realizado empleando el código IPOPT, un algoritmo de puntos interiores cuya descripción se puede ver en [4].

A continuación presentamos, a modo de ejemplo, la evolución del algoritmo en un test con parámetros académicos en donde se alcanza saturación en una de las restricciones:

iter	objective	inf_pr	inf_du	lg(mu)	d
0	3.6024684e+01	0.00e+00	5.09e+00	0.0	0.00e+00
1	1.8439766e+01	3.10e-01	1.74e+00	0.2	4.88e+00
2	1.8474918e+01	9.91e-04	5.75e-01	-1.1	3.45e-01
3	1.8057410e+01	1.65e-03	9.65e-02	-2.3	1.94e-01
4	1.8055934e+01	3.79e-04	3.56e-01	-3.2	2.01e-03
5	1.8055104e+01	2.21e-07	2.37e-04	-4.7	1.62e-03
6	1.8055061e+01	7.15e-11	1.13e-06	-9.0	6.92e-06
7	1.8055061e+01	2.66e-13	4.33e-12	-9.0	1.52e-09

En las siguientes figuras se puede apreciar el comportamiento de las concentraciones de nitrógeno en el tiempo final para cada uno de los tanques:



## Referencias

- [1] M. Drago, B. Cescon, L. Iovenitti, *A three-dimensional numerical model for eutrophication and pollutant transport*. Ecological Modelling, 145 (2001), 17-34.
- [2] O. A. Ladyzenskaja, V. Solonnikov, N. N. Ural'ceva, *Linear and Quasilinear Equations of Parabolic Type*. Translations of Mathematical Monographs, Vol. 23. A.M.S., Providence, 1968.
- [3] T. Roubíček, *Nonlinear Partial Differential Equations with Applications*. Birkhäuser, Berlin, 2005.
- [4] A. Wächter, L. T. Biegler, *On the implementation of an interior-point filter line-search algorithm for large-scale nonlinear programming*. Math. Program., Ser. A, 106 (2006), 25-27.