XX Congreso de Ecuaciones Diferenciales y Aplicaciones
X Congreso de Matemática Aplicada
Sevilla, 24-28 septiembre 2007
(pp. 1–7)

Origen, motivacion y resultados sobre dos ecuaciones en diferencias no lineales

Francisco Balibrea Gallego[1], Antonio Linero Bas [2]

[1] *Dpto. de Matemáticas Universidad de Murcia, Campus de Espinardo, 30100 Murcia. E-mails:* `balibrea@um.es`
[2] *Dpto. de Matemáticas, Universidad de Murcia, Campus de Espinardo, 30100 Murcia. E-mail:* `lineroba@um.es`.

Palabras clave: ecuaciones en diferencias, no linealidad, periodicidad global

Resumen

Las ecuaciones en diferencias no lineales

$$x_{n+1}x_{n-1} - 1 = x_n, \quad n \geq 1$$

$$x_{n+2} = x_n^2(x_{n+1} - 2) + 2, \quad n \geq 1$$

tienen su origen y motivación en problemas de distinta naturaleza. La primera, en un problema de números propuesto por Lyness en 1942 y otro de geometría de *frieze patterns* estudiado y resuelto por Coxeter en 1971. La segunda aparece mediante un modelo para describir las propiedades de conducción y de aislamiento eléctrico de quasi-cristales, mediante una red de tipo "Thue-Morse".

En ambos casos precisaremos algunos aspectos relevantes de su deducción y daremos algunos resultados sobre su comportamiento.

1. Introducción

En el campo de las ecuaciones en diferencias, ocurre frecuentemente que las que se abordan no tienen su raiz en problemas que interesen a las ciencias experimentales, sociales, económicas, etc y meramente constituyen problemas planteados en el mundo de las Matemáticas. Pero existen otros que sí se plantean como consecuencia de aplicar ciertos modelos en las citadas ciencias.

En este artículo indagamos sobre el origen de dos ecuaciones que son de nuestro interés, seguimos su evolución y damos algunos resultados recientes sobre su comportamiento. Estas van a ser: la ecuación de Lyness y la ecuación de Thue-Morse

2. La ecuación de Lyness

Originalmente, en 1942 R.C. Lyness [?] presentó a modo de divertimento matemático en Mathematical Gazette las siguientes ecuaciones que son 3-ciclos, 4-ciclos, 6-ciclos y 5-ciclos respectivamente

$$x_{n+1}x_{n-1} + p = -x_n(x_{n-1} + x_{n+1})$$

$$x_{n+1}x_{n-1} + p = x_n(x_{n-1} + x_n + x_{n+1})$$
$$x_{n+1}x_{n-1} + p = x_n(x_{n-1} + 2x_n + x_{n+1})$$
$$x_{n+1}x_{n-1} - a^2 = ax_n$$

y se preguntaba que si se podían obtener interesantes 7-ciclos.

Una ecuación del tipo

$$x_{n+k} = f(x_{n+1}, x_n) \qquad (1)$$

es un p-ciclo o es globalmente periódica de período p si se verifica:

$$x_{n+p} = f^p(x_n) = x_n$$

para $n = 1, 2, ...$El mínimo número p para el que esto ocurre lo denominamos el período de la ecuación.

En otro artículo en The Mathematical Gazette de 1956, Lyness analiza en más profundidad el ejemplo de 5-ciclo anterior y llega a la conclusión de que el 5-ciclo más sencillo a considerar es

$$x_{n+1}x_{n-1} - 1 = x_n$$

que es históricamente la ecuación conocida como *ecuación de Lyness*. Si tenemos que x, y son los puntos iniciales de una órbita, entonces los puntos restantes son $\frac{(y+1)}{x}$, $\frac{(x+y+1)}{xy}$ y $\frac{(x+1)}{y}$. De aquí se desprende que si el punto (a, b) pertenece a la curva cúbica

$$(x + 1)(y + 1)(x + y + 1) = kxy \qquad (2)$$

el punto $(b, \frac{b+1}{a})$ también pertenecerá a la curva. Se obtiene entonces que para cada solución $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ de (1), se verifica que la función

$$I(x_{n-1}x_n) = \frac{(1 + x_{n-1} + x_n + x_{n-1}x_n)(1 + x_{n-1} + x_n)}{x_{n-1}x_n}$$

permanece constante para $n = -1, 0.....$ y decimos que la función I vista como función de dos variables, es un *invariante* (o *integral primera*) de (1).

