XX Congreso de Ecuaciones Diferenciales y Aplicaciones
X Congreso de Matemática Aplicada
Sevilla, 24-28 septiembre 2007
(pp. 1–8)

Sobre la existencia de atractores para ecuaciones aleatorias de reacción-difusión con retardos

T. Caraballo[1], M. J. Garrido Atienza[1], B. Schmalfuss[2], J. Valero[3]

[1] *Dpto. E.D.A.N., Universidad de Sevilla, Aptdo. 1160, 41080 Sevilla. E-mails:* caraball@us.es, mgarrido@us.es.
[2] *Institut für Mathematik, Fakultät EIM, Universität Paderborn, Warburger Strasse 100, 33098, Paderborn (Germany). E-mail:* schmalfuss@uni-paderborn.de.
[3] *Dpto. Estadística y Matemática Aplicada, Universidad Miguel Hernández, Avda. del Ferrocarril, s/n, ES03202, Elche. E-mail:* jvalero@umh.es.

Palabras clave: ecuaciones diferenciales con retardos, sistemas dinámicos multivaluados no autónomos y aleatorios, atractor pullback y atractor aleatorio

Resumen

En primer lugar probamos la existencia y unicidad de atractor para sistemas dinámicos multivaluados abstractos, tanto en el caso no autónomo como en el caso aleatorio. La hipótesis habitual de compacidad de tales sistemas es sustituida por la hipótesis más débil de compacidad asintótica. Posteriormente aplicaremos la teoría abstracta para tratar una ecuación de reacción-difusión con memoria donde el retardo puede incluso ser infinito. Otra particularidad de nuestros resultados es que tampoco supondremos unicidad de solución para dichas ecuaciones.

1. Preliminares

A continuación presentamos las definiciones y resultados que consideramos fundamentales para sistemas dinámicos multivaluados no autónomos y aleatorios y formulamos condiciones suficientes para la existencia de un atractor pullback para tales sistemas, el cual es un conjunto aleatorio si la perturbación aleatoria es un ruido.

A un par (Ω, θ) donde $\theta = (\theta_t)_{t\in\mathbb{R}}$ es un flujo sobre Ω, es decir,

$$\begin{aligned}
&\theta : \mathbb{R} \times \Omega \to \Omega\\
&\theta_0 = \mathrm{id}_\Omega, \qquad \theta_{t+\tau} = \theta_t \circ \theta_\tau =: \theta_t\theta_\tau \quad \text{para } t,\, \tau \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

se le denomina una *perturbación no autónoma*.

Sea $\mathcal{P} := (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad. Consideremos además un flujo no autónomo *medible* θ, dado por $\theta : (\mathbb{R} \times \Omega, \mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{F}) \to (\Omega, \mathcal{F})$. A $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, \theta)$ se le denomina un *sistema dinámico métrico*.

A partir de ahora supondremos que $X = (X, d_X)$ es un espacio Polaco.

Sea $D : \omega \to D(\omega) \in 2^X$ una aplicación multivaluada. Al conjunto de todas las multifunciones $D : \omega \to D(\omega) \in 2^X$ con imágenes no vacías y cerradas lo vamos a denotar por $C(X)$. Denotemos por $P_f(X)$ al conjunto de todos los subconjuntos no vacíos y cerrados del espacio X.

Una aplicación multivaluada $D : \omega \to D(\omega)$ se dice que es un *conjunto aleatorio* si

$$\omega \to \inf_{y \in D(\omega)} d_X(x, y)$$

es una variable aleatoria para cada $x \in X$.

Definición 1 *Una aplicación multivaluada $U : \mathbb{R}^+ \times \Omega \times X \to P_f(X)$ se denomina sistema dinámico no autónomo multivaluado (MNDS de las siglas inglesas) si verifica:*

i) $U(0, \omega, \cdot) = \mathrm{id}_X$,

ii) $U(t+\tau, \omega, x) \subset U(t, \theta_\tau \omega, U(\tau, \omega, x))$ *(propiedad de cociclo) para todo* $t, \tau \in \mathbb{R}^+, x \in X, \omega \in \Omega$.

