

# Trabajo Fin de Grado

## Grado Ingeniería Aeroespacial

Análisis lineal de la estabilidad de láminas de material compuesto mediante el M.E.F.

Autor: Carlos Ibiza Granados

Tutor: Luis Rodríguez de Tembleque Solano

**Dep. Mecánica de Medios Continuos y Teoría de Estructuras**

**Escuela Técnica Superior de Ingeniería**

Sevilla, 2015





Trabajo Fin de Grado  
Grado Ingeniería Aeroespacial

# **Análisis lineal de la estabilidad de láminas de material compuesto mediante el M.E.F.**

Autor:

Carlos Ibiza Granados

Tutor:

Luis Rodríguez de Tembleque Solano

Profesor Contratado Doctor

Dep. Mecánica de Medios Continuos y Teoría de Estructuras

Escuela Técnica Superior de Ingeniería

Universidad de Sevilla

Sevilla, 2015



Trabajo Fin de Grado: **Análisis lineal de la estabilidad de láminas de material compuesto mediante el M.E.F.**

Autor: Carlos Ibiza Granados

Tutor: Luis Rodríguez de Tembleque Solano

El tribunal nombrado para juzgar el Proyecto arriba indicado, compuesto por los siguientes miembros:

Presidente:

Vocales:

Secretario:

Acuerdan otorgarle la calificación de:

Sevilla, 2015

El Secretario del Tribunal



# Agradecimientos

*Este proyecto resume una gran parte de mi aprendizaje durante estos años de dedicación a mi formación como ingeniero. Una etapa dura, con grandes ilusiones y muchísimo esfuerzo, durante la que siempre me he sentido acompañado por las personas más importantes de mi vida.*

*Primero me gustaría agradecerle a mi familia, a mis hermanos Alberto y Pablo, y a mis padres Salva y Conchi, que siempre han estado ahí, sin necesidad de decir mucho, pero que sin ellos hubiera sido imposible poder llevar adelante estos años de duro trabajo, de desilusiones, pero también de alegrías. Gracias.*

*Agradecerle a una de las personas más importantes en mi día a día, Inés, el estar SIEMPRE ahí. Muchas gracias por demostrarme que siempre es posible luchar si tienes ilusión.*

*Y casi como mi familia, quiero agradecerle a los “Agustisimismos” todo lo que me han ayudado a mirar hacia delante, a encontrar esas risas que tanto hace falta para aprender.*

*Señalar a Andrés y Jose, porque los días y días de estudio, siempre tienen su momento para saber que no se puede ser un ingeniero si no conoces a tu compañero, y que los compañeros a los que necesitas, serán para siempre unos amigos de verdad.*

*Por último, agradecerle todo su apoyo a mi tutor, Luis, por saber exigir, enseñar y transmitir todo lo que necesita una persona para aprender. La labor de una persona como Luis, durante este último año, no se olvida nunca, porque más allá de enseñar, ha sido un apoyo para seguir trabajando, y aprender con ilusión.*

*Carlos Ibiza Granados  
11 de Septiembre de 2015*

# Índice

Agradecimientos .....	VII
Índice .....	VIII
Índice de Tablas.....	X
Índice de Figuras .....	XII
Notación.....	XV
<b>1 Introducción.....</b>	<b>1</b>
1.1 Motivación y objetivos .....	1
1.2 Contenido del proyecto .....	2
<b>2 Micromecánica de Materiales Compuestos .....</b>	<b>5</b>
2.1 Introducción .....	5
2.1.1 Material transversalmente isótropo .....	5
2.1.2 Ley de comportamiento en ejes principales .....	6
2.1.3 Ley de comportamiento en ejes cualesquiera .....	8
2.1.3.1 Transformación de tensiones .....	10
2.1.3.2 Transformación de deformaciones .....	10
2.1.3.3 Relación entre las matrices de rigidez .....	10
2.1.4 Material objeto de estudio: IM7/8551-7 Epoxy.....	11
2.2 Modelos micromecánicos de fibras unidireccionales .....	12
2.2.1 Modelo de fibra continua: Modelo de Hopkins y Chamis.....	12
2.2.1.1 Ley de mezclas .....	13
2.2.1.2 Ley de mezclas modificada: Modelo de Hopkins y Chamis.....	14
2.2.1.3 Resultados para el material IM7/8551-7 Epoxy.....	16
2.2.2 Modelo de fibra corta: Modelo de Halpin-Tsai .....	17
2.2.2.1 Resultados para el material IM7/8551-7 Epoxy.....	19
<b>3 Estabilidad de paneles compuestos sometidos a carga normal .....</b>	<b>23</b>
3.1 Introducción .....	23
3.1.1 Descripción de lámina y su comportamiento a pandeo.....	23
3.1.2 Código para la secuencia de apilamiento .....	24
3.2 Problema de referencia: Pandeo de un panel cilíndrico sometido a compresión axial .....	25
3.3 Influencia de la curvatura en la carga crítica .....	28
3.4 Estudio de la influencia de la micromecánica en la carga crítica de pandeo.....	33
3.4.1 Influencia de la orientación de las fibras sobre la carga crítica.....	33
3.4.2 Influencia del porcentaje en volumen de fibra sobre la carga crítica.....	39
3.4.3 Comparación entre el modelo de fibra continua y de fibra corta .....	46
<b>4 Estabilidad de un panel compuesto sometido a cortante .....</b>	<b>57</b>
4.1 Introducción .....	57
4.1.1 Descripción del problema de estudio .....	57
4.2 Problema de referencia: Ejemplo de validación.....	59
4.3 Influencia de la orientación de la carga respecto a la orientación de las fibras .....	60
4.4 Estudio de la influencia de la micromecánica en la carga crítica de pandeo.....	67



4.4.1	Influencia de la orientación de las fibras sobre la carga crítica .....	67
4.4.2	Influencia del porcentaje en volumen de fibra sobre la carga crítica .....	70
4.4.3	Comparación entre el modelo de fibra continua y de fibra corta .....	72
<b>5</b>	<b>Resumen y Conclusiones .....</b>	<b>79</b>
5.1	<i>Micromecánica de materiales compuestos .....</i>	79
5.2	<i>Estabilidad de paneles compuestos sometidos a carga normal .....</i>	79
5.3	<i>Estabilidad de un panel compuesto sometido a cortante .....</i>	81
<b>6</b>	<b>Trabajos futuros.....</b>	<b>83</b>
	<b>Referencias .....</b>	<b>84</b>
	<b>ANEXOS.....</b>	<b>87</b>
	<i>ANEXO A. Problema de referencia del Capítulo 3 para un material isótropo .....</i>	87
	<i>ANEXO B. Código del Problema de referencia Capítulo 3: Lámina con curvatura .....</i>	92
	<i>ANEXO C. Código de ANSYS de los modelos numéricos del Capítulo 3 .....</i>	94
	<i>ANEXO D. Código del problema de referencia Capítulo 4: Lámina sometido a cortante .....</i>	96
	<i>ANEXO E. Código de ANSYS de los modelos numéricos del Capítulo 4 .....</i>	99

# Índice de Tablas

Tabla 2-1. Constantes ingenieriles de un material transversalmente isótropo	7
Tabla 2-2. Propiedades de la fibra de carbono IM7	11
Tabla 2-3. Propiedades de la resina 8551-7 Epoxy	12
Tabla 2-4. Expresiones de las constantes ingenieriles usando la Ley de mezclas	14
Tabla 2-5. Expresiones de las constantes ingenieriles usando el modelo de Hopkins y Chamis	16
Tabla 2-6. Propiedades mecánicas para IM7/8551-7 Epoxy usando el modelo de Hopkins y Chamis. Tabla extraída de [2].	16
Tabla 2-7. Propiedades para IM7/8551-7 Epoxy usando el modelo de Halpin-Tsai con $v_f = 0.45$	20
Tabla 2-8. Propiedades para IM7/8551-7 Epoxy usando el modelo de Halpin-Tsai con $v_f = 0.60$	20
Tabla 2-9. Propiedades para IM7/8551-7 Epoxy usando el modelo de Halpin-Tsai con $v_f = 0.75$	20
Tabla 2-10. Propiedades para IM7/8551-7 Epoxy usando el modelo de Halpin-Tsai con $v_f = 0.80$	21
Tabla 3-1. Dimensiones Panel con curvatura ensayado en [8]	25
Tabla 3-2. Propiedades del material del problema descrito en [8]	26
Tabla 3-3. Comparación factores de pandeo	27
Tabla 3-4. Diferencias entre lo obtenido en el estudio presente y las referencias	27
Tabla 3-5 Dimensiones geometría de estudio	29
Tabla 3-6. Condiciones de contorno en desplazamientos	29
Tabla 3-7. Cargas críticas de pandeo para varios $h/R$ y varias orientaciones de fibra con $v_f = 0.45$	34
Tabla 3-8. Cargas críticas de pandeo para varios $h/R$ y varias orientaciones de fibra con $v_f = 0.6$	39
Tabla 3-9. Cargas críticas de pandeo para varios $h/R$ y varias orientaciones de fibra con $v_f = 0.75$	40
Tabla 3-10. Cargas críticas de pandeo para varios $h/R$ y varias orientaciones de fibra con $v_f = 0.80$	41
Tabla 3-11. Cargas críticas para varios $h/R$ y varias orientaciones de fibra con $v_f = 0.45$ y $rasp = 10$	47
Tabla 3-12. Cargas críticas para varios $h/R$ y varias orientaciones de fibra con $v_f = 0.45$ y $rasp = 100$	48
Tabla 3-13. Cargas críticas para varios $h/R$ y varias orientaciones de fibra con $v_f = 0.45$ y $rasp = 1000$	49
Tabla 4-1. Dimensiones lámina sometida a cortante	57
Tabla 4-2. Condiciones de contorno en desplazamientos	58
Tabla 4-3. Valores geométricos y propiedades lámina de Acero	60
Tabla 4-4. Cargas críticas tangenciales para el caso A	62
Tabla 4-5. Cargas críticas tangenciales para el caso B	63
Tabla 4-6. Cargas críticas para varios $rasp$ y varias orientaciones de fibra. Problema tipo A.	73
Tabla 4-7. Cargas críticas para varios $rasp$ y varias orientaciones de fibra. Problema tipo B.	74
Tabla 0-1. Valores geométricos y propiedades de una lámina de Acero con $R = 2m$	87

*Tabla 0-2. Valores geométricos y propiedades de una lámina de Acero con R = 6m \_\_\_\_\_ 89*

*Tabla 0-3. Valores geométricos y propiedades de una lámina de Aluminio 2024 T6 con R = 3m \_\_\_\_\_ 90*

# Índice de Figuras

<i>Figura 1-1. Partes de una aeronave de material compuesto. Figura extraída de [1].</i>	1
<i>Figura 2-1. Tipologías de materiales compuestos. Figura extraída de [3].</i>	5
<i>Figura 2-2 Ejemplo de material transversalmente isótropo. Figura extraída de [3].</i>	6
<i>Figura 2-3 Relación entre sistemas de referencia mediante cosenos directores. Figura extraída de [3].</i>	8
<i>Figura 2-4 Rotaciones sucesivas para llegar al sistema <math>p', q', r'</math>. Figura extraída de [3].</i>	9
<i>Figura 2-5. Rotación del sistema de coordenadas alrededor del eje <math>r</math>. Figura extraída de [3].</i>	10
<i>Figura 2-6. Volumen de fibra, matriz y huecos. Figura extraída de [3].</i>	13
<i>Figura 2-7. Lámina de material compuesto con la fibra alineada en la dirección 1. Figura extraída de [2].</i>	14
<i>Figura 2-8. Modelo para la ley de mezclas modificada (arriba) y la representación de la capa media "b" (abajo). Figura extraída de [3].</i>	15
<i>Figura 2-9. Representación de las propiedades mecánicas de la lámina en función de la fracción en volumen de fibra. Figura extraída de [2].</i>	17
<i>Figura 2-10. Geometría de la fibra de estudio. Figura extraída de [2].</i>	19
<i>Figura 2-11. Módulo de Young longitudinal <math>E_1</math> en función de <math>v_f</math> y <math>r_{asp}</math>.</i>	21
<i>Figura 3-1. Cargas superficiales y de contorno aplicadas sobre una lámina, y la definición del factor de pandeo <math>\lambda</math> sobre los esfuerzos de la lámina. Figura extraída de [3].</i>	24
<i>Figura 3-2. Definición del ángulo <math>\Theta</math> (<math>\phi</math> en este proyecto). Figura extraída de [3].</i>	24
<i>Figura 3-3. Geometría del panel cilíndrico y condiciones de contorno aplicadas. Figura extraída de [9].</i>	25
<i>Figura 3-4. Modelo geométrico del panel cilíndrico en ANSYS.</i>	26
<i>Figura 3-5. Modo de pandeo presentado por [8] (izquierda), y el obtenido en el presente análisis (derecha).</i>	28
<i>Figura 3-6. Definición del parámetro de curvatura <math>h/R</math>.</i>	29
<i>Figura 3-7. Lámina con curvatura usada para el análisis de la variación del parámetro <math>h/R</math>.</i>	30
<i>Figura 3-8. Influencia del parámetro de curvatura <math>h/R</math> en la carga crítica de pandeo <math>N_x, cr</math> de una lámina.</i>	31
<i>Figura 3-9. Modos de pandeo para una lámina con <math>v_f = 0.45</math> (modelo fibra continua), y varios <math>h/R</math>.</i>	32
<i>Figura 3-10. Influencia de la orientación de las fibras en la carga crítica de pandeo <math>N_x, cr</math>.</i>	35
<i>Figura 3-11. Modos de pandeo para una lámina <math>v_f = 0.45</math> y <math>h/R = 0</math> y varias orientaciones de fibra.</i>	36
<i>Figura 3-12. Modos de pandeo para una lámina <math>v_f = 0.45</math> y <math>h/R = 1 \cdot 10^{-3}</math>, y varias orientaciones de fibra.</i>	37
<i>Figura 3-13. Modos de pandeo para una lámina <math>v_f = 0.45</math> y <math>h/R = 1</math>, y varias orientaciones de fibra.</i>	38
<i>Figura 3-14. Influencia de <math>v_f</math> en <math>N_x, cr</math> según <math>h/R</math> de una lámina con una orientación de fibras <math>\phi = 0^\circ</math>.</i>	42
<i>Figura 3-15. Influencia de <math>v_f</math> en <math>N_x, cr</math> según <math>h/R</math> de una lámina con una orientación de fibras <math>\phi = 30^\circ</math>.</i>	43
<i>Figura 3-16. Influencia de <math>v_f</math> en <math>N_x, cr</math> según <math>h/R</math> de una lámina con una orientación de fibras <math>\phi = 90^\circ</math>.</i>	43
<i>Figura 3-17. Influencia de <math>v_f</math> en <math>N_x, cr</math> de una lámina con <math>h/R = 1 \cdot 10^{-5}</math>.</i>	45

<i>Figura 3-18. Influencia de <math>v_f</math> en <math>N_x, cr</math> de una lámina con <math>h/R = 1 \cdot 10^{-3}</math> .....</i>	<i>45</i>
<i>Figura 3-19. Influencia de <math>v_f</math> en <math>N_x, cr</math> de una lámina con <math>h/R = 0.1</math> .....</i>	<i>46</i>
<i>Figura 3-20. Influencia de <math>v_f</math> en <math>N_x, cr</math> según <math>h/R</math> de una lámina <math>v_f = 0.45</math> y <math>\phi = 0^\circ</math> .....</i>	<i>50</i>
<i>Figura 3-21. Influencia de <math>v_f</math> en <math>N_x, cr</math> según <math>h/R</math> de una lámina <math>v_f = 0.45</math> y <math>\phi = 30^\circ</math> .....</i>	<i>50</i>
<i>Figura 3-22. Influencia de <math>v_f</math> en <math>N_x, cr</math> según <math>h/R</math> de una lámina <math>v_f = 0.45</math> y <math>\phi = 90^\circ</math> .....</i>	<i>51</i>
<i>Figura 3-23. Comparativa modos de pandeo entre modelo fibra continua y fibra corta, para una lámina <math>v_f = 0.45</math> y <math>h/R = 0</math> y varias orientaciones de fibra. ....</i>	<i>52</i>
<i>Figura 3-24. Comparativa modos de pandeo entre modelo fibra continua y fibra corta, para una lámina <math>v_f = 0.45</math> y <math>h/R = 1 \cdot 10^{-3}</math> y varias orientaciones de fibra. ....</i>	<i>53</i>
<i>Figura 3-25. Comparativa modos de pandeo entre modelo fibra continua y fibra corta, para una lámina <math>v_f = 0.45</math> y <math>h/R = 1</math> y varias orientaciones de fibra. ....</i>	<i>54</i>
<i>Figura 3-26. Comparación <math>N_x, cr</math> de una lámina con <math>h/R = 1 \cdot 10^{-5}</math>, para varias rasp y fibra continua. ....</i>	<i>55</i>
<i>Figura 3-27. Comparación <math>N_x, cr</math> de una lámina con <math>h/R = 0.1</math> para varias rasp y fibra continua. ....</i>	<i>55</i>
<i>Figura 4-1. Lámina sometida a cortante. ....</i>	<i>58</i>
<i>Figura 4-2. Modelo de elementos finito de la lámina sometida a cortante. ....</i>	<i>59</i>
<i>Figura 4-3. Diferencia en el sentido de aplicación cargas tangenciales. ....</i>	<i>61</i>
<i>Figura 4-4. Diferencia en el sentido de aplicación cargas tangenciales respecto a la orientación de las fibras. Figura extraída de [11]. ....</i>	<i>62</i>
<i>Figura 4-5. Influencia de la orientación de las fibras en la carga crítica tangencial de pandeo. Caso A. ....</i>	<i>64</i>
<i>Figura 4-6. Influencia de la orientación de las fibras en la carga crítica tangencial de pandeo. Caso B. ....</i>	<i>64</i>
<i>Figura 4-7. Comparativa modos de pandeo entre caso A y B. ....</i>	<i>66</i>
<i>Figura 4-8. Modos de pandeo para una lámina <math>v_f = 0.45</math> y varias orientaciones de fibra. Caso A. ....</i>	<i>68</i>
<i>Figura 4-9. Modos de pandeo para una lámina <math>v_f = 0.45</math> y varias orientaciones de fibra. Caso B. ....</i>	<i>69</i>
<i>Figura 4-10. Influencia de <math>v_f</math> en <math>N_{xy, cr}</math> de una lámina. Problema tipo A. ....</i>	<i>71</i>
<i>Figura 4-11. Influencia de <math>v_f</math> en <math>N_{xy, cr}</math> de una lámina. Problema tipo B. ....</i>	<i>71</i>
<i>Figura 4-12. Comparativa modos de pandeo entre modelo fibra continua y fibra corta, para una lámina <math>v_f = 0.45</math> . Problema tipo A. ....</i>	<i>75</i>
<i>Figura 4-13. Comparativa modos de pandeo entre modelo fibra continua y fibra corta, para una lámina <math>v_f = 0.45</math> . Problema tipo B. ....</i>	<i>76</i>
<i>Figura 4-14. Comparación <math>N_{xy, cr}</math> de una lámina para varias rasp y para fibra continua. Problema tipo A. ..</i>	<i>77</i>
<i>Figura 4-15. Comparación <math>N_{xy, cr}</math> de una lámina para varias rasp y para fibra continua. Problema tipo B. ....</i>	<i>77</i>
<i>Figura 0-1. Cálculo de <math>K_c</math> para una lámina con curvatura. Figura extraída de [10]. ....</i>	<i>88</i>
<i>Figura 0-2. Comparación de <math>K_c</math> para láminas curvas sometidas a compresión. Figura extraída de [12]. ....</i>	<i>91</i>



# Notación

$E_1, E_2, E_3$	Módulo de Young en las direcciones principales $x_1, x_2$ y $x_3$ respectivamente
$N_{x,cr}$	Esfuerzo normal por unidad de longitud crítico de pandeo
$N_{xy,cr}$	Esfuerzo tangencial por unidad de longitud crítico de pandeo
$N_x$	Esfuerzo normal por unidad de longitud
$N_{xy}$	Esfuerzo tangencial por unidad de longitud
$V_i$	Volumen del componente $i$
$f_{cr}$	Factor crítico de pandeo
$r_{asp}$	Relación de aspecto
$u_x, u$	Desplazamiento en dirección $x$
$u_y, v$	Desplazamiento en dirección $y$
$u_z, w$	Desplazamiento en dirección $z$
$v_f, v_m$	Porcentaje en volumen de fibra y matriz, respectivamente
$\nu_{12}, \nu_{23}$	Coefficientes de Poisson entre las direcciones 1 y 2, y 2 y 3, respectivamente
$\rho_i$	Densidad del componente $i$
$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$	Tensiones normales en ejes principales
$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$	Tensiones normales en ejes globales
$\tau_{12}, \tau_{13}, \tau_{23}$	Tensiones tangenciales en ejes principales
$\tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}$	Tensiones tangenciales en ejes globales
$\mathbf{C}$	Matriz de rigidez en ejes globales
$\mathbf{C}'$	Matriz de rigidez en ejes principales
$\mathbf{S}$	Matriz de flexibilidad en ejes globales
$\mathbf{S}'$	Matriz de flexibilidad en ejes principales
$\phi$	Orientación de las fibras





# 1 INTRODUCCIÓN

## 1.1 Motivación y objetivos

*“El diseño es un principio no un fin. Diseñamos en el entorno y para el entorno”*

En la actualidad, la necesidad de sistemas estructurales cada vez más avanzados y con más prestaciones, ha supuesto una revolución en todas las disciplinas técnicas, y, en concreto, en la investigación de nuevos materiales y su aplicación a dichas estructuras.

Los materiales compuestos han marcado un hito en la evolución de la ingeniería por su destacado comportamiento en su puesta en servicio, y el reducido peso que confiere a una estructura. Sobre todo, en industrias como la aeronáutica o la espacial, donde la carrera por ofrecer la mejor relación “carga de pago-coste del producto” ha convertido a estos materiales en la principal apuesta en diseños punteros como el AIRBUS A380 o el Boeing 787 “Dreamliner”.

Esta innovación en los materiales, viene de la mano de diseños de estructuras con formas muy diversas, que necesitarán un exhaustivo estudio para comprobar que su respuesta ante sollicitaciones en su uso es satisfactoria. En toda estructura existen diversos modos de fallo o estados límite, destacando el pandeo o estado límite último de inestabilidad, ya que condiciona el diseño de muchos elementos estructurales.

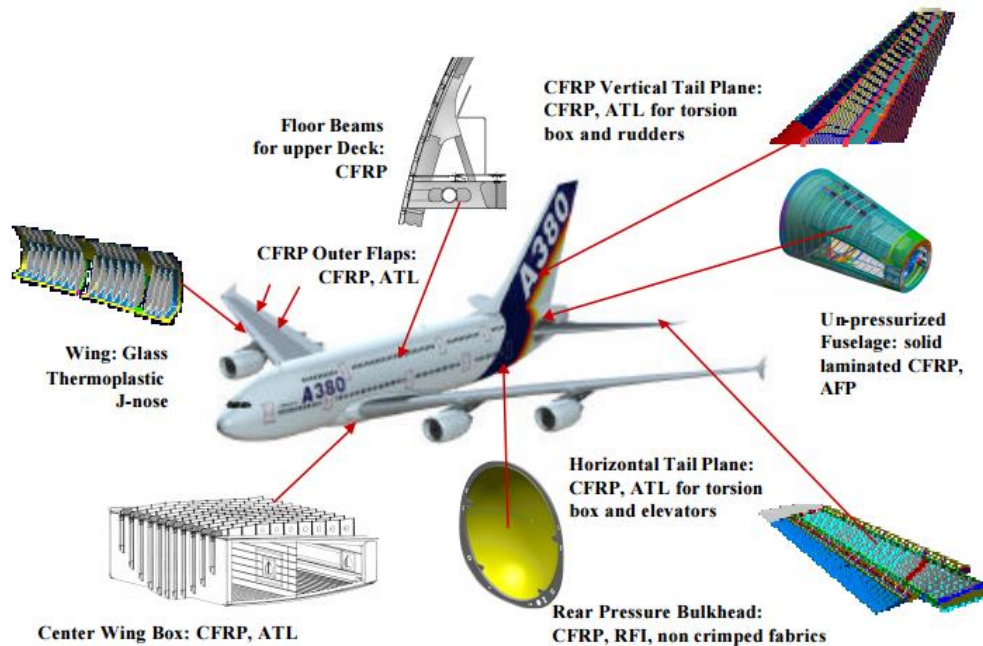


Figura 1-1. Partes de una aeronave de material compuesto. Figura extraída de [1].

En la Figura 1-1, destaca el amplio uso de paneles y láminas, con y sin rigidizadores, los cuales durante su puesta en servicio se llevan hasta los últimos estados límites calculados, salvaguardando que dicha estructura pueda resultar ser inestable, como por ejemplo que la lámina llegue a pandear. Y será en aspectos como la resistencia y rigidez que confieren los materiales compuestos a este tipo de estructuras, donde reside la clave para poder ser utilizados.

En este proyecto, se analizará la influencia que poseen aspectos como la curvatura de una lámina de material compuesto, así como la influencia de sus propiedades micromecánicas (la fracción en volumen de fibra, la relación de aspecto y la orientación de las fibras), en la carga límite de pandeo.

Para ello se realizarán diversos ensayos con modelos de elementos finitos resolviendo problemas de pandeo mediante software comercial ANSYS Inc. Con los resultados obtenidos, se reproducirán gráficas y figuras de deformadas, y se analizará cualitativamente la influencia de la curvatura y la micromecánica sobre la carga crítica de pandeo.

## 1.2 Contenido del proyecto

Este documento se divide en los diferentes capítulos donde se desarrolla el contenido de este proyecto. A continuación, se resumen dichos capítulos a modo de introducción.

- **Capítulo 2. Micromecánica de los materiales compuestos**

La micromecánica de un material compuesto establece una relación entre sus propiedades mecánicas, y todos los aspectos relacionados con el conformado de dicho material, como el contenido que posee de fibra o de matriz, la orientación que poseen las fibras o la relación de aspecto de éstas.

Además se presentará el material elegido para el desarrollo de este proyecto, realizando una descripción de las propiedades micromecánicas y su influencia en las leyes de comportamiento de la estructura que tiene dicho material. Y se definirán dos modelos en cuanto a la tipología de la fibra utilizada, un modelo de fibra continua o un modelo de fibra corta, atendiendo a lo estudiado por dos autores, Hopkins y Chamis y, Halpin-Tsai.

- **Capítulo 3. Estabilidad de paneles compuestos sometidos a carga normal**

En este capítulo, se llevará a cabo un análisis mediante una serie de ensayos numéricos para calcular las cargas críticas de pandeo de los paneles de material compuesto sometidos a compresión coplanaria. Se creará un modelo numérico para reproducir el problema de estudio, y se validará con un problema de la literatura para comprobar que, al menos, las cargas críticas obtenidas mediante dicho modelo numérico permiten un análisis cualitativo de la estabilidad de dichos paneles.

Se analizará la influencia que tienen ciertos aspectos de la geometría, así como ciertos aspectos micromecánicos sobre la carga crítica de pandeo de una lámina.

Respecto a la geometría de la lámina, se definirá el parámetro  $h/R$ , para profundizar en la influencia que tiene la variación de su curvatura sobre la carga crítica de pandeo. Y por otro lado, en cuanto a los aspectos micromecánicos, se realizarán varios ensayos para analizar la influencia que tiene la variación de dichos aspectos sobre la carga crítica de una lámina, incluso si esta presenta cierta curvatura.

- **Capítulo 4. Estabilidad de un panel sometido a cortante**

Describiendo un nuevo tipo de problema, como es una lámina sometida a esfuerzos cortantes, en este capítulo se creará un modelo numérico para reproducir lo más fielmente posible dichas condiciones del problema de estudio. Este modelo numérico se validará con un problema de la literatura, y así podrá llevarse a cabo un análisis cualitativo de la estabilidad de un panel de material compuesto sometido a esfuerzos cortantes.

Una vez constituido el modelo numérico, se realizarán una serie de ensayos para determinar la influencia que tiene la variación de las propiedades micromecánicas de la lámina sobre la carga crítica de pandeo del problema en cuestión.

- **Capítulo 5. Conclusiones**

A la vista de los resultados obtenidos a lo largo de este proyecto, se expondrán las conclusiones, y se recapitularán ciertos aspectos destacados, que han resultado de especial interés en cuanto al comportamiento de la estabilidad de un panel de material compuesto, bajo la modificación de sus propiedades geométricas y micromecánicas.

- **Capítulo 6. Trabajos futuros**

Para concluir con este proyecto, y en base a las conclusiones alcanzadas en los capítulos anteriores, se propondrán futuros aspectos que podrían resultar de interés en el estudio de la estabilidad de estructuras de materiales compuestos.

- **ANEXOS**

Se añadirá la resolución del problema de referencia utilizado para crear el modelo numérico del capítulo 3, utilizando un material isótropo, y que confirmará la validación de este modelo.

Y para el interés del lector, en el caso de que quisiera implementar cualquiera de los modelos numéricos utilizados durante este proyecto, se incluirán los códigos del software comercial ANSYS Inc. desarrollados para poder llevar a cabo los problemas analizados.



# 2 MICROMECAÁNICA DE MATERIALES

## COMPUESTOS

### 2.1 Introducción

Para este trabajo, se ha hecho uso del mismo material utilizado en el proyecto “Análisis numérico de la estabilidad de paneles compuestos reforzados con fibras” (de ahora en adelante [2]).

En este capítulo, se describirá dicho material, puesto que será el usado a lo largo de este proyecto para caracterizar el análisis de las estructuras de material compuesto objeto de estudio, así como la ley de comportamiento que lo gobierna de acuerdo con toda la información obtenida de [3] y [4].

Además, se explicarán los modelos micromecánicos necesarios para la realización de los ensayos presentados en los siguientes capítulos, y se desgranarán las propiedades mecánicas de una lámina de este material utilizado durante dicho estudio.

#### 2.1.1 Material transversalmente isótropo

Existe una gran variedad de materiales compuestos: materiales isótropos, anisótropos, ortótropos, etc., (ver Figura 2-1.), de los cuales se decide escoger para este estudio un material transversalmente isótropo, y así continuar con los trabajos propuestos por [2].

Señalar que en este trabajo, se compararán modelos de fibra corta y modelos de fibra continua, como los descritos en la Figura 2-1, en la 2ª imagen de la fila superior y la 1ª imagen izquierda de la fila inferior respectivamente.

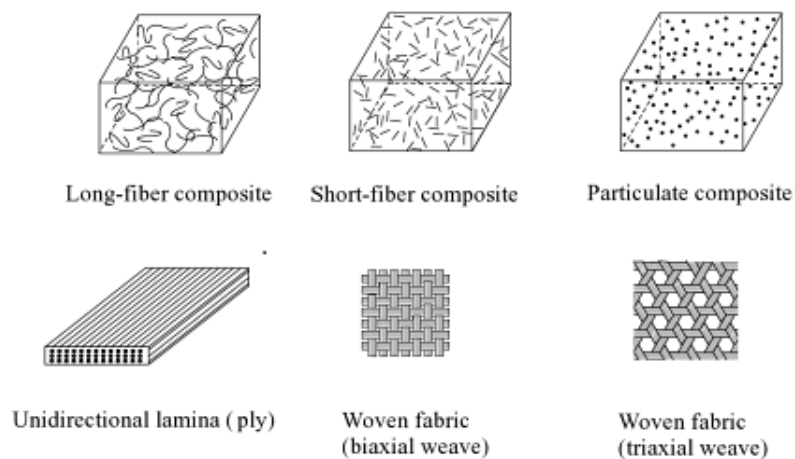


Figura 2-1. Tipologías de materiales compuestos. Figura extraída de [3].

Un material transversalmente isótropo, es una particularización de un material ortótropo, que se caracteriza por tener tres planos de simetría, y solo en uno de ellos puede considerarse al material como isótropo. Un ejemplo de un material transversalmente isótropo viene dado en la Figura 2-2, donde se describe a un compuesto reforzado con fibras continuas unidireccionales, con las fibras alineadas en la dirección principal  $x_1$ . En este caso el comportamiento isótropo del material se produce en el plano perpendicular a las fibras, es decir, el formado por el plano  $x_2 - x_3$ .

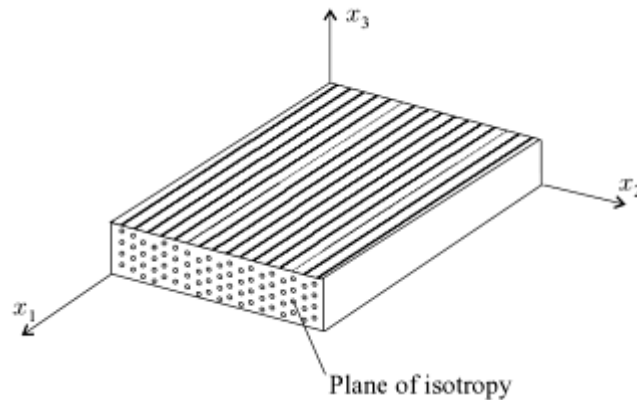


Figura 2-2 Ejemplo de material transversalmente isótropo. Figura extraída de [3].

### 2.1.2 Ley de comportamiento en ejes principales

Una vez introducido qué es un material transversalmente isótropo, en esta sección se describirán cuáles son las relaciones existentes entre las tensiones y deformaciones de este tipo de material, así como las constantes elásticas que lo describen. Para ello se utilizará como referencia lo expuesto en [3] y en [5], y se usarán las expresiones utilizadas en [2].

La relación entre las tensiones y deformaciones de un material viene dado por la ley de comportamiento a través de la matriz de comportamiento  $\mathbf{C}'$ , o análogamente, por ser  $\mathbf{C}'$  una matriz simétrica, a través de su matriz inversa  $\mathbf{S} = \mathbf{C}'^{-1}$ . De esta manera y particularizando para materiales transversalmente isótropos, las deformaciones vienen dada por la ecuación (2-1):

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{S}\boldsymbol{\sigma} \quad (2-1)$$

Siendo  $\mathbf{S}$  para un material transversalmente isótropo:

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{21}}{E_2} & -\frac{\nu_{21}}{E_2} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{12}}{E_1} & \frac{1}{E_2} & -\frac{\nu_{32}}{E_2} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{12}}{E_1} & -\frac{\nu_{23}}{E_2} & \frac{1}{E_2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2(1+\nu_{23})}{E_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} \end{bmatrix} \quad (2-2)$$

En concreto esta matriz  $\mathbf{S}$ , está representada frente al sistema de referencia  $x_1, x_2, x_3$  descrito en el apartado anterior en la Figura 2-2. Razón por la cual, debido a que dichos ejes son perpendiculares a los planos de

simetría, y concretamente el eje  $x_1$  perpendicular al plano de isotropía, la matriz presenta tantos términos nulos. Además destacar que  $\mathbf{S}$  tiene 9 constantes ingenieriles cuyas dependencias viene dada en la siguiente tabla:

Tabla 2-1. Constantes ingenieriles de un material transversalmente isótropo

Independientes	Dependientes
$E_1$	$E_3 = E_2$
$E_2$	$G_{13} = G_{12}$
$G_{12}$	$G_{23} = \frac{E_2}{2(1 + \nu_{23})}$
$\nu_{12}$	$\nu_{13} = \nu_{12}$
$\nu_{23}$	

Para agilizar su manipulación, de ahora en adelante la matriz  $\mathbf{S}$  se usará con la siguiente nomenclatura:

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{12} & 0 & 0 & 0 \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} & 0 & 0 & 0 \\ S_{12} & S_{23} & S_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2(S_{22} - S_{23}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S_{66} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_{66} \end{bmatrix} \quad (2-3)$$

Como se indicó anteriormente para obtener  $\mathbf{C}$  se invertirá  $\mathbf{S}$  obteniéndose:

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{23} & C_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{C_{22} - C_{23}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{L} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M} \end{bmatrix} \quad (2-4)$$

De donde se identifican dos submatrices,  $\mathbf{L}$  y  $\mathbf{M}$ , la primera llena y la segunda diagonal, compuestas por:

$$\mathbf{L} = \frac{1}{D} \begin{bmatrix} E_1(1 - \nu_{23}^2) & E_2\nu_{12}(1 + \nu_{23}) & E_2\nu_{12}(1 + \nu_{23}) \\ E_2\nu_{12}(1 + \nu_{23}) & E_2\left(1 - \frac{E_2}{E_1}\nu_{12}^2\right) & E_2\left(\nu_{23} + \frac{E_2}{E_1}\nu_{12}^2\right) \\ E_2\nu_{12}(1 + \nu_{23}) & E_2\left(\nu_{23} + \frac{E_2}{E_1}\nu_{12}^2\right) & E_2\left(1 - \frac{E_2}{E_1}\nu_{12}^2\right) \end{bmatrix} \quad (2-5)$$

$$D = 1 - \nu_{23}^2 - \frac{2(1 + \nu_{23})E_2\nu_{12}^2}{E_1} \quad (2-6)$$

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \frac{E_2}{2(1+\nu_{23})} & 0 & 0 \\ 0 & G_{12} & 0 \\ 0 & 0 & G_{12} \end{bmatrix} \quad (2-7)$$

### 2.1.3 Ley de comportamiento en ejes cualesquiera

Para poder disponer de las expresiones de la sección anterior, que permiten relacionar las tensiones con las deformaciones de un material transversalmente isótropo en unos ejes cualesquiera, habrá que obtener las correspondientes matrices de transformación.

Utilizando como referencia lo descrito en [3], las matrices de transformación permitirán pasar de un sistema de coordenadas cartesianas  $\{p, q, r\}$  a otro  $\{p', q', r'\}$ . Esto será posible al conocer la orientación del segundo sistema de coordenadas respecto al primero mediante los cosenos directores  $(r_{11}, r_{21}, r_{31})$ ,  $(r_{12}, r_{22}, r_{32})$ ,  $(r_{13}, r_{23}, r_{33})$ , tal y como se indica en la Figura 2-3.

