

Proyecto Fin de Grado  
Grado en Ingeniería Aeroespacial

Estudio de la Succión en Perfiles  
Aerodinámicos

Autor: Urbano Amador Sánchez

Tutor: Miguel Pérez-Saborid Sánchez-Pastor

**Dep. Ingeniería Aeroespacial y Mecánica de Fluidos**  
**Escuela Técnica Superior de Ingeniería**  
**Universidad de Sevilla**

Sevilla, 2015





Proyecto Fin de Grado  
Grado en Ingeniería Aeroespacial

# **Estudio de la Succión en Perfiles Aerodinámicos**

Autor:

Urbano Amador Sánchez

Tutor:

Miguel Pérez-Saborid Sánchez-Pastor

Profesor titular

Dep. de Ingeniería Aeroespacial y Mecánica de Fluidos

Escuela Técnica Superior de Ingeniería

Universidad de Sevilla

Sevilla, 2015

Proyecto Fin de Carrera: Estudio de la Succión en Perfiles Aerodinámicos

Autor: Urbano Amador Sánchez

Tutor: Miguel Pérez-Saborid Sánchez-Pastor

El tribunal nombrado para juzgar el Proyecto arriba indicado, compuesto por los siguientes miembros:

Presidente:

Vocales:

Secretario:

Acuerdan otorgarle la calificación de:

Sevilla, 2015

El Secretario del Tribunal

*A mi familia*

*A mis maestros*



# 1. Índice

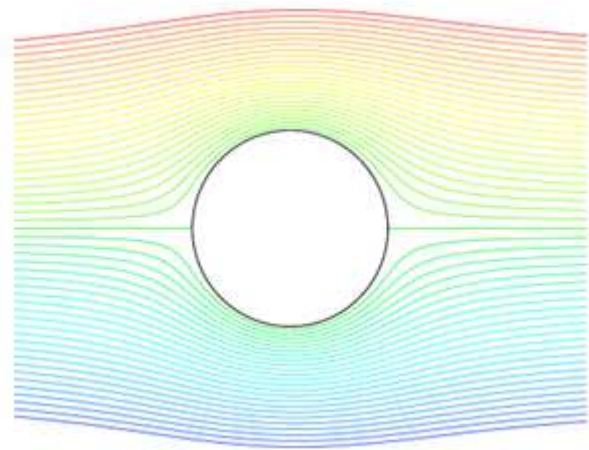
2.	Introducción .....	9
3.	Mecanismos de succión .....	13
4.	Ecuaciones generales .....	15
5.	Método de Líneas.....	18
6.	Aplicación a Placa Plana con succión uniforme .....	21
7.	Mallado Variable .....	24
7.1	Placa Plana con mallado uniforme .....	27
7.2	Placa Plana con mallado variable .....	28
8.	Aplicación en un cilindro .....	29
8.1	Succión uniforme necesaria para evitar la separación de la capa límite .....	31
8.2	Succión no uniforme necesaria para evitar el desprendimiento de la capa límite.....	34
8.3	Succión uniforme necesaria para evitar el desprendimiento en elipses de espesor variable.....	37
9.	Aplicación a perfiles NACA de 4 dígitos.....	42
9.1	Corrección del criterio de Pohlhausen para capa límite con gradiente de presiones	43
9.2	Succión necesaria para evitar el desprendimiento a ángulo de ataque nulo .....	45
9.3	Succión necesaria para evitar el desprendimiento a ángulo de ataque distinto de cero	51
9.3.1	NACA0005 .....	54
9.3.2	NACA0012 .....	60
9.3.3	NACA0018 .....	65
9.4	Comparación entre el punto de separación en régimen laminar y en turbulento .....	73
9.5	Succión necesaria para evitar el desprendimiento en cada punto .....	75
9.6	Aplicación de la succión para retrasar la transición a la turbulencia.....	88
9.6.1	Perfil Simétrico NACA0012.....	95
9.6.2	Perfil con curvatura NACA4412.....	99
10.	Adaptación del Método de Líneas para corriente compresible.....	103
11.	Conclusiones.....	119
11.1	Motivo y aportación del proyecto.....	119
11.2	Métodos numéricos empleados.....	119
11.3	Resumen de los resultados obtenidos .....	119
11.4	Líneas futuras .....	120
12.	Bibliografía .....	121



## 2. Introducción

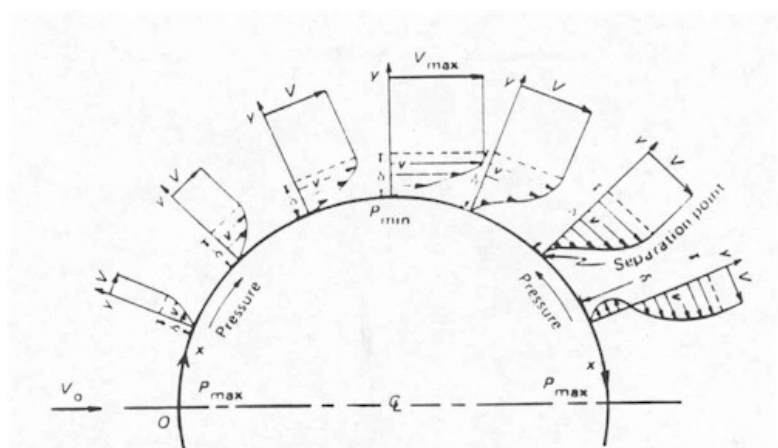
Antes de que Prandtl introdujera el concepto de Capa Límite, las principales aportaciones en el estudio de las fuerzas fluidodinámicas que se ejercen sobre cuerpos sumergidos en fluidos venían de Bernoulli, D'Alembert o Euler. De ellos Euler fue el más riguroso a la hora de dar una descripción matemática del movimiento de un fluido a través de la aplicación del principio de conservación de la masa y de la segunda ley de Newton. Sin embargo, Euler no tuvo en cuenta los efectos de fricción debido a que ignoraba la viscosidad, que fue modelada en 1847 por Saint-Venant.

Este hecho implicaba, como demostró D'Alembert en 1752, que la fuerza de resistencia de un cuerpo sumergido en un fluido y moviéndose a velocidad constante es nula, lo cual entraba en contradicción con los resultados experimentales en los que no era difícil observar que la resistencia era importante (puede pensarse en un barco moviéndose). Por tanto, la teoría potencial no era capaz de explicar la aparición de la fuerza de resistencia. A este resultado se le conoce como *la paradoja de D'Alembert*.



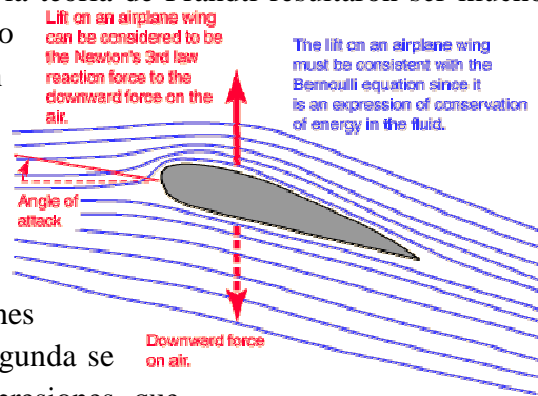
La influencia de los efectos viscosos en el comportamiento fluidomecánico fue incorporada 100 años después a través de las ecuaciones de Navier-Stokes, de las cuales ni si quiera hoy se ha podido obtener una solución analítica. De hecho, incluso si se resolvieran de forma numérica, el coste computacional sería inabarcable para un problema medianamente realista.

Fue en un congreso celebrado en Heidelberg en 1904 cuando Prandtl expuso por primera vez su teoría acerca de la capa límite. En dicha conferencia afirmó que el efecto de la fricción provocaba que el fluido adyacente a la superficie del cuerpo se



moviera a la misma velocidad que éste, es decir, asumió el principio de no deslizamiento sobre la superficie. De esta forma, los efectos de fricción sólo eran apreciables en la zona de la capa límite, una región que debía ser estrecha para que los gradientes de velocidades fueran tan grandes que las fuerzas de viscosidad se hicieran apreciables aunque el coeficiente de fricción fuese pequeño. Fuera de la capa límite el flujo era esencialmente no viscoso y podía estudiarse de la misma forma que en los dos siglos anteriores. Las ecuaciones basadas en la teoría de Prandtl resultaron ser mucho más simples que las de Navier-Stokes, dando lugar incluso a soluciones analíticas como en el caso de Blasius para una placa plana.

