XX Congreso de Ecuaciones Diferenciales y Aplicaciones
X Congreso de Matemática Aplicada
Sevilla, 24-28 septiembre 2007
(pp. 1–8)

El método de los momentos para problemas variacionales no locales

E. Aranda[1], R. Meziat[2],

[1] *Dpto. Matemáticas, E.T.S. Ingenieros Industriales, Universidad de Castilla - La Mancha, Ciudad Real.*
E-mail: ernesto.aranda@uclm.es.
[2] *Dpto. Matemáticas, Facultad de Ciencias, Universidad de los Andes, Bogotá (Colombia)*
E-mail: rmeziat@uniandes.edu.co.

Palabras clave: momentos algebraicos, relajación, medidas de Young

Resumen

En este trabajo proponemos un método particular para tratar problemas variacionales no locales de la forma

$$\min_{u} \iint_{J\times J} W\left(u'(x), u'(y)\right)\, dx\, dy \tag{1}$$

en el caso particular en el que el integrando W es un polinomio bidimensional. A través de la relajación de este problema en términos de medidas de Young, usamos los momentos algebraicos asociados a estas medidas para plantear un problema de optimización finito dimensional con funcional cuadrático y estructura cónica.

1. Introducción

Ciertos modelos físicos en los que intervienen amplias variaciones de energía, tales como los problemas de transiciones de fase, el ferromagnetismo o algunos modelos de fractura mecánica (cf. [1, 3, 4]) se formulan a través de problemas variacionales de la forma:

$$m = \inf_{u\in\mathcal{A}} I(u), \text{ con } I(u) = \iint_{J\times J} W\left(x, y, u(x), u(y), u'(x), u'(y)\right)\, dx\, dy, \tag{P}$$

donde $W : J \times J \times \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ es continuo en las variables u y u', medible en x e y, J es un intervalo abierto en $\mathbb{R}$, y $\mathcal{A}$ define al conjunto

$$\mathcal{A} = \left\{ u \in W^{1,p}(J) :\ u - u_0 \in W_0^{1,p}(J) \right\}$$

para $u_0 \in W^{1,p}(J)$ dada, tal que $I(u_0) < +\infty$ y $p > 1$. Por simplicidad supondremos que $J = (0,1)$ y $u_0(0) = 0$, $u_0(1) = \gamma$.

En general, como es habitual en el contexto del Cálculo de Variaciones, en ausencia de ciertas propiedades de convexidad para el integrando W el mínimo de tales problemas no existe y las sucesiones minimizantes exhiben un comportamiento altamente oscilatorio que explica ciertos fenómenos de interés en las aplicaciones, de modo que la descripción de tales sucesiones surge como un problema de indudable importancia.

Aunque el parecido entre (P) y los problemas escalares unidimensionales es grande (obsérvese no obstante que este problema no es ni escalar unidimensional ni bidimensional) los aspectos relacionados con la semicontinuidad inferior débil del funcional I no están claros. Nótese que en los problemas escalares unidimensionales la convexidad del integrando en la variable u' es una condición necesaria y suficiente para obtener semicontinuidad inferior débil del funcional integral, lo que garantiza la existencia de solución a través del método directo. Del mismo modo, la envoltura convexa del integrando resulta el elemento clave para, por un lado, plantear una relajación del problema que garantice la existencia de solución, y por otro, recuperar las oscilaciones de las sucesiones minimizantes a través de las medidas de Young asociadas (cf. [5, 11]).

Sin embargo, en estos problemas no locales no queda claro qué condiciones sobre el integrando garantizan que el funcional I sea semicontinuo inferior débil. Hasta el momento, el único resultado al respecto (cf. [2]) afirma que en el caso homogéneo, es decir, cuando W sólo depende de las variables u', la semicontinuidad inferior débil de I es equivalente a que la parte simétrica de W sea separadamente convexa.[1] Este resultado no se tiene para el caso general. De cualquier manera, el hecho que revela que estamos ante un problema de naturaleza distinta al caso escalar unidimensional es que la envoltura separadamente convexa de W no corresponde al integrando apropiado para establecer una relajación del problema, ni siquiera en el caso homogéneo, como quizás cabría esperar. Es más, no está claro si una relajación en términos de un funcional integral es posible.

Por otra parte conviene recordar que el análisis numérico en los problemas escalares unidimensionales presenta múltiples dificultades derivadas de la ausencia de mínimo y la aparición de oscilaciones, que obviamente también surgen en esta ocasión. En definitiva, este tipo de problemas presenta los inconvenientes propios de los problemas variacionales no convexos, unido al desconocimiento de los elementos que determinan una relajación en términos de un funcional integral.

