

Métodos conservativos de direcciones alternadas para problemas parabólicos semilineales sobre mallados rectangulares lógicos

A. ARRARÁS, L. PORTERO, J.C. JORGE

*Dpto. de Ingeniería Matemática e Informática, Universidad Pública de Navarra, Campus de Arrosadía
s/n, 31006 Pamplona. E-mails: {andres.arraras,laura.portero,jcjorge}@unavarra.es.*

Palabras clave: Diferencias Finitas, Direcciones Alternadas, Elementos Finitos Mixtos, Mallado Rectangular Lógico, Problema Parabólico Semilineal.

Resumen

En este trabajo se propone y analiza un método numérico eficiente para la resolución de problemas parabólicos semilineales que contienen derivadas mixtas y se plantean sobre dominios que pueden ser no rectangulares. El proceso de semidiscretización en espacio se efectúa mediante un esquema de diferencias finitas centrado en celdas. Esta primera etapa de discretización es localmente conservativa y, tras ser combinada con una integración temporal de tipo direcciones alternadas, nos permite obtener un esquema totalmente discreto que involucra conjuntos de sistemas tridiagonales desacoplados cuya resolución es fácilmente paralelizable. El artículo incluye algunos resultados teóricos de convergencia incondicional (de segundo orden en espacio y primer orden en tiempo) y se completa con un experimento numérico que ilustra el comportamiento del método propuesto.

1. Introducción

El presente artículo versa sobre la resolución numérica eficiente de problemas parabólicos de carácter semilineal en cuya formulación aparecen derivadas mixtas. En particular, consideramos un modelo evolutivo de flujo en medios porosos basado en una versión simplificada de la ecuación de Richards (cf. [4, 7]). Dicho modelo, que supone la existencia de direcciones de flujo preferente debido a la naturaleza anisótropa del medio, admite la

siguiente formulación: Hallar $\hat{\psi} : \hat{\Omega} \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$\begin{cases} c \frac{\partial \hat{\psi}(\hat{\mathbf{x}}, t)}{\partial t} + \hat{\nabla} \cdot (\hat{K}(\hat{\mathbf{x}}) \hat{\nabla} \hat{\psi}(\hat{\mathbf{x}}, t)) = \hat{f}(\hat{\mathbf{x}}, t) + \hat{g}(\hat{\psi}), & (\hat{\mathbf{x}}, t) \in \hat{\Omega} \times (0, T], \\ \hat{\psi}(\hat{\mathbf{x}}, 0) = \hat{\psi}_0(\hat{\mathbf{x}}), & \hat{\mathbf{x}} \in \hat{\Omega}, \\ \hat{\psi}(\hat{\mathbf{x}}, t) = \hat{\psi}_D(\hat{\mathbf{x}}, t), & (\hat{\mathbf{x}}, t) \in \partial \hat{\Omega} \times (0, T], \end{cases} \quad (1)$$

donde $\hat{\psi} \equiv \hat{\psi}(\hat{\mathbf{x}}, t)$ es la presión capilar, $c > 0$ denota la constante de humedad específica y $\hat{K} \equiv \hat{K}(\hat{\mathbf{x}}) = (\hat{K}_{ij}(\hat{\mathbf{x}}))_{i,j \in \{1,2\}}$ es un tensor simétrico y definido-positivo que representa la conductividad hidráulica del medio. Por su parte, $\hat{f}(\hat{\mathbf{x}}, t)$ es un término fuente/sumidero y $\hat{g}(\hat{\psi})$ constituye una función no lineal suave que modeliza, por ejemplo, la absorción radicular en perfiles de suelo (cf. [9]). Suponemos que (1) está definido sobre un dominio abierto y acotado $\hat{\Omega} \subseteq \mathbb{R}^2$ de geometría no rectangular, cuya frontera se denota por $\partial \hat{\Omega}$. Finalmente, las condiciones inicial y de contorno vienen dadas por las funciones $\hat{\psi}_0(\hat{\mathbf{x}})$ y $\hat{\psi}_D(\hat{\mathbf{x}}, t)$, respectivamente.

El método numérico desarrollado combina los procedimientos de semidiscretización espacial e integración temporal que se describen en las secciones 2 y 3, respectivamente. Su contenido se completa con algunos resultados teóricos de convergencia incondicional para los esquemas semidiscreto y totalmente discreto. Por último, la sección 4 incluye un experimento numérico que ilustra el comportamiento del algoritmo en la simulación de modelos de flujo como el formulado previamente.