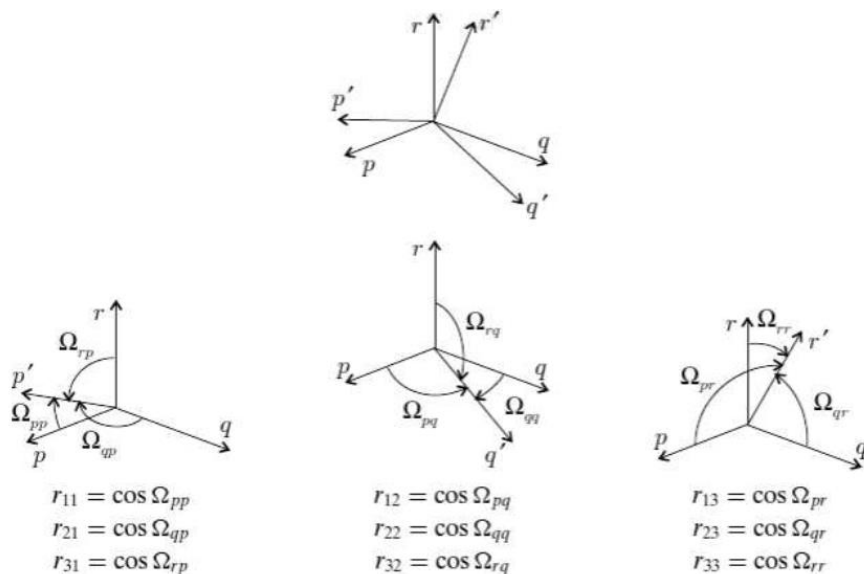


Figura 2-3 Relación entre sistemas de referencia mediante cosenos directores. Figura extraída de [3].

De tal manera que para pasar del sistema  $\{p, q, r\}$  al  $\{p', q', r'\}$  no hay más que realizar las rotaciones sucesivas de los ejes  $\{p, q, r\}$  una cantidad determinada por los ángulos  $\Theta_p, \Theta_q, \Theta_r$ , (siendo el sentido positivo en el sentido antihorario de giro). Ver Figura 2-4.



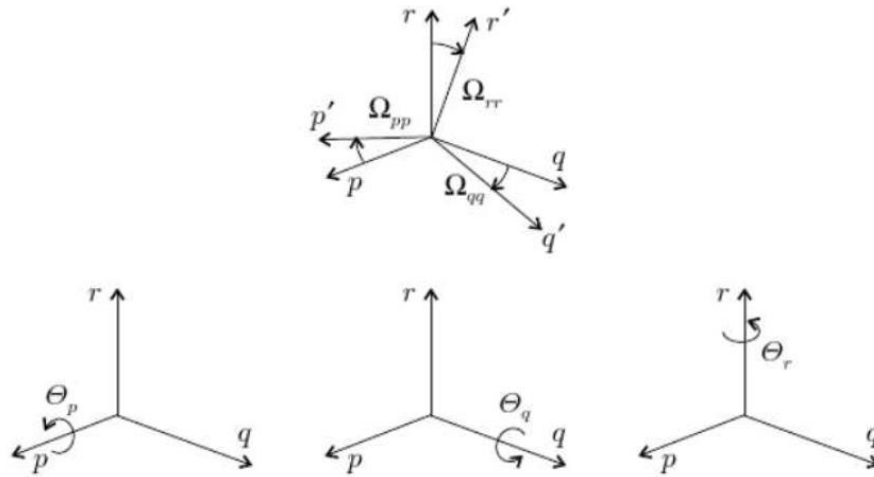


Figura 2-4 Rotaciones sucesivas para llegar al sistema  $\{p', q', r'\}$ . Figura extraída de [3].

La relación de los ángulos con los cosenos directores viene dada por las siguientes expresiones utilizadas en [2]:

$$\begin{aligned}\Theta_q &= \text{Atan2}\left(-r_{31}, \sqrt{r_{11}^2 + r_{21}^2}\right) \\ \Theta_r &= \text{Atan2}\left(\frac{r_{21}}{\cos\Theta_q}, \frac{r_{11}}{\cos\Theta_q}\right) \\ \Theta_p &= \text{Atan2}\left(\frac{r_{32}}{\cos\Theta_q}, \frac{r_{33}}{\cos\Theta_q}\right)\end{aligned}\quad (2-8)$$

Donde  $\text{Atan2}(y, x)$ , es una función arco tangente con dos posibles argumentos:

$$\begin{aligned}\text{Atan2}(y, x) &= \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) \quad \text{si } x > 0 \\ \text{Atan2}(y, x) &= \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) + \pi \quad \text{si } x < 0\end{aligned}\quad (2-9)$$

A lo largo de este estudio, se analizará como influye la orientación de las fibras del material sobre la estabilidad de éste. Siendo el eje  $p'$ , el eje perpendicular al plano isótropo del sistema de referencial local (que marca el sentido longitudinal que poseen las fibras respecto al sistema local de referencia del material), el ángulo  $\phi$  de orientación en la que están colocadas las fibras del material compuesto vendrá definido por el ángulo  $\phi$  existente entre el eje local  $p'$  y el eje  $p$  del sistema de referencia global.

De manera que si la dirección de la fibra es  $\phi = 0^\circ$ , el eje  $p'$  del sistema local correspondiente a los ejes principales del material coincidirá con el eje  $p$  sistema de referencia global. Pero si existe una orientación de las fibras del material distinta de  $\phi = 0^\circ$ , será necesario transformar las ecuaciones de la ley de comportamiento que relaciona las tensiones y deformaciones en los ejes principales utilizando una matriz de transformación que proporcione un giro  $\Theta_r = \phi$ , colocando el sistema de referencia local coincidente con el global, tal y como se observa en la Figura 2-5, donde se ha cambiado la notación respecto a [3], llamando a  $\Theta_r = \Theta = \phi$ .

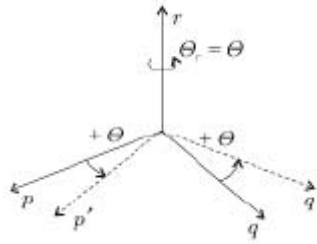


Figura 2-5. Rotación del sistema de coordenadas alrededor del eje  $r$ . Figura extraída de [3].

### 2.1.3.1 Transformación de tensiones

Partiendo del sistema de referencia en ejes principales donde la ley de comportamiento se expresa con la siguiente ecuación:

$$\sigma' = C' \varepsilon' \quad (2-10)$$

Se obtiene a través de la matriz de transformación, las tensiones en el sistema de coordenadas mediante el giro  $\Theta_r$ :

$$\sigma' = [\hat{T}_\sigma^r] \sigma \quad (2-11)$$

Siendo la matriz de transformación:

$$[\hat{T}_\sigma^r] = \begin{bmatrix} c_r^2 & s_r^2 & 0 & 0 & 0 & 2c_r s_r \\ s_r^2 & c_r^2 & 0 & 0 & 0 & -2c_r s_r \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_r & -s_r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s_r & c_r & 0 \\ -c_r s_r & c_r s_r & 0 & 0 & 0 & c_r^2 - s_r^2 \end{bmatrix} \quad c_r = \cos \Theta_r; s_r = \sin \Theta_r \quad (2-12)$$

### 2.1.3.2 Transformación de deformaciones

Igualmente para las deformaciones, usando la matriz de transformación, las deformaciones en el sistema de referencia global se calculan como

$$\varepsilon' = [\hat{T}_\varepsilon^r] \varepsilon \quad (2-13)$$

Siendo la matriz de transformación:

$$[\hat{T}_\varepsilon^r] = \begin{bmatrix} c_r^2 & s_r^2 & 0 & 0 & 0 & c_r s_r \\ s_r^2 & c_r^2 & 0 & 0 & 0 & -c_r s_r \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_r & -s_r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s_r & c_r & 0 \\ -2c_r s_r & 2c_r s_r & 0 & 0 & 0 & c_r^2 - s_r^2 \end{bmatrix} \quad c_r = \cos \Theta_r; s_r = \sin \Theta_r \quad (2-14)$$

### 2.1.3.3 Relación entre las matrices de rigidez

Si relacionamos las leyes de comportamiento para el sistema de referencia global y el principal se obtiene respectivamente:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}\boldsymbol{\varepsilon}; \boldsymbol{\sigma}' = \mathbf{C}'\boldsymbol{\varepsilon}' \quad (2-15)$$

Multiplicando a ambos lados de la ley de comportamiento en terminas globales por  $[\widehat{\mathbf{T}}_{\sigma}^r]$ :

$$[\widehat{\mathbf{T}}_{\sigma}^r]\boldsymbol{\sigma} = [\widehat{\mathbf{T}}_{\sigma}^r]\mathbf{C}\boldsymbol{\varepsilon} \quad (2-16)$$

Y sabiendo que una matriz multiplicada por su inversa es la identidad, a partir de la expresión (2-16), multiplicando en el segundo miembro por  $[\widehat{\mathbf{T}}_{\varepsilon}^r]^{-1}[\widehat{\mathbf{T}}_{\varepsilon}^r]$  se obtiene:

$$\underbrace{[\widehat{\mathbf{T}}_{\sigma}^r]\boldsymbol{\sigma}}_{\boldsymbol{\sigma}'} = \underbrace{[\widehat{\mathbf{T}}_{\sigma}^r]\mathbf{C}[\widehat{\mathbf{T}}_{\varepsilon}^r]^{-1}}_{\mathbf{C}'} \underbrace{[\widehat{\mathbf{T}}_{\varepsilon}^r]\boldsymbol{\varepsilon}}_{\boldsymbol{\varepsilon}'} \quad (2-17)$$

Para finalmente obtener la relación entre la matriz de comportamiento en los diferentes sistemas de referencias  $\mathbf{C}$  y  $\mathbf{C}'$ :

$$\mathbf{C}' = [\widehat{\mathbf{T}}_{\sigma}^r]\mathbf{C}[\widehat{\mathbf{T}}_{\varepsilon}^r]^{-1} \quad (2-18)$$

#### 2.1.4 Material objeto de estudio: IM7/8551-7 Epoxy

Este proyecto es el resultado de una iniciativa de trabajo futuro del estudio presentado en [2], por lo que se decide realizar todas las pruebas sobre el mismo material objeto de estudio. Éste se caracteriza por tener como matriz una resina 8551-7 Epoxy, y como refuerzo, fibras de carbono IM7.

El por que de esta elección reside en que dicha mezcla es ampliamente usada en aplicaciones estructurales que requieren alta resistencia y rigidez, así como tolerancia al daño, dada su protección contra cargas del entorno y su estabilidad al conjunto estructural.

En concreto la resina 8551-7 Epoxy se usa en el campo de la aeronáutica en estructuras primarias de aeronaves comerciales y en las nacelles de motores turbofán (según la norma de estructuras compuestas por elementos que garantizan la integridad del vehículo, y que en caso de fallo de alguno de los elementos supondría la pérdida del vehículo).

En las Tablas 2-2 y 2-3 se presentan las propiedades de fibra y matriz que se han usado en todos los estudios realizados en el presente proyecto como continuación de lo presentado por [2]:

Tabla 2-2. Propiedades de la fibra de carbono IM7

Propiedades fibra	IM7
$E_{f1}$ [GPa]	276
$E_{f2}$ [GPa]	19
$E_{f3}$ [GPa]	19
$G_{f12}$ [GPa]	27
$\nu_{f12}$	0.2
$\nu_{f13}$	0.2
$G_{f23}$ [GPa]	7
$\rho_f$ $\left[\frac{g}{cm^3}\right]$	1.78

Tabla 2-3. Propiedades de la resina 8551-7 Epoxy

Propiedades matriz	8551-7 Epoxy
$E_m$ [GPa]	4.08
$\nu_m$	0.38
$G_m$ [GPa]	1.478
$\rho_m$ [ $\frac{g}{cm^3}$ ]	1.272

## 2.2 Modelos micromecánicos de fibras unidireccionales

Los modelos micromecánicos que se presentarán a continuación, se han utilizado al igual que en [2], para estimar las propiedades mecánicas de una lámina ortótropa de material compuesto en los ejes principales a partir de los valores conocidos de dichas propiedades para fibra y matriz por separado.

En los siguientes capítulos, se estudiará como influyen en la estabilidad (mediante la carga crítica de pandeo) aspectos micromecánicos como la orientación de las fibras, el tanto por ciento en volumen en fibra utilizado para conformar el material compuesto, o la utilización de fibras continuas o cortas (suponiendo todas ellas orientadas en la misma dirección).

Sin embargo para poder realizar este tipo de análisis ha sido necesario establecer una serie de hipótesis al igual que en [2], y así poder simplificar la estimación de las propiedades mecánicas de la lámina. Las hipótesis que se toman a la hora de usar los modelos semi-empíricos aquí expuestos de acuerdo con [6] son:

- Una distribución uniforme de fibras con un patrón regular
- No porosidades ni defectos
- No existencia de tensiones residuales
- Interfaz entre fibra y matriz perfecta.
- Ausencia de interfase entre las fibras y la matriz.
- Comportamiento elástico lineal tanto de la fibra como de la matriz.
- Curado uniforme del material compuesto.
- Alineamiento perfecto de las fibras.

### 2.2.1 Modelo de fibra continua: Modelo de Hopkins y Chamis

Según lo expuesto en [3], el modelo de Hopkins y Chamis, también conocido como “Ley de mezclas modificada”, es un modelo micromecánico usado en la estimación de las propiedades mecánicas e higrotérmicas para materiales compuestos de fibra continua. Además presenta mejores resultados que la Ley de mezclas original en cuanto a la estimación de las propiedades en las direcciones transversales de la lámina.

A continuación se indican las expresiones de las propiedades mecánicas para la Ley de mezclas, y posteriormente se desarrollará con algo más de precisión cómo se modifican dichas expresiones para obtener el modelo de Hopkins y Chamis.

### 2.2.1.1 Ley de mezclas

En la Ley de mezclas se parte de un volumen  $V$  (ver Figura 2-6), compuesto por fibra (fiber, subíndice  $f$ ), matriz (matrix, subíndice  $m$ ), y huecos (void, subíndice  $V$ ) que puede expresarse como:

$$V = V_f + V_m + V_V \quad (2-19)$$

Además las fracciones de volumen de fibra, matriz y huecos que serán usados para el estudio de la micromecánica se expresaran como:

$$v_f = \frac{V_f}{V} \quad v_m = \frac{V_m}{V} \quad v_V = \frac{V_V}{V} \quad (2-20)$$

Agrupando las ecuaciones (2-21) y (2-22) se tiene:

$$v_f + v_m + v_V = 1 \quad (2-21)$$

Sin embargo, en la realidad, la fracción volumétrica de huecos debe ser despreciable al no interesar un material relleno de huecos, ya que favorecen el fallo prematuro del material. Por tanto la ecuación (2-21) queda como:

$$v_f = 1 - v_m \quad (2-22)$$

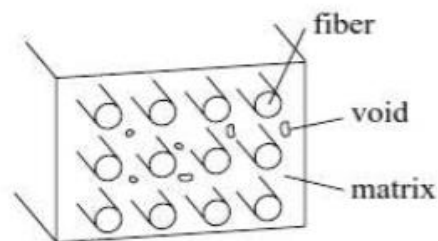


Figura 2-6. Volumen de fibra, matriz y huecos. Figura extraída de [3].

En base a esto, se indican a continuación las expresiones para estimar las propiedades mecánicas utilizadas en este estudio. Para mayor información de cómo se obtienen estas expresiones, consúltense [3] y [5].

Tabla 2-4. Expresiones de las constantes ingenieriles usando la Ley de mezclas

Módulo de Young longitudinal	$E_1 = E_{f1}v_f + E_m v_m$
Módulo de Young transversal	$E_2 = \left( \frac{v_f}{E_{f2}} + \frac{v_m}{E_m} \right)^{-1}$
Módulo de cizalladura longitudinal	$G_{12} = \left( \frac{v_f}{G_{f12}} + \frac{v_m}{G_m} \right)^{-1}$
Módulo de cizalladura transversal	$G_{23} = \left( \frac{v_f}{G_{f23}} + \frac{v_m}{G_m} \right)^{-1}$
Coefficiente de Poisson longitudinal	$\nu_{12} = \nu_{f12}v_f + \nu_m v_m$
Coefficiente de Poisson transversal	$\nu_{23} = \frac{E_2}{2G_{23}} - 1$
Densidad del compuesto	$\rho_{comp} = \rho_f v_f + \rho_m v_m$

En la Figura 2-7, se describe con mayor claridad la dirección que corresponde con los índices 1 y 2 utilizados para las expresiones de la Tabla 2-4.

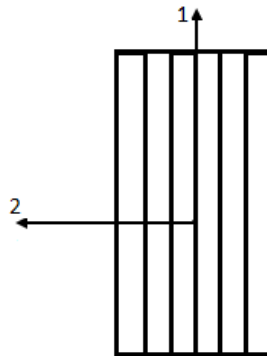


Figura 2-7. Lámina de material compuesto con la fibra alineada en la dirección 1. Figura extraída de [2].

### 2.2.1.2 Ley de mezclas modificada: Modelo de Hopkins y Chamis

Como se ha comentado en la introducción de esta sección, el modelo de Hopkins y Chamis realiza una modificación de las expresiones de la Ley de mezclas para estimar más adecuadamente las propiedades relacionadas con la dirección transversal a la fibra. Se explicará este caso con más detalle y poniendo como ejemplo al igual que en [3] la modificación del módulo de Young transversal.

Partiendo de un elemento en el que se toma un haz de fibras de sección transversal rectangular, la fracción en volumen de este haz de fibras es la misma que la fracción en volumen del haz circular, como puede verse en la Figura 2-8.

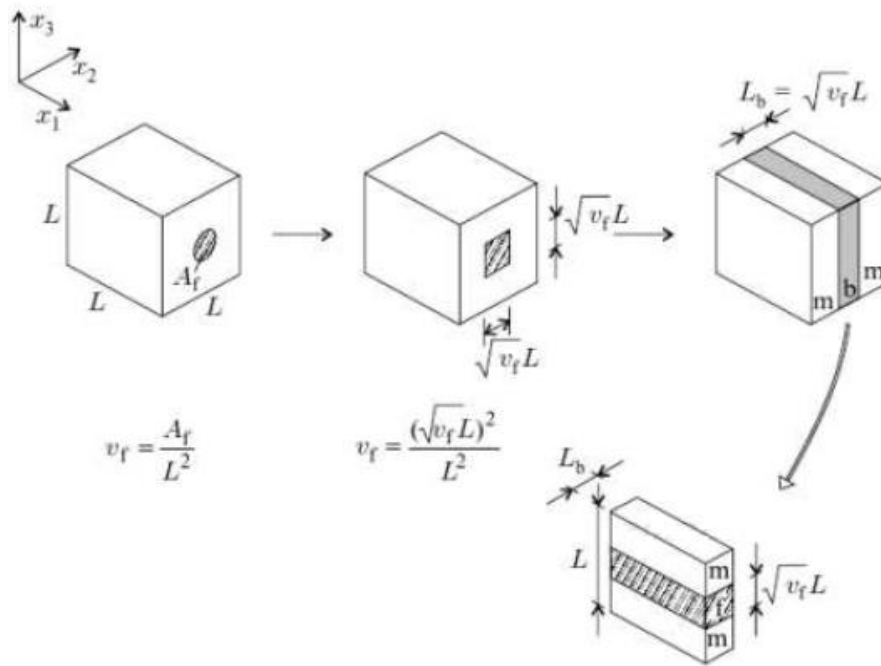


Figura 2-8. Modelo para la ley de mezclas modificada (arriba) y la representación de la capa media "b" (abajo).  
Figura extraída de [3].

En primer lugar se reemplaza este elemento por otro con tres capas, las dos capas exteriores se componen de la matriz, mientras que, la capa media se toma por un material homogéneo ficticio.

La capa media de este último elemento, designada por "b" tendrá una cierta fracción en volumen de fibra designada por  $v_b$ . El módulo de Young transversal de este elemento cuya capa media es un material homogéneo ficticio, viene dada por la expresión relativa al módulo de Young transversal que da la Ley de mezclas, sustituyendo las "f" de la ecuación por "b", quedando finalmente la ecuación (2-23).

$$E_2 = \left( \frac{v_b}{E_{b2}} + \frac{v_b}{E_m} \right)^{-1} \quad (2-23)$$

La cuestión ahora sería calcular cuál es la fracción en volumen  $v_b$  equivalente a lo que ocurre en la realidad. De este modo se sabe por la Figura 2-8 que la anchura de la capa media  $L_b$  es la misma que la anchura del haz de fibras rectangular. Por lo tanto  $v_b$  toma el valor de:

$$v_b = \frac{LL_b}{L^2} = \frac{L\sqrt{v_f}}{L} = \sqrt{v_f} \quad (2-24)$$

El módulo de Young  $E_{b2}$  de la capa intermedia "b" se obtiene reemplazando esta capa ficticia homogénea por una capa que conste de un haz de fibras rectangular rodeada de matriz (Parte de abajo de la Figura 2-8). La fracción en volumen de este haz de fibras en la capa media es  $v_f$ . Si ahora se aplica la Ley de mezclas para el módulo de Young longitudinal a esta capa media se obtiene:

$$E_{b2} = E_f \sqrt{v_f} + E_m (1 - \sqrt{v_f}) \quad (2-25)$$

Las ecuaciones (2-23)-(2-25) dan el módulo de Young transversal. Otras propiedades se pueden obtener de forma similar, aunque los detalles de su obtención no se van a mostrar aquí puesto que no es el objeto de este proyecto (Para más información consultar [3]).

De forma resumida se recogen todas las expresiones del modelo de Hopkins y Chamis en la Tabla 2-5.

Tabla 2-5. Expresiones de las constantes ingenieriles usando el modelo de Hopkins y Chamis

Módulo de Young longitudinal	$E_1 = E_{f1}v_f + E_m v_m$
Módulo de Young transversal	$E_2 = \left( \frac{\sqrt{v_f}}{E_{b2}} + \frac{1 - \sqrt{v_f}}{E_m} \right)^{-1}$
	Donde: $E_{b2} = \sqrt{v_f}E_{f2} + (1 - \sqrt{v_f})E_m$
Módulo de cizalladura longitudinal	$G_{12} = \left( \frac{\sqrt{v_f}}{G_{b12}} + \frac{1 - \sqrt{v_f}}{G_m} \right)^{-1}$
	Donde: $G_{b12} = \sqrt{v_f}G_{f12} + (1 - \sqrt{v_f})G_m$
Módulo de cizalladura transversal	$G_{23} = \left( \frac{\sqrt{v_f}}{G_{b23}} + \frac{1 - \sqrt{v_f}}{G_m} \right)^{-1}$
	Donde: $G_{b23} = \sqrt{v_f}G_{f23} + (1 - \sqrt{v_f})G_m$
Coefficiente de Poisson longitudinal	$\nu_{12} = \nu_{f12}v_f + \nu_m v_m$
Coefficiente de Poisson transversal	$\nu_{23} = \frac{E_2}{2G_{23}} - 1$
Densidad del compuesto	$\rho_{comp} = \rho_f v_f + \rho_m v_m$

### 2.2.1.3 Resultados para el material IM7/8551-7 Epoxy

Una vez descrita todas las expresiones necesarias para conocer las propiedades mecánicas estimadas mediante el modelo de Hopkins y Chamis, se particulariza para el material IM7/8551-7 Epoxy elegido como objeto de estudio a lo largo del presente proyecto. Como la fracción en volumen de fibra será uno de los aspectos micromecánicos estudiados en su influencia sobre la carga de pandeo de la lámina, se escogen 4 valores típicos de fracciones de volumen de fibra, y se calculan las propiedades mecánicas del material en los ejes principales:

Tabla 2-6. Propiedades mecánicas para IM7/8551-7 Epoxy usando el modelo de Hopkins y Chamis. Tabla extraída de [2].

$v_f$	0.45	0.6	0.75	0.8
$E_1 [GPa]$	126.444	167.232	208.02	221.616
$E_2 [GPa]$	7.7945	9.5436	11.9366	12.9523
$G_{12} [GPa]$	3.8642	5.2921	7.8510	9.2397
$G_{23} [GPa]$	2.8396	3.4832	4.3671	4.7435
$\nu_{12}$	0.2990	0.272	0.245	0.236
$\nu_{23}$	0.3725	0.3699	0.3666	0.3653
$\rho_{comp} [kg/m^3]$	1500.6	1576.8	1653	1678.4



Dado que se han obtenido los valores de las propiedades mecánicas para una serie de fracciones de volumen en fibra, en la Figura 2-9 se representa la tendencia que siguen las propiedades mecánicas respecto a la variación de  $v_f$ .

Reseñable que tanto  $E_1$  como  $v_{12}$  tienen una tendencia lineal, y no así el resto de constantes ingenieriles, en las cuales puede observarse que a partir de valores de  $v_f$  superiores a 0.6, una pequeña variación de la fracción de volumen en fibra supone una variación muy acusada de la propiedad mecánica en cuestión. Por último destacar que el aumento de la fracción en volumen de fibra supone un aumento del valor de todas las propiedades mecánicas excepto de  $v_{12}$  y  $v_{23}$ , donde se produce una disminución.

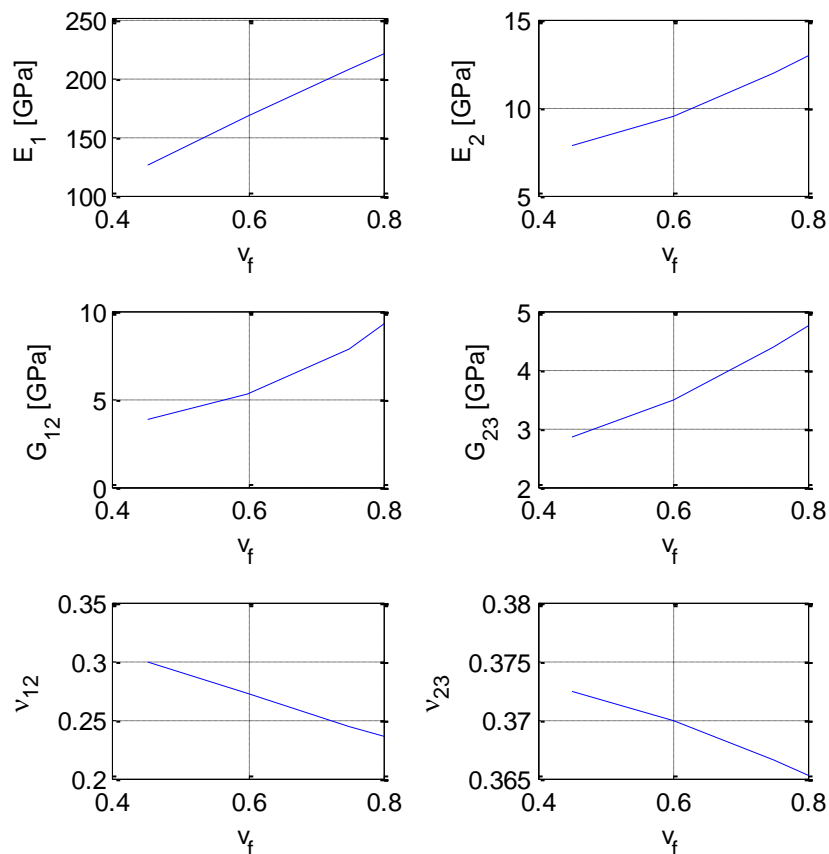


Figura 2-9. Representación de las propiedades mecánicas de la lámina en función de la fracción en volumen de fibra. Figura extraída de [2].

## 2.2.2 Modelo de fibra corta: Modelo de Halpin-Tsai

Según lo expuesto en [4], las ecuaciones de Halpin-Tsai han sido durante mucho tiempo populares para la predicción de propiedades mecánicas de materiales compuestos de fibra corta. Originalmente fueron desarrolladas con la idea de predecir propiedades de compuestos de fibra continua, y derivaban de los trabajos de Hermans y Hill.

Hermans desarrolló el primer modelo auto-consistente generalizado (“generalized self-consistent model”) para materiales compuestos con fibra continua alineada. Halpin y Tsai descubrieron que tres de las ecuaciones de Hermans para la rigidez podían expresarse de una forma común:

$$\frac{P}{P_m} = \frac{1 + \xi \eta v_f}{1 - \eta v_f} \quad (2-26)$$

Con:

$$\eta = \frac{\left(\frac{P_f}{P_m}\right) - 1}{\left(\frac{P_f}{P_m}\right) + \xi} \quad (2-27)$$

Donde, según lo expuesto en [4] y lo descrito en [2]:

- $P$ : Propiedad del compuesto, tales como  $E_1, E_2, G_{12}, G_{23}$  y  $\nu_{23}$
- $P_f$ : Propiedad del refuerzo, es decir:  $E_{f1}, G_{f12}, G_{f23}$  y  $\nu_{f23}$
- $P_m$ : Propiedad de la matriz, es decir  $E_m, G_m$  y  $\nu_m$
- $\xi$ : Parámetro empírico adimensional que tiene en cuenta la geometría del refuerzo, el empaquetamiento y las condiciones de carga
- $v_f$ : Fracción en volumen de fibra

Para los estudios aquí presentados  $\nu_{12}$  se calculará mediante la Ley de mezclas, al no ser necesario si los coeficientes de Poisson de fibra y matriz difieren tal y como se explica en [4].

Halpin y Tsai en su adaptación para materiales compuestos de fibra corta se dieron cuenta de que el parámetro  $\xi$  debe tener valores ente 0 e  $\infty$ . Si  $\xi = 0$  entonces la ecuación (2-26) se convierte en la inversa de la Ley de mezclas, mientras que para  $\xi = \infty$  las ecuaciones de Halpin-Tsai se reducen a la Ley de mezclas.

Estimaciones fiables para el parámetro  $\xi$  se obtienen comparando las ecuaciones de Halpin-Tsai con las soluciones numéricas de ecuaciones de la micromecánica expuestas por Halpin. Para fibra corta alineada existen unas expresiones empíricas que relacionan el parámetro  $\xi$  con la geometría del refuerzo y la fracción en volumen de fibra. A continuación se exponen dichas expresiones:

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{2l}{t} + 40v_f^{10} && \text{para } E_1 \\ \xi &= \frac{2w}{t} + 40v_f^{10} && \text{para } E_2 \\ \xi &= \left(\frac{w}{t}\right)^{1.732} + 40v_f^{10} && \text{para } G_{12} \text{ y } G_{23} \end{aligned} \quad (2-28)$$

Donde:

- $l$ : Longitud del refuerzo
- $w$ : Anchura del refuerzo
- $t$ : Espesor del refuerzo

Al estar considerando fibras circulares,  $l = l_f$  y  $t = w = d_f$ , donde  $d_f$  es el diámetro de la fibra.

Mencionar también que el segundo término de las expresiones en (2-28) puede ser despreciable siempre y cuando  $\nu_f$  sea inferior a 0.7. A partir de dicho valor no se puede despreciar este segundo término.

Si se analizan las expresiones (2-27) y (2-28), el único parámetro que se ve afectado por la variación de la relación de aspecto ( $r_{asp}$ ) es  $\xi$  para  $E_1$ . Al ser fibras circulares,  $t = w = d_f$ , lo que provoca en el resto de propiedades ( $E_2, G_{12}$  y  $G_{23}$ ) que el cociente  $\frac{w}{t}$  sea igual a la unidad. De esta manera solo será necesario calcular  $E_1$  para las relaciones de aspecto consideradas, dado que el resto de propiedades permanecerá constante según la  $r_{asp}$ .

La relación de aspecto de la fibra, se definen según la expresión (2-29), y establece una relación entra la longitud de la fibra y su diámetro, tal y como se aprecia en la Figura 2-10:

$$r_{asp} = \frac{l_f}{d_f} \quad (2-29)$$

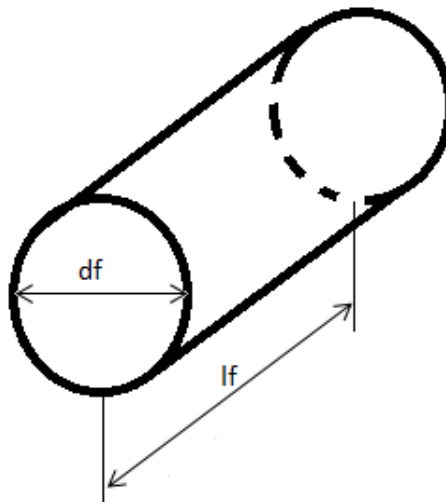


Figura 2-10. Geometría de la fibra de estudio. Figura extraída de [2].

### 2.2.2.1 Resultados para el material IM7/8551-7 Epoxy

Una vez descrita todas las expresiones necesarias para conocer las propiedades mecánicas estimadas mediante el modelo de Halpin-Tsai, se particulariza para el material IM7/8551-7 Epoxy, elegido como objeto de estudio a lo largo de este proyecto.

Del mismo modo en el que se eligió en el modelo de fibra continua la fracción en volumen de fibra como un parámetro a estudiar en la influencia de la micromecánica en la estabilidad de la estructura, para el modelo de fibras cortas será necesario elegir una relación de aspecto para cada fracción de volumen de fibra.

De esta manera, se seguirá eligiendo la serie de valores de fracción de volumen de fibra elegido para el modelo de fibra continua, y se escogerán igualmente unos valores de  $r_{asp}$ , en concreto:  $r_{asp} = \{10,100,1000\}$ .

Tabla 2-7. Propiedades para IM7/8551-7 Epoxy usando el modelo de Halpin-Tsai con  $v_f = 0.45$ 

	$r_{asp}$	10	100	1000
$v_f = 0.45$	$E_1 [GPa]$	48.6670	107.5717	124.2428
	$E_2 [GPa]$	8.1066	8.1066	8.1066
	$G_{12} [GPa]$	3.4871	3.4871	3.4871
	$G_{23} [GPa]$	2.7079	2.7079	2.7079
	$\nu_{12}$	0.2990	0.2990	0.2990
	$\nu_{23}$	0.4969	0.4969	0.4969

Tabla 2-8. Propiedades para IM7/8551-7 Epoxy usando el modelo de Halpin-Tsai con  $v_f = 0.60$ 

	$r_{asp}$	10	100	1000
$v_f = 0.60$	$E_1 [GPa]$	76.4308	148.1472	165.0872
	$E_2 [GPa]$	10.2487	10.2487	10.2487
	$G_{12} [GPa]$	5.2303	5.2303	5.2303
	$G_{23} [GPa]$	3.4660	3.4660	3.4660
	$\nu_{12}$	0.2720	0.2720	0.2720
	$\nu_{23}$	0.4785	0.4785	0.4785

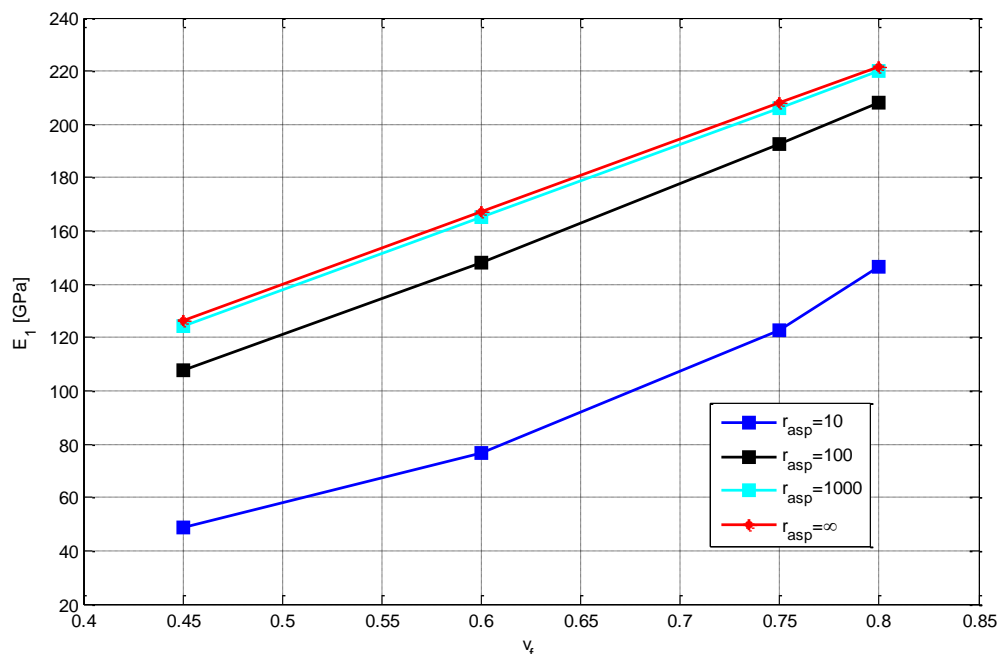
Tabla 2-9. Propiedades para IM7/8551-7 Epoxy usando el modelo de Halpin-Tsai con  $v_f = 0.75$ 

	$r_{asp}$	10	100	1000
$v_f = 0.75$	$E_1 [GPa]$	122.8876	192.5685	206.3378
	$E_2 [GPa]$	13.6111	13.6111	13.6111
	$G_{12} [GPa]$	10.9768	10.9768	10.9768
	$G_{23} [GPa]$	4.8737	4.8737	4.8737
	$\nu_{12}$	0.2450	0.2450	0.2450
	$\nu_{23}$	0.3964	0.3964	0.3964

Tabla 2-10. Propiedades para IM7/8551-7 Epoxy usando el modelo de Halpin-Tsai con  $v_f = 0.80$ 

	$r_{asp}$	10	100	1000
$v_f = 0.80$	$E_1 [GPa]$	146.5435	208.3529	220.1796
	$E_2 [GPa]$	14.9284	14.9284	14.9284
	$G_{12} [GPa]$	14.6623	14.6623	14.6623
	$G_{23} [GPa]$	5.4269	5.4269	5.4269
	$\nu_{12}$	0.2360	0.2360	0.2360
	$\nu_{23}$	0.3754	0.3754	0.3754

Para finalizar, y dado que el único parámetro de las propiedades que varía según la relación de aspecto  $r_{asp}$  es el módulo de Young en la dirección 1, ( $E_1$ ), se representa, para las relaciones de aspecto escogidas  $r_{asp} = \{10, 100, 1000\}$ , la variación de dicha propiedad según  $v_f$ , y el valor de  $E_1$  para el modelo de fibra continua obtenido en el apartado de la Ley de mezclas ( $r_{asp} = \infty$  en la Figura 2-11):

Figura 2-11. Módulo de Young longitudinal  $E_1$  en función de  $v_f$  y  $r_{asp}$ .



