XX Congreso de Ecuaciones Diferenciales y Aplicaciones
X Congreso de Matemática Aplicada
Sevilla, 24-28 septiembre 2007
(pp. 1–7)

Una nota sobre la existencia de soluciones para ecuaciones diferenciales difusas

Y. Chalco-Cano[1], M.A. Rojas-Medar[2], H. Román-Flores[3]

[1] *Departamento de Matemática, Universidad de Tarapacá, Casilla 7D, Arica, Chile. E-mail:* ychalco@uta.cl.
[2] *Universidad del Bío-Bío Facultad de Ciencias, Departamento de Ciencias Básicas, Campus Fernando May, Casilla 447, Chillán, Chile. E-mail:* marko@ueubiobio.cl.
[1] *Instituto de Alta investigación, Universidad de Tarapacá, Casilla 7D, Arica, Chile. E-mail:* hroman@uta.cl.

Palabras clave: Ecuaciones diferenciales difusas, derivadas de Hukuhara, existencia y unicidad

Resumen

Varios trabajos relacionados con la existencia y unicidad de soluciones para ecuaciones diferenciales difusas son basados en que el problema de Cauchy es equivalente a una ecuación integral. Este hecho que también es verdadero en el contexto clásico, no es siempre verdadero en el contexto de ecuaciones diferenciales difusas donde la derivada es considerada en el sentido generalizado. Mostraremos algunos ejemplos simples para demostrar esto y discutiremos sobre nuevas soluciones para una ecuación diferencial difusa.

1. Introducción

Existen varias maneras de extender la noción de derivada al contexto difuso. Una de las primeras generalizaciones es debida a Puri y Ralescu [13] y esta basada en la noción debida a Hukuhara en el contexto multívoca (H-derivada). Posteriormente, Kaleva [7] usa esta noción para desarrollar una teoría de ecuaciones diferenciales difusas (EDF).

Usando los conceptos de H-derivada muchos resultados sobre existencia y unicidad son obtenidos para el problema de Cauchy difuso:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x(t)); \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \tag{1}$$

donde $f : T \times \mathcal{F}^n \to \mathcal{F}^n$ es continua. Estos resultados son basados en que el problema de Cauchy con la derivada de Hukuhara es equivalente a una ecuación integral del tipo Aumann, vea [7] (vea también [3, 10, 16, 14, 15, 16, 17], similar al caso clásico.

La interpretación del problema (1) tiene algunas desventajas, ya que en muchos casos la solución obtenida tiene la propiedad que $diam(supp\, x(t))$ es ilimitado cuando $t \to \infty$, demostrando que esta interpretación no generaliza en una forma apropiada el caso clásico [1], [2], [4]. Así, es necesario la introducción del concepto de derivadas generalizadas, la cual amplia la clase de funciones difusas diferenciables. Con este concepto surgen nuevas soluciones para una EDF, con otras propiedades, pero ya no es cierto que el problema de Cauchy (1) con derivadas generalizadas sea equivalente a una ecuación integral del tipo Aumann, como mostramos en este trabajo. Además, sugerimos otras soluciones para un EDF.

2. Conceptos básicos

Denotaremos por $\mathcal{K}^n$ la familia de todos los subconjuntos compactos no vacios de $\mathbb{R}^n$. Si $A, B \in \mathcal{K}^n$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, entonces las operaciones de adición y multiplicación por un escalar son definidas como

$$A + B = \{a + b : a \in A,\, b \in B\}, \quad \lambda A = \{\lambda a : a \in A\}.$$

Un conjunto difuso en un conjunto universo X es una función $u : X \to [0, 1]$. El valor $u(x) \in [0, 1]$ es llamado grado de pertenencia. Si u es un conjunto difuso en $\mathbb{R}^n$, definimos el nivel α de u como $[u]^\alpha = \{x \in \mathbb{R}^n : u(x) \geq \alpha\}$ si $0 < \alpha \leq 1$ y llamamos soporte de u al conjunto $[u]^0 = supp(u) = \overline{\{x \in \mathbb{R}^n : u(x) > 0\}}$.