Se dirá que el MNDS es estricto si en ii) se verifica la igualdad. Un MNDS se dice que es un sistema dinámico aleatorio multivaluado (MRDS) si $(t, \omega, x) \to U(t, \omega, x)$ es $\mathcal{B}(\mathbb{R}^+) \otimes \mathcal{F} \otimes \mathcal{B}(X)$ medible, i.e. $\{(t, \omega, x) : U(t, \omega, x) \cap O \neq \emptyset\} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^+) \otimes \mathcal{F} \otimes \mathcal{B}(X)$ para cada abierto O de X.

A continuación vamos a introducir algunas propiedades topológicas para un MNDS U, para lo que recordamos la definición de *semidistancia de Hausdorff* entre dos conjuntos no vacíos A, B:

$$\mathrm{dist}_X(A, B) = \sup_{x \in A} \inf_{y \in B} d_X(x, y).$$

Decimos que $U(t, \omega, \cdot)$ es *semicontinuo superiormente en* x_0 si para cada entorno $\mathcal{U}$ de $U(t, \omega, x_0)$ existe $\delta > 0$ tal que si $d_X(x_0, y) < \delta$ entonces $U(t, \omega, y) \in \mathcal{U}$. Por otro lado, $U(t, \omega, \cdot)$ es *semicontinuo superiormente* si es semicontinuo superiormente en cada $x_0 \in X$.

Formulamos ahora un resultado general asegurando que un MNDS define un MRDS. Para ello necesitamos que Ω sea un espacio Polaco y $\mathcal{F}$ sea la σ–álgebra de Borel asociada.

Lema 2 *Sea Ω un espacio Polaco y $\mathcal{F}$ su σ–álgebra de Borel. Suponganos que $(t, \omega, x) \mapsto U(t, \omega, x)$ es semicontinuo superiormente, entonces esta aplicación es medible en el sentido de la Definición 1.*

Otra definición que necesitamos para estudiar la existencia de atractores para los sistemas dinámicos es el concepto de invarianza. Diremos que una aplicación multivaluada D es *negativamente, estrictamente o positivamente invariante* para el MNDS U si

$$D(\theta_t \omega) \begin{array}{c} \subset \\ = \\ \supset \end{array} U(t, \omega, D(\omega)) \quad \text{para } \omega \in \Omega,\ t \in \mathbb{R}^+.$$

Sea $\mathcal{D}$ una familia de aplicaciones multivaluadas con valores en $C(X)$. Decimos que $K \in \mathcal{D}$ es *pullback* $\mathcal{D}$-*atrayente* si para cada $D \in \mathcal{D}$

$$\lim_{t \to +\infty} \operatorname{dist}_X(U(t, \theta_{-t}\omega, D(\theta_{-t}\omega)), K(\omega)) = 0, \text{ para todo } \omega \in \Omega.$$

$B \in \mathcal{D}$ se dice *pullback* $\mathcal{D}$-*absorbente* si para cada $D \in \mathcal{D}$ existe $T = T(\omega, D) > 0$ tal que

$$U(t, \theta_{-t}\omega, D(\theta_{-t}\omega)) \subset B(\omega), \text{ para todo } t \geq T. \tag{1}$$

Consideremos a partir de ahora una familia $\mathcal{D}$ de aplicaciones multivaluadas en $C(X)$ verificando la propiedad de inclusión cerrada (ver Schmalfuß [3])): si $D \in \mathcal{D}$ y D' es una aplicación multivaluada en $C(X)$ tal que $D'(\omega) \subset D(\omega)$ para $\omega \in \Omega$, entonces $D' \in \mathcal{D}$.

Definición 3 *Una familia $A \in \mathcal{D}$ es un $\mathcal{D}$-atractor pullback asociado a un MNDS U si:*
1) $A(\omega)$ es compacto para cualquier $\omega \in \Omega$;
2) A es pullback $\mathcal{D}$-atrayente;
3) A es negativamente invariante.
A se dirá que es además global si la propiedad de invarianza en el tercer item es estricta.