La alternativa en este caso consiste en la introducción de un relajación en términos de medidas de Young, que al igual que en el caso escalar unidimensional sí proporciona información sobre las sucesiones minimizantes. En ese sentido, la relajación llevada a cabo en [10], donde se prueba que, si W satisface las acotaciones

$$\begin{aligned} c\left(|u|^p + |v|^p + |\lambda_1|^p + |\lambda_2|^p\right) + m(x,y) &\leq W(x,y,u,v,\lambda_1,\lambda_2), \\ W(x,y,u,v,\lambda_1,\lambda_2) &\leq C\left(|u|^p + |v|^p + |\lambda_1|^p + |\lambda_2|^p\right) + M(x,y), \end{aligned} \tag{2}$$

[1] La parte simétrica y anti-simétrica de W, W^+ y W^- respectivamente, se definen por

$$W^{\pm}(\lambda_1,\lambda_2) = \frac{W(\lambda_1,\lambda_2) \pm W\lambda_2,\lambda_1)}{2}.$$

para $0 < c < C$, y $m, M \in L^1(J \times J)$, entonces el problema

$$\tilde{m} = \min_{\nu \in \tilde{\mathcal{A}}} \tilde{I}(\nu), \text{ con } \tilde{I}(\nu) = \iint_{J\times J} \iint_{\mathbb{R}^2} W(x, y, u(x), u(y), \lambda_1, \lambda_2)\, d\nu_x(\lambda_1)\, d\nu_y(\lambda_2)\, dx\, dy, \tag{$\tilde{P}$}$$

tiene solución ν^0, $\tilde{m} = m$ y

$$\lim_{j\to\infty} I(u_j) = \tilde{I}(\nu^0),$$

donde $\{u_j\}$ es cualquier sucesión minimizante para (P) y $\tilde{\mathcal{A}}$ denota al conjunto de medidas de Young $\nu = \{\nu_\xi\}_{\xi\in J}$ tales que

$$\int_J \int_{\mathbb{R}} |\lambda|^p\, d\nu_\xi(\lambda)\, d\xi < \infty, \quad u'(\xi) = \int_{\mathbb{R}} \lambda\, d\nu_\xi(\lambda), \quad u \in \mathcal{A}.$$

Este resultado es en cierto modo paralelo al que sucede en los problemas escalares unidimensionales, con la salvedad de que en este caso, la medidas admisibles corresponden a medidas producto formadas por repetición de medidas unidimensionales. Sin embargo en el caso escalar unidimensional la medida solución está conectada con la envoltura convexa del integrando, de manera que es posible, a partir de dicha envoltura, recuperar dicha medida solución, y por tanto conocer el comportamiento de las sucesiones minimizantes. Puesto que ahora no tenemos información sobre envoltura convexa alguna, encontramos una diferencia fundamental entre ambos casos que hace que estos problemas no locales sean considerablemente más complejos. Hasta donde nosotros sabemos, [9] es la única referencia en la que se aborda la resolución efectiva de este tipo de problemas planteando complicadas condiciones de optimalidad para el problema $(\tilde{P})$.

En este trabajo, proponemos un método particular para tratar estos problemas no locales mediante el conocido como método de los momentos. Este método ha sido diseñado para el caso en el que el funcional W es un polinomio en las variables u' y ya ha sido usado en [6, 8] para problemas escalares unidimensionales, dando lugar a problemas de programación semidefinida, es decir, la miminización de un funcional lineal con restricciones semidefinidas. En nuestro caso, el uso del método de los momentos transforma $(\tilde{P})$ en un problema finito dimensional con función objetivo cuadrática y restricciones semidefinidas que es abordable computacionalmente con las herramientas adecuadas.

2. Análisis de problemas homogéneos

Con el fin de simplificar considerablemente el uso del método de los momentos vamos a tratar exclusivamente con la versión homogénea del problema (P), es decir,

$$\min_{u\in\mathcal{A}} I(u), \text{ con } I(u) = \iint_{J\times J} W(u'(x), u'(y))\, dx\, dy \tag{3}$$

donde suponemos también que el integrando W es un polinomio bidimensional de grado $2n$,

$$W(\lambda_1, \lambda_2) = \sum_{0\le i+j\le 2n} c_{i,j} \lambda_1^i \lambda_2^j. \tag{4}$$

Sin pérdida de generalidad, supondremos que W es simétrico (nótese que para la parte antisimétrica, I es nulo) y que satisface las acotaciones (2), lo que en particular implica que $c_{2n,0} > 0$.