# **3 ESTABILIDAD DE PANELES COMPUESTOS**

## **SOMETIDOS A CARGA NORMAL**

### **3.1 Introducción**

Este capítulo constituye el núcleo del presente proyecto, puesto que en él se analizará el comportamiento a pandeo de las estructuras tipo placas de forma cualitativa, así como la influencia que tiene la presencia de curvatura en dicha placa. El hecho de crear una cierta curvatura en la placa, supondrá un tratamiento diferente de la estructura, que pasará a considerarse como una lámina, por lo que se describirá brevemente en qué consiste una lámina en términos estructurales, así como el comportamiento a pandeo que presenta este tipo de estructuras de forma cualitativa, usando como apoyo las descripciones usadas en [3] y [7].

Gracias al uso del software comercial ANSYS Inc., se ha realizado un exhaustivo análisis numérico de la influencia de la curvatura en la carga crítica de pandeo de las láminas, teniendo como referencia la placa analizada por [2]. Además se incluye un análisis de la influencia de las propiedades micromecánicas sobre la carga crítica de pandeo de las láminas, realizando ensayos en los que se variará la orientación de las fibras, la fracción en volumen de fibra utilizada, así como una comparativa entre el modelo de fibra usada (fibra continua o fibra corta). Y todo ello junto con un análisis de las deformadas de las láminas ensayadas.

Por último señalar que previamente a los ensayos, se incluye la reproducción de unos ensayos presentados en la literatura, para así poder comparar los resultados obtenidos y que el error entre la literatura y los ensayos aquí realizados sea mínimo.

#### **3.1.1 Descripción de lámina y su comportamiento a pandeo**

Una lámina es un elemento tridimensional superficial no plano, que posee dos de sus dimensiones mucho mayores que la tercera, a la que se le conocerá como espesor.

La principal virtud de las láminas reside en su geometría curva, puesto que esta geometría permite que los esfuerzos transversales a la lámina sean equilibrados mediante esfuerzos internos en forma de axiles (esfuerzos de membrana). Sin embargo, señalar que en las láminas existen dos modos de resistencia: un modo o estado de membrana en el que se desarrollan fuerzas en el plano, y un modo o estado de flexión en el que están presentes fuerzas fuera del plano.

La flexión se limita generalmente a las zonas donde se producen cambios en las condiciones de contorno, el espesor o el tipo de carga. También se desarrolla donde tiene lugar una inestabilidad local.

De manera que las láminas poseen una resistencia más eficaz a las cargas repartidas, y por el contrario las cargas concentradas o los cambios geométricos exigen por lo general un refuerzo local. Además las imperfecciones juegan un papel sustancial en el comportamiento de las láminas, su carácter impredecible hace que el uso de métodos experimentales sea esencial.

El pandeo de una lámina, puede verse como un fenómeno en el cual una estructura deja de comportarse como está previsto y en su lugar sufre un cambio global de configuración.

Esta inestabilidad se produce entre otras situaciones cuando la lámina se encuentra bajo la acción de cargas de compresión coplanarias. Al aumentar dicha compresión, llega un momento en el que se alcanza el límite crítico, y la lámina patea global o, localmente lejos de los bordes, aunque en general el pandeo local precede al pandeo global de la lámina.

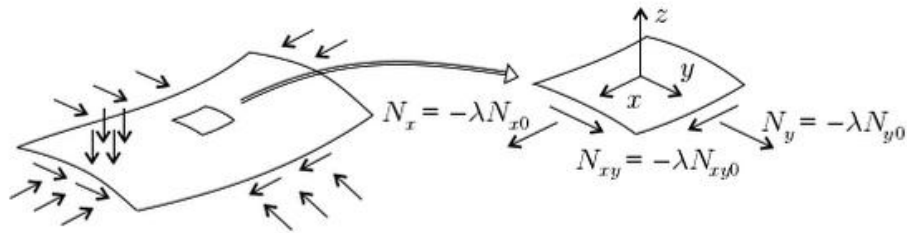


Figura 3-1. Cargas superficiales y de contorno aplicadas sobre una lámina, y la definición del factor de pandeo  $\lambda$  sobre los esfuerzos de la lámina. Figura extraída de [3].

Este resultado de inestabilidad ante cargas de compresión como es el pandeo, también se ve influenciada tal y como explica [2] por la existencia de imperfecciones iniciales, por lo que a la hora de calcular la carga lineal de pandeo mediante ANSYS Inc. se introducirá una perturbación inicial, debido a que ANSYS no calcula la carga crítica de pandeo en sí, sino un factor multiplicador de una carga inicial que se obtiene mediante la resolución de un problema estático.

### 3.1.2 Código para la secuencia de apilamiento

Para poder realizar el análisis de variación de la orientación de las fibras como un parámetro destacable en la micromecánica de los materiales compuestos, se explica a continuación los aspectos a tener en cuenta según [3], para la descripción de dicha orientación, así como la secuencia de apilamiento en el caso de utilizar un laminado formado por una serie de laminas.

Para estudiar un laminado de varias capas, se utiliza un sistema de referencia cartesiano  $\{x, y, z\}$ , siendo la coordenada  $z$ , la perpendicular al plano del laminado. La orientación de las fibras se especifica según el ángulo de la fibra respecto al eje  $x$  (ver Figura 3-2). Dicho ángulo se define como  $\Theta$ , (se considera positivo en sentido antihorario), aunque en este proyecto se hará referencia a dicho ángulo como  $\phi$ . Tal y como se explicó en el capítulo 2,  $\phi$  constituye el ángulo existente entre el eje 1 del sistema de referencia local y el del sistema de referencia global.

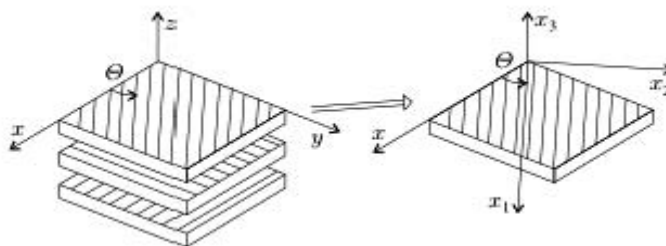


Figura 3-2. Definición del ángulo  $\Theta$  ( $\phi$  en este proyecto). Figura extraída de [3].

Y haciendo uso de la misma terminología utilizada por [2], para así analizar siguiendo el mismo código y poder realizar las comparaciones, se definirán las láminas desde el exterior hacia el interior del laminado. Si existen varias capas consecutivas, todas en la misma dirección en un mismo laminado, se especificará la cantidad de dichas capas mediante un subíndice numérico. Si además dicho laminado es simétrico, sólo se expresará la secuencia de apilado de uno de los lados y se usará el subíndice S.

Como ejemplo, si se tiene un laminado simétrico compuesto por 8 láminas a  $90^\circ$ , 1 a  $0^\circ$ , 1 a  $-45^\circ$  y otra a  $+45^\circ$ , y las siguientes dispuestas simétricamente, se puede nombrar a dicho laminado de dos maneras alternativas e igualmente válidas.



$$\begin{aligned} & [90,0, -45, +45, +45, -45,0,90] \\ & [90,0, -45, +45]_s \end{aligned} \quad (3-1)$$

### 3.2 Problema de referencia: Pandeo de un panel cilíndrico sometido a compresión axial

Este apartado tiene la finalidad de crear un modelo numérico que permita realizar los ensayos para el desarrollo de este proyecto mediante el método de los elementos finitos (usando el software comercial ANSYS Inc.).

Este modelo numérico será necesario para poder representar, con la mayor exactitud posible, las propiedades mecánicas del material (de las que se habló en el Capítulo 2), la orientación de las fibras, el apilamiento de varias láminas conformando un laminado, y el comportamiento de todo ello ante la aplicación de ciertas cargas bajo unas condiciones de contorno determinadas.

Para poder conseguir cierta exactitud del modelo respecto a lo que se va a analizar se utiliza el estudio realizado por [8] y [9], cuyos resultados se comparan con los del modelo creado, y así validar el modelo de elementos finitos creado.

Se analiza el problema de un panel cilíndrico de material compuesto (ver Figura 3-3) sometido a una compresión axial. El panel es un laminado compuesto por láminas con distinta orientación, concretamente  $[\pm 45/0/90, \pm 45]_s$ , y sus dimensiones se presentan en la siguiente Tabla:

Tabla 3-1. Dimensiones Panel con curvatura ensayado en [8]

Dimensión	Valor
$R$ [in]	40
$L$ [in]	22
$h^*$ [in]	0.216

$h^*$  es el grosor del panel completo, de manera que cada lámina que forma el panel tiene un grosor de 0.018 in.

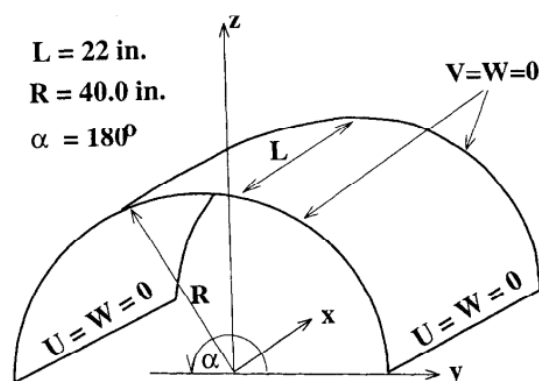


Figura 3-3. Geometría del panel cilíndrico y condiciones de contorno aplicadas. Figura extraída de [9].

Con todas las dimensiones geométricas definidas, se implementa en el modelo el esqueleto de la estructura al que posteriormente se le aplicarán las propiedades del material, las condiciones de contorno y la compresión axial, obteniendo como resultado lo representado en la siguiente Figura 3-4:

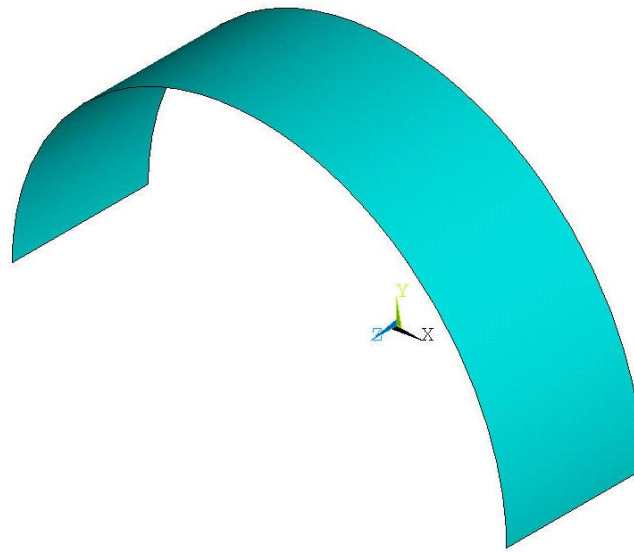


Figura 3-4. Modelo geométrico del panel cilíndrico en ANSYS.

Una vez conocida la geometría, se describe en [8] que el panel fabricado de material compuesto tiene las siguientes propiedades mecánicas:

Tabla 3-2. Propiedades del material del problema descrito en [8]

Propiedades panel	Valor
$E_1$ [Msi]	13.75
$E_2$ [Msi]	1.03
$G_{12}$ [Msi]	0.420
$\nu_{12}$	0.25

Para poder implementar dicho material en ANSYS se ha utilizado el elemento SHELL 181. Este elemento, según la librería de ANSYS, se utiliza para análisis de estructura de láminas y es el recomendado para paneles conformados por varias láminas. Se caracteriza por ser un elemento de 4 nodos con 6 grados de libertad en cada nodo (traslaciones y rotaciones en los ejes x,y,z).

Señalar que en [8], el elemento utilizado es el SHELL63, que para una versión de ANSYS anterior a la usada para este proyecto, se corresponde con un elemento de 4 nodos, como el SHELL 181. Sin embargo esto podría ocasionar cierta diferencia en los resultados del análisis de este problema como se verá más adelante.

Respecto a las condiciones de contorno aplicadas, tal y como se representa en la Figura 3-3, se impiden los desplazamientos en la dirección axial  $U$ , así como la rotación  $W$  respecto al eje radial en  $\alpha = 0^\circ$  y  $180^\circ$ , los desplazamientos en la dirección transversal  $V$  y la rotación  $W$  respecto al eje radial en  $x = 0$ , y la rotación  $W$  respecto al eje radial en  $x = L$ .

Además, debido a las diferentes versiones del software usadas para los análisis en este proyecto y las utilizadas por [8], se realizan varias pruebas del mallado para poder decidir el tamaño de la discretización del cilindro

que más ajustará los resultados. Finalmente, se discretiza el cilindro usando una malla de 10x40 elementos tras realizar varias pruebas, convergiendo al resultado obtenido por [8].

Tal y como se explicó al comienzo de este Capítulo 3, previamente al análisis de pandeo habrá que resolver el modelo de la placa cilíndrica ante un problema estático, obteniendo las matrices de rigidez y de rigidez geométrica, asociadas a la estructura.

El método utilizado en esta versión de ANSYS para realizar un análisis lineal de pandeo es el método de Lanczos. Mediante las opciones del tipo de análisis [ANTYPE, BUCKLE], con la opción [BUCOPT, LANB], el software proporciona un factor de la carga aplicada, concretamente el factor de pandeo mediante la resolución del problema del cálculo de los autovalores del método de Lanczos (Para más información sobre dicho método, consultar el tutorial de ANSYS y [2]).

Una vez obtenido dicho factor de pandeo, solo habrá que multiplicarlo por la carga por unidad de longitud de valor  $N_0$  que se desea aplicar para conocer la carga de pandeo lineal de la estructura:

$$N_{cr} = N_0 * f_{cr} \quad (3-2)$$

Utilizando esta descripción de la carga crítica de pandeo de la estructura, de ahora en adelante para simplificar los cálculos, haciendo uso de la expresión (3-2), se aplicará una carga por unidad de longitud  $N_0 = 1 \frac{N}{m}$ , obteniendo directamente la carga crítica de pandeo de la estructura para el factor de carga que proporciona ANSYS.

Ejecutando todo lo descrito se obtiene la carga crítica de pandeo del problema planteado en [8], y se compara con los resultados obtenidos en [8] y [9] en la siguiente Tabla:

Tabla 3-3. Comparación factores de pandeo

	Referencia [8] (a)	Referencia [9] (b)	Estudio presente (c)
Carga crítica de Pandeo ( $N_{cr}$ )	$3285 \frac{N}{m}$	$3278 \frac{N}{m}$	$3220 \frac{N}{m}$

La diferencia entre las cargas críticas de pandeo de este estudio con respecto a ambas referencias, según las expresiones descritas en (3-3), se presentan en la Tabla 3-4:

$$Diferencia_1 [\%] = \frac{a - c}{a} \cdot 100 ; \quad Diferencia_2 [\%] = \frac{b - c}{b} \cdot 100 \quad (3-3)$$

Tabla 3-4. Diferencias entre lo obtenido en el estudio presente y las referencias

$Diferencia_1 [\%]$	$Diferencia_2 [\%]$
1.979	1.769

Ambas diferencias no superan el 2%, por lo que se considera válido el modelo numérico implementado en ANSYS, para este estudio cualitativo de la estabilidad de una lámina a compresión coplanaria. Además en el Anexo A, se incluyen los resultados obtenidos usando este modelo para un problema de una lámina de material isótropo, que confirmará la validez de éste.

Aún así, para mayor seguridad en cuanto a los resultados obtenidos, se presenta en la Figura 3-5, una comparativa entre el modo de pandeo presentado en [8] y el obtenido en el presente análisis, siendo ambos modos de pandeo idénticos:

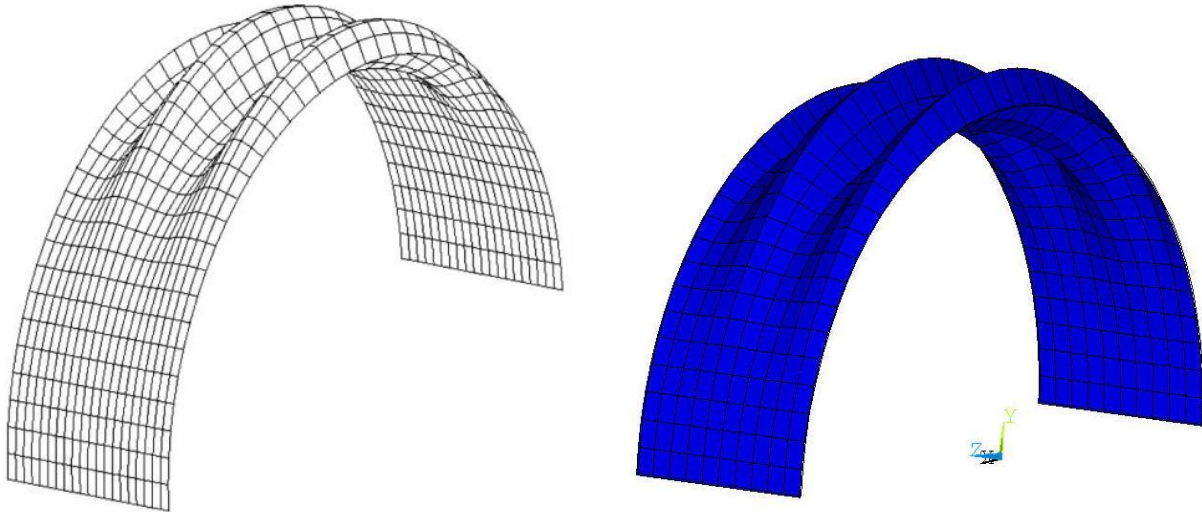


Figura 3-5. Modo de pandeo presentado por [8] (izquierda), y el obtenido en el presente análisis (derecha).

Como ya se indicó al hablar del tipo de elemento usado para implementar las propiedades del material en ANSYS, la diferencia entre el elemento usado en el presente análisis (SHELL 181) y el utilizado en [8], parece ser la principal causa de que la diferencia 1, entre la carga crítica de pandeo a) y c) no sea menor de la obtenida.

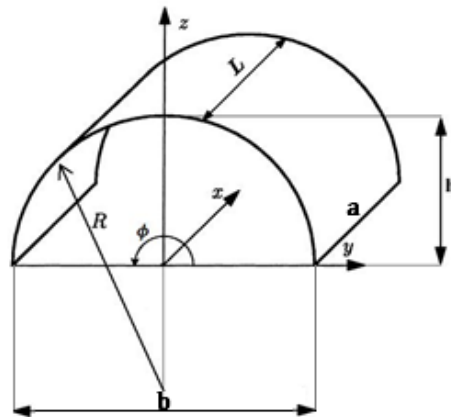
Respecto a la diferencia 2 entre la carga crítica de pandeo b) y c), podría deberse a que el tipo de software no sea el mismo, pues el autor en [9] omite dicha información.

En definitiva, la concordancia entre el resultado obtenido mediante el modelo numérico implementado y los presentados en los artículos de referencia indicados, permitirá hacer uso para los siguientes apartados, donde se realizarán los ensayos para analizar la variación de ciertos aspectos geométricos y micromecánicos sobre la carga crítica de pandeo.

### 3.3 Influencia de la curvatura en la carga crítica

A propósito de los análisis incluidos en el proyecto presentado por [2] sobre el pandeo de paneles de material compuesto y tomando como referencia uno de los trabajos futuros propuestos por dicho autor, se decide realizar el análisis de la variación la carga crítica de pandeo de una lámina según la curvatura.

En este apartado se va a estudiar la influencia que tiene sobre la carga crítica de pandeo de la lámina la variación de un parámetro geométrico como es la curvatura, entendiéndose por parámetro de curvatura  $h/R$ , la relación entre la distancia  $h$  en el extremo de la lámina y el radio de curvatura de dicho extremo, como se representa en la siguiente Figura 3-6. Siendo una lámina totalmente plana cuando el parámetro de curvatura  $h/R = 0$ , y totalmente cilíndrica cuando  $h/R = 1$ .

Figura 3-6. Definición del parámetro de curvatura  $h/R$ .

Por lo tanto, para poder realizar una comparativa con los resultados obtenidos en [2], se hace uso del problema definido en dicho proyecto para realizar todo el análisis que se detallará a continuación.

Dicho problema de estudio consiste en analizar una lámina de material compuesto sometido a carga de compresión axial, cuyo material será el presentado previamente en el Capítulo 2, IM7/8551-7 Epoxy, y cuya geometría viene dada por las dimensiones de la siguiente Tabla:

Tabla 3-5 Dimensiones geometría de estudio

Dimensión	Valor
$a$ [cm]	70
$b$ [cm]	35
$t$ (espesor)[cm]	0.02

Las condiciones de contorno que tendrá la lámina para todos los ensayos se corresponden con las relativas a simplemente apoyadas en sus cuatro bordes (ver Tabla 3-5 y Figura 3-7), tal y como está establecido en el problema presentado en [2].

Tabla 3-6. Condiciones de contorno en desplazamientos

Grado de libertad	Bordes $x = 0 ; x = a$	Bordes $y = 0 ; y = b$
Desplazamiento según $x$	Libre	Impedido
Desplazamiento según $y$	Impedido	Libre
Desplazamiento según $z$	Impedido	Impedido
Rotación alrededor del eje $x$	Impedido	Libre
Rotación alrededor del eje $y$	Libre	Impedido
Rotación alrededor del eje $z$	Libre	Libre

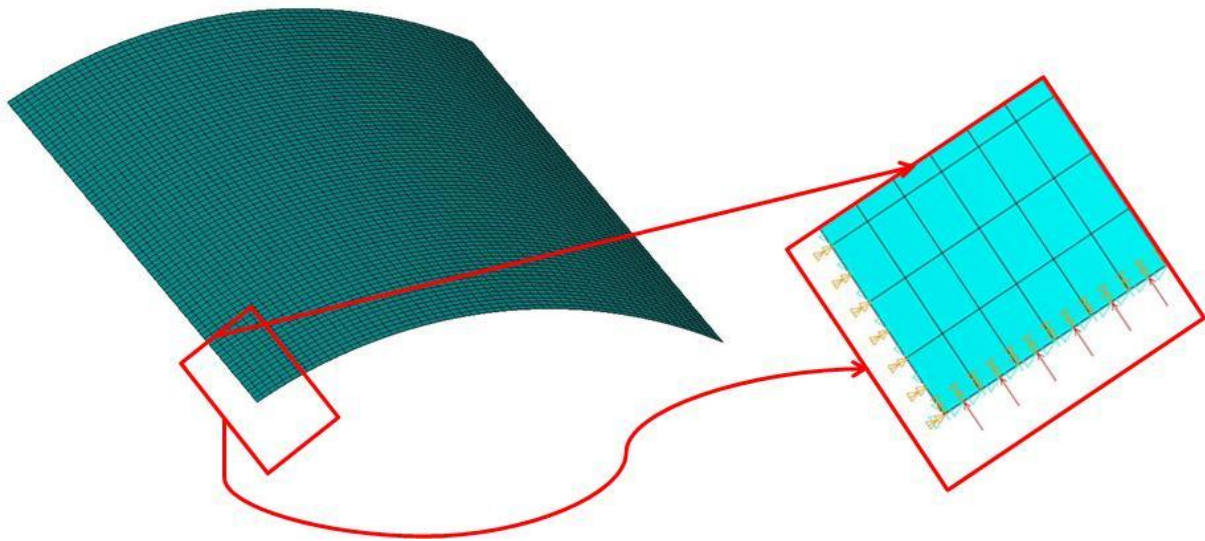


Figura 3-7. Lámina con *curvatura* usada para el análisis de la variación del parámetro  $h/R$ .

El elemento usado en ANSYS para realizar los ensayos ha sido el SHELL281 puesto que es el elemento de 8 nodos para estructuras tipo lámina que tiene implementada la versión de ANSYS utilizada, porque proporciona buenos resultados como se verá a continuación y porque servirá como referencia para poder comparar con los resultados obtenidos en [2].

En cuanto a la elección de la malla (ver Figura 3-7), se elige una discretización de la lámina de 8x60 principalmente debido, a que tras realizar un estudio de convergencia, dicha discretización supone la mejor solución posible, estableciendo el compromiso entre la precisión del factor crítico calculado, recoger de la manera más exacta posible las semiondas de los modos de pandeo, y que el tiempo de cálculo no sea excesivo.

Aunque se ha comentado en el apartado donde se explica el modelo usado para validar el ensayo de [8], recordar que ANSYS calcula el factor crítico de pandeo, pero que usando una carga de compresión en los ensayos igual a la unidad, se obtiene directamente la carga crítica de pandeo, como se demostró en la expresión (3-2).

Una vez descrito el problema sobre el que se realizan los ensayos para determinar cómo influye la variación de la curvatura sobre la carga crítica de pandeo, se procede a presentar los resultados obtenidos. Precisamente, para determinar cómo influye esta variación ante cargas de compresión axial, se han realizado una serie de ensayos con la misma lámina, para la siguiente serie de valores del parámetro de curvatura:

$$h/R = \{0, 1 \cdot 10^{-5}, 1 \cdot 10^{-4}, 5 \cdot 10^{-4}, 1 \cdot 10^{-3}, 5 \cdot 10^{-3}, 0.1, 0.25, 0.5, 0.75, 0.9, 0.95, 1\}$$

Recordar que cuando el parámetro de curvatura  $h/R = 0$ , la lámina corresponde con el panel totalmente plano que se analizó en [2], y que como se demostrará en las tablas de resultados posteriores, la carga crítica obtenida para la lámina estudiada en este proyecto cuando  $h/R = 0$ , siempre coincide con los valores obtenidos en [2].

En la siguiente Figura 3-8, se representa la variación de la carga crítica de pandeo de una lámina frente a la variación del parámetro de curvatura  $h/R$  para varias orientaciones de fibras, adimensionalizada para  $N_0$ , siendo  $N_0$  lo indicado en la expresión:  $N_0 = N_{x,cr}(\phi = 0^\circ, \nu_f = 0.45)$ .

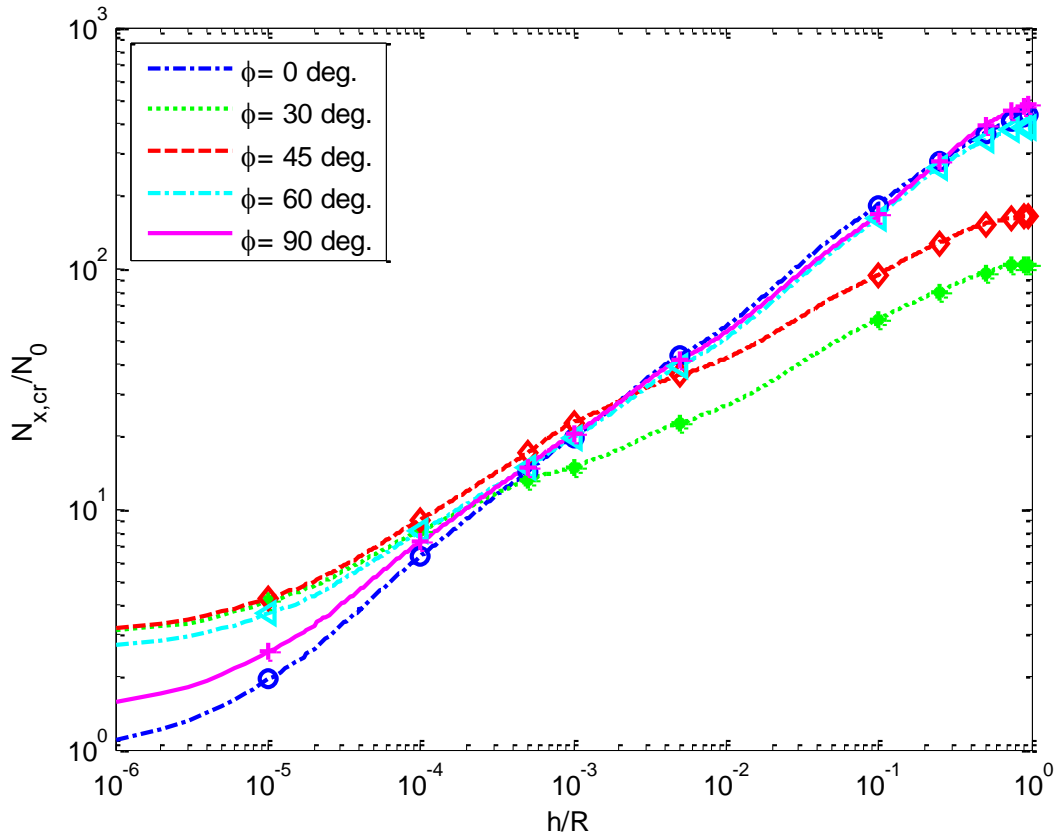


Figura 3-8. Influencia del parámetro de curvatura  $h/R$  en la carga crítica de pandeo  $N_{x,cr}$  de una lámina.

La principal conclusión de este análisis, representado en la Figura 3-8, es el aumento de la carga crítica de pandeo ante el aumento del parámetro de curvatura  $h/R$ , independientemente del ángulo de orientación que presenten las fibras de la lámina.

Además, otro detalle interesante es el cambio de la tendencia en dicho aumento, de manera que para paneles planos (valores de  $h/R$  mínimos), la pendiente es más pronunciada, por lo que trasciende que el aumento de la carga crítica de pandeo será bastante grande para aumentos pequeños de  $h/R$ . Por el contrario, para paneles curvos (valores de  $h/R$  máximos), la pendiente es menos pronunciada, y un aumento de  $h/R$  supondrá un aumento de la carga crítica de pandeo menor que para paneles planos.

Por último, destacar que el aumento de la carga crítica de pandeo respecto al parámetro de curvatura  $h/R$  es distinto para cada orientación de las fibras que componen la lámina, hecho que se analizará con mayor profundidad más adelante.



Respecto a los modos de pandeo obtenidos en los ensayos, se representan a continuación para sacar ciertas conclusiones interesantes sobre el comportamiento de las semiondas del modo de pandeo:

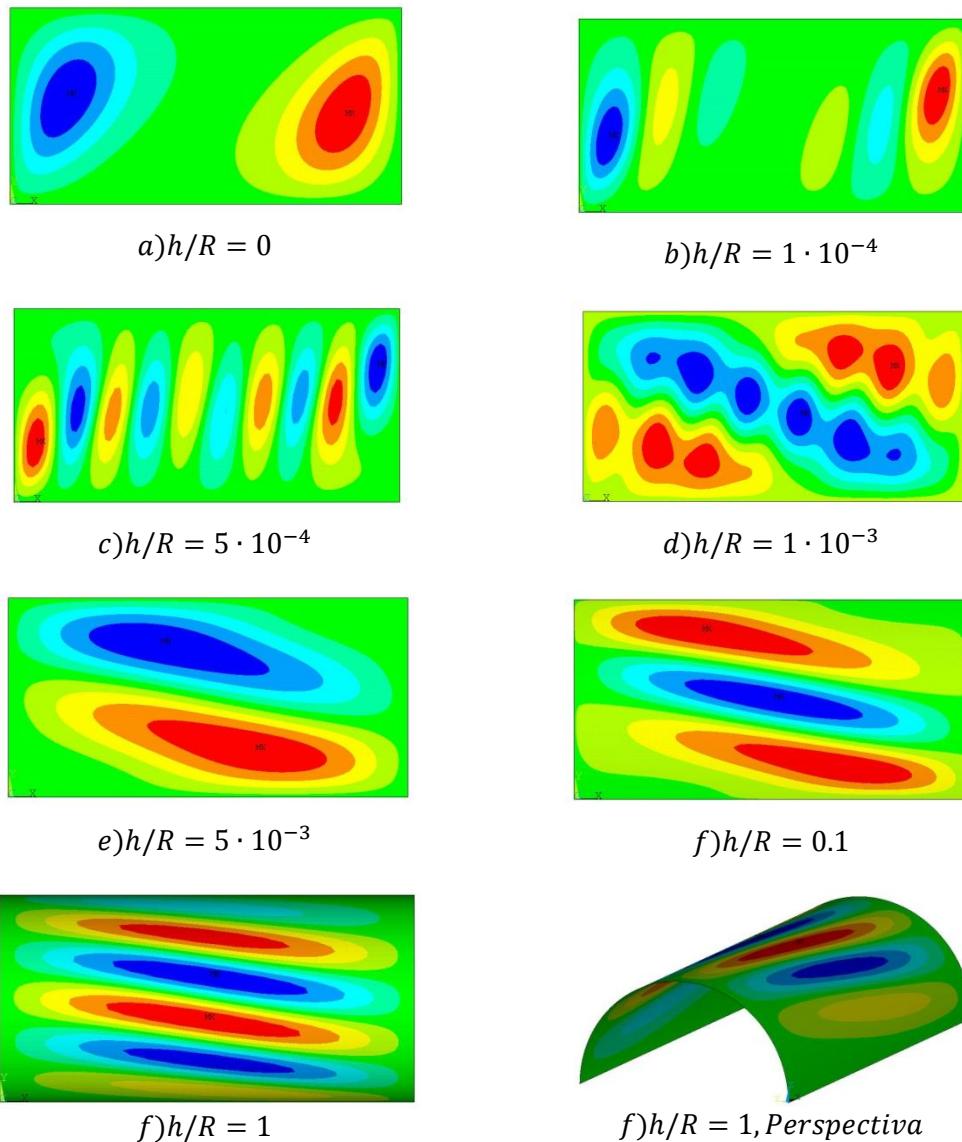


Figura 3-9. Modos de pandeo para una lámina con  $\nu_f = 0.45$  (modelo fibra continua), y varios  $h/R$ .

Al analizar los modos de pandeo obtenidos para estos valores de  $h/R$  representados, se concluye que el número de semiondas del modo de pandeo, así como la dirección en la que estas se desarrollan se ven influenciadas por la variación del parámetro de curvatura  $h/R$ .

Para valores de  $h/R$  entre  $h/R = 0$  y  $h/R = 0.1$ , el número de semiondas del modo de pandeo se incrementa conforme se aumenta el parámetro de curvatura en la dirección axial de la lámina. Sin embargo, a partir de  $h/R = 0.1$  hasta  $h/R = 1$ , el número de semiondas pasa a incrementarse en la dirección circunferencial de la lámina (ver Figura 3-9).

Por último indicar, que efectivamente el modo de pandeo para una lámina totalmente plana,  $h/R = 0$  de la Figura 3-9, corresponde con el mismo modo representado en [2].



### 3.4 Estudio de la influencia de la micromecánica en la carga crítica de pandeo

A partir de todo lo que se explicó en el Capítulo 2, sobre las propiedades micromecánicas y su utilización para estimar las propiedades mecánicas de una lamina de material compuesto, se han llevado a cabo una serie de análisis para tratar de explicar cómo influye la variación de dichos aspectos micromecánicos en la estabilidad de una lámina con curvatura.

De esta manera, se variarían aspectos micromecánicos como la orientación de las fibras, el tanto por ciento en volumen en fibra utilizado para conformar el material compuesto, o la utilización de fibras continuas o cortas, y se calculará la carga crítica de pandeo para cada caso.

Para ello, se hará uso del problema definido en el apartado anterior, en el que se estudió la influencia del parámetro de curvatura, y así poder continuar con el mismo análisis y establecer ciertas comparativas.

#### 3.4.1 Influencia de la orientación de las fibras sobre la carga crítica

Ya se vio en el apartado anterior, donde se representaba la variación de la carga crítica de pandeo respecto a la variación del parámetro de curvatura  $h/R$ , que la orientación de las fibras del material compuesto que conforman la lámina jugaba un papel muy importante en el carga crítica de pandeo.

De manera que se decide estudiar como, para una serie de láminas con distintos parámetro de curvatura  $h/R$ , la carga crítica de pandeo se ve afectada con la variación de la orientación de las fibras.

La orientación de las fibras viene dado según lo explicado en el Capítulo 2 por el ángulo  $\phi$ , por lo que se realizará una batería de ensayos para estos valores de orientación de la fibra:  $\phi = \{0, 15, 30, 45, 60, 75, 90\}$ .

Señalar que, para poder cerrar el problema mediante los datos de partida, se van a mostrar los resultados correspondientes a un porcentaje en volumen de fibra  $v_f = 0.45$ , dejando para su apartado correspondiente la influencia que tiene dicho parámetro micromecánico sobre la estabilidad de la lámina.

En la siguiente Tabla 3-7, se muestran los resultados obtenidos de esta batería de ensayos de una lámina para varios valores del parámetro de curvatura, y para la serie de orientaciones de fibra descritas anteriormente:

Si se comparan los resultados obtenidos con los de [2], la primera fila de la Tabla 3-6 corresponde con los mismos valores que se presentan en ese proyecto, puesto que este análisis se ha comenzado para un valor de  $h/R=0$  correspondiente a una lamina totalmente plana.