Finalmente se llegó a la conclusión de que el estudio de las fuerzas de resistencia y de sustentación se podía realizar por separado: la primera se obtendría aplicando las ecuaciones de capa límite de Prandtl, mientras que la segunda se calcularía a través de la distribución de presiones que proporciona el flujo no viscoso exterior a la capa límite.



En cuanto a la resistencia, Prandtl realizó una distinción entre dos tipos de contribuciones: una debida a la fricción ( $C_{Df}$ ), que sería la más significativa en cuerpos esbeltos; y otra debida a la diferencia de presiones entre el borde de ataque y el de salida provocada por el desprendimiento de la capa límite ( $C_{Dp}$ ), que resulta la más importante en cuerpos romos.

A pesar de la mayor simplicidad de las ecuaciones de Prandtl, su aplicación a un problema real para calcular la resistencia sigue presentando una considerable complejidad matemática ya que, en cada caso, se requiere un tipo de solución diferente. Por ello, antes del desarrollo de la matemática computacional, el método de enseñanza de la Mecánica de Fluidos y la Aerodinámica en las facultades de física e ingeniería consistía en la búsqueda de soluciones analíticas que, en la mayoría de los casos, eran sólo aplicables a problemas muy sencillos o era tal la complejidad matemática que podía llegar a perderse el significado físico de dichas soluciones. Sin embargo, hoy en día se ha solventado en gran medida este problema gracias al enorme desarrollo de los ordenadores así como a la aparición software matemáticos que permiten realizar cálculos muy complejos de forma sencilla como MATLAB y OCTAVE, siendo éste último un programa de licencia gratuita.

Este hecho, ha permitido un gran avance en la docencia debido a que los alumnos ya pueden abordar problemas de cierta complejidad con ayuda de los conocimientos de programación adquiridos en las asignaturas de formación básica. Incluso, se pueden llegar a cotejar los resultados dados por el código con los experimentales, permitiendo al alumno plantearse cómo de buenas son las simplificaciones realizadas en lugar de

realizar “un acto de fe” -como se venía haciendo hasta ahora-, así como discutir la validez de las soluciones obtenidas para localizar los posibles errores cometidos.

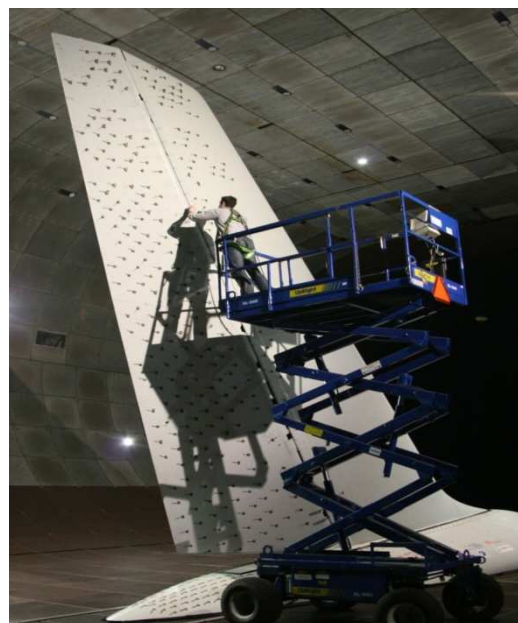
El objetivo de este trabajo consiste en el estudio de uno de estos problemas como es el de controlar la capa límite a través de la succión. Para ello, se ha partido de códigos ya implementados en la asignatura de Mecánica de Fluidos II que servían para el estudio de la capa límite en distintas geometrías, así como del método de paneles empleado en las prácticas de la asignatura de Aerodinámica I para el cálculo del flujo externo a perfiles NACA de la serie de cuatro dígitos. Así, de acuerdo con la teoría de Prandtl, se considerarán las variaciones de presión como dadas por la corriente exterior, mientras que el problema de la capa límite se estudiará de forma desacoplada y será en él donde se incluyan los efectos de la succión.

Se empleará MATLAB para la implementación de los distintos programas que traten el estudio de este fenómeno debido a la amplia utilización que se ha dado a dicha herramienta durante la carrera y a su idoneidad a la hora de realizar cálculos matemáticos gracias a las numerosas librerías que se encuentran disponibles.

El fenómeno de separación de la capa límite resulta crítico en la aviación ya que una vez que se produce, la sustentación cae de forma drástica y la resistencia aumenta de forma considerable. Por tanto, en caso de tener la necesidad de volar a baja velocidad –como en las fases de despegue y aterrizaje-, y por consiguiente con un coeficiente de sustentación grande, puede resultar de interés controlar el desprendimiento de la capa límite para así tener la capacidad de admitir un mayor gradiente adverso sin que se produzca el desprendimiento.

En la actualidad, para realizar este control se encuentra muy extendido el uso del soplado mediante una serie de ranuras que energizan la capa límite tanto en los flaps como en los slats.

En cuanto a la succión, su aplicación práctica resulta mucho menor que en el caso del soplado, aunque también puede resultar interesante principalmente por dos motivos: por un lado, se encuentra la capacidad para evitar el desprendimiento de la capa límite - que puede resultar de utilidad para reducir la resistencia de presión y lograr alcanzar ángulos de ataque mayores en perfiles aerodinámicos sin entrar en pérdida-; y por otra parte, al reducir el espesor de la capa límite, la succión permite retrasar la transición a la turbulencia de manera que lograría reducir también el esfuerzo de fricción sobre la pared



del sólido respecto a otros métodos de control de la capa límite como el soplado. Actualmente, Boeing está estudiando su implementación en sus futuras aeronaves para tratar de reducir la superficie necesaria del estabilizador vertical.

En este trabajo la atención se centrará principalmente en el estudio de diversos perfiles aerodinámicos, donde la principal componente de la resistencia viene dada por la fricción. También se tratará el problema del flujo alrededor de elipses de espesor variable, donde sí se puede ver con claridad el gran potencial que tiene la succión a la hora de reducir la resistencia de presión.

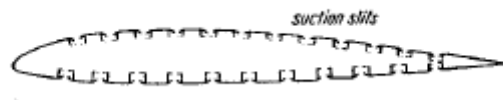
Para la realización del trabajo se comenzará por geometrías sencillas como la placa plana, el cilindro o la elipse para ir desarrollando el programa de cara al estudio de los perfiles NACA, donde se realizará un análisis de la succión requerida para que la capa límite permanezca adherida o laminar en diferentes casos.

### 3. Mecanismos de succión

Aunque la aplicación práctica de la succión no se vaya a llevar a cabo en este trabajo, sí que se van a mencionar algunos posibles métodos para la construcción de un sistema capaz de llevar a cabo la succión en la capa límite.

Para la aplicación de la succión sobre la superficie del perfil se proponen dos métodos:

1. **Ranuras a través de las que fluye el aire succionado:** Esta solución ha sido ampliamente experimentada y resulta la más fácil de implementar. Sin embargo, el diseño de las ranuras resulta crítico ya que podrían provocar un adelanto de la turbulencia en lugar de retrasarla. En la siguiente imagen se muestra un esquema de este sistema (Imagen obtenida de “*Boundary Layer Theory*”, *Schlichting*):

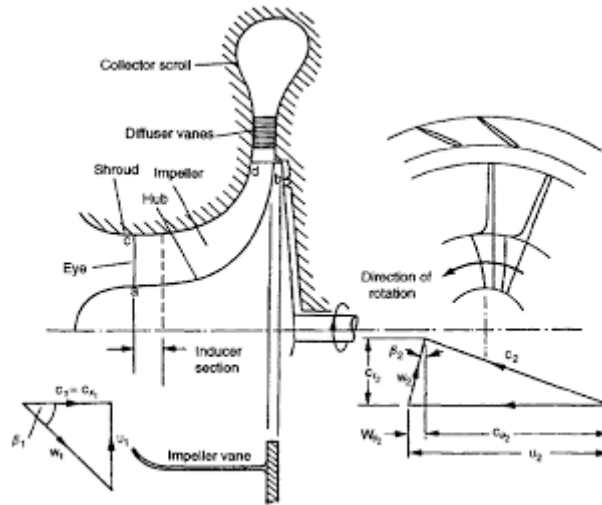


Para realizar una simulación de este sistema en el código se debería de aplicar la succión en pequeños intervalos entre los cuales la succión fuera nula.