Definición 4 *Supongamos que U es un MRDS y que las propiedades de la Definición 3 se cumplen. En concreto, supongamos que $\mathcal{D}$ es un sistema de conjuntos aleatorios y que A es también un conjunto aleatorio con respecto a $\mathcal{P}^c$, el completado de $\mathcal{P}$. Entonces A es un $\mathcal{D}$-atractor aleatorio (global) asociado a U.*

La principal herramienta para probar la existencia de un atractor es el denominado conjunto omega-límite (en sentido) pullback para el MNDS U. Definimos el *conjunto omega-límite pullback* por

$$\Lambda(D, \omega) = \bigcap_{s \geq 0} \overline{\bigcup_{t \geq s} U(t, \theta_{-t}\omega, D(\theta_{-t}\omega))}.$$

Podemos probar el siguiente resultado:[1]

Teorema 5 *Supongamos que el MNDS $U(t, \omega, \cdot)$ es semicontinuo superiormente para $t \geq 0$ y $\omega \in \Omega$. Sea B una aplicación multivaluada tal que el MNDS es* asintóticamente compacto *con respecto a B, i.e., para cada sucesión $t_n \to +\infty$ y $\omega \in \Omega$ cada sucesión $y_n \in U(t_n, \theta_{-t_n}\omega, B(\theta_{-t_n}\omega))$ es pre-compacta. Supongamos también que $B \in \mathcal{D}$ es pullback $\mathcal{D}$–absorbente. Entonces, $A(\omega) := \Lambda(B, \omega)$ es el único $\mathcal{D}$-atractor pullback asociado a U.*

Si además U es un MNDS estricto, entonces A es global.

Con respecto a la medibilidad de la Definición 4 podemos probar el siguiente resultado:

Lema 6 *Bajo las hipótesis del Teorema 5, sea $\omega \to U(t, \omega, B(\omega))$ un conjunto aleatorio para $t \geq 0$. Supongamos también que $U(t, \omega, B(\omega))$ es cerrado para todo $t \geq 0$ y $\omega \in \Omega$. Entonces el conjunto A introducido en el Teorema 5 es medible.*

[1] En general todas las demostraciones pueden consultarse en [1].

2. Ecuaciones de evolución abstractas

Consideremos la siguiente ecuación de evolución aleatoria con memoria

$$\frac{dy}{dt} = Ay + f(\theta_t\omega, y_t). \tag{2}$$

A se supone que genera un C_0 semigrupo de contracciones $(S(t))_{t\geq 0}$ en un espacio de Banach separable $(H, \|\cdot\|)$, de ahí que

$$\|S(t)x\| \leq \|x\|e^{-\alpha t}, \quad \text{para algún } \alpha > 0 \quad \text{y cada } t \geq 0.$$

Supondremos además que para todo $t > 0$, $S(t)$ son compactos.
El término no lineal f depende de ω y del término retardado y_t definido por

$$y_t(s) = \begin{cases} y(t+s) & \text{for } s \in [-t, 0] \\ x_0(s+t) & s < -t \end{cases}$$

donde $t \geq 0$. Para $\gamma > \alpha$ introducimos el espacio

$$C_\gamma = \{u \in C((-\infty, 0]; H) : \text{ existe } \lim_{\tau \to -\infty} u(\tau)\, e^{\gamma\tau}\},$$

y definimos $\|u\|_\gamma := \sup_{\tau\in(-\infty,0]} e^{\gamma\tau}\|u(\tau)\| < \infty$. Dicho espacio es un Banach separable [2, p.15].
Supondremos que $x_0 \in C_\gamma$, y dotamos entonces la ecuación (2) con la condición inicial $y(t) = x_0(t)$, $t \leq 0$. Finalmente sea $f : \Omega \times C_\gamma \to H$ tal que la aplicación $\omega \to f(\omega, y)$ es $\mathcal{F}$ medible para cualquier $y \in C_\gamma$ fijo, y la aplicación $y \to f(\omega, y)$ es continua de C_γ en H para cualquier ω fijo.
Supongamos que existen dos funciones no negativas $c_i : \Omega \to \mathbb{R}$, $i = 1, 2$, medibles respecto a $\mathcal{F}$. Supongamos además que $t \to c_1(\theta_t\omega)$ es integrable con respecto a cualquier intervalo finito (a, b) y subexponencialmente creciente para $t \to \pm\infty$ y $\omega \in \Omega$, es decir, que c_1 es una variable aleatoria temperada. Para c_2 supongamos que $\mathbb{E}c_2 < \infty$ y que

$$\lim_{t\to\pm\infty} \frac{1}{t}\int_0^t c_2(\theta_\tau\omega)d\tau = \bar{c}_2.$$

Finalmente supongamos que se satisface la condición

$$\|f(\omega, y)\| \leq c_1(\omega) + c_2(\omega)\|y\|_\gamma \quad \text{para } \omega \in \Omega, \quad y \in C_\gamma. \tag{3}$$

Queremos enfatizar que no suponemos que f sea Lipschitz continua en ningún sentido.

