XX Congreso de Ecuaciones Diferenciales y Aplicaciones
X Congreso de Matemática Aplicada
Sevilla, 24-28 septiembre 2007
(pp. 1–5)

Existencia de puntos fijos positivos de operadores crecientes. Aplicaciones a problemas de frontera periódicos

Alberto Cabada[1], José Ángel Cid[2]

[1] *Dpto. de Análise Matemática, Universidad de Santiago, Campus Sur, Santiago. E-mail:* `cabada@usc.es`.
[2] *Dpto. de Matemáticas, Universidad de Jaén, Campus Las Lagunillas, Ed. B-3, 23071, Jaén. E-mail:* `angelcid@ujaen.es`.

Palabras clave: Teorema de Krasnoselskii,punto fijo positivo, problema de frontera periódico

Resumen

En este trabajo presentamos un teorema de punto fijo que generaliza a espacios de dimensión infinita el resultado principal de [2]. Como consecuencia probamos la existencia de al menos una solución periódica y positiva de una ecuación diferencial ordinaria.

1. Existencia de puntos fijos positivos

Dado un espacio de Banach real N decimos que $K \subset N$ es un cono si K es cerrado, $K + K \subset K$, $\lambda K \subset K$ para todo $\lambda \geq 0$ y $K \cap (-K) = \{\theta\}$. Por ejemplo en $\mathbb{R}^m$ podemos considerar el cono

$$\mathbb{R}^m_+ := \{(x_1, x_2, \ldots, x_m) \in \mathbb{R}^m : x_i \geq 0 \text{ para } i = 1, 2, \ldots, m\}.$$

Un cono K induce en N el orden parcial $x \leq y$ si y sólo si $y - x \in K$. Diremos que K es normal si existe una constante $c > 0$ tal que $\|x\| \leq c\|y\|$ para todo $x, y \in N$ con $x \leq y$. Si $int(K) \neq \emptyset$ el símbolo $x \gg y$ significa que $x - y \in int(K)$. Por ejemplo si $K = \mathbb{R}^m_+$ es fácil comprobar que $x \gg \theta$ quiere decir

$$x_i > 0 \text{ para } i = 1, 2, \ldots, m.$$

El operador $T : D \subset N \to N$ es completamente continuo si es continuo y aplica conjuntos acotados en conjuntos relativamente compactos. Si $Tx \leq Ty$ siempre que $x \leq y$ diremos que T es un operador creciente.

A continuación enunciamos el conocido teorema de punto fijo de Krasnoselskii de expansión en conos (véase [4, Teorema 13.D]).

Teorema 1 *Sea N un espacio de Banach real con un cono K. Supongamos que el operador $T : K \to K$ es completamente continuo y además es una expansión del cono, es decir, existen $0 < r < R$ tales que*

$$Tx \ngeq x \quad \textit{para todo } x \in K \textit{ con } \|x\| = r$$

y

$$Tx \nleq x \quad \textit{para todo } x \in K \textit{ con } \|x\| = R.$$

Entonces existe al menos un punto fijo del operador T, $x \in K$ con $r < \|x\| < R$.

Recientemente en [2], H. Persson, usando la teoría del grado topológico, ha probado el siguiente teorema de punto fijo para funciones crecientes.

Teorema 2 *Supongamos que $f : \mathbb{R}^m_+ \to \mathbb{R}^m_+$ es continua y creciente. Sea $S = \{x \geq \theta : f(x) \leq x\}$. Si S es acotado y existe $\bar{x} \in S$ tal que $\bar{x} \gg \theta$ entonces existe $x \geq \theta$, $x \neq \theta$, tal que $x = f(x)$.*

En [1], usando el Teorema 1, obtenemos la siguiente generalización del resultado anterior a espacios de dimensión infinita.

Teorema 3 *Sean N un espacio de Banach real, K un cono normal con interior no vacío y $T : K \to K$ un operador completamente continuo y creciente.*

Definamos $S = \{x \in K : Tx \leq x\}$ y supongamos que

(i) Existe $\bar{x} \in S$ tal que $\bar{x} \gg \theta$.

(ii) S es acotado.

Entonces existe $x \in K$, $x \neq \theta$, tal que $x = Tx$.

