XX Congreso de Ecuaciones Diferenciales y Aplicaciones
X Congreso de Matemática Aplicada
Sevilla, 24-28 septiembre 2007
(pp. 1–8)

El cambio de los invariantes por feedback mediante perturbación de columnas

M. A. Beitia[1], I. de Hoyos[2]

[1] *Dpto. de Didáctica de la Matemática y de las CCEE, Escuela de Magisterio, Universidad del País Vasco, E-01006 Vitoria-Gasteiz. E-mail:* `asuncion.beitia@ehu.es`.
[2] *Dpto. de Matemática Aplicada y Estadística e I.O., Facultad de Farmacia, Universidad del País Vasco, Apartado 450, E-01080 Vitoria-Gasteiz. E-mail:* `inmaculada.dehoyos@ehu.es`.

Palabras clave: perturbación estructurada, factores invariantes, índices de controlabilidad, desigualdades de entrelazamiento, mayorización

Resumen

Estudiamos la variación de los invariantes por feedback de una matriz rectangular $n \times (n+m)$ cuando realizamos pequeñas perturbaciones aditivas en las últimas m columnas, en algunos casos particulares.

1. Introducción

En las últimas décadas se ha estudiado el cambio de las formas canónicas de matrices obtenidas mediante la adición de una matriz con entradas suficientemente pequeñas (véase, por ejemplo, [2, 6, 8, 9, 10, 11]). En estos problemas se puede modificar todos los elementos de las matrices originales. En otros casos sólo se puede perturbar los elementos en unas determinadas posiciones, dando lugar a problemas de perturbación estructurada (véase [3, 4, 5, 7]). Nuestro problema consiste en estudiar el comportamiento de los invariantes por feedback cuando se perturban algunas columnas de una matriz rectangular.

En concreto, consideramos matrices rectangulares $[A\ B] \in \mathbb{C}^{n\times(n+m)}$ o, equivalentemente, pares de matrices (A, B) de $\mathbb{C}^{n\times n} \times \mathbb{C}^{n\times m}$. En primer lugar, obtenemos condiciones necesarias que han de verificar los invariantes por feedback de todas las matrices $[A\ B'] \in \mathbb{C}^{n\times(n+m)}$, siendo B' cualquier matriz suficientemente próxima a B.

Recíprocamente, obtenemos condiciones necesarias y suficientes que tienen que satisfacer unos polinomios y unos números enteros para ser los factores invariantes y los índices de controlabilidad de un par de matrices (A, B'), siendo B' una matriz tan próxima a B como queramos. Este problema lo hemos resuelto en los siguientes casos:

1. *cuando* (A, B) *es completamente controlable*;
2. *cuando* (A, B) *es completamente incontrolable, es decir,* $B = 0$;
3. *cuando* B *sólo tiene una columna*.

Estos problemas pueden considerarse también como problemas de completación de matrices, dado que una parte de la matriz queda fija (véase, por ejemplo, [1, 12, 13, 14, 15]).

2. Notaciones, definiciones y resultados previos

Una *partición* es una secuencia no creciente finita o infinita de enteros no negativos casi todos nulos, $a = (a_1, a_2, \dots)$. Denotamos por $|a|$ el *peso* de a, es decir, la suma de sus componentes.

La *partición conjugada* de a, $\overline{a} = (\overline{a}_1, \overline{a}_2, \dots)$ se define por $\overline{a}_k := \mathrm{Card}\{i : a_i \geq k\}$.

Sean a y b dos particiones de enteros. Se dice que a está mayorizada débilmente por b, i. e., $a \prec\!\!\prec b \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{k} a_i \leq \sum_{i=1}^{k} b_i$, para $k = 1, \dots, n$, y se dice que a está mayorizada por b, i. e., $a \prec b \Leftrightarrow a \prec\!\!\prec b$ y $\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{n} b_i$.

Definimos $a \cup b$ como la partición cuyas componentes son las de a y b reordenadas en orden no creciente.

Se verifica que $a \prec b \Leftrightarrow \overline{b} \prec \overline{a}$.

