

Aumento de la eficiencia de un método de descomposición de dominio mediante estimaciones a posteriori.

C. BERNARDI¹ T. CHACÓN REBOLLO², E. CHACÓN VERA²,
D. FRANCO CORONIL²,

¹ *Lab. Jacques-Louis Lions, C. N. R. S. et Univ. Pierre et Marie Curie, Boîte courrier 187, 75252 Paris Cedex 05 (France). E-mail: bernardi@ann.jussieu.fr.*

² *Dpto. E.D.A.N., Universidad de Sevilla, Apto. 1160, E-41080 Sevilla. E-mails: chacon@us.es, eliseo@us.es, franco@us.es.*

Palabras clave: descomposición de dominios, análisis de error a posteriori, penalización, normas fraccionarias de Sobolev

Resumen

En este trabajo introducimos un método de descomposición de dominio sin solapamiento con penalización, que viene motivado a partir de un análisis del error a posteriori del método estudiado por T. Chacón y E. Chacón en [5] y [6].

Con el objetivo de mejorar la tasa de convergencia del método de [6], en este trabajo, introducimos una nueva versión de este método en la cual un término de penalización $H_0^{1/2}(\Gamma)$ reemplaza el término $L^2(\Gamma)$ del original de [6]. Usando este nuevo término, el número de iteraciones necesarias para alcanzar una solución con un error del mismo orden que el error de discretización, se reduce significativamente.

Realizamos además un análisis de error a posteriori, que nos permite desarrollar un estrategia para determinar simultáneamente un parámetro de penalización óptimo y una malla optimal, para reducir el error por debajo de un valor prefijado.

Varios test numéricos muestran los buenos resultados de nuestras aproximaciones.

1. El problema penalizado

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ($d = 2, 3$) un dominio simplemente conexo y acotado con una frontera $\partial\Omega$ Lipschitz-continua. Consideramos una descomposición simple de Ω en dos subdominios Ω_1 y Ω_2 que no se solapan. Sean $\Gamma = \partial\Omega_1 \cap \partial\Omega_2$, $\Gamma_i = \partial\Omega_i \cap \partial\Omega$, $i = 1, 2$, fronteras que suponemos que todas son dominios $(d-1)$ -dimensionales Lipschitz-continuos, con medida $(d-1)$ -dimensional positiva. Denotamos por \mathbf{n}_{ij} el vector normal exterior a Γ que apunta desde Ω_i hacia Ω_j y sea $\mathbf{n} = \mathbf{n}_{12}$.

Consideramos además los espacios de Sobolev

$$X_i = H^1(\Omega_i; \Gamma_i) = \{v \in H^1(\Omega_i) \text{ tal que } v|_{\Gamma_i} = 0\}, \quad i = 1, 2; \quad \mathbf{X} = X_1 \times X_2.$$

Para $\mathbf{u} = (u_1, u_2), \mathbf{v} = (v_1, v_2) \in \mathbf{X}$ definimos el producto escalar y la norma sobre \mathbf{X}

$$((\mathbf{u}, \mathbf{v}))_X = \sum_{i=1}^2 (\nabla u_i, \nabla v_i)_{\Omega_i}, \quad \|\mathbf{u}\|_X^2 = ((\mathbf{u}, \mathbf{u}))_X,$$

Consideramos el problema de Poisson en Ω con condiciones de contorno homogéneas: Dada $f \in L^2(\Omega)$, hallar $u \in H_0^1(\Omega)$ tal que

$$(\nabla u, \nabla v)_\Omega = (f, v)_\Omega, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega) \quad (1)$$

Para introducir la nueva versión del método estudiado por T. Chacón y E. Chacón en [6], recordemos que $H_{00}^{1/2}(\Gamma)$ es el subespacio de funciones de $H^{1/2}(\Gamma)$ cuya extensión por cero a, por ejemplo, $\partial\Omega_1$ pertenece $H^{1/2}(\partial\Omega_1)$. Un producto escalar intrínseco en $H_{00}^{1/2}(\Gamma)$ viene definido por

$$\begin{aligned} [[w, v]]_\Gamma &= \int_\Gamma w(x) v(x) dx + \int_\Gamma \int_\Gamma \frac{(w(x) - w(y))(v(x) - v(y))}{|x - y|^d} dx dy \\ &+ \int_\Gamma \frac{w(x) v(x)}{d(x, \partial\Gamma)} dx, \end{aligned} \quad (2)$$

donde el primer usando es el producto escalar usual en $L^2(\Gamma)$ (Cf. [1]).

