XX Congreso de Ecuaciones Diferenciales y Aplicaciones
X Congreso de Matemática Aplicada
Sevilla, 24-28 septiembre 2007
(pp. 1–8)

Deformaciones miniversales de parejas de tensores de segundo orden

Josep Clotet[1], M. Dolors Magret[1], Marta Peña[1]

[1] *Departament de Matemàtica Aplicada I, Universitat Politècnica de Catalunya, E-08028 Barcelona.*
E-mails: Josep.Clotet@upc.edu, M.Dolors.Magret@upc.edu, Marta.Penya@upc.edu.

Palabras clave: Deformaciones, versalidad, tensores de segundo orden

Resumen

Consideramos en el espacio de parejas de tensores tensión y deformación la relación de equivalencia que se corresponde con cambios de base ortonormales. Identificándolas con parejas de matrices cuadradas, podemos utilizar la técnica de las deformaciones miniversales para averiguar, dada una pareja de tensores cualquiera, cuáles son las parejas de tensores que se pueden obtener al perturbar ligeramente la dada, puesto que las clases de equivalencia se pueden identificar con las órbitas que resultan al actuar un grupo de Lie sobre la variedad diferenciable de las parejas de matrices simétricas y son, por lo tanto, variedades diferenciables. Presentamos también las dimensiones que son posibles para dichas órbitas.

1. Introducción

El objetivo del presente trabajo es obtener deformaciones miniversales de parejas de tensores tensión y deformación (de segundo orden).

Los tensores tensión y deformación se utilizan, tanto en física como en ingeniería, para estudiar ciertas propiedades mecánicas de los materiales. Se pueden representar por medio de matrices simétricas y, a su vez, están relacionados por la llamada ecuación constitutiva del material.

Las deformaciones miniversales han sido ampliamente estudiadas en los últimos años, puesto que dan solución al problema de encontrar una forma canónica local sencilla a la cual se puede reducir una familia arbitraria que depende diferenciablemente de los parámetros, a la que se puede reducir la familia original a través de una aplicación que también depende diferenciablemente de los parámetros. Además, de ellas se pueden deducir las dimensiones de cada clase de equivalencia.

El trabajo está dividido en las siguientes secciones.

En la sección 2, se recuerda brevemente la definición de los tensores tensión y deformación y su representación mediante matrices cuadradas simétricas.

En la sección 3, se considera la subvariedad diferenciable formada por las parejas de matrices simétricas de orden tres y las relaciones de equivalencia que consisten en identificar aquellas parejas de matrices que se obtienen al efectuar un mismo cambio de base en las dos matrices, bien sea aceptando solamente bases ortonormales, o bien bases cualesquiera. En ambos casos se observa que estas relaciones de equivalencia pueden interpretarse como las inducidas por las acciones de ciertos grupos de Lie sobre la subvariedad formada por las parejas de matrices simétricas, por lo que las clases de equivalencia son subvariedades diferenciables. Se puede entonces realizar un estudio geométrico-diferencial, obteniendo la descripción de las parejas de matrices que constituyen los espacios normales a las órbitas en un punto dado del espacio y se pone de manifiesto la relación existente entre los espacios normales obtenidos al considerar las dos acciones.

La sección 4 está dedicada a la obtención de deformaciones miniversales o formas canónicas diferenciables para parejas de matrices simétricas que representan los tensores tensión y deformación. La identificación del concepto de versalidad con el de transversalidad (y el de miniversalidad con el de minitransversalidad) permite utilizar los resultados hallados en el apartado anterior (concretamente, la descripción del espacio normal) para obtener una deformación miniversal de una pareja de matrices simétricas asociadas a una pareja de tensores tensión-deformación dada. Así, se dan estas deformaciones miniversales explícitamente y, como consecuencia, se pueden obtener las dimensiones de las distintas órbitas o clases de equivalencia. Las deformaciones miniversales pueden aplicarse al estudio de las perturbaciones locales.

