

Estudio de la estabilidad dinámica de pares eje-cojinete en problemas evolutivos de lubricación

J. DURANY¹, J. PEREIRA-PÉREZ¹, F. VARAS¹

¹ *Dpto. Matemática Aplicada II, Universidad de Vigo, Campus Marcosende, E-36313 Vigo. E-mails: durany@dma.uvigo.es, curro@dma.uvigo.es.*

Palabras clave: Termohidrodinámica, lubricación, elementos finitos, volúmenes finitos, elementos de contorno, estabilidad.

Resumen

En este trabajo se presenta un modelo matemático y una combinación de métodos numéricos para la resolución de problemas termohidrodinámicos evolutivos en lubricación de pares eje-cojinete. En concreto, un método de elementos finitos para el problema hidrodinámico, junto a un algoritmo de dualidad para la parte no lineal de frontera móvil (cavitación). Además, un esquema de volúmenes finitos, de tipo cell-vertex de orden dos, para el cálculo de la temperatura del fluido, y un método de elementos de contorno para la térmica del cojinete.

Una de las aplicaciones importantes, por su interés industrial, se refiere al análisis de la estabilidad del dispositivo mecánico. En este sentido, la resolución numérica que se presenta permite comparar el comportamiento dinámico del par eje-cojinete con la curva de estabilidad neutra que se obtiene al utilizar modelos analíticos simplificados.

1. Modelo termohidrodinámico de lubricación

El modelo termohidrodinámico que se describe es clásico en el análisis de la lubricación de pares eje-cojinete (ver [4], entre otros). Primero, se formula la ecuación de Reynolds con un modelo de cavitación de Elrod-Adams para el cálculo de la presión del fluido lubricante. A continuación, se plantea el problema térmico en el dispositivo mediante la ecuación de la energía para la temperatura del fluido y unas ecuaciones de conducción térmica en el eje y en el cojinete. El acoplamiento de las ecuaciones en derivadas parciales viene dada, por una parte, por una ley de variación de la viscosidad en función de la temperatura en la ecuación del flujo y, por otra parte, por medio de la influencia del campo de velocidades en la ecuación de la energía. Además, el acoplamiento térmico del fluido con el dispositivo viene dado por las condiciones de contorno en las paredes de contacto con eje y cojinete.

Para simplificar los cálculos se emplean variables adimensionales y el dominio del fluido se transforma en un paralelepípedo. Las ecuaciones para este cambio de variable son:

$$x = R_a\theta, \quad y = h\bar{y}, \quad z = L\bar{z}, \quad ; \quad u = \omega R_a\bar{u}, \quad v = \omega C\bar{v}, \quad w = \omega R_a\bar{w}, \quad t = \omega\tau, \quad (1)$$

donde los valores R_a , L , C y h representan el radio del eje, la longitud del par, el juego radial y la altura de la película de fluido, respectivamente, y (u, v, w) las componentes de la velocidad. La velocidad angular de rotación del eje está denotada por ω , y el tiempo real por la variable τ .

Se definen también los siguientes cambios de variable que afectan a otras magnitudes:

$$h = C\bar{h}, \quad \eta = R_a/L, \quad T = T_0\bar{T}, \quad \mu = \mu_0\bar{\mu}, \quad p = \mu_0\omega \left(\frac{R_a}{C}\right)^2 \bar{p}. \quad (2)$$

En estas ecuaciones T_0 y μ_0 representan la temperatura y la viscosidad del fluido en la ranura de alimentación, que se utilizarán de referencia, mientras que p y T representan la presión y temperatura de la película de lubricante.

Realizando el cambio de variable en el espacio comprendido entre el eje y el cojinete, el dominio adimensional se convierte en un volumen comprendido entre la superficie rectangular $\Omega_1 = [0, 2\pi] \times [0, 1]$ para (θ, \bar{z}) y la altura:

$$\bar{h} = 1 + \varepsilon \cos\theta, \quad (3)$$

con ε representando el coeficiente de excentricidad del par eje-cojinete.