Por simplificar, denotamos también por $[[\cdot, \cdot]]_\Gamma$ el producto escalar $L^2(\Gamma)$, y estudiamos a la vez tanto la penalización $L^2(\Gamma)$ como la $H_{00}^{1/2}(\Gamma)$ utilizando la misma notación. Distinguiremos cada caso cuando sea preciso.

Introducimos entonces nuestro problema penalizado con penalización $H_{00}^{1/2}(\Gamma)$ ó $L^2(\Gamma)$, como

$$(P_\epsilon) \quad \begin{cases} \text{Hallar } \mathbf{u}^\epsilon \in \mathbf{X} \text{ tal que} \\ ((\mathbf{u}^\epsilon, \mathbf{v}))_X + \frac{1}{\epsilon} [[u_1^\epsilon - u_2^\epsilon, v_1 - v_2]]_\Gamma = \sum_{i=1}^2 (f, v_i)_{\Omega_i}, \text{ para todo } \mathbf{v} \in \mathbf{X}. \end{cases}$$

con ϵ un parámetro destinado a tender a cero. Este problema tiene una única para cada $\epsilon > 0$ debido al Lema de Lax-Milgram.

Observación 1 *El método original introducido en [6] consideraba sólo un término de penalización $L^2(\Gamma)$ para asegurar la continuidad de $\mathbf{u}^\epsilon = (u_1^\epsilon, u_2^\epsilon)$ a través de Γ . Nosotros aquí consideramos además un término de penalización $H_{00}^{1/2}(\Gamma)$ para garantizar la continuidad en un sentido más fuerte. En ambos casos, el método puede ser interpretado como la formulación variacional de un sistema acoplado de PDEs con la siguiente estructura*

$$\begin{cases} -\Delta u_1 = f & \text{en } \Omega_1, \\ u_1 = 0 & \text{sobre } \Gamma_1, \\ \partial_{\mathbf{n}_{12}} u_1 = \frac{1}{\epsilon} b(u_1 - u_2) & \text{sobre } \Gamma, \end{cases} \quad \begin{cases} -\Delta u_2 = f & \text{en } \Omega_2, \\ u_2 = 0 & \text{sobre } \Gamma_2, \\ \partial_{\mathbf{n}_{21}} u_2 = \frac{1}{\epsilon} b(u_2 - u_1) & \text{sobre } \Gamma, \end{cases}$$

donde b es un operador lineal, acotado e inyectivo definido sobre Γ , que se reduce a la identidad cuando se usa penalización $L^2(\Gamma)$. En consecuencia, el método asegura la continuidad de los flujos normales a través de Γ y fuerza por penalización la continuidad de \mathbf{u}^ϵ .

2. Discretización del problema penalizado

Para discretizar el problema (P_ϵ) , consideramos una familia regular de triangulaciones $\{\mathcal{T}_{ih}\}_{\{h>0\}}$ de cada $\bar{\Omega}_i$ tales que Γ sea la unión de caras o lados completos de elementos K en cada \mathcal{T}_{ih} . Sea $\mathcal{T}_h = \mathcal{T}_{1h} \cup \mathcal{T}_{2h}$.

Suponemos que los conjuntos de trazas de \mathcal{T}_{1h} y \mathcal{T}_{2h} sobre Γ son iguales a un mismo conjunto, que denotamos por \mathcal{E}_h^Γ . Entonces, $\{\mathcal{T}_h\}_{\{h>0\}}$ constituye una familia de triangulaciones regulares de Ω .

Ahora sobre las triangulaciones \mathcal{T}_{ih} construimos una familia de subespacios de elementos finitos X_{ih} de X_i ($i = 1, 2$). Sea $\mathbf{X}_h = X_{1h} \times X_{2h}$.