Un conjunto difuso es llamado compacto si $[u]^\alpha \in \mathcal{K}^n$, $\forall \in [0, 1]$. También, u es llamado convexo si $[u]^\alpha$ es un conjunto convexo $\forall \alpha \in [0, 1]$. Denotaremos por $\mathcal{F}^n$ el espacio de todos los conjuntos difusos convexos y compactos en $\mathbb{R}^n$.

Si $u \in \mathcal{F}$, entonces u es llamado intervalo difuso y el conjunto de nivel $[u]^\alpha$ es un intervalo compacto no vacio para todo $\alpha \in [0, 1]$. En esta nota, denotamos por C al intervalo difuso definido via sus niveles por $[C]^\alpha = [0, 1 - \alpha]$, para todo $\alpha \in [0, 1]$.

La suma y multiplicación por un escalar en $\mathcal{F}^n$ son definidos como sigue:

$$(u + v)(y) = \sup_{y_1 + y_2 = y} \text{mín}\{u(y_1), v(y_2)\}$$

y

$$(\lambda u)(y) = \begin{cases} u(\frac{y}{\lambda}) & \text{si} \quad \lambda \neq 0 \\ \chi_{\{0\}}(y) & \text{si} \quad \lambda = 0, \end{cases}$$

donde $\chi_{\{0\}}$ es la función carasterística de $\{0\}$. Es bien conocido que las siguientes operaciones son verdaderas para todos los α-niveles:

$$[u + v]^\alpha = [u]^\alpha + [v]^\alpha, \quad [\lambda \cdot u]^\alpha = \lambda [u]^\alpha, \quad \forall \alpha \in [0, 1]. \tag{2}$$

Podemos considerar la siguiente métrica en $\mathcal{F}^n$:

$$D(u, v) = \sup_{\alpha \in [0,1]} h([u]^\alpha, [v]^\alpha),$$

para todo $u, v \in \mathcal{F}^n$, donde h es la métrica de Hausdorff usual.

3. Soluciones de ecuaciones diferenciales difusas

Es conocido que la H-derivada (diferenciabilidad en el sentido de Hukuhara) para aplicaciones difusas fue inicialmente introducida por Puri y Ralescu [13] y esta está basada en la H-diferencia de conjuntos, como sigue.

Definición *Sean $u, v \in \mathcal{F}^n$. Si existe $w \in \mathcal{F}^n$ tal que $u = v + w$, entonces w es llamada la H-diferencia de u y v y lo denotamos por $u - v$.*

Definición *Sea $T = [a, b]$ un intervalo compacto, y consideramos la aplicación difusa $F : T \to \mathcal{F}^n$. Diremos que F es H-diferenciable en $t_0 \in T$ si existe un elemento $F^{'}(t_0) \in \mathcal{F}^n$ tal que los límites*

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{F(t_0 + h) - F(t_0)}{h} \quad \textit{and} \quad \lim_{h \to 0^+} \frac{F(t_0) - F(t_0 - h)}{h}$$

existen y son iguales a $F^{'}(t_0)$.

Aquí los límites son tomados en $(\mathcal{F}^n, D)$. En los extremos del intervalo T consideramos sólo la derivada de un lado.

Sea $f : T \times \mathcal{F}^n \to \mathcal{F}^n$ continua y consideremos el siguiente problema de valor inicial:

$$x^{'}(t) = f(t, x(t)), \qquad x(a) = x_0, \tag{3}$$

donde $x^{'}$ es la H-derivada de x y $x_0 \in \mathcal{F}^n$.