El modelo matemático del problema de lubricación con cavitación se realiza mediante el modelo de Elrod-Adams (ver [3], por ejemplo), introduciendo una incógnita adicional que representa la concentración o índice de cavitación: ϑ . Esta función ϑ vale uno en la zona activa (Ω_1^+) y toma valores en el intervalo $(0, 1)$ en la zona cavitada (Ω_1^0). De este modo, el problema se formula en los siguientes términos:

Hallar (p, ϑ) tales que se verifiquen las condiciones:

$$\frac{\partial}{\partial\theta} \left(\bar{h}^3 \bar{G} \frac{\partial \bar{p}}{\partial\theta} \right) + \frac{\partial}{\partial\bar{z}} \left(\bar{h}^3 \bar{G} \frac{\partial \bar{p}}{\partial\bar{z}} \right) = \frac{\partial}{\partial\theta} \left(\bar{h} \left(1 - \frac{\bar{I}_2}{J_2} \right) \right) + \frac{\partial(\vartheta\bar{h})}{\partial t}, \quad (4)$$

$\bar{p} > 0$ y $\vartheta = 1$ en $\Omega_1^+ \times [0, t_F]$

$$\frac{\partial}{\partial\theta} \left(\vartheta\bar{h} \left(1 - \frac{\bar{I}_2}{J_2} \right) \right) + \frac{\partial(\vartheta\bar{h})}{\partial t} = 0, \quad \bar{p} = 0, \quad 0 \leq \vartheta \leq 1 \text{ en } \Omega_1^0 \times [0, t_F], \quad (5)$$

$$\bar{h}^3 \bar{G} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \vec{n}} = (1 - \vartheta)\bar{h} \left(1 - \frac{\bar{I}_2}{J_2} \right) \cos(\vec{n}, \vec{i}), \quad \bar{p} = 0 \text{ en } \Sigma \times [0, t_F], \quad (6)$$

$$\bar{p} = 0 \text{ en } \partial\Omega_1 \times [0, t_F], \quad \vartheta = \vartheta_0 \text{ en } \Gamma_0 \times [0, t_F], \quad (7)$$

$$\bar{p}(0, \theta, \bar{z}) = \bar{p}^0(\theta, \bar{z}), \quad \vartheta(0, \theta, \bar{z}) = \vartheta^0(\theta, \bar{z}), \quad (8)$$

donde se ha realizado un nuevo cambio de variable, $\bar{z} = \frac{\bar{z}}{\eta}$, para simplificar las ecuaciones, transformando el dominio en $\Omega_1 = [0, 2\pi] \times [0, \frac{1}{\eta}]$. Además, Σ representa la frontera libre entre la zona activa Ω_1^+ y la zona cavitada Ω_1^0 , \vec{n} es el vector normal a la frontera Σ , \vec{i} es

el vector unitario en la dirección θ , Γ_0 la frontera de alimentación de fluido ($\theta = 0$) y t_F el tiempo final. Los coeficientes viscosos que intervienen en el problema están dados por:

$$\bar{G} = \int_0^1 \frac{\bar{y}}{\bar{\mu}} \left(\bar{y} - \frac{\bar{I}_2}{\bar{J}_2} \right) d\bar{y} \quad , \quad \bar{I}_2 = \int_0^1 \frac{\bar{y}}{\bar{\mu}} d\bar{y} \quad , \quad \bar{J}_2 = \int_0^1 \frac{d\bar{y}}{\bar{\mu}} \quad , \quad (9)$$

y la viscosidad del fluido, $\bar{\mu}$, se considera variable con la temperatura según la ley:

$$\bar{\mu} = e^{-\beta T_0(\bar{T}-1)} \quad (10)$$

donde β es el coeficiente termoviscoso y T_0 la temperatura de referencia.