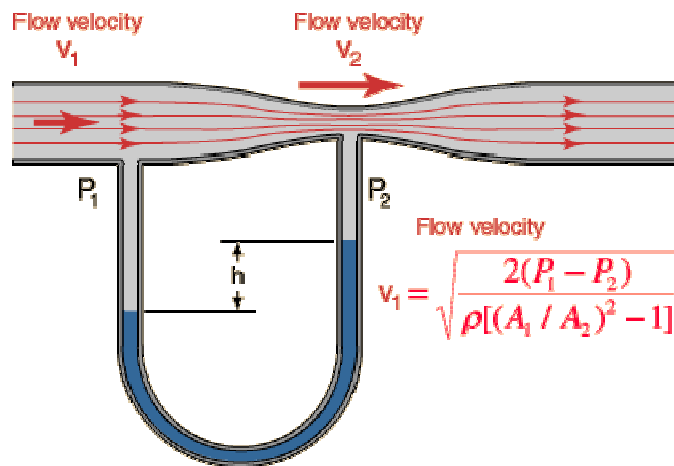
2. **Succión a partir de una superficie porosa:** existen múltiples experimentos empleando este sistema que, en comparación con el anterior, es tecnológicamente más complicado pero permitiría una mejor aproximación a una succión continua. Por tanto, se podría realizar un control más preciso de la capa límite sobre el perfil.

Por otra parte, para lograr la diferencia de presiones que genere el flujo de succión se podrían emplear los siguientes sistemas:

1. **Un compresor:** Crearía un vacío en el interior del ala que permitiría producir la diferencia de presiones necesaria. Presenta el inconveniente de que requiere un consumo extra de energía.



2. **Un dispositivo tipo Venturi:** Requiere de una entrada de aire a presión que podría venir de un compresor independiente o de otro sistema ya presente en el avión como el sangrado de los motores. El aire presurizado sería conducido hacia un fuerte estrechamiento en el que la presión disminuye lo suficiente como para succionar la capa límite.



Para saber si realmente merecería la pena aplicar la succión, podría contabilizarse este gasto de energía dentro de la resistencia para así tener una idea global de cuánto nos cuesta desplazarnos por el fluido.

## 4. Ecuaciones generales

Partiendo de la literatura (“*Boundary Layer Theory*”, *Schlichting*), si asumimos que se tiene un flujo incompresible ( $M_\infty^2 < 0.1$ ), estacionario ( $Str \ll 1$ ) y con fuerzas másicas despreciables ( $Fr \gg 1$ ), la ecuación de cantidad de movimiento -que se debe cumplir en todo el dominio fluido- queda:

$$\rho \vec{V} \cdot \nabla \vec{V} = -\nabla P + \mu \nabla^2 \vec{V} \quad (4.1)$$

Tomando ahora órdenes de magnitud a lo largo de la línea de corriente

$$\begin{aligned} (\rho \vec{V} \cdot \nabla \vec{V}) \vec{e}_s &\sim \rho_\infty \frac{U_\infty^2}{L_c} \\ (\mu \nabla^2 \vec{V}) \vec{e}_s &\sim \mu \frac{U_\infty}{L_c^2} \end{aligned} \quad (4.2)$$

Donde  $L_c$  es una longitud característica del cuerpo sumergido y  $\vec{e}_s$  la dirección de la línea de corriente. Dividiendo ahora los dos términos anteriores:

$$\frac{(\rho \vec{V} \cdot \nabla \vec{V}) \vec{e}_s}{(\mu \nabla^2 \vec{V}) \vec{e}_s} \sim \frac{\rho_\infty \frac{U_\infty^2}{L_c}}{\mu \frac{U_\infty}{L_c^2}} \sim \frac{\rho_\infty U_\infty L_c}{\mu} = Re_{L_c} \quad (4.3)$$

Se deduce por tanto que la importancia relativa del término convectivo frente al viscoso es del orden del número de Reynolds. Teniendo en cuenta que para el aire  $\frac{\mu}{\rho} \approx 1.5 \cdot 10^{-5}$  y tomando  $U_\infty L_c \sim 1$  se obtiene  $Re \gg 1$ , que serán las condiciones que se darán en todos los problemas que se van a considerar.

Por tanto, para longitudes del orden de  $L_c$  las variaciones de presión dependerán fundamentalmente del término convectivo:

$$\rho \vec{V} \cdot \nabla \vec{V} = -\nabla P \quad (4.4)$$

Siendo (4.4) equivalente a la ecuación de Bernoulli.

Sin embargo, para obtener un flujo realista en el que tenga cabida la resistencia no se pueden despreciar las fuerzas viscosas en todo el dominio fluido y de ahí que surja el concepto de capa límite. Suponiendo que la viscosidad es la responsable de que se cumpla el principio de no deslizamiento sobre la superficie, para que este término adquiera importancia la transición entre la velocidad de la corriente exterior a la capa límite y una velocidad nula –por no haber deslizamiento- deberá producirse en un espesor pequeño,  $\delta$ .

Tomando de nuevo órdenes de magnitud y suponiendo que en la capa límite  $\rho \vec{V} \cdot \nabla \vec{V} \sim \mu \nabla^2 \vec{V}$  :

$$\mu \frac{U_\infty}{\delta^2} \sim \rho_\infty \frac{U_\infty^2}{L_c} \quad (4.5)$$

Y de ahí que

$$\frac{\delta}{L_c} \sim \frac{1}{\sqrt{\text{Re}_{L_c}}} \ll 1 \quad (4.6)$$

Por tanto, en los problemas considerados se tendrá un flujo exterior a la capa límite en el que las fuerzas de viscosidad son despreciables y además, una región con un espesor característico muy inferior a la longitud del cuerpo sobre el que discurre el flujo donde las fuerzas de viscosidad son importantes y donde se desprecian las variaciones de presión frente a las que se producen en la corriente exterior.

Las ecuaciones de capa límite quedarían (^ hace referencia a una variable física):

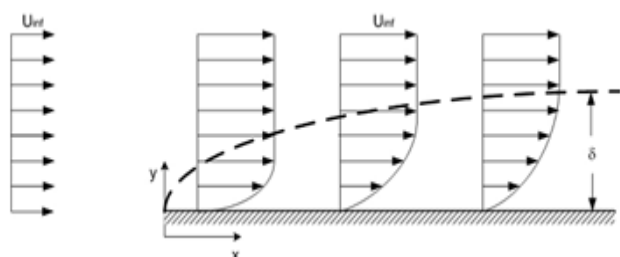
$$\frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{x}} + \frac{\partial \hat{v}}{\partial \hat{y}} = 0 \quad (4.7)$$

$$\hat{u} \frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{x}} + \hat{v} \frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{y}} = -\frac{1}{\rho_\infty} \frac{\partial \hat{P}}{\partial \hat{x}} + \nu \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial \hat{y}^2} \quad (4.8)$$

En cuanto a las condiciones de contorno:

$$\begin{aligned} \hat{u}(\hat{y} = 0) &= 0 \\ \hat{v}(\hat{y} = 0) &= \hat{v}_0(x) \\ \hat{u}(\hat{y} \rightarrow \infty) &= \hat{U}_e(x) \end{aligned} \quad (4.9)$$

Siendo  $u$  la componente de la velocidad según la dirección longitudinal ( $x$ ),  $v$  la componente de la velocidad según el eje transversal a placa ( $y$ ),  $P$  es la presión de la corriente exterior a la





capa límite mientras que  $U_e$  es la velocidad de la corriente exterior.

