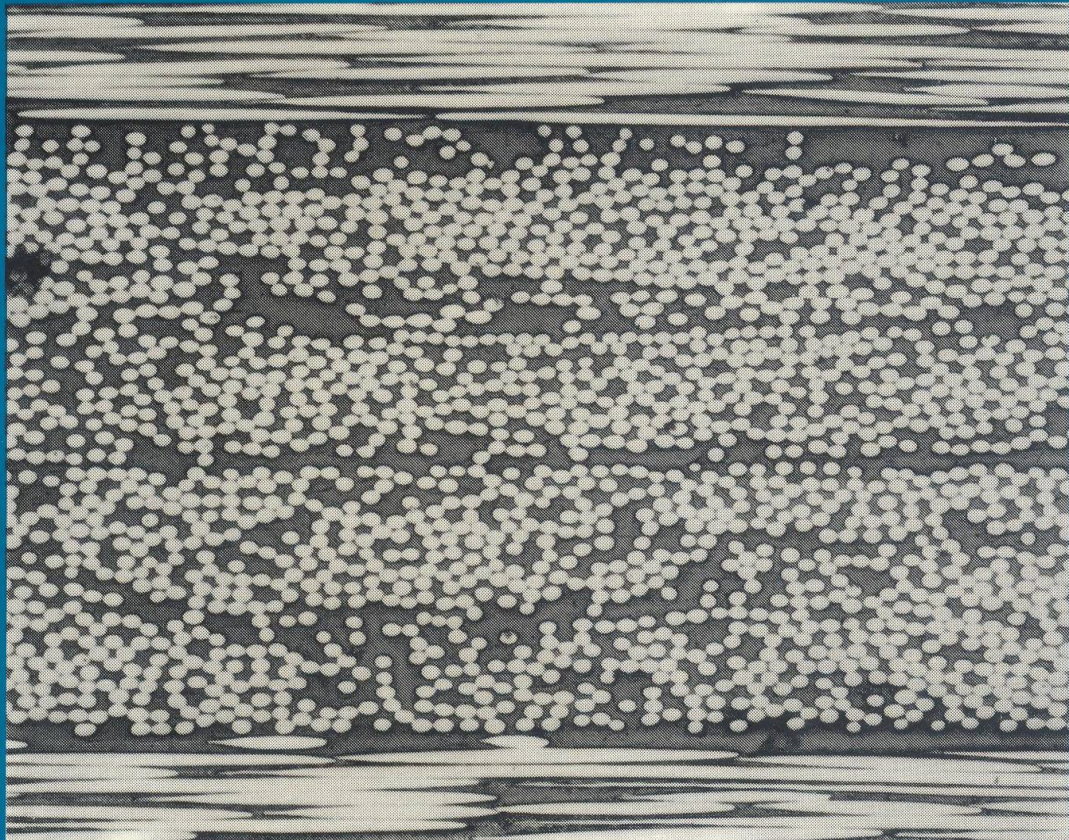


AEMAC

ASOCIACIÓN ESPAÑOLA DE MATERIALES COMPUESTOS

MATERIALES COMPUESTOS 95



**Editores: F. París
J. Cañas**

PREDICCIÓN EN TEORÍA DE 2º ORDEN DE LA CARGA ÚLTIMA DE ESTRUCTURAS DE BARRAS DE MATERIALES COMPUESTOS

Sánchez Jiménez F.J., Cañas Delgado J., París Carballo F.

Dpto. Mecánica de Medios Continuos. E.T.S. Ingenieros Industriales de Sevilla.
Avda. Reina Mercedes s/n. 41012 Sevilla. Tfno: 95-4557001. Fax: 95-4239888

Resumen: El principal objetivo de este trabajo es realizar un análisis del comportamiento de estructuras de barras de materiales compuestos incluyendo efectos de segundo orden y modelos de fallo progresivo de láminas. Por otro lado, se ha diseñado y construido una máquina de ensayos para realizar pruebas con diferentes vigas de material grafito/epoxi. Se han ensayado probetas con secuencias de apilado $[0]_8$, $[(0/90)_2]_8$ y $[45/0/-45/90]_8$. Usando estos ensayos podremos comprobar la validez de la teoría de 2º orden desarrollada para barras de laminado y los modelos de fallo progresivo propuestos.