Bajo las condiciones anteriores, y usando el teorema del punto fijo de Schauder, se puede probar que para cada x_0 la ecuación (2) posee al menos una solución débil en C_γ sobre cada intervalo $[0, T]$, entendiendo que para $\omega \in \Omega$ y $x_0 \in C_\gamma$, la función $[0, T] \ni t \to y_t \in C_\gamma$ es solución débil de (2) con condición inicial x_0 si satisface

$$y_t(s) = \begin{cases} S(t+s)x_0(0) + \int_0^{s+t} S(t+s-\tau)f(\theta_\tau\omega, y_\tau)d\tau & : \quad s \in [-t, 0] \\ x_0(s+t) & : \quad s < -t, \end{cases} \tag{4}$$

para todo $t \in [0, T]$.

Además se puede deducir la siguiente estimación a priori para la solución de (2): si y_t satisface (4) sobre $[0,T)$, $T \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$, entonces

$$\|y_t\|_\gamma \le e^{-\alpha t+\int_0^t c_2(\theta_\tau\omega)d\tau}\|x_0\|_\gamma + \int_0^t e^{-\alpha(t-\tau)+\int_\tau^t c_2(\theta_q\omega)dq}c_1(\theta_\tau\omega)d\tau. \tag{5}$$

Una consecuencia inmediata de esta cota es que cada solución de (2) es global.

Definimos $U(t,\omega,x_0)$ como el conjunto de soluciones débiles (4) en el instante $t \ge 0$, es decir, $U(t,\omega,x_0) = \cup\, y_t$, donde la unión es tomada en el conjunto de las soluciones débiles $[0,+\infty) \ni t \to y_t \in C_\gamma$ tales que $y_0 = x_0$. Un primer resultado que se puede probar es que la aplicación U así definida es un MNDS estricto. En particular, para cualquier $t \ge 0$ fijo se verifica que $U(t,\omega,D(\omega)) \in C(C_\gamma)$ si $D \in C(C_\gamma)$.

A partir de ahora consideraremos el sistema $\mathcal{D}$ dado por las aplicaciones multivaluadas D de $C(C_\gamma)$ tales que $D(\omega) \subset B_{C_\gamma}(0,\varrho(\omega))$, la bola cerrada de C_γ de centro cero y radio ϱ, el cual se supone que tiene un crecimiento subexponencial, i.e.,

$$\lim_{t\to\pm\infty} \frac{\log^+ \varrho(\theta_t\omega)}{t} = 0 \quad \text{para } \omega \in \Omega.$$

Teniendo en cuenta la estimación a priori (5) podemos demostrar la existencia de una bola absorbente. En concreto

Lema 7 *Supongamos que*

$$\mathbb{E}c_2 = \bar{c}_2 < \alpha. \tag{6}$$

Entonces la bola $B(\omega)$ de C_γ con centro cero y radio aleatorio (respecto de $\mathcal{F}$) dado por

$$R(\omega) = 2\int_{-\infty}^0 e^{\alpha\tau+\int_\tau^0 c_2(\theta_s\omega)ds}c_1(\theta_\tau\omega)d\tau \tag{7}$$

está contenida en $\mathcal{D}$. Además B es pullback $\mathcal{D}$–absorbente en el sentido de (1) y verifica $U(t,\omega,B(\omega)) \subset B(\theta_t\omega)$ para $t \ge 0$ y $\omega \in \Omega$.

A partir de aquí podemos probar que, bajo la condición (6), el sistema dinámico multivaluado U es semicontinuo superiormente y pullback asintóticamente compacto con respecto a B definido en el Lema 7, y que el MNDS generado por (2) tiene asociado un $\mathcal{D}$–atractor pulback A en $C(C_\gamma)$.