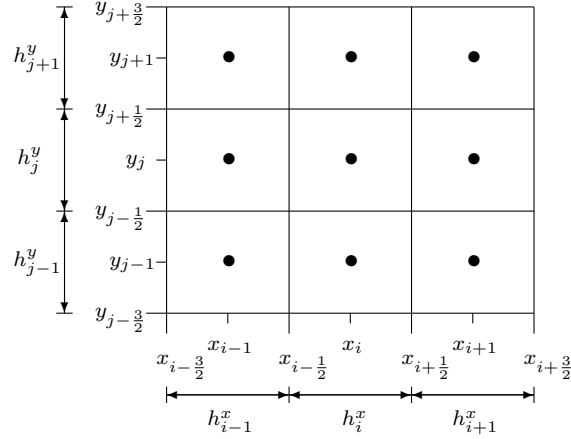
2. Semidiscretización en espacio

Para la resolución numérica del problema (1) sobre un dominio de flujo $\hat{\Omega}$ de geometría no rectangular, proponemos una transformación previa del mismo que permita plantearlo sobre un dominio computacional Ω de geometría rectangular. Sea $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ una transformación inversible y suficientemente regular (al menos \mathcal{C}^2) que satisface $F(\mathbf{x}) = \hat{\mathbf{x}}$ para $\mathbf{x} \in \Omega$ y $\hat{\mathbf{x}} \in \hat{\Omega}$. Denotemos por $J \equiv J(\mathbf{x})$ a la matriz jacobiana de F , siendo $d \equiv d(\mathbf{x}) = |\det(J)|$. Si $\{\mathcal{T}_h\}_{h>0}$ representa una malla de elementos finitos rectangulares cuasi-uniforme definida sobre Ω , donde h designa el diámetro máximo de los elementos que la componen, entonces $\{\hat{\mathcal{T}}_h\}_{h>0} \equiv F(\mathcal{T}_h)$ será una malla rectangular lógica definida sobre $\hat{\Omega}$. Es decir, F transforma la estructura rectangular de un elemento $E \in \mathcal{T}_h$ en la estructura curvilínea de su correspondiente $\hat{E} \in \hat{\mathcal{T}}_h$, manteniendo la proporción entre E y \hat{E} . Para toda función escalar $\varphi(\mathbf{x})$ definida sobre E , tenemos que $\hat{\varphi}(\hat{\mathbf{x}}) = \mathcal{F}(\varphi)(\hat{\mathbf{x}}) \equiv \varphi \circ F^{-1}(\hat{\mathbf{x}})$. Por su parte, para las funciones vectoriales aplicamos la transformación de Piola (cf. [10]): dada $\mathbf{q}(\mathbf{x})$ definida sobre E , tenemos que $\hat{\mathbf{q}}(\hat{\mathbf{x}}) = \mathcal{G}(\mathbf{q})(\hat{\mathbf{x}}) \equiv (d^{-1}J\mathbf{q}) \circ F^{-1}(\hat{\mathbf{x}})$.

Por tanto, es posible reformular (1) a través de \mathcal{F} y \mathcal{G} sobre el dominio rectangular Ω del modo siguiente: Hallar $\psi : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$\begin{cases} c \frac{\partial \psi(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + \frac{1}{d(\mathbf{x})} \nabla \cdot (K(\mathbf{x}) \nabla \psi(\mathbf{x}, t)) = f(\mathbf{x}, t) + g(\psi), & (\mathbf{x}, t) \in \Omega \times (0, T], \\ \psi(\mathbf{x}, 0) = \psi_0(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in \Omega, \\ \psi(\mathbf{x}, t) = \psi_D(\mathbf{x}, t), & (\mathbf{x}, t) \in \partial \Omega \times (0, T], \end{cases} \quad (2)$$

donde $K \equiv K(\mathbf{x}) = dJ^{-1}\hat{K}(J^{-1})^T$. Nótese que, en general, el tensor K es no diagonal


 Figura 1: Estructura de la malla que discretiza el dominio computacional Ω .

incluso en el caso de que \hat{K} sea diagonal, lo que da lugar a la aparición de derivadas mixtas en la nueva formulación.

La semidiscretización espacial del problema (2) se basa en una variante del método de elementos finitos mixtos que permite aproximar explícitamente tres variables: la presión ψ , su gradiente cambiado de signo $\tilde{\mathbf{u}}$ y el flujo $\mathbf{u} = K\tilde{\mathbf{u}}$ (cf. [1]). Considerando los espacios de Raviart-Thomas-Nédélec de orden más bajo, si en la formulación variacional del problema semidiscreto se aproximan los productos escalares entre vectores por determinadas reglas de cuadratura (e.g. véanse las propuestas en [8]), es inmediato obtener un esquema de diferencias finitas centrado en celdas para la variable ψ . Dicho esquema preserva las propiedades esenciales de los métodos mixtos estándar (precisión asintótica y conservatividad local), reduciendo notablemente su coste computacional. A continuación se realiza una descripción detallada del mismo.