Abstract: The main purpose of this work is to carry out an analysis about the behaviour of laminate composite beams including second order effects and progressive failure of plies. On the other hand, a test device has been designed and built to make tests with different graphite/epoxy composite beams. Specimens with stacking sequence $[0]_8$, $[(0/90)_2]_8$ and $[45/0/-45/90]_8$ have been tested. The validity of the second order theory development for laminated bars and the failure progression models proposed can be then verified by using these tests.

1. INTRODUCCIÓN.

El análisis de estructuras de barras de materiales compuestos puede realizarse partiendo de la teoría general de laminados y aplicando algunas hipótesis propias de estos elementos estructurales.

Con el fin de obtener la matriz de rigidez de una barra de material compuesto, vamos a plantear y combinar las ecuaciones de campo que gobiernan el comportamiento de estos elementos, equilibrio, compatibilidad y comportamiento. Usando esta matriz de rigidez y discretizando la viga en elementos barra vamos a aplicar un cálculo matricial para obtener la relación $\underline{F} = \underline{K} \underline{u}$ y, de su solución, los desplazamientos, esfuerzos internos y tensiones en los extremos de cada barra.

La teoría elemental de la Elasticidad nos enseña que los desplazamientos son proporcionales a las cargas aplicadas. Sin embargo, cuando estos desplazamientos son grandes comparados con las dimensiones de la viga, y se aplican cargas longitudinales y transversales, las tensiones y deformaciones no son lineales con las cargas y sus valores dependen de los desplazamientos producidos, debido a la aparición de efectos de segundo orden. Para tener en cuenta los efectos de segundo orden que aparecen en estas condiciones

especiales, la ecuación de equilibrio ha de ser planteada sobre la situación deformada, obteniendo una matriz de rigidez que depende de los desplazamientos.

Tras predecir el comportamiento de estas estructuras de laminado y determinar el estado de tensiones provocado por las cargas aplicadas, nos proponemos estudiar la progresión del daño producido hasta alcanzar el fallo total de la estructura. Propondremos varios criterios de fallo y modelos de progresión del daño desde que la carga aplicada supera la rotura de la primera lámina (RPL) hasta que ocurre la rotura de la última lámina (RUL).

2.- ECUACIONES DE EQUILIBRIO.

Con el fin de simplificar los cálculos, se va a considerar un estado de carga formado únicamente por cargas puntuales aplicadas en los extremos de las barras. En Teoría de Segundo Orden se plantean las ecuaciones de equilibrio sobre la situación deformada (fig. 1) considerándose el momento de segundo orden creado por el axil.

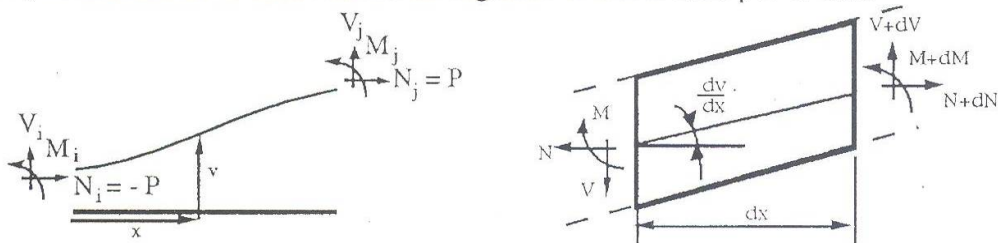


Figura 1.- Equilibrio sobre la barra deformada.

Para un trozo diferencial de barra (fig. 1), las ecuaciones de equilibrio serán las siguientes: $\Sigma F_x = 0 \Rightarrow \frac{dN}{dx} = 0$; $\Sigma F_y = 0 \Rightarrow \frac{dV}{dx} = 0$; $\Sigma M = 0 \Rightarrow \frac{dM}{dx} + V - N \frac{dv}{dx} = 0$

3.- MATRIZ DE RIGIDEZ.

