XX Congreso de Ecuaciones Diferenciales y Aplicaciones
X Congreso de Matemática Aplicada
Sevilla, 24-28 septiembre 2007
(pp. 1–8)

Comportamiento asintótico de una viga elástica fijada en pequeñas zonas de uno de sus extremos

J. Casado Díaz[1], M. Luna Laynez[1], F. Murat[2]

[1] *Dpto. E.D.A.N., Universidad de Sevilla, Aptdo. 1160, E-41080 Sevilla. E-mails:* `jcasadod@us.es`, `mllaynez@us.es`.
[2] *Lab. Jacques-Louis Lions, Université Pierre et Marie Curie, boîte courrier 187, 75252 Paris cedex 05, Francia. E-mail:* `murat@ann.jussieu.fr`.

Palabras clave: viga delgada, elasticidad lineal, comportamiento asintótico

Resumen

Estudiamos el comportamiento asintótico de una viga elástica delgada cuando su anchura, ε, tiende a cero. La viga está fijada en la totalidad de una de sus bases, mientras que en la otra, sólo lo está en la unión de N pequeñas zonas de talla $\varepsilon r^\varepsilon$, r^ε tendiendo a cero. Sobre el resto de la frontera se impone una condición de Neumann. El comportamiento depende de r^ε, el número de zonas de fijación y su distribución.

Para $N = 1$ aparecen tres tallas críticas, ε^3, ε y $\varepsilon^{1/3}$, y por tanto siete regímenes distintos. Si $r^\varepsilon \ll \varepsilon^3$ el comportamiento es el mismo que cuando no existe la pequeña zona de sujeción. Si $r^\varepsilon \gg \varepsilon^{1/3}$ el comportamiento es el que obtendríamos si fijáramos en toda la base. En los demás casos aparecen comportamientos intermedios.

Para $N \geq 2$ el resultado es diferente. Así, si las zonas se concentran alrededor de tres puntos no alineados sólo aparecen dos tallas críticas, ε^3 y ε. Esto prueba que es preferible fijar la viga alrededor de tres puntos no alineados de una base a hacerlo alrededor de tan sólo uno, aún cuando usemos una zona de mucho mayor grosor.

1. Introducción

En el presente trabajo consideramos el sistema de la elasticidad lineal planteado en la viga delgada $\Omega^\varepsilon = (0,1) \times \varepsilon S$, donde S es un dominio acotado regular de $\mathbb{R}^2$ y $\varepsilon > 0$ es un parámetro destinado a tender a cero. En uno de sus extremos ($x_1 = 1$) la viga está fijada en la totalidad de su base $\Gamma_1^\varepsilon = \{1\} \times \varepsilon S$. En el otro extremo ($x_1 = 0$) la suponemos fijada solamente en el conjunto pequeño

$$\Gamma_0^\varepsilon = \bigcup_{n=1}^{N} \Big(\varepsilon y^n + \big(\{0\} \times \varepsilon r^\varepsilon S^n\big) \Big),$$

donde $r^\varepsilon > 0$ converge a cero, $y^1, \cdots, y^N$ son puntos diferentes de $\{0\} \times S$, y $S^1, \cdots, S^N$ son subconjuntos cerrados de $\mathbb{R}^2$ tales que la capacidad en $\mathbb{R}^3$ de $\{0\} \times S^n$, $n \in \{1, \cdots, N\}$, es positiva. Sobre el resto de la frontera de Ω^ε imponemos una condición de Neumann.

Para formular matemáticamente este problema necesitamos las siguientes notaciones:

Descomponemos los elementos de $\mathbb{R}^3$ en $x = (x_1, x')$, con $x_1 \in \mathbb{R}$, $x' = (x_2, x_3) \in \mathbb{R}^2$.

Denotamos la base canónica de $\mathbb{R}^3$ por $\{\mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2, \mathbf{e}^3\}$.

Representamos por $\mathbb{R}^{3\times 3}_s$ el espacio de las matrices simétricas de dimensión 3×3. El producto escalar de dos matrices R y S se denota por $R : S$.

Por $\mathcal{L}(\mathbb{R}^{3\times 3}_s)$ denotamos el espacio de las aplicaciones lineales de $\mathbb{R}^{3\times 3}_s$ en sí mismo (i.e. el espacio de los tensores de cuarto orden).

Adoptamos el convenio de Einstein sobre índices repetidos. Los índice griegos (α y β) sólo toman los valores 2 y 3, mientras que los índices latinos (i y j) toman los valores 1, 2 y 3.