2. Tensor tensión y tensor deformación

En mecánica de medios continuos, el estado de tensión-deformación viene caracterizado por dos campos tensoriales simétricos, llamados respectivamente *tensor tensión* y *tensor deformación*: el primero de los cuales describe la distribución de esfuerzos y el segundo caracteriza el cambio de forma y volumen del cuerpo. A su vez, están relacionados por la llamada ecuación constitutiva del material. Por consiguiente, si examinamos un punto cualquiera del sólido y consideramos un sistema de referencia ortonormal con origen en dicho punto, el estado de tensión-deformación viene caracterizado por una pareja de matrices simétricas, asociadas respectivamente al tensor tensión y al tensor deformación:

$$T_{xyz} = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{pmatrix}$$

donde σ_i representan tensiones normales o perpendiculares al plano, que podrán ser de tracción ($\sigma_i > 0$) o de compresión ($\sigma_i < 0$), y τ_{ij} tensiones de cizalla o tangenciales. Asimismo,

$$D_{xyz} = \begin{pmatrix} \varepsilon_x & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_y & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_z \end{pmatrix}$$

donde ε_i representan alargamientos ($\varepsilon_i > 0$) o acortamientos ($\varepsilon_i < 0$) en la dirección i y ε_{ij} variaciones del ángulo formado por los ejes i y j.

Puesto que estas dos matrices son simétricas, diagonalizan en una base ortonormal de vectores propios que se denominan direcciones principales de tensión y deformación respectivamente. A los valores propios se les llama tensiones y deformaciones principales (resultando en este caso nulas las tensiones tangenciales y las distorsiones angulares).

3. Estudio geométrico

Como se ha visto en el apartado anterior, los tensores tensión y deformación que corresponden al estado de tensión-deformación en un punto de un sólido pueden representarse por una pareja de matrices simétricas.

La descomposición del espacio en suma directa de los espacios tangente y normal, objetos de estudio de este apartado, permite la obtención de deformaciones miniversales. Para calcularlos utilizaremos las técnicas usuales de geometría diferencial.

Consideremos la variedad diferenciable $\mathcal{M} = M_3(\mathbb{R}) \times M_3(\mathbb{R})$ y la subvariedad $\mathcal{X} = Sym_3(\mathbb{R}) \times Sym_3(\mathbb{R})$ (de dimensiones 18 y 12, respectivamente).

Una pareja formada por los tensores tensión y deformación se puede representar, en las distintas bases ortonormales de $\mathbb{R}^3$, por parejas de matrices simétricas, que forman una clase de equivalencia respecto a la siguiente relación de equivalencia definida en $\mathcal{X}$:

$$(A, B) \sim (A', B') \text{ si y sólo si existe } S \in O_3(\mathbb{R}) \text{ tal que } A' = S^t AS, B' = S^t BS$$

Las clases de equivalencia por esta relación coinciden con las órbitas por la acción del grupo de Lie $O_3(\mathbb{R})$ que actúa sobre $\mathcal{X}$, a través de

$$\begin{aligned} \alpha : O_3(\mathbb{R}) \times \mathcal{X} &\longrightarrow \mathcal{X} \\ (S, (A, B)) &\longrightarrow (S^t AS, S^t BS) \end{aligned}$$

Se verifican las condiciones del Lema de la órbita cerrada, lo que nos permite afirmar que es una subvariedad diferenciable localmente cerrada de $\mathcal{X}$ y su frontera es reunión de órbitas de dimensión inferior. En particular, las órbitas de dimensión mínima son cerradas.

Proposición 1. *El espacio tangente a la órbita (respecto de la acción α) de una pareja $(A, B) \in \mathcal{X}$ en (A, B) es:*

$$T_{(A,B)}\mathcal{O}_\alpha(A, B) = \{(AS - SA, BS - SB) \mid S \in Ant_3(\mathbb{R})\} \subseteq \mathcal{X}$$

donde $Ant_3(\mathbb{R}) = T_I O_3(\mathbb{R})$ representa el conjunto de las matrices antisimétricas de orden 3 con coeficientes reales.