Si denotamos los nodos de la malla por $(x_{i+1/2}, y_{j+1/2})$ para $i = 0, 1, \dots, N_x$ y $j = 0, 1, \dots, N_y$, es posible definir $x_i = (x_{i-1/2} + x_{i+1/2})/2$, $h_i^x = x_{i+1/2} - x_{i-1/2}$ e $y_j = (y_{j-1/2} + y_{j+1/2})/2$, $h_j^y = y_{j+1/2} - y_{j-1/2}$ para $i = 1, 2, \dots, N_x$ y $j = 1, 2, \dots, N_y$. La Fig. 1 muestra la estructura de la malla para el dominio computacional Ω .

En lo que sigue, $\psi_h(t)$ es el vector formado por las aproximaciones de la función escalar $\psi(\mathbf{x}, t)$ en los centros de las celdas, así como por las evaluaciones de $\psi_D(\mathbf{x}, t)$ en los puntos medios de los segmentos de contorno. Por su parte, $\mathbf{u}_h(t) \equiv (u_h^x(t), u_h^y(t))$ y $\tilde{\mathbf{u}}_h(t) \equiv (\tilde{u}_h^x(t), \tilde{u}_h^y(t))$ aproximan a las funciones vectoriales $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \equiv (u^x(\mathbf{x}, t), u^y(\mathbf{x}, t))$ y $\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) \equiv (\tilde{u}^x(\mathbf{x}, t), \tilde{u}^y(\mathbf{x}, t))$ en los puntos medios de los segmentos entre nodos; en concreto, $u_h^x(t)$ y $\tilde{u}_h^x(t)$ se localizan en los segmentos verticales, mientras que $u_h^y(t)$ y $\tilde{u}_h^y(t)$ se sitúan en los horizontales. Finalmente, K_h contiene las evaluaciones nodales de las componentes del tensor $K(\mathbf{x})$.

La discretización del operador lineal elíptico $\mathbf{A} \equiv -\nabla \cdot K\nabla$ se realiza en tres fases sucesivas. La primera de ellas permite obtener una aproximación de las componentes de $\tilde{\mathbf{u}} = -\nabla\psi$ en los puntos interiores $(i + \frac{1}{2}, j)$ e $(i, j + \frac{1}{2})$ de la forma

$$\tilde{u}_{h,i+\frac{1}{2},j}^x = -\frac{\psi_{h,i+1,j} - \psi_{h,i,j}}{\frac{1}{2}(h_i^x + h_{i+1}^x)}, \quad \tilde{u}_{h,i,j+\frac{1}{2}}^y = -\frac{\psi_{h,i,j+1} - \psi_{h,i,j}}{\frac{1}{2}(h_j^y + h_{j+1}^y)}, \quad (3)$$

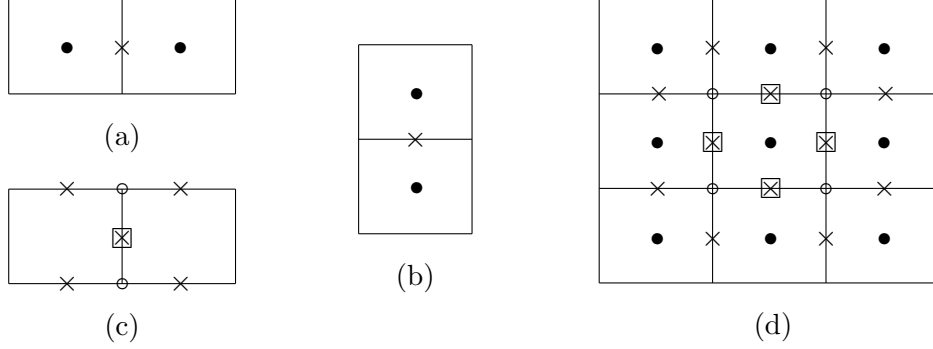


Figura 2: *Stencil* asociado a: (a) $\tilde{u}_h^x(t)$, (b) $\tilde{u}_h^y(t)$, (c) $u_h^x(t)$ y (d) $\nabla_h \cdot \mathbf{u}_h$. Simbología: \bullet , $\psi_h(t)$; \times , $\tilde{u}_h^x(t)$ y $\tilde{u}_h^y(t)$; \square , $u_h^x(t)$ y $u_h^y(t)$; \circ , K_h .