Combinando las ecuaciones de equilibrio obtenidas anteriormente con las ecuaciones de compatibilidad y comportamiento (Sánchez, 1993), se pueden expresar los esfuerzos internos en función de los desplazamientos en los extremos de la barra, de la forma $\underline{F} = \underline{K} \underline{u}$, donde la matriz de rigidez depende de la carga aplicada, $\underline{K} = \underline{K}(P)$, y tiene la siguiente expresión:

$$\begin{bmatrix} \frac{A_{11}}{L} & 0 & -\frac{B_{11}}{L} & -\frac{A_{11}}{L} & 0 & \frac{B_{11}}{L} \\ 0 & -\frac{12\Delta}{A_{11}L^3} \phi_1 & -\frac{6\Delta}{A_{11}L^2} \phi_2 & 0 & \frac{12\Delta}{A_{11}L^3} \phi_1 & -\frac{6\Delta}{A_{11}L^2} \phi_2 \\ -\frac{B_{11}}{L} & -\frac{6\Delta}{A_{11}L^2} \phi_2 & -\frac{B_{11}^2}{A_{11}L} - \frac{4\Delta}{A_{11}L} \phi_3 & \frac{B_{11}}{L} & \frac{6\Delta}{A_{11}L^2} \phi_2 & -\frac{B_{11}^2}{A_{11}L} - \frac{2\Delta}{A_{11}L} \phi_4 \\ -\frac{A_{11}}{L} & 0 & \frac{B_{11}}{L} & \frac{A_{11}}{L} & 0 & -\frac{B_{11}}{L} \\ 0 & \frac{12\Delta}{A_{11}L^3} \phi_1 & \frac{6\Delta}{A_{11}L^2} \phi_2 & 0 & -\frac{12\Delta}{A_{11}L^3} \phi_1 & \frac{6\Delta}{A_{11}L^2} \phi_2 \\ \frac{B_{11}}{L} & -\frac{6\Delta}{A_{11}L^2} \phi_2 & -\frac{B_{11}^2}{A_{11}L} - \frac{2\Delta}{A_{11}L} \phi_4 & -\frac{B_{11}}{L} & \frac{6\Delta}{A_{11}L^2} \phi_2 & \frac{B_{11}^2}{A_{11}L} - \frac{4\Delta}{A_{11}L} \phi_3 \end{bmatrix}$$

donde las funciones ϕ_i , llamadas coeficientes de estabilidad, dependen de los desplazamientos (Sánchez, 1993). Así, por ejemplo:

$$\phi_1 = -\frac{\gamma^3 \coth \gamma}{3(1 - \gamma \coth \gamma)} ; \text{ donde: } \gamma = \frac{kL}{2} ; k^2 = \frac{PA_{11}}{\Delta} ; \Delta = B_{11}^2 - A_{11} D_{11}$$

Cuando no existen esfuerzos longitudinales, $P=0$ y los coeficientes de estabilidad toman el valor unidad, obteniéndose una matriz de rigidez en primer orden. Una vez obtenida la matriz de rigidez de la barra elemental se puede generar un cálculo matricial de la estructura global.

4.- RESISTENCIA ÚLTIMA DEL LAMINADO.

4.1.- Criterio de fallo de una lámina.

Para predecir la rotura de una lámina necesitamos definir un criterio que relacione el estado actual de tensiones con uno permitido. Este estado permitido representa a la vez el fin del comportamiento elástico lineal y la rotura. Los criterios utilizados más frecuentemente corresponden a ampliaciones de criterios similares usados para materiales isótropos. En este trabajo (Sánchez, 1993) se han analizado cuatro criterios de rotura correspondientes a láminas unidireccionales: Teoría de la máxima tensión, Teoría de la máxima deformación, Criterio de Tsai-Hill y Criterio de Tsai-Wu. Los resultados que se discutirán posteriormente han sido obtenidos utilizando la teoría de máxima tensión obteniéndose, para los casos analizados, resultados similares con el resto de los criterios.

4.2.- Modelos de progresión del daño.

Realizando un análisis de tensiones capa a capa y usando un criterio de rotura, puede obtenerse la rotura de la primera lámina (RPL). Ahora bien, si las cargas aplicadas sobrepasan el umbral RPL, el laminado podrá o no soportar la carga adicional ya que, aunque una lámina falle, puede seguir aportando algo de resistencia al conjunto y, de cualquier modo, las láminas restantes siguen resistiendo. Pretendemos analizar el proceso post-RPL de cada lámina hasta que no quede ninguna resistiendo y se alcanza el fallo total del laminado o rotura de la última lámina (RUL).

Para ello, será necesario proponer una serie de modelos de daño del laminado. Dichos modelos para compuestos laminados de fibras continuas tratan cada lámina compuesta (fibra y matriz) como un único material homogéneo con un tipo de comportamiento antes de alcanzar el umbral de fallo y con otro comportamiento distinto después de dicho límite.