Sea X una matriz compleja $m \times n$, con $m \leq n$. Llamaremos *factores invariantes* de X, a los factores invariantes de la matriz polinomial $[sI_m \ 0] - X$. Denotaremos por $\mathrm{d}(\alpha)$ el grado del polinomio α.

Denotaremos por $\Lambda(X) := \{\lambda_1, \dots, \lambda_v\}$ el espectro de X; por $\mathrm{s}(\lambda_i, X)$ la partición de λ_i en la característica de Segre de X y por $\mathrm{w}(\lambda_i, X)$ la partición de λ_i en la característica de Weyr de X, i.e., en la partición conjugada de $\mathrm{s}(\lambda_i, X)$. Si $\lambda \notin \Lambda(X)$, $\mathrm{s}(\lambda, X) := (0)$ y $\mathrm{w}(\lambda, X) := (0)$.

Sean $\gamma_1 \mid \cdots \mid \gamma_m$ y $\gamma'_1 \mid \cdots \mid \gamma'_m$ polinomios mónicos dados. Sean $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_m)$ y $\gamma' = (\gamma'_1, \dots, \gamma'_m)$ las cadenas formadas por estos polinomios.

Definimos $\gamma' \prec\!\!\prec \gamma \Leftrightarrow \gamma'_1 \cdots \gamma'_i \mid \gamma_1 \cdots \gamma_i$, para $i = 1, \dots, m$
y $\gamma' \prec \gamma \Leftrightarrow \gamma' \prec\!\!\prec \gamma$ y $\gamma'_1 \cdots \gamma'_m = \gamma_1 \cdots \gamma_m$.

Ahora se puede enunciar el siguiente lema sobre mayorización débil de cadenas de polinomios.

Lema 1 *Dadas dos cadenas de polinomios mónicos* $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ *y* $\varphi' = (\varphi'_1, \dots, \varphi'_n)$ *tales que* $\varphi' \prec\!\!\prec \varphi$*, existe un número finito de cadenas intermedias de polinomios mónicos de tal manera que para pasar de una de ellas a la siguiente sólo hay que realizar una transformación elemental de uno de los dos tipos siguientes:*

(1) $\varphi'_i = \varphi_i \ \forall\ i \notin \{j, k\}$, $j < k$, $(s - \lambda_0)\varphi'_j = \varphi_j$ *y* $\varphi'_k = (s - \lambda_0)\varphi_k$*, para alguna raíz compleja de* φ_j*,*

(2) $\varphi'_i = \varphi_i \ \forall\ i \neq j$ *y* $(s - \lambda_0)\varphi'_j = \varphi_j$*, para alguna raíz compleja de* φ_j*.*

Denotaremos por $k_1 \geq \cdots \geq k_{r_1} > k_{r_1+1} = \cdots = k_q = 0$, los índices de controlabilidad de (A, B). Denotaremos por $(r_1, r_2, \dots)$ la partición de los índices de Brunovsky, que es la partición conjugada de la de los índices de controlabilidad.

En el siguiente resultado se dan las relaciones entre los invariantes del par y de la matriz cuadrada. Corresponde a un problema de completación de columnas.

Teorema 2 ([15], [1]). *Sea $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ y sean $\omega_1 \mid \cdots \mid \omega_n$ sus factores invariantes. Sean $\varphi_1 \mid \cdots \mid \varphi_n$ polinomios mónicos y $k_1 \geq \cdots \geq k_{r_1}$ enteros positivos dados. Entonces existe una matriz B con $\operatorname{rang}(B) = r_1$ tal que $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ son los factores invariantes y $k_1, \ldots, k_{r_1}$ los índices de controlabilidad no nulos de $[A\ B]$ si y sólo si*

(i) $\omega_{i-r_1} \mid \varphi_i \mid \omega_i$ *para* $i = 1, \ldots, n$,

(ii) $(k_1, \ldots, k_{r_1}) \prec (d(\theta_{r_1}), \ldots, d(\theta_1))$, *donde* $\theta_j = \frac{\prod_{i=1}^{n+j} \operatorname{mcm}(\varphi_{i-j}, \omega_{i-r_1})}{\prod_{i=1}^{n+j-1} \operatorname{mcm}(\varphi_{i-j+1}, \omega_{i-r_1})}$,
$j = 1, \ldots, r_1$, *siendo* $\varphi_i := 1$ *y* $\omega_i := 1$ *para* $i < 1$.