Tabla 3-7. Cargas críticas de pandeo para varios  $h/R$  y varias orientaciones de fibra con  $\nu_f = 0.45$ 

$N_{x,cr} [N/m]$							
$h/R$	$\phi=0^\circ$	$\phi=15^\circ$	$\phi=30^\circ$	$\phi=45^\circ$	$\phi=60^\circ$	$\phi=75^\circ$	$\phi=90^\circ$
0	5,138	8,181	15,297	15,925	13,379	9,554	7,547
$1 \cdot 10^{-5}$	10,011	14,566	21,152	21,776	18,774	15,615	13,080
$1 \cdot 10^{-4}$	32,416	34,078	41,518	46,125	41,248	42,611	37,273
$5 \cdot 10^{-4}$	72,741	54,498	66,876	86,910	76,009	79,124	76,740
$1 \cdot 10^{-3}$	101,693	66,742	76,614	116,734	100,998	104,710	104,422
$5 \cdot 10^{-3}$	221,242	121,626	116,767	184,039	199,986	202,966	212,555
0.1	937,751	356,725	312,522	479,261	831,912	812,111	857,711
0.25	1417,090	487,605	410,644	652,291	1339,270	1319,820	1411,150
0.5	1860,040	594,861	490,881	784,148	1739,970	1820,190	2007,200
0.75	2101,160	648,286	525,684	827,447	1910,230	2037,180	2304,650
0.9	2182,580	661,851	532,471	842,550	1962,430	2104,600	2413,500
0.95	2201,010	664,119	533,021	839,967	1971,850	2118,340	2443,130
1	2216,420	665,322	532,365	834,933	1977,741	2128,656	2471,009

Es muy interesante, analizar la información obtenida en la gráfica de la Figura 3-10, dónde se obtienen las máximas cargas críticas de pandeo según la orientación que presentan las fibras que conforman la lámina, puesto que este comportamiento será un punto a profundizar a continuación en este apartado.

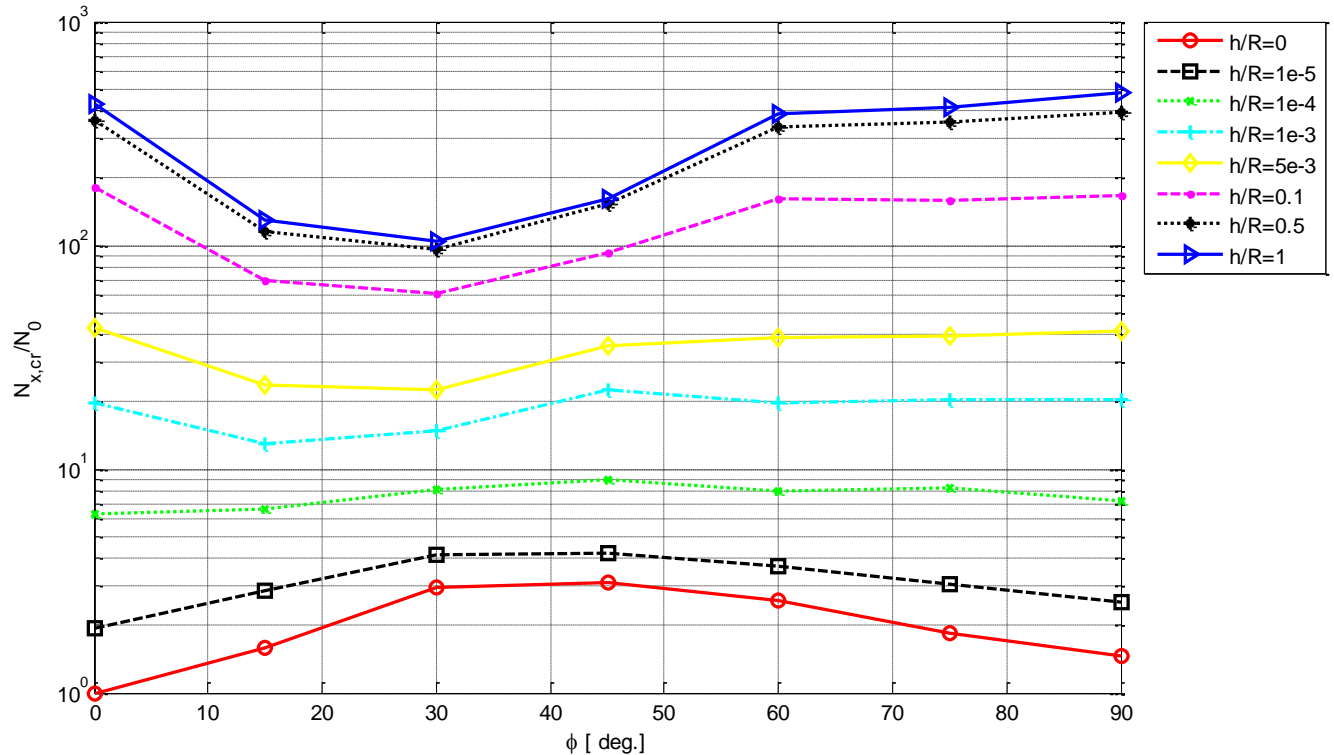


Figura 3-10. Influencia de la orientación de las fibras en la carga crítica de pandeo  $N_{x,cr}$ .

Incidir nuevamente que la gráfica se ha adimensionalizado para el valor de la carga crítica correspondiente a  $N_0 = N_{x,cr} (\phi = 0^\circ, \nu_f = 0.45)$ .

Cuando se analiza lo presentado en el proyecto [2], destaca entre las conclusiones más importantes de dicho proyecto que la carga crítica de pandeo de una lámina, si se compara para varias orientaciones de fibra, posee un máximo entorno  $\phi = 40^\circ$ . Sin embargo, si se aumenta la curvatura de la lámina, como se ha procedido en este proyecto con la variación del parámetro de curvatura  $h/R$ , destaca que dicho máximo de la carga crítica de pandeo ya no se obtienen cuando las orientaciones de fibra se encuentran entorno a  $\phi = 40^\circ$ . En la Figura 3-10, se observa como a medida que se aumenta el parámetro de curvatura  $h/R$ , la tendencia de la curva que describe la variación de la carga crítica de pandeo respecto a la variación de la orientación de las fibras cambia completamente.

Para valores de  $h/R$  mínimos trasciende que existe una región de transición donde la carga crítica de pandeo se mantiene aproximadamente uniforme en comparación con el mismo ensayo para una lámina sin curvatura ( $h/R = 0$ ). Pero a medida que el parámetro de curvatura va aumentando, y llega a valores entorno a  $h/R = 1 \cdot 10^{-3}$ , la tendencia cambia completamente, y ahora el máximo de la carga crítica de pandeo se obtiene para orientaciones de fibra  $\phi = 0^\circ$  y  $\phi = 90^\circ$ , cambiando radicalmente el comportamiento de una lámina con curvatura frente a otra sin curvatura. Es más, la carga crítica de pandeo para orientaciones entorno a  $\phi = 40^\circ$  no solo deja de ser el máximo, sino que pasa a ser el mínimo, cambiando totalmente como se ha descrito, la tendencia de la variación de la carga crítica de pandeo respecto a la variación de las fibras.

En las siguientes figuras, se analiza como varían los modos de pandeo respecto a la orientación de las fibras que conforman la lámina. Primero se representan los modos de pandeo para una lámina totalmente plana ( $h/R = 0$ ), a continuación para una lámina con una curvatura muy reducida como es  $h/R = 1 \cdot 10^{-3}$  (Figura 3-11), y por último en la Figura 3-12, para una lámina totalmente cilíndrica.

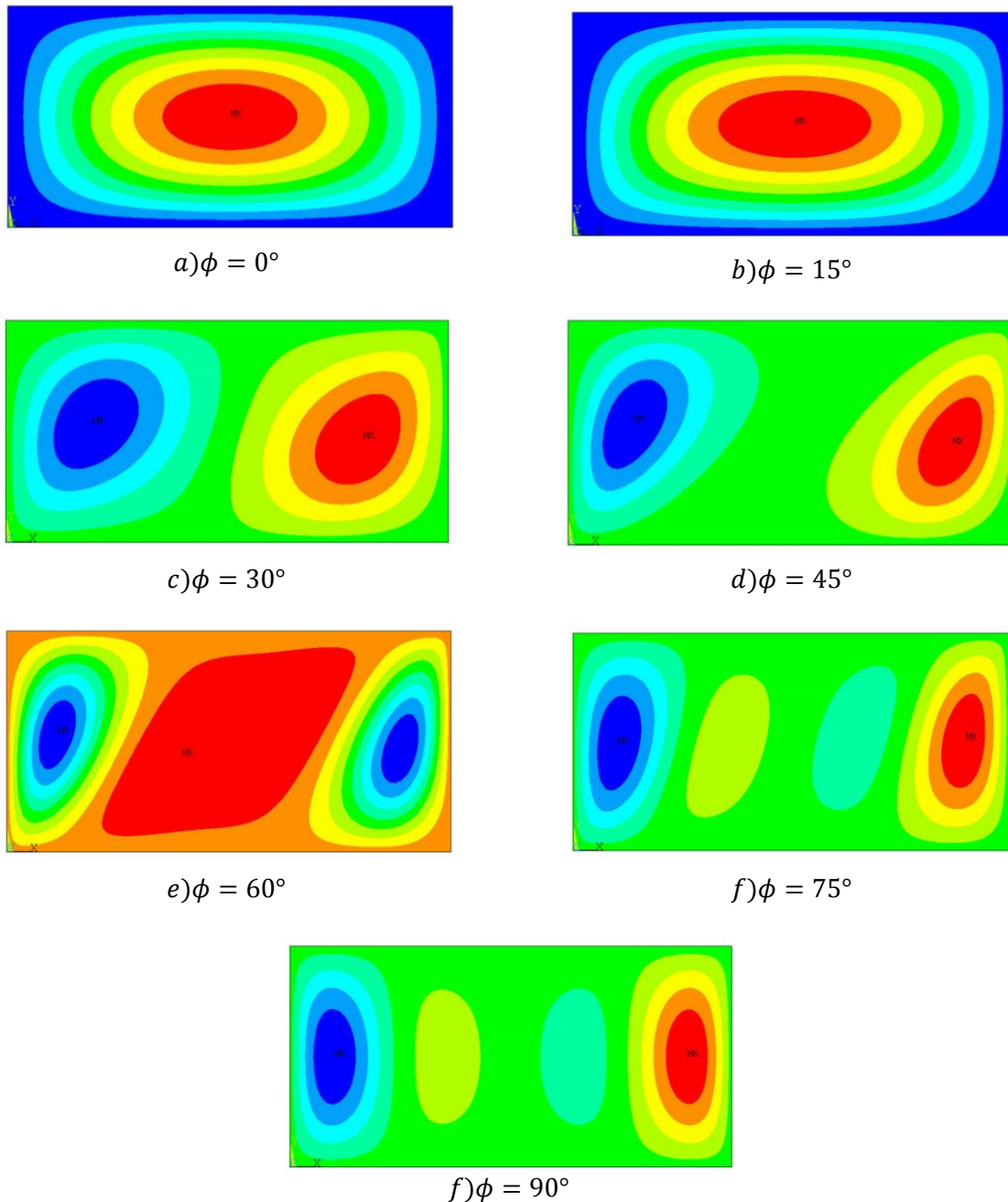


Figura 3-11. Modos de pandeo para una lámina  $v_f = 0.45$  y  $h/R = 0$  y varias orientaciones de fibra.

Si se analizan los modos de pandeo obtenidos en la Figura 3-11, correspondientes a una lámina cuyo parámetro de curvatura es  $h/R = 0$  (lo que corresponde con una lámina totalmente plana), resulta como era de esperar que se obtengan los mismos modos de pandeo recogidos en [2]. De manera que cuando la lámina no presenta ningún tipo de curvatura, el cambio de la orientación de las fibras que conforman la lámina supone el aumento del número de semiondas del modo de pandeo de dicha lámina.

Esta tendencia no se ve disminuida si la lámina presenta cierta curvatura. Si se analiza la siguiente Figura 3-12, donde se representa una lámina con una curvatura moderada, concretamente con un parámetro  $h/R = 1 \cdot 10^{-3}$ , destaca que cuando la orientación de las fibras se corresponde con el mismo sentido de las cargas aplicadas  $\phi = 0^\circ$ , el número de semiondas en la dirección axial y en la dirección circunferencial es el mismo, obteniendo una distribución de semiondas sobre la lámina simétrica. Pero en el momento que la orientación de las fibras es distinta de cero, las semiondas pasan a ser únicamente dos de gran tamaño sobre la lámina.

Además al aumentar la orientación de las fibras, el número de semiondas aumenta en la dirección axial en mayor proporción que en la dirección radial, obteniendo un gran número de ellas cuando la orientación de las fibras ronda  $\phi = 60^\circ$ .

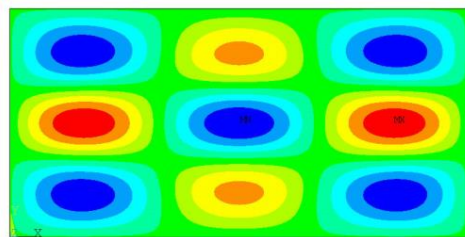
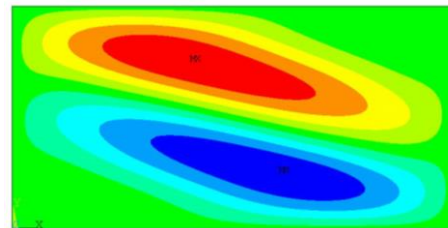
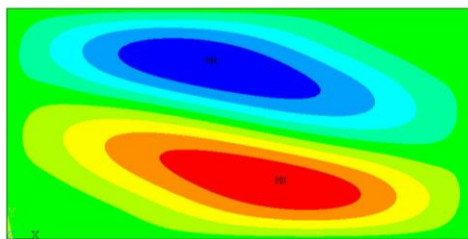
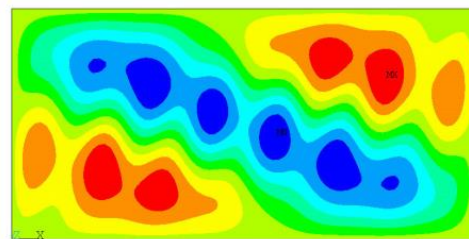
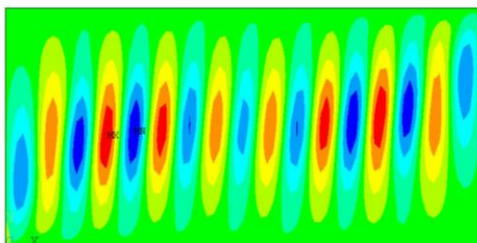
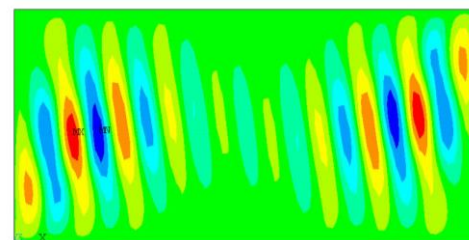
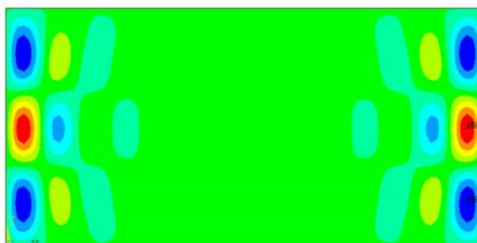
a)  $\phi = 0^\circ$ b)  $\phi = 15^\circ$ c)  $\phi = 30^\circ$ d)  $\phi = 45^\circ$ e)  $\phi = 60^\circ$ f)  $\phi = 75^\circ$ f)  $\phi = 90^\circ$ f)  $\phi = 90^\circ$ , *Perspectiva*

Figura 3-12. Modos de pandeo para una lámina  $\nu_f = 0.45$  y  $h/R = 1 \cdot 10^{-3}$ , y varias orientaciones de fibra.

Por último, si se analizan los modos de pandeo de una lámina con una curvatura totalmente cilíndrica como la que se representa en la Figura 3-13, destaca que para orientaciones de fibras mínimas,  $15^\circ \leq \phi \leq 30^\circ$ , el modo de pandeo de la lámina presenta una gran número de semiondas de un tamaño menor, que si se compara para orientaciones de fibras a partir de  $\phi = 45^\circ$ , donde el número de semiondas se reduce pero aumentan en tamaño, distribuyéndose de manera uniforme en la dirección circunferencial de la lámina (Ver perspectiva Figura 3-13).

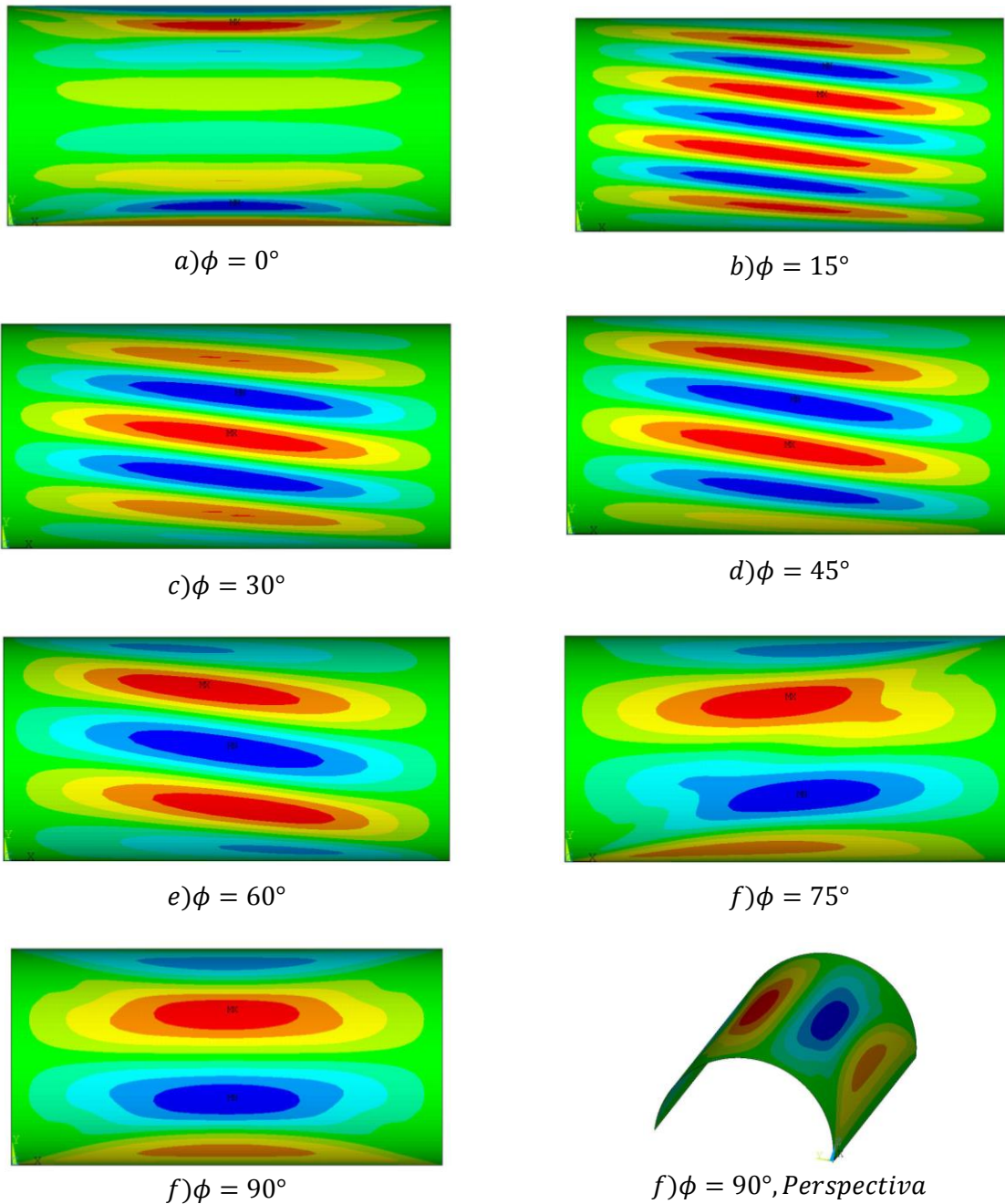


Figura 3-13. Modos de pandeo para una lámina  $\nu_f = 0.45$  y  $h/R = 1$ , y varias orientaciones de fibra.



### 3.4.2 Influencia del porcentaje en volumen de fibra sobre la carga crítica

Una vez analizada la influencia que tiene la orientación de las fibras en la carga crítica de pandeo de láminas que poseen curvatura, se decide estudiar en este apartado la influencia que tiene otra propiedad micromecánica de los materiales compuestos como es el porcentaje en volumen de fibra.

Por lo que siguiendo el mismo procedimiento que en el apartado anterior, se decide estudiar para una serie de láminas con distintos parámetro de curvatura  $h/R$ , cómo se ve afectada la carga crítica de pandeo con la variación de la fracción en volumen de fibra que posee la lámina.

Se llevará a cabo una batería de ensayos para las orientaciones de fibra y los valores del parámetro  $h/R$  estudiados en los apartados anteriores, pero utilizando cada vez un porcentaje en volumen de fibra de los valores siguientes estudiados:  $v_f = \{0.45, 0.6, 0.75, 0.8\}$ .

En las siguientes Tablas, se muestran los resultados obtenidos para cada fracción de volumen de fibra utilizada, que vendrán a completar los resultados mostrados previamente en la Tabla 3-7, donde se incluían las cargas críticas de pandeo obtenidas para los distintos parámetros  $h/R$  y orientaciones de fibra estudiadas para una lámina con  $v_f = 0.45$ .

Tabla 3-8. Cargas críticas de pandeo para varios  $h/R$  y varias orientaciones de fibra con  $v_f = 0.6$

$N_{x,cr} [N/m]$							
$h/R$	$\phi=0^\circ$	$\phi=15^\circ$	$\phi=30^\circ$	$\phi=45^\circ$	$\phi=60^\circ$	$\phi=75^\circ$	$\phi=90^\circ$
0	6,610	10,528	19,739	20,704	17,480	12,502	9,824
$1 \cdot 10^{-5}$	13,169	19,108	27,544	28,293	24,516	20,460	17,213
$1 \cdot 10^{-4}$	42,433	44,642	54,502	60,628	54,207	55,459	48,813
$5 \cdot 10^{-4}$	95,110	71,152	88,216	114,442	100,143	102,988	100,421
$1 \cdot 10^{-3}$	133,966	87,541	101,610	150,349	133,252	135,296	137,499
$5 \cdot 10^{-3}$	290,066	158,633	155,564	237,453	264,252	278,510	290,066
0.1	1230,830	465,588	417,505	617,630	1097,990	1055,600	1127,700
0.25	1860,530	636,774	550,092	841,823	1740,980	1714,560	1856,560
0.5	2443,650	778,232	657,744	1008,680	2121,970	2377,320	2649,190
0.75	2763,020	849,036	704,362	1065,580	2341,390	2662,780	3029,760
0.9	2870,910	866,130	713,151	1086,420	2347,510	2746,720	3181,880
0.95	2895,760	869,833	714,012	1082,770	2331,780	2764,610	3220,820
1	2916,842	872,806	713,522	1075,823	2329,740	2778,737	3256,329

Tabla 3-9. Cargas críticas de pandeo para varios  $h/R$  y varias orientaciones de fibra con  $\nu_f = 0.75$ 

$h/R$	$N_{x,cr} [N/m]$						
	$\phi=0^\circ$	$\phi=15^\circ$	$\phi=30^\circ$	$\phi=45^\circ$	$\phi=60^\circ$	$\phi=75^\circ$	$\phi=90^\circ$
0	8,741	13,721	24,549	26,284	22,583	16,444	13,063
$1 \cdot 10^{-5}$	18,036	25,359	35,040	36,259	32,092	27,141	23,334
$1 \cdot 10^{-4}$	57,468	58,769	70,764	79,625	72,148	73,141	65,566
$5 \cdot 10^{-4}$	128,232	94,832	116,230	149,030	134,309	136,150	134,774
$1 \cdot 10^{-3}$	183,353	117,697	134,657	189,170	179,431	180,181	186,789
$5 \cdot 10^{-3}$	392,528	213,291	210,368	299,033	358,085	350,892	373,996
0.1	1662,640	632,882	567,956	786,554	1459,690	1412,590	1533,680
0.25	2516,900	868,451	761,192	1069,110	1883,370	2301,750	2532,120
0.5	3309,490	1066,090	911,102	1293,820	2269,050	3193,560	3561,090
0.75	3751,390	1165,840	975,455	1368,460	2490,450	3581,950	4053,630
0.9	3908,580	1188,060	983,868	1387,640	2512,350	3695,520	4272,890
0.95	3945,180	1195,110	986,679	1384,570	2507,410	3719,580	4336,210
1	3976,500	1202,092	989,491	1378,177	2500,110	3738,459	4397,230



Tabla 3-10. Cargas críticas de pandeo para varios  $h/R$  y varias orientaciones de fibra con  $v_f = 0.80$ 

$h/R$	$N_{x,cr} [N/m]$						
	$\phi=0^\circ$	$\phi=15^\circ$	$\phi=30^\circ$	$\phi=45^\circ$	$\phi=60^\circ$	$\phi=75^\circ$	$\phi=90^\circ$
0	9,751	15,155	26,300	28,447	24,671	18,168	14,559
$1 \cdot 10^{-5}$	20,405	28,159	37,920	39,469	35,329	30,102	26,195
$1 \cdot 10^{-4}$	64,648	64,979	77,517	87,744	80,143	80,904	73,352
$5 \cdot 10^{-4}$	143,847	105,794	128,301	161,602	149,798	150,871	150,742
$1 \cdot 10^{-3}$	205,924	131,849	149,144	204,004	200,569	199,695	209,908
$5 \cdot 10^{-3}$	441,029	239,332	235,505	322,705	401,608	389,985	418,114
0.1	1864,870	714,706	638,310	854,689	1470,320	1577,720	1726,480
0.25	2825,580	982,506	862,058	1159,670	1909,100	2575,240	2853,540
0.5	3716,810	1208,680	1029,440	1404,570	2288,590	3569,860	3975,370
0.75	4220,140	1323,170	1106,270	1494,520	2505,600	4009,220	4527,390
0.9	4401,930	1347,850	1114,470	1510,440	2536,360	4136,980	4771,550
0.95	4445,940	1356,420	1118,670	1508,210	2356,220	4163,820	4841,170
1	4484,694	1365,040	1122,802	1502,903	2345,967	4184,690	4907,949

Como conclusión más interesante al analizar las Tablas mostradas, destaca el hecho de que el aumento de la fracción de volumen de fibra de la lámina supone un aumento de la carga crítica de pandeo independientemente del incremento de la curvatura de la lámina, lo que concuerda con lo que se presenta en [2]. En dicho proyecto ya se determinó que la variación del tanto por ciento de volumen de fibra de la lámina, suponía únicamente un aumento de la carga crítica que soportaba la lámina plana, quedando dicho parámetro micromecánico como una propiedad que aumentaba la carga que podría soportar una lámina plana. Y en este proyecto se confirma que el aumento de la fracción de volumen de fibra de una lámina con curvatura, sigue suponiendo un aumento de la carga crítica de pandeo que soporta dicha lámina, como se muestra en las siguientes figuras.

Primero se van a mostrar una serie de gráficas donde se aprecia la variación de la carga crítica de pandeo respecto a la variación del parámetro  $h/R$  para una orientación de fibra  $\phi$  fija, y para la serie de fracciones de volumen de fibra  $v_f$  indicadas anteriormente.

Estas gráficas, (las representadas en las figuras 3-14, 3-15 y 3-16), están adimensionalizadas para la carga crítica presentada en la expresión siguiente:  $N_0 = N_{x,cr}$  ( $h/R = 0, v_f = 0.45$ ).

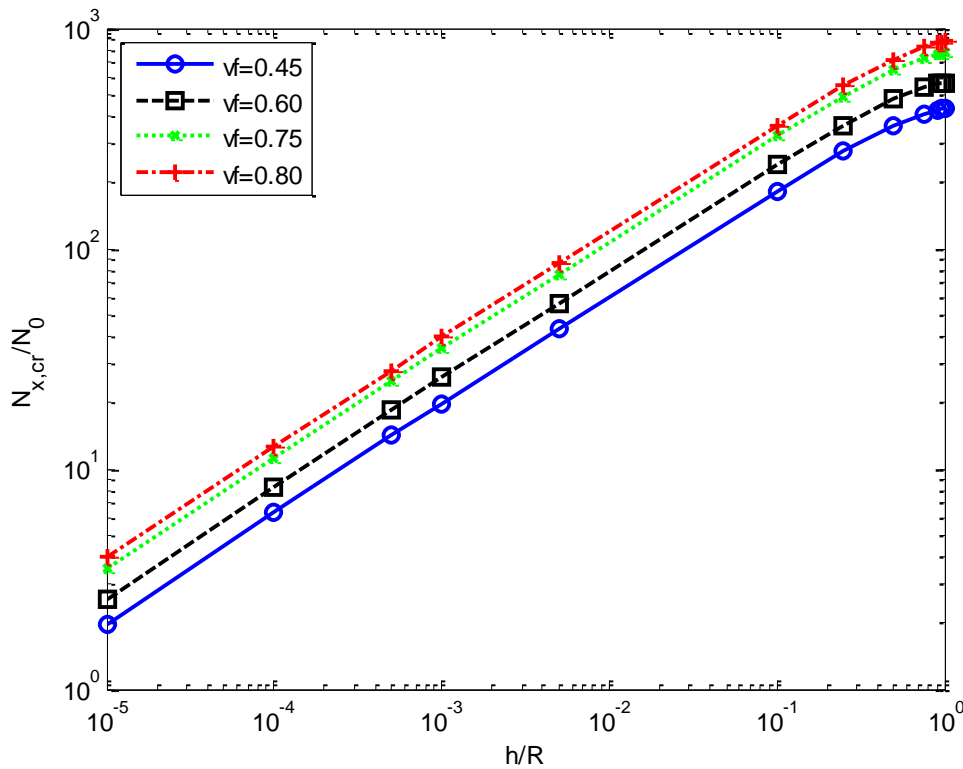


Figura 3-14. Influencia de  $v_f$  en  $N_{x,cr}$  según  $h/R$  de una lámina con una orientación de fibras  $\phi = 0^\circ$ .

Si se analiza la gráfica mostrada en la Figura 3-14, se confirma lo que se comentó sobre los resultados mostrados en las Tablas anteriores, que al aumentar el tanto por ciento en volumen de fibra  $v_f$  de la lámina aumenta la carga crítica de pandeo, independientemente del aumento que esta última tiene en relación con el aumento del parámetro de curvatura  $h/R$ .

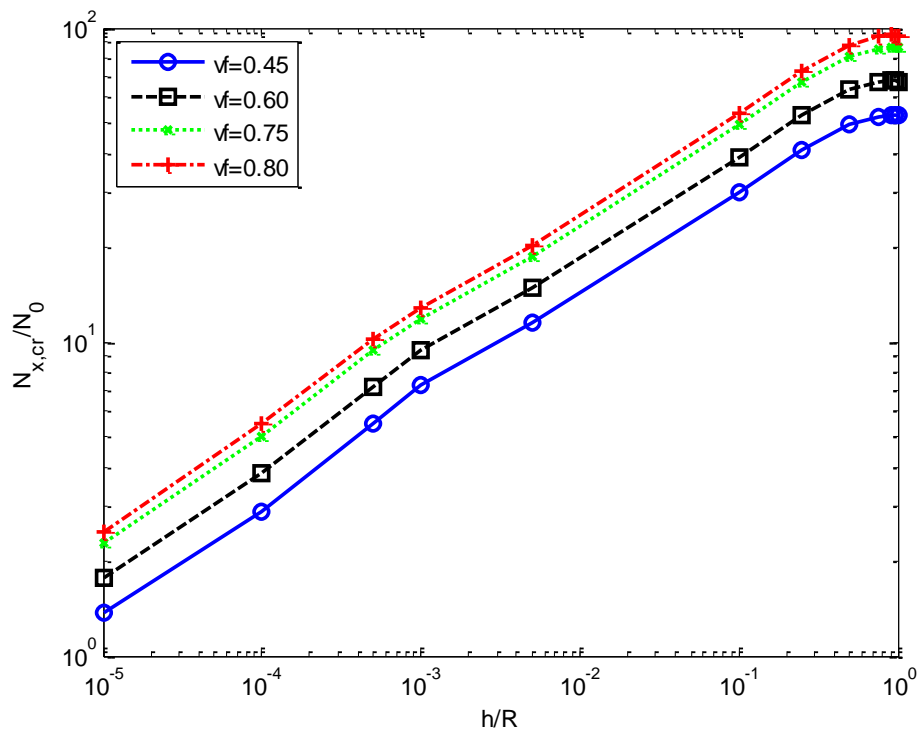


Figura 3-15. Influencia de  $v_f$  en  $N_{x,cr}$  según  $h/R$  de una lámina con una orientación de fibras  $\phi = 30^\circ$ .

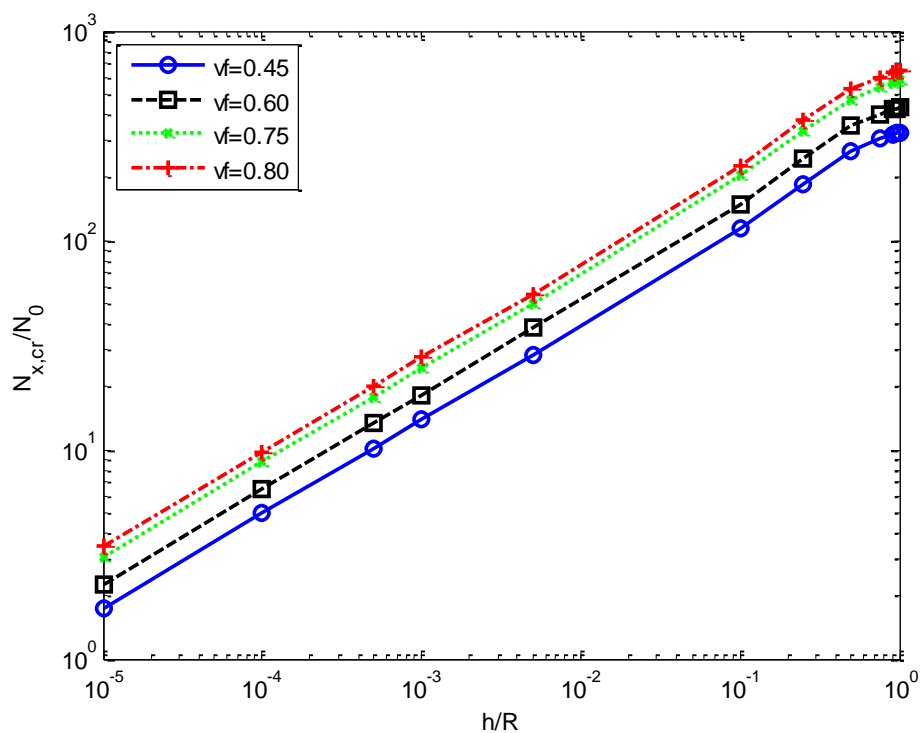


Figura 3-16. Influencia de  $v_f$  en  $N_{x,cr}$  según  $h/R$  de una lámina con una orientación de fibras  $\phi = 90^\circ$ .

Además de la mostrada en la Figura 3-14, se han incluidos las gráficas de las figuras 3-15 y 3-16 donde se representa la variación de la carga crítica de pandeo respecto a la variación del parámetro  $h/R$  para una orientaciones de fibra distintas  $\phi = \{0,30,90\}$ , y se confirma de esta manera que la orientación de la fibra no es un parámetro relevante en el hecho de que la carga crítica de pandeo se vea incrementada por el aumento de la fracción de volumen de fibra de una lámina.

Para concluir con este apartado, se ha querido representar la variación de la carga crítica de pandeo de una lámina respecto a la variación de la fracción de volumen de fibra para un valor del parámetro de curvatura  $h/R$  concreto. Por ello, y según lo representado en las siguientes figuras 3-17, 3-18 y 3-19, puede concluirse que el aumento de la fracción de volumen de fibra que posee una lámina supone un aumento de la carga crítica de pandeo, independientemente también de la curvatura que presente dicha lámina, ya que aunque se representan las gráficas para distintos valores de  $h/R = \{1 \cdot 10^{-5}, 1 \cdot 10^{-3}, 0.1\}$ , la tendencia de aumento permanece en dichas gráficas.

La gráfica representada en la Figura 3-17, así como las representadas en las figuras 3-18 y 3-19, están adimensionalizadas para la carga crítica de pandeo siguiente:  $N_0 = N_{x,cr} (\phi = 0^\circ, v_f = 0.45)$ .

Por último, resaltar uno de los aspectos explicados en el apartado anterior sobre la influencia de la orientación de las fibras de una lámina con curvatura. En las gráficas siguientes también es posible apreciar como la orientación de las fibras para la que se obtiene la máxima carga de pandeo de una lámina cambia según la curvatura que está presente.

Cuando la curvatura es mínima o casi inexistente, como en el caso de láminas totalmente planas, el máximo de la carga crítica de pandeo se ha obtenido, al igual que en [2], para orientaciones de fibra entorno a  $\phi = 40^\circ$ , como se aprecia en la Figura 3-17, la línea que representa  $\phi = 30^\circ$  y  $\phi = 45^\circ$ .

Sin embargo, cuando el parámetro de curvatura  $h/R$  aumenta, comienza a aparecer una zona de transición donde las cargas críticas de pandeo de una lámina permanecen más o menos constantes según la orientación de las fibras que ésta posea, como se observa en la Figura 3-18, donde la mayoría de las líneas aparecen superpuestas.

Y cuando el parámetro de curvatura posee valores muy elevados (Figura 3-19), tal y como se analizó en el apartado previo referente a la variación de las cargas críticas de pandeo respecto a la variación de  $h/R$ , los máximos valores de dichas cargas se obtienen para orientaciones de fibras extremas como son  $\phi = 0^\circ$  y  $\phi = 90^\circ$ .