2. Aplicación a un problema de frontera periódico

Como consecuencia del Teorema 3 probaremos en esta sección la existencia de al menos una solución positiva del problema de frontera periódico

$$x''(t) + a(t)x(t) = f(t, x(t)) \ , \ t \in I = [0, T], \quad x(0) = x(T), \ x'(0) = x'(T), \tag{1}$$

donde $a(t) \in L^p(0, T)$, $1 \leq p \leq \infty$ y $f : [0, T] \times \mathbb{R}$ es una función L^1-Carathéodory, es decir,

(i) para c.t.p. $x \in \mathbb{R}$, $f(\cdot, x)$ es medible;

(ii) para todo $t \in I$, $f(t, \cdot)$ es continua;

(iii) para cada $r > 0$ existe $h_r(t) \in L^1(0, T)$ tal que $|f(t, x)| \leq h_r(t)$ para c.t.p. $t \in [0, T]$ y para todo $x \in [-r, r]$.

Asumiremos la siguiente lista de hipótesis:

(a0) La ecuación de Hill $x''(t) + a(t)x(t) = 0$ tiene una única solución periódica (la trivial) y además su correspondiente función de Green $G(t, s)$ es estrictamente positiva para todo $(t, s) \in [0, T] \times [0, T]$.

(f0) $f(t,x) \geq 0 \quad$ para c.t.p. $t \in I$ y todo $x \geq 0$.

(f1) $f(t,\cdot)$ es creciente para c.t.p. $t \in I$.

(f2) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{f(t,x)}{x} = +\infty$ uniformemente en t.

(f3) Existe un $r > 0$ tal que

$$0 < M\|h_r\|_1 \leq r,$$

siendo h_r la aplicación que aparece en el apartado *(iii)* de la definición de función L^1-Carathéodory y $M = \displaystyle\max_{t,s\in[0,T]} G(t,s) > 0$.

Denotaremos por $m = \displaystyle\min_{t,s\in[0,T]} G(t,s) > 0$ y $\gamma = \dfrac{m}{M+1}$. (En [3] puede verse una fórmula explícita para computar los valores de m y M).

De la hipótesis ($a0$) se sigue que una solución del problema (1) es equivalente a un punto fijo del operador $T : C(I) \to C(I)$ definido como

$$Tx(t) = \int_0^T G(t,s)f(s,x(s))ds \text{ para todo } t \in I.$$

Cuando la función $a(t)$ no es constante no se conoce explícitamente la expresión de $G(t,s)$, si bien existe un criterio, basado en la acotación en la norma L^p de la función $a(t)$, que nos permite garantizar que $G(t,s)$ es no negativa (véase [3, Corolario 2.3]).

Consideremos en $C(I)$ el cono

$$K = \{x \in C(I) : x(t) \geq \gamma\|x\|_\infty \text{ para todo } t \in I\}.$$

No es difícil verificar que K es un cono normal con interior no vacío.

Teorema 4 *Supongamos que las hipótesis (a0), (f0), (f1), (f2) y (f3) se satisfacen.*

Entonces el problema (1) tiene al menos una solución positiva no trivial.

Proof. *Afirmación 1.* $T(K) \subset K$.

Por la condición (f0) calculamos

$$\begin{aligned}
\min_{t\in I} Tx(t) &= \min_{t\in I} \int_0^T G(t,s)f(s,x(s))ds \\
&\geq \int_0^T \min_{t\in I} G(t,s)f(s,x(s))ds \\
&\geq \int_0^T \gamma \max_{t\in I} G(t,s)f(s,x(s))ds \\
&\geq \gamma \max_{t\in I} \int_0^T G(t,s)f(s,x(s))ds \\
&\geq \gamma\|Tx\|_\infty
\end{aligned}$$

y por tanto $Tx \in K$ para todo $x \in K$.

Afirmación 2. $T : K \to K$ es creciente.

Puesto que $G(t,s) > 0$, usando la hipótesis $(f1)$ y realizando cálculos similares a los de la *Afirmación 1* podemos deducir que T es un operador creciente con respecto al orden parcial inducido por el cono K.

Afirmación 3. $T : K \to K$ es completamente continuo.

La afirmación se sigue de argumentos estándar.

Afirmación 4. Existe $\bar{x} \in S = \{x \in K : Tx \leq x\}$ tal que $\bar{x} \gg \theta$.