Demostración. El espacio tangente a la órbita (A, B) consiste en las parejas de matrices $(AS - SA, BS - SB)$, con $S \in Ant_3(\mathbb{R})$ puesto que

$$\begin{aligned} \big((I + \varepsilon S)^t A(I + \varepsilon S), (I + \varepsilon S)^t B(I + \varepsilon S)\big) &= (A, B) + \varepsilon(AS + S^t A, BS + S^t B) + O(\varepsilon^2) \\ &= (A, B) + \varepsilon(AS - SA, BS - SB) + O(\varepsilon^2) \ \square \end{aligned}$$

Observemos que no es fácil, a pesar de esta descripción, determinar explícitamente el espacio tangente. Es más fácil determinar el espacio normal con respecto a un producto escalar euclídeo cualquiera. Concretamente, utilizaremos el producto escalar en $\mathcal{M}$:

$$< (A, B), (X, Y) >= \mathrm{tr}(AX^t) + \mathrm{tr}(BY^t)$$

Al contrario de lo que ocurría con los espacios tangentes a las órbitas, sus ortogonales no están incluidos en $\mathcal{X}$. De ellos se puede obtener la siguiente caracterización.

Proposición 2. *Considerando el producto escalar euclídeo en $\mathcal{M}$ definido anteriormente, el espacio normal a la órbita de una pareja de matrices $(A,B) \in \mathcal{X}$, con respecto a la acción α, es:*

$$T_{(A,B)}\mathcal{O}_\alpha(A,B)^\perp \cap \mathcal{X} = \{(X,Y) \in \mathcal{X} \mid AX - XA + BY - YB = 0\}$$

Demostración. Por definición de complementario ortogonal, $(X,Y) \in \mathcal{M}$ pertenece a $T_{(A,B)}\mathcal{O}_\alpha(A,B)^\perp$ si y sólo si

$$< (AS - SA, BS - SB), (X,Y) >= 0 \text{ para toda } S \in Ant_3(\mathbb{R})$$

Equivalentemente, si

$$\operatorname{tr}((AS - SA)X^t) + \operatorname{tr}((BS - SB)Y^t) = \operatorname{tr}((X^tA - AX^t + Y^tB - BY^t)S) = 0$$

para toda $S \in Ant_3(\mathbb{R})$. Es decir, si y sólo si

$$\operatorname{tr}((X^tA - AX^t + Y^tB - BY^t)S_i) = 0 \qquad i = 1,2,3$$

siendo

$$S_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad S_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad S_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Puede comprobarse directamente, realizando el cálculo correspondiente, que esta última condición, para una pareja de matrices $(X,Y) \in \mathcal{X}$ es equivalente a

$$AX - XA + BY - YB = 0$$

de donde se deduce el resultado. $\square$

Consideremos ahora la siguiente acción del grupo de Lie $Gl_3(\mathbb{R})$ sobre $\mathcal{M}$:

$$\begin{aligned} \beta : Gl_3(\mathbb{R}) \times \mathcal{M} &\longrightarrow \mathcal{M} \\ (S,(A,B)) &\longrightarrow (S^{-1}AS, S^{-1}BS) \end{aligned}$$

Así como las órbitas de una pareja de matrices de $(A,B) \in \mathcal{X}$ que representan los tensores tensión y deformación por la acción α están formadas por las parejas de matrices (S^tAS, S^tBS), $S \in O_3(\mathbb{R})$, que representan dichos tensores en las distintas bases ortonormales de $\mathbb{R}^3$, si no nos restringimos a bases ortonormales, podemos considerar las clases de equivalencia por la relación:

$$(A,B) \sim_\beta (A',B') \text{ si y sólo si existe } S \in Gl_3(\mathbb{R}) \text{ tal que } A' = S^{-1}AS, B' = S^{-1}BS$$

que coinciden con las órbitas por la acción β. También en este caso se verifican las hipótesis del Lema de la órbita cerrada y las clases de equivalencia son subvariedades diferenciables.