Entonces, nuestro **problema penalizado discretizado** es la aproximación por elementos finitos Galerkin estandar $\mathbf{u}_h^\epsilon = (u_{1h}^\epsilon, u_{2h}^\epsilon) \in \mathbf{X}_h$ de \mathbf{u}^ϵ , solución de

$$(P_{\epsilon,h}) \quad \begin{cases} \text{Hallar } \mathbf{u}_h^\epsilon \in \mathbf{X}_h \text{ tal que} \\ ((\mathbf{u}_h^\epsilon, \mathbf{v}_h))_\epsilon = F(\mathbf{v}_h) \text{ para todo } \mathbf{v}_h \in \mathbf{X}_h. \end{cases}$$

Este problema admite una única solución para cada $\epsilon > 0$.

Para resolver numéricamente $(P_{\epsilon,h})$, consideramos ahora la **técnica paralela** mediante aproximaciones sucesivas introducida en [6] siguiente:

Para $n = 0, 1, 2, \dots$, los términos $u_1^{n+1} = u_{1h}^{n+1,\epsilon} \in X_{1h}$ y $u_2^{n+1} = u_{2h}^{n+1,\epsilon} \in X_{2h}$ se computan a partir de u_{1h}^n y u_{2h}^n resolviendo (quitamos los índices ϵ y h por simplificar),

$$(P_{\epsilon,h}^n) \quad \begin{cases} (\nabla u_1^{n+1}, \nabla v_{1h})_{\Omega_1} + \frac{1}{\epsilon} [[u_1^{n+1} - u_2^n, v_{1h}]]_\Gamma = (f, v_{1h})_{\Omega_1}, \quad \forall v_{1h} \in X_{1h}, \\ (\nabla u_2^{n+1}, \nabla v_{2h})_{\Omega_2} + \frac{1}{\epsilon} [[u_2^{n+1} - u_1^n, v_{2h}]]_\Gamma = (f, v_{2h})_{\Omega_2}, \quad \forall v_{2h} \in X_{2h}. \end{cases} \quad (3)$$

Para el análisis que realizaremos en las secciones siguientes, supondremos que cada espacio de discretización X_{ih} contiene el espacio X_{ih}^* definido por

$$X_{ih}^* = \{w_h \in H^1(\Omega_i); w_{h|_K} \in P_{k_i}(K), \forall K \in \mathcal{T}_{ih}, w_{h|_{\Gamma_i}} = 0\}, \quad (4)$$

donde $P_{k_i}(K)$ denota el espacio de las restricciones a K de los polinomios con d variables y grado total $\leq k_i$ para k_i entero positivo.

Además asumiremos que su espacio de trazas sobre Γ es

$$W_{ih} = \{v_h \in H_0^1(\Gamma) : v_{h|_e} \in P_{k_i}(e), \forall e \in \mathcal{E}_h^\Gamma\}. \quad (5)$$

3. Análisis de error a posteriori

En esta sección realizamos un análisis de error a posteriori de ambos métodos, con el objetivo de estudiar la optimalidad tanto de un indicador del error de penalización como de un indicador del error de discretización, que definimos como sigue:

- Una familia de **indicadores locales del error de discretización**, es:

Para cada $i = 1, 2$ y $K \in \mathcal{T}_{ih}$,

$$\eta_i^K = h_K \|f_h + \Delta u_{ih}^\epsilon\|_{L^2(K)} + \sum_{e \in \mathcal{E}_K} h_e^{1/2} \|[\partial_{n_K} u_{ih}^\epsilon]\|_{L^2(e)},$$

donde

- h_K y h_e son el diámetro de K y e , respectivamente,
- n_K es el vector normal unitario exterior a ∂K , y
- $[\partial_{n_K} u_{ih}^\epsilon]$ es el salto de $\partial_{n_K} u_{ih}^\epsilon$ a través e si e no está incluido en Γ , y $\partial_{n_K} u_{1h}^\epsilon - \partial_{n_K} u_{2h}^\epsilon$ si e está incluido en Γ .
- \mathcal{E}_K es el conjunto de los lados ($d = 2$) o caras ($d = 3$) de K que no están contenidas en Γ .