En el caso homogéneo, la relajación en términos de medidas de Young dada en [10] es más ventajosa, pues permite usar como medidas admisibles medidas que son homogéneas, esto es, independientes de ξ, de manera que el problema $(\tilde{P})$ se escribe

$$\min_{\nu \in \tilde{A}_\gamma} \tilde{I}(\nu), \text{ con } \tilde{I}(\nu) = \int_{\mathbb{R}^2} W(\lambda_1, \lambda_2)\, d\nu(\lambda_1)\, d\nu(\lambda_2), \tag{5}$$

donde $\tilde{A}_\gamma$ denota al conjunto de medidas de Young homogéneas (es decir, en este caso, medidas de probabilidad) que satisfacen

$$\int_{\mathbb{R}} \lambda\, d\nu(\lambda) = \gamma,$$

esto es, su primer momento es γ.

Introduciendo los momentos algebraicos de las medidas de $\tilde{\mathcal{A}}_\gamma$,

$$m_i = \int_{\mathbb{R}} \lambda^i\, d\nu(\lambda)$$

donde $m_0 = 1$ y $m_1 = \gamma$, se tiene que

$$\tilde{I}(\nu) = \sum_{0 \le i+j \le 2n} c_{i,j} m_i m_j.$$

Si denotamos por $\mathbf{m} = (m_2, \ldots, m_{2n})^T$ al vector de momentos podemos definir el funcional cuadrático

$$\tilde{I}(\nu) = \bar{W}(\mathbf{m}) = L(\mathbf{m}) + Q(\mathbf{m}) \tag{6}$$

donde

$$L(\mathbf{m}) = c_{0,0} + 2c_{1,0}\gamma + 2\sum_{i=2}^{2n} c_{i,0} m_i + c_{1,1}\gamma^2 + 2\sum_{i=2}^{2n-1} c_{i,1}\gamma m_i$$

es lineal y

$$Q(\mathbf{m}) = \sum_{\substack{2 \le i+j \le 2n \\ i,j \ne 0,1}} c_{i,j} m_i m_j = \mathbf{m}^T C \mathbf{m}$$

es una forma cuadrática con matriz

$$C = \begin{pmatrix} c_{2,2} & c_{2,3} & \cdots & c_{2,2n-3} & c_{2,2n-2} & 0 & 0 \\ c_{2,3} & c_{3,3} & \cdots & c_{3,2n-3} & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{2,2n-3} & c_{3,2n-3} & \iddots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_{2,2n-2} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Teorema 1 *Si W, definido en (4), es simétrico, con $c_{2n,0} > 0$ entonces el problema*

$$\min_{\mathbf{m}\in\Omega} \bar{W}(\mathbf{m}) \qquad (PM)$$

donde Ω es el cono cerrado convexo de $\mathbb{R}^{2n-1}$ dado por

$$\Omega = \{\mathbf{m} = (m_2, \ldots, m_{2n}) : H_\gamma(\mathbf{m}) \succeq 0\}$$

es una relajación de (3). Aquí,

$$H_\gamma(\mathbf{m}) = \begin{pmatrix} 1 & \gamma & m_2 & \cdots & m_n \\ \gamma & m_2 & m_3 & \cdots & m_{n+1} \\ m_2 & m_3 & m_4 & \cdots & m_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_n & m_{n+1} & m_{n+2} & \cdots & m_{2n} \end{pmatrix}$$

es la matriz de Hankel[2] *de la sucesión $(1, \gamma, m_2, \ldots, m_{2n})$ y $H_\gamma(\mathbf{m}) \succeq 0$ denota que esta matriz es semidefinida positiva.*

Nótese que la existencia de solución para (PM) es consecuencia inmediata de que el problema (5) tiene solución. Bastará construir un vector con los momentos de la medida óptima, que obviamente es admisible, y debido a (6), óptimo.

El hecho de que los vectores de Ω caractericen a los momentos de medidas de probabilidad reales es lo que se conoce como *el problema de los momentos algebraico* (cf. [12]).

Como puede observarse, el problema (PM) es un problema de optimización finito dimensional con función objetivo cuadrática y restricciones que definen un cono convexo, que puede ser abordado con herramientas apropiadas (cf. [7]). La conexión entre los momentos óptimos y las medidas de Young óptimas viene dada en el resultado siguiente.