Cuando las condiciones de funcionamiento de un par eje-cojinete son normales, los gradientes axiales de temperatura son despreciables y la ecuación de la energía para la temperatura del fluido lubricante \bar{T}_f se puede plantear en un plano medio en coordenadas de longitud y espesor (θ, \bar{y}) (ver [4], entre otros):

$$\begin{aligned} \rho c_p \frac{C^2}{k} \frac{\partial \bar{T}_f}{\partial t} + Pe \left[\bar{u} \frac{\partial \bar{T}_f}{\partial \theta} + \frac{1}{\bar{h}} \left(\bar{v} - \bar{u} \bar{y} \frac{\partial \bar{h}}{\partial \theta} \right) \frac{\partial \bar{T}_f}{\partial \bar{y}} \right] - \frac{1}{\bar{h}^2} \frac{\partial^2 \bar{T}_f}{\partial \bar{y}^2} = \\ = N_d \frac{\bar{\mu}}{\bar{h}^2} \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} \right)^2 \quad , \quad \text{en } \Omega_f \times [0, t_F] \quad , \end{aligned} \quad (11)$$

donde ρ , c_p y k denotan densidad, calor específico y conductividad, Pe es el número de Peclet, N_d un parámetro adimensional asociado a la disipación viscosa, $\Omega_f = [0, 2\pi] \times [0, 1]$ el dominio adimensional de una sección longitudinal y las componentes de la velocidad, $\vec{v} = (\bar{u}, \bar{v})$, están definidas a partir de la presión del fluido, \bar{p} , por:

$$\bar{u} = \bar{h}^2 \frac{\partial \bar{p}}{\partial \theta} \left(\bar{I} - \frac{\bar{I}_2}{\bar{J}_2} \bar{J} \right) + \frac{\bar{J}}{\bar{J}_2} \quad ; \quad \bar{v} = -\bar{h} \int_0^{\bar{y}} \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial \theta^*} \right) d\xi \quad , \quad (12)$$

con \bar{I}_2 , \bar{J}_2 dadas en (9) y las nuevas integrales, \bar{I} , \bar{J} , definidas por:

$$\bar{I} = \int_0^{\bar{y}} \frac{\xi}{\bar{\mu}} d\xi \quad ; \quad \bar{J} = \int_0^{\bar{y}} \frac{d\xi}{\bar{\mu}} \quad . \quad (13)$$

La ecuación de conservación de la energía (11) debe reformularse sobre la región cavitada para tener en cuenta la presencia de la mezcla. Así, con las adimensionalizaciones correspondientes, el problema térmico se formula en Ω_f mediante la misma expresión (11), pero ahora con ρ , c_p , k , Pe y N_d dependiendo de la concentración del fluido:

$$\begin{aligned} \rho c_p = \rho_f c_f \vartheta + \rho_a c_a (1 - \vartheta) \quad ; \quad k = k_f \vartheta + k_a (1 - \vartheta) ; \\ Pe = \frac{\omega C^2 [\rho_f c_f \vartheta + \rho_a c_a (1 - \vartheta)]}{[k_f \vartheta + k_a (1 - \vartheta)]} \quad ; \quad N_d = \frac{\mu_0 \omega^2 R_a^2}{[k_f \vartheta + k_a (1 - \vartheta)] T_0} \quad , \end{aligned} \quad (14)$$

siendo ρ_f , c_f , k_f , ρ_a , c_a , k_a la densidad, el calor específico y la conductividad del fluido y el gas, respectivamente. Esta ecuación (11) se completa con las condiciones Dirichlet en la frontera de entrada $\theta = 0$ y en las fronteras de contacto con el eje ($\bar{y} = 1$) y el cojinete ($\bar{y} = 0$).