El problema (3) fue estudiado por diversos autores tanto del punto de vista teorico [3, 7, 10, 14, 15, 16, 17] asi como de sus aplicaciones [5, 6]. Mas, esta interpretación no generaliza en una forma apropiada algunos casos clásicos como vemos en el siguiente ejemplo. **Ejemplo** *Consideremos el problema Malthusiano difuso*

$$\begin{cases} x'(t) = -\lambda x(t) \\ x(0) = \ X_0, \end{cases} \tag{4}$$

donde $\lambda > 0$ y, como en [3], la condición inicial X_0 es un triángulo difuso simétrico con soporte $[-a, a]$. Es decir,

$$[X_0]^\alpha = [-a(1-\alpha), a(1-\alpha)] = (1-\alpha)[-a, a].$$

Si $x'(t)$ es la H-derivada, tenemos que resolver el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{cases} u_\alpha^{'}(t) = -\lambda v_\alpha(t), & u_\alpha(0) = -a(1-\alpha) \\ v_\alpha^{'}(t) = -\lambda u_\alpha(t), & v_\alpha(0) = a(1-\alpha). \end{cases}$$

La solución de este sistema es

$$u_\alpha(t) = -a(1-\alpha)e^{\lambda t} \quad \textit{and} \quad v_\alpha(t) = a(1-\alpha)e^{\lambda t},$$

y podemos ver que $u_\alpha(t) \leq v_\alpha(t)$ para todo $t \geq 0$. Por tanto, la función difusa $x(t)$ que resuelve el problema (4) tiene conjunto de niveles

$$[x(t)]^\alpha = [-a(1-\alpha)e^{\lambda t} \ , \ a(1-\alpha)e^{\lambda t}],$$

para todo $t \geq 0$.

Esta solución de (4), considerando la H-derivada, tiene la propiedad que $diam(supp\ x(t)) = 2ae^{\lambda t}$ *es ilimitado cuando* $t \to \infty$*, demostrando que esta interpretación no generaliza en una forma apropiada el caso clásico.*

Para mejorar esta situación, en [1] y [2] se introduce el concepto de derivada generalizada para la aplicación difusa $F : T \to \mathcal{F}^n$, ampliando la clase de aplicaciones difusas diferenciables. Esta generalización es definida como sigue.

Definición *Sean* $F : T \to \mathcal{F}^n$ *y* $t_0 \in T$*. Diremos que* F *es diferenciable en* t_0 *si:*
(1) *existe un elemento* $F^{'}(t_0) \in \mathcal{F}^n$ *tal que para todo* $h > 0$ *suficientemente cerca a 0, existen* $F(t_0 + h) - F(t_0)$*,* $F(t_0) - F(t_0 - h)$ *y los límites (en la métrica* D*)*

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{F(t_0 + h) - F(t_0)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{F(t_0) - F(t_0 - h)}{h} = F^{'}(t_0)$$

o

(2) *existe un elemento* $F^{'}(t_0) \in \mathcal{F}^n$ *tal que, para todo* $h < 0$ *suficientemente cerca a 0, existen* $F(t_0 + h) - F(t_0)$*,* $F(t_0) - F(t_0 - h)$ *y los límites*

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{F(t_0 + h) - F(t_0)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{F(t_0) - F(t_0 - h)}{h} = F^{'}(t_0).$$

Note que la primera forma (1) de la Definición 3 coincide con la H-derivada. Si F es diferenciable en la primera forma (1) de la Definición 3, esta no es diferenciable en la segunda forma (2) de la Definición 3 y viciversa.

El siguiente Teorema nos guia como resolver una EDF. **Teorema** *[2] Sea* $F : T \to \mathcal{F}$ *una función y denotemos* $[F(t)]^\alpha = [f_\alpha(t), g_\alpha(t)]$*, para cada* $\alpha \in [0, 1]$*. Entonces*

(i) *Si* F *es diferenciable en la primera forma (1), entonces* f_α *y* g_α *son diferenciables y*

$$\left[F^{'}(t)\right]^\alpha = \left[f^{'}_\alpha(t)\ ,\ g^{'}_\alpha(t)\right]. \tag{5}$$

(ii) *Si* F *es diferenciable en la segunda forma (2), entonces* f_α *y* g_α *son diferenciables y*

$$\left[F^{'}(t)\right]^\alpha = \left[g^{'}_\alpha(t)\ ,\ f^{'}_\alpha(t)\right]. \tag{6}$$