Teorema 2 *Si $\bar{\mathbf{m}}$ es la solución del problema (PM), entonces existe una medida de Young homogénea solución de (5) que tiene soporte, como máximo, en n puntos.*

La prueba de este resultado se basa en dos hechos fundamentales. Por una parte, dado que $\frac{\partial \bar{W}}{m_{2n}} = c_{2n,0} > 0$ eso implica que $\nabla \bar{W} \neq 0$ y por tanto el óptimo de (PM) debe alcanzarse en la frontera de Ω. Puesto que el interior de Ω está formado por los vectores cuya matriz de Hankel es estrictamente definida positiva, el óptimo corresponderá a un vector cuya matriz de Hankel será semidefinida positiva, pero no estrictamente definida positiva, de manera que su rango no será máximo. Por otro lado, un conocido resultado de la teoría de los momentos afirma que el soporte de la medida asociada a un vector de momentos $\mathbf{m} = (m_0, \ldots, m_{2n})$ coincide con el rango de la matriz de Hankel $H(\mathbf{m})$.

Aun más, los puntos del soporte de la medida asociada a un vector de momentos dado aparecen como las raíces del polinomio asociado a los menores principales de la matriz de Hankel, lo que permite la completa recuperación de ésta.

[2]La matriz de Hankel de una sucesión de $2n+1$ valores $(m_0, m_1, \ldots, m_{2n})$ es una matriz cuadrada de orden $n+1$ cuyos elementos son $(m_{i+j})_{i,j=0}^n$.

3. Ejemplos

Para ilustrar convenientemente el análisis llevado a cabo en la sección anterior consideramos un par de ejemplos sencillos en los que podemos contemplar las peculiaridades de este tipo de problemas. Consideremos en primer lugar el problema homogéneo

$$\min_{u\in\mathcal{A}} \int_0^1 \int_0^1 \left(u'(x)^2 + u'(y)^2 - 1\right)^2 \, dx\, dy$$

de modo que el integrando corresponde al polinomio

$$W(\lambda_1, \lambda_2) = (\lambda_1^2 + \lambda_2^2 - 1)^2 = \lambda_1^4 + \lambda_2^4 + 2\lambda_1^2\lambda_2^2 - 2\lambda_1^2 - 2\lambda_2^2 + 1.$$

El funcional $\bar{W}$ será entonces

$$\bar{W}(m_2, m_3, m_4) = 2m_2^2 + 2m_4 - 4m_2 + 1$$

y el problema (PM) se escribe

$$\min_{(m_2,m_3,m_4)} \bar{W}(m_2, m_3, m_4) \quad \text{sujeto a} \quad \begin{pmatrix} 1 & \gamma & m_2 \\ \gamma & m_2 & m_3 \\ m_2 & m_3 & m_4 \end{pmatrix} \succeq 0. \tag{7}$$

Usando el código descrito en [7], es inmediato obtener como solución de (7) los momentos $m_2 = 0{,}5$, $m_3 = 0{,}3535\gamma$, $m_4 = 0{,}25$ para $|\gamma| \leq 0{,}7071$ y $m_2 = \gamma^2$, $m_3 = \gamma^3$ y $m_4 = \gamma^4$ si $|\gamma| > 0{,}7071$. Nótese que la solución óptima de (5) viene dada por

$$\nu = \begin{cases} \frac{1+\gamma\sqrt{2}}{2}\delta_{\frac{\sqrt{2}}{2}} + \frac{1-\gamma\sqrt{2}}{2}\delta_{-\frac{\sqrt{2}}{2}} & \text{si } |\gamma| \leq \frac{\sqrt{2}}{2}, \\ \delta_\gamma & \text{si } |\gamma| > \frac{\sqrt{2}}{2}, \end{cases}$$

Tomemos ahora como función $W(\lambda_1, \lambda_2) = \lambda_1^4 + \lambda_2^4 - 2\lambda_1\lambda_2$. La función $\bar{W}$ asociada en este caso es

$$\bar{W} = 2m_4 - 2m_1^2 = 2m_4 - 2\gamma^2.$$

Obsérvese que el problema (PM) es un problema de programación semidefinida usual (con funcional lineal). La resolución es sencilla y aparecen los momentos asociados a la medida $\nu = \delta_\gamma$. Esto implica, en particular, que (3) tiene como solución $u(x) = \gamma x$. Nótese que W es separablemente convexa, y según el resultado mencionado en la introducción (cf. [2]), el funcional I es semicontinuo inferior y por tanto el método directo funciona, es decir, no haría falta relajar.