donde $\psi_{h,i,j} \approx \psi(x_i, y_j, t)$, $\tilde{u}_{h,i+\frac{1}{2},j}^x \approx \tilde{u}^x(x_{i+\frac{1}{2}}, y_j, t)$ y $\tilde{u}_{h,i,j+\frac{1}{2}}^y \approx \tilde{u}^y(x_i, y_{j+\frac{1}{2}}, t)$. En los puntos de frontera, tenemos las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned} \tilde{u}_{h,\frac{1}{2},j}^x &= -\frac{\psi_{h,1,j} - \psi_{h,\frac{1}{2},j}}{\frac{1}{2}h_1^x}, & \tilde{u}_{h,N_x+\frac{1}{2},j}^x &= -\frac{\psi_{h,N_x+\frac{1}{2},j} - \psi_{h,N_x,j}}{\frac{1}{2}h_{N_x}^x}, \\ \tilde{u}_{h,i,\frac{1}{2}}^y &= -\frac{\psi_{h,i,1} - \psi_{h,i,\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}h_1^y}, & \tilde{u}_{h,i,N_y+\frac{1}{2}}^y &= -\frac{\psi_{h,i,N_y+\frac{1}{2}} - \psi_{h,i,N_y}}{\frac{1}{2}h_{N_y}^y}, \end{aligned} \quad (4)$$

donde $\psi_{h,\frac{1}{2},j}$, $\psi_{h,N_x+\frac{1}{2},j}$, $\psi_{h,i,\frac{1}{2}}$ y $\psi_{h,i,N_y+\frac{1}{2}}$ se deducen de las condiciones de contorno de tipo Dirichlet. Los *stencils* correspondientes a las componentes x e y se muestran en las Figs. 2(a) y 2(b).

En la segunda fase, obtenemos una aproximación de las componentes de $\mathbf{u} = K\tilde{\mathbf{u}}$ a partir de las discretizaciones previas. Así, la expresión de $u_h^x(t)$ en el punto interior $(i+\frac{1}{2}, j)$ viene dada por

$$\begin{aligned} u_{h,i+\frac{1}{2},j}^x &= \frac{1}{2} \left((K_{11})_{h,i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} + (K_{11})_{h,i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} \right) \tilde{u}_{h,i+\frac{1}{2},j}^x \\ &+ \left(\left((K_{12})_{h,i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} \tilde{u}_{h,i+1,j-\frac{1}{2}}^y + (K_{12})_{h,i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} \tilde{u}_{h,i+1,j+\frac{1}{2}}^y \right) h_{i+1}^x \right. \\ &\left. + \left((K_{12})_{h,i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} \tilde{u}_{h,i,j-\frac{1}{2}}^y + (K_{12})_{h,i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} \tilde{u}_{h,i,j+\frac{1}{2}}^y \right) h_i^x \right) \frac{1}{2(h_i^x + h_{i+1}^x)}, \end{aligned} \quad (5)$$

donde $(K_{1\ell})_{h,i+\frac{1}{2},j\pm\frac{1}{2}} \approx K_{1\ell}(x_{i+\frac{1}{2}}, y_{j\pm\frac{1}{2}})$, $\ell = 1, 2$. En el contorno, se tiene

$$\begin{aligned} u_{h,i+\frac{1}{2},j}^x &= \frac{1}{2} \left(\left((K_{11})_{h,i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} + (K_{11})_{h,i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} \right) \tilde{u}_{h,i+\frac{1}{2},j}^x \right. \\ &\left. + \left((K_{12})_{h,i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} \tilde{u}_{h,i+1,j-\frac{1}{2}}^y + (K_{12})_{h,i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} \tilde{u}_{h,i+1,j+\frac{1}{2}}^y \right) \right), \end{aligned} \quad (6)$$

para $i = \tilde{i} = 0$ e $i = \tilde{i} + 1 = N_x$. La Fig. 2(c) muestra el *stencil* asociado a esta discretización. Análogamente, es inmediato obtener las expresiones correspondientes a $u_{h,i,j+\frac{1}{2}}^y$ en el interior de Ω y en su frontera.

La tercera fase permite calcular la aproximación de $\nabla \cdot \mathbf{u} = -\nabla \cdot (K\nabla\psi) \equiv \mathbf{A}\psi$, que denotamos por $\nabla_h \cdot \mathbf{u}_h$, como

$$(\nabla_h \cdot \mathbf{u}_h)_{i,j} = \left(\frac{u_{h,i+\frac{1}{2},j}^x - u_{h,i-\frac{1}{2},j}^x}{h_i^x} + \frac{u_{h,i,j+\frac{1}{2}}^y - u_{h,i,j-\frac{1}{2}}^y}{h_j^y} \right). \quad (7)$$

Si combinamos las ecuaciones (3)-(7), obtendremos una aproximación de $\mathbf{A}\psi$ que contendrá únicamente a la variable $\psi_h(t)$ y, por tanto, podrá representarse en forma compacta como un *stencil* de nueve puntos (véase Fig. 2(d)).