La ecuación de la energía en el cojinete se reduce a un problema evolutivo de difusión junto a las condiciones de contorno que la acoplan, por una parte, con la temperatura del fluido y, por otra parte, con las condiciones ambientales:

$$\rho_c c_{p_c} \frac{\partial T_c}{\partial t} - \operatorname{div}(k_c \nabla T_c) = 0 \quad \text{en } \Omega_c \times [0, t_F], \quad (15)$$

$$-k_c \frac{\partial T_c}{\partial \vec{n}} = h_c (T_c - T_a) \quad \text{en } \Gamma_c^e \times [0, t_F], \quad (16)$$

$$i) T_c = T_0 \bar{T}_f \quad \text{y} \quad ii) -k_c \frac{\partial T_c}{\partial \vec{n}} = k \frac{T_0}{C\bar{h}} \frac{\partial \bar{T}_f}{\partial \vec{y}} \quad \text{en } \Gamma_c^i \times [0, t_F], \quad (17)$$

$$T_c(\vec{x}, 0) = T_{c_0}(\vec{x}) \quad \text{en } \Omega_c, \quad (18)$$

donde T_c es la función temperatura en el cojinete, Ω_c el dominio anular del cojinete con frontera interior Γ_c^i y exterior Γ_c^e , k_c y k los coeficientes de difusión en el cojinete y en el fluido, ρ_c la densidad, c_{p_c} el calor específico, \vec{n} un vector, unitario, normal y exterior a las fronteras, T_a la temperatura ambiente, h_c el coeficiente de convección al exterior y T_{c_0} la temperatura inicial.

Finalmente, en el eje se considera un modelo de temperatura uniforme en cada instante de tiempo debido a las altas velocidades de rotación. Así, el calentamiento o enfriamiento se corresponde con el balance entre el calor recibido del fluido y el flujo térmico con el exterior. Es decir:

$$\int_{\Gamma_e} k \frac{T_0}{C\bar{h}} \frac{d\bar{T}_f}{d\vec{y}} dl = h_e (T_e - T_a) + A_e \frac{\partial T_e}{\partial t} \quad (19)$$

donde T_e es la temperatura en el eje, Γ_e la frontera con el fluido, h_e el coeficiente de convección al aire, A_e un coeficiente de capacidad calorífica y la derivada normal en la frontera se corresponde con la vertical.

2. Resolución numérica del problema acoplado

La resolución numérica del problema acoplado termohidrodinámico requiere la solución de cada uno de los sub-modelos que se han descrito en la sección anterior. En particular, la solución del problema hidrodinámico (4)–(8) en el fluido ha sido el objetivo de algunos trabajos previos de los autores. En esta sección se presenta un esquema del método numérico desarrollado en Durany–Pereira–Varas [2], [3], para problemas estacionarios y transitorios, respectivamente. En concreto, el esquema pasa por la construcción de una formulación débil en términos del operador multívoco de Heaviside, H , para tratar el problema de frontera móvil de la cavitación (ver Durany–García–Vázquez [1], para los detalles). A continuación, se realiza una semidiscretización en tiempo de la derivada material utilizando el método de las características, junto a una aproximación espacial con elementos finitos lineales a trozos. Finalmente, se aplica un algoritmo de dualidad para resolver la no linealidad debida al operador de Heaviside.

La ecuación de la energía en el fluido lubricante se resuelve mediante un esquema de volúmenes finitos de tipo *cell-vertex* de orden dos, siguiendo el trabajo de Morton–Stynes–Süli [5]. Este método combina unas buenas propiedades de monotonía en la recuperación de capas límite con una convergencia de orden dos bajo ciertas hipótesis de regularidad

(ver Durany–Pereira–Varas [2]). Además, conduce a un ensamblado muy sencillo, parecido al del método de elementos finitos, que se simplifica si las mallas son muy estructuradas.

La resolución del problema térmico en el cojinete se aborda empleando un método de reciprocidad dual combinado con una discretización de la frontera, tanto interna como externa, mediante elementos de contorno P1. Los nodos de la discretización son los vértices de los arcos que, en la frontera interna de contacto con el fluido, coinciden con los nodos de la malla utilizada en el método de volúmenes finitos. Se imponen las condiciones de continuidad del flujo en la frontera interior y la igualdad del flujo a la convección al ambiente en la frontera exterior. Este procedimiento tiene la ventaja de no tener que mallar todo el cojinete y, junto con la simetría del problema, permite reducir en gran medida el coste computacional de esta etapa (ver Durany–Pereira–Varas [3]).