Entonces, un **indicador del error de discretización** es la suma hilbertiana de los η_i^K :

$$\eta_h^D = \left(\sum_{i=1}^2 \sum_{K \in \mathcal{T}_{ih}} (\eta_i^K)^2 \right)^{1/2}.$$

- Un **indicador del error de penalización**, es:

$$\eta_h^P = \|u_{1h}^\epsilon - u_{2h}^\epsilon\|_{H_{00}^{1/2}(\Gamma)}.$$

Para analizar la optimalidad de ambos indicadores de error, consideramos el error de penalización E_ϵ y el error de discretización E_h , definidos respectivamente por

$$E_\epsilon = \sum_{i=1}^2 |u - u_i^\epsilon|_{1, \Omega_i}, \quad E_h = \sum_{i=1}^2 |u_i^\epsilon - u_{ih}^\epsilon|_{1, \Omega_i}.$$

Entonces, en primer lugar, establecemos las siguientes acotaciones:

Teorema 1 *Los indicadores de error η_h^P y η_h^D , verifican las siguientes estimaciones*

$$\eta_h^D \leq C \left\{ E_h + \left(\sum_{i=1}^2 \sum_{K \in \mathcal{T}_{ih}} h_K^2 \|f - f_h\|_{L^2(K)}^2 \right)^{1/2} \right\}, \quad (6)$$

$$\eta_h^P \leq C' \sum_{i=1}^2 |u - u_{ih}^\epsilon|_{1, \Omega_i} \leq C'(E_h + E_\epsilon), \quad (7)$$

para ciertas constantes $C > 0$ y $C' > 0$ que son independientes de ϵ y h .

La demostración puede verse en [2].

Nuestro resultado principal de estimación de error a posteriori, que prueba la cuasi optimalidad de ambos indicadores, es el siguiente:

Teorema 2 *Supongamos que los espacios de trazas W_{1h} y W_{2h} definidos en (5) coinciden. Entonces, la solución del problema penalizado discreto $(P_{h,\epsilon})$ satisface la siguiente estimación de error a posteriori*

$$\sum_{i=1}^2 |u - u_{ih}^\epsilon|_{1, \Omega_i} \leq C \left\{ \eta_h^P + \left(\sum_{i=1}^2 \sum_{K \in \mathcal{T}_{ih}} (\mu_K \eta_i^K)^2 + h_K^2 \|f - f_h\|_{L^2(K)}^2 \right)^{1/2} \right\},$$

con $\mu_K = \begin{cases} (1 + \lambda_h) & \text{si } K \cap \Gamma \neq \emptyset, \\ 1 & \text{si } K \cap \Gamma = \emptyset. \end{cases}$, donde

i) En el caso de penalización $L^2(\Gamma)$ es,

$$\lambda_h = (h_M/h_m)^{1/2}, \quad \text{con } h_M = \max_{K \cap \Gamma \neq \emptyset} h_K, \quad h_m = \min_{K \cap \Gamma \neq \emptyset} h_K;$$

ii) En el caso de penalización $H_{00}^{1/2}(\Gamma)$ es,

$$\lambda_h = (h_M/h_m + h_m^{-1})^{1/2}.$$

La demostración también puede verse en [2].

Observación 2

- Los teoremas (1) y (2) prueban la cuasi optimalidad de nuestros indicadores de error. La optimalidad se tendría si $\mu_K = 1$, pero no la hemos podido probar por dificultades técnicas.
- En el caso de penalización $H_{00}^{1/2}(\Gamma)$, hay además una pérdida de optimalidad de $h_m^{-1/2}$. No obstante, esta pérdida se limita también a los elementos, lados o caras que intersectan a la interface Γ .

4. Experimentos numéricos

Para analizar el rendimiento práctico de nuestros métodos, hemos realizado varios ensayos numéricos para el problema de Poisson como problema modelo, en dimensión $d = 2$. Estos ensayos han sido desarrollados sobre el código de elementos finitos FreeFEM++, usando elementos finitos \mathbb{P}_1 -Lagrange.

Cada experimento numérico ha sido validado en el caso del dominio Ω la L-shape $]0, 1[^2 \setminus]1/2, 1[^2$, descompuesto en dos subdominios, con interface Γ su intersección con la recta $y = x$. Además, hemos considerado un problema de Poisson con condiciones de contorno homogéneas con solución analítica conocida, definido sobre la L-shape.