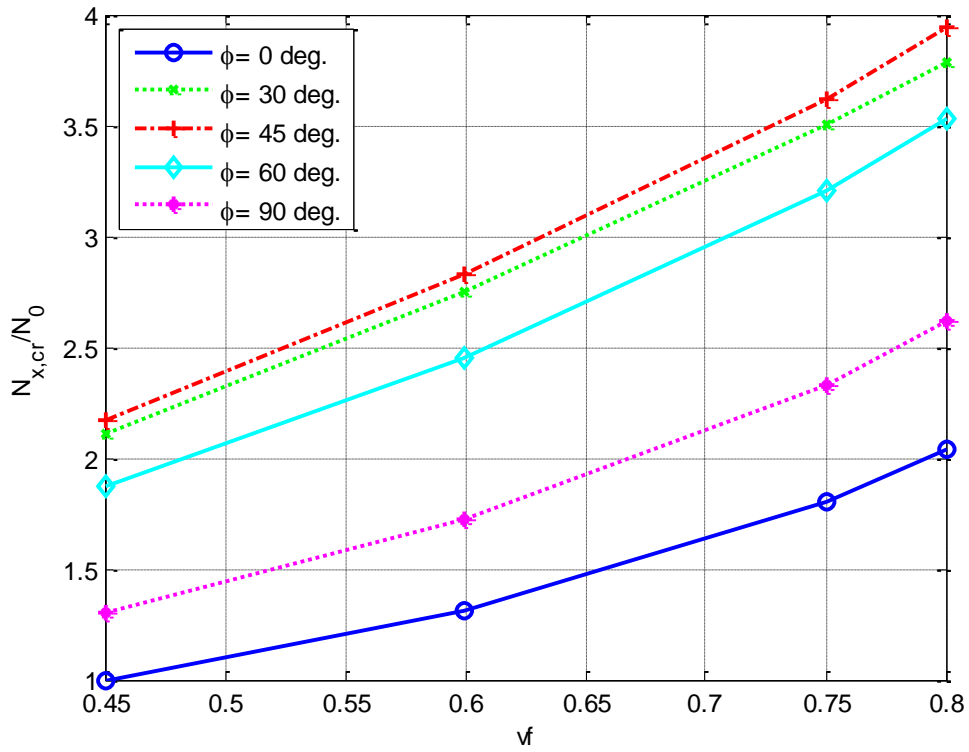


Figura 3-17. Influencia de  $v_f$  en  $N_{x,cr}$  de una lámina con  $h/R = 1 \cdot 10^{-5}$ .

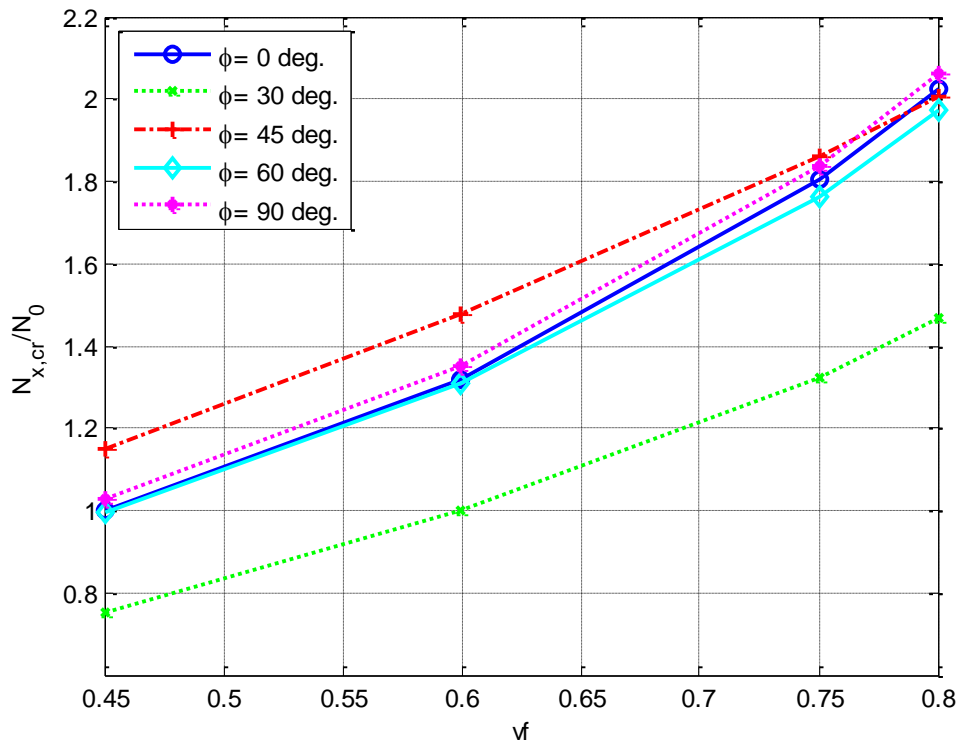


Figura 3-18. Influencia de  $v_f$  en  $N_{x,cr}$  de una lámina con  $h/R = 1 \cdot 10^{-3}$ .

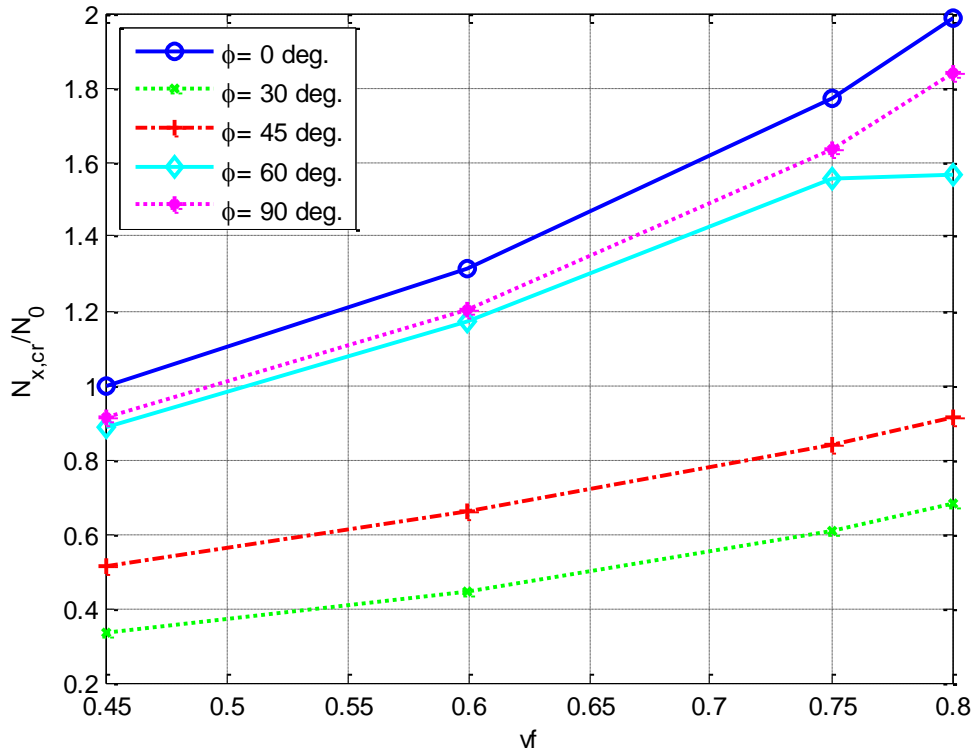


Figura 3-19. Influencia de  $v_f$  en  $N_{x,cr}$  de una lámina con  $h/R = 0.1$ .

### 3.4.3 Comparación entre el modelo de fibra continua y de fibra corta

Hasta ahora, todos los ensayos realizados para determinar cómo influye la variación de las propiedades micromecánicas como la orientación de las fibras o la fracción de volumen de fibra sobre la carga crítica de pandeo de una lámina con curvatura, se han realizado utilizando las constantes ingenieriles del material calculadas en el Capítulo 2 para el modelo de fibra continua.

Sin embargo, también se explicó la existencia de otro modelo de fibra distinto al de Hopkins y Chamis de fibra continua: el modelo de Halpin y Tsai, fibra corta. El hecho de utilizar el modelo de fibra corta para determinar las propiedades ingenieriles del material (ver Apartado 2.2.2), creaba la necesidad de trabajar con un parámetro más como era la relación de aspecto  $r_{asp}$ .

De esta manera, y realizando los mismos ensayos que para el modelo de fibra continua analizado en los apartados anteriores, se analiza la carga crítica de pandeo para las relaciones de aspecto  $r_{asp} = \{10,100,1000\}$ , cada una de ellas para una fracción de volumen de fibra de la serie de valores escogidas, y para un valor del parámetro de curvatura  $h/R$ , obteniendo resultados análogos a los obtenidos en los apartados anteriores para el modelo de fibra continua.

A continuación se muestran las tablas con los resultados obtenidos para láminas con una fracción de volumen de fibra  $v_f = 0.45$  para las relaciones de aspecto  $r_{asp} = \{10,100,1000\}$ , sobre las que se realizará un análisis cualitativo mediante una serie de gráficas, mostradas en las figuras posteriores.

Tabla 3-11. Cargas críticas para varios  $h/R$  y varias orientaciones de fibra con  $\nu_f = 0.45$  y  $r_{asp} = 10$ 

$N_{x,cr} [N/m]$							
$h/R$	$\phi=0^\circ$	$\phi=15^\circ$	$\phi=30^\circ$	$\phi=45^\circ$	$\phi=60^\circ$	$\phi=75^\circ$	$\phi=90^\circ$
0	4,864	5,800	8,281	8,961	7,990	6,328	5,545
$1 \cdot 10^{-5}$	8,365	9,932	12,568	13,253	12,357	10,933	9,943
$1 \cdot 10^{-4}$	25,690	23,893	25,938	29,008	28,314	30,109	27,699
$5 \cdot 10^{-4}$	55,976	42,898	43,766	55,925	53,453	57,257	57,407
$1 \cdot 10^{-3}$	79,017	52,788	50,152	75,853	71,477	75,840	79,925
$5 \cdot 10^{-3}$	168,682	100,745	83,741	118,537	146,111	152,512	159,242
0.1	714,321	314,412	229,709	347,672	659,324	667,545	628,190
0.25	1084,220	441,103	312,695	455,442	1016,150	1076,210	1117,070
0.5	1436,980	541,516	377,937	533,678	1293,720	1427,030	1514,690
0.75	1640,620	592,199	408,832	600,135	1448,470	1614,400	1740,370
0.9	1717,710	606,025	420,035	618,874	1497,330	1683,320	1831,950
0.95	1737,320	608,707	419,265	616,946	1505,410	1697,620	1855,310
1	1755,138	610,594	415,531	610,700	1509,578	1708,586	1876,569

Tabla 3-12. Cargas críticas para varios  $h/R$  y varias orientaciones de fibra con  $\nu_f = 0.45$  y  $r_{asp} = 100$ 

$N_{x,cr} [N/m]$							
$h/R$	$\phi=0^\circ$	$\phi=15^\circ$	$\phi=30^\circ$	$\phi=45^\circ$	$\phi=60^\circ$	$\phi=75^\circ$	$\phi=90^\circ$
0	4,903	7,722	13,826	14,387	12,104	8,718	7,005
$1 \cdot 10^{-5}$	9,322	13,321	19,155	19,853	17,197	14,320	12,062
$1 \cdot 10^{-4}$	30,250	31,011	37,173	41,624	37,641	39,515	34,435
$5 \cdot 10^{-4}$	67,844	50,420	59,820	78,207	69,345	73,510	70,992
$1 \cdot 10^{-3}$	94,320	61,488	61,806	105,000	92,017	97,179	96,302
$5 \cdot 10^{-3}$	205,533	113,491	103,993	168,085	182,736	189,051	196,427
0.1	866,871	332,638	277,262	433,259	767,950	765,195	795,058
0.25	1310,920	458,809	367,335	599,220	1234,620	1247,640	1308,310
0.5	1719,500	559,443	439,097	724,498	1590,550	1698,630	1841,660
0.75	1943,080	609,407	470,085	771,976	1749,890	1900,200	2111,510
0.9	2018,400	622,729	474,985	779,680	1800,500	1968,110	2213,770
0.95	2035,420	624,488	475,972	778,753	1809,720	1983,160	2241,460
1	2049,630	624,748	476,702	776,185	1815,586	1995,509	2267,451



Tabla 3-13. Cargas críticas para varios  $h/R$  y varias orientaciones de fibra con  $\nu_f = 0.45$  y  $r_{asp} = 1000$ 

$N_{x,cr} [N/m]$							
$h/R$	$\phi=0^\circ$	$\phi=15^\circ$	$\phi=30^\circ$	$\phi=45^\circ$	$\phi=60^\circ$	$\phi=75^\circ$	$\phi=90^\circ$
0	5,050	8,071	15,214	15,731	13,082	9,266	7,323
$1 \cdot 10^{-5}$	9,550	14,069	20,818	21,446	18,269	15,063	12,488
$1 \cdot 10^{-4}$	31,156	32,980	40,269	44,612	39,690	41,392	35,879
$5 \cdot 10^{-4}$	70,051	52,707	64,218	83,358	72,823	76,789	73,949
$1 \cdot 10^{-3}$	96,814	64,119	73,137	111,759	96,554	101,653	99,638
$5 \cdot 10^{-3}$	212,304	117,349	110,227	182,713	190,663	196,853	204,397
0.1	897,749	339,606	293,886	473,998	790,984	786,613	819,559
0.25	1357,100	467,782	382,912	645,149	1274,800	1276,840	1344,530
0.5	1778,930	569,107	457,510	773,211	1656,870	1754,110	1905,550
0.75	2006,780	619,124	490,019	815,990	1818,620	1960,580	2187,650
0.9	2082,370	632,680	497,238	831,912	1868,510	2026,300	2291,540
0.95	2099,180	634,074	497,382	829,153	1877,620	2040,670	2319,810
1	2113,017	633,472	497,135	823,846	1883,440	2052,313	2346,405

Analizando la gráfica mostrada en la Figura 3-20, según los resultados mostrados en las Tablas anteriores puede decirse que para un tanto por ciento en volumen de fibra  $\nu_f$  fijo, al aumentar la relación de aspecto de las fibras que conforman la lámina aumenta la carga crítica de pandeo, independientemente del aumento que esta última tiene en relación con el aumento del parámetro de curvatura  $h/R$ .

También es interesante resaltar lo mostrado junto con las figuras 3-21 y 3-22, el hecho de que la tendencia de aumento de la carga crítica con el aumento del parámetro de curvatura  $h/R$  es la misma para todas las relaciones de aspecto estudiadas, como demuestran las pendientes de dichas curvas prácticamente paralelas. Solo resaltar que para orientaciones de fibra en torno a  $\phi = 30^\circ$ , las cargas críticas para valores de  $h/R$  entorno a  $h/R = 1 \cdot 10^{-3}$ , son menores en comparación con el resto de relaciones de aspecto estudiadas como se aprecia en la Figura 3-21. Hecho que no ocurre para orientaciones de fibra  $\phi = 0^\circ$  y  $\phi = 90^\circ$ , como se aprecia en las figuras 3-21 y 3-23.

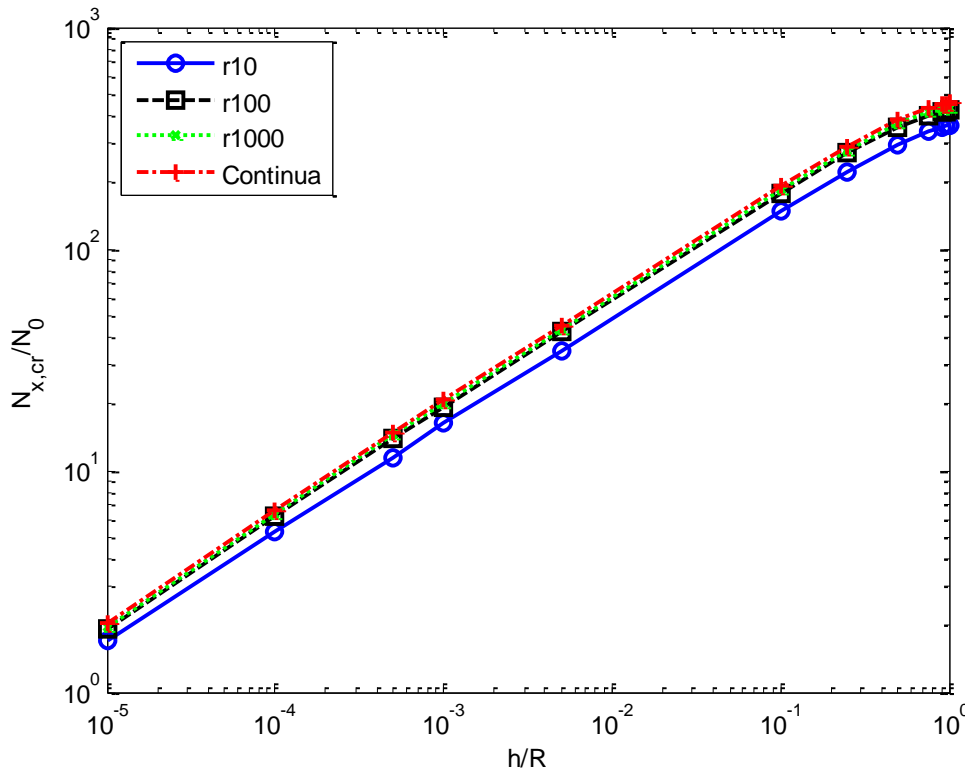


Figura 3-20. Influencia de  $v_f$  en  $N_{x,cr}$  según  $h/R$  de una lámina  $v_f = 0.45$  y  $\phi = 0^\circ$ .

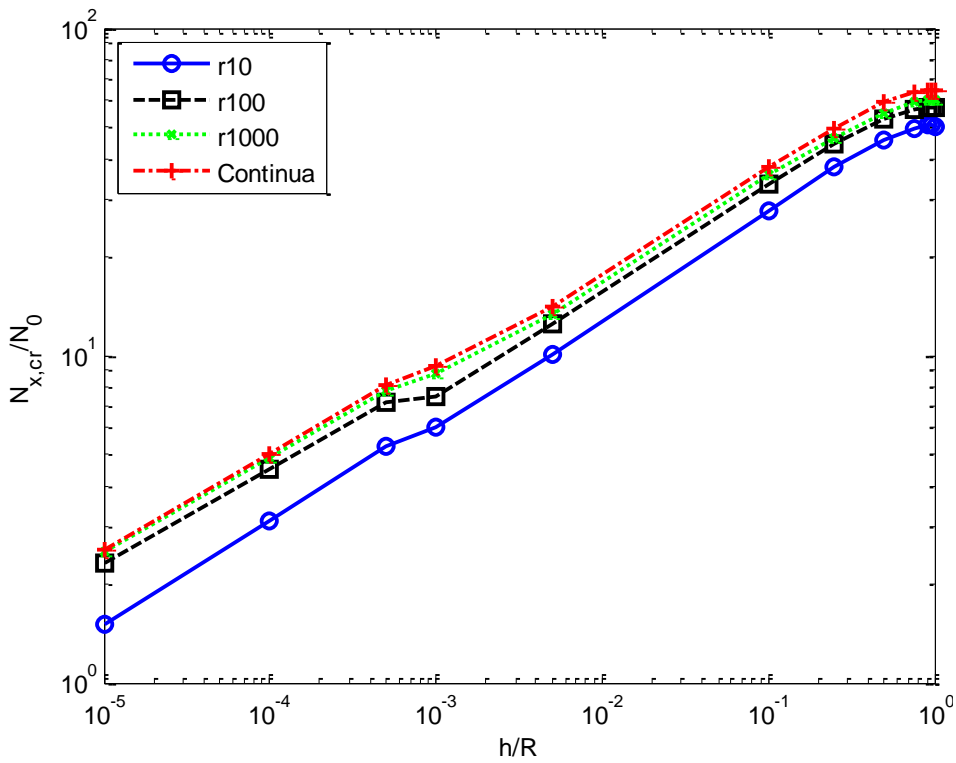


Figura 3-21. Influencia de  $v_f$  en  $N_{x,cr}$  según  $h/R$  de una lámina  $v_f = 0.45$  y  $\phi = 30^\circ$ .

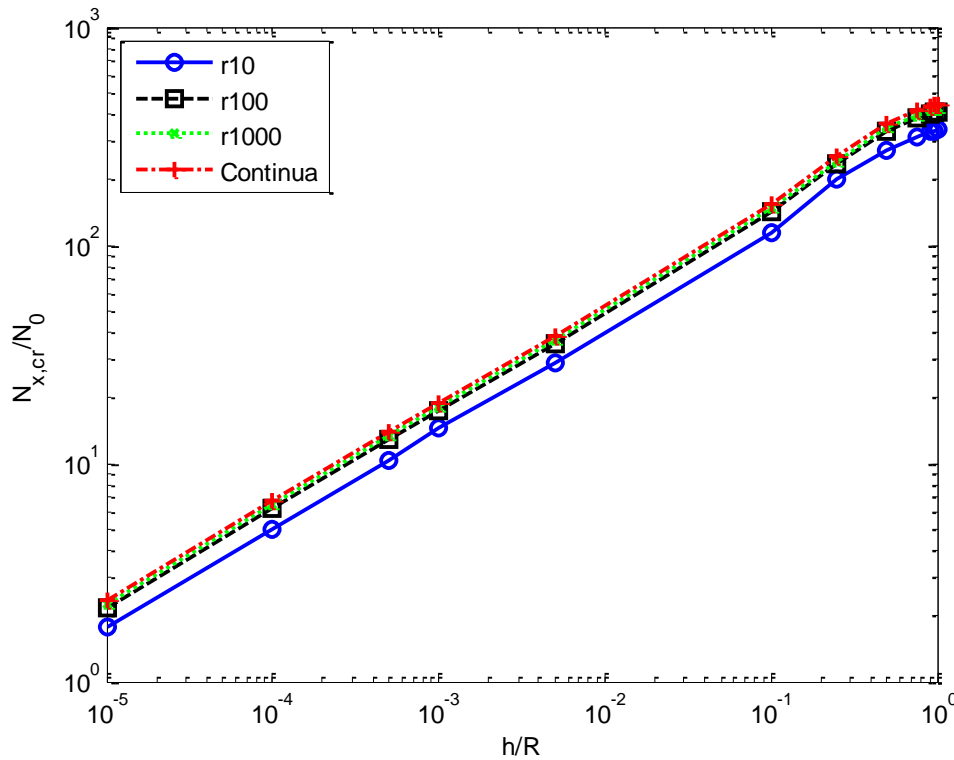


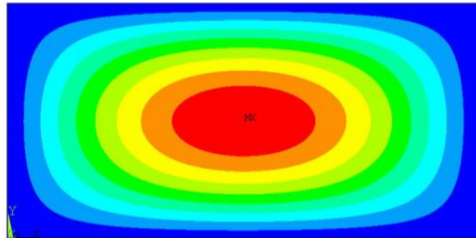
Figura 3-22. Influencia de  $v_f$  en  $N_{x,cr}$  según  $h/R$  de una lámina  $v_f = 0.45$  y  $\phi = 90^\circ$

Estas gráficas, (las representadas en las figuras 3-20, 3-21 y 3-22), están adimensionalizadas para la carga crítica presentada en la expresión siguiente:  $N_0 = N_{x,cr}(h/R = 0, r_{asp} = 10)$ .

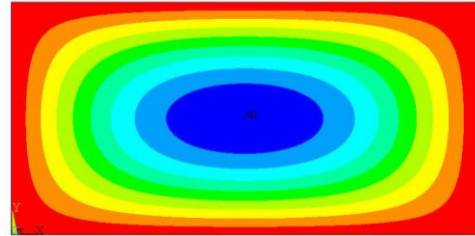
Continuando con esta comparativa entre el modelo de fibra continua y el de fibra corta para distintas relaciones de aspecto, se muestra ahora, en las figuras 3-23, 3-24 y 3-25, una comparativa entre los modos de pandeo obtenidos para cada modelo de fibra.

En definitiva lo que se obtiene es una ligera variación de los modos de pandeo según el valor del parámetro de curvatura que posea la lámina. Por un lado, si la lámina no posee curvatura, como la usada en la comparativa de la Figura 3-23, el modo de pandeo de la lámina cuando las orientaciones de fibra se encuentran entorno a  $\phi = 90^\circ$ , presenta la variación de una mínima disminución de la semionda central del modo de pandeo, pasando de dos semiondas en el modelo de fibra continua, a una semionda de un tamaño ligeramente mayor en el modo del modelo de fibra corta.

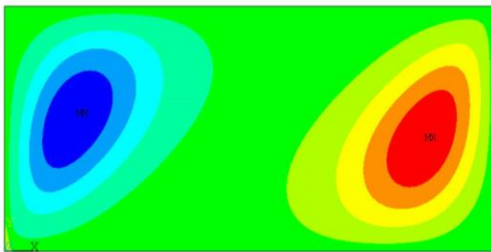
Pero por otro lado, cuando las láminas presentan una cierta curvatura, como las mostradas en las figuras 3-24 y 3-25 para los valores correspondientes de  $h/R$ , sí que se aprecia un cambio significativo en los modos de pandeo. Independientemente de la orientación de las fibras, el modo de pandeo obtenido para el modelo de fibra corta posee un número mayor de semiondas, aunque siendo éstas de menor tamaño que las obtenidas para el modelo de fibra continua.



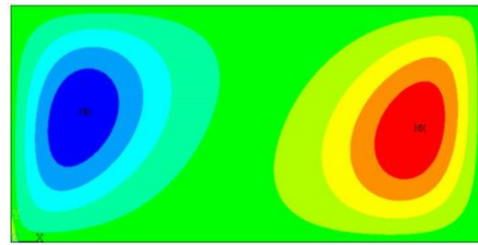
a. 1)  $\phi = 0^\circ$  Modelo Fibra Continua



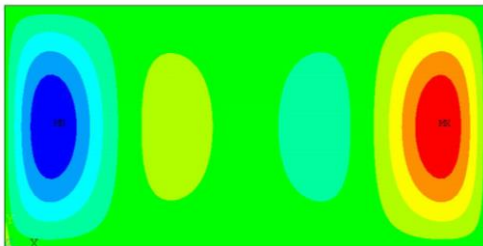
a. 2)  $\phi = 0^\circ$  Modelo Fibra Corta



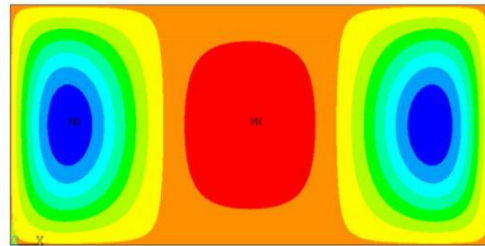
b. 1)  $\phi = 45^\circ$  Modelo Fibra Continua



b. 2)  $\phi = 45^\circ$  Modelo Fibra Corta

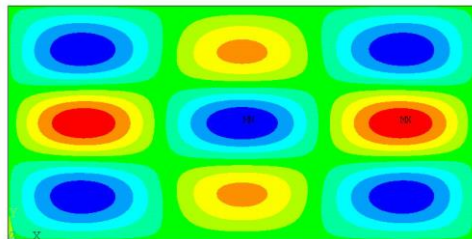


c. 1)  $\phi = 90^\circ$  Modelo Fibra Continua

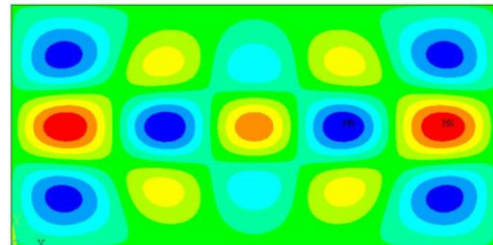


c. 2)  $\phi = 90^\circ$  Modelo Fibra Corta

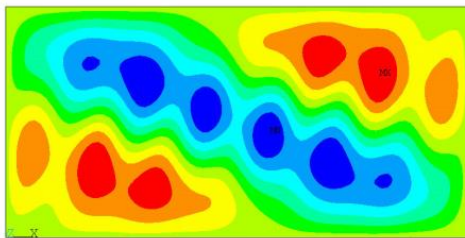
Figura 3-23. Comparativa modos de pandeo entre modelo fibra continua y fibra corta, para una lámina  $v_f = 0.45$  y  $h/R = 0$  y varias orientaciones de fibra.



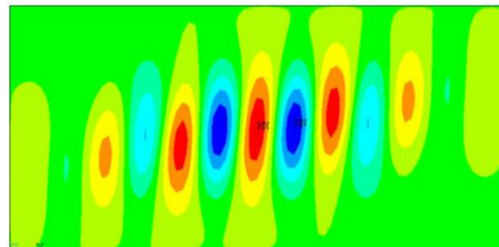
a. 1)  $\phi = 0^\circ$  Modelo Fibra Continua



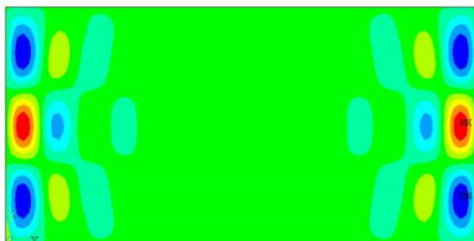
a. 2)  $\phi = 0^\circ$  Modelo Fibra Corta



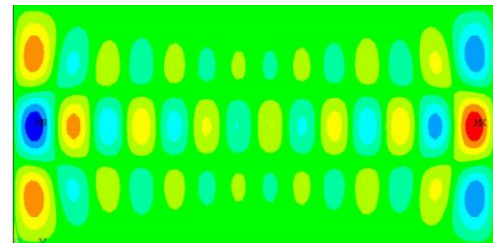
b. 1)  $\phi = 45^\circ$  Modelo Fibra Continua



b. 2)  $\phi = 45^\circ$  Modelo Fibra Corta



c. 1)  $\phi = 90^\circ$  Modelo Fibra Continua



d. 2)  $\phi = 90^\circ$  Modelo Fibra Corta

Figura 3-24. Comparativa modos de pandeo entre modelo fibra continua y fibra corta, para una lámina  $v_f = 0.45$  y  $h/R = 1 \cdot 10^{-3}$  y varias orientaciones de fibra.

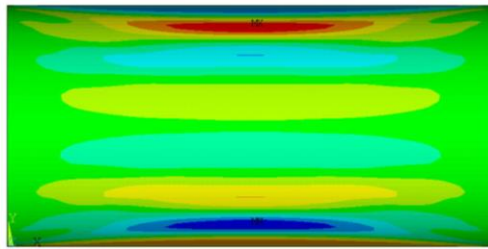
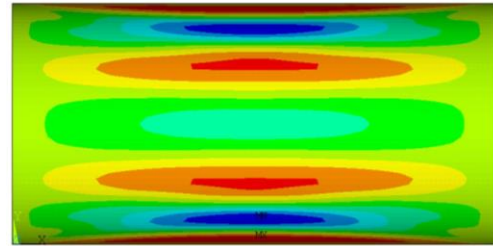
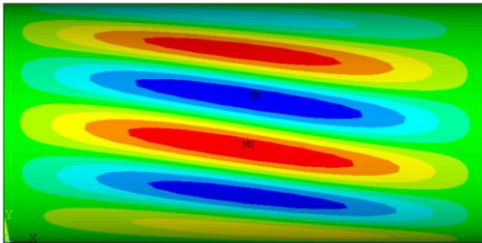
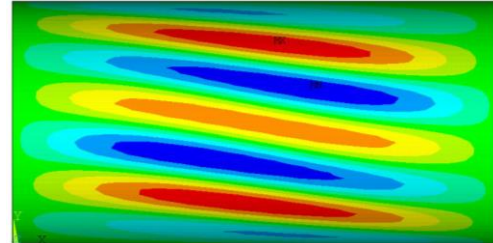
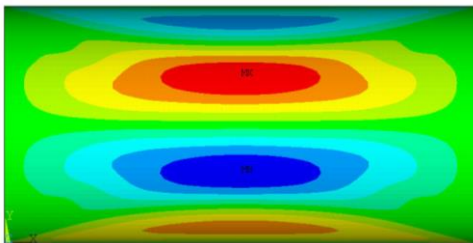
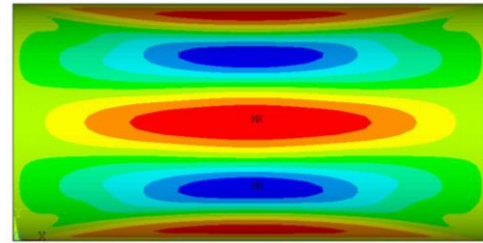
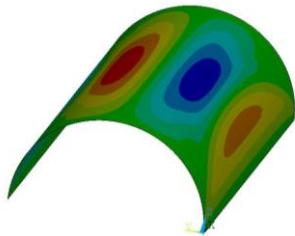
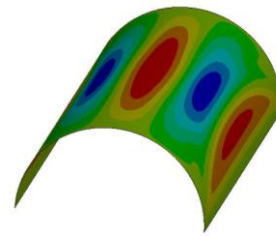
a. 1)  $\phi = 0^\circ$  Modelo Fibra Continuaa. 2)  $\phi = 0^\circ$  Modelo Fibra Cortab. 1)  $\phi = 45^\circ$  Modelo Fibra Continuab. 2)  $\phi = 45^\circ$  Modelo Fibra Cortac. 1)  $\phi = 90^\circ$  Modelo Fibra Continuac. 2)  $\phi = 90^\circ$  Modelo Fibra Cortac. 1.1)  $\phi = 90^\circ$ , Perspectivac. 2.1)  $\phi = 90^\circ$ , Perspectiva

Figura 3-25. Comparativa modos de pandeo entre modelo fibra continua y fibra corta, para una lámina  $\nu_f = 0.45$  y  $h/R = 1$  y varias orientaciones de fibra.

Para concluir con este apartado, se ha querido representar en las figuras 3-26 y 3-27, la variación de la carga crítica de pandeo de una lámina respecto a la variación de la orientación de las fibras que la conforman, para un valor del parámetro de curvatura  $h/R$  concreto, y para los distintos modelos de fibra continua y fibra corta estudiados en este proyecto.

En estas gráficas se resume como el modelo de fibra continua proporciona valores mayores de la carga crítica de pandeo que para del modelo de fibra corta. Pero señalar que cuando la relación de aspecto posee un valor de  $r_{asp} = 1000$ , los resultados son muy similares a los obtenidos para el modelo de fibra continua, aspecto que ya se pudo ver en las gráficas anteriores de las figuras 3-20, 3-21 y 3-22, donde casi ni se aprecia la diferencia entre las líneas correspondientes al modelo de fibra continua y al de fibra corta con  $r_{asp} = 1000$ .

Y además es significativo volver a obtener la conclusión, en las figuras 3-26 y 3-27, sobre la orientación de la

fibra para la que se obtiene la máxima carga crítica de pandeo, ya que independientemente del modelo de fibra que se esté utilizando para el análisis, para láminas con  $h/R = 0$  (láminas totalmente planas) el máximo de la carga crítica se obtiene cuando la orientación de las fibras ronda  $\phi = 40^\circ$ , pero para láminas con  $h/R = 1$  (láminas totalmente cilíndricas) se obtiene el mínimo de la carga crítica cuando la orientación de las fibras ronda  $\phi = 40^\circ$ .

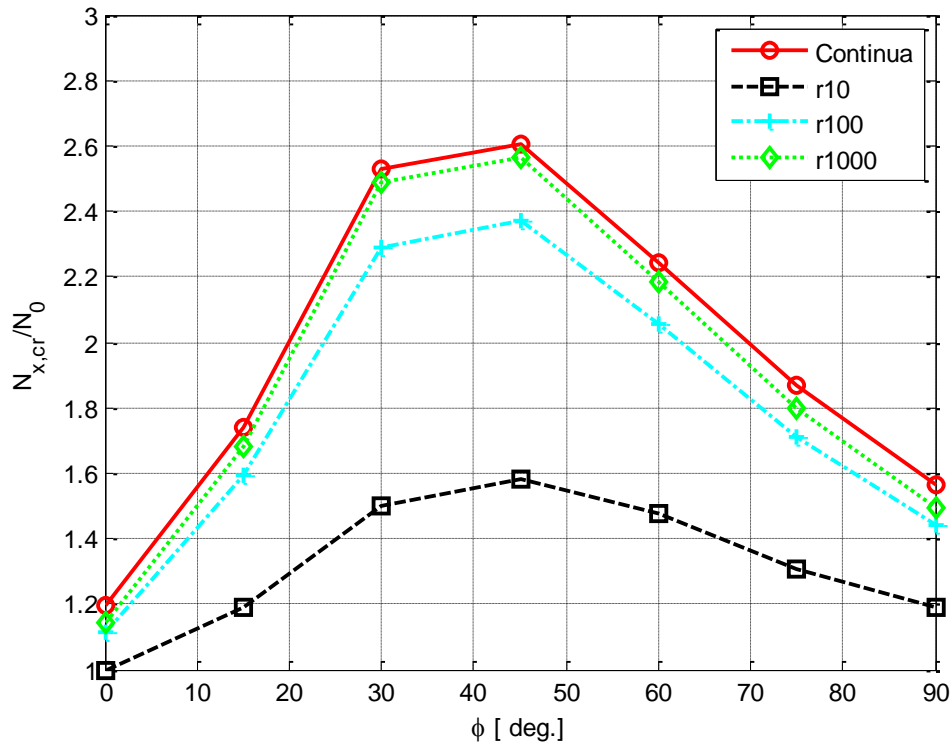


Figura 3-26. Comparación  $N_{x,cr}$  de una lámina con  $h/R = 1 \cdot 10^{-5}$ , para varias  $r_{asp}$  y fibra continua.