Finalmente, el problema térmico (19) en el eje puede resolverse explícitamente de manera muy simple, ya que se trata de un problema unidimensional de balance de energía.

3. Análisis de la estabilidad dinámica del eje

Se puede determinar la fuerza ejercida por el fluido sobre el eje y relacionar el desplazamiento del centro del eje y la velocidad de ese desplazamiento con la variación de la fuerza (ver Frene et al. [4], para los detalles). Para ello, se presenta en primer lugar un método clásico basado en la obtención de un modelo analítico de la presión y una aproximación lineal en el entorno del punto de equilibrio. Esta técnica simplificada tiene el inconveniente de fijar la posición de la zona cavitada y, en consecuencia, es importante comparar los resultados que se obtienen con los correspondientes a utilizar el modelo hidrodinámico de Elrod–Adams para la cavitación descrito previamente.

La posición del eje queda definida por el vector $O_c\vec{O}_a$ cuyas coordenadas polares son el ángulo de desplazamiento del eje, ϕ , y la excentricidad dimensional del eje respecto del cojinete, $e = C\varepsilon$ (es habitual considerar dos sistemas de coordenadas: el sistema fijo (x, y) y el sistema (r, t) que se desplaza con el centro del eje).

Para resolver analíticamente la ecuación de Reynolds, se puede introducir una simplificación conocida como modelo de cojinete infinitamente largo. Esta aproximación se basa en considerar que $\partial p/\partial\theta$ es mucho mayor que $\partial p/\partial z$, con lo que la ecuación para la presión queda reducida a un caso unidimensional:

$$\frac{1}{R_a^2} \frac{\partial}{\partial\theta} \left(\frac{h^3}{\mu} \frac{\partial p}{\partial\theta} \right) = 6 \left[(\omega - 2\dot{\phi}) \frac{\partial h}{\partial\theta} + 2\dot{e} \cos\theta \right], \quad (20)$$

donde R_a es el radio del eje, $h = C(1 + \varepsilon\cos\theta)$ la altura de la película de fluido (ver ecuación (3)), μ la viscosidad del fluido, p la presión, ω la velocidad de rotación del eje, y $\dot{\phi}$, \dot{e} , son las derivadas temporales de las coordenadas polares de $O_c\vec{O}_a$. Esta ecuación (20) se corresponde con tomar el origen de ángulos, θ , sobre la línea de centros $O_c\vec{O}_a$ en el instante de tiempo considerado y, en consecuencia, es válida en el sistema de coordenadas móvil (r, t) . Si además se realiza la imposición de situar la zona activa (no cavitada) en $0 \leq \theta \leq \pi$, se puede resolver (20) analíticamente y obtener una expresión explícita de la

presión:

$$p = 6\mu \left(\frac{R_a}{C} \right)^2 \left[\frac{(\omega - 2\dot{\phi})\varepsilon \operatorname{sen}\theta(2 + \varepsilon \cos\theta)}{(2 + \varepsilon^2)(1 + \varepsilon \cos\theta)^2} + \frac{\dot{\varepsilon}}{\varepsilon} \left(\frac{1}{(1 + \varepsilon \cos\theta)^2} - \frac{1}{(1 + \varepsilon)^2} \right) - \frac{8\dot{\varepsilon}}{\pi(1 - \varepsilon^2)^2(\varepsilon^2 + 2)} \left\{ \frac{(\varepsilon^2 + 2)}{2} \arccos \left(\frac{\varepsilon + \cos\theta}{1 + \varepsilon \cos\theta} \right) - 2\varepsilon \sqrt{1 - \varepsilon^2} \frac{\operatorname{sen}\theta}{1 + \varepsilon \cos\theta} + \frac{\varepsilon^2 \sqrt{1 - \varepsilon^2}}{2} \frac{\operatorname{sen}\theta(\varepsilon + \cos\theta)}{(1 + \varepsilon \cos\theta)^2} \right\} \right]. \quad (21)$$