En un artículo en Acta Arithmetica de 1971, H.S.Coxeter puso en actualidad la idea de los "frieze patterns"que ya habían aparecido en el siglo XVI y que Gauss había incorporado a su *pentagramma mirificum*. Un frieze pattern es una disposición de números enteros formando rombos de tal forma que si los numeros a,b,d,c ocupan sus extremos, se verifica la propiedad esencial $ad - bc = 1$. La conclusión sorprendente es que cada uno de tales patrones es periódico. La prueba realizada por Coxeter de este hecho es esencialmente la comprobación de que ciertas ecuaciones en diferencias sean globalmente periódicas. La ecuación de Lyness es uno de tales ejempos, como lo es también en el contexto de los patrones, la ecuación

$$x_{n+1}x_{n-1} - x_n = \alpha$$

con α un número entero positivo.

Se denomina ecuación *generalizda de Lyness*, a la ecuación

$$x_{n+1}x_{n-1} - x_n = \alpha \qquad (3)$$

donde $\alpha > 0$. Si las condiciones iniciales de la ecuación x_1, x_2 son números positivos, entonces la sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ también será de números positivos.

Si $\alpha \neq 1$, es fácil ver que (3) no es un 5-ciclo. Para estudiarla desplegamos la ecuación estudiando el difeomorfismo en el primer cuadrante de $\mathbb{R}^2$ dado por

$$F(x,y) = (y, \frac{\alpha + y}{x})$$

Las órbitas producidas ahora por la iteración de F producen las órbitas de (3) proyectando sobre el eje OX. Las órbitas de F permiten ser ahora estudiadas usando la teoría de los Sistemas Dinámicos Discretos y de la Geometría Algebraica.

Las curvas de la familia (2) llenan el primer cuadrante y es fácil ver que F deja invariante cada una de tales curvas , es decir $H(F(x,y)) = H(x,y)$ para todo punto del primer cuadrante, donde

$$H(x,y) = (\alpha + x + y)(1 + \frac{1}{x})(1 + \frac{1}{y})$$

Además F preserva la 2-forma diferencial $\sigma = \frac{(dx \wedge dy)}{xy}$ y si consideramos el campo vectorial hamiltoniano cuyas curvas integrales sean soluciones del sistema

$$\dot{x} = xy\frac{\partial H}{\partial y} = (x+1)(y - \frac{x+\alpha}{y})$$

$$\dot{y} = -xy\frac{\partial H}{\partial x} = (y+1)(x - \frac{y+\alpha}{x})$$

tales curvas son invariantes por F.

H es una función que tiene todos sus puntos críticos no degenerados y un único mínimo en el nivel $h_{min} = \frac{1+\omega^3}{\omega}$ donde $\omega = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{1+4\alpha})$, resultando que cada curva de nivel $A(h)$ con $h > h_{min}$ es difeomorfa a la circunferencia. Cada órbita del campo X_H resulta además ser periódica de período $T(h)$

C.Zeeman probó que la función $F|A(h) = G$ es conjugada con derivabilidad a una rotación cuyo ángulo depende derivablemente de h. La consecuencia es que todas las órbitas de F o son periódicas o densas

El tiempo $\tau(h)$ que se tarda en pasar del punto $(x, y \in A(h))$ de una curva integral de X_H al $F(x,y) \in A(h)$ no depende del punto inicial sino solo del valor de h. Por tanto el número de rotación $\rho(h)$ de G asociado a la curva de nivel $A(h)$ es $\frac{\tau(h)}{T(h)}$

Las propiedades de esta función $\rho(h)$ han sido estudiadas. Beukers y Cushman probaron en [2] que tal función es analítica real en el intervalo $[h_{min}, \infty)$ y strictamente creciente si $0 < \alpha < 1$ o decreciente si $1 < \alpha < \infty$.