Sea $r > 0$ dado en las hipótesis $(f3)$ y definamos $\bar{x}$ como la única solución del problema

$$x''(t) + a(t)x(t) = h_r(t) \quad \text{en c. t. p. } t \in I, \; x(0) = x(T), \; x'(0) = x'(T),$$

es decir

$$\bar{x}(t) = \int_0^T G(t,s)h_r(s)ds \quad \text{para todo } t \in I.$$

Por consiguiente

$$m\|h_r\|_1 \leq \bar{x}(t) \leq M\|h_r\|_1 \quad \text{para todo } t \in I.$$

Dado que $G(t,s) > 0$, de la hipótesis (f3) y realizando cálculos similares a los hechos en la *Afirmación 1* se sigue que

$$\min_{t \in I}(\bar{x}(t) - T\,\bar{x}(t)) \geq \gamma\|\bar{x}(t) - T\,\bar{x}(t)\|_\infty$$

y por tanto $\bar{x} \leq T\bar{x}$, es decir $\bar{x} \in S$.

Finalmente, de la definición de función de Carathéodory y la condición $(f3)$ deducimos que

$$\begin{aligned}
\min_{t \in I} \bar{x}(t) &= \min_{t \in I} \int_0^T G(t,s)h_r(s)ds \\
&\geq \int_0^T \min_{t \in I} G(t,s)h_r(s)ds \\
&> \int_0^T \gamma \max_{t \in I} G(t,s)h_r(s)ds \\
&\geq \gamma \max_{t \in I} \int_0^T G(t,s)h_r(s)ds \\
&\geq \gamma\|\bar{x}\|_\infty
\end{aligned}$$

y en consecuencia $\bar{x} \in int(K)$.

Afirmación 5. El conjunto S es acotado.

Por (f2) existe $\alpha > 0$ tal que

$$f(t,x) > \frac{x}{\gamma M T} \quad \text{para todo } x > \alpha.$$

Sea $x \in K$ tal que $\min\limits_{t \in I} x(t) > \alpha$. Entonces

$$f(t,x(t)) > \frac{x(t)}{\gamma\, m\, T} \quad \text{para todo } t \in I.$$

Por consiguiente obtenemos para todo $t \in I$

$$\begin{aligned} Tx(t) &= \int_0^T G(t,s) f(s,x(s)) ds \\ &> \int_0^T G(t,s) \frac{1}{\gamma\, m\, T} x(s) ds \\ &\geq \int_0^T G(t,s) \frac{1}{\gamma\, m\, T} \gamma \|x\|_\infty ds \\ &\geq \int_0^T m \frac{1}{\gamma\, m\, T} \gamma \|x\|_\infty ds \\ &= \|x\|_\infty \\ &\geq x(t). \end{aligned}$$

Luego

$$S \subset \{x \in K : \min_{t \in I} x(t) \leq \alpha\}.$$

Por otro lado, si $x \in K$ y $\min_{t \in I} x(t) \leq \alpha$ se tiene que

$$\alpha \geq \min_{t \in I} x(t) \geq \gamma \|x\|_\infty,$$

y por tanto $\|x\|_\infty \leq \frac{\alpha}{\gamma}$. Por consiguiente $S \subset \overline{B(\theta, \frac{\alpha}{\gamma})}$ y S es acotado.

Finalmente, de las afirmaciones anteriores y del Teorema 3 se sigue la existencia de al menos un punto fijo positivo (distinto de cero) para el operador T, que será una solución positiva no trivial del problema 1.

Agradecimientos

Ambos autores están parcialmente financiados por el proyecto MTM2004-06652-C03-01 del Ministerio de Educación y Ciencia y por el proyecto PGIDIT05PXIC20702PN de la Xunta de Galicia.

Referencias

[1] A. Cabada y J. A. Cid. *Existence of a non-zero fixed point for nondecreasing operators via Krasnoselskii's fixed point theorem.* Sometido para publicación.

[2] H. Persson. *A fixed point theorem for monotone functions.* Appl. Math. Lett., **19** (2006), 1207-1209.

[3] P. J. Torres, *Existence of one-signed periodic solutions of some second-order differential equations via a Krasnoselskii fixed point theorem.* J. Differential Equations, **190** no. 2 (2003), 643-662.

[4] E. Zeidler, *Nonlinear functional analysis and its applications. I. Fixed-point theorems*, Springer-Verlag, 1986.