Una vez conocida la presión, p , se pueden determinar las componentes de la fuerza ejercida por el fluido sobre el eje, mediante la fórmula:

$$\vec{F} = \begin{bmatrix} F_r \\ F_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\phi & \operatorname{sen}\phi \\ -\operatorname{sen}\phi & \cos\phi \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \end{bmatrix} = \int_0^L \int_{\theta_1}^{\theta_2} p \begin{bmatrix} \cos\theta \\ \operatorname{sen}\theta \end{bmatrix} R_a d\theta dz, \quad (22)$$

siendo θ_1, θ_2 los límites de la zona activa, L la longitud del par eje-cojinete y se ha introducido el cambio de variable correspondiente. A partir de las expresiones de F_r, F_t , en función de $\varepsilon, \phi, \dot{\varepsilon}$ y $\dot{\phi}$ se realiza una aproximación en serie de Taylor de la fuerza en el entorno del punto considerado:

$$\begin{bmatrix} F_x \\ F_y \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} A_{xx} & A_{xy} \\ A_{yx} & A_{yy} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} B_{xx} & B_{xy} \\ B_{yx} & B_{yy} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{\bar{x}} \\ \dot{\bar{y}} \end{bmatrix}, \quad (23)$$

que relaciona el desplazamiento del centro del eje y la velocidad de ese desplazamiento con la variación de la fuerza. En el caso particular de disponer de la presión analítica (21), las componentes de la fuerza en coordenadas (r, t) son:

$$F_r = -12\mu L R_a \left(\frac{R_a}{C} \right)^2 \left[\frac{\varepsilon^2(\omega - 2\dot{\phi})}{(2 + \varepsilon^2)(1 - \varepsilon^2)} + \frac{\dot{\varepsilon}}{(1 - \varepsilon^2)^{3/2}} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{8}{\pi(2 + \varepsilon^2)} \right) \right], \quad (24)$$

$$F_t = 12\mu L R_a \left(\frac{R_a}{C} \right)^2 \left[\frac{\pi\varepsilon(\omega - 2\dot{\phi})}{2\sqrt{1 - \varepsilon^2}(2 + \varepsilon^2)} + \frac{2\varepsilon\dot{\varepsilon}}{(2 + \varepsilon^2)(1 - \varepsilon^2)} \right], \quad (25)$$

y los coeficientes matriciales de (23):

$$A_{xx} = \frac{2[8\varepsilon^2(2 + \varepsilon^4) + \pi^2(1 - \varepsilon^2)(2 - \varepsilon^2 + 2\varepsilon^4)]}{(2 + \varepsilon^2)(1 - \varepsilon^2)[4\varepsilon^2 + \pi^2(1 - \varepsilon^2)]^{3/2}}, \quad (26)$$

$$A_{xy} = \frac{\pi[8\varepsilon^2(2 + \varepsilon^4) + \pi^2(1 - \varepsilon^2)(2 - \varepsilon^2 + 2\varepsilon^4)]}{\varepsilon(2 + \varepsilon^2)\sqrt{1 - \varepsilon^2}[4\varepsilon^2 + \pi^2(1 - \varepsilon^2)]^{3/2}}, \quad (27)$$

$$A_{yx} = \frac{\pi[4\varepsilon^4 - \pi^2(1 - \varepsilon^2)^2]}{\varepsilon\sqrt{1 - \varepsilon^2}[4\varepsilon^2 + \pi^2(1 - \varepsilon^2)]^{3/2}} \quad ; \quad A_{yy} = \frac{2[4\varepsilon^2 + \pi^2(2 - \varepsilon^2)]}{[4\varepsilon^2 + \pi^2(1 - \varepsilon^2)]^{3/2}}, \quad (28)$$