Considerando la semidiscretización descrita, el problema (2) puede aproximarse por la siguiente familia de problemas de valor inicial stiff:

$$\begin{cases} c \frac{d\Psi_h(t)}{dt} = \frac{1}{d_h} (\mathbf{A}_h \Psi_h(t) + B_h(t)) + F_h(t) + G_h(\Psi_h), & t \in (0, T], \\ \Psi_h(0) = \mathbf{r}_h \psi_0(\mathbf{x}) = \Psi_h^0, \end{cases} \quad (8)$$

donde $\Psi_h(t)$ es un vector que contiene las aproximaciones de $\psi(\mathbf{x}, t)$ en los centros de las celdas. Con esta notación, $\mathbf{A}_h \Psi_h(t) + B_h(t)$ representa la discretización del término difusivo $\mathbf{A}\psi$ basada en (3)-(7). Nótese que, a diferencia de $\psi_h(t)$, $\Psi_h(t)$ no incluye la contribución de $\psi_D(\mathbf{x}, t)$ que, en el esquema (8), está contenida en $B_h(t)$. Por su parte, $G_h(\Psi_h)$ designa las aproximaciones en los centros de las celdas del término no lineal $g(\psi)$. Finalmente, si denotamos por \mathbf{r}_h la restricción a dichos centros, tenemos que $F_h(t) = \mathbf{r}_h f(\mathbf{x}, t)$ y $d_h = \mathbf{r}_h d(\mathbf{x})$.

Sea \mathcal{H}_h un espacio finito-dimensional de funciones discretas que toman sus valores en los centros de las celdas y denotemos por $\|\cdot\|_h$ la norma L^2 discreta asociada a \mathcal{H}_h . Asumiendo condiciones suficientes de suavidad y compatibilidad en los datos $f(\mathbf{x}, t)$, $\psi_0(\mathbf{x})$ y $\psi_D(\mathbf{x}, t)$ y suponiendo que la solución $\psi(\mathbf{x}, t)$ es suficientemente regular, se puede demostrar que $\|\mathbf{r}_h \psi(\mathbf{x}, t) - \psi_h(t)\|_h \leq Ch^2 \forall t \in [0, T]$, donde C es una constante independiente de h (véase [2]).

3. Integración en tiempo

La aproximación en espacio da lugar al sistema (8), cuya integración temporal se realiza mediante un método de direcciones alternadas linealmente implícito. Para ello, el término $\mathbf{A}_h \Psi_h(t) + B_h(t)$ es descompuesto en tres sumandos: dos de ellos agrupan las derivadas de segundo orden discretas con respecto a cada una de las variables espaciales, mientras que el tercero contiene las discretizaciones de las derivadas mixtas.

En particular, consideramos sendas descomposiciones de la matriz \mathbf{A}_h y del vector $B_h(t)$ de la forma $\mathbf{A}_h = \mathbf{A}_{0h} + \mathbf{A}_{1h} + \mathbf{A}_{2h}$ y $B_h(t) = B_{0h}(t) + B_{1h}(t) + B_{2h}(t)$, de modo que $\mathbf{A}_{0h} \Psi_h(t) + B_{0h}(t) \approx (\partial_x(K_{12}\partial_y\psi) + \partial_y(K_{12}\partial_x\psi))$, $\mathbf{A}_{1h} \Psi_h(t) + B_{1h}(t) \approx (\partial_x(K_{11}\partial_x\psi))$ y $\mathbf{A}_{2h} \Psi_h(t) + B_{2h}(t) \approx (\partial_y(K_{22}\partial_y\psi))$. Además, particionamos $F_h(t)$ en dos sumandos suficientemente regulares, i.e. $F_h(t) = F_{1h}(t) + F_{2h}(t)$. Nótese que los vectores $B_{ih}(t)$, $i = 0, 1, 2$, contienen las contribuciones de las condiciones de contorno a cada uno de los operadores discretos \mathbf{A}_{ih} , $i = 0, 1, 2$. Si el vector de incógnitas $\Psi_h(t)$ se ordena siguiendo las filas de la malla, la matriz \mathbf{A}_{1h} presenta una estructura tridiagonal, mientras que si la ordenación se realiza por columnas, dicha estructura recae en \mathbf{A}_{2h} .

El integrador temporal elegido para discretizar (8) es una variante del esquema de Euler implícito fraccionario que admite la siguiente formulación:

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(\mathbf{I} - \frac{\Delta t}{d_h c} \mathbf{A}_{1h} \right) \Psi_h^{n,1} = \Psi_h^n + \frac{\Delta t}{d_h c} (d_h F_{1h}^{n+1} + d_h G_h(\Psi_h^n) + \mathbf{A}_{0h} \Psi_h^n + B_{0h}^n + B_{1h}^{n+1}), \\ \left(\mathbf{I} - \frac{\Delta t}{d_h c} \mathbf{A}_{2h} \right) \Psi_h^{n,2} = \Psi_h^{n,1} + \frac{\Delta t}{d_h c} (d_h F_{2h}^{n+1} + B_{2h}^{n+1}), \\ \Psi_h^{n+1} = \Psi_h^{n,2}, \text{ para } n = 0, 1, \dots, N_T - 1 \quad (N_T \equiv \lceil \frac{T}{\Delta t} \rceil), \end{array} \right. \quad (9)$$

donde Δt denota el paso en tiempo y Ψ_h^n es una aproximación de $\Psi_h(t_n)$, siendo $t_n = n\Delta t$. Los vectores $\Psi_h^{n,1}$ y $\Psi_h^{n,2}$ contienen la solución de las etapas internas, mientras que $F_{ih}^n = F_{ih}(t_n)$, $i = 1, 2$, y $B_{ih}^n = B_{ih}(t_n)$, $i = 0, 1, 2$.