Tomamos $\Omega = (0,1) \times S$, $A \in C^0(\overline{\Omega}; \mathcal{L}(\mathbb{R}^{3\times 3}_s))$ tal que existe $m > 0$ con

$$A(y)\xi : \xi \geq m|\xi|^2, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^{3\times 3}_s, \quad \forall y \in \overline{\Omega}.$$

Definimos $A^\varepsilon \in C^0(\overline{\Omega^\varepsilon}; \mathcal{L}(\mathbb{R}^{3\times 3}_s))$ por

$$A^\varepsilon(x) = A(x_1, \frac{x'}{\varepsilon}), \quad \forall x \in \overline{\Omega^\varepsilon}.$$

Similarmente, tomamos también $f \in L^2(\Omega)^3$, $h \in L^2(\Omega; \mathbb{R}^{3\times 3}_s)$, y definimos $F^\varepsilon \in L^2(\Omega^\varepsilon)^3$, $H^\varepsilon \in L^2(\Omega^\varepsilon; \mathbb{R}^{3\times 3}_s)$ por

$$F^\varepsilon(x) = f_1(x_1, \frac{x'}{\varepsilon})\mathbf{e}^1 + \varepsilon f_\alpha(x_1, \frac{x'}{\varepsilon})\mathbf{e}^\alpha, \quad H^\varepsilon(x) = h(x_1, \frac{x'}{\varepsilon}), \qquad \text{a.e. } x \in \Omega^\varepsilon.$$

Finalmente, para $\Gamma^\varepsilon = \Gamma^\varepsilon_0 \cup \Gamma^\varepsilon_1$, con Γ^ε_0, Γ^ε_1 definidos más arriba, introducimos el espacio

$$H^1_{\Gamma^\varepsilon}(\Omega^\varepsilon) = \left\{ V \in H^1(\Omega^\varepsilon) \, : \, V = 0 \ \text{ en } \ \Gamma^\varepsilon \right\}.$$

El problema de elasticidad que consideramos en este trabajo se escribirá entonces como

$$\begin{cases} U^\varepsilon \in H^1_{\Gamma^\varepsilon}(\Omega^\varepsilon)^3, \\ \displaystyle\int_{\Omega^\varepsilon} A^\varepsilon e(U^\varepsilon) : e(V)dx = \int_{\Omega^\varepsilon} F^\varepsilon V dx + \int_{\Omega^\varepsilon} H^\varepsilon : e(V)dx, \quad \forall V \in H^1_{\Gamma^\varepsilon}(\Omega^\varepsilon)^3, \end{cases} \tag{1}$$

siendo e el tensor de deformaciones linealizado. Obsérvese que la solución U^ε de (1) satisface una condición de Neumann no homogénea en $\partial\Omega^\varepsilon \setminus \Gamma^\varepsilon$, ya que la integración por partes de $H^\varepsilon : e(U^\varepsilon)$ en Ω^ε (cuando h, y entonces H^ε, es suficientemente regular) produce tanto fuerzas de volumen como de superficie. Análogamente a las fuerzas de volumen F^ε, podíamos haber introducido fuerzas de superficie explícitas G^ε sobre $\partial\Omega^\varepsilon \setminus \Gamma^\varepsilon$, pero por simplificar hemos preferido no hacerlo.

Es bien conocido que el problema (1) admite una única solución (ver por ejemplo [5]). En el presente trabajo vamos a describir el comportamiento asintótico de U^ε y dar un resultado de corrector para $e(U^\varepsilon)$ cuando ε tiende a cero. Cuando $N = 1$, el problema ha sido estudiado en [2] donde mostramos que el resultado depende de r^ε, existiendo 3 tallas críticas, ε^3, ε y $\varepsilon^{1/3}$, y por tanto 7 regímenes diferentes: $r^\varepsilon \ll \varepsilon^3$, $r^\varepsilon \approx \varepsilon^3$, $\varepsilon^3 \ll r^\varepsilon \ll \varepsilon$,

$r^\varepsilon \approx \varepsilon$, $\varepsilon \ll r^\varepsilon \ll \varepsilon^{1/3}$, $r^\varepsilon \approx \varepsilon^{1/3}$, y $\varepsilon^{1/3} \ll r^\varepsilon \leq C$. Aquí $r^\varepsilon \ll \varepsilon^\lambda$ significa que $r^\varepsilon/\varepsilon^\lambda \to 0$ (y equivalentemente $\varepsilon^\lambda \ll r^\varepsilon$ que $r^\varepsilon/\varepsilon^\lambda \to +\infty$), mientras que $r^\varepsilon \approx \varepsilon^\lambda$ significa que $r^\varepsilon/\varepsilon^\lambda \to \rho$, con $0 < \rho < +\infty$.