Ejemplo *Volvamos al problema Malthusiano difuso*

$$\begin{cases} x'(t) = -\lambda x(t) \\ x(0) = X_0, \end{cases} \tag{7}$$

Ahora, consideramos $x'(t)$ *en la segunda forma (2) de la Definición 3 y denotemos por* $[x(t)]^\alpha = [u_\alpha(t), v_\alpha(t)]$ *los niveles de* $x(t)$*. Entonces, del Teorema anterior, resolvemos el siguiente sistema diferencial*

$$\begin{cases} u^{'}_\alpha(t) = -\lambda u_\alpha(t), & u_\alpha(0) = -a(1-\alpha) \\ v^{'}_\alpha(t) = -\lambda v_\alpha(t), & v_\alpha(0) = a(1-\alpha), \end{cases}$$

y la solución es

$$u_\alpha(t) = -a(1-\alpha)e^{-\lambda t} \quad and \quad v_\alpha(t) = a(1-\alpha)e^{-\lambda t},$$

y podemos ver que $u_\alpha(t) \leq v_\alpha(t)$ *for all* $t \geq 0$*. Por lo tanto, la función difusa* $x(t)$ *que es solución de (7) en este caso tiene niveles*

$$[x(t)]^\alpha = [-a(1-\alpha)e^{-\lambda t} \ , \ a(1-\alpha)e^{-\lambda t}],$$

para todo $t \geq 0$*.*

Note que si consideramos en (7) la derivada $x^{'}$ *en la segunda forma (2) de la Definición 3, entonces el resultado es mas intuitivo para (7) que usando la H-derivada, ya que ahora* $diam(supp\, x(t)) = 2ae^{-\lambda t} \to 0$ *cuando* $t \to \infty$*.*

De los ejemplos anteriores podemos ver que la solución de una EDF depende de la eleción de la derivada: en la primera forma o en la segunda forma. De esta manera, la solución puede ser elegida adecuadamente.

4. Existencia de soluciones

Sea $f : T \times \mathcal{F}^n \to \mathcal{F}^n$ continua y consideremos el problema de valor inicial difuso:

$$x^{'}(t) = f(t, x(t)), \qquad x(a) = x_0, \tag{8}$$

donde $x^{'}$ es la derivada de x en el sentido generalizado (Definición 3). Como vimos en la Sección anterior, podemos elegir la solución de una ecuación diferencial difusa adecuadamente, pero como mostramos en los ejemplos a continuación, ni siempre existe solución de una EDF considerando la derivada sólo en la segunda forma (2), mismo que f sea continua. Mas precisamente, no vale el siguiente resultado

Teorema *Un aplicación* $x : T \to \mathcal{F}^n$ *es una solución de (8) si y solo si esta es continua y satisface la siguiente ecuación integral*

$$x(t) = x_0 + \int_a^t f(s, x(s))ds, \quad t \in T.$$

El resultado anterior, sólo vale si en (8) $x^{'}$ es la H-derivada, ver [7]. Esto contradice lo escrito por los autores en [2], donde se afirmaba la existencia de una solución cuando f es continua.

Ejemplo *Sea* $f : [0, \pi] \times \mathcal{F} \to \mathcal{F}$ *definida por* $f(t, x(t)) = C \cdot \cos(t)$ *y considere el siguiente problema:*

$$\begin{cases} x'(t) = C \cdot \cos(t) \\ x(0) = \chi_{\{0\}}. \end{cases} \tag{9}$$

En esta caso, la ecuación integral tipo Aumann es dado por

$$x(t) = x(0) + \int_0^t C \cdot \cos(s)ds, \ \ \forall t \in T = [0, \pi] \tag{10}$$

lo cual implica que

$$[x(t)]^\alpha = \begin{cases} [0 \ , \ (1-\alpha)\sin(t)] \ , & 0 \leq t \leq \pi/2 \\ [(1-\alpha)(\sin(t) - 1) \ , \ (1-\alpha)] \ , & \pi/2 \leq t \leq \pi \end{cases} \tag{11}$$

para todo $\alpha \in [0, 1]$*. Luego, de [7]* $x(t)$ *es la solución de (9) si* $x^{'}$ *es la H-derivada de* x*.*

Podemos ver también que (9) no tiene solución si consideramos x' sólo en el sentido de la segunda forma (2) de la Definición 3.