Denotaremos por $\|X\|$ cualquier norma de matriz de X.

Dado un número real $\rho > 0$, $B(\lambda_i, \rho)$ es la bola abierta con centro λ_i y radio ρ, y definimos el *ρ-entorno del espectro de M* como el conjunto $\mathcal{V}_\rho(M) := \bigcup_{i=1}^{v} B(\lambda_i, \rho)$, donde las bolas son disjuntas dos a dos. Un número real ρ suficientemente pequeño como para que se verifique lo anterior se llamará *adecuado* a la matriz M.

Ahora se presentan las condiciones necesarias de perturbación de un par de matrices.

Teorema 3 ([8]). *Sea $r = (r_1, r_2, \ldots)$ la partición de los números de Brunovsky de $(A, B) \in \mathbb{C}^{n\times n} \times \mathbb{C}^{n\times m}$. Sea $\Lambda(A, B) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_u\}$ el espectro de (A, B). Sea $\rho > 0$ adecuado a $[A\ \ B]$.*

Existe $\varepsilon > 0$ tal que si $\|[A\ \ B] - [A'\ \ B']\| < \varepsilon$, entonces se cumplen las condiciones:

(i) $\Lambda(A', B') \subset \mathcal{V}_\rho(A, B)$,

(ii) *si* $\mu_{ij} \in \Lambda(A', B') \cap B(\lambda_i, \rho)$, *para* $j = 1, \ldots, t_i$, *e* $i = 1, \ldots, u$, *entonces*
$\bigcup_{j=1}^{t_i} \mathrm{w}(\mu_{ij}, [A'\ \ B']) \prec\!\!\prec \mathrm{w}(\lambda_i, [A\ \ B])$, *para* $i = 1, \ldots, u$,

(iii) *si* $r' = (r'_1, r'_2, \ldots)$ *es la partición de los números de Brunovsky de* (A', B'), *entonces*
$r \prec\!\!\prec r' \quad y \quad r'_1 \leq m$,

(iv) $|r'| - |r| = \sum_{i=1}^{u} |\mathrm{w}(\lambda_i, [A\ \ B])| - \sum_{i=1}^{u} \sum_{j=1}^{t_i} |\mathrm{w}(\mu_{ij}, [A'\ \ B'])|$.

3. Relación de equivalencia asociada a este problema

Sean (A_1, B_1) y (A_2, B_2) dos pares de $\mathbb{C}^{n\times n} \times \mathbb{C}^{n\times m}$. Decimos que (A_1, B_1) es *PQ-equivalente* a (A_2, B_2), y lo denotaremos $(A_1, B_1) \overset{PQ}{\sim} (A_2, B_2)$ si existen matrices $P \in \mathbb{C}^{(n\times n)}$ y $Q \in \mathbb{C}^{(m\times m)}$ invertibles tales que $(A_2, B_2) = (PA_1P^{-1}, PB_1Q)$.

Puesto que esta relación es un caso particular de la relación de equivalencia por feedback, dos pares PQ-equivalentes tendrán los mismos índices de controlabilidad y los mismos factores invariantes.

El siguiente lema muestra que si se resuelve el problema para un par, se resuelve para cualquier otro de su clase.

Lema 4 *Sea* $[A_1 \ \ B_1] \in \mathbb{C}^{n\times(n+m)}$ *y sea* $[A_2 \ \ B_2] = [PA_1P^{-1} \ \ PB_1Q]$. *Entonces, en todo entorno de* $[A_1 \ \ B_1]$ *existe una matriz* $[A_1 \ \ B_1 + E_1]$ *con* $k'_1 \geq \cdots \geq k'_m \geq 0$ *como índices de controlabilidad y* $\varphi'_1 \mid \cdots \mid \varphi'_n$ *como factores invariantes si y sólo si en todo entorno de* $[A_2 \ \ B_2]$ *existe una matriz* $[A_2 \ \ B_2 + E_2]$ *con esos invariantes prescritos.*

4. Condiciones necesarias

Las condiciones necesarias de perturbación que se obtienen a partir del teorema de completación de columnas (Teorema 2) y el de perturbación de pares de matrices (Teorema 3) es el siguiente.