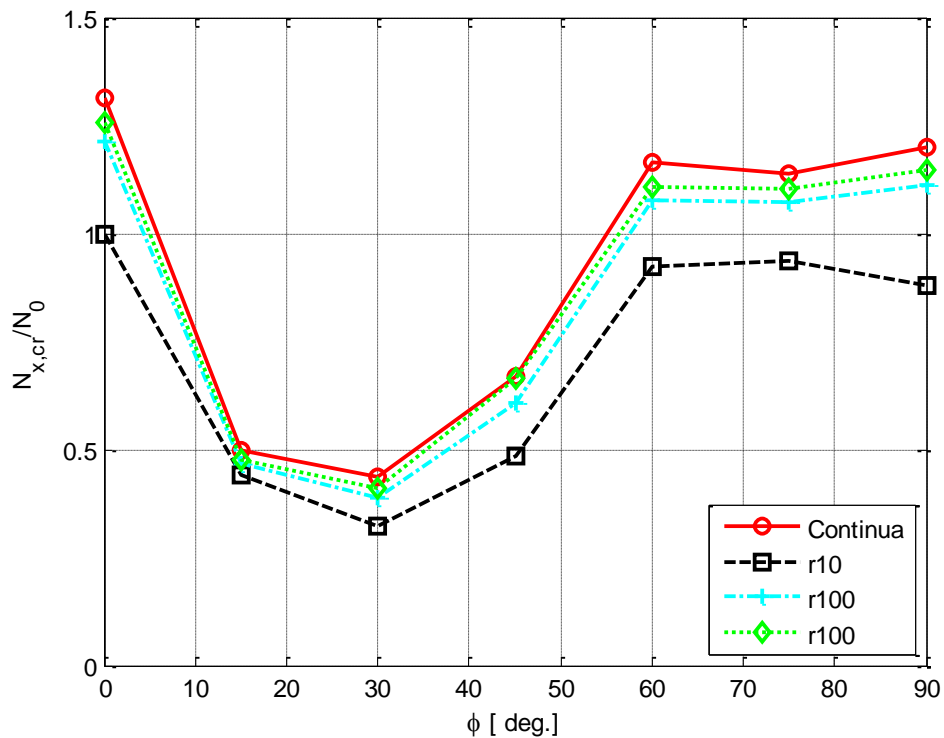


Figura 3-27. Comparación  $N_{x,cr}$  de una lámina con  $h/R = 0.1$  para varias  $r_{asp}$  y fibra continua.





# **4 ESTABILIDAD DE UN PANEL COMPUESTO**

## **SOMETIDO A CORTANTE**

### **4.1 Introducción**

En este capítulo se analiza la estabilidad de una lámina de material compuesto cuando se ve sometida a cargas tangenciales.

Recopilando toda la información proporcionada en el Capítulo 3, junto con lo que trasciende del proyecto presentado por [2], ha quedado analizado el comportamiento que tiene una lámina bajo la actuación de cargas de compresión coplanarias. Pero en la realidad, las estructuras están afectadas por más tipos de solicitaciones, por ejemplo, las cargas tangenciales.

De manera que se van a realizar una serie de ensayos para analizar, de forma similar a la del Capítulo 3, el comportamiento de una lámina sometida a cargas tangenciales, así como la influencia que tiene la variación de las propiedades micromecánicas sobre la carga tangencial crítica de pandeo de las láminas, realizando ensayos en los que se variarán la orientación de las fibras, la fracción en volumen de fibra utilizada, así como una comparativa entre el modelo de fibra usada (fibra continua o fibra corta). Y todo ello nuevamente, junto con un análisis de las deformadas de las láminas ensayadas, teniendo como referencia lo estudiado en [2].

#### **4.1.1 Descripción del problema de estudio**

Para poder llevar a cabo los ensayos nuevamente mediante el software comercial ANSYS Inc., será necesaria la implementación de un modelo numérico que represente, de la manera más fiel posible, el comportamiento de una lámina de material compuesto ante cargas tangenciales.

La lámina de material compuesto será la misma utilizada para el análisis del Capítulo 3, tomando como referencia la implementada en [2]. Se considerará una sola lámina, del material descrito en el Capítulo 2, fabricada con el material IM7/8551-7 Epoxy, plana y de geometría rectangular, y cuyas dimensiones serán las siguientes:

Tabla 4-1. Dimensiones lámina sometida a cortante

Dimensión	Valor
$a$ [cm]	70
$b$ [cm]	35
$t$ (espesor) [cm]	0.02

En la siguiente Figura 4-1 se representa un esquema del problema:

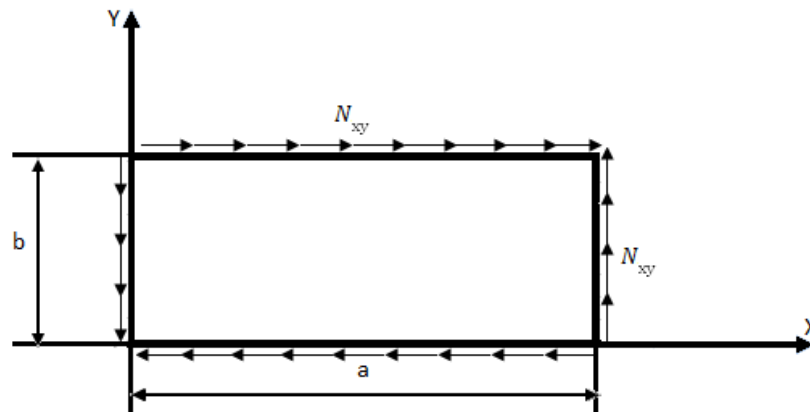


Figura 4-1. Lámina sometida a cortante.

Respecto a las condiciones de contorno en desplazamientos utilizadas para este problema, se han realizado los ensayos para una lámina simplemente apoyada, salvo una particularidad en dos esquinas de dicha placa, tal y como se explica en la siguiente Tabla:

Tabla 4-2. Condiciones de contorno en desplazamientos

Grado de libertad	Bordes $x = 0$ ; $x = a$	Bordes $y = 0$ ; $y = b$	Esquina $x=0$ $y=0$	Esquina $x=0$ , $y=b$
Desplazamiento según x	Libre	Libre	Impedido	Impedido
Desplazamiento según y	Libre	Libre	Impedido	Libre
Desplazamiento según z	Impedido	Impedido	Impedido	Impedido
Rotaciones alrededor del eje x,y,z	Libre	Libre	Libre	Libre

Para la implementación del modelo numérico, se ha utilizado el elemento SHELL 281 por las mismas razones usadas en el Capítulo 3, puesto que es uno de los elementos de la librería de la versión del software comercial ANSYS usada para este proyecto, que mejor implementa las propiedades del material sobre este tipo de estructuras bajo las solicitaciones estudiadas.

Por otro lado, y atendiendo a la discretización de la lámina, se ha utilizado una malla de 80x60 elementos, tras un estudio de convergencia en el que se llegó a la mejor solución de compromiso posible entre el tiempo de cálculo y los resultados obtenidos.

Para el cálculo de la carga crítica tangencial que produce el pandeo de la lámina, se utilizará el mismo método de extracción de autovalores utilizado en el Capítulo 3, y según lo explicado en [2]: el método de Lanczos. Y de nuevo se aplicará una carga inicial de  $N_{xy} = N_0 = 1 \frac{N}{m}$ , para que el factor de pandeo que calcula ANSYS corresponda directamente con la carga crítica según lo explicado previamente ya en el apartado 3.2, tal y como se muestra en la siguiente expresión:

$$N_{cr} = N_0 * f_{cr} \quad (4-1)$$

En la siguiente Figura 4-2, se muestra el modelo de elementos finitos de la lámina de estudio para estos ensayos según las características que se han ido describiendo en este apartado:

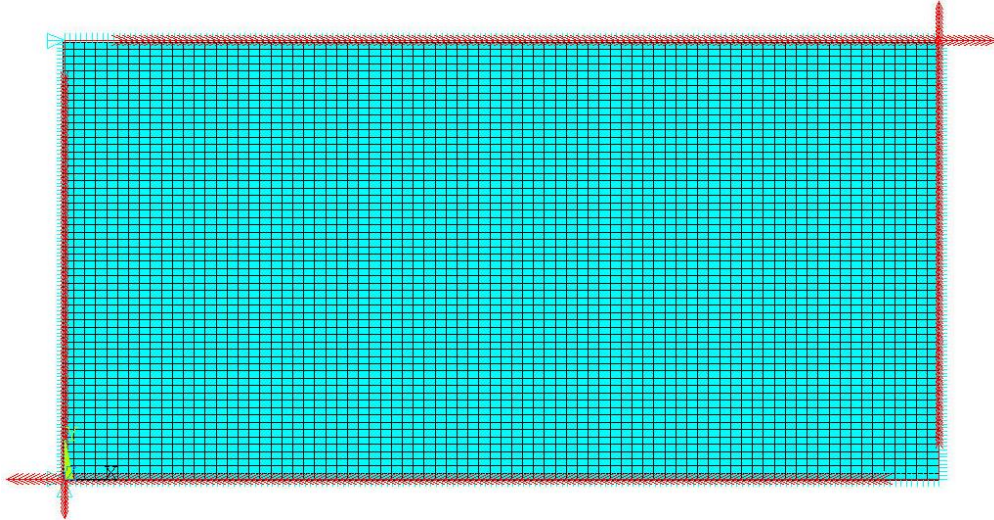


Figura 4-2. Modelo de elementos finitos de la lámina sometida a cortante.

## 4.2 Problema de referencia: Ejemplo de validación

Una vez creado el modelo numérico para realizar los ensayos del problema descrito en el apartado anterior, en este apartado se reproducirá mediante dicho código, un problema de la literatura, tomando como referencia los apuntes teóricos de [10], para poder así comparar los resultados analíticos con los obtenidos mediante el modelo numérico.

La resolución de este problema llevará a la obtención de la carga tangencial de pandeo de una lámina de un material isótropo, cuya expresión analítica según la teoría expuesta en [10], viene dada por la siguiente expresión:

$$\tau_{cr} = K \frac{\pi^2 E}{12(1 - \nu^2)} \left(\frac{t}{b}\right)^2 \quad (4-2)$$

Siendo la constante  $K$ :

$$K = 5,34 + \frac{4}{\left(\frac{a}{b}\right)^2} \quad \text{si } \frac{a}{b} \geq 1; \quad K = 4 + \frac{5,34}{\left(\frac{a}{b}\right)^2} \quad \text{si } \frac{a}{b} \leq 1 \quad (4-3)$$

Se tomará como ejemplo para este problema analítico, una lámina de Acero, cuyas propiedades y características son las de la siguiente Tabla:

Tabla 4-3. Valores geométricos y propiedades lámina de Acero

Dimensión	Valor
$a$ [cm]	125
$b$ [cm]	50
$t$ (espesor) [cm]	10
$E$ [GPa]	210
$\nu$	0.30

Con todo esto, y usando los datos de la Tabla 4-3 en la expresión 4-2, se obtiene una carga tangencial crítica de:

$$N_{cr} = \tau_{cr} \cdot t = K \frac{\pi^2 E}{12(1 - \nu^2)} \left(\frac{t}{b}\right)^2 \cdot t = 4540,018 \frac{N}{m} \quad (4-4)$$

Por otro lado, utilizando el modelo numérico descrito en el apartado anterior, que representa mediante el método de los elementos finitos el mismo problema, para el ejemplo de una lámina de Acero sometida a esfuerzos cortantes, se obtiene una carga tangencial crítica utilizando los mismos datos descritos en la Tabla 4-3, de:

$$N_{cr}^{ANSYS} = 4517,77 \frac{N}{m} \quad (4-5)$$

Una vez calculada dicha carga tangencial crítica mediante el método analítico y el modelo numérico, se comparan ambos valores, siendo la diferencia entre ambos resultados obtenidos para el mismo problema implementado a modo de ejemplo:

$$Diferencia [\%] = \frac{N_{cr}^{Analítico} - N_{cr}^{ANSYS}}{N_{cr}^{Analítico}} \cdot 100 = 0,49\% \quad (4-6)$$

Y dado que la diferencia entre dichos resultados es inferior al 1%, se puede considerar que el modelo numérico queda validado para realizar los ensayos en este Capítulo, permitiendo hacer uso en los siguientes apartados de dicho modelo para analizar la influencia que tiene la variación de ciertas propiedades micromecánicas sobre la carga crítica de pandeo de una lamina bajo esfuerzos cortantes.

### 4.3 Influencia de la orientación de la carga respecto a la orientación de las fibras

Comenzando con el análisis del problema de una placa de material compuesto sometida a esfuerzos cortantes, en este apartado se estudiará como varía la respuesta de dicha estructura según la dirección en la que se aplican las cargas tangenciales.

Recordar en este punto, que la lámina de material compuesto de estudio en este proyecto, sobre la que se está analizando la variación de la carga crítica de pandeo frente a la variación de las propiedades micromecánicas, corresponde con una lámina cuyas propiedades son transversalmente isótropas, tal y como se explicó en el Capítulo 2.

En el Capítulo 3, donde se analizó el comportamiento de la lámina sometida a cargas de compresión coplanarias, no cabía la distinción entre la forma de aplicación de la carga, puesto que sobre los dos extremos que se sometían a compresión, no existe por la propia definición de la cargas de compresión coplanaria, otra dirección de la compresión que la que se ha estudiado.

Sin embargo, si se somete la lámina a cargas tangenciales, tal y como se aprecia en la figuras 4-1 y 4-2, existiría la posibilidad de poder aplicar dichas cargas en dos sentidos diferentes, tal y como se describe en la siguiente Figura 4-3:

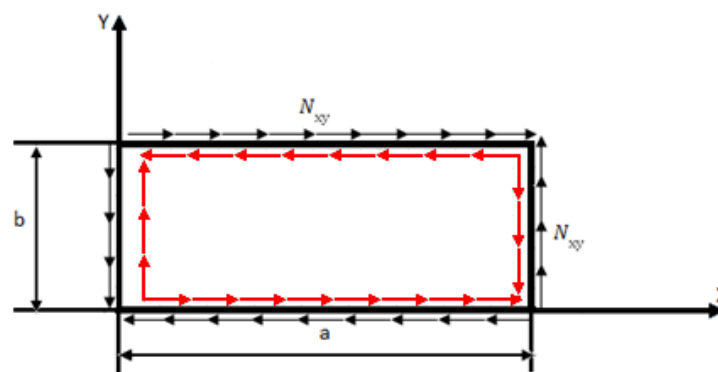


Figura 4-3. Diferencia en el sentido de aplicación cargas tangenciales.

Esta posibilidad de aplicar las cargas en dos sentidos diferentes no resultaría de interés en el caso de que el análisis se estuviera realizando sobre una lámina cuyas propiedades fueran isótropas. Pero este proyecto, se basa precisamente en el análisis de la variación de la carga crítica de pandeo respecto a las propiedades de una lámina de material compuesto, cuyo interés está basado precisamente en el carácter transversalmente isótropo de sus propiedades. Por ello se van a distinguir dos casos: cargas tangenciales aplicadas en el sentido de tracción de las fibras (de ahora en adelante caso A), y cargas tangenciales aplicadas en el sentido de compresión de las fibras (caso rojo de la Figura 4-3, de ahora en adelante caso B).

Para describirlo con mayor claridad, se incluye la siguiente Figura 4-4 extraída de [11], referencia donde precisamente el autor explica cómo cambia la rigidez y la resistencia de una estructura de material compuesto, dependiendo de la orientación de las cargas respecto de la dirección de las fibras.

Si tomamos como ejemplo la lámina de la Figura 4-4, donde se observa que las fibras están colocadas a una orientación de  $\phi = 45^\circ$ , para el caso de la izquierda (caso A), el sentido de aplicación de las cargas tangenciales producirían una tracción de las fibras en, y para el caso de la derecha (caso B), el sentido de dichas cargas producirían una compresión de las fibras. Evidentemente, este hecho tendrá una repercusión en cuanto a la inestabilidad de la lámina sometida a esfuerzos cortantes.

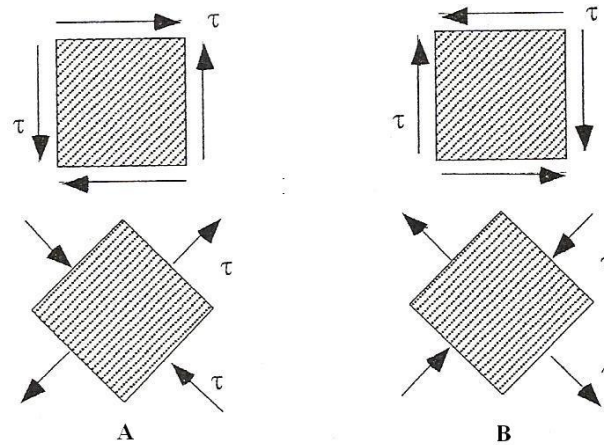


Figura 4-4. Diferencia en el sentido de aplicación cargas tangenciales respecto a la orientación de las fibras. Figura extraída de [11].

A continuación, se muestran los valores de las cargas críticas obtenidas para ambos casos, en función del sentido de aplicación de las cargas tangenciales. Estos valores se han obtenido tras una batería de ensayos en los que se ha resuelto el problema de la lámina sometida a cargas tangenciales explicado en el primer apartado de este capítulo.

Especificar que en este apartado, se ha estudiado la influencia de la orientación de la carga, respecto a la orientación de las fibras para un modelo de fibra continua. Sin embargo, dichos ensayos, al igual que en el Capítulo 3, se han repetido variando las propiedades micromecánicas de la lámina, para poder analizar, cómo se verá en los siguientes apartados, la variación de dicha carga crítica ante la variación de aspectos micromecánicos como son la orientación de las fibras que conforman la lámina, la fracción de volumen de fibra de ésta, o el tipo de modelo de fibra utilizado.

Tabla 4-4. Cargas críticas tangenciales para el caso A

		$N_{xy,cr} [N/m]$						
		$\phi=0^\circ$	$\phi=15^\circ$	$\phi=30^\circ$	$\phi=45^\circ$	$\phi=60^\circ$	$\phi=75^\circ$	$\phi=90^\circ$
$v_f = 0.45$		5,25454	4,061	4,1457	4,31105	5,15286	7,57401	14,0844
$v_f = 0.60$		6,72905	5,093	5,1758	5,40647	6,54013	9,72234	18,2806
$v_f = 0.75$		8,64793	6,453	6,5122	6,85621	8,37884	12,479	23,3056
$v_f = 0.80$		9,47425	7,032	7,0684	7,47367	9,17578	13,6543	25,3306

Tabla 4-5. Cargas críticas tangenciales para el caso B

$N_{xy,cr} [N/m]$							
	$\phi=0^\circ$	$\phi=15^\circ$	$\phi=30^\circ$	$\phi=45^\circ$	$\phi=60^\circ$	$\phi=75^\circ$	$\phi=90^\circ$
$v_f = 0.45$	5,25454	10,698	20,8966	31,3883	34,994	26,227	14,0844
$v_f = 0.60$	6,72905	13,970	27,4826	41,3768	46,1459	34,4944	18,2806
$v_f = 0.75$	8,64793	17,745	34,4643	51,5837	57,4515	43,2738	23,3056
$v_f = 0.80$	9,47425	19,223	36,9654	55,0811	61,286	46,4237	25,3306

Para la mejor interpretación de los resultados de las Tablas 4-4 y 4-5, se representan a continuación las siguientes gráficas en las figuras 4-5 y 4-6, para analizar la variación de la carga crítica tangencial de pandeo respecto a estos dos casos de aplicación de las cargas. Aclarar que dichas gráficas se han adimensionalizado para el valor de la carga crítica correspondiente a:  $N_0 = N_{xy,cr} (\phi = 0^\circ, v_f = 0.45)$ .

Sin duda, la información más importante que se extrae comparando ambas figuras es saber para qué orientación de fibras se obtiene el máximo valor de la carga crítica, en función del sentido de aplicación de la carga tangencial.

Para el caso A, el máximo valor de la carga crítica se obtiene cuando la orientación de las fibras es igual a  $\phi = 90^\circ$ , mientras que para el caso B, el máximo se obtiene cuando la orientación de las fibras que conforman la lámina es  $\phi = 60^\circ$ . Además, respecto al mínimo valor de dicha carga crítica, para el caso A, se obtiene cuando la orientación es  $\phi = 15^\circ$ , sin embargo para el caso B, el valor mínimo resulta cuando  $\phi = 0^\circ$ .

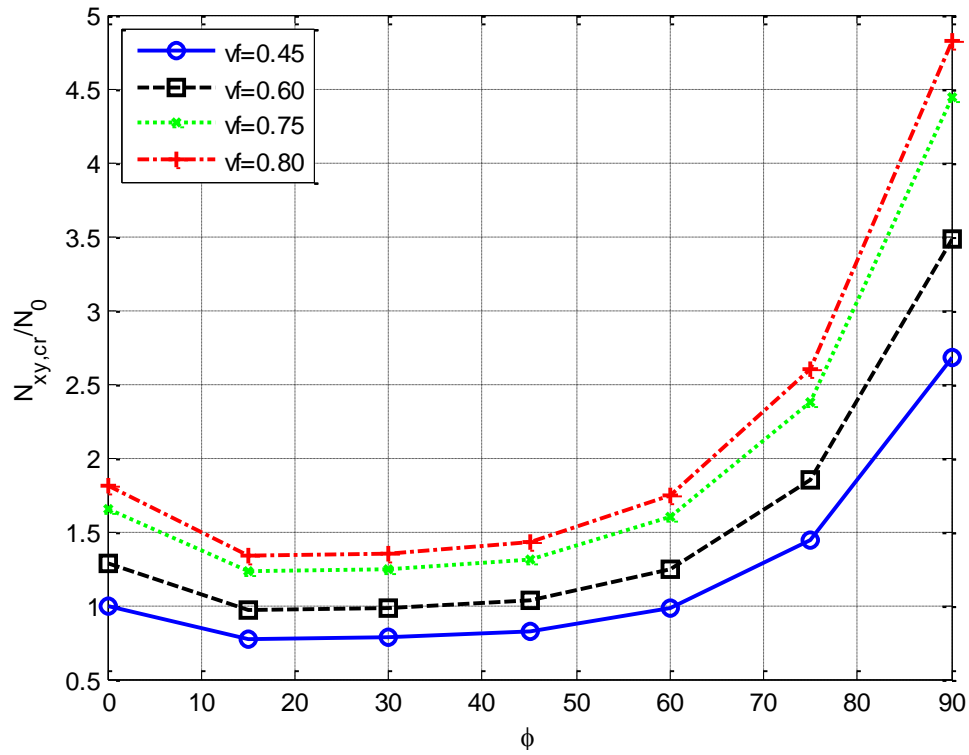


Figura 4-5. Influencia de la orientación de las fibras en la carga crítica tangencial de pandeo. Caso A.

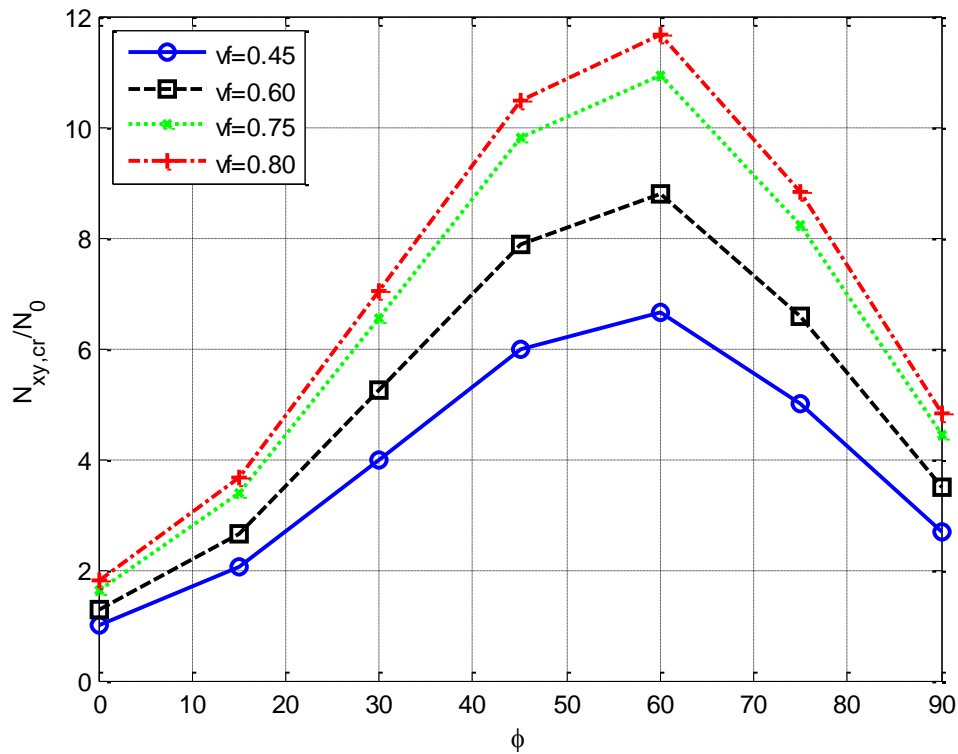


Figura 4-6. Influencia de la orientación de las fibras en la carga crítica tangencial de pandeo. Caso B.



Para analizar con mayor profundidad que es lo que ocurre, al centrar la comparación cuando la orientación de las fibras que conforman la lámina es  $\phi = 45^\circ$ , resulta que los valores de las cargas críticas tangenciales según el sentido de aplicación de la carga difieren en:

$$\begin{aligned} \text{Caso A: } N_{xy,cr}^A \left[ \frac{N}{m} \right] &= 4,31105 & \text{Caso B: } N_{xy,cr}^B \left[ \frac{N}{m} \right] &= 31,3883 \\ \text{Diferencia}(\phi = 45^\circ) [\%] &= \frac{N_{xy,cr}^B - N_{xy,cr}^A}{N_{xy,cr}^A} \cdot 100 = 628,09\% \end{aligned} \quad (4-7)$$

De manera que, como ya se vio en la Figura 4-4, si la orientación de las fibras corresponde a  $\phi = 45^\circ$ , para el caso B donde el sentido de aplicación de las cargas tangenciales provocaría una compresión de las fibras que conforman la lámina, se obtiene una carga crítica 6 veces mayor que la que se obtiene para el caso A, donde la aplicación de las cargas tangenciales en dicho sentido produciría una tracción de las fibras.

Para concluir con el análisis de este apartado, se representa a continuación en la siguiente Figura 4-7 los modos de pandeo para varias orientaciones de fibras, estableciendo una comparativa entre ambos casos de aplicación de las cargas. En primer lugar, lo más significativo de los modos de pandeo es en concreto el sentido de las semiondas respecto al sentido de aplicación de las cargas según cada caso, teniendo éstas su radio mayor en la dirección donde se produciría la tracción de las fibras.

Además, dado que los resultados de las cargas críticas obtenidas para  $\phi = 0^\circ$  y  $\phi = 90^\circ$  son exactamente los mismos, con independencia del sentido de aplicación de las cargas tangenciales, se obtienen unos modelos de pandeo correspondientes a dichas orientaciones de fibra totalmente iguales, salvo por lo que se acaba de comentar respecto a cómo se distribuyen la semiondas acorde con el sentido de aplicación de la carga según el caso A y B.

Por último es interesante resaltar el hecho del aumento del número de semiondas a partir de  $\phi = 45^\circ$  para el caso A, y a partir de  $\phi = 60^\circ$  para el caso B, aumentando dicho número conforme se incrementa la orientación de las fibras hasta  $\phi = 90^\circ$ .

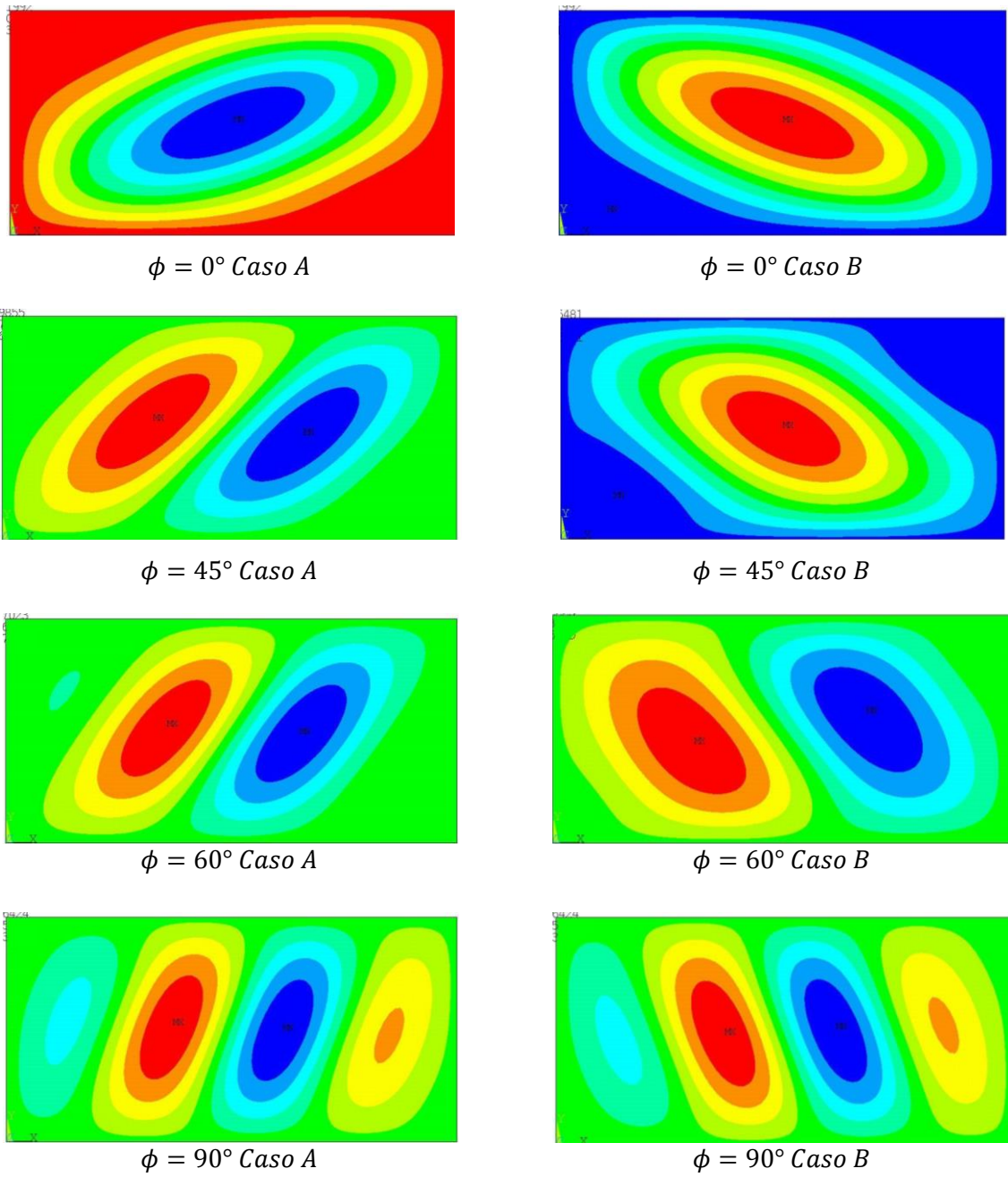


Figura 4-7. Comparativa modos de pandeo entre caso A y B

## 4.4 Estudio de la influencia de la micromecánica en la carga crítica de pandeo

Continuando con el análisis del problema de la lámina sometida a esfuerzos cortantes estudiada en este Capítulo 4, y considerando de nuevo todo lo que se explicó en el Capítulo 2, así como el procedimiento seguido en el Capítulo 3, sobre la micromecánica y su utilización para estimar las propiedades mecánicas de una lamina de material compuesto, se van a realizar una serie de análisis para explicar cómo varía la carga crítica tangencial de pandeo ante la variación de dichos aspectos micromecánicos.

Por ello, en los siguientes apartados se variará la orientación de las fibras, el tanto por ciento en volumen en fibra utilizado para conformar el material compuesto, la utilización de fibras continuas o cortas, y se calculará la carga crítica de pandeo para cada caso.

### 4.4.1 Influencia de la orientación de las fibras sobre la carga crítica

Como se analizó en el Capítulo 3, y como ya se ha podido ver por ciertos aspectos comentados en el apartado anterior, la orientación de las fibras del material compuesto que conforman la lámina influye considerablemente en la carga crítica de pandeo de dicha lámina.

Según la definición de la orientación de las fibras, explicada en el Capítulo 2, por el ángulo  $\phi$ , se ha realizado una batería de ensayos para los siguientes valores de orientación de la fibra:  $\phi = \{0, 15, 30, 45, 60, 75, 90\}$

Estos resultados ya han sido mostrados, por su utilización en el apartado anterior, para un modelo de fibra continua en las Tablas 4-4 y 4-5, dejando para su apartado correspondiente la influencia que tiene la utilización de dicho modelo de fibra continua sobre la carga crítica.

Además de la particularidad sobre para qué orientaciones de fibras se obtienen las máximas cargas críticas de pandeo según el sentido de aplicación de las cargas tangenciales sobre la lámina, es interesante analizar la influencia de la orientación de las fibras sobre la carga crítica tangencial de pandeo, ya que la tendencia de la carga crítica ante la variación de las fibras es totalmente diferente para cada caso. Para el caso A, la carga crítica disminuye si se varía la orientación desde  $\phi = 0^\circ$ , para llegar a un mínimo entorno a  $\phi = 15^\circ$ , y luego incrementarse hasta llegar a su máximo valor para  $\phi = 90^\circ$ . Por otro lado, para el caso B, la carga crítica aumenta conforme se aumenta la orientación desde  $\phi = 0^\circ$ , para llegar a un máximo entorno a  $\phi = 60^\circ$ , y luego disminuir hasta  $\phi = 90^\circ$ , obteniendo mayores valores de carga crítica cuando la orientación es  $\phi = 90^\circ$  que para  $\phi = 0^\circ$  (ver figuras 4-5 y 4-6).

Para concluir con este apartado se muestra en las siguientes figuras 4-8 y 4-9, los modos de pandeo para todas las orientaciones de fibra estudiadas, según cada tipo de problema A o B, completando así lo que se mostró en la Figura 4-7.

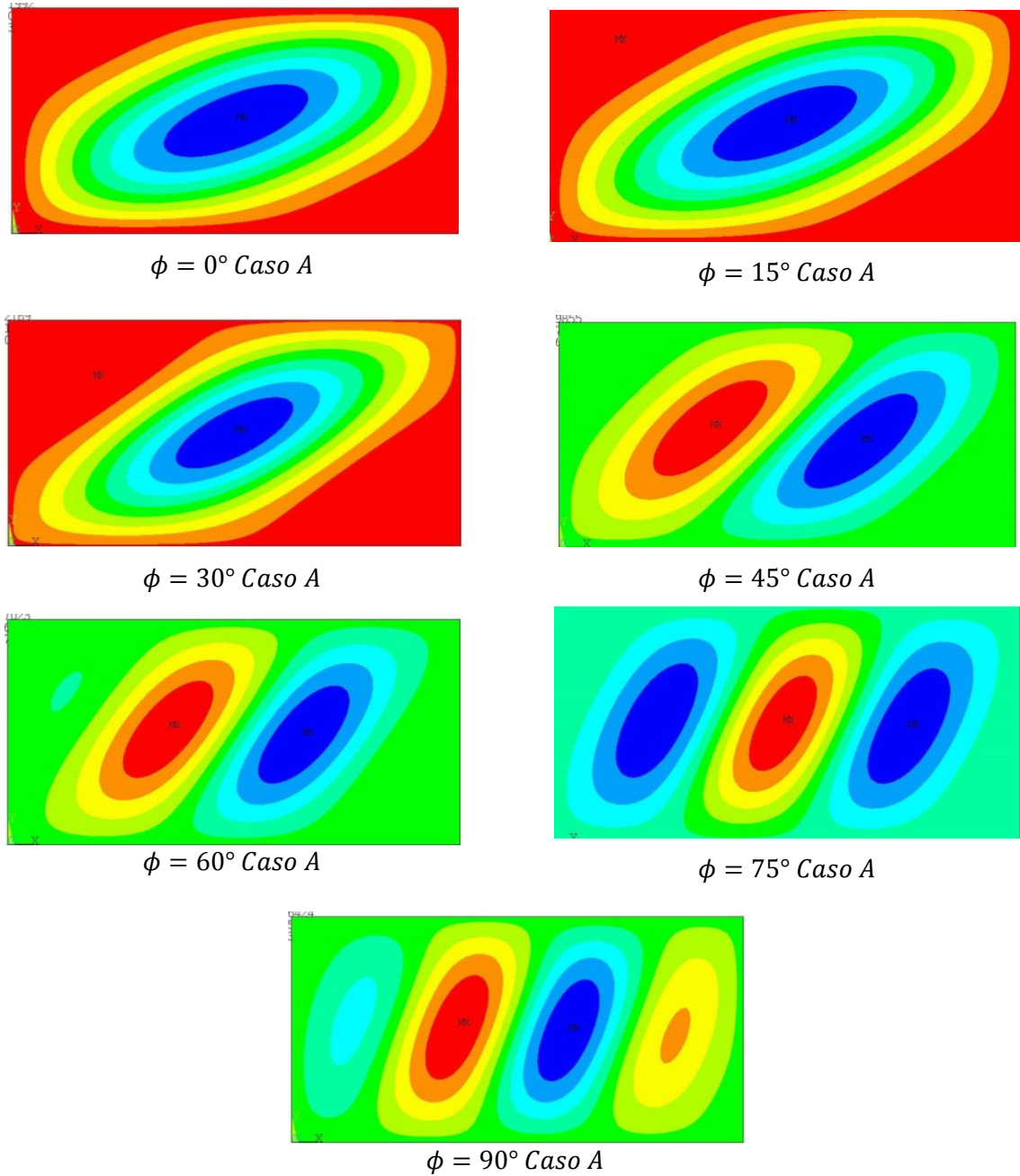


Figura 4-8. Modos de pandeo para una lámina  $v_f = 0.45$  y varias orientaciones de fibra. Caso A.