Ahora, si nosotros consideramos x' en la primera forma (H-derivada) en el intervalo $[0, \pi/2]$ y en la segunda forma en el intervalo $[\pi/2, \pi]$, obtenemos que

$$x(t) = C \cdot \sin(t)$$

es una solución de (9), generando así otra solución diferente.

Luego, del análisis de los ejemplos anteriores, la pregunta natural es, ¿Cuántas soluciones tiene el problema 8? ¿siempre existen al menos dos soluciones? ¿son exactamente dos soluciones?. Otra pregunta es, ¿cómo modificar la ecuación integral de tipo Aumann afin de que se cumpla el Teorema 4?. Son cosas que tentaremos responder en trabajos futuros

Agradecimientos

Este trabajo ha sido parcialmente financiado por el proyecto Fondecyt-Chile 1061244 y 7060272. El segundo autor ha sido financiado parcialmente por BFM2003-06446-C02-01, Ministerio de Ciencia y Tecnología de España y Cooperación Internacional Brasil-España, financiado por la CAPES y el Ministerio de Educación de España, proyecto Nro. 2137-05-4.

Referencias

[1] B. Bede and S. G. Gal, Generalizations of the differentiability of fuzzy number valued functions with applications to fuzzy differential equation, Fuzzy Sets and Systems 151 (2005) 581-599.

[2] Y. Chalco-Cano and H. Román-Flores, On the new solution of fuzzy differential equations, Chaos, Solitons& Fractals (2006).

[3] P.Diamond and P. Kloeden, Metric Space of Fuzzy Sets: Theory and Application, World Scientific, Singapure, 1994.

[4] T. Gnana Bhaskar, V. Lakshmikantham and V. Devi, Revisiting fuzzy differential equation, Nonlinear Analysis 58 (2004) 351-358.

[5] M. Guo, X. Xue and R. Li, The oscillation of delay differential inclusions and fuzzy biodynamics models, Mathematical and Computer Modelling 37 (2003) 651-658.

[6] M. Guo and R. Li, Impulsive functional differential inclusions and fuzzy population models, Fuzzy Sets and Systems 138 (2003) 601-615.

[7] O. Kaleva, Fuzzy differential equations, Fuzzy Sets and Systems 24 (1987) 301-317.

[8] O. Kaleva, A note on fuzzy differential equations, Nonlinear Analysis 64 (2006) 895-900.

[9] V. Lakshmikantham and R.N. Mohapatra, Theory of Fuzzy Differential Equation and Inclusions, Taylor & Francis, London, 2003.

[10] J. J. Nieto, The Cauchy problem for continuous differential equations, Fuzzy Sets and Systems 102 (1999) 259-262.

[11] J.J. Nieto and R. Rodríguez-López, Bounded solutions for fuzzy differential and integral equations, Chaos, Solitons & Fractals 27 (2006) 1376-1386.

[12] M. Oberguggenberger and S. Pittschmann, Differential equations with fuzzy parameters, Math. Mod. Systems, 5 (1999) 181-202.

[13] M. Puri and D. Ralescu, Differential and fuzzy functions, J. Math. Anal. Appl. 91 (1983) 552-558.

[14] S. Song, Lei Guo and Chumbo Feng, Global existence of solutions to fuzzy differential equations, Fuzzy Sets and Systems 115 (2000) 371-376.

[15] S. Song and C. Wu, Existence and uniqueness of solutions to Cauchy problem of fuzzy differential equations, Fuzzy Sets and Systems 110 (2000) 55-67.

[16] C.X. Wu, S. Song and Stanley Lee, Approximate solutions, existence and uniqueness of the Cauchy problem of fuzzy differential equations, J. Math. Anal. Appl. 202 (1996) 629-644.

[17] C.X. Wu and S. Song, Existence Theorem to the Cauchy problem of fuzzy differential equations under compactness-type conditions, Information Sciences 108 (1998) 123-134.

[18] X. Xiaoping and F. Yongqiang, On the structure of solutions for fuzzy initial value problem, Fuzzy Sets and Systems 157 (2006) 212-229.