Para el estudio de otros tipos de geometrías se asumirá que para un mallado suficientemente fino tanto a lo largo del perfil como en su dirección transversal, la superficie es “localmente plana”, de manera que se puede aproximar que  $x$  es la coordenada tangente al cuerpo mientras que  $y$  es la coordenada perpendicular al mismo en cada punto. De este modo, se permite que las ecuaciones mantengan la misma forma que en la placa plana ya que, en caso contrario, habría que añadir los términos asociados al cambio de variable entre las coordenadas cartesianas y las que recorren la superficie.

Realizando el siguiente cambio de variable para obtener las ecuaciones en variables adimensionales:

$$\begin{aligned}
 \hat{u} &= U_\infty u \\
 \hat{v} &= U_\infty v \\
 \hat{x} &= Lx \\
 \hat{y} &= Ly \\
 \hat{U}_e &= U_\infty U_e \\
 \hat{P} &= P_\infty P
 \end{aligned} \tag{4.10}$$

Donde  $L$  es una longitud característica que en el caso de una placa plana será la longitud de la placa, en un perfil aerodinámico sería la cuerda mientras que en un cilindro sería el radio.

Aplicando además la ecuación de Bernoulli para el flujo externo

$$P_\infty + 1/2\rho_\infty U_\infty^2 = \hat{P} + 1/2\rho_\infty \hat{U}_e^2 \tag{4.11}$$

$$-\frac{1}{\rho_\infty} \frac{\partial \hat{P}}{\partial \hat{x}} = \hat{U}_e \frac{\partial \hat{U}_e}{\partial \hat{x}} \tag{4.12}$$

Sustituyendo en (4.7) y en (4.8) queda:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \tag{4.13}$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = U_e \frac{\partial U_e}{\partial x} + \frac{1}{\text{Re}_L} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \tag{4.14}$$

Donde  $\text{Re}_L$  es el número de Reynolds basado en la longitud característica  $L$ .

## 5. Método de Líneas

Puede observarse que las ecuaciones (4.13) y (4.14) son no lineales debido al producto entre variables, por lo que su resolución numérica implicaría un coste computacional muy importante. Sin embargo, realizando un mallado en dirección  $x$  y evaluando las ecuaciones en cada uno de estos puntos se pueden llegar a linealizar dichas ecuaciones aproximando las variables que multiplican a las derivadas ( $u$  y  $v$ ) por sus valores correspondientes a la “estación anterior” (anterior punto del mallado en  $x$ ). Para que esta aproximación resulte aceptable se asume que la distribución de las variables es suave y además el mallado en  $x$  deberá ser muy fino para que no exista una gran diferencia entre las variables aproximadas y las reales.

Una vez linealizadas las ecuaciones, el método de líneas permite resolver el problema mediante un sistema de ecuaciones algebraicas en lugar de hacerlo a través de un sistema de ecuaciones diferenciales linealizadas, reduciéndose así el coste computacional además de dotar de mayor simplicidad al método.

El procedimiento para lograrlo consiste en realizar una discretización adicional en dirección  $y$  (con  $N_y$  puntos) de manera que en cada estación sólo se consideren como variables las velocidades correspondientes a cada una de esas “líneas”. De este modo, evaluando las ecuaciones en cada una de las líneas y aproximando las derivadas por cocientes incrementales se obtiene un sistema de  $N_y$  ecuaciones con  $N_y$  incógnitas.

Cabe destacar que si el mallado es muy fino los cocientes incrementales tienden al valor de las derivadas y por tanto si se refina la discretización los resultados convergen a los reales.

En una estación  $n$  y en la línea  $j$ :

$$u_j^{n-1} \frac{u_j^n - u_j^{n-1}}{x_n - x_{n-1}} + v_j^{n-1} \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{y_{j+1} - y_{j-1}} = U_e \frac{\partial U_e}{\partial x} + \frac{1}{\text{Re}_L} \frac{\frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{2} - \frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{2}}{\frac{y_{j+1} - y_j}{2} - \frac{y_j - y_{j-1}}{2}} \quad (5.1)$$

Y por la ecuación (4.13)

$$v_j^{n-1} = v_0 - \int_0^{y_j} \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{n-1} dy \quad (5.2)$$

Realizándose dicha integral mediante la regla de los trapecios

$$\int_0^{y_j} \left[ \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right]_{n-1} dy = T \begin{pmatrix} \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{n-1} \\ \vdots \\ \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_j \\ \vdots \\ \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{N_y} \end{pmatrix} \quad (5.3)$$

Siendo

$$T = \begin{pmatrix} 0.5 y_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0.5 y_1 + 0.5(y_2 - y_1) & \cdots & 0.5(y_{j+1} - y_j) + 0.5(y_j - y_{j-1}) & \cdots & 0.5(y_i - y_{i-1}) & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0.5 y_1 + 0.5(y_2 - y_1) & \cdots & 0.5(y_{j+1} - y_j) + 0.5(y_j - y_{j-1}) & \cdots & 0.5(y_{N_y} - y_{N_y-1}) \end{pmatrix} \quad (5.4)$$

El sistema a resolver sería del tipo  $Ax = r$  donde

$$\begin{pmatrix} b_1 & c_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & b_2 & c_2 & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{N_y} & b_{N_y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_{N_y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r_{N_y} \end{pmatrix} \quad (5.5)$$

$$\begin{aligned}
a_j &= -\frac{v_j^{n-1}}{y_{j+1} - y_{j-1}} - \frac{1}{\operatorname{Re}_L} \frac{2}{(y_j - y_{j-1})(y_{j+1} - y_{j-1})} \\
b_j &= \frac{u_j^{n-1}}{x_j - x_{j-1}} + \frac{2}{\operatorname{Re}_L} \left( \frac{1}{(y_{j+1} - y_j)(y_{j+1} - y_{j-1})} + \frac{1}{(y_j - y_{j-1})(y_{j+1} - y_{j-1})} \right), \\
c_j &= \frac{v_j^{n-1}}{y_{j+1} - y_{j-1}} - \frac{1}{\operatorname{Re}_L} \frac{2}{(y_{j+1} - y_j)(y_{j+1} - y_{j-1})}, \\
r_j &= U_j^n \left( \frac{\partial U_e}{\partial x} \right)_j^n + \frac{(u_j^{n-1})^2}{x_j - x_{j-1}}
\end{aligned} \tag{5.6}$$

Para cumplir con la condición de no deslizamiento ( $u_1=0$ ):

$$b_1 = 1, \quad c_1 = 0, \quad r = 0 \tag{5.7}$$

Mientras que en la última línea de la capa límite la velocidad es igual a la de la corriente exterior  $\hat{u} = \hat{U}_e$

$$a_{N_y} = 0 \quad b_{N_y} = 1 \quad r_{N_y} = U_e \tag{5.8}$$

## 6. Aplicación a Placa Plana con succión uniforme

Como punto de partida para comprobar la validez del código se han tratado de reproducir los resultados ofrecidos en el libro “Boundary Lawyer” de H. Schlichting en el capítulo que dedica al control de la capa límite.

Para este problema de placa plana Schlichting encontró una solución analítica del perfil de velocidades de la capa límite llamada “*asymptotic suction profile*”. Para su obtención, se ha considerado que si nos encontramos suficientemente lejos de  $x=0$  el perfil de velocidades ya no varía en la dirección  $x$ , de manera que se pueden anular las derivadas respecto a dicha coordenada así como el término del gradiente de presiones en (4.8) quedando:

$$\hat{v} \frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{y}} = \nu \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial \hat{y}^2} \quad (6.1)$$

Anulando también la derivada respecto de  $x$  en la ecuación de continuidad se observa que la componente de la velocidad transversal es independiente de la coordenada  $y$ , por lo que

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{v}}{\partial \hat{y}} &= 0, \\ \hat{v} &= cte = \hat{v}_0 \end{aligned} \quad (6.2)$$

Y por tanto:

$$\hat{v}_0 \frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{y}} = \nu \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial \hat{y}^2} \quad (6.3)$$

De donde se obtiene el perfil de velocidades mencionado

$$\hat{u}(\hat{y}) = U_\infty [1 - e^{-\frac{\hat{v}_0 \hat{y}}{\nu}}], \quad \hat{v}_0 < 0 \quad (6.4)$$

Para que sean aplicables las ecuaciones anteriores, Schlichting especifica que  $\hat{v}_0$  deberá de ser del orden de  $\frac{U_\infty}{\sqrt{Re_L}}$ . De esta forma,  $\hat{v}_0$  sería de un orden de magnitud lo

suficientemente pequeño como para poder despreciar la pérdida de masa o “*sink effect*” en el flujo potencial exterior, es decir, se supondrá que el flujo potencial no se verá afectado por la succión aplicada en la superficie del cuerpo.