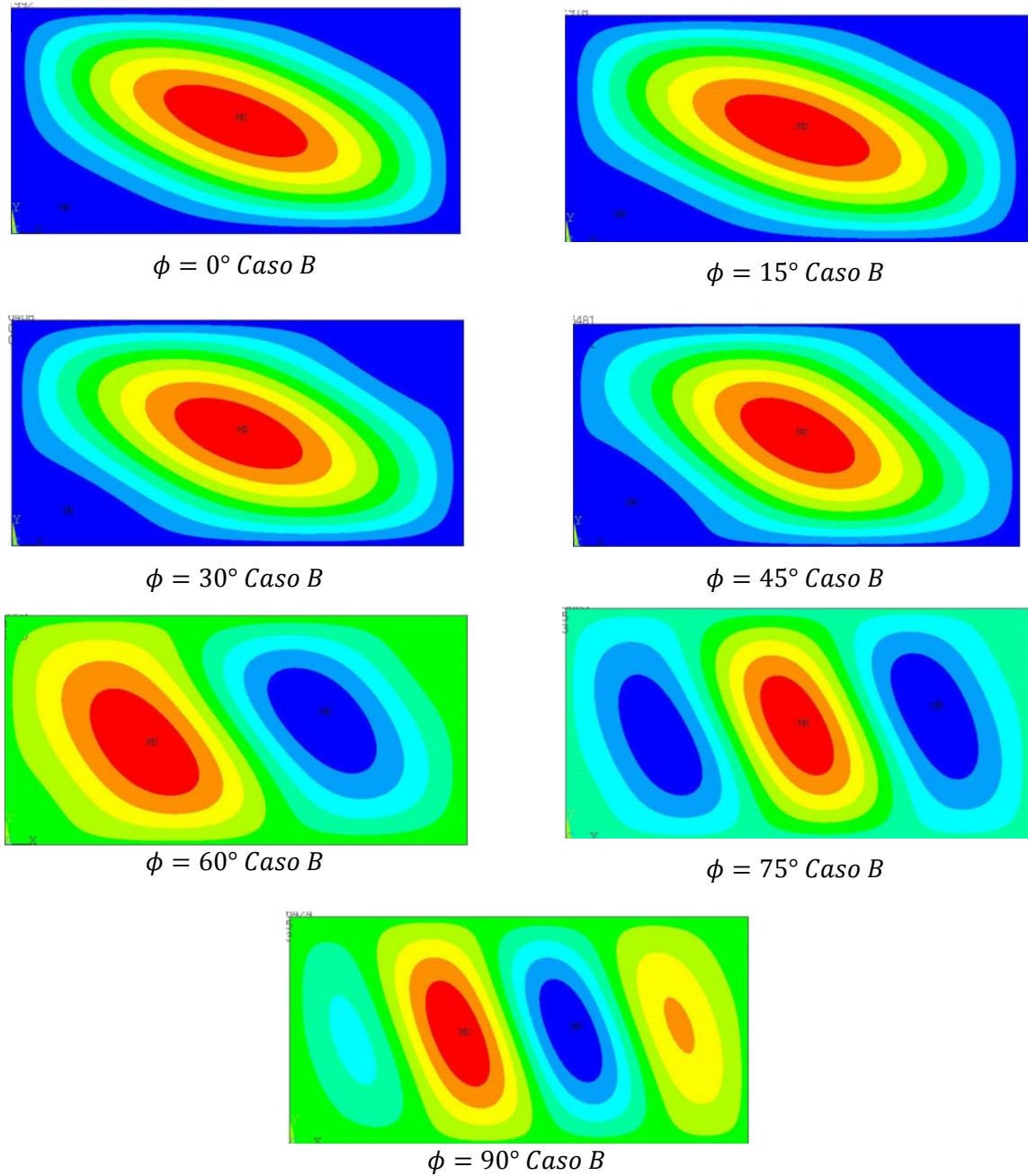


Figura 4-9. Modos de pandeo para una lámina  $\nu_f = 0.45$  y varias orientaciones de fibra. Caso B.

#### 4.4.2 Influencia del porcentaje en volumen de fibra sobre la carga crítica

Continuando con el análisis de la influencia de aspectos micromecánicos sobre la carga crítica de pandeo de una lámina sometida a esfuerzos cortantes, se decide estudiar en este apartado la influencia que tiene otra propiedad micromecánica de los materiales compuestos como es el porcentaje en volumen de fibra.

De este modo, siguiendo el mismo procedimiento utilizado en el Capítulo 3, se analiza para una serie de láminas con distintas orientaciones de fibra, cómo se ve afectada la carga crítica de pandeo con la variación de la fracción en volumen de fibra que posee la lámina.

Para ello, se llevará a cabo una batería de ensayos para las orientaciones de fibra estudiadas en los apartados anteriores,  $\phi = \{0, 15, 30, 45, 60, 75, 90\}$ , pero utilizando cada vez uno de los siguientes porcentajes de volumen de fibra estudiados:  $v_f = \{0.45, 0.6, 0.75, 0.8\}$ .

En las Tablas 4-4 y 4-5, se muestran los resultados obtenidos para cada fracción de volumen de fibra estudiada, siendo estos resultados las cargas críticas de pandeo obtenidas para las distintas orientaciones de fibra según el apartado anterior.

Entre las conclusiones más interesantes al analizar las tablas mostradas, destaca el hecho de que el aumento de la fracción de volumen de fibra de la lámina supone un aumento de la carga crítica de pandeo independientemente de la variación de la orientación de las fibras que conforman dicha lámina, lo que concuerda con lo descrito en [2]. Recordar que en dicho proyecto ya se determinó que el aumento del tanto por ciento de volumen de fibra de una lámina sometida a compresión, suponía únicamente el aumento de la carga crítica que soportaba dicha lámina.

Y ahora en este proyecto, se llega a la misma conclusión respecto a dicho parámetro micromecánico, estableciéndose por tanto la fracción de volumen de fibra de una lámina como una propiedad que incrementa la carga crítica de pandeo que soporta una lámina sometida a esfuerzos cortantes, como se va a analizar en las siguientes figuras.

Para concluir con este apartado, se ha querido representar la variación de la carga crítica de pandeo de una lámina respecto a la variación de la fracción de volumen de fibra para las orientaciones de fibra estudiadas en este proyecto.

Las gráficas representadas en las figuras 4-10 y 4-11, están adimensionalizadas para la carga crítica de siguiente:  $N_0 = N_{xy,cr}$  ( $\phi = 0^\circ, v_f = 0.45$ ).

Al analizar estas gráficas, resalta uno de los aspectos señalados en el apartado anterior como es la influencia de la orientación de las fibras. En esta nueva representación se aprecia como en el caso de la lámina sometida a los esfuerzos cortantes del Problema A (Figura 4-10), las cargas críticas obtenidas son medianamente uniformes en valor, excepto cuando la orientación de las fibras es  $\phi = 90^\circ$ , situación donde la carga crítica es mucho mayor que la obtenida para el resto de orientaciones.

Sin embargo, cuando la lámina está sometida a los esfuerzos cortantes característicos del Problema B, las cargas críticas máximas se obtiene cuando la orientación de las fibras está entorno a  $\phi = 60^\circ$ , como se aprecia también en la siguiente Figura 4-11.

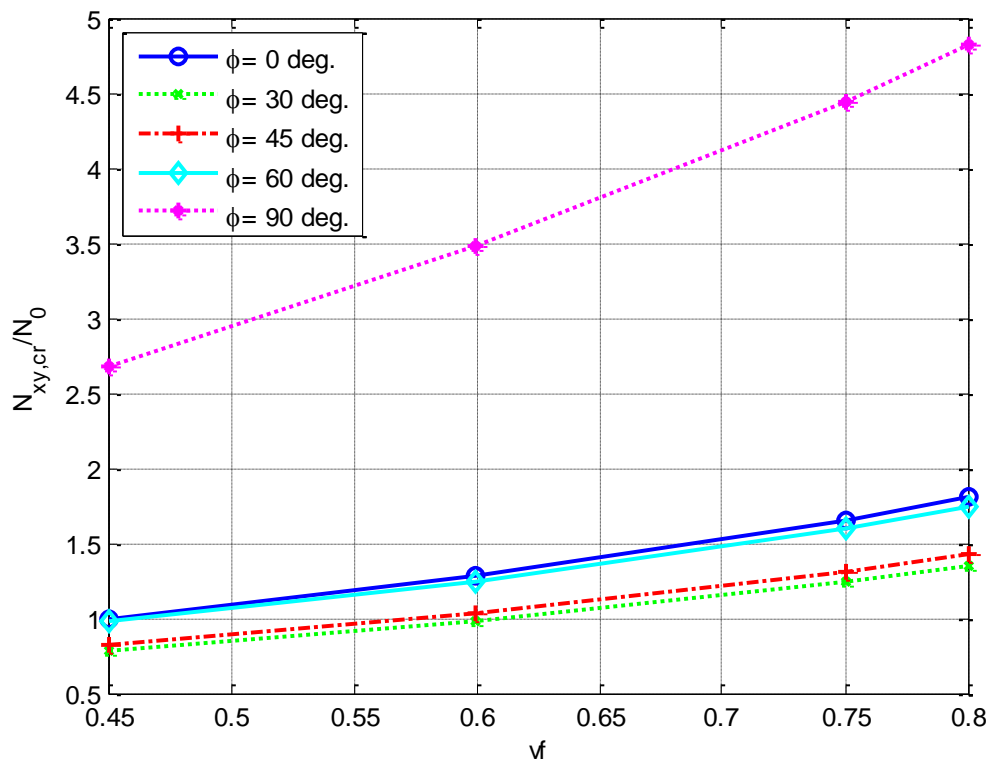


Figura 4-10. Influencia de  $\nu_f$  en  $N_{xy,cr}$  de una lámina. Problema tipo A.

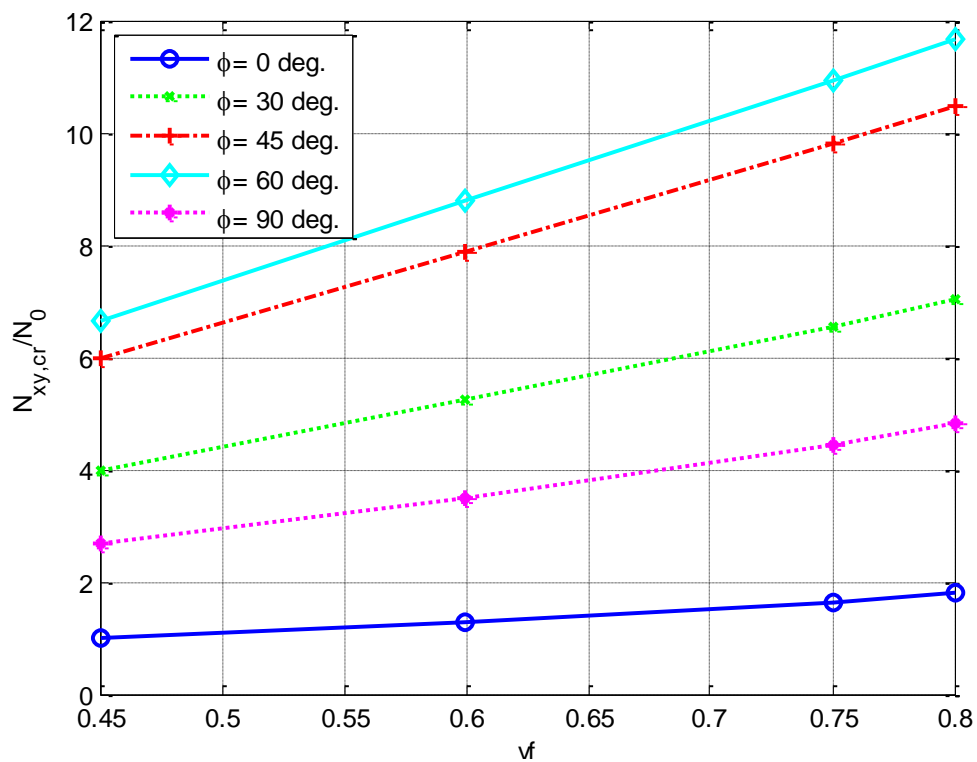


Figura 4-11. Influencia de  $\nu_f$  en  $N_{xy,cr}$  de una lámina. Problema tipo B.

#### 4.4.3 Comparación entre el modelo de fibra continua y de fibra corta

Para concluir con el análisis de la influencia de los aspectos micromecánicos en la carga crítica de pandeo de una lámina sometida a esfuerzos cortantes, en este apartado se va a analizar la influencia que tiene la utilización de un modelo de fibra distinto al de Hopkins y Chamis para fibra continua. Se considerará el modelo de Halpin y Tsai, para fibra corta.

El hecho de utilizar este modelo de fibra corta para determinar las propiedades ingenieriles del material (ver Apartado 2.2.2), creaba la necesidad de trabajar con un parámetro más como era la relación de aspecto  $r_{asp}$ . De esta manera, y análogamente al apartado 3.4.3 del Capítulo 3, donde también se comparan ambos modelos, se analiza la carga crítica de pandeo para las relaciones de aspecto:  $r_{asp} = \{10,100,1000\}$ .

En las siguientes Tablas 4-6 y 4-7, se muestran los resultados obtenidos para cada una de estas relaciones de aspecto  $r_{asp}$ , y para cada fracción de volumen de fibra y orientación de las fibras estudiadas en los apartados anteriores. Señalar que estos resultados son homólogos a los obtenidos para el modelo de fibra continua.

Si se analizan los resultados de las Tablas, puede afirmarse que, al aumentar la relación de aspecto  $r_{asp}$ , aumenta la carga crítica de pandeo tangencial de la lámina, independientemente del aumento de la fracción de volumen de fibra, que como ya se vio en el apartado anterior, también supone un aumento de dicha carga crítica.



Tabla 4-6. Cargas críticas para varios  $r_{asp}$  y varias orientaciones de fibra. Problema tipo A.

$N_{xy,cr} \left[ \frac{N}{m} \right] v_f = 0.45$							
	$\phi=0^\circ$	$\phi=15^\circ$	$\phi=30^\circ$	$\phi=45^\circ$	$\phi=60^\circ$	$\phi=75^\circ$	$\phi=90^\circ$
$r_{asp} = 10$	3,971	3,512	3,573	3,683	4,028	5,265	7,767
$r_{asp} = 10^2$	4,954	4,001	4,113	4,248	4,946	7,070	12,614
$r_{asp} = 10^3$	5,222	4,123	4,236	4,376	5,161	7,514	13,886
$N_{xy,cr} \left[ \frac{N}{m} \right] v_f = 0.60$							
$r_{asp} = 10$	5,431	4,633	4,698	4,877	5,486	7,387	11,373
$r_{asp} = 10^2$	6,616	5,206	5,318	5,529	6,546	9,483	17,170
$r_{asp} = 10^3$	6,887	5,327	5,438	5,656	6,758	9,925	18,429
$N_{xy,cr} \left[ \frac{N}{m} \right] v_f = 0.75$							
$r_{asp} = 10$	8,473	6,685	6,115	7,032	8,403	11,716	18,473
$r_{asp} = 10^2$	9,626	7,226	7,205	7,673	9,412	13,735	24,150
$r_{asp} = 10^3$	9,848	7,324	7,305	7,783	9,588	14,104	25,221
$N_{xy,cr} \left[ \frac{N}{m} \right] v_f = 0.80$							
$r_{asp} = 10$	10,088	7,657	7,471	8,050	9,907	14,031	22,293
$r_{asp} = 10^2$	11,113	8,130	7,991	8,625	10,796	15,818	27,361
$r_{asp} = 10^3$	11,304	8,215	8,081	8,723	10,949	16,138	28,294

Tabla 4-7. Cargas críticas para varios  $r_{asp}$  y varias orientaciones de fibra. Problema tipo B.

$N_{xy,cr} \left[ \frac{N}{m} \right] v_f = 0.45$							
	$\phi=0^\circ$	$\phi=15^\circ$	$\phi=30^\circ$	$\phi=45^\circ$	$\phi=60^\circ$	$\phi=75^\circ$	$\phi=90^\circ$
$r_{asp} = 10$	3,971	5,915	9,421	12,960	14,198	11,527	7,767
$r_{asp} = 10^2$	4,954	9,517	18,103	26,929	29,970	22,718	12,614
$r_{asp} = 10^3$	5,222	10,517	20,534	30,862	34,417	25,768	13,886
$N_{xy,cr} \left[ \frac{N}{m} \right] v_f = 0.60$							
$r_{asp} = 10$	5,431	8,610	14,277	18,983	21,962	17,625	11,373
$r_{asp} = 10^2$	6,616	12,974	24,816	36,962	41,138	31,145	17,170
$r_{asp} = 10^3$	6,887	13,988	27,284	40,957	45,655	34,242	18,429
$N_{xy,cr} \left[ \frac{N}{m} \right] v_f = 0.75$							
$r_{asp} = 10$	8,473	13,962	23,078	32,068	35,147	28,465	18,473
$r_{asp} = 10^2$	9,626	18,215	33,321	48,566	53,782	41,825	24,150
$r_{asp} = 10^3$	11,113	20,621	36,778	52,918	58,421	46,029	27,361
$N_{xy,cr} \left[ \frac{N}{m} \right] v_f = 0.80$							
$r_{asp} = 10$	10,088	16,841	27,687	38,280	41,883	34,118	22,293
$r_{asp} = 10^2$	11,112	19,044	35,333	51,817	57,455	44,373	25,221
$r_{asp} = 10^3$	11,304	21,337	38,509	55,712	61,578	48,276	28,294

Para continuar con esta comparativa entre el modelo de fibra continua y el de fibra corta para distintas relaciones de aspecto, se muestra ahora en las siguientes figuras 4-12 y 4-13, una comparación entre los modos de pandeo obtenidos para cada modelo de fibra.

Decir, respecto a dicha comparación de los modos de pandeo, que se obtienen modos idénticos de pandeo, excepto para orientaciones de fibra  $\phi = 90^\circ$ , donde el número de semiondas del modo de pandeo correspondiente al modelo de fibra corta es ligeramente menor que el modo obtenido para el modelo de fibra continua.

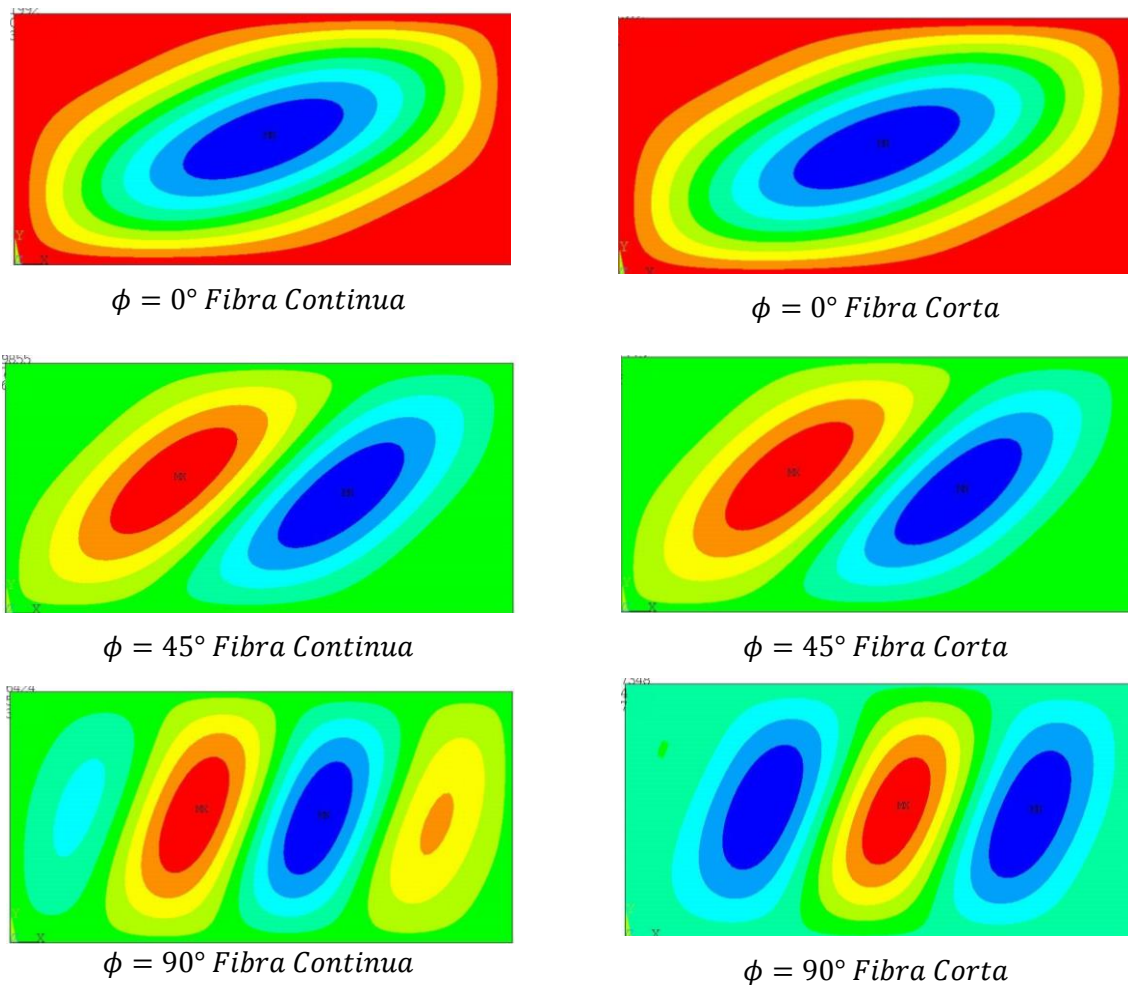


Figura 4-12. Comparativa modos de pandeo entre modelo fibra continua y fibra corta, para una lámina  $v_f = 0.45$ . Problema tipo A.

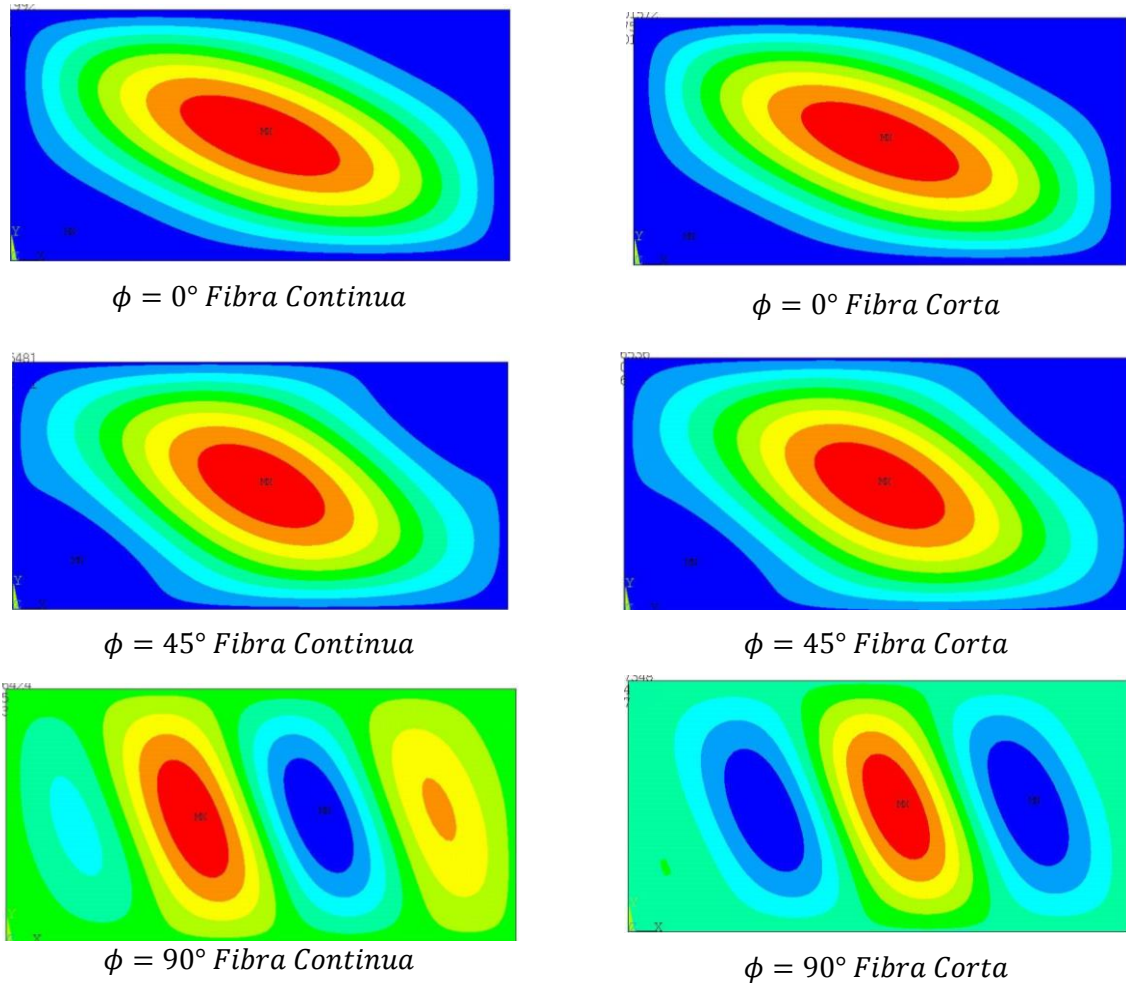


Figura 4-13. Comparativa modos de pandeo entre modelo fibra continua y fibra corta, para una lámina  $v_f = 0.45$ . Problema tipo B.

Y por último, se ha querido representar en las figuras 4-14 y 4-15, la variación de la carga crítica de pandeo de una lámina respecto a la variación de la orientación de las fibras que la conforman, para los distintos modelos de fibra continua y fibra corta estudiados en este proyecto.

En estas gráficas, se aprecia como el modelo de fibra continua proporciona valores mayores de la carga crítica de pandeo que el modelo de fibra corta, independientemente del tipo de problema al que está sometida la lámina (Problema A o B). Sin embargo, decir que cuando la relación de aspecto posee un valor de  $r_{asp} = 1000$ , los resultados son muy similares a los obtenidos para el modelo de fibra continua, hecho que ya ocurría para el problema presentado en [2], donde casi ni se aprecia la diferencia entre las líneas correspondientes al modelo de fibra continua y al de fibra corta con  $r_{asp} = 1000$ .

Estas gráficas representadas en las figuras 4-14 y 4-15, están adimensionalizadas para la carga crítica de siguiente:  $N_0 = N_{xy,cr} (\phi = 0^\circ, r_{asp} = 10)$ .

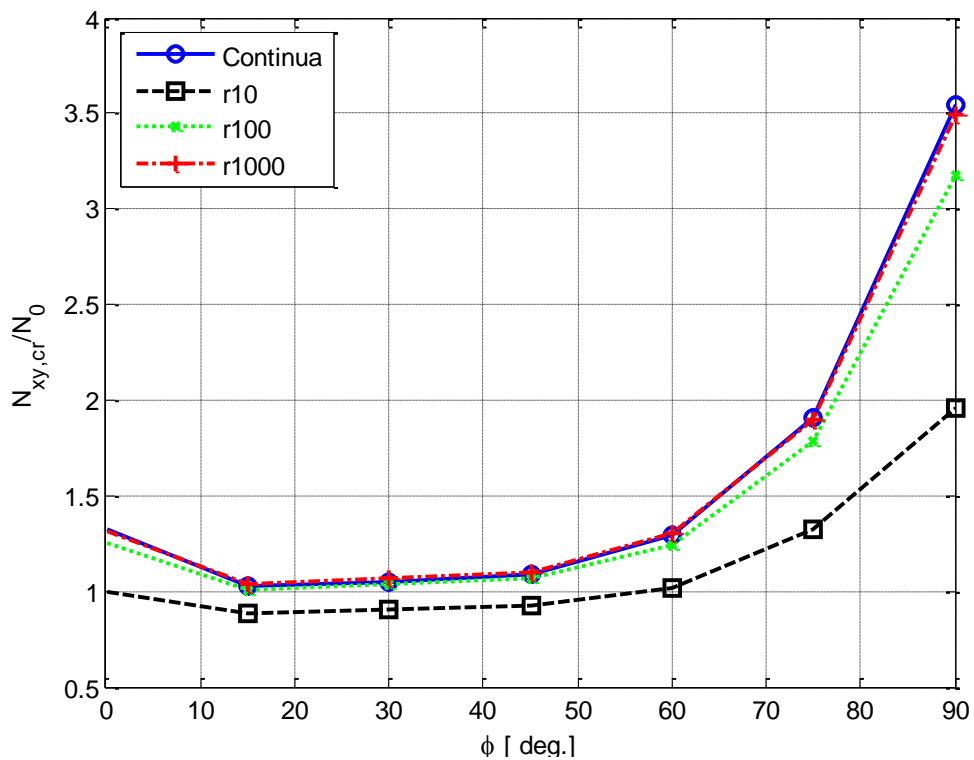


Figura 4-14. Comparación  $N_{xy,cr}$  de una lámina para varias  $r_{asp}$  y para fibra continua. Problema tipo A.

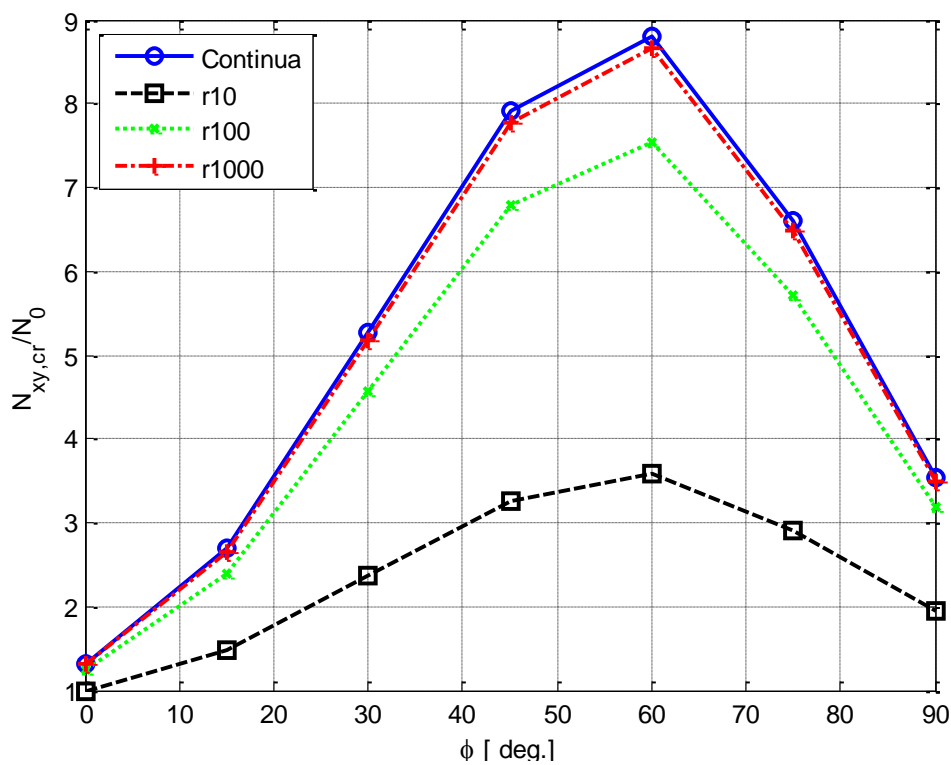


Figura 4-15. Comparación  $N_{xy,cr}$  de una lámina para varias  $r_{asp}$  y para fibra continua. Problema tipo B.



# 5 RESUMEN Y CONCLUSIONES

## 5.1 Micromecánica de materiales compuestos

Todo el estudio incluido en este capítulo sobre la micromecánica de un material compuesto, se realiza para estimar las propiedades que describen a un material transversalmente isótropo.

Primero, para un modelo micromecánico de fibra continua, en concreto el de Hopkins y Chamis, se obtienen las cinco constantes elásticas independientes que caracterizan a este tipo de material, en función de la fracción de volumen de fibra. Y después para un modelo de fibras cortas alineadas, el de Halpin y Tsai, se estiman las propiedades en función de la relación de aspecto.

Ambos modelos son aplicados sobre el IM7/8551-7, un material compuesto reforzado con fibra de carbono embebido en una resina Epoxy. Este material será el utilizado para llevar a cabo los análisis a lo largo de este proyecto.

En una comparativa de las propiedades estimadas en ambos modelos, se ha representado la variación de las constantes elásticas en función de la fracción de volumen de fibra, para el caso de fibra continua, así como la variación de éstas según la relación de aspecto de las fibras, para el caso de fibra corta.

Dado los resultados obtenidos, destacan las siguientes conclusiones:

- Las constantes elásticas:  $E_1$ ,  $E_2$ ,  $G_{12}$  y  $G_{23}$  aumentan conforme se incrementa la fracción de volumen de fibra. Sin embargo, los coeficientes de Poisson  $\nu_{12}$  y  $\nu_{23}$  disminuyen al aumentar la fracción de volumen de fibra, y todo ello de forma independiente al modelo de fibra utilizado, fibra continua o fibra corta.
- Para el modelo de fibra continua, la variación de dichas propiedades es prácticamente lineal respecto a la variación de la fracción de volumen de fibra. Aunque esta tendencia cambia para valores de fracciones de volumen de fibra superiores a 0.6, a partir del cual deja de tener un carácter lineal.
- Y para el modelo de fibra corta, destaca que, ante el aumento de la relación de aspecto, solo el módulo de rigidez longitudinal  $E_1$  se ve afectado, aumentando su valor conforme se incrementa dicha relación. Si además se compara con el valor de  $E_1$  para un modelo de fibra continua, dichos valores serán similares para relaciones de aspecto muy altas, entorno  $r_{asp} = 1000$ .

## 5.2 Estabilidad de paneles compuestos sometidos a carga normal

El análisis de la estabilidad de paneles compuestos sometidos a carga normal, se ha realizado en este capítulo, mediante una serie de ensayos numéricos donde se han calculado las cargas críticas de una lámina de material compuesto sometido a compresión coplanaria.

Mediante los resultados de estos ensayos, se ha analizado la influencia de la curvatura que posee una lámina de material compuesto sobre dicha carga crítica, así como la influencia de la variación de ciertos aspectos micromecánicos, como la orientación de las fibras, la fracción de volumen de fibra, la relación de aspecto de las fibras, o el tipo de modelo de fibra utilizado, obteniendo las siguientes conclusiones:

- La curvatura de una lámina de material compuesto, en este proyecto representada por el parámetro  $h/R$ , destaca por influir sobre la carga crítica de pandeo, de manera que al aumentar dicho parámetro  $h/R$ , la carga crítica se ve incrementada independientemente del ángulo de orientación que presenten las fibras de dicha lámina. Este aumento no tendrá la misma tendencia para todos los valores de  $h/R$ . Para paneles planos (valores de  $h/R$  mínimos), se producen incrementos de la carga crítica de pandeo para aumentos pequeños de  $h/R$ . Por el contrario, para paneles curvos (valores de  $h/R$  máximos), el incremento de  $h/R$  supondrá aumentos de la carga crítica de pandeo menores que para paneles planos.
- Al analizar los modos de pandeo obtenidos para estos valores de  $h/R$  estudiados, se concluye que el número de semiondas del modo de pandeo, así como la dirección en la que estas se desarrollan se ven influenciadas por la variación del parámetro de curvatura  $h/R$ . Para valores de  $h/R$  entre  $0 \leq h/R \leq 0.1$ , el número de semiondas del modo de pandeo se incrementa conforme se aumenta el parámetro de curvatura en la dirección axial de la lámina. Sin embargo, a partir de  $h/R = 0.1$  hasta  $h/R = 1$ , el número de semiondas pasa a incrementarse en la dirección circunferencial de la lámina.
- La influencia de la orientación de las fibras que conforman la lámina sobre la carga crítica de pandeo depende de la curvatura que presente dicha lámina. Para valores de  $h/R = 0$ , correspondientes a una lámina plana, las cargas máximas de pandeo se obtiene para una orientación de fibras entorno a  $\phi = 40^\circ$ , y las mínimas cuando  $\phi = 0^\circ$  o  $\phi = 90^\circ$ . Si se produce un pequeño aumento del parámetro  $h/R$ , la variación de la carga crítica se mantiene uniforme respecto a la variación de la orientación de las fibras. Pero a medida que el parámetro de curvatura va aumentando, y llega a valores entorno a  $h/R = 1 \cdot 10^{-3}$ , el comportamiento respecto a una lámina plana cambia radicalmente, y ahora el máximo de la carga crítica de pandeo se obtiene para orientaciones de fibra  $\phi = 0^\circ$  y  $\phi = 90^\circ$ . Es más, la carga crítica de pandeo de una lámina plana para orientaciones entorno a  $\phi = 40^\circ$  no solo deja de ser el máximo, sino que pasa a ser el mínimo.
- Los modos de pandeo también se ven afectados de distinta forma por la orientación que presentan las fibras, para una lámina con una determinada curvatura. Cuando la lámina no presenta ninguna curvatura, el cambio de la orientación de las fibras que conforman la lámina supone el aumento del número de semiondas en la dirección de aplicación de las cargas. Si la curvatura es moderada, valores de  $h/R \approx 1 \cdot 10^{-3}$ , destaca que cuando la orientación de las fibras se corresponde con el mismo sentido de las cargas aplicadas ( $\phi = 0^\circ$ ), el número de semiondas en la dirección axial y en la dirección circunferencial es el mismo, obteniendo una distribución de semiondas sobre la lámina simétrica. Pero en el momento que la orientación de las fibras es distinta de cero, las semiondas pasan a ser únicamente dos, y de gran tamaño, sobre la lámina. Además, al aumentar la orientación de las fibras, el número de semiondas aumenta en la dirección axial en mayor proporción que en la dirección radial, obteniendo un gran número de ellas cuando la orientación de las fibras ronda  $\phi = 60^\circ$ . Por último, respecto a los modos de una lámina con una curvatura totalmente cilíndrica, para orientaciones de fibras mínimas,  $15^\circ \leq \phi \leq 30^\circ$ , el modo de pandeo destaca por tener una gran número de semiondas de un tamaño menor, que si se compara para orientaciones de fibras a partir de  $\phi = 45^\circ$ , donde el número de semiondas se reduce, pero aumentan en tamaño, distribuyéndose de forma uniforme en la dirección circunferencial de la lámina.