Para $N \geq 2$, el resultado es diferente. En particular, si

$$M = dim\big(Span\{y^2 - y^1, \cdots, y^N - y^1\}\big)$$

es 2 (luego $N \geq 3$) entonces sólo hay 2 tallas criticas, ε^3 y ε, y por tanto 5 regímenes diferentes: $r^\varepsilon \ll \varepsilon^3$, $r^\varepsilon \approx \varepsilon^3$, $\varepsilon^3 \ll r^\varepsilon \ll \varepsilon$, $r^\varepsilon \approx \varepsilon$, $\varepsilon \ll r^\varepsilon$. Como consecuencia deducimos que fijar la viga en tres zonas de diámetro $\varepsilon r^\varepsilon$ con $\varepsilon \ll r^\varepsilon$ concentradas alrededor de tres puntos no alineados de una de sus bases es asintóticamente equivalente a fijarla en la totalidad de dicha base. Sin embargo, si quisiéramos el mismo resultado usando sólo un punto de sujeción, necesitaríamos una zona de diámetro $\varepsilon r^\varepsilon$, con $\varepsilon^{1/3} \ll r^\varepsilon$.

2. Principales resultados

En esta sección enunciamos el Teorema 2.2 que describe el comportamiento asintótico de la solución de (1). Como es usual en este tipo de problemas (ver por ejemplo [6], [10], [11], [12]), consideramos el cambio de variables $y_1 = x_1$, $y' = x'/\varepsilon$ que transforma Ω^ε en el domino fijo Ω. Definimos entonces $u^\varepsilon \in H^1(\Omega)^3$ por

$$u_1^\varepsilon(y) = U_1^\varepsilon(y_1, \varepsilon y'), \quad u_\alpha^\varepsilon(y) = \varepsilon U_\alpha^\varepsilon(y_1, \varepsilon y'), \forall \alpha \in \{2,3\}, \quad \text{p.c.t. } y \in \Omega,$$

y $e^\varepsilon(u^\varepsilon) \in L^2(\Omega; \mathbb{R}_s^{3\times 3})$ por

$$e_{11}^\varepsilon(u^\varepsilon) = e_{11}(u^\varepsilon),\ e_{1\beta}^\varepsilon(u^\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon} e_{1\beta}(u^\varepsilon),\ e_{\alpha\beta}^\varepsilon(u^\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon^2} e_{\alpha\beta}(u^\varepsilon),\ \forall \alpha, \beta \in \{2,3\}.$$

Para enunciar nuestro primer resultado necesitamos además el espacio funcional $\mathcal{D} = BN_b(\Omega) \times R_b(\Omega) \times RD_2^\perp(\Omega)$ definido por (ver [7], [8], [10], [11])

$$\begin{cases} BN_b(\Omega) = \Big\{ u = (u_1, u') \colon \exists \zeta' \in H^2(0,1)^2,\ \zeta'(1) = \dfrac{d\zeta'}{dy_1}(1) = 0,\ u'(y) = \zeta'(y_1), \\ \qquad \exists \zeta_1 \in H^1(0,1),\ \zeta_1(1) = 0,\ u_1(y) = \zeta_1(y) - \dfrac{d\zeta'}{dy_1}(y_1) y' \Big\}, \end{cases}$$

$$\begin{cases} R_b(\Omega) = \Big\{ v = (v_1, v_2, v_3) \colon v_1 \in L^2(0,1; H^1(S)),\ \displaystyle\int_S v_1(y_1, y') dy' = 0 \text{ e.c.t. } y_1 \in (0,1), \\ \qquad \exists c \in H^1(0,1),\ c(1) = 0,\ v_2(y) = c(y_1) y_3,\ v_3(y) = -c(y_1) y_2 \Big\}, \end{cases}$$

$$\begin{cases} RD_2^\perp(\Omega) = \Big\{ w = (w_1, w') \colon w_1 = 0,\ w' \in L^2(0,1; H^1(S)^2),\ \displaystyle\int_S w'(y_1, y') dy' = 0, \\ \qquad \displaystyle\int_S \big(y_3 w_2(y_1, y') - y_2 w_3(y_1, y')\big)\, dy' = 0 \ \text{ p.c.t. } y_1 \in (0,1) \Big\}. \end{cases}$$