Veamos, para finalizar este apartado, la relación que existe entre los espacios normales obtenidos para una pareja de matrices $(A,B)\in\mathcal{X}$ con respecto a las acciones α y β.
Proposición 3. *Considerando el producto escalar definido en $\mathcal{M}$, la relación entre el espacio normal a la órbita de una pareja de matrices $(A,B)\in\mathcal{X}$, con respecto a la acción α y el espacio normal a la órbita con respecto a la acción β es:*

$$T_{(A,B)}\mathcal{O}_\alpha(A,B)^\perp\cap\mathcal{X}=T_{(A,B)}\mathcal{O}_\beta(A,B)^\perp\cap\mathcal{X}$$

Demostración. El espacio tangente a la órbita (respecto de la acción β) de una pareja (A,B) en (A,B) es:

$$T_{(A,B)}\mathcal{O}_\beta(A,B)=\{(AS-SA,BS-SB)\,|\,S\in M_3(\mathbb{R})\}$$

Entonces $(X,Y)\in\mathcal{M}$ pertenece a $T_{(A,B)}\mathcal{O}_\beta(A,B)^\perp$ si y sólo si

$$<(AS-SA,BS-SB),(X,Y)>=0 \text{ para toda } S\in M_3(\mathbb{R})$$

Equivalentemente, si

$$\operatorname{tr}((AS-SA)X^t)+\operatorname{tr}((BS-SB)Y^t)=\operatorname{tr}((X^tA-AX^t+Y^tB-BY^t)S)=0$$

para toda $S\in M_3(\mathbb{R})$. Es decir, si X,Y satisfacen la ecuación

$$AX^t-X^tA+BY^t-Y^tB=0$$

Teniendo en cuenta la descripción de $T_{(A,B)}\mathcal{O}_\alpha(A,B)^\perp\cap\mathcal{X}$ dada en la Proposición 2, se deduce la igualdad del enunciado. □

4. Deformaciones miniversales de parejas de tensores

Las deformaciones versales dan solución al problema de encontrar una forma canónica sencilla para una familia arbitraria de matrices, que depende diferenciablemente de los parámetros. Recordemos que, dada una familia diferenciable de parejas de matrices, la familia de las formas reducidas de Jordan no tiene por qué ser una familia diferenciable.

Las definiciones y resultados básicos sobre deformaciones y versalidad se pueden encontrar en [1] y [4]. Aquí los recordamos brevemente, adaptándolos a nuestro caso particular.
Definición. Una *deformación* de $(A,B)\in\mathcal{X}$ es una aplicación diferenciable $\varphi:U\longrightarrow\mathcal{X}$, con U un entorno abierto del origen de $\mathbb{R}^d$, tal que $\varphi(0)=(A,B)$.

Una deformación $\varphi:U\longrightarrow\mathcal{X}$ de (A,B) se llama *versal* en 0 si para toda otra deformación de (A,B), $\psi:V\longrightarrow\mathcal{X}$, existe un abierto $V'\subseteq V$ con $0\in V'$, una aplicación diferenciable $\gamma:V'\longrightarrow U$ con $\gamma(0)=0$ y una deformación de la identidad $I\in Gl_3(\mathbb{R})$, $\theta:V'\longrightarrow Gl_3(\mathbb{R})$, tal que $\psi(\mu)=\alpha(\theta(\mu),\varphi(\gamma(\mu)))$ para todo $\mu\in V'$.

Una deformación versal con el mínimo número de parámetros d se llama *deformación miniversal.*

En nuestro caso, tenemos la siguiente descripción de deformación miniversal de una pareja de $\mathcal{X}$, consecuencia de la descripción del espacio normal dada en la Proposición 2.

Teorema 1. *Sea* $\{V_1, \dots, V_d\}$ *una base del espacio vectorial formado con las soluciones del sistema* $AX-XA+BY-YB=0$. *La aplicación* $\varphi(\eta_1,\dots,\eta_d) \longrightarrow (A,B)+\eta_1 V_1+\cdots+\eta_d V_d$ *es una deformación miniversal de la pareja* (A,B).

Demostración. El enunciado es válido en general como consecuencia del lema en [1], sección 2.3, y su generalización en [4], p. 66: una aplicación $\varphi : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathcal{X}$ es versal en un punto $x \in \mathbb{R}^d$ si y sólo si φ es transversal a la órbita de $\varphi(x)$ en x. $\square$

Este resultado permite calcular explícitamente una deformación miniversal de cualquier pareja de matrices $(A,B) \in \mathcal{X}$. Observemos que podemos elegir un representante en cada una de las clases de equivalencia con la primera matriz de la pareja en forma diagonal. Para estos representantes, se obtienen las siguientes deformaciones miniversales.