Finalmente, si $\alpha = 1$ entonces se obtiene que todas las órbitas son 5-periódicas (resultado ya obtenido directamente de la ecuación de Lyness) por lo que en todas ellas el número de rotación es $\frac{1}{5}$. Pero cuando $\alpha \neq 1$, se verifica

$$lim\rho(h)_{h\to\infty} = \frac{1}{5}$$

3. La ecuación de Thue-Morse

La ecuación de Schrödinger con una sola variable espacial e independiente del tiempo para una partícula de masa m moviéndose cuando existe un potencial $V(x)$ de una dimensión es

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\Psi''(x) + V(x)\Psi(x) = E(x)$$

Usando una aproximación "tight-bending" de la misma tenemos

$$-(\Psi_{n+1} + \Psi_n) + V_n\Psi_n = E\Psi n$$

Ahora introducimos una sucesión no periódica potenciales $(V_n)_{n=1}^{\infty}$ colocados en línea recta. Consideremos el coeficiente de reflexión $|r_N|$ de una onda plana (con número de onda $k > 0$) a través de una disposición en línea recta de N funciones δ de potencial con intensidades iguales ν y localizadas en en una *cadena de Thue-Morse* con distancias d_1 y d_2 del siguiente modo

$$V_n(x) = \nu \sum_{n=1}^{\infty} \delta(x - x_n)$$

donde $\nu > 0$ y (x_n) es una sucesión cuyas diferencias alcanzan dos posibles valores d_1 y d_2

Una cadena de Thue-Morse, es aquella que verifica

$$y_n = \begin{cases} d_1 & \xi_n = 0, \\ d_2 & \xi_n = 1 \end{cases}$$

donde $\xi_n = [1 + (-1)^{s(n)}]/2$ y $s(n)$ es el número de unos en el desarrollo binario de n

Cualquier onda plana, e^{-ikx} caminando desde la derecha, experimentará reflexiones y transmisiones de amplitudes r_n y t_n respectivamente.

Cuando $N = 1$ es sencillo comprobar que tales ampltudes valen

$$r_1 = \frac{\nu}{2ik - \nu}, \quad t_1 = \frac{2ik}{2ik - \nu}$$

Si existen $N > 1$ centros de potencial las amplitudes de reflexión y transmisión se pueden determinar a través de una relación de recursión de matrices que se obtienen del siguiente modo.

Construímos dos sucesiones de matrices $(P_n)_{n=1}^{\infty}$ y $(Q_n)_{n=1}^{\infty}$ en $SU(1,1)$ con

$$P_0 = \begin{pmatrix} e^{-i\Phi} & 0 \\ 0 & e^{i\Phi} \end{pmatrix} C$$

$$Q_0 = \begin{pmatrix} e^{-i\Psi} & 0 \\ 0 & e^{i\Psi} \end{pmatrix} C$$

$$P_n = Q_{n-1}P_{n-1}, \;\; Q_n = P_{n-1}Q_{n-1}$$

donde

$$C = \begin{pmatrix} t^{-1} & -rt^{-1} \\ rt^{-1} & (t^2-t)t^{-1} \end{pmatrix}$$

y

$$\Phi = kd_1, \;\; \Psi = kd_2$$

Estudiamos el comportamiento de la sucesión $(P_n)_{n=1}^{\infty}$ a través del de su traza. Ponemos $x_n = tr(P_n)$ para $n \geq 0$ obteniéndose de las fórmulas anteriores que se verifica

$$x_{n+2} = x_n^2(x_{n+1} - 2) + 2, \quad n \geq 1 \qquad (5)$$

En lugar de estudiar esta ecuación por métodos directos, desplegamos la misma intoduciendo el sistema dinámico $(G, \mathbb{R}^2)$ donde

$$G(x,y) = (y, x^2y - 2x^2 + 2)$$

que es topológicamente conjugado al sistema en $\mathbb{R}^2$ dado por

$$F(x,y) = (x(4-x-y), xy) \qquad (6)$$

Tal sistema dinámico deja invariante en $\mathbb{R}^2$ el triángulo Δ de vértices (0,0), (4,0) y (0,4) y además cada punto del interior de Δ no es preimagen de ningún punto de su exterior.