En lo que sigue, a cada $u \in BN_b(\Omega)$ le asociaremos una función $\zeta \in H^1(0,1) \times H^2(0,1)^2$ en las condiciones de la definición de $BN_b(\Omega)$. Análogamente, a $v \in R_b(\Omega)$ le asociaremos $c \in H^1(0,1)$ en las condiciones de la definición de $R_b(\Omega)$. Dado $(u, v, w) \in \mathcal{D}$, definimos también $E(u, v, w) \in L^2(\Omega; \mathbb{R}_s^{3\times 3})$ por

$$E_{11}(u,v,w) = e_{11}(u),\ E_{1\beta}(u,v,w) = e_{1\beta}(v),\ E_{\alpha\beta}(u,v,w) = e_{\alpha\beta}(w), \quad \forall \alpha, \beta \in \{2,3\}.$$

Razonando como en [10] y [11], se puede entonces probar el siguiente resultado

Proposición 2.1. *Existen una subsucesión de ε, que seguimos denotando por ε, y $(\hat u,\hat v,\hat w)\in\mathcal{D}$ tales que*

$$u^\varepsilon \rightharpoonup \hat u \text{ en } H^1(\Omega)^3,$$
$$e^\varepsilon(u^\varepsilon) \rightharpoonup E(\hat u,\hat v,\hat w) \text{ en } L^2(\Omega;\mathbb{R}^{3\times 3}_s).$$

Además, la terna $(\hat u,\hat v,\hat w)$ satisface

$$\begin{cases} (\hat u,\hat v,\hat w)\in\mathcal{D},\\ \displaystyle\int_\Omega AE(\hat u,\hat v,\hat w):E(u,v,w)dy=\int_\Omega fudy+\int_\Omega h:E(u,v,w)dy,\\ \forall (u,v,w)\in\mathcal{D}:\zeta'(0)=\dfrac{d\zeta'}{dy_1}(0)=0,\ \zeta_1(0)=c(0)=0.\end{cases} \tag{2}$$

Cabe observar que el problema (2) no permite obtener las funciones $\hat u,\hat v,\hat w$. De hecho asociadas a $\hat u$ y $\hat v$ aparecen (ver la definición de $\mathcal{D}$) las funciones $\hat\zeta_i$, $\frac{d\hat\zeta_\alpha}{dy_1}$, $\hat c$, las cuales tienen traza en cero y sobre las cuales (2) no proporciona ninguna condición de contorno. Esto se debe a que el cambio $y_1=x_1$, $y'=x'/\varepsilon$ no basta para describir el comportamiento asintótico de las funciones U^ε cerca de Γ_0^ε. Para salvar esta dificultad vamos a considerar para cada $n\in\{1,\cdots,N\}$ un nuevo cambio de variable dado por $z=(x-\varepsilon y^n)/(\varepsilon r^\varepsilon)$, que transforma el dominio variable Ω^ε en otro dominio variable $Z^{\varepsilon,n}$, el cual crece hacia $Z=(0,+\infty)\times\mathbb{R}^2$. Obsérvese que este cambio transforma la pequeña zona de sujeción $\varepsilon y^n+(\{0\}\times\varepsilon r^\varepsilon S^n)$ en la zona fija $\{0\}\times S^n$. Para $N=1$ el cambio correspondiente fue usado con éxito en [1] para estudiar el problema de difusión (en una geometría más general) y en [2] para el problema de elasticidad (1). Cambios de variables relacionados han sido también considerados en [3] y [9].

Denotando por $D^{1,2}(Z)$ al espacio de Deny

$$D^{1,2}(Z)=\left\{p:p\in L^6(Z),\ \nabla p\in L^2(Z)^3\right\},$$

se tiene entonces el siguiente resultado que describe el comportamiento de las soluciones de (1).