Para finalizar, puede ser interesante comentar un detalle peculiar que refleja la diferencia existente entre los problemas escalares unidimensionales y estos problemas no locales.

La relajación en términos de medidas de Young de los problemas escalares unidimensionales en el caso homogéneo da lugar a un resultado bien conocido que permite escribir la envoltura convexa del integrando a partir del mínimo del problema relajado. En concreto, si consideramos el problema escalar unidimensional

$$\operatorname*{ínf}_{u\in\mathcal{A}} G(u), \quad \text{con } G(u) = \int_J \varphi(u'(x))\,dx$$

y su relajación en términos de medidas de Young (homogéneas),

$$\operatorname*{mín}_{\nu\in\tilde{\mathcal{A}}_\gamma} \tilde{G}(\nu), \quad \text{con } \tilde{G}(\nu) = \int_J \int_{\mathbb{R}} \varphi(\lambda)\,d\nu_x(\lambda)\,dx. \tag{8}$$

se sabe que

$$\varphi^{**}(\gamma) = \operatorname*{mín}_{\nu\in\tilde{\mathcal{A}}_\gamma} \tilde{G}(\nu) = \operatorname*{mín}_{u\in\mathcal{A}} \int_J \varphi^{**}(u'(x))\,dx,$$

donde φ^{**} denota la envoltura convexa de φ.

Así, tendría sentido intentar definir una especie de envoltura a partir del mínimo del problema relajado:

$$W^{\#}(\gamma) = \operatorname*{mín}_{\nu\in\tilde{\mathcal{A}}_\gamma} \tilde{I}(\nu).$$

Para los ejemplos antes expuestos, las funciones resultantes serían:

$$W^{\#}(\gamma) = \begin{cases} 0 & \text{si } |\gamma| \leq \frac{\sqrt{2}}{2}, \\ (2\gamma^2-1)^2 & \text{si } |\gamma| > \frac{\sqrt{2}}{2}. \end{cases} \quad \text{y} \quad W^{\#}(\gamma) = 2\gamma^4 - 2\gamma^2,$$

respectivamente. Obsérvese que en el segundo caso, $W^{\#}$ ni siquiera es convexa, lo que nos invita a pensar que no es posible obtener una relajación en términos de funcionales integrales para este tipo de problemas.

Agradecimientos

Este trabajo se gestó durante la estancia que E. Aranda realizó en la Universidad de los Andes, Bogotá. Los autores quieren agradecer al ICETEX, a la Universidad de Castilla - La Mancha y a los proyectos MTM2004-07114 del Ministerio de Educación y Ciencia y PAI05-029 de la Junta de Comunidades de Castilla - La Mancha la financiación recibida.

Referencias

[1] G. Alberti and G Bellettini. A nonlocal anisotropic model for phase transitions: asymptotic behaviour of rescaled energies. *European Journal of Applied Mathematics*, 9:261–284, 1998.

[2] J. Bevan and P. Pedregal. A necessary and sufficient condition for the weak lower semicontinuity of one-dimensional nonlocal variational integrals. *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A*, 136(1):23–51, 2006.

[3] A. Braides and A. Garroni. On the nonlocal approximation of free-discontinuity problems. *CPAM*, 23(5 and 6):817–829, 1998.

[4] D. Brandon and R. Rogers. The coercivity and nonlocal ferromagnetism. *Cont. Mech. Therm.*, (4):1–21, 1992.

[5] B. Dacorogna. *Direct Methods in the Calculus of Variations.* Springer-Verlag, 1989.

[6] J.J. Egozcue, R. Meziat, and P. Pedregal. From a nonlinear, nonconvex variational problem to a linear, convex formulation. *App. Math. Optim.*, 47:27 – 44, 2003.

[7] M. Kočvara and M. Stingl. Pennon — a code for convex nonlinear and semidefinite programming. *Optimization Methods and Software*, 8(3):317–333, 2003.

[8] R. Meziat. *El Método de los Momentos para Problemas Variacionales No Convexos.* PhD thesis, Universidad Politécnica de Cataluña, 2001.

[9] J. Muñoz. Generalized equilibrium conditions applied to a nonlocal variational principle. submitted.

[10] P. Pedregal. Nonlocal variational principles. *Nonlinear Analysis, Theory, Methods & Applications*, 29(12):1379–1392, 1997.

[11] P. Pedregal. *Parametrized Measures and Variational Principles.* Progress in Nonlinear Partial Differential Equations. Birkhäuser, 1997.

[12] J.A. Shohat and J.D. Tamarkin. *The Problem of Moments.* AMS, 1970.