En la siguiente gráfica se representan los perfiles de velocidades obtenidos para varios valores de  $x$  junto con la solución asintótica.

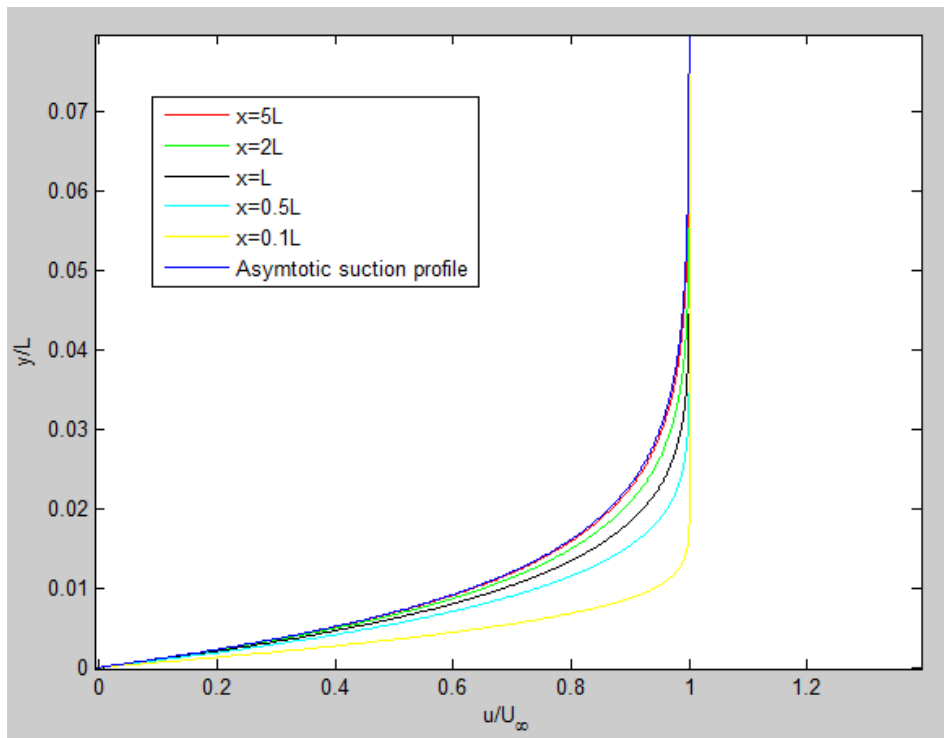
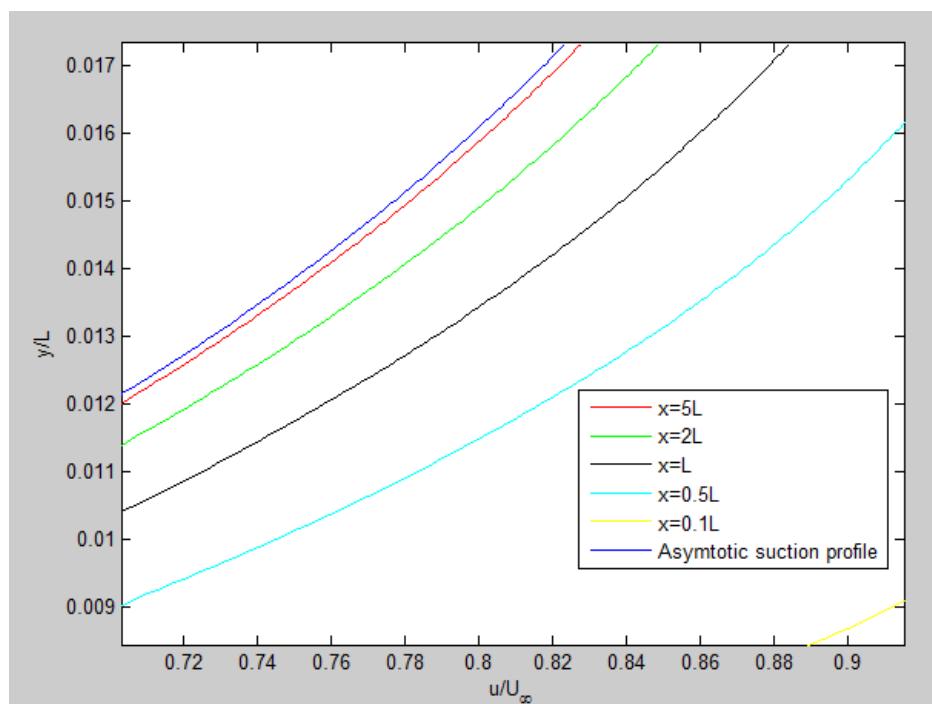


Imagen 1: Perfiles de velocidades para varias longitudes

Ampliando la imagen para apreciar mejor los diferentes perfiles de velocidades



Puede observarse que conforme nos alejamos del borde de ataque los perfiles van tendiendo a la solución asintótica y que para un valor de  $x$  igual a 5 veces la longitud característica se obtiene prácticamente dicha solución.

Dado que los resultados obtenidos numéricamente tienden a la solución analítica, se puede considerar que tanto el método de líneas como el mallado empleado son válidos para el análisis del fenómeno de la succión en el caso de placa plana con succión uniforme. En los siguientes capítulos se tratará de extender este estudio a geometrías más complejas.

## 7. Mallado Variable

En aquellas regiones en las que los perfiles de velocidades presenten grandes variaciones en un corto espacio, como son el borde de ataque o las cercanías al punto de remanso, el mallado deberá refinarse mucho más para tener capacidad de recoger adecuadamente dichas variaciones. En caso de tener una malla equiespaciada, para refinar la discretización en ciertas zonas se hace necesario refinar todo el mallado con el consiguiente aumento del coste computacional.

De este modo, para lograr una precisión adecuada sin aumentar en exceso el coste computacional, surge el concepto del mallado variable. El procedimiento consistiría en realizar un mallado más fino en aquellas regiones en las que las variaciones de los perfiles de velocidades sean importantes y otro más grueso en aquellas en las que los gradientes sean menores.

Como puede observarse en (5.1) para aproximar las derivadas se han empleado tanto diferencias centradas  $\left(\frac{\phi_{i+1} - \phi_{i-1}}{2\Delta x}\right)$  como anteriores  $\left(\frac{\phi_i - \phi_{i-1}}{\Delta x}\right)$ . Para estimar el error cometido en cada una de las derivadas, considerando un mallado uniforme, se va a realizar un desarrollo en serie de Taylor de cada uno de sus términos:

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} \approx \begin{cases} \frac{\phi_{i+1} - \phi_{i-1}}{2\Delta x} \\ \frac{\phi_i - \phi_{i-1}}{\Delta x} \end{cases} \quad (7.1)$$

$$\begin{aligned} \phi_{i+1} &= \phi_i + \Delta x \left. \frac{\partial \phi}{\partial x} \right|_i + \frac{\Delta x^2}{2} \left. \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \right|_i + \frac{\Delta x^3}{3!} \left. \frac{\partial^3 \phi}{\partial x^3} \right|_i + \dots, \\ \phi_i &= \phi_i, \\ \phi_{i-1} &= \phi_i - \Delta x \left. \frac{\partial \phi}{\partial x} \right|_i + \frac{\Delta x^2}{2} \left. \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \right|_i - \frac{\Delta x^3}{3!} \left. \frac{\partial^3 \phi}{\partial x^3} \right|_i + \dots \end{aligned} \quad (7.2)$$

Sustituyendo en (7.1)

$$\begin{aligned} \frac{\phi_{i+1} - \phi_{i-1}}{2\Delta x} &= \left. \frac{\partial \phi}{\partial x} \right|_i + \frac{\Delta x^2}{3!} \left. \frac{\partial^3 \phi}{\partial x^3} \right|_i + \dots, \\ \frac{\phi_i - \phi_{i-1}}{\Delta x} &= \left. \frac{\partial \phi}{\partial x} \right|_i - \frac{\Delta x}{2} \left. \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \right|_i + \dots \end{aligned} \quad (7.3)$$



El error introducido por la diferencia centrada será por tanto del orden de  $\Delta x^2$ , por lo que se dice que tiene un grado de precisión de segundo orden. Por su parte, en la diferencia anterior se tendría un grado de precisión de primer orden.