El uso de un modelo de daño consiste en la ampliación de la teoría general de laminados a la rotura final de la estructura. Es decir, tras realizar un modelado del daño (disminución de propiedades en la lámina que falló causado por el fallo de alguna lámina, se puede volver a analizar la estructura degradada y realizar un nuevo análisis convencional de tensiones. Con este nuevo estado de tensiones se puede aplicar nuevamente el criterio de fallo y predecir la siguiente lámina de la estructura que alcanzará el fallo, continuando así hasta alcanzar el fallo total (RUL). Con este fin se han propuesto y analizado cinco modelos de daño diferentes:

- 1) Modelo de eliminación de láminas
- 2) Modelo de degradación de la matriz
- 3) Modelo de degradaciones parciales sucesivas
- 4) Modelo de degradación y eliminación

5) Modelo de degradación de matriz y fibras

Para corroborar los diferentes modelos propuestos se ha analizado una serie de ensayos simples cuyos resultados son analizados en el apartado siguiente. La propuesta de los distintos modelos se ha realizado basándose, fundamentalmente, en la comparación de los resultados experimentales con los resultados teóricos que se generaban al aplicar cada modelo. Así, tras analizar los dos primeros modelos (1 y 2), enunciados por Tsai (Tsai, 1988), hemos propuesto en este trabajo (Sánchez, 1993) los tres últimos, con los que se pretende solventar las deficiencias encontradas en los anteriores. Es con el *modelo de degradación de matriz y fibras* con el que mejores resultados se han obtenido para los ensayos realizados.

4.3.- Modelo de degradación de matriz y fibras.

En principio, podemos cargar y descargar nuestra estructura sin que experimente efectos irreversibles siempre que no sobrepase el umbral RPL. En el punto RPL, el fallo más probable consiste en la aparición de fisuras en dirección paralela a las fibras propagándose en el interior de la matriz y en la interfase fibra matriz. La aparición de fisuras con este primer fallo de una lámina cambiará la distribución de tensiones internas y disminuirá la rigidez real del laminado.

El *modelo de degradación de matriz y fibras* propone reemplazar las láminas con fisuras por un continuo con menor rigidez de la matriz, es decir, produce una disminución de las propiedades que vienen gobernadas fundamentalmente por la matriz (E_{22} , G_{12} y ν_{21}). Ahora bien, cuando se produce el segundo fallo, este no solo afecta a la matriz sino que también se produce un deterioro de las propiedades de las fibras. Dicho daño en las fibras puede considerarse como una reducción del módulo de Young longitudinal E_{11} y del módulo de Poisson ν_{12} . De esta forma se originaría un nuevo laminado en el que una lámina que ha fallado n veces tiene las siguientes propiedades:

$$E_{22} = R^n E_{22}^0 ; \quad G_{12} = R^n G_{12}^0 ; \quad \nu_{21} = R^n \nu_{21}^0 ; \quad E_{11} = R^{n-1} E_{11}^0 ; \quad \nu_{12} = R^{n-1} \nu_{12}^0$$

donde R es el factor de degradación ($0 < R < 1$) El fallo último del laminado, para este modelo, se producirá cuando, tras haber fallado todas las láminas de una barra, se produce un nuevo fallo de alguna de ellas.

5.- ANÁLISIS EXPERIMENTAL.

Por otro lado, con el propósito de verificar este modelo en Teoría de Segundo Orden, se ha diseñado y construido un dispositivo de ensayos como el que muestra la figura 2 y se han realizado tres tipos de ensayos diferentes. Se han utilizado probetas de un material grafito/epoxy fabricados por HTC (High Technology Composites) de denominación AS-4/3501-6 con las siguientes secuencias de apilado: $[0]_8$, $[(0/90)_2]_8$ Y $[45/0/-45/90_2]_8$. Las propiedades de rigidez y resistencia fueron obtenidas experimentalmente a partir de laminados unidireccionales.

Al realizar los ensayos (a) y (b) de la figura 2, se observan grandes diferencias en el ensayo (b) con los resultados teóricos esperados utilizando teoría de primer orden. En la figura 3a. se observan estas discrepancias para la secuencia de apilado $[0]_8$, mayores a medida que aumenta la flecha de la viga. Se aprecia, en los resultados experimentales, un comportamiento no lineal incluso con cargas por debajo de la rotura de la primera lámina. En las otras dos secuencias de apilado ensayadas, así como en el ensayo de flexión en dos puntos (fig. 2, c), se obtienen resultados cualitativamente similares.