Teorema 5 *Sea* $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ *y sean* $\omega_1 \mid \cdots \mid \omega_n$ *sus factores invariantes. Sea* $[A \ B] \in \mathbb{C}^{n\times(n+m)}$ *con* $\varphi_1 \mid \cdots \mid \varphi_n$ *como factores invariantes y* $k_1 \geq \cdots \geq k_{r_1} > k_{r_1+1} = \cdots = k_m = 0$ *como índices de controlabilidad.*

Existe $\varepsilon > 0$ *tal que si* $\|[A \ \ B] - [A \ \ B']\| < \varepsilon$, $\varphi'_1 \mid \cdots \mid \varphi'_n$ *son los factores invariantes y* $k'_1 \geq \cdots \geq k'_{r'_1} > k'_{r'_1+1} = \cdots = k'_m = 0$ *son los índices de controlabilidad de* $[A \ B']$, *entonces se cumplen las condiciones:*

(i) $\omega_{i-r'_1} \mid \varphi'_i \mid \omega_i$ *para* $i = 1, \ldots, n$,

(ii) $(k'_1, \ldots, k'_{r'_1}) \prec (d(\theta'_{r'_1}), \ldots, d(\theta'_1))$, *donde*

$$\theta'_j = \frac{\prod_{i=1}^{n+j} \operatorname{mcm}(\varphi'_{i-j}, \omega_{i-r'_1})}{\prod_{i=1}^{n+j-1} \operatorname{mcm}(\varphi'_{i-j+1}, \omega_{i-r'_1})}, \quad j = 1, \ldots, r'_1,$$

siendo $\varphi'_i := 1$ *y* $\omega_i := 1$ *para* $i < 1$,

(iii)

$$\varphi' \prec\!\!\prec \varphi$$

(iv) *si* r' *es la partición de los números de Brunovsky de* (A, B'), *entonces* $r \prec\!\!\prec r'$.

5. Caso controlable

Supongamos que (A, B) es controlable con $k_1 \geq \cdots \geq k_m \geq 0$ como índices de controlabilidad. Si se perturba ligeramente la matriz B, el nuevo par (A, B') sigue siendo controlable, es decir, $\varphi' = \varphi = (1, \overset{(n)}{\ldots}, 1)$. En este caso, las condiciones del Teorema 5 se reducen a:

(ii) $k' = (k'_1, \ldots, k'_{r'_1}) \prec (d(\omega_n), \ldots, d(\omega_1))$,

(iv) $r \prec r'$.

Para el par (A, B) se cumple la relación $k = (k_1, \ldots, k_{r_1}) \prec (d(\omega_n), \ldots, d(\omega_1))$, siendo $r_1 = \operatorname{rang}(B)$.

Como $r \prec r' \iff k' \prec k$, podemos concluir que, en el caso controlable, las condiciones necesarias pueden reducirse a $k' \prec k$.

Se demuestra que en este caso, esta condición es suficiente para encontrar, tan cerca como queramos de B, una matriz B' de forma que (A, B') tenga $k'_1 \geq \cdots \geq k'_m \geq 0$ como índices de controlabilidad, como se enuncia en el siguiente teorema.

Teorema 6 *Sea $(A, B) \in \mathbb{C}^{n\times n} \times \mathbb{C}^{n\times m}$ un par controlable con $k_1 \geq \cdots \geq k_{r_1} > k_{r_1+1} = \cdots = k_m = 0$ como índices de controlabilidad.*

Sea $(k'_1, \ldots, k'_m)$ una partición no creciente de enteros.