En cuanto a la derivada segunda, que en (5.1) se ha aproximado mediante diferencia centrada, se tendría un grado de precisión de segundo orden.

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \approx \frac{\phi_{i+1} - 2\phi_i + \phi_{i-1}}{\Delta x^2} = \left. \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \right|_i + \frac{2\Delta x^2}{4!} \left. \frac{\partial^4 \phi}{\partial x^4} \right|_i + \dots \quad (7.4)$$

Realizando el mismo desarrollo para la derivada primera pero en el caso de un mallado no uniforme:

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} \approx \frac{\phi_{i+1} - \phi_{i-1}}{x_{i+1} - x_{i-1}} = \left. \frac{\partial \phi}{\partial x} \right|_i + \frac{\Delta x_2 - \Delta x_1}{2} \left. \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \right|_i + \dots, \quad (7.5)$$

$$\Delta x_1 = x_i - x_{i-1},$$

$$\Delta x_2 = x_{i+1} - x_i$$

Aparentemente se obtiene un error de primer orden pero se va a demostrar que en realidad, si la función que determina el refinamiento de la malla es suave, se obtiene un grado de precisión de segundo orden.

Llamando  $\xi(x)$  a la función de estrechamiento y  $f(\xi)$  a su inversa con derivadas continuas al menos hasta la derivada segunda se da a  $\xi(x)$  el mismo valor que al índice de mallado  $i$ , de manera que  $\xi_i = i$  y  $\Delta \xi = 1$ . De este modo, el espacio computacional se encuentra equiespaciado y el espacio físico  $x$  presenta estrechamiento.

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1} = f(\xi_i) - f(\xi_{i-1}) \approx \Delta \xi \frac{\partial f}{\partial \xi} \quad (7.6)$$

$$\Delta x \propto \Delta \xi \quad (7.7)$$

Por tanto,

$$\Delta x_2 - \Delta x_1 = x_{i+1} - 2x_i + x_{i-1} = f(\xi_{i+1}) - 2f(\xi_i) + f(\xi_{i-1}) \approx \Delta \xi^2 \frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2} \quad (7.8)$$

$$\Delta x_2 - \Delta x_1 \propto \Delta \xi^2 \propto \Delta x^2 \quad (7.9)$$

Así, haciendo por ejemplo que la función de estrechamiento sea  $x_i = \xi_i^2$  con  $\xi \in [\sqrt{x_{\min}}, \sqrt{x_{\max}}]$ , se consigue obtener un mallado más fino en la parte inicial, donde los gradientes de velocidades son importantes -ya que se pasa de tener un perfil uniforme de velocidades en la corriente incidente a otro en el que la velocidad externa se adapta hasta hacerse cero en la superficie para cumplir con la condición de no-deslizamiento sobre la misma-. Por otra parte, conforme se avanza en  $x$  el mallado se va haciendo más grueso, lo cual no implica un error importante ya que conforme nos alejamos del borde de ataque los gradientes son menores.

Por tanto, con este tipo de mallado se consigue un reparto mucho más eficiente de las estaciones en las que se realiza el cálculo de la Capa Límite.

También será de interés emplear el mallado variable para la coordenada  $y$ , ya que las principales variaciones en los perfiles de velocidades se encontrarán muy cerca de  $y = 0$  mientras que para valores de  $y \sim \frac{1}{\sqrt{\text{Re}}}$  la componente  $u$  de la velocidad será prácticamente igual a la de la corriente exterior, por tanto, el perfil de velocidades apenas presentaría variaciones y en consecuencia un mallado muy refinado en dicha región supondría un coste computacional mal aprovechado.

Para comprobar en qué medida el mallado variable permite reducir el número de puntos a considerar se van a estudiar por separado los casos de una placa plana a ángulo de ataque nulo con un mallado uniforme y con otro variable. De este modo, se podrá determinar para qué número de puntos se obtiene un buen resultado en cada caso al comparar con la solución analítica del coeficiente de resistencia, conocida como solución de Blasius:

$$C_D = \frac{D}{1/2 \rho_\infty U_\infty^2 L} = \frac{1.328}{\sqrt{\text{Re}}} \quad (7.10)$$

## 7.1 Placa Plana con mallado uniforme

La discretización se realizará implementado el siguiente código:

```
ymin=0; ymax=8/sqrt(Re); Ny=1000; yv(1:Ny)=linspace(ymin,ymax,Ny); hy=(ymax-ymin)/(Ny-1);  
%  
xmin=0; xmax=1; Nx=1000; xv(1:Nx)=linspace(xmin,xmax,Nx); hx=(xmax-xmin)/(Nx-1);
```

Para un valor de  $Re = 10^4$ ,  $C_{D,analítico} = 0.0133$

$C_{D,numérico}$	$N_x=1000$	$N_x=1500$	$N_x=2000$	$N_x=3000$
$N_y=1000$	0.012541	0.012658	0.012730	0.012819
$N_y=1500$	0.012553	0.012670	—	—
$N_y=2000$	0.012559	0.012676	—	—
$N_y=3000$	0.012565	0.012682	0.012754	0.012842

**Tabla 1: Coeficiente de resistencia obtenido para varios tipos de refinamiento del mallado**

Puede observarse que conforme se aumenta el número de puntos los resultados van convergiendo hacia la solución analítica. Sin embargo, ni si quiera con  $N_x=3000$  y  $N_y=3000$ , que supone un tiempo de cálculo de unos 10 minutos, se llega a lograr una gran aproximación al cometerse un error del 3,44%.

También cabe destacar que resulta más eficiente refinar el mallado en  $x$  que en  $y$ , por lo que puede ser un hecho a tener en cuenta a la hora de buscar mayor precisión sin aumentar demasiado el tiempo de computación.

## 7.2 Placa Plana con mallado variable

Para implementar el mallado con una función cuadrática:

```
ymin=0; ymax=8/sqrt(Re);
Ny=1001;
yv(1:Ny)=(linspace(sqrt(ymin),sqrt(ymax),Ny)).^2;
hy(1)=yv(1);
hy(2:Ny)=yv(2:Ny)-yv(1:Ny-1);
%
xmax=1;
Nx=1001;
xmin=0.00001;
xv(1:Nx)=(linspace(sqrt(xmin),sqrt(xmax),Nx)).^2;
hx(1)=xv(1);
hx(2:Nx)=xv(2:Nx)-xv(1:Nx-1);
```

En este caso se observa que poniendo  $N_x=1001$  y  $N_y=1001$  se obtiene  $C_{D,numérico} = 0.0131$ , lo que supone un error del 1,16% con un tiempo de computación de unos 35 segundos. De este modo, se demuestra cualitativamente la importante conveniencia de emplear un mallado con estrechamiento frente a uno uniforme.