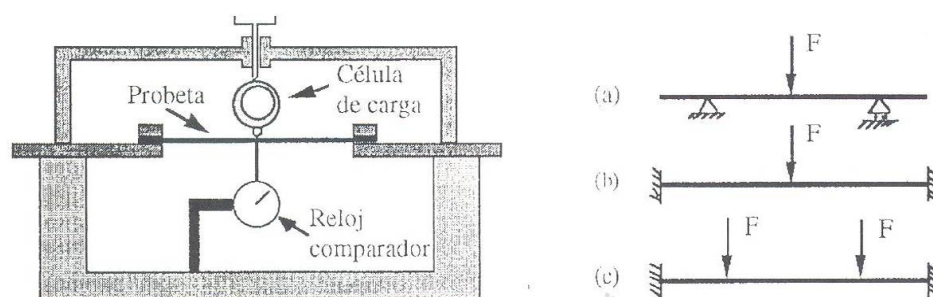


Figura 2.- Ensayos realizados.

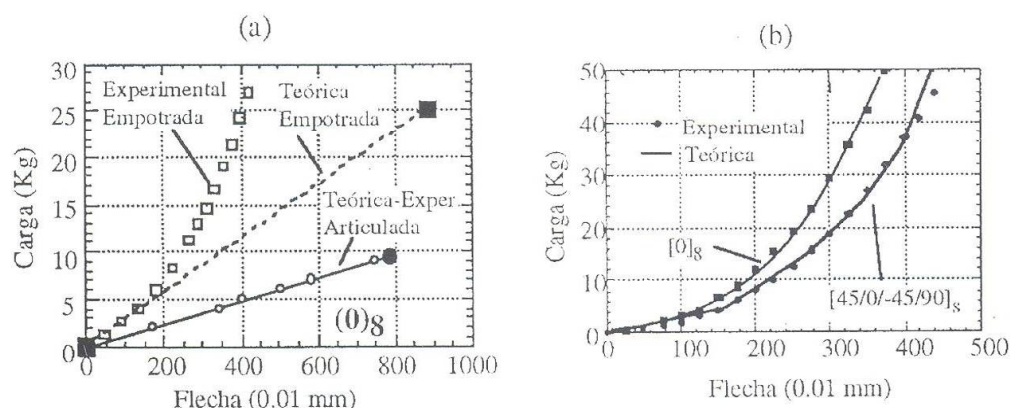


Figura 3.- Ensayos de flexión. a) En Teoría de Primer Orden, b) En Teoría de 2° Orden.

A la vista de estos resultados, podría pensarse que al obtenerse una flecha considerable y tener restringido el desplazamiento longitudinal de los extremos de la viga en los empotramientos, aparece una fuerza de tracción o atirantamiento que tiende a enderezar la viga, por lo que se obtienen desplazamientos menores que los esperados teóricamente. Esta fuerza, cuyo valor dependerá de los desplazamientos producidos afectará al equilibrio de la viga, introduciendo efectos de segundo orden. En los ensayos con viga biarticulada (fig. 2, a) no tiene lugar este efecto ya que no se impiden los desplazamientos de los extremos y, por tanto, no aparece dicho empuje. Realizando un estudio teórico del ensayo de flexión en viga biempotrada utilizando la Teoría de Segundo Orden desarrollada en los apartados anteriores, se obtiene una evolución del comportamiento coincidente con los resultados experimentales según se observa en la figura. 3b.

Una vez comprobada la validez de la Teoría de Segundo Orden desarrollada, se ha procedido a analizar los diferentes modelos de progresión del daño propuestos. Al comparar los resultados experimentales con los obtenidos teóricamente haciendo uso de los distintos modelos se obtiene una mayor semejanza con el *modelo de degradación de matriz y fibras*, como puede apreciarse en las gráficas de las figuras 4, 5 y 6.

Como puede observarse, para los tres tipos de laminados se obtiene una muy buena aproximación del valor de la rotura última, utilizando un factor de degradación $R = 0,5$. También se obtiene una gran aproximación en la evolución de la flecha con la carga. En trabajos posteriores se realizará un estudio más profundo de la influencia del material utilizado y el ensayo realizado en el factor de degradación R , así como la posibilidad de utilizar un factor de degradación diferente para las fibras y para la matriz.