Al igual que en los esquemas clásicos de direcciones alternadas, los operadores discretos \mathbf{A}_{1h} y \mathbf{A}_{2h} actúan en (9) de modo implícito; sin embargo, tanto \mathbf{A}_{0h} como el término no lineal discreto $G_h(\Psi_h^n)$ contribuyen al esquema explícitamente. El tratamiento explícito de los términos que discretizan las derivadas mixtas ha sido estudiado en [5, 6] para algunos esquemas de direcciones alternadas aplicados a problemas parabólicos lineales. Por su parte, en [3] se analiza la contribución explícita de términos no lineales para una familia de métodos Runge-Kutta de pasos fraccionarios linealmente implícitos. El esquema totalmente discreto así obtenido está compuesto por un conjunto de sistemas lineales (uno por cada etapa interna), cada uno de los cuales puede ser descompuesto en subsistemas tridiagonales desacoplados fácilmente paralelizables.

El análisis clásico de convergencia del esquema (9) implica un estudio previo de las propiedades de consistencia y estabilidad. Para analizar la consistencia, introducimos el concepto de error local en el instante de tiempo t_{n+1} como sigue: $e_h^{n+1} = \Psi_h(t_{n+1}) - \check{\Psi}_h^{n+1}$, donde $\check{\Psi}_h^{n+1}$ es la solución numérica obtenida con (9) considerando $\Psi_h^n \equiv \Psi_h(t_n)$. Bajo hipótesis adecuadas de regularidad y compatibilidad en los datos, es fácil probar que $\|e_h^{n+1}\|_h \leq C(\Delta t)^2 \forall \Delta t \in (0, \Delta t_0]$ y $n = 0, 1, \dots, N_T - 1$, donde C es una constante independiente de h y Δt . Por tanto, la variante del método de Euler implícito fraccionario formulada en (9) es uniformemente consistente de orden uno.

Para estudiar la estabilidad, definimos en primer lugar el operador de transición como

$$\mathbf{R}_h \left(\frac{\Delta t}{d_h c} \mathbf{A}_{0h}, \frac{\Delta t}{d_h c} \mathbf{A}_{1h}, \frac{\Delta t}{d_h c} \mathbf{A}_{2h} \right) = \left(\mathbf{I} - \frac{\Delta t}{d_h c} \mathbf{A}_{2h} \right)^{-1} \left(\mathbf{I} - \frac{\Delta t}{d_h c} \mathbf{A}_{1h} \right)^{-1} \left(\mathbf{I} + \frac{\Delta t}{d_h c} \mathbf{A}_{0h} \right).$$

Tal como se describe en [2], es posible demostrar la estabilidad del integrador temporal aplicado a un problema parabólico lineal de coeficientes constantes mediante un análisis de von Neumann, obteniendo que

$$\left\| \mathbf{R}_h \left(\frac{\Delta t}{d_h c} \mathbf{A}_{0h}, \frac{\Delta t}{d_h c} \mathbf{A}_{1h}, \frac{\Delta t}{d_h c} \mathbf{A}_{2h} \right) \right\|_h \leq 1. \quad (10)$$

En lo que sigue, asumiremos que esta propiedad es extensible a un problema de tipo (8). Introducimos a continuación el esquema perturbado

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(\mathbf{I} - \frac{\Delta t}{d_h c} \mathbf{A}_{1h} \right) \tilde{\Psi}_h^{n,1} = \tilde{\Psi}_h^n + \frac{\Delta t}{d_h c} (d_h F_{1h}^{n+1} + d_h G_h(\tilde{\Psi}_h^n) + \mathbf{A}_{0h} \tilde{\Psi}_h^n + B_{0h}^n + B_{1h}^{n+1}) + \delta_h^{n,1}, \\ \left(\mathbf{I} - \frac{\Delta t}{d_h c} \mathbf{A}_{2h} \right) \tilde{\Psi}_h^{n,2} = \tilde{\Psi}_h^{n,1} + \frac{\Delta t}{d_h c} (d_h F_{2h}^{n+1} + B_{2h}^{n+1}) + \delta_h^{n,2}, \\ \tilde{\Psi}_h^{n+1} = \tilde{\Psi}_h^{n,2}, \text{ para } n = 0, 1, \dots, N_T - 1, \text{ siendo } \tilde{\Psi}_h^0 = \Psi_h^0 + \delta_h^0. \end{array} \right.$$