Teorema 2.2. *Existen un subespacio lineal cerrado $\mathcal{E}\subset\mathcal{D}$, una función $P^\varepsilon\in L^2(\Omega^\varepsilon;\mathbb{R}^{3\times3}_s)$, y una forma bilineal continua no negativa $\mathcal{B}$ sobre $\big(BN_b(\Omega)\times R_b(\Omega)\big)\times\big(BN_b(\Omega)\times R_b(\Omega)\big)$ tal que, definiendo $(\hat u,\hat v,\hat w)$ como la solución del problema variacional*

$$\begin{cases} (\hat u,\hat v,\hat w)\in\mathcal{E},\\ \displaystyle\int_\Omega AE(\hat u,\hat v,\hat w):E(u,v,w)dy+\mathcal{B}((\hat u,\hat v),(u,v))=\int_\Omega fudy+\int_\Omega h:E(u,v,w)dy,\\ \forall (u,v,w)\in\mathcal{E},\end{cases}$$

se tiene

$$\lim_{\varepsilon\to0}\frac{1}{|\Omega^\varepsilon|}\int_{\Omega^\varepsilon}\left(\left|U_1^\varepsilon(x)-\hat u_1\big(x_1,\frac{x'}{\varepsilon}\big)\right|^2+\sum_{\alpha=2}^3|\varepsilon U_\alpha^\varepsilon(x)-\hat u_\alpha(x_1)|^2\right)dx=0,$$

$$\lim_{\varepsilon\to0}\frac{1}{|\Omega^\varepsilon|}\int_{\Omega^\varepsilon}\left|e(U^\varepsilon)(x)-E(\hat u,\hat v,\hat w)\big(x_1,\frac{x'}{\varepsilon}\big)-P^\varepsilon(x)\right|^2dx=0.$$

Las definiciones de $\mathcal{E}$, P^ε y $\mathcal{B}$ no dependen de las funciones f y h que definen F^ε y H^ε, sino solamente de los puntos y^n, de los conjuntos S^n, del tensor de cuarto orden A, y del comportamiento de r^ε cuando ε tiende a cero. Se presentan las siguientes situaciones:

• *Si $r^\varepsilon \ll \varepsilon^3$, entonces $\mathcal{E} = \mathcal{D}$, $P^\varepsilon = 0$, $\mathcal{B} = 0$.*

• *Si $r^\varepsilon \approx \varepsilon^3$ con $r^\varepsilon/\varepsilon^3 \to \rho$, entonces $\mathcal{E} = \mathcal{D}$. Además, definiendo $\varphi^{n,i}$, $i \in \{1,2,3\}$, como la solución de*

$$\begin{cases} \varphi^{n,i} \in D^{1,2}(Z)^3, \ \varphi^{n,i} = \mathbf{e}^i \ \text{en } \{0\} \times S^n, \\ \displaystyle\int_Z A(0)e(\varphi^{n,i}) : e(\eta)dz = 0, \quad \forall \eta \in D^{1,2}(Z)^3, \ \eta = 0 \ \text{en } \{0\} \times S^n, \end{cases} \tag{3}$$

y denotando (para $(u,v) \in BN_b(\Omega) \times R_b(\Omega)$, $n \in \{1, \cdots, N\}$) $q^n_{u,v} = \zeta_\alpha(0)\varphi^{n,\alpha}$, se tiene

$$P^\varepsilon(x) = -\frac{1}{\varepsilon^2 r^\varepsilon} \sum_{n=1}^N e(q^n_{\hat{u},\hat{v}}) \left(\frac{x - \varepsilon y^n}{\varepsilon r^\varepsilon} \right), \quad p.c.t. \ x \in \Omega^\varepsilon,$$

$$\mathcal{B}((u,v),(\overline{u},\overline{v})) = \rho \sum_{n=1}^N \int_Z A(0)e(q^n_{u,v}) : e(q^n_{\overline{u},\overline{v}})dz, \quad \forall (u,v),(\overline{u},\overline{v}) \in BN_b(\Omega) \times R_b(\Omega).$$

• *Si $\varepsilon^3 \ll r^\varepsilon \ll \varepsilon$, entonces*

$$\mathcal{E} = \left\{ (u,v,w) \in \mathcal{D} : \zeta'(0) = 0 \right\}, \tag{4}$$

$P^\varepsilon = 0$, $\mathcal{B} = 0$.

• *Si $r^\varepsilon \approx \varepsilon$ con $r^\varepsilon/\varepsilon \to \rho$, entonces $\mathcal{E}$ está dado por (4). Además, denotando (para $(u,v) \in BN_b(\Omega) \times R_b(\Omega)$, $n \in \{1, \cdots, N\}$)*

$$q^n_{u,v} = \left(a(0) - \frac{d\zeta_\alpha}{dy_1}(0) y^n_\alpha \right) \varphi^{n,1} + \left(b^2 + c(0)y^n_3 \right)\varphi^{n,2} + \left(b^3 - c(0)y^n_2 \right)\varphi^{n,3},$$

con $\varphi^{n,i}$ dada por (3), y $b^\alpha \in \mathbb{R}$ elegida de tal forma que se verifique