En [4] se estudia el sistema (6) y se dan las descripcones parciales de su dinámica siguientes a través de las propieddes de dos conjuntos Ω y Λ

- $\Omega \cap \Lambda = \emptyset$
- Ω y Λ son densos en Δ
- Δ es la unión de las preimágenes de $I = [0,4]$
- Las órbitas de los puntos de Λ se aproximan a I pero no son atraídos por I

En [1] y [3] se completan los resultados anteriores, describiéndose con más precisión la dinámca en el interir de Δ

1. Existe una única curva invariante Γ de forma espiral y C^1 a trozos (con un conjnto numerable de tramos) conectando el foco (1,2) con el punto (0,0). Todos los puntos de Γ son asintóticamente fijos

2. Existe una interesante descomposición de Δ

$$\Delta = (\bigcup_{i=0}^{i=4} \omega_i) \cup (\mathcal{R})$$

3. En el interior de Δ existe un único punto fijo $(1, 2)$, pero no hay puntos periódicos de período dos y tres

4. Usando el método algebraico de la resultante, se prueba que existe un único punto periódico de período cuatro

$$\{(2-\sqrt{2}, \frac{1}{2}), (1+\frac{1}{\sqrt{2}}, 1-\frac{1}{\sqrt{2}}), (2+\sqrt{2}, \frac{1}{2}), (1-\frac{1}{\sqrt{2}}, 1+\frac{1}{\sqrt{2}})\}$$

5. Existe un único punto periódico de período 5 cuyas componentes son raíces de la ecuación

$$1 - 98y - 461y^2 - 560y^3 + 353y^4 + 1255y^5 + 903y^6 + 144y^7 - 76y^8 -$$

$-21y^9 + y^{10} = 0$

6. Existe un único punto de período 6

$$\{(\frac{3+\sqrt{5}}{2}, 1), (1, \frac{3+\sqrt{5}}{2}), (\frac{3-\sqrt{5}}{2}, \frac{3+\sqrt{5}}{2}),$$

$$(\frac{3-\sqrt{5}}{2}, 1), (1, \frac{3-\sqrt{5}}{2}), (\frac{3+\sqrt{5}}{2}, \frac{3-\sqrt{5}}{2})\}$$

7. $$\bigcup_{n=1}^{\infty} F^{-n}(1, 2)$$

   es un conjunto denso de Δ

8. $$F|_\Delta \text{ es } \textit{transitivo}$$

   que significa que para cualesquiera dos conjuntos no vacíos y abiertos $\mathcal{U}, \mathcal{V} \subset \Delta$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $F^n(\mathcal{U}) \bigcap \mathcal{V} \neq \emptyset$

   $$F|_\Delta \text{ es } \textit{casi topológicamente exacto}$$

   que significa que para cualqier abierto no vacío $\mathcal{U} \subset \Delta$ es

   $$lim_{n\to\infty} \lambda(\Delta \backslash F^n(\mathcal{U})) = 0$$

9. $$F|_\Delta \text{ no es } \textit{topológicamente exacto}$$

   ya que no es cierto que para todo $\mathcal{U} \subset \Delta$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $F^n(\mathcal{U}) = \Delta$

4. Observación final

Las dos ecuaciones estudiadas admiten naturalmente extensiones y generalizaciones, por ejemplo, las ecuaciones de tipo Lyness para más variables o extensiones a más dimensiones de la de Thue-Morse. Algunos de los resultados señalados permiten en ciertos casos la obtención de nuevos resultados en las generalizaciones.

Sin embargo queremos señalar el interés de poder motivar la consideración de tales ecuaciones a través de modelos de fenómenos que las generen, dándole un valor suplementario.

5. Agradecimientos

Esta investigación ha sido financiada parcialmente por el MEC (Ministerio de Educación y Ciencia de España), Proyecto MTM2005-03860 y por la Fundación Séneca (Comunidad Autónoma de la Región de Murcia), Proyecto 00684-FI-04.

Referencias

[1] F. Balibrea, J.L. García Guirao, M. Lampart y J. Llibre, *Dynamics of a Lotka-Voterra map*, Fundamenta Mathematicae, Volume 191, (2006), 265-279

[2] F. Beukers y R. Cushman, *Zeeman's monotonicity conjecture*, Journal of Differential Equations 143, (1998), 191-200

[3] J.L. García Guirao y M. Lampart, *On the transitivity of a system linked to the Schrödinger equation* (sometido)

[4] G.Swirszcz, *On a certain map of a triangle*, Fundamenta Mathematicae, 155 (1998), 267-283