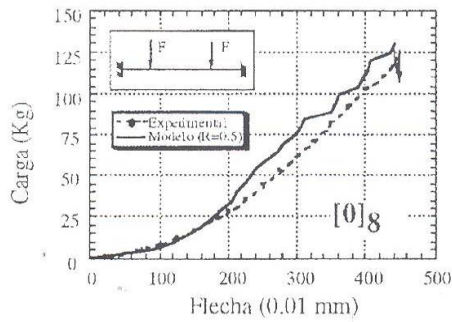
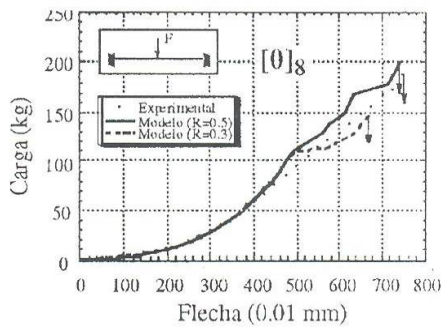


Figura 4.- Resultados experimentales y teóricos en la secuencia $[0]_8$.

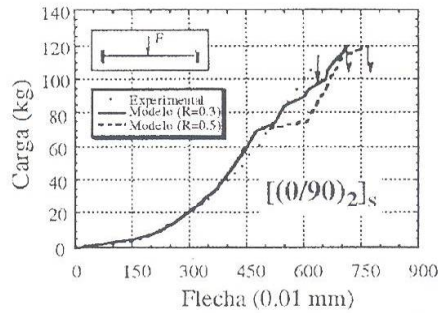
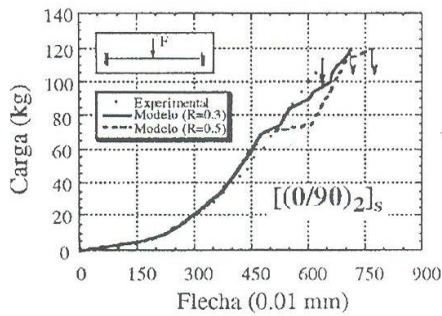


Figura 5.- Resultados experimentales y teóricos en la secuencia $[(0/90)_2]_s$.

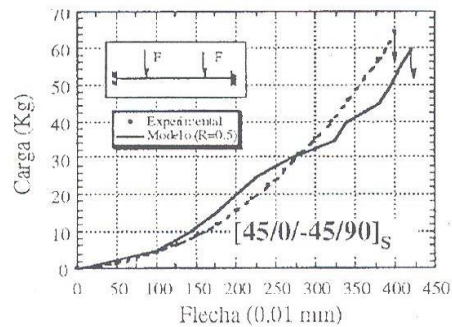
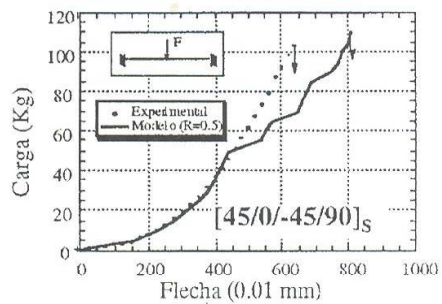


Figura 6.- Resultados experimentales y teóricos en la secuencia $[45/0/-45/90]_s$.

6.- CONCLUSIONES.

Observando los resultados obtenidos en los casos ensayados, el análisis desarrollado en este trabajo puede ser usado para predecir el comportamiento de estructuras de vigas de material compuesto incluyendo efectos de segundo orden hasta alcanzar el primer fallo de una de sus láminas (RPL). Por otro lado, el modelo de fallo progresivo propuesto puede usarse para predecir el comportamiento post-RPL y la carga de fallo último de vigas de material compuesto.

7.- REFERENCIAS.

- 1.- París F., Cañas J., *Introducción al análisis y diseño con materiales compuestos*. E.T.S.I.I. de Sevilla, 1991.
- 2.- Sánchez J., *Modelado del daño en estructuras porticadas de material compuesto*. E.T.S.I.I. de Sevilla, 1993.
- 3.- Tsai S.W., *Composites Design*. Think Composites, 1988.
- 4.- Vinson J. R., Sierakowski. R. L., *The Behavior of Structures Composed of Composite Materials*. Martinus Nijhoff Publishers, 1986.
- 5.- Whitney J. M., *Structural Analysis of Laminated Anisotropic Plates*. Technomic Publishing Company, 1987.