## 8. Aplicación en un cilindro

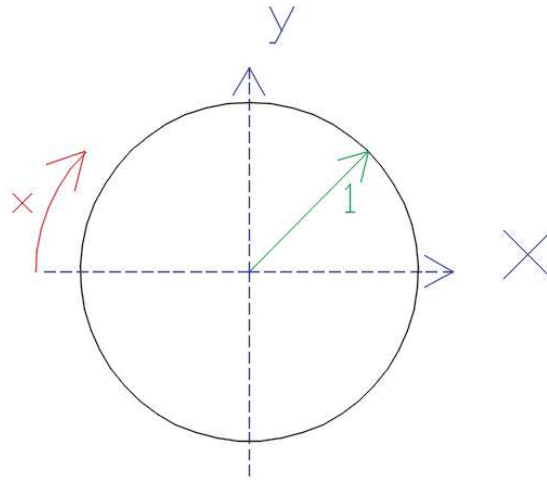
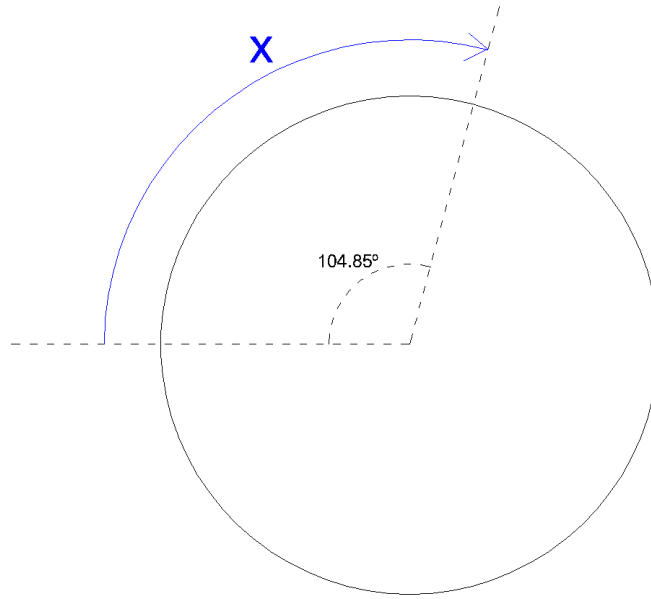


Imagen 2: Coordenadas del cilindro en variables adimensionales

A diferencia de la placa plana, donde  $\frac{\partial U_e}{\partial x} = 0$ , en el cilindro sí existe un gradiente de presiones que puede ser obtenido a partir de (8.1) siempre que la capa límite permanezca adherida en todo el cilindro. En caso contrario, sería necesario obtener la corriente exterior de forma experimental debido a que los torbellinos que se producen tras el desprendimiento de la capa límite inducen una velocidad que modifica la corriente potencial, haciéndola muy difícil de modelar.

$$U_e = 2 \sin(x) \quad (8.1)$$

Suponiendo que se cumpliera (8.1), la separación de la corriente se produciría en  $x=1.83$ , es decir, poco después de que empiece la zona con gradiente de presiones adverso. Por tanto, apenas se recupera presión y la resistencia debida a la diferencia de presiones entre la cara por la que incide la corriente y la cara por la que sale se hace importante.



**Imagen 3: Punto de desprendimiento laminar**

En el caso real, el hecho de tener una corriente exterior distinta de (8.1) provoca que el desprendimiento se produzca incluso antes de  $x = \pi / 2$ .

Para analizar el efecto cualitativo que tiene la succión respecto al desprendimiento se puede evaluar la ecuación de cantidad de movimiento (4.8) en la pared ( $y=0$ ):

$$\begin{aligned} \hat{u}(\hat{y} = 0) = 0, \quad \hat{v}(\hat{y} = 0) = \hat{v}_0 \\ \nu \left( \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial \hat{y}^2} \right)_{\hat{y}=0} = \hat{v}_0 \left( \frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{y}} \right)_{\hat{y}=0} + \frac{1}{\rho_\infty} \frac{\partial \hat{P}}{\partial \hat{x}} \end{aligned} \quad (8.2)$$

En una región con gradiente adverso de presiones  $\left( \frac{\partial \hat{P}}{\partial \hat{x}} > 0 \right)$ , la superposición de la succión ( $\hat{v}_0 < 0$ ) reduce la curvatura del perfil de velocidades en la pared, con lo que aumenta la velocidad en las primeras líneas. De esta forma, al aumentar la energía cinética en la región más cercana a la pared, se consigue retrasar el desprendimiento.

Además, este hecho también provoca que se reduzca el espesor de la capa límite, por lo que aparece el efecto adicional de estabilizar la capa límite laminar.

Como muestra de lo anterior se ha representado un perfil de velocidades sin succión frente a otro en el que se aplica un valor característico de  $\hat{v}_0$  en  $x=1$ .

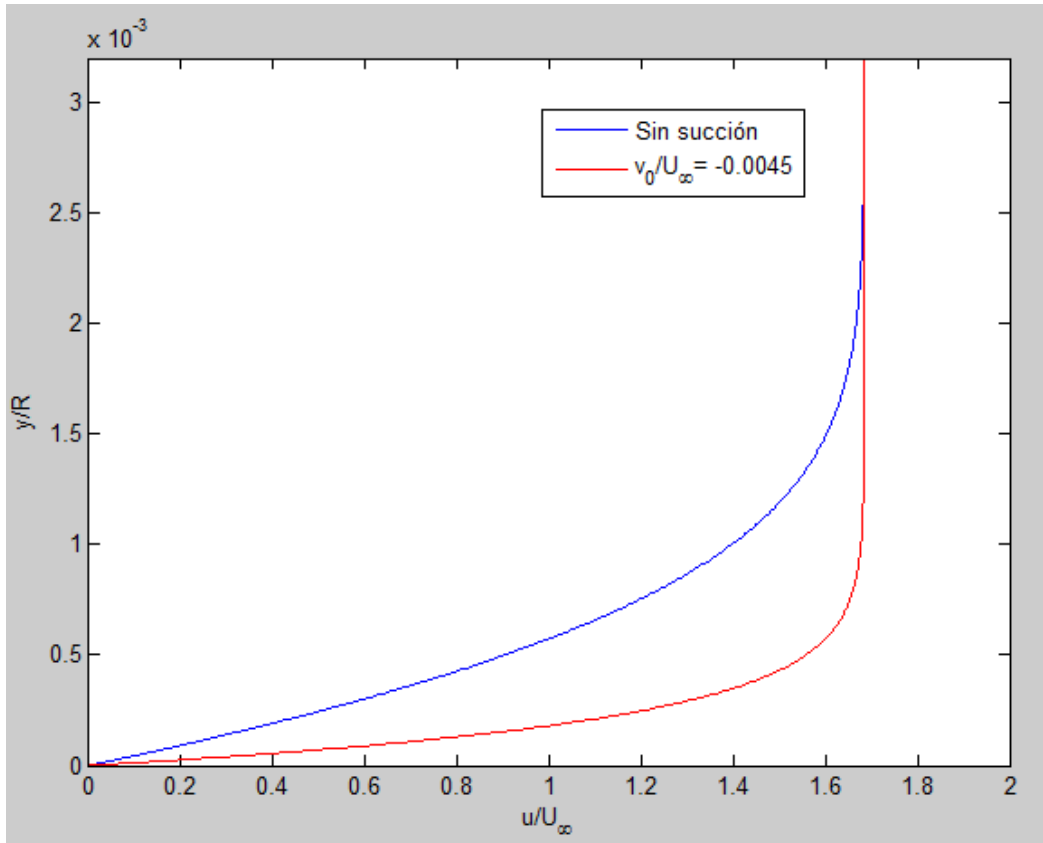


Imagen 4: Comparación entre un perfil de velocidades con succión y otro sin succión

## 8.1 Succión uniforme necesaria para evitar la separación de la capa límite

En “*Boundary Layer Theory*”, Schlichting realizó una estimación de la succión que sería necesario aplicar para evitar el desprendimiento de la capa límite a partir de la forma que tiene el perfil de velocidades en dicho momento, dando lugar a la siguiente fórmula:

$$\hat{v}_0 = 2.18 \sqrt{\nu \left( -\frac{\partial \hat{U}_e}{\partial \hat{x}} \right)} \quad (8.3)$$

Que en variables adimensionales sería

$$v_0 = 2.18 \sqrt{\frac{\left( -\frac{\partial U_e}{\partial x} \right)}{\text{Re}}} \quad (8.4)$$

Puede observarse que la ecuación sólo tiene sentido donde el gradiente de presiones es adverso  $\left(-\frac{\partial U_e}{\partial x} > 0\right)$  ya que es donde puede producirse el desprendimiento.