Suponiendo que la función no lineal $g(\psi)$ satisface una condición de Lipschitz, i.e. $\|g(\psi_1) - g(\psi_2)\| \leq L \|\psi_1 - \psi_2\| \forall \psi_1, \psi_2 : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$, y que el operador de transición satisface (10), es inmediato demostrar la siguiente cota de estabilidad (cf. [2]):

$$\|\tilde{\Psi}_h^{n+1} - \Psi_h^{n+1}\|_h \leq C \left(\|\delta_h^0\|_h + \sum_{j=0}^n \left(\|\delta_h^{j,1}\|_h + \|\delta_h^{j,2}\|_h \right) \right), \text{ para } n = 0, 1, \dots, N_T - 1.$$

Finalmente, si definimos el error global en el instante de tiempo t_{n+1} como $E_h^{n+1} = \mathbf{r}_h(\psi(\mathbf{x}, t_{n+1})) - \Psi_h^{n+1}$ y combinamos los resultados de convergencia del esquema semidiscreto con los de consistencia uniforme y estabilidad del integrador temporal, es sencillo demostrar que $\|E_h^{n+1}\|_h \leq C(h^2 + \Delta t) \forall \Delta t \in (0, \Delta t_0]$ y $n = 0, 1, \dots, N_T - 1$.

4. Experimento numérico

En esta sección aplicamos el método descrito a un problema parabólico de tipo (1) en el que $(\hat{\mathbf{x}}, t) \in \hat{\Omega} \times [0, 1]$, donde $\hat{\Omega} \equiv \{(\hat{x}, \hat{y}) : 1 < \hat{x}^2 + \hat{y}^2 < 4, \hat{x} > 0, \hat{y} > 0\}$. Denotamos por $\hat{K} \equiv (\hat{K}_{ij})_{i,j \in \{1,2\}}$ el tensor de conductividad hidráulica cuyos coeficientes son $\hat{K}_{11} = \hat{K}_{22} = 2$ y $\hat{K}_{12} = \hat{K}_{21} = 1$, siendo $c = 1$ la constante de humedad específica. El término no lineal $\hat{g}(\hat{\psi}) = 1/(1 + \hat{\psi}^3)$ reproduce la función de absorción radicular asociada al modelo de infiltración en suelos de van Genuchten. Finalmente, el término fuente $\hat{f}(\hat{\mathbf{x}}, t)$ y las condiciones inicial $\hat{\psi}_0(\hat{\mathbf{x}})$ y de contorno $\hat{\psi}_D(\hat{\mathbf{x}}, t)$ han sido elegidos de tal modo que $\hat{\psi}(\hat{\mathbf{x}}, t) = \frac{e^{-t}}{8} (\hat{x} \hat{y} (\hat{x}^2 + \hat{y}^2 - 1) (\hat{x}^2 + \hat{y}^2 - 4))^2$ es la solución exacta del problema.

Aplicando la transformación $F(\mathbf{x}) = (x \cos y, x \sin y)$, definida del dominio computacional $\Omega \equiv \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 < x < 2, 0 < y < \pi/2\}$ en el dominio de flujo $\hat{\Omega}$, obtenemos un nuevo tensor $K(\mathbf{x}) \equiv (K_{ij}(\mathbf{x}))_{i,j \in \{1,2\}}$ con coeficientes variables $K_{11}(\mathbf{x}) = x(2 + \sin(2y))$, $K_{12}(\mathbf{x}) = K_{21}(\mathbf{x}) = \cos(2y)$ y $K_{22}(\mathbf{x}) = x^{-1}(2 - \sin(2y))$, así como las correspondientes funciones transformadas $g(\psi)$, $f(\mathbf{x}, t)$, $\psi_0(\mathbf{x})$ y $\psi_D(\mathbf{x}, t)$.

A continuación hacemos uso del esquema totalmente discreto (9) para aproximar numéricamente la solución del problema dado. Con el fin de estudiar el comportamiento asintótico del método, calcularemos los errores globales en norma $L^\infty(0, 1; L^2(\Omega))$ discreta, definidos como

$$E_{N_x, N_y}^{\Delta t} = \max_{n \in \{1, 2, \dots, N_T\}} \left(\sum_{i=1}^{N_x} \sum_{j=1}^{N_y} h_x h_y (\psi(x_i, y_j, t_n) - \psi_{ij}^n)^2 \right)^{1/2},$$

asumiendo que los parámetros h_i^x y h_j^y son constantes e iguales a $h_x = 1/N_x$ y $h_y = \pi/(2N_y)$, respectivamente. El término $\psi(x_i, y_j, t_n)$ denota la solución exacta evaluada en (x_i, y_j) para $t_n = n \Delta t$, mientras que ψ_{ij}^n designa la solución numérica obtenida en dicha posición espacial para el mismo instante de tiempo.