Si la pareja de matrices es de la forma $(\lambda I, \mu I)$, una deformación miniversal es:

$$\varphi(u_1,u_2,u_3,u_4,u_5,u_6,u_7,u_8,u_9,u_{10},u_{11},u_{12}) =$$
$$\left(\begin{pmatrix} \lambda+u_1 & u_2 & u_3 \\ u_2 & \lambda+u_4 & u_5 \\ u_3 & u_5 & \lambda+u_6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mu+u_7 & u_8 & u_9 \\ u_8 & \mu+u_{10} & u_{11} \\ u_9 & u_{11} & \mu+u_{12} \end{pmatrix}\right).$$

Si la pareja de matrices pertenece a la misma clase de equivalencia que una pareja de la forma $(\lambda I, \operatorname{diag}(\mu_1,\mu_1,\mu_2))$, con $\mu_1 \neq \mu_2$, una deformación miniversal es:

$$\varphi(u_1,u_2,u_3,u_4,u_5,u_6,u_7,u_8,u_9,u_{10}) =$$
$$\left(\begin{pmatrix} \lambda+u_1 & u_2 & u_3 \\ u_2 & \lambda+u_4 & u_5 \\ u_3 & u_5 & \lambda+u_6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mu_1+u_7 & u_8 & 0 \\ u_8 & \mu_1+u_9 & 0 \\ 0 & 0 & \mu_2+u_{10} \end{pmatrix}\right).$$

Si la pareja de matrices pertenece a la misma clase de equivalencia que una pareja de la forma $(\operatorname{diag}(\lambda_1,\lambda_1,\lambda_2), \mu I)$, con $\lambda_1 \neq \lambda_2$, una deformación miniversal es:

$$\varphi(u_1,u_2,u_3,u_4,u_5,u_6,u_7,u_8,u_9,u_{10}) =$$
$$\left(\begin{pmatrix} \lambda_1+u_1 & u_2 & 0 \\ u_2 & \lambda_1+u_3 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2+u_4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mu+u_5 & u_6 & u_7 \\ u_6 & \mu+u_8 & u_9 \\ u_7 & u_9 & \mu+u_{10} \end{pmatrix}\right).$$

Si la pareja de matrices pertenece a la misma clase de equivalencia que una pareja de la forma $(\operatorname{diag}(\lambda_1,\lambda_1,\lambda_2), S^{-1}\operatorname{diag}(\mu_1,\mu_1,\mu_2)S)$, con $\lambda_1 \neq \lambda_2$ y $\mu_1 \neq \mu_2$, una deformación miniversal es:

$$\varphi(u_1,u_2,u_3,u_4,u_5,u_6,u_7,u_8,u_9,u_{10}) =$$
$$\left(\begin{pmatrix} \lambda_1+u_1 & u_2 & u_3 \\ u_2 & \lambda_1+u_4 & u_5 \\ u_3 & u_5 & \lambda_2+u_6 \end{pmatrix}, S\begin{pmatrix} \mu_1+u_7 & u_8 & \frac{\lambda_1-\lambda_2}{\mu_2-\mu_1}u_3 \\ u_8 & \mu_1+u_9 & \frac{\lambda_1-\lambda_2}{\mu_2-\mu_1}u_5 \\ \frac{\lambda_1-\lambda_2}{\mu_2-\mu_1}u_3 & \frac{\lambda_1-\lambda_2}{\mu_2-\mu_1}u_5 & \mu_2+u_{10} \end{pmatrix}S^{-1}\right).$$

Si la pareja de matrices pertenece a la misma clase de equivalencia que $(\operatorname{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3), \mu I)$, con $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ distintos, una deformación miniversal es:

$$\varphi(u_1,u_2,u_3,u_4,u_5,u_6,u_7,u_8,u_9) =$$
$$\left(\begin{pmatrix} \lambda_1+u_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2+u_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3+u_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mu+u_4 & u_5 & u_6 \\ u_5 & \mu+u_7 & u_8 \\ u_6 & u_8 & \mu+u_9 \end{pmatrix}\right).$$