Para todo $\varepsilon > 0$ existe una matriz B' con $\|[A \;\; B] - [A \;\; B']\| < \varepsilon$, tal que (A, B') es controlable y tiene $k'_1 \ldots k'_m$ como índices de controlabilidad si y sólo si

$$(k'_1, \ldots, k'_m) \prec (k_1, \ldots, k_m).$$

6. Caso completamente incontrolable

Supongamos que $(A, B) = (A, 0)$ y que los factores invariantes de A (y los de $[A \;\; 0]$) son $\omega_1 \mid \cdots \mid \omega_n$, es decir, $\varphi = \omega$. En este caso, la condición (iii) del Teorema 5 se deduce de la condición (i) y la condición (iv) es trivial. Por tanto las condiciones necesarias se reducen a la (i) y la (ii).

Se demuestra que en este caso, estas dos condiciones son suficientes para encontrar, con norma tan pequeña como queramos, una matriz B' de forma que (A, B') tenga $k'_1 \geq \cdots \geq k'_m \geq 0$ como índices de controlabilidad y $\varphi'_1 \mid \cdots \mid \varphi'_n$ como factores invariantes, como se enuncia en el siguiente teorema.

Teorema 7 *Sea $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ y sean $\omega_1 \mid \cdots \mid \omega_n$ sus factores invariantes.*

Sean $\varphi' = (\varphi'_1, \ldots, \varphi'_n)$ una cadena de polinomios mónicos y $k'_1 \geq \cdots \geq k'_{r'_1} > k'_{r'_1+1} = \cdots = k'_m = 0$ enteros.

Para todo $\varepsilon > 0$ existe una matriz B' con rango r'_1 y $\|B'\| < \varepsilon$, tal que (A, B') tiene $k'_1, \ldots, k'_m$ como índices de controlabilidad y $\varphi'_1 \mid \cdots \mid \varphi'_n$ como factores invariantes si y sólo si

(i) $\omega_{i-r'_1} \mid \varphi'_i \mid \omega_i$ *para* $i = 1, \ldots, n$,

(ii) $(k'_1, \ldots, k'_{r'_1}) \prec (d(\theta'_{r'_1}), \ldots, d(\theta'_1))$, *donde*

$$\theta'_j = \frac{\prod_{i=1}^{n+j} \operatorname{mcm}(\varphi'_{i-j}, \omega_{i-r'_1})}{\prod_{i=1}^{n+j-1} \operatorname{mcm}(\varphi'_{i-j+1}, \omega_{i-r'_1})}, \quad j = 1, \ldots, r'_1,$$

siendo $\varphi'_i := 1$ y $\omega_i := 1$ para $i < 1$.

7. La matriz B sólo tiene una columna

Cuando B tiene sólo una columna, es decir, si $m = 1$, se tiene que $r_1 \leq 1$. Al perturbar ligeramente en la única columna de B se tiene que $r'_1 = 1$. Como consecuencia, la condición (iv) del Teorema 5 es trivial. Además, por la condición (ii) se tiene que $k'_1 = d(\theta'_1) = \sum_{i=1}^n d(\omega_i) - \sum_{i=1}^n d(\varphi'_i) = k_1 + \sum_{i=1}^n d(\varphi_i) - \sum_{i=1}^n d(\varphi'_i)$. De esto se deduce que $k'_1 - k_1 = \sum_{i=1}^n d(\varphi_i) - \sum_{i=1}^n d(\varphi'_i)$. Entonces las condiciones del Teorema 5 se reducen a:

(i) $\omega_{i-1} \mid \varphi'_i \mid \omega_i$ para $i = 1, \ldots, n$,

(ii) $k'_1 - k_1 = \sum_{i=1}^{n} d(\varphi_i) - \sum_{i=1}^{n} d(\varphi'_i)$,

(iii) $\varphi' \prec\!\!\prec \varphi$.

Veamos que en este caso, estas condiciones son suficientes para encontrar, tan cerca como queramos de b, una columna b' de forma que (A, b') tenga k'_1 como índice de controlabilidad y $\varphi'_1 \mid \cdots \mid \varphi'_n$ como factores invariantes.