- En cuanto a los resultados para un modelo de fibra continua, el aumento de la fracción de volumen de fibra de la lámina supone un aumento de la carga crítica de pandeo independientemente del incremento de la curvatura de la lámina.  
Respecto a un modelo de fibra corta, para una fracción de volumen de fibra fija  $v_f$ , al aumentar la relación de aspecto de las fibras que conforman la lámina, aumenta la carga crítica de pandeo, independientemente del aumento que esta última tiene en relación con el aumento del parámetro de curvatura  $h/R$ .
- El modelo de fibra continua proporciona valores mayores de la carga crítica de pandeo que para el modelo de fibra corta. Cabe señalar que cuando la relación de aspecto posee un valor de  $r_{asp} = 1000$ , los resultados son muy similares a los obtenidos para el modelo de fibra continua.
- Comparando los modos de pandeo según el modelo de fibra utilizado, se concluye que para láminas sin curvatura, el modo de pandeo de la lámina cuando las orientaciones de fibra se encuentran entorno a  $\phi = 90^\circ$ , presenta la variación de una mínima disminución de la semionda central del modo de pandeo, pasando de dos semiondas en el modelo de fibra continua, a una semionda de un tamaño ligeramente mayor en el modo del modelo de fibra corta.  
Por otro lado, cuando las láminas presentan una cierta curvatura, sí que se aprecia un cambio significativo en los modos de pandeo. Independientemente de la orientación de las fibras, el modo de pandeo obtenido para el modelo de fibra corta posee un número mayor de semiondas, aunque estas son de menor tamaño que las obtenidas para el modelo de fibra continua.

### 5.3 Estabilidad de un panel compuesto sometido a cortante

En este capítulo se ha estudiado la influencia que tiene la variación de las propiedades micromecánicas de una lámina de material compuesto, analizando la estabilidad de una lámina sometida a esfuerzos cortantes. Tras la realización de diversos ensayos para determinar la influencia sobre la carga crítica tangencial de pandeo de aspectos como la orientación de las fibras, la fracción de volumen de fibra, la relación de aspecto de las fibras, o el tipo de modelo de fibra utilizado, se concluye lo siguiente:

- La carga crítica está influenciada por el sentido de aplicación de las cargas respecto a la orientación de las fibras, distinguiendo dos tipos de problemas: un caso A donde el sentido de aplicación de las cargas es tal que produciría la tracción de las fibras cuando estas se encuentran orientadas a  $\phi = 45^\circ$ , y un caso B, donde el sentido de los esfuerzos cortantes soportados por la lámina produciría la compresión de las fibras con una orientación a  $\phi = 45^\circ$ .  
Si la orientación de las fibras corresponde a  $\phi = 45^\circ$ , para el caso B, se obtiene una carga crítica 6 veces mayor que la que se obtiene para el caso A. Sin embargo cuando las fibras están orientadas a  $\phi = 0^\circ$  y  $\phi = 90^\circ$ , se obtiene exactamente el mismo valor de carga crítica, independientemente del sentido de los esfuerzos cortantes.
- Los modos de pandeo también se ven influenciados por el sentido de aplicación de las cargas tangenciales sobre la lámina. Considerando una semionda como una elipse, la tendencia de las semiondas es a expandirse hacia el sentido de tracción de las fibras, y a tener su radio menor en la dirección de compresión de las fibras.

- Respecto a la influencia de la orientación de las fibras sobre la carga crítica tangencial de pandeo, para el caso A, el máximo valor de la carga crítica se obtiene cuando la orientación de las fibras es igual a  $\phi = 90^\circ$ , mientras que para el caso B, el máximo se obtiene cuando la orientación de las fibras que conforman la lámina es  $\phi = 60^\circ$ . Además, la tendencia de la carga crítica ante la variación de las fibras que conforman la lámina es totalmente diferente para cada caso. Para el caso A, la carga crítica disminuye si se varía la orientación desde  $\phi = 0^\circ$ , para llegar a un mínimo entorno a  $\phi = 15^\circ$ , y luego incrementarse hasta llegar a su máximo valor para  $\phi = 90^\circ$ . Por otro lado, para el caso B, la carga crítica aumenta conforme se aumenta la orientación desde  $\phi = 0^\circ$ , para llegar a un máximo entorno a  $\phi = 60^\circ$ , y luego disminuir hasta  $\phi = 90^\circ$ , obteniendo mayores valores de carga crítica cuando la orientación es  $\phi = 90^\circ$ , que para  $\phi = 0^\circ$ .
- Los modos de pandeo según la orientación que presentan las fibras que conforman la lámina cambian de la siguiente forma: para el caso A, se produce el aumento del número de semiondas a partir de  $\phi = 45^\circ$ , y para el caso B, a partir de  $\phi = 60^\circ$ , incrementándose conforme se aumenta la orientación de las fibras hasta  $\phi = 90^\circ$ .
- Para una lámina sometida a esfuerzos cortantes, el aumento de la fracción de volumen de fibra de la lámina supone un aumento de la carga crítica de pandeo independientemente de la variación de la orientación de las fibras que conforman dicha lámina.
- Al igual que para el problema de una lámina sometida a cargas de compresión, el modelo de fibra continua proporciona valores mayores de la carga crítica de pandeo que el modelo de fibra corta, independientemente del sentido de aplicación de las cargas tangenciales. Además, en el modelo de fibra corta, cuando la relación de aspecto posee un valor de  $r_{asp} = 1000$ , se obtienen resultados muy similares a los obtenidos para el modelo de fibra continua.
- Los modos de pandeo obtenidos para ambos modelos de fibra, continua o corta, son idénticos, excepto para orientaciones de fibra  $\phi = 90^\circ$ , donde el número de semiondas del modo de pandeo correspondiente al modelo de fibra corta es ligeramente menor que el modo obtenido para el modelo de fibra continua.

## **6 TRABAJOS FUTUROS**

La presentación de este proyecto origina la apertura de nuevas líneas de investigación y análisis en cuanto a la estabilidad de estructuras de material compuesto. A continuación, se proponen una serie de trabajos futuros, como ampliación y profundización de este estudio:

1. Análisis experimental de las cargas críticas de pandeo de una lámina de material compuesto sometida a cargas de compresión, y a cargas tangenciales, para determinar la carga crítica de pandeo mediante el uso de diferentes tipos de láminas en cuanto a sus propiedades micromecánicas (orientación de las fibras, fracción de volumen de fibra y tipología del modelo de fibra), permitiendo la comparación con el estudio cualitativo realizado en [2] y en el presente proyecto.
2. Influencia de imperfecciones en estructuras de laminas de material compuesto, así como su afección a la inestabilidad de este tipo de estructuras.
3. Estudio del comportamiento post-pandeo, es decir, análisis incluyendo no lineal geométrica, de láminas de material compuesto.
4. Estudio de diferentes tipos de material compuesto utilizado en estructuras tipo placas y láminas, para determinar la influencia de éstos sobre la estabilidad de la estructura, así como la búsqueda de la mejor combinación de los materiales para obtener una mejor respuesta ante el pandeo de dichas estructuras.

# REFERENCIAS

- [1] J. PORA, «International Committee on Composite Materials,» [En línea]. Available: <http://www.iccm-central.org/Proceedings/ICCM13proceedings/SITE/PAPERS/paper-1695.pdf>. [Último acceso: Agosto 2015].
- [2] A. M. Casas, PFC: Análisis numérico de la estabilidad de paneles compuestos reforzados con fibras, Escuela Técnica Superior de Ingeniería. Universidad de Sevilla, 2014.
- [3] L. P. Kollar y G. S. Springer, «Mechanics of Composite Structures,» Cambridge University Press, 2009.
- [4] C. L. Tucker y E. Liang, «Stiffness predictions for unidirectional short-fiber composites: Review and evaluation,» *Composite Science and Technology*, vol. 59, pp. 655-671, 1999.
- [5] J. M. Ruso Misa, «PFC: Estudio de materiales reforzados con fibras en problemas de contacto,» Escuela Técnica Superior de Ingenieros. Universidad de Sevilla, 2013.
- [6] R. Maurin, P. Davies, N. Baral y C. Baley, «Transverse Properties of Carbon Fibres by Nano-Indentation and Micromechanics,» *Applied Composite Materials*, vol. 15, nº 2, pp. 61-73, 2008.
- [7] Instituto Técnico de la Estructura en Acero, «Tomo 10: Placas láminas,» ITEA, p. Tomo 10.
- [8] R. Rikards, A. Chate y O. Ozolinsh, «Analysis for buckling and vibrations of composite stiffened shells and plates,» *Composite Structures*, vol. 51, pp. 361-370, 2001.
- [9] N. Jaunky, N. F. Knight Jr. y D. R. Ambur, «Buckling analysis of anisotropic variable-curvature panels and shells,» *Composite Structures*, vol. 43, pp. 321-329, 1999.
- [10] E. H. Baker, L. Kovalevsky y F. L. Rish, *Structural Analysis of Shells*, R. E. Krieger Publ. Inc. Co., 1986.
- [11] F. París , J. Cañas , J. Marín y A. Barroso, *Introducción al análisis y diseño con materiales compuestos*, Sección de Publicaciones. Escuela Técnica Superior de Ingenieros. Universidad de Sevilla.
- [12] G. Gerard y H. Becker, «NACA HANDBOOK OF STRUCTURAL STABILITY,» *NATIONAL ADVISORY COMMITTEE FOR AERONAUTICS*, vol. III BUCKLING OF CURVED PLATES AND SHELLS.
- [13] Hexcel , 01 09 2014. [En línea]. Available: [www.hexcel.com](http://www.hexcel.com). [Último acceso: 24 02 2014].
- [14] H. G. Allen y P. S. Bulson , *Background to Buckling*, Mc Graw-Hill, 1980.
- [15] T. H. Megson , *Aircraft Structures for Engineering Students*, Elsevier, 2007.
- [16] M. C.-Y. Niu, *Airframe Structural Design: Practical design information and data on aircraft structures*, Conmilit Press LTD., 1988.

- 
- [17] W. Stroud , W. Greene y M. Anderson, «Buckling loads of stiffened panels subjected to combined longitudinal compression and shear: results obtained with PASCO, EAL and STAGS computer programs,» *NASA Technical Paper*, 1984.
- [18] S. P. Timoshenko y S. Woinowsky-Krieger, *Teoría de Placas y Láminas*, Urmo, 1976.
- [19] Q. J. Yang, Thesis: Simplified Approaches to Buckling of Composite Plates, Oslo: Faculty of Mathematics and Natural Science, University of Oslo, 2009.
- [20] U. K. Mallela y A. Upadhyay, «Buckling of laminated composite stiffened panels subjected to in-plane shear: A parametric study,» *Thin-Walled Structures*, vol. 44, pp. 354-361, 2006.



# ANEXOS

## ANEXO A. Problema de referencia del Capítulo 3 para un material isótropo

En el capítulo 3, se ha utilizado el artículo de [8] para implementar el modelo numérico que posteriormente permitirá llevar a cabo el análisis de la estabilidad de una lámina de material compuesto con curvatura sometida a compresión coplanaria.

Tal y como se indicó en el apartado 3.2 de dicho capítulo, los errores de los resultados obtenidos para el modelo numérico creado en ANSYS, a partir de lo descrito dicho artículo, son inferiores al 2%, permitiendo considerarlos como aceptables respecto a la recreación de las propiedades del material compuesto, y la respuesta de la estructura a pandeo.

Para dar un paso más en la validación de dicho modelo numérico creado, a continuación se va a resolver un problema de la literatura utilizando el modelo creado en ANSYS, pero para un material isótropo, y a su vez, se comparará con los resultados obtenidos del mismo problema isótropo resuelto mediante ecuaciones analíticas.

Se considera una lámina de acero, cuyas propiedades y geometría se describen en la siguiente Tabla:

Tabla 0-1. Valores geométricos y propiedades de una lámina de Acero con  $R = 2m$

Dimensión	Valor
$a$ [cm]	100
$b$ [cm]	100
$t$ (espesor) [cm]	0.2
$R^*$ [cm]	200
$E$ [GPa]	210
$\nu$	0.30

$R^*$  es un parámetro definido en la Figura 3-6.

Usando los datos de la Tabla 0-1 para el modelo numérico implementado en ANSYS, y resolviendo el problema de una lámina con curvatura sometida a compresión coplanaria, se obtiene una carga crítica de:

$$N_{cr}^{ANSYS} = 127,786 \frac{kN}{m} \quad (0-1)$$

Tomando como referencia la teoría expuesta en [10], la carga crítica de una lámina con curvatura sometida a compresión puede obtenerse utilizando la siguiente expresión:

$$N_{cr} = \sigma_{cr} \cdot t = K_c \frac{\pi^2 E}{12(1 - \nu^2)} \left(\frac{t}{b}\right)^2 \cdot t \quad (0-2)$$

Para obtener  $K_c$ , el autor se remite a la siguiente gráfica de la Figura 0-1, donde será necesario conocer el valor de  $Z$ :

$$Z = \left(\frac{b^2}{Rh}\right) \sqrt{1-\nu^2} = 243,626 \quad (0-3)$$

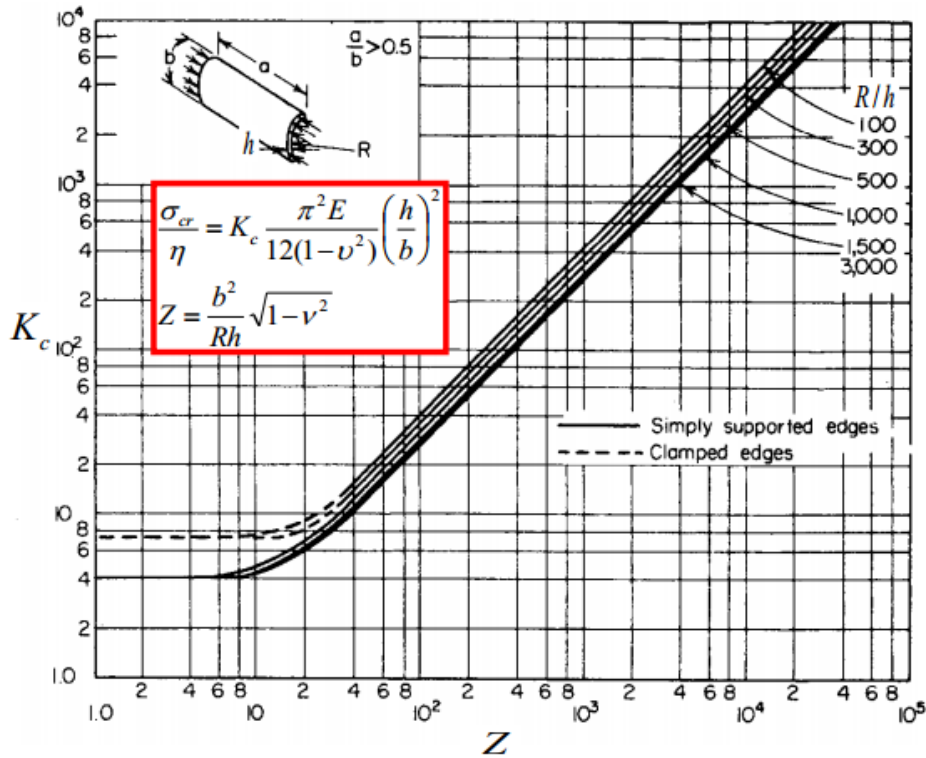


Figura 0-1. Cálculo de  $K_c$  para una lámina con curvatura. Figura extraída de [10].

Siendo por tanto  $K_c = 75$ , y obteniendo un valor de carga crítica según la expresión analítica siguiente:

$$N_{cr}^{Analítico} = \sigma_{cr} \cdot t = K_c \frac{\pi^2 E}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{t}{b}\right)^2 \cdot t = 111,481 \frac{kN}{m} \quad (0-4)$$

Una vez calculada las cargas críticas mediante el método analítico y el modelo numérico, se comparan ambos valores, siendo la diferencia entre estos resultados para el mismo problema implementado:

$$Diferencia [\%] = \frac{N_{cr}^{Analítico} - N_{cr}^{ANSYS}}{N_{cr}^{Analítico}} \cdot 100 = 14,63\% \quad (0-5)$$

Esta diferencia entre los resultados no es pequeña, por lo que se procede a comprobar si este error cometido entre la utilización del modelo numérico y el método analítico, para el problema de una lámina de un material isótropo sometida a compresión, persiste para otro valor de curvatura.



Se analiza a continuación una lámina de acero pero con una curvatura distinta, cuyos aspectos geométricos y propiedades vienen dados en la siguiente Tabla:

Tabla 0-2. Valores geométricos y propiedades de una lámina de Acero con  $R = 6m$

Dimensión	Valor
$a$ [cm]	100
$b$ [cm]	100
$t$ (espesor) [cm]	0.2
$R^*$ [cm]	600
$E$ [GPa]	210
$\nu$	0.30

$R^*$  es un parámetro definido en la Figura 3-6.

Usando los datos de la Tabla 0-2 para el modelo numérico implementado en ANSYS, y resolviendo para el mismo problema de una lámina con una curvatura distinta sometida a compresión coplanaria, se obtiene una carga crítica de:

$$N_{cr}^{ANSYS} = 43,528 \frac{kN}{m} \quad (0-6)$$

Tomando nuevamente como referencia la teoría expuesta en [10], la carga crítica de una lámina viene dada por la ecuación analítica 0-2, para la que se necesitará conocer el valor de  $Z$  y  $K_c$  mediante la gráfica de la Figura 0-1:

$$Z = \left(\frac{b^2}{Rh}\right) \sqrt{1 - \nu^2} = 79,68 \quad (0-7)$$

Siendo por tanto  $K_c = 25$ , y obteniendo un valor de carga crítica:

$$N_{cr}^{Analitico} = \sigma_{cr} \cdot t = K_c \frac{\pi^2 E}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{t}{b}\right)^2 \cdot t = 37,869 \frac{kN}{m} \quad (0-8)$$

La diferencia en la resolución del problema isótropo para una curvatura distinta, una vez calculada ambas cargas críticas mediante el método analítico y el modelo numérico, resulta:

$$Diferencia [\%] = \frac{N_{cr}^{Analitico} - N_{cr}^{ANSYS}}{N_{cr}^{Analitico}} \cdot 100 = 14,94\% \quad (0-9)$$

Nuevamente se obtiene un error del 15% entre la resolución por el método analítico y mediante el modelo numérico creado. Para ver si este valor del error persiste con otro tipo de material, se vuelve a resolver el mismo problema pero utilizando como material el Aluminio 2024 T6.

Las características de la lámina de Aluminio vienen dadas en la siguiente Tabla:

Tabla 0-3. Valores geométricos y propiedades de una lámina de Aluminio 2024 T6 con  $R = 3m$

Dimensión	Valor
$a$ [cm]	90
$b$ [cm]	50
$t$ (espesor) [cm]	0.1
$R^*$ [cm]	300
$E$ [GPa]	72,4
$\nu$	0.33

$R^*$  es un parámetro definido en la Figura 3-6.

Usando los datos de la Tabla 0-3 para el modelo numérico implementado en ANSYS, y resolviendo para el mismo problema de una lámina con  $R = 3m$  a compresión coplanaria, se obtiene una carga crítica de:

$$N_{cr}^{ANSYS} = 7,666 \frac{kN}{m} \quad (0-10)$$

Por otro lado, calculando el valor de la carga crítica analíticamente, tomando como referencia la teoría expuesta en [10], para los valores de  $Z$  y  $K_c$  obtenidos mediante la gráfica de la Figura 0-1:

$$Z = \left(\frac{b^2}{Rh}\right) \sqrt{1 - \nu^2} = 78,85 \quad K_c = 25 \quad (0-11)$$

$$N_{cr}^{Analitico} = \sigma_{cr} \cdot t = K_c \frac{\pi^2 E}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{t}{b}\right)^2 \cdot t = 6,667 \frac{kN}{m} \quad (0-12)$$

Y la diferencia en la resolución de este problema para un material distinto, mediante el método analítico y el modelo numérico, vuelve a ser:

$$Diferencia [\%] = \frac{N_{cr}^{Analitico} - N_{cr}^{ANSYS}}{N_{cr}^{Analitico}} \cdot 100 = 15\% \quad (0-13)$$

Resulta llamativo que resolviendo el mismo problema, para una lámina con dos curvaturas diferentes, y para una lámina con otro tipo de material, el error obtenido se ha mantenido en torno al 15%.

Con el ánimo de profundizar más para concretar la razón de este error, y así poder validar los resultados obtenidos mediante el modelo numérico creado para realizar los ensayos del Capítulo 3, se consulta el manual de **The National Advisory Committee for Aeronautics (NACA)**, de ahora en adelante [12], donde está basada la teoría por la que se formulan las ecuaciones analíticas de [10].

La siguiente Figura, muestra una de las conclusiones formuladas en [12], donde el autor advierte sobre la discrepancia entre los resultados obtenidos para las láminas con curvatura.

Concretamente, en su primer apartado, sobre la correlación de los resultados y la teoría lineal de placas formulada, se cita que: “*la estrecha correlación entre la teoría y los resultados de los test observada para láminas planas, no se obtiene para elementos curvos*”.

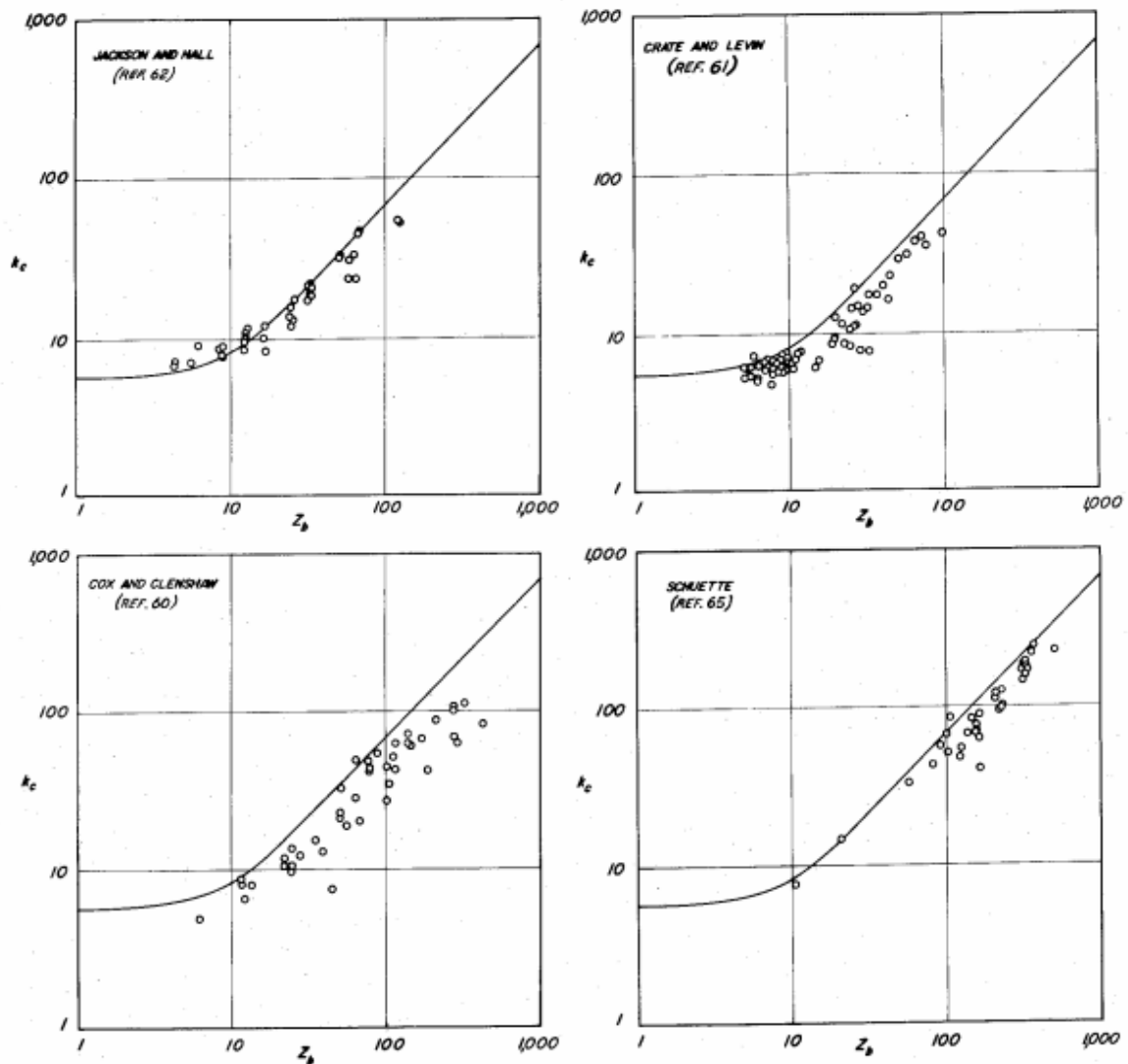


Figura 0-2. Comparación de  $K_c$  para láminas curvas sometidas a compresión. Figura extraída de [12].

La Figura 0-2, muestra 4 gráficas para la obtención de la constante  $K_c$ , necesaria para el cálculo de la carga crítica de pandeo de forma analítica, homólogas a la gráfica de la Figura 0-1.

Lo interesante es que en todas ellas se observan unos puntos superpuestos a las gráficas correspondientes a los resultados obtenidos en ensayos numéricos como los realizados en este proyecto. Y aunque, los resultados siguen la tendencia marcada por la función lineal de la ecuación analítica, sin embargo, ninguna posee una buena correlación.

Por ello, dado que los errores obtenidos están sustentados en este manual donde se confirma que la correlación entre el método analítico y el numérico no es buena, se tomará como válido el modelo numérico creado para realizar los ensayos en ANSYS del Capítulo 3. Es más, dichos errores se han mantenido constantes incluso cambiando la curvatura de la lámina y el material isótropo utilizado, por lo que confirman la validación de este modelo para realizar el análisis cualitativo de este capítulo.

## ANEXO B. Código del Problema de referencia Capítulo 3: Lámina con curvatura

```

/PREP7                                MPDATA,EY,1,,E2
                                        MPDATA,PRXY,1,,nu12
!1.Datos                               MPDATA,GXY,1,,G12
R=40                                    MPDATA,GYZ,1,,G23
L=22                                    MPDATA,GXZ,1,,G13
h=0.216
alfa=180                               !4.Sección
t1=0.018                               sectype,1,shell,,
                                        secdata,t1,1,+45,3
                                        secdata,t1,1,-45,3
                                        secdata,t1,1,0,3
                                        secdata,t1,1,90,3
                                        secdata,t1,1,+45,3
                                        secdata,t1,1,-45,3
                                        secdata,t1,1,-45,3
                                        secdata,t1,1,+45,3
                                        secdata,t1,1,90,3
                                        secdata,t1,1,0,3
                                        secdata,t1,1,-45,3
                                        secdata,t1,1,+45,3
!2.Geometría                           secdata,t1,1,90,3
K,1,R,0,0                               secdata,t1,1,0,3
K,2,R,0,L                               secdata,t1,1,-45,3
K,3,0,0,0                               secdata,t1,1,+45,3
K,4,0,0,L
                                        secoffset,MID
L,1,2
                                        seccontrol,,,,,,,,
AROTAT,ALL,,,,,,,,3,4,alfa,1
!5.Mallado
ET,1,SHELL181                           allsel
KEYOPT,1,3,2                           LSEL,,,,1,2,1
                                        LESIZE,ALL,,,10,,,,1
!3.Material
MPTEMP,,,,,,,,                           LSEL,,,,3,4,1
MPTEMP,1,0                               LESIZE,ALL,,,40,,,,1
MPDATA,EX,1,,E1                           allsel

```

```

CSYS,1
CLOCAL,11,1,
ASEL,,,,1
AATT,1, , 1,11 ,1
allsel
MSHKKEY,1
AMESH,1
MSHKEY,0
FINISH
/SOLU
ANTYPE,0
PSTRES,ON

```

!6.Condiciones de contorno

```

CSYS,11
LSEL,,,,1,2,1
DL,all,,uZ,0
DL,all,,UY,0
DL,all,,UX,0
LSEL,,,,3
DL,all,,UX,0
DL,all,,Uy,0
LSEL,,,,4
DL,all,,UX,0
DL,all,,uZ,0
DL,all,,UY,0

```

!7.cargas

```

CSYS,11
allsel
LSEL,,,,3, ,1,
SFL,all,PRES,1,,
allsel
SOLVE
FINISH
/SOLU
ANTYPE,1
BUCOPT,LANB,10, , ,
SOLVE
FINISH

```

## ANEXO C. Código de ANSYS de los modelos numéricos del Capítulo 3

```

/PREP7

!0.Datos
E1=126.444e9 ![Pa]
E2=7.79450254e9 ![Pa]
G12=3.86416977e9 ![Pa]
G23=2.83957884e9 ![Pa]
NU12=0.299
NU23=0.37247511

!Ángulo de orientación de la fibra
angulo=0

!Esfuerzo aplicado en direccion x [N/m]
Nx=1

!Longitud de la placa en direccion x [m]
a=70E-2

!Longitud de la placa en direccion y [m]
b=a/2

!Espesor de la lámina[m]
t1=0.02E-2

!Distancia del centro del radio de la curvatura
!al plano de apoyo de la lámina en sus extremos.
!Radio de curvatura R=h+H
!Panel plano H=1000 , Panel cilíndrico H=0
H=10000

!1.Elementos
ET,1,SHELL281
KEYOPT,1,8,2

!2.Material
MPTEMP,,,,,,,,
MPTEMP,1,0

MPDATA,EX,1,,E1
MPDATA,EY,1,,E2
MPDATA,EZ,1,,E2
MPDATA,PRXY,1,,NU12
MPDATA,PRXZ,1,,NU12
MPDATA,PRYZ,1,,NU23
MPDATA,GXY,1,,G12
MPDATA,GYZ,1,,G23
MPDATA,GXZ,1,,G12

!3.Sección
sectype,1,shell,,
secdata,t1,1,angulo,3
secoffset,MID

!4.Geometría
!4.1.KeyPoints
K,1,0,0,0
K,2,a,0,0
K,3,0,b,0
K,4,a,b,0
!K,5,-H,b/2,0,

!4.2.Lines
L,1,2 !1
L,3,4 !2

```

```

!Cambio de coordenadas para crear la curvatura de la
lámina.
LOCAL,11,1,0,b/2,-H,180,0,270

L,1,3 !3
L,2,4 !4

!4.3-Areas

AL,1,2,3,4

allsel
CSYS,,

!5.Mallado
LSEL, , , ,1,2,1
LESIZE,all, , ,80, , , ,1

allsel
LSEL, , , ,3,4,1
LESIZE,all, , ,60, , , ,1
allsel
MSHKEY,1
AMESH,1
MSHKEY,0
FINISH
/SOLU
ANTYPE,0
PSTRES,ON

!6.Condiciones de contorno.

LSEL, , , ,1,4,1
DL,all, ,UZ,0, ,

allsel
LSEL, , , ,1,2,1
DL,all, ,UX,0, ,
DL,ALL, ,ROTY,0, ,

LSEL, , , ,3,4,1
DL,all, ,UY,0, ,
DL,all, ,ROTX,0, ,

!7.Cargas
allsel
LSEL, , , ,3,4,1
SFL,all,PRES,Nx,, ,

allsel
/STATUS,SOLU
SOLVE
FINISH

/SOLU
ANTYPE,1
EXPASS,0
BUCOPT,LANB,2,0,0,
MXPAND,2,0,0,0,0.001,
/STATUS,SOLU
SOLVE
FINISH
/POST1
SET,FIRST
PLNSOL,U,Z,0,,

```

## ANEXO D. Código del problema de referencia Capítulo 4: Lámina sometido a cortante

```
/PREP7                                MPDATA,PRXY,1,,NU12

!0.Datos
E1=210e3 ![N/mm]                       !3.Sección
NU12=0.3

                                           sectype,1,shell,,
!Ángulo de orientación de la fibra      secdata,t1,
angulo=0                                secoffset,MID

!Esfuerzo aplicado en direccion x [N/m]
Nx=1                                     !4.-Geometría
                                           RECTNG,,a,,b,
!Longitud de la placa en direccion y [mm]
b=500                                    allsel

!Longitud de la placa en direccion x [mm]
a=2.5*b                                  !5.-Mallado
                                           LSEL, , , ,1,3,2
                                           LESIZE,all, , ,120, , , ,1

!Espesor de la lámina[mm]
t1=1                                     allsel
                                           LSEL, , , ,2,4,2
                                           LESIZE,all, , ,80, , , ,1

!1.-Elementos
ET,1,SHELL281                            allsel
KEYOPT,1,8,2                             MSHKEY,1
                                           AMESH,1

!2.Material
MPTEMP,,,,,,,,                            MSHKEY,0
MPTEMP,1,0                                FINISH

MPDATA,EX,1,,E1                           /SOLU
```



```

ANTYPE,0                                f,all,fx,-Taux
PSTRES,ON                                nsel,s,node,,402
                                           f,all,fx,Taux
!6.Condiciones de contorno.              f,all,fy,-Taux
                                           nsel,s,node,,3,241,1
                                           d,all,uz,0
                                           nsel,s,node,,242
                                           f,all,fy,Tauy
                                           nsel,s,node,,243,401,1
                                           f,all,fx,Taux
                                           d,all,uz,0
                                           nsel,s,node,,2
                                           f,all,fx,-Taux
                                           f,all,fy,Tauy
                                           nsel,s,node,,403,641,1
                                           d,all,uz,0
                                           f,all,fy,Tauy
                                           nsel,s,node,,642,800,1
                                           d,all,uz,0
                                           f,all,fx,-Taux
                                           nsel,s,node,,3,241,1 !x=12.5 til x=487.5 , y=0
                                           f,all,fx,-Taux
                                           nsel,s,node,,1
                                           nsel,s,node,,243,401,1 !x=500 , y=12.5 til y=487.5
                                           !nsel,r,loc,y,0
                                           f,all,fy,Tauy
                                           d,all,ux,0
                                           d,all,uy,0
                                           nsel,s,node,,403,641,1 !x=487.5 til x=12.5 , y=500
                                           f,all,fx,Taux
                                           !nsel,r,loc,y,b
                                           d,all,ux,0
                                           nsel,s,node,,642,800,1 !x=0 , y=487.5 til y=12.5
                                           !load
                                           f,all,fy,-Taux
                                           Taux=(a/239)
                                           Tauy=(b/159)
                                           allsel
                                           /STATUS,SOLU
                                           SOLVE
                                           FINISH
                                           nsel,s,node,,1
                                           !nsel,r,loc,y,0
                                           f,all,fy,-Taux
                                           /SOLU

```

ANTYPE,1

EXPASS,0

BUCOPT,LANB,2,0,0,RANGE

MXPAND,2,0,0,0,0.001,

/STATUS,SOLU

SOLVE

FINISH

/POST1

SET,FIRST

PLNSOL,U,Z,0,,

/DSCALE,1,OFF

/REP,

/SOLU

ANTYPE,1

EXPASS,0

BUCOPT,LANB,2, , ,RANGE

MXPAND,2,0,0,0,0.001,

/STATUS,SOLU

SOLVE

FINISH

/POST1

SET,FIRST

PLNSOL,U,Z,0,,

/DSCALE,1,OFF

/REP,FAS



```

L,3,4 !2
!Cambio de coordenadas para crear la curvatura de la
;lámmina.
LOCAL,11,1,0,b/2,-H,180,0,270

L,1,3 !3
L,2,4 !4

!4.3Areas

AL,1,2,3,4 !A1

allsel

CSYS,,

!5.Mallado

LSEL, , , ,1,2,1
LESIZE,all, , ,80, , , ,1

allsel
LSEL, , , ,3,4,1
LESIZE,all, , ,60, , , ,1

allsel
MSHKEY,1
AMESH,1
MSHKEY,0

FINISH

/SOLU
ANTYPE,0
PSTRES,ON
!6.Condiciones de contorno.

lsel,s,line,,1,4,1
nsl,s,node,,
nsl,a,node,,1,2,1
nsl,a,node,,162
nsl,a,node,,282
d,all,uz,0

nsl,s,node,,1
d,all,ux,0
d,all,uy,0

nsl,s,node,,282
!nsl,r,loc,y,b
d,all,ux,0

!7.Cargas

Taux=(a/159)
Tauy=(b/119)

nsl,s,node,,1
!nsl,r,loc,y,0
f,all,fy,-Tauy
f,all,fx,-Taux

nsl,s,node,,282
f,all,fx,Taux
f,all,fy,-Tauy

nsl,s,node,,162
f,all,fy,Tauy

```

```

f,all,fx,Taux          ANTYPE,1
nselect,s,node,,2     EXPASS,0
f,all,fx,-Taux       BUCOPT,LANB,2, , ,RANGE
f,all,fy,Tauy

                        MXPAND,2,0,0,0,0.001,
                        /STATUS,SOLU
lselect,s,line,,1     /STATUS,SOLU
nselect,s,1          SOLVE
nselect,U,node,,1    FINISH
nselect,U,node,,2,
f,all,fx,-Taux      /POST1

                        SET,FIRST
                        PLNSOL,U,Z,0,,
lselect,s,line,,4
nselect,s,1          PLNSOL,U,Z,0,,
nselect,U,node,,2,
nselect,U,node,,162, /DSCALE,1,OFF
f,all,fy,Tauy       /REP,FAST

lselect,s,line,,2
nselect,s,1
nselect,U,node,,282,
nselect,U,node,,162,
f,all,fx,Taux

lselect,s,line,,3
nselect,s,1
nselect,U,node,,282,
nselect,U,node,,1,
f,all,fy,-Tauy

allselect
/STATUS,SOLU
SOLVE
FINISH

/SOLU

```