$$\sum_{n=1}^N \int_Z A(0)e(q^n_{u,v}) : e(\varphi^{n,\alpha})dz = 0, \quad \alpha \in \{2,3\},$$

se tiene

$$P^\varepsilon(x) = -\frac{1}{\varepsilon r^\varepsilon} \sum_{n=1}^N e(q^n_{\hat{u},\hat{v}}) \left(\frac{x - \varepsilon y^n}{\varepsilon r^\varepsilon} \right), \quad p.c.t. \ x \in \Omega^\varepsilon,$$

$$\mathcal{B}((u,v),(\overline{u},\overline{v})) = \rho \sum_{n=1}^N \int_Z A(0)e(q^n_{u,v}) : e(q^n_{\overline{u},\overline{v}})dz, \quad \forall (u,v),(\overline{u},\overline{v}) \in BN_b(\Omega) \times R_b(\Omega). \tag{5}$$

• *Si $\varepsilon \ll r^\varepsilon$, $M \geq 2$, entonces*

$$\mathcal{E} = \left\{ (u,v,w) \in \mathcal{D} : \zeta'(0) = \frac{d\zeta'}{dy_1}(0) = 0, \ \zeta_1(0) = c(0) = 0 \right\}, \ P^\varepsilon = 0, \ \mathcal{B} = 0. \tag{6}$$

• *Si $\varepsilon \ll r^\varepsilon \ll \varepsilon^{1/3}$, $M = 1$, entonces*

$$\mathcal{E} = \left\{ (u,v,w) \in \mathcal{D} : \zeta'(0) = 0, \ \zeta_1(0) - \frac{d\zeta_\beta}{dy_1}(0) y^n_\beta = c(0) = 0, \forall\, n \in \{1, \cdots, N\} \right\}, \tag{7}$$

$P^\varepsilon = 0$, $\mathcal{B} = 0$.
• *Si $\varepsilon \ll r^\varepsilon \ll \varepsilon^{1/3}$, $M = 0$, entonces*

$$\mathcal{E} = \Big\{(u,v,w) \in \mathcal{D} : \zeta'(0) = 0,\ \zeta_1(0) - \frac{d\zeta_\beta}{dy_1}(0) y^1_\beta = 0\Big\}, \tag{8}$$

$P^\varepsilon = 0$, $\mathcal{B} = 0$.
• *Si $r^\varepsilon \approx \varepsilon^{1/3}$ con $(r^\varepsilon)^3/\varepsilon \to \rho$, $M = 1$, entonces $\mathcal{E}$ está dado por (7). Además, definiendo $\psi^{n,\alpha}$, $\alpha \in \{2,3\}$, por*

$$\left\{\begin{array}{l} \psi^{n,\alpha} \in D^{1,2}(Z)^3,\ \psi^{n,\alpha} = z_1 \mathbf{e}^\alpha - z_\alpha \mathbf{e}^1 \ \text{en } \{0\} \times S^n, \\ \displaystyle\int_Z A(0) e(\psi^{n,\alpha}) : e(\eta) dz = 0, \quad \forall \eta \in D^{1,2}(Z)^3,\ \eta = 0 \ \text{en } \{0\} \times S^n, \end{array}\right. \tag{9}$$

y denotando

$$q^n_{u,v} = \frac{d\zeta_\alpha}{dy_1}(0)\psi^{n,\alpha} + b^{n,i}\varphi^{n,i}, \quad \forall (u,v) \in BN_b(\Omega) \times R_b(\Omega),\ n \in \{1, \cdots, N\},$$

con $\varphi^{n,i}$ dada por (3) y $b^{n,i} \in \mathbb{R}$ elegida de tal forma que se verifique

$$\int_Z A(0) e(q^n_{u,v}) : e(\varphi^{n,l}) dz = 0, \quad l \in \{1,2,3\},$$

se tiene

$$P^\varepsilon(x) = -\frac{1}{\varepsilon} \sum_{n=1}^N e(q^n_{\hat{u},\hat{v}}) \left(\frac{x - \varepsilon y^n}{\varepsilon r^\varepsilon}\right), \quad p.c.t.\ x \in \Omega^\varepsilon,$$

$$\mathcal{B}((u,v),(\overline{u},\overline{v})) = \rho \sum_{n=1}^N \int_Z A(0) e(q^n_{u,v}) : e(q^n_{\overline{u},\overline{v}}) dz,\ \forall (u,v),(\overline{u},\overline{v}) \in BN_b(\Omega) \times R_b(\Omega). \tag{10}$$