La Tabla 1 contiene los errores globales $E_{N_x, N_y}^{\Delta t}$ (fila superior) y órdenes numéricos de convergencia p (fila inferior) para diferentes mallados en los que $N_x = N_y$. Los órdenes de convergencia han sido obtenidos como $p = \log_2(E_{N_x, N_y}^{\Delta t} / E_{2N_x, 2N_y}^{\Delta t/4})$. Al objeto de preservar el mismo orden de magnitud en los errores en espacio y tiempo, hemos impuesto la relación $\Delta t N_x N_y = 10$. De los resultados expuestos, se puede deducir que el algoritmo es convergente de segundo orden en espacio y primer orden en tiempo.

Finalmente, la Tabla 2 describe la influencia de la discretización temporal en el esquema numérico, de nuevo en términos de errores globales y órdenes numéricos de convergencia. En este caso, se considera una malla suficientemente fina ($N_x = N_y = 300$), con el fin de que los errores asociados a la discretización espacial puedan asumirse despreciables. La estructura de esta tabla es análoga a la de la Tabla 1, siendo $p = \log_2 (E_{N_x, N_y}^{\Delta t} / E_{N_x, N_y}^{\Delta t/2})$. Los resultados mostrados ilustran la estabilidad incondicional del esquema, así como su convergencia de primer orden en tiempo.

| $N_x = N_y$ | 20 | 40 | 80 | 160 | 320 |
|---------------------------|--------------|----------------|-----------------|-----------------|------------------|
| Δt | Δt_0 | $\Delta t_0/4$ | $\Delta t_0/16$ | $\Delta t_0/64$ | $\Delta t_0/256$ |
| $E_{N_x, N_y}^{\Delta t}$ | 6,833E-1 | 1,860E-1 | 4,760E-2 | 1,197E-2 | 2,998E-3 |
| p | 1,8772 | 1,9663 | 1,9915 | 1,9974 | – |

Tabla 1: Errores globales y órdenes numéricos de convergencia para $\Delta t_0 = 2,5 \cdot 10^{-2}$.

| Δt | Δt_0 | $\Delta t_0/2$ | $\Delta t_0/4$ | $\Delta t_0/8$ | $\Delta t_0/16$ | $\Delta t_0/32$ |
|---------------------------|--------------|----------------|----------------|----------------|-----------------|-----------------|
| $E_{N_x, N_y}^{\Delta t}$ | 3,562E-1 | 1,937E-1 | 1,012E-1 | 5,190E-2 | 2,629E-2 | 1,326E-2 |
| p | 0,8789 | 0,9366 | 0,9634 | 0,9812 | 0,9874 | – |

Tabla 2: Errores globales y órdenes numéricos de convergencia para $N_x = N_y = 300$ y $\Delta t_0 = 2,0 \cdot 10^{-2}$.

Referencias

- [1] T. Arbogast, M.F. Wheeler, I. Yotov. *Mixed finite elements for elliptic problems with tensor coefficients as cell-centered finite differences*. SIAM J. Numer. Anal., 34 (1997), 828–852.
- [2] A. Arrarás, L. Portero, J.C. Jorge. *A combined mixed finite element ADI scheme for solving Richards' equation with mixed derivatives on irregular grids*. Preprint.
- [3] B. Bujanda, J.C. Jorge. *Stability results for linearly implicit fractional step discretizations of non-linear time dependent parabolic problems*. Appl. Numer. Math., 56 (2006), 1061–1076.
- [4] M.A. Celia, E.T. Bouloutas, R.L. Zarba. *A general mass-conservative numerical solution for the unsaturated flow equation*. Water Resour. Res., 26 (1990), 1483–1496.
- [5] K.J. in't Hout, B.D. Welfert. *Stability of ADI schemes applied to convection-diffusion equations with mixed derivative terms*. Appl. Numer. Math., 57 (2007), 19–35.
- [6] S. McKee, D.P. Wall, S.K. Wilson. *An alternating direction implicit scheme for parabolic equations with mixed derivative and convective terms*. J. Comput. Phys., 126 (1996), 64–76.
- [7] L.A. Richards. *Capillary conduction of liquids through porous mediums*. Physics, 1 (1931), 318–333.
- [8] T.F. Russell, M.F. Wheeler. *Finite element and finite difference methods for continuous flows in porous media*. In: *The Mathematics of Reservoir Simulation*, Frontiers in Applied Mathematics 1, SIAM, Philadelphia, PA, 1983, 35–106.
- [9] J. Šimůnek, J.W. Hopmans, J.A. Vrugt, M.T. van Wijt. *One-, two- and three-dimensional root water uptake functions for transient modeling*. Water Resour. Res., 37 (2001), 2457–2470.
- [10] J.M. Thomas, *Sur l'analyse numérique des méthodes d'éléments finis hybrides et mixtes*, Thèse d'Etat, Université Pierre et Marie Curie, Paris, 1977.