Ahora queremos demostrar la existencia de un atractor aleatorio para (2). A partir de aquí supondremos que podemos dotar a Ω de una métrica de forma que tengamos un espacio Polaco. $\mathcal{F}$ es la σ–álgebra de Borel de Ω, y θ_t se supone continua sobre Ω para $t \in \mathbb{R}$. Supondremos además que

$$\Omega \times C_\gamma \ni (\omega,y) \mapsto f(\omega,y) \in H \tag{8}$$

es continua.

Veamos una condición suficiente bajo la cual el MNDS generado por (2) es un MRDS.

Teorema 8 *Supongamos (8) y que para cada* $\omega_0 \in \Omega$ *y* $t_0 \in \mathbb{R}$ *existe un entorno* $V = V(\omega_0, t_0)$ *tal que para algún* $\mu > 1$

$$\int_0^t (c_1 (\theta_\tau \omega)^\mu + c_2 (\theta_\tau \omega)^\mu) \, d\tau \leq C(\omega_0, t_0) < \infty, \quad \text{para todo } (\omega, t) \in V. \tag{9}$$

Entonces la aplicación $(t, \omega, x_0) \to U(t, \omega, x_0)$ *es* $\mathcal{B}(\mathbb{R}^+) \otimes \mathcal{F} \otimes \mathcal{B}(C_\gamma)$ *medible.*

Finalmente vemos que el atractor pullback es también atractor aleatorio:

Teorema 9 *Supongamos las condiciones (8), (6) de tal modo que existe el* $\mathcal{D}$*–atractor pullback* A *en* C_γ*. Supongamos además que para algún* $\mu > 1$

$$\int_0^t (c_1 (\theta_\tau \omega)^\mu + c_2 (\theta_\tau \omega)^\mu) \, d\tau \leq C(t) < \infty, \quad \text{para todo } \omega \in \Omega, \tag{10}$$

y que el radio de la bola absorbente $R(\omega)$ *es uniformemente acotado sobre* $\omega \in \Omega$*. Entonces:*
1) $\cup_{\omega \in \Omega} A(\omega)$ *es pre-compacto en* C_γ*.*
2) La aplicación $\omega \to A(\omega)$ *es semicontinua superiormente.*
3) La aplicación $\omega \to A(\omega)$ *es* $\mathcal{F}$ *medible en* C_γ*.*

Queremos señalar que podemos también probar que A es el atractor aleatorio usando el Lema 6 pero en dicho caso necesitaríamos que el espacio de probabilidad fuera completo.

3. Ecuación aleatoria de reacción-difusión con retardos

En esta sección vamos a aplicar los resultados abstractos para demostrar la existencia de atractor pullback y aleatorio asociado a una ecuación aleatoria de reacción-difusión con memoria.

Sea $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^n$ un abierto acotado con frontera suficientemente regular. Sea $H = L^2(\mathcal{O})$, y denotemos por $||\cdot||$ su norma. Sea $-A$ el operador de Laplace Δ con condiciones Dirichlet homogéneas. Entonces se sabe que

$$\begin{aligned} D(A) &= \{u \in H_0^1(\mathcal{O}) : Au \in L^2(\mathcal{O})\}, \\ \alpha &= \inf\{||\nabla u||_{L^2(\mathcal{O})} : u \in H_0^1(\mathcal{O}), ||u|| = 1\}. \end{aligned}$$

$H_0^1(\mathcal{O})$ es el espacio de Sobolev de las funciones en H con derivadas generalizadas en H las cuales se anulan sobre la frontera $\partial\mathcal{O}$. Entonces A es el generador de un C_0 semigrupo de contracciones $(S(t))_{t\geq 0}$ sobre H verificando

$$||S(t)\psi|| \leq e^{-\alpha t}||\psi||, \text{ para cada } t \geq 0 \text{ y } \psi \in H,$$

siendo $\alpha > 0$ el primer autovalor de A en $H_0^1(\mathcal{O})$. Además $S(t)$, $t > 0$, son operadores compactos sobre H.