Si la pareja de matrices pertenece a la misma clase de equivalencia que $(\lambda I, \operatorname{diag}(\mu_1,\mu_2,\mu_3))$, con μ_1, μ_2, μ_3 distintos, una deformación miniversal es:

$$\varphi(u_1,u_2,u_3,u_4,u_5,u_6,u_7,u_8,u_9) =$$
$$\left(\begin{pmatrix} \lambda+u_1 & u_2 & u_3 \\ u_2 & \lambda+u_4 & u_5 \\ u_3 & u_5 & \lambda+u_6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mu_1+u_7 & 0 & 0 \\ 0 & \mu_2+u_8 & 0 \\ 0 & 0 & \mu_3+u_9 \end{pmatrix}\right).$$

Si la pareja de matrices pertenece a la misma clase de equivalencia que $(\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_1,\lambda_2), S^{-1}\mathrm{diag}(\mu_1,\mu_2,\mu_3)S)$, con $\lambda_1 \neq \lambda_2$ y μ_1,μ_2,μ_3 distintos, una deformación miniversal es:

$$\varphi(u_1,u_2,u_3,u_4,u_5,u_6,u_7,u_8,u_9) = \left(\begin{pmatrix} \lambda_1+u_1 & u_2 & u_3 \\ u_2 & \lambda_1+u_4 & u_5 \\ u_3 & u_5 & \lambda_2+u_6 \end{pmatrix}, S\begin{pmatrix} \mu_1+u_7 & 0 & \frac{\lambda_1-\lambda_2}{\mu_3-\mu_1}u_3 \\ 0 & \mu_2+u_8 & \frac{\lambda_1-\lambda_2}{\mu_3-\mu_2}u_5 \\ \frac{\lambda_1-\lambda_2}{\mu_3-\mu_1}u_3 & \frac{\lambda_1-\lambda_2}{\mu_3-\mu_2}u_5 & \mu_3+u_9 \end{pmatrix}S^{-1}\right).$$

Si la pareja de matrices pertenece a la misma clase de equivalencia que $(\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3), S^{-1}\mathrm{diag}(\mu_1,\mu_1,\mu_2)S)$, con $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ distintos, y $\mu_1 \neq \mu_2$ una deformación miniversal es:

$$\varphi(u_1,u_2,u_3,u_4,u_5,u_6,u_7,u_8,u_9) = \left(\begin{pmatrix} \lambda_1+u_1 & 0 & u_2 \\ 0 & \lambda_2+u_3 & u_4 \\ u_2 & u_4 & \lambda_3+u_5 \end{pmatrix}, S\begin{pmatrix} \mu_1+u_6 & u_7 & \frac{\lambda_1-\lambda_3}{\mu_2-\mu_1}u_2 \\ u_7 & \mu_1+u_8 & \frac{\lambda_2-\lambda_3}{\mu_2-\mu_1}u_4 \\ \frac{\lambda_1-\lambda_3}{\mu_2-\mu_1}u_2 & \frac{\lambda_2-\lambda_3}{\mu_2-\mu_1}u_4 & \mu_2+u_9 \end{pmatrix}S^{-1}\right).$$

Si la pareja de matrices pertenece a la misma clase de equivalencia que $(\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3), S^{-1}\mathrm{diag}(\mu_1,\mu_2,\mu_3)S)$, con $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ distintos y μ_1,μ_2,μ_3 también distintos, una deformación miniversal es:

$$\varphi(u_1,u_2,u_3,u_4,u_5,u_6,u_7,u_8,u_9) = \left(\begin{pmatrix} \lambda+u_1 & u_2 & u_3 \\ u_2 & \lambda+u_4 & u_5 \\ u_3 & u_5 & \lambda+u_6 \end{pmatrix}, S\begin{pmatrix} \mu_1+u_7 & \frac{\lambda_1-\lambda_2}{\mu_2-\mu_1}u_2 & \frac{\lambda_1-\lambda_3}{\mu_3-\mu_1}u_3 \\ \frac{\lambda_1-\lambda_2}{\mu_2-\mu_1}u_2 & \mu_2+u_8 & \frac{\lambda_2-\lambda_3}{\mu_3-\mu_2}u_5 \\ \frac{\lambda_1-\lambda_3}{\mu_3-\mu_1}u_3 & \frac{\lambda_2-\lambda_3}{\mu_3-\mu_2}u_5 & \mu_3+u_9 \end{pmatrix}S^{-1}\right).$$

A partir de las deformaciones miniversales anteriores, pueden deducirse las de cualquier pareja de matrices de $\mathcal{X}$, utilizando el siguiente resultado.