• *Si $r^\varepsilon \approx \varepsilon^{1/3}$ con $(r^\varepsilon)^3/\varepsilon \to \rho$, $M = 0$, entonces $\mathcal{E}$ está dado por (8). Además, definiendo ϕ por*

$$\left\{\begin{array}{l} \phi \in D^{1,2}(Z)^3,\ \phi = z_3 \mathbf{e}^2 - z_2 \mathbf{e}^3 \ \text{en } \{0\} \times S^1, \\ \displaystyle\int_Z A(0) e(\phi) : e(\eta) dz = 0, \quad \forall \eta \in D^{1,2}(Z)^3,\ \eta = 0 \ \text{en } \{0\} \times S^1, \end{array}\right.$$

y denotando

$$q^1_{u,v} = c(0)\phi + \frac{d\zeta_\alpha}{dy_1}(0)\psi^{1,\alpha} + b^{1,i}\varphi^{1,i}, \quad \forall (u,v) \in BN_b(\Omega) \times R_b(\Omega),$$

con $\varphi^{1,i}$, $\psi^{1,\alpha}$, dadas respectivamente por (3) y (9), y $b^{1,i} \in \mathbb{R}$ elegida de tal forma que se verifique

$$\int_Z A(0) e(q^1_{u,v}) : e(\varphi^{1,l}) dz = 0, \quad l \in \{1,2,3\},$$

se tiene

$$P^\varepsilon(z) = -\frac{1}{\varepsilon} e(q^1_{\hat{u},\hat{v}})(\frac{x - \varepsilon y^1}{\varepsilon r^\varepsilon}), \quad p.c.t.\ x \in \Omega^\varepsilon,$$

$$\mathcal{B}((u,v),(\overline{u},\overline{v})) = \rho \int_Z A(0) e(q^1_{u,v}) : e(q^1_{\overline{u},\overline{v}}) dz, \quad \forall (u,v),(\overline{u},\overline{v}) \in BN_b(\Omega) \times R_b(\Omega).$$

- *Si* $\varepsilon^{1/3} \ll r^\varepsilon \leq C$*,* $M \in \{0,1\}$*, entonces* $\mathcal{E}$*,* P^ε *y* $\mathcal{B}$ *están dados por (6).*

Observación 2.3. Por definición de $BN_b(\Omega)$, $R_b(\Omega)$ $RD_2^\perp(\Omega)$, nótese que las funciones $\hat{u}$ $\hat{v}$, $\hat{w}$, que aparecen al describir el comportamiento límite de U^ε, son tales que tan sólo $\hat{\zeta}_1$, $\hat{\zeta}_2$, $\hat{\zeta}_3$, $\frac{d\hat{\zeta}_2}{dy_1}$, $\frac{d\hat{\zeta}_3}{dy_1}$ y $\hat{c}$ tienen trazas en $x_1 = 0$. El número de estas funciones que se anulan en $x_1 = 0$ crece con r^ε. Cuando $r_\varepsilon \ll \varepsilon^3$, las zonas a las que se impone la condición de tipo Dirichlet en la base izquierda de la viga son tan pequeñas que ésta se comporta como si hubiésemos impuesto una condición de Neumann en toda la base. Cuando $r_\varepsilon \approx \varepsilon^3$ la condición de tipo Dirichlet ya no es despreciable y así en la ecuación límite encontramos una condición de tipo Fourier que tiene en cuenta los valores $\hat{\zeta}_2(0)$, $\hat{\zeta}_3(0)$. Cuando $\varepsilon^3 \ll r^\varepsilon \ll \varepsilon$ las zonas son ya lo suficientemente grandes para que en el límite tengamos $\hat{\zeta}_2(0) = \hat{\zeta}_3(0) = 0$. Cuando $r^\varepsilon \approx \varepsilon$ y $M = 0$, en la definición de $q^1_{u,v}$ las cantidades $b^2 + c(0)y_3^1$, $b^3 - c(0)y_2^1$ dependen linealmente de $\zeta_1(0) - \frac{d\zeta_\alpha}{dy_1}(0)y_\alpha^1$. Así, en (5) $\mathcal{B}$ sólo depende de los correspondientes valores de $\zeta_1(0) - \frac{d\zeta_\alpha}{dy_1}(0)y_\alpha^1$ para cada uno de los pares (u,v) y $(\bar{u},\bar{v})$. Sin embargo, si $r^\varepsilon \approx \varepsilon$, $M \geq 1$, además de los valores $\zeta_1(0) - \frac{d\zeta_\alpha}{dy_1}(0)y_\alpha^n$, $n \in \{1,\cdots,N\}$, $\mathcal{B}$ también depende de $c(0)$. Si $\varepsilon \ll r_\varepsilon$ observamos que las expresiones de $\mathcal{B}$ y P^ε dados por el Teorema 2.1 para $M = 1$ son también válidas para $M = 2$. De hecho, la definición de $\mathcal{E}$ que aparece en (7) implica si $M = 2$ que $\zeta_1(0) = \frac{d\zeta_2}{dy_1}(0) = \frac{d\zeta_3}{dy_1}(0) = 0$. Hemos preferido distinguir los casos $M = 1$ y $M = 2$ para enfatizar el hecho de que para $M = 2$ y $\varepsilon \ll r_\varepsilon$ la solución U^ε de (1) se comporta como si impusiéramos condiciones de Dirichlet homogéneas en la totalidad de las dos bases de Ω^ε mientras que cuando $M = 0$ o $M = 1$, necesitamos tomar $\varepsilon^{1/3} \ll r_\varepsilon$ para tener este resultado. Finalmente observamos que para $\varepsilon \ll r_\varepsilon \ll \varepsilon^{1/3}$ y $\varepsilon^{1/3} \approx r_\varepsilon$, la definición de $\mathcal{E}$ para $M = 0$ y $M = 1$ es diferente. En ambos casos $\zeta_2(0) = \zeta_3(0) = 0$, pero para $M = 1$ sólo una de las tres cantidades $\zeta_1(0)$, $\frac{d\zeta_2}{dy_1}(0)$, $\frac{d\zeta_3}{dy_1}(0)$ es independiente y además $c(0) = 0$, mientras que para $M = 0$ dos de las cantidades $\zeta_1(0)$, $\frac{d\zeta_2}{dy_1}(0)$, $\frac{d\zeta_3}{dy_1}(0)$ son independientes y $c(0)$ es distinto de cero en general.