Finalmente, debido a la dificultad para computar el producto escalar $H_{00}^{1/2}(\Gamma)$ definido en (2), en los experimentos numéricos hemos utilizado un producto escalar que lo discretiza, construido usando fórmulas de cuadratura (Cf. [4]).

4.1. Mejora de la tasa de convergencia:

Observación 3 Cuando usamos penalización $H_{00}^{1/2}(\Gamma)$, es necesario un número de iteraciones de orden $\mathcal{O}(|\log h| h^{-k})$ para obtener un error $\mathcal{O}(h^k)$. Por contra, en [6] se demuestra que si se usa penalización $L^2(\Gamma)$ son necesarias del orden de $\mathcal{O}(|\log h| h^{-2k})$ iteraciones para obtener un error del mismo orden (Cf. [2]).

Para verificar esta mejora, hemos tenido en cuenta que, según los resultados teóricos, mientras que en el caso de penalización $H_{00}^{1/2}(\Gamma)$ la estimación de orden óptimo corresponde a $\epsilon = \mathcal{O}(h^k)$, en el caso $L^2(\Gamma)$ este orden corresponde a $\epsilon = \mathcal{O}(h^{2k})$. Entonces, hemos

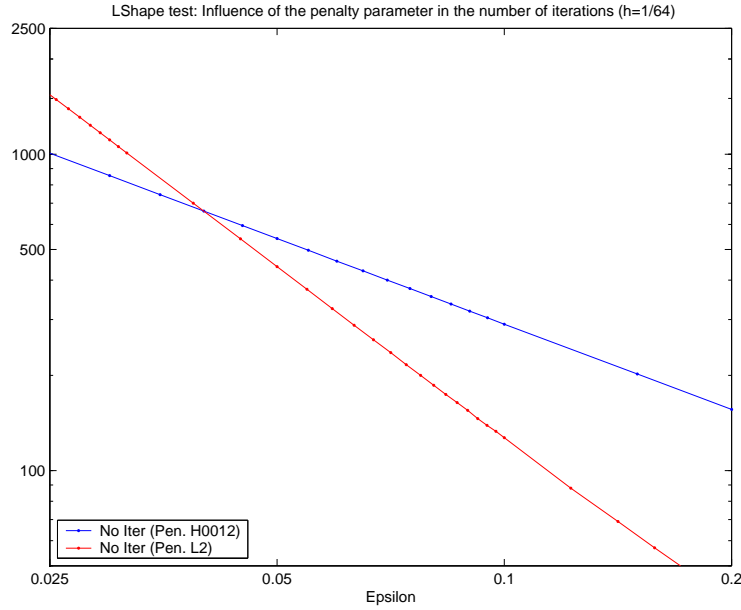


Figura 1: Influencia del parámetro de penalización sobre el número de iteraciones.

considerado una malla fija uniforme y hemos hecho varios ensayos variando el parámetro de penalización entre $\epsilon = 0,2$ y $\epsilon = 0,025$ en el caso $H_{00}^{1/2}(\Gamma)$, y entre $\epsilon = 0,2^2$ y $\epsilon = 0,025^2$ en el caso $L^2(\Gamma)$. Hemos calculado para cada ensayo el número de iteraciones necesarias para obtener el error relativo entre la solución exacta y la obtenida por nuestro código en seminorma $H^1(\Omega)$. Dibujamos, en el eje de abcisas, los valores de ϵ para el caso $H_{00}^{1/2}(\Gamma)$, y los de $\sqrt{\epsilon}$ en el caso $L^2(\Gamma)$.

La figura 1 muestra el test para $h = 1/64$. Observamos que para valores de ϵ menores que un valor $\epsilon_0 \simeq 0,04$, el número de iteraciones necesarias para alcanzar un determinado error es notablemente inferior cuando se usa penalización $H_{00}^{1/2}(\Gamma)$ (línea azul) que cuando se usa penalización $L^2(\Gamma)$ (línea roja). Resultados similares se obtienen para mallas de otras tallas h .