Supongamos que Ω es un espacio Polaco sobre el cual θ_t son continuas y sea $\mathcal{F}$ la σ–álgebra de Borel de Ω. Sea $\gamma > \alpha$.

Consideremos una función continua $g : H \to H$ tal que

$$||g(u)|| \leq d_1 + d_2||u||, \text{ para todo } x \in H,$$

donde d_1, d_2 son constantes reales positivas. Sea $\sigma : \Omega \times \mathbb{R}^- \to \mathbb{R}^+$ tal que para $a \in \mathbb{R}^-$ fijo la aplicación $\sigma(\cdot, a)$ es medible, y para $\omega \in \Omega$ fijo, $(\omega, s) \longmapsto \sigma(\omega, s)$ es suficientemente regular de forma que la integral

$$\widetilde{c}_2(\omega) := \int_{-\infty}^{0} \sigma(\omega, s) e^{-\gamma s} ds$$

es finita para $\omega \in \Omega$, siendo $\widetilde{c}_2$ una variable aleatoria tempererada con $\mathbb{E}\widetilde{c}_2 < \frac{\alpha}{d_2}$. De ahí que la aplicación $f : \Omega \times C_\gamma \to H$ dada por

$$f(\omega, \xi) = \int_{-\infty}^{0} \sigma(\omega, s) g(\xi(s)) ds,$$

está bien definida para $\omega \in \Omega$, $\xi \in C_\gamma$. Definiendo además $\widetilde{c}_1(\omega) := \int_{-\infty}^{0} \sigma(\omega, s) ds$ entonces

$$\begin{aligned} ||f(\omega, \xi)|| &\leq d_1 \int_{-\infty}^{0} \sigma(\omega, s) ds + d_2 \int_{-\infty}^{0} \sigma(\omega, s) e^{-\gamma s} e^{\gamma s} ||\xi(s)|| ds \\ &= d_1 \widetilde{c}_1(\omega) + d_2 \widetilde{c}_2(\omega) ||\xi||_\gamma =: c_1(\omega) + c_2(\omega) ||\xi||_\gamma. \end{aligned}$$

Claramente $\omega \to f(\omega, \xi)$ es medible para cualquier $\xi \in C_\gamma$ fijo.

Probemos ahora que para cualquier ω fijo la aplicación $\xi \to f(\omega, \xi)$ es continua de C_γ en H. Supongamos que $\xi_n \to \xi$ en C_γ. Notemos que entonces

$$\sigma(\omega, s) g(\xi_n(s)) \to \sigma(\omega, s) g(\xi(s)), \text{ para todo } s \leq 0,$$

y para cualquier $M \geq 0$

$$\|\sigma(\omega, s) g(\xi_n(s)) - \sigma(\omega, s) g(\xi(s))\| \leq \sigma(\omega, s) C(M), \text{ para cualquier } s \in [-M, 0].$$

Entonces usando el teorema de Lebesgue obtenemos

$$\int_{-M}^{0} \|\sigma(\omega, s) g(\xi_n(s)) - \sigma(\omega, s) g(\xi(s))\| ds \to 0, \text{ para cualquier } M > 0.$$

Además, para cualquier $\varepsilon > 0$ existe $M = M(\varepsilon)$ tal que

$$\begin{aligned} &\int_{-\infty}^{-M} \|\sigma(\omega, s) g(\xi_n(s)) - \sigma(\omega, s) g(\xi(s))\| ds \\ &\leq 2d_1 \int_{-\infty}^{-M} \sigma(\omega, s) ds + d_2 \left(\sup_n \|\xi_n\|_{C_\gamma} + \|\xi\|_{C_\gamma} \right) \int_{-\infty}^{-M} e^{-\gamma s} \sigma(\omega, s) ds \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

De ahí que para cualquier $\varepsilon > 0$ existe $N(\varepsilon)$ tal que

$$\|f(\omega_n, \xi_n) - f(\omega, \xi)\| \leq 2\varepsilon, \text{ si } n \geq N,$$

con lo cual la continuidad está probada.