Agradecimientos

Este trabajo ha sido parcialmente financiado por el proyecto MTM2005-04914 del Ministerio de Educación y Ciencia.

Referencias

[1] J. Casado-Díaz, M. Luna-Laynez, F. Murat. *Asymptotic behavior of diffusion problems in a domain made of two cylinders of different diameters and lengths.* C. R. Acad. Sci. Paris, ser. I, 338 (2004), 133–138.

[2] J. Casado-Díaz, M. Luna-Laynez, F. Murat. *Asymptotic behavior of an elastic beam fixed on a small part of one of its extremities.* C. R. Acad. Sci. Paris, ser. I, 338 (2004), 975–980.

[3] J. Casado-Díaz, M. Luna-Laynez, F. Murat. *The diffusion equation in a notched beam.* Calculus of Variations and PDE, por aparecer.

[4] J. Casado-Díaz, M. Luna-Laynez, F. Murat. *Elasticity problems in a beam fixed on small zones of one of its extremities.* En preparación.

[5] P.G. Ciarlet, *Mathematical elasticity, Vol. I: Three-dimensional elasticity,* North-Holland, 1988.

[6] A. Cimetière, G. Geymonat, H. Le Dret, A. Raoult, Z. Tutek. *Asymptotic theory and analysis for displacements and stress distribution in nonlinear straight slender rods.* J. of Elasticity, 19 (1988), 111–161.

[7] A. Gaudiello, R. Monneau, J. Mossino, F. Murat, A. Sili. *On the junction of elastic plates and beams.* C. R. Acad. Sci. Paris, ser. I, 335 (2002), 717–722.

[8] A. Gaudiello, R. Monneau, J. Mossino, F. Murat, A. Sili. *Junction of elastic plates and beams.* Por aparecer.

[9] R.V. Kohn, V.V. Slastikov. *Geometrically constrained walls.* Calculus of Variations and PDE. Por aparecer.

[10] F. Murat, A. Sili. *Comportement asymptotique des solutions du système de l'élasticité linéarisée anisotrope hétérogène dans des cylindres minces.* C. R. Acad. Sci. Paris, ser. I, 328 (1999), 179–184.

[11] F. Murat, A. Sili. *Anisotropic, heterogeneous, linearized elasticity in thin cylinders*. Por aparecer.

[12] L. Trabucho, J.M. Viaño, *Mathematical modelling of rods. Handbook of Numerical Analysis, Vol. IV,* North-Holland, 1996.