Proposición 4. *Si $A' = S^tAS$, $B' = S^tBS$ con $S \in O_3(\mathbb{R})$, entonces: $(X,Y) \in T_{(A',B')}\mathcal{O}_\alpha(A',B')^\perp \cap \mathcal{X}$ si y sólo si $(SXS^t, SYS^t) \in T_{(A,B)}\mathcal{O}_\alpha(A,B)^\perp \cap \mathcal{X}$.*

Demostración. Puede comprobarse fácilmente que la condición

$$A'X - XA' + B'Y - YB' = 0$$

es equivalente a

$$A(SXS^t) - (SXS^t)A + B(SYS^t) - (SYS^t)B = 0$$

de donde se deduce el enunciado. $\square$

Como consecuencia del Teorema 1, también podemos determinar las dimensiones de las distintas órbitas, ya que las codimensiones de las órbitas coinciden con la dimensión de las deformaciones miniversales.

Corolario 1. *El valor de las codimensiones de las distintas órbitas (o clases de equivalencia) por la acción α viene dado en la Tabla 1.*

Como aplicación de los resultados obtenidos podemos efectuar un estudio de los efectos de pequeñas perturbaciones en los coeficientes de las matrices que representan los tensores tensión y deformación. Por ejemplo, puesto que al efectuar tales perturbaciones es más probable pasar de una órbita de codimensión dada a otra órbita de codimensión menor, la Tabla 1 nos indica cuáles son las clases de equivalencia a las que hay una mayor probabilidad de acceder.

Representante de la clase de equivalencia	Codimensión de la clase de equivalencia
$(\lambda I, \mu I)$	12
$(\lambda I, \mathrm{diag}(\mu_1, \mu_1, \mu_2))$	10
$(\mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_1, \lambda_2), \mu I)$	10
$(\mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_1, \lambda_2), S^{-1}\mathrm{diag}(\mu_1, \mu_1, \mu_2)S)$	10
$(\mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3), \mu I)$	9
$(\lambda I, \mathrm{diag}(\mu_1, \mu_2, \mu_3))$	9
$(\mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_1, \lambda_2), S^{-1}\mathrm{diag}(\mu_1, \mu_2, \mu_3)S)$	9
$(\mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3), S^{-1}\mathrm{diag}(\mu_1, \mu_1, \mu_2)S)$	9
$(\mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3), S^{-1}\mathrm{diag}(\mu_1, \mu_2, \mu_3)S)$	9

Tabla 1: Codimensiones de las clases de equivalencia.

Agradecimientos

Deseamos agradecer a Josep Ferrer la propuesta de realización de este trabajo así como su constante apoyo, y a nuestros compañeros M. A. Barja y F. Planas el introducirnos en el mundo de los tensores.

Referencias

[1] V. I. Arnold, *On matrices depending on parameters*, Uspekhi Mat. Nauk. 26, Moscú, 1971.

[2] M. A. Barja, I. Carol, F. Planas, E. Rizzi, *The representation problem of pairs of symmetric second-order tensors in the context of Solid Mechanics.*
Accesible en: http://www.ma1.upc.edu/recerca/preprints/03/0301planas.abs

[3] F. Puerta, *Álgebra lineal*, Edicions upc, Barcelona, 2005.

[4] A. Tannenbaum, *Invariance and System Theory: Algebraic and Geometric Aspects*, Lecture Notes in Mathematics 845, Springer-Verlag, Berlín, 1981.

[5] S. P. Timoshenko, *Resistencia de materiales*, Espasa-Calpe, Madrid, 1967.