4.2. Eficiencia de los indicadores de error:

Para ello comparamos los indicadores de error η_h^P y η_h^D , con los errores

$$\sum_{i=1}^2 |\mathcal{I}_h u - u_{ih}^\epsilon|_{H^1(\Omega_i)} \quad \text{y} \quad \sum_{i=1}^2 \|\mathcal{I}_h u - u_{ih}^\epsilon\|_{L^2(\Omega_i)},$$

siendo $\mathcal{I}_h u$ el interpolado \mathbb{P}_1 -Lagrange de la solución exacta u .

Por un lado, para verificar la eficiencia del indicador del error de penalización, hemos realizado varios tests manteniendo fija la malla y haciendo variar el parámetro de penalización entre $\epsilon = 0,005$ y $\epsilon = 15$.

La figura 2 muestra el test para $h = 1/64$, en el caso de penalización $H_{00}^{1/2}(\Gamma)$. Observamos que el indicador de error η_h^P (trazo rojo continuo) decrece con ϵ hasta que el error

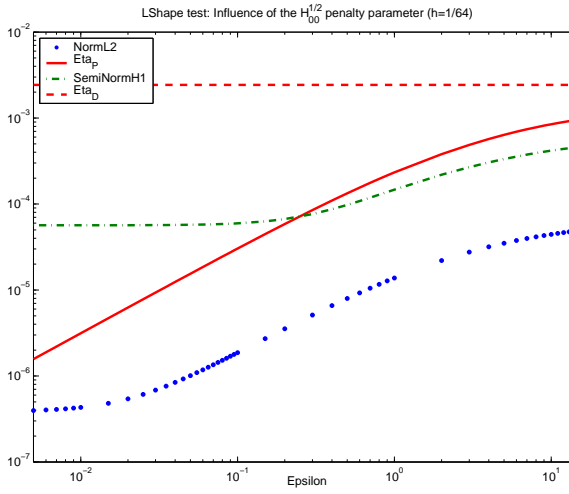


Figura 2: Eficiencia del indicador del error de penalización.

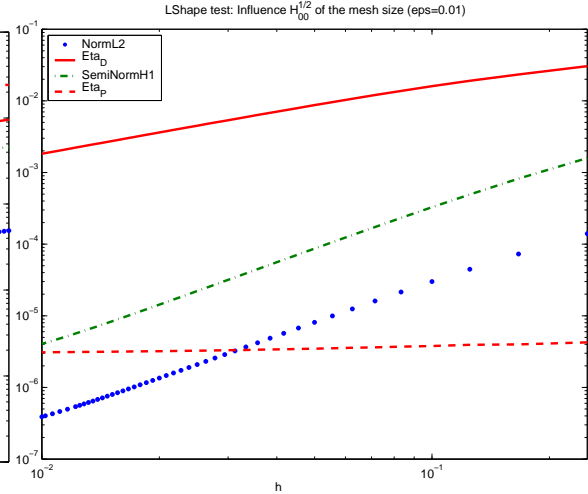


Figura 3: Eficiencia del indicador del error de discretización.

debido a la penalización es comparable con el error debido a la discretización. Hasta este valor, las curvas correspondientes a este indicador y a los errores (trazo verde seminorma H^1 y trazo azul norma L^2) son paralelas. Por contra, el indicador del error de discretización η_h^D (trazo rojo discontinuo) se mantiene prácticamente constante y totalmente independiente de ϵ .

Por otro lado, para comprobar la eficiencia del indicador del error de discretización, cuando se usa cada tipo de penalización, hemos fijado el valor del parámetro de penalización ϵ y hemos hecho variar la talla de la malla entre $h = 0,02$ y $h = 0,5$, para mallas cuasi uniformes.

La figura 3 muestra el test para $\epsilon = 0,01$ en el caso de penalización $H_{00}^{1/2}(\Gamma)$. Observamos el mismo comportamiento cualitativo que en la figura (2), intercambiando los papeles de η_h^D y η_h^P .

Los resultados obtenidos en el caso de penalización $L^2(\Gamma)$ son cualitativamente similares.

4.3. Optimización del parámetro de penalización con respecto a la adaptatividad de la malla:

Con el objetivo de equilibrar los errores provenientes de discretización y de penalización, consideramos la siguiente estrategia computacional, que fue propuesta por C. Bernardi et al. en [3] y consta de tres etapas. Primero elegimos una tolerancia η^* , hacemos una primera computación sobre una malla cuasi uniforme y computamos η_h^P .