Ya que $\widetilde{c}_1(\omega) \leq \widetilde{c}_2(\omega)$ para todo $\omega \in \Omega$, gracias a las hipótesis sobre $\widetilde{c}_2$, sabemos que c_i están bien definidas y son variables aleatorias positivas y temperadas. Además f satisface la condición (3). Suponemos que $t \longmapsto \widetilde{c}_1(\theta_t \omega)$ es integrable con respecto a cada intervalo finito (t_1, t_2) y $\omega \in \Omega$. Por el teorema ergódico lo mismo es cierto para $\widetilde{c}_2$. Claramente se verifica (6).

Por tanto, hasta ahora tenemos garantizado que la siguiente ecuación aleatoria de evolución con memoria

$$\frac{dy}{dt} = -\Delta y + f(\theta_t \omega, y_t)$$

genera un MNDS que tiene asociado un único atractor pullback A. Queremos probar que este MNDS es también un MRDS y que A es su único atractor aleatorio asociado. Para ello supongamos que $\Omega \times \mathbb{R}^- \ni (\omega, s) \mapsto \sigma(\omega, s) \geq 0$ es continua y verifica $\sigma(\omega, s) \leq D(\omega)\, e^{\delta s}$, con $\delta > \gamma$ siendo $\omega \mapsto D(\omega)$ una función acotada. En particular suponemos

$$D(\omega) \leq C := \frac{\alpha(\delta - \gamma)}{2d_2}, \text{ para todo } \omega \in \Omega. \tag{11}$$

De manera similar a como antes se demostró la continuidad de f de C_γ en H se puede probar la condición (8).

Ahora probemos la condición (9). Sea $\mu > 1$. Teniendo en cuenta que $\delta > \gamma$ y las definiciones de $c_1(\omega)$ y $c_2(\omega)$, obtenemos que para todo $\omega \in \Omega$

$$\int_0^t (c_1(\theta_\tau \omega)^\mu + c_2(\theta_\tau \omega)^\mu) d\tau \leq \int_0^t \int_{-\infty}^0 D(\theta_\tau \omega)^\mu e^{\mu \delta s}(d_1^\mu + d_2^\mu e^{-\mu \gamma s}) ds d\tau < \infty,$$

así que la condición del Teorema 8 se cumple, y por tanto tenemos un MRDS.

Para probar que A es además un atractor aleatorio para este MRDS tengamos presente que $R(\omega)$ viene definido por

$$R(\omega) = 2 \int_{-\infty}^0 e^{\alpha \tau + \int_\tau^0 \left(d_2 \int_{-\infty}^0 \sigma(\theta_s \omega, r) e^{-\gamma r} dr\right) ds} \left(d_1 \int_{-\infty}^0 \sigma(\theta_\tau \omega, s) ds \right) d\tau.$$

Por tanto

$$\begin{aligned} R(\omega) &\leq 2 \int_{-\infty}^0 e^{\alpha \tau + C d_2 \int_\tau^0 \left(\int_{-\infty}^0 e^{(\delta - \gamma) r} dr\right) ds} C d_1 \left(\int_{-\infty}^0 e^{\delta s} ds \right) d\tau \\ &\leq \frac{2 C d_1}{\delta} \int_{-\infty}^0 e^{\left(\alpha - \frac{C d_2}{\delta - \gamma}\right) \tau} d\tau = \frac{2 C d_1}{\delta \left(\alpha - \frac{C d_2}{\delta - \gamma}\right)} = \frac{4 C d_1}{\delta \alpha}, \end{aligned}$$

así que $R(\omega)$ es uniformemente acotado sobre $\omega \in \Omega$, y entonces las condiciones del Teorema 9 se verifican. Por tanto, A es el atractor aleatorio asociado al MRDS.

Referencias

[1] T. Caraballo, M.J. Garrido-Atienza, B. Schmalfuß, and J. Valero. *Non–autonomous and random attractors for delay random semilinear equations without uniqueness*, enviado.

[2] Y. Hino, S. Murakami, and T. Naito, *Functional Differential Equations with Infinite Delay*, Lecture Notes in Mathematics, 1473, Berlin: Springer-Verlag, 1991.

[3] B. Schmalfuß. *Attractors for the non-autonomous dynamical systems*. In International Conference on Differential Equations, Vol. 1, 2 (Berlin, 1999), World Sci. Publishing, River Edge, NJ, 2000, 684–689.