Como $m = 1$ entonces M' tiene un único índice de controlabilidad. Por lo tanto, el problema de prescripción de invariantes se va a reducir a poder conseguir una matriz $[A \;\; b']$ con los factores invariantes prescritos.

Por el Lema 4 se puede considerar que A está en forma canónica de Jordan, dado que la semejanza de pares de matrices es un caso particular de PQ-equivalencia. Denotaremos por $J_{a_i}(\lambda_j)$ el bloque de Jordan de tamaño a_i correspondiente al valor propio λ_j (con los unos por encima de la diagonal) y por $J(\lambda_j)$ la matriz que tiene en la diagonal todos los bloques de Jordan asociados al valor propio λ_j, ordenados de mayor a menor tamaño.

Vamos a enunciar dos lemas que nos permitirán dar una idea de la demostración del teorema posterior. En el primero de ellos se mostrará que, si A está en forma de Jordan, para obtener los factores invariantes se puede considerar cada valor propio por separado.

Lema 8 *Sea* $[A\ B] \in \mathbb{C}^{n\times(n+m)}$ *con* $\Lambda(A) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_v\}$*. Si* $A = \operatorname{diag}(J(\lambda_1), \ldots, J(\lambda_v))$ *y* $B = [B_1 \ldots, B_v]^T$*, entonces* $\mathrm{s}(\lambda_i, [A\ B]) = \mathrm{s}(\lambda_i, [J(\lambda_i)\ B_i^T])$*, para* $i = 1, \ldots, v$*.*

Como consecuencia del Lema 8, no se pierde generalidad si se considera que A tiene un único valor propio, que puede ser el cero, para simplificar la notación. Además basta considerar que sólo hay dos bloques de Jordan porque si hubiera más se podría perturbar en varias veces, teniendo en cuenta en cada paso sólo dos de dichos bloques (véase el Lema 1).

Para poder mostrar el principal resultado de esta sección, necesitamos conocer cómo son los factores invariantes y el índice de controlabilidad de un par (A, b) en función de los elementos no nulos de b. Este es el objetivo del siguiente lema.

Lema 9 *Sea* $[A, b] \in \mathbb{C}^{(a_1+a_2)\times(a_1+a_2+1)}$ *con* $A = \operatorname{diag}(J_{a_1}(\lambda), J_{a_2}(\lambda))$*.*

Sean $\omega = (1, \ldots, 1, s^{a_2}, s^{a_1})$*,* $\varphi = (1, \ldots, 1, s^{c_2}, s^{c_1})$ *y* k_1 *las cadenas de factores invariantes de* A *y* (A, b) *y el índice de controlabilidad de* (A, b)*, respectivamente.*

Entonces $b = [* \overset{(p_1-1)}{\cdots} *\ b_{p_1} 0 \overset{(a_1-p_1)}{\cdots} 0 | * \overset{(p_2-1)}{\cdots} *\ b_{a_1+p_2} 0 \overset{(a_2-p_2)}{\cdots} 0]^T$*, donde* $*$ *indica cualquier número y* $b_{p_1} \neq 0 \neq b_{a_1+p_2}$

si y sólo si

$k_1 = \max\{p_1, p_2\}$*,* $c_2 = \min\{a_1 - p_1, a_2 - p_2\}$ *y* $c_1 = a_1 - p_1 + a_2 - p_2 - c_2 + \min\{p_1, p_2\}$*.*

Vamos a proceder a enunciar el principal resultado de esta sección.