$$B_{xx} = \frac{2[2\varepsilon^2(\pi^2(2 + \varepsilon^2) - 16) + \pi^2(1 - \varepsilon^2)(\pi^2(1 - \varepsilon^2) + 8\varepsilon^2)]}{\pi\varepsilon\sqrt{1 - \varepsilon^2}(4\varepsilon^2 + \pi^2(1 - \varepsilon^2))^{3/2}}, \quad (29)$$

$$B_{xy} = B_{yx} = \frac{2(\pi^2 - 8)(\varepsilon^2 + 2)}{(4\varepsilon^2 + \pi^2(1 - \varepsilon^2))^{3/2}} \quad ; \quad B_{yy} = \frac{\pi\sqrt{1 - \varepsilon^2}(\pi^2 - 8)(\varepsilon^2 + 2)}{\varepsilon(4\varepsilon^2 + \pi^2(1 - \varepsilon^2))^{3/2}}. \quad (30)$$

Cuando se buscan soluciones de tipo periódico para el sistema (23), se obtiene una condición de existencia para las mismas basada en el criterio de Routh-Hurwitz (ver [4]). Esta condición establece que para la ecuación de la velocidad de rotación adimensional del cojinete:

$$\tilde{\omega} = \omega_0 \sqrt{MC/W_0}, \quad (31)$$

con M la masa del eje y W_0 la carga soportada por el eje cuando se encuentra en equilibrio, existe un valor límite para el parámetro que interviene, ω_0 (velocidad crítica), dado por:

$$\tilde{\omega}_0^2 = \frac{B_{xx}B_{yy} - B_{xy}B_{yx}}{\frac{(B_{xx}+B_{yy})(A_{xx}A_{yy}-A_{xy}A_{yx})}{B_{xx}A_{yy}+B_{yy}A_{xx}-B_{xy}A_{yx}-B_{yx}A_{xy}} - \frac{B_{xx}A_{xx}+B_{yy}A_{yy}+B_{xy}A_{yx}+B_{yx}A_{xy}}{B_{xx}+B_{yy}}}. \quad (32)$$

De manera que para valores $\tilde{\omega} < \tilde{\omega}_0$ el movimiento es estable: ante una perturbación respecto a la posición de equilibrio el sistema retorna a dicha posición. Para valores $\tilde{\omega} > \tilde{\omega}_0$ las perturbaciones separan al eje de la posición de equilibrio estacionario y lo llevan a ciclos límite, causando la inestabilidad.

Sustituyendo las fórmulas (26)–(30) en (32), se determina la velocidad crítica para distintos valores de la excentricidad. Con los datos: $R_a = 0,0254$, $L = 0,0254$, $C = 0,000127$, $\mu = 0,0254$, $W_0 = 150 \text{ N}$, y M variable, en la Figura 1 se observa esta velocidad crítica, de manera que las relaciones $(\varepsilon, \tilde{\omega}_0)$ situadas por debajo de la curva presentan situaciones de estabilidad, mientras que las que se sitúan por encima son casos inestables. Además, la velocidad crítica tiene una asíntota vertical y es un número imaginario para valores altos de ε . En consecuencia, no se podría garantizar el comportamiento del par para valores de la excentricidad mayores que dicha asíntota.

Cuando el estudio dinámico se realiza a partir del modelo hidrodinámico de cavitación de Elrod-Adams (4)–(8), se incluye el cálculo de la fuerza \vec{F} , dada por (22), en cada iteración temporal del método numérico descrito en la Sección 2. Por otra parte, considerando el eje como un sólido rígido, se plantea la resolución numérica, mediante un método clásico de Newmark, del sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias que rige la aceleración del centro de gravedad del eje, (x_g, y_g) , en función de dicha fuerza:

$$M\ddot{x}_g = \int_{\Gamma_e} p n_x d\Gamma \quad ; \quad M\ddot{y}_g = \int_{\Gamma_e} p n_y d\Gamma, \quad (33)$$