Etapas 1 Inicialización: Si $\eta_h^P \leq \eta^*$ entonces vamos a la Etapa 2. Si NO dividimos ϵ por el cociente η_h^P / η^* y realizamos un nuevo cálculo.

Etapas 2 Adaptación de malla: Computamos los η_i^K y su valor medio $\bar{\eta}_h^D$. Entonces, para cada K tal que η_i^K es mayor que $\bar{\eta}_h^D$, dividimos K en triángulos (o tetraedros en

dimension $d = 3$) más pequeños, de modo que el diámetro de estos nuevos elementos se comporta como h_K multiplicado por el cociente $\bar{\eta}_h^D/\eta_i^K$.

Etapa 3 Penalización: Calculamos η_h^P y η_h^D . Si $\eta_h^P \leq \eta_h^D$ entonces volvemos a la Etapa 2. Si NO dividimos ϵ por un número constante de veces el cociente η_h^P/η_h^D y volvemos a la etapa 2.

Hemos desarrollado varios test numéricos, en las que dado un error prefijado, usando esta estrategia, siempre conseguimos alcanzar este error, para un valor óptimo del parámetro de penalización y una malla final adaptada. Observamos que, mediante esta estrategia, el tiempo de cálculo necesario para alcanzar este error se reduce drásticamente con respecto al tiempo de cálculo que necesitaríamos, si realizáramos el cálculo partiendo de la malla final, del valor óptimo de ϵ y de una solución inicial $u_h^{0,\epsilon} = 0$.

En concreto, para alcanzar un error relativo de 0.003 entre la solución exacta y la obtenida por nuestro código en seminorma $H^1(\Omega)$, el tiempo de cálculo se divide aproximadamente por 4.

Observación 4 *No obstante, el tiempo de cálculo necesario para obtener un determinado error, es netamente mayor en el caso de usar penalización $H_{00}^{1/2}(\Gamma)$ que cuando usamos penalización $L^2(\Gamma)$. Posiblemente, esto es debido al uso de FreeFEM++ que no permite adaptar la programación. Esto conduce a que, en especial, empleemos mucho tiempo de cálculo al calcular las normas $H_{00}^{1/2}(\Gamma)$ si la malla está muy adaptada.*

Aunque la figura 1 muestra un comportamiento asintótico mejor para el caso de penalización $H_{00}^{1/2}(\Gamma)$, en cuanto al número de iteraciones, los resultados anteriores indican que esta mejora sólo se va a traducir en una ganancia en tiempo de cálculo para valores muy pequeños de h y ϵ .

Agradecimientos

Este trabajo ha sido financiado por el Ministerio de Educación y Ciencia, en el marco del proyecto MTM2006-01275 del Programa Nacional de Matemáticas del Plan Nacional de I+D+I (2004-2007).

Referencias

- [1] Adams, R. A., *Sobolev Spaces*. Pure and Applied Mathematics, Vol. 65. Academic Press, New York-London, 1975.
- [2] Bernardi, C., Chacón Rebollo, T., Chacón Vera, E., Franco Coronil, D., *A non-overlapping domain-decomposition method motivated by a posteriori error analysis*. Sometido a Math. Models and Methods in Applied Sciences.
- [3] Bernardi, C., Girault, V., Hecht, F., *A posteriori analysis of a penalty method and application to the Stokes problem*. Math. Models and Methods in Applied Sciences, 13 (2003), 1599-1628.
- [4] Casas, E., Raymond, J.-P., *The stability in $W^{s,p}(\Gamma)$ spaces of L^2 -projections on some convex sets*. Numer. Funct. Anal. and Optimization, 27 (2006), 117-137.
- [5] Chacón Rebollo, T., Chacón Vera, E., *A non-overlapping domain decomposition method for the Stokes equations via a penalty term on the interface*. C.R. Acad. Sci. Paris, t. 334, Série I (2002), 1–16.
- [6] Chacón Rebollo, T., Chacón Vera, E., *Study of a non-overlapping domain decomposition method: Poisson and Stokes problems*. Appl. Numer. Math., 48 (2004), 169–194.