Teorema 10 *Sea* $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ *y sean* $\omega_1 \mid \cdots \mid \omega_n$ *sus factores invariantes. Sea* $[A\ b] \in \mathbb{C}^{n\times(n+1)}$ *con* $\varphi_1 \mid \cdots \mid \varphi_n$ *como factores invariantes y* k_1 *como índice de controlabilidad.*

Sean k'_1 *un número entero y* $\varphi'_1 \mid \cdots \mid \varphi'_n$ *polinomios mónicos dados.*

Para todo $\varepsilon > 0$ *existe una columna* b' *con* $\|b' - b\| < \varepsilon$*, tal que* (A, b') *tiene* k'_1 *como índice de controlabilidad y* $\varphi'_1 \mid \cdots \mid \varphi'_n$ *como factores invariantes si y sólo si*

(i) $\omega_{i-1} \mid \varphi'_i \mid \omega_i$ *para* $i = 1, \ldots, n$,

(ii) $k'_1 - k_1 = \sum_{i=1}^{n} d(\varphi_i) - \sum_{i=1}^{n} d(\varphi'_i)$,

(iii) $\varphi' \prec\!\!\prec \varphi$.

Vamos a poner un ejemplo que sirva de indicación de la demostración de este teorema. Consideramos la matriz $M = [A\ b]$ donde A es nilpotente con factores invariantes no triviales s^5 y s^3. Dependiendo de cómo sea la columna b, (A, b) tendrá como índice de controlabilidad $0, 1, \ldots, 5$. En el siguiente retículo mostramos cómo podrían ser las características de Segre correspondientes a estos índices de controlabilidad, que señalamos a la derecha, y cómo se podría pasar de un par, con unos invariantes, a otro, mediante transformaciones elementales de tipo (1), indicadas por flechas horizontales, o mediante transformaciones elementales de tipo (2), indicadas por flechas verticales o inclinadas. El sentido de las flechas nos indica cuáles son los invariantes que se pueden conseguir a partir de los de la matriz M inicial, perturbando reiteradamente.

$$
\begin{tikzcd}
 & & & (5,3) \arrow[d] \arrow[dl, dotted] & (0) \\
 & & (5,2) \arrow[d] \arrow[dl, dotted] & (4,3) \arrow[l] \arrow[d] \arrow[dl, dotted] & (1) \\
 & (5,1) \arrow[d] \arrow[dl, dotted] & (4,2) \arrow[l] \arrow[d] \arrow[dl, dotted] & (3,3) \arrow[l] \arrow[dl, dotted] & (2) \\
(5,0) \arrow[d] & (4,1) \arrow[l] \arrow[d] \arrow[dl, dotted] & (3,2) \arrow[l] \arrow[dl, dotted] & & (3) \\
(4,0) \arrow[d] & (3,1) \arrow[l] \arrow[dl, dotted] & & & (4) \\
(3,0) & & & & (5)
\end{tikzcd}
$$

Para indicar las posiciones de la única columna de b que hay que perturbar en cada paso ponemos subíndices a la matriz M, indicando en negrita las posiciones que necesariamente deben ser diferentes de cero, teniendo en cuenta el Lema 9. Ponemos estas matrices en lugar de las correspondientes características de Segre. Tenemos, así, un segundo retículo.

$$
\begin{tikzcd}
 & & & M \arrow[d] \arrow[dl, dotted] & (0) \\
 & & M_{1|\mathbf{6}} \arrow[d] \arrow[dl, dotted] & M_{\mathbf{1}} \arrow[l] \arrow[d] \arrow[dl, dotted] & (1) \\
 & M_{12|6\mathbf{7}} \arrow[d] \arrow[dl, dotted] & M_{1\mathbf{2}|\mathbf{6}} \arrow[l] \arrow[d] \arrow[dl, dotted] & M_{1\mathbf{2}} \arrow[l] \arrow[dl, dotted] & (2) \\
M_{123|67\mathbf{8}} \arrow[d] & M_{12\mathbf{3}|6\mathbf{7}} \arrow[l] \arrow[d] \arrow[dl, dotted] & M_{12\mathbf{3}|6} \arrow[l] \arrow[dl, dotted] & & (3) \\
M_{123\mathbf{4}|67\mathbf{8}} \arrow[d] & M_{123\mathbf{4}|67} \arrow[l] \arrow[dl, dotted] & & & (4) \\
M_{1234\mathbf{5}|678} & & & & (5)
\end{tikzcd}
$$

Para ver cómo sería el vector b^T en cada caso tenemos el tercer retículo.