siendo (n_x, n_y) las componentes del vector unitario, normal e interior a la frontera del eje. Los resultados obtenidos para los valores críticos de estabilidad se muestran en la Figura 1. Por ejemplo, para el valor de la excentricidad $\varepsilon = 0,5$, en la Figura 2 se puede comprobar el movimiento del centro del eje en tres comportamientos diferentes: caso estable, caso crítico y caso inestable, para los valores de $\tilde{\omega}_0 = 1,10, 2,5$ y $3,66$, respectivamente. Estos valores deberían ser más realistas que los del caso analítico, precisamente por no imponer la posición de la zona cavitada.

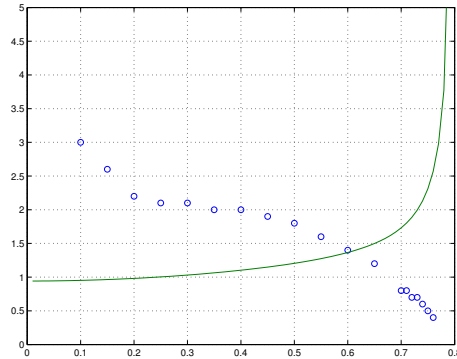


Figura 1: Velocidad crítica, $\tilde{\omega}_0$, frente a la excentricidad ε (analítica: puntos; numérica: círculos)

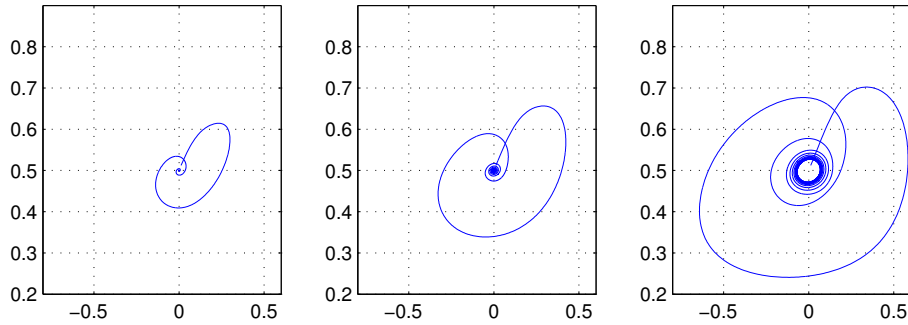


Figura 2: Movimiento del centro del eje (ángulo, excentricidad), para excentricidad inicial $\varepsilon = 0,5$. Caso estable, crítico e inestable, de izquierda a derecha.

Agradecimientos

Este trabajo ha sido parcialmente financiado por el Proyecto MTM2004-05796-C02-2 del MEC de España, incluyendo fondos FEDER (UE), y el Proyecto PGIDIT05PXIC32202PN de la Xunta Galicia.

Referencias

- [1] J. Durany, G. García, C. Vázquez. *Numerical simulation of a lubricated hertzian contact problem under imposed load*. Finite Elem. in Anal. and Design. Vol. **38** (2002), 645–658.
- [2] J. Durany, J. Pereira, F. Varas. *A cell-vertex finite volume method for thermohydrodynamic problems in lubrication theory*. Comp. Meth. Appl. Mech. Engrg., Vol. **195** (44-47) (2006), 5949-5961.
- [3] J. Durany, J. Pereira, F. Varas, *Resolución numérica de problemas evolutivos de lubricación termohidrodinámica y estabilidad de pares eje-cojinete*. En: Proceedings CMNE/CILAMCE 2007, APMTAC, Portugal, 2007.
- [4] J. Frene, D. Nicolas, B. Degueurce, D. Berthe, M. Godet. *Lubrification hydrodynamique*, Eyrolles, Paris, 1990.
- [5] K.W. Morton, M. Stynes, E. Suli. *Analysis of a cell-vertex finite volume method for convection-diffusion problems*. Math. of Comput. Vol. **66** (220) (1997), 1389–1406, .