$$
\begin{tikzcd}
 & & & {[00000|000]} \arrow[d] \arrow[dl, dotted] & (0) \\
 & & {[*0000|\star 00]} \arrow[d] \arrow[dl, dotted] & {[\star 0000|000]} \arrow[l] \arrow[d] \arrow[dl, dotted] & (1) \\
 & {[**000|*\star 0]} \arrow[d] \arrow[dl, dotted] & {[*\star 000|\star 00]} \arrow[l] \arrow[d] \arrow[dl, dotted] & {[*\star 000|000]} \arrow[l] \arrow[dl, dotted] & (2) \\
{[**000|**\star]} \arrow[d] & {[**\star 00|*\star 0]} \arrow[l] \arrow[d] \arrow[dl, dotted] & {[**\star 00|*00]} \arrow[l] \arrow[dl, dotted] & & (3) \\
{[***\star 0|**\star]} \arrow[d] & {[***\star 0|**0]} \arrow[l] \arrow[dl, dotted] & & & (4) \\
{[****\star|***]} & & & & (5)
\end{tikzcd}
$$

Aquí las estrellas $\star$ indican elementos no nulos y los asteriscos $*$ indican cualquier elemento. Conseguiremos una matriz $M' = [A\ b']$ con unos invariantes prescritos, con el mínimo de perturbaciones, si colocamos un elemento suficientemente pequeño exclusivamente en las posiciones en las que aparece una estrella.

Agradecimientos

Agradecemos a los miembros del Grupo de Álgebra Lineal de la UPV/EHU las sugerencias aportadas.

Este trabajo ha sido financiado por los proyectos MTM 2004-06389-CO2-01 del MEC y GIU05/28 de la UPV/EHU.

Referencias

[1] I. Baragaña, I. Zaballa, *Column completion of a pair of matrices*, Linear and Multilinear Algebra, 27 (1990) 243–273.

[2] J. Barría, D.A. Herrero, *Closure of similarity orbits of nilpotent operators I. Finite rank operators*, J. Operator Theory, 1 (1979) 177–186.

[3] M.A. Beitia, I. de Hoyos, I. Zaballa, *The change of the Jordan structure under one row perturbations*, Linear Algebra Appl., 401 (2005) 119–134.

[4] M.A. Beitia, I. de Hoyos, I. Zaballa, *The change of similarity invariants under row perturbations: generic cases*, sometido a Linear Algebra Appl..

[5] M.A. Beitia, I. de Hoyos, I. Zaballa, *The change of similarity invariants under row perturbations*, sometido a Linear Algebra Appl..

[6] H. den Boer, G.Ph.A. Thijsse, *Semi-stability of sums of partial multiplicities under additive perturbation*, Integral equations and Operator Theory, 3/1 (1980) 23–42.

[7] M. Dodig, M. Stosic, *The change of feedback invariants under one row perturbation*, Linear Algebra Appl., 422 (2007) 582–603.

[8] J.M. Gracia, I. de Hoyos, I. Zaballa, *Perturbation of linear control systems*, Linear Algebra Appl., 121 (1989) 353–383.

[9] I. de Hoyos, *Perturbación de Matrices Rectangulares y Haces de Matrices*, Bilbao, 1990.

[10] A.S. Markus, E.È. Parilis, *The change of the Jordan structure of a matrix under small perturbations*, Linear Algebra Appl., 54 (1983) 139–152.

[11] A. Pokrzywa, *On Perturbations and the equivalence orbit of a matrix pencil*, Linear Algebra Appl., 82 (1986) 99–121.

[12] E.M. de Sá, *Imbedding conditions for λ-matrices*, Linear Algebra Appl., 24 (1979) 33–50.

[13] R.C. Thompson, *Interlacing inequalities for invariant factors*, Linear Algebra Appl., 24 (1979) 1–31.

[14] I. Zaballa, *Matrices with prescribed rows and invariant factors*, Linear Algebra Appl., 87 (1987) 113–146.

[15] I. Zaballa, *Interlacing inequalities and control theory*, Linear Algebra Appl., 101 (1988) 9–31.