Por tanto, para evitar la separación de la capa límite mediante una succión uniforme habría que aplicar la  $v_0$  asociada al máximo gradiente adverso, que en el caso del cilindro sería  $-\frac{\partial U_e}{\partial x} = -2\cos(x = \pi) = 2$ . Este valor estimado de  $v_0$  puede apreciarse que es del orden de  $\frac{1}{\sqrt{\text{Re}}}$ , por lo que resulta válida la suposición de que el flujo externo apenas se ve afectado por la adición de una succión en la pared.

Aplicando dicho valor de  $v_0$  al programa “SuccionZona.m” el desprendimiento se produce en  $x = 2.78$  ( $X = 0.93$ ). Para que la corriente llegue adherida hasta  $x = \pi$  en el código habrá que poner  $v_0 = 3.15\sqrt{\frac{2}{\text{Re}}}$ . Se observa por tanto que en este caso (8.4) sirve para estimar de qué orden deberá ser la succión a aplicar para evitar la separación de la capa límite.

Cabe destacar que una vez que se consigue que la corriente llegue adherida hasta el final del cilindro la ecuación (8.1) representa de forma exacta la velocidad de la corriente exterior, suponiendo que el flujo fuera incompresible, bidimensional y estacionario. El hecho de evitar la separación de la capa límite implica que el flujo recupera toda la presión perdida en la zona con gradiente favorable, lográndose eliminar por completo la resistencia provocada por la diferencia de presiones entre la región por la que incide la corriente y la región por la que sale del cilindro.

Para analizar como varía la resistencia con la succión se van a definir los siguientes coeficientes adimensionales:

### **Coefficiente de Resistencia de Presión ( $C_{DP}$ )**

$$D_p = 2 \left[ \int_0^{\bar{x}_s} -(\hat{P}_e - P_\infty) n_x d\hat{x} + \int_{\bar{x}_s}^{\pi} -(\hat{P}_s - P_\infty) n_x d\hat{x} \right], \quad (8.5)$$

$$C_{DP} = \frac{D_p}{1/2\rho U_\infty^2 (2R)} = \int_0^{x_s} (U_e^2 - 1) n_x dx + (U_s^2 - 1) Y_s$$

Donde “s” se refiere al punto de desprendimiento y  $Y_s = \sin(x_s)$  es la coordenada en el eje vertical a la que se produce el desprendimiento.



### Coefficiente de Resistencia de Fricción ( $C_{DF}$ )

$$D_F = 2 \int_0^{\bar{x}_s} \mu \left( \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \bar{y}} \right)_{\bar{y}=0} n_y d\bar{x},$$

$$C_{DF} = \frac{D_F}{1/2 \rho_\infty U_\infty^2 (2R)} = \frac{2}{Re_R} \int_0^{\bar{x}_s} \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0} n_y dx \quad (8.6)$$

### Coefficiente de Resistencia Total ( $C_D$ )

$$C_D = \frac{D_P + D_F}{1/2 \rho_\infty U_\infty^2 (2R)} = C_{DP} + C_{DF} \quad (8.7)$$

Como se va a considerar que en todo momento la capa límite permanece laminar el número de Reynolds empleado será  $Re_R = 10^4$

	$C_{DP}$	$C_{DF}$	$C_D$
$v_0 = 0$	2.4082	0.0418	2.45
$v_0 = 2.18\sqrt{2/Re}$	0.1158	0.1914	0.3072
$v_0 = 3.15\sqrt{2/Re}$	0	0.279	0.279

**Tabla 2: Coeficientes de resistencia aplicando succión uniforme**

Como se ha comentado antes, la corriente externa para el caso sin succión no es muy realista, por lo que sería más adecuado comparar con los datos experimentales dados en la literatura ("*Fluid Mechanics*", F.M. White) donde  $C_D=1.2$  para un flujo laminar.

Para el tercer caso la corriente externa sí es la adecuada y por tanto se podría decir que la resistencia se logra reducir en un 88.61%.

## 8.2 Succión no uniforme necesaria para evitar el desprendimiento de la capa límite

Como se ha visto, la aplicación de una succión uniforme en el cilindro permitiría una importante reducción de la resistencia, no obstante, también traería consigo algunos aspectos negativos como la necesidad de un compresor para lograr dicha succión así como un incremento de la resistencia debida a fricción, ya que al estrecharse la capa límite el gradiente de velocidades aumenta y con ello también el esfuerzo sobre la pared

$$\tau_p = \mu \left( \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{y}} \right)_{\tilde{y}=0}$$

Una solución para minimizar estos inconvenientes podría ser aplicar la succión solamente en aquellas zonas donde pueda producirse el desprendimiento, es decir, donde exista gradiente adverso. De este modo, se eliminaría la succión en toda la región con gradiente favorable ya que en esta área la succión incrementa la resistencia debida a la fricción, siendo una zona en la que no puede producirse la separación de la capa límite.

En caso de que no se aplicara succión, la corriente se desprendería en  $x = 1.83$  por lo que ésta deberá comenzar un poco antes, por ejemplo en  $x = 1.8$ .

	Intervalo de Succión	Punto de Desprendimiento	$C_{DP}$	$C_{DF}$	$C_D$
$v_0 = 0$	-	1.83	2.4082	0.0418	2.45
$v_0 = 3.15\sqrt{2/Re}$	$x \in [0, \pi]$	$\pi$	0	0.279	0.279
$v_0 = 3.15\sqrt{2/Re}$	$x \in [1.8, \pi]$	2.932	0.024	0.0984	0.1224
$v_0 = 4\sqrt{2/Re}$	$x \in [1.8, \pi]$	$\pi$	0	0.127	0.127

Tabla 3: Coeficientes de fricción aplicando la succión en un intervalo

Cómo puede observarse, si el intervalo donde se aplica  $v_0 < 0$  se reduce un 42,7% la velocidad de succión se deberá incrementar en un 27%, pero presenta el aspecto positivo de que el coeficiente de resistencia se reduce más de un 50%.

Un aspecto destacable es que si se deja de aplicar la succión en algún punto después de  $x = 1.8$  la separación de la capa límite se produce casi al instante debido a que el incremento que se da a la cantidad de movimiento del fluido no es suficiente como para compensar el elevado gradiente adverso que se tiene aguas abajo. Por ello, para evitar el desprendimiento se hace necesario aplicar succión de forma continua.

Como se ha comentado en el capítulo 7, en aquellos puntos en los que la velocidad externa presente grandes variaciones será necesario refinar el mallado para tener precisión. En el caso del cilindro, esto se hace de forma correcta hasta  $x = \pi / 2$  con una función de estrechamiento cuadrática, sin embargo, a partir de ahí  $\Delta x$  sigue aumentando cuando lo que sería deseable es que disminuyera ya que  $\left| \frac{\partial U_e}{\partial x} \right| < 0$  entre  $x = \pi / 2$  y  $x = \pi$ .

Para solucionar esto lo que se hará es mantener el mallado hasta  $x = \pi / 2$  y a partir de ahí aplicar simetría respecto al eje vertical en cuanto al espaciado entre los puntos en  $x$ . La modificación que habrá que realizar en el mallado del programa “SuccionZona” es:

```
% MALLADO EN X
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% MALLADO INICIAL
xmax=pi;
Nx=1001;
xmin=0.00001;
xv(1:Nx)=(linspace(sqrt(xmin),sqrt(xmax),Nx)).^2;
hx(1)=xv(1);
hx(2:Nx)=xv(2:Nx)-xv(1:Nx-1);

% MALLADO FINAL
j=1;
while xv(j)<pi/2
j=j+1;
end
i=j;
while xv<xmax
xv(i)=2*xv(j)-xv(2*j-i);
i=i+1;
end
% HAY QUE REDEFINIR Nx Y hx
Nx=length(xv);
hx(1)=xv(1);
hx(2:Nx)=xv(2:Nx)-xv(1:Nx-1);
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
```

Repitiendo los cálculos anteriores

	Intervalo de Succión	Punto de Desprendimiento	$C_{DP}$	$C_{DF}$	$C_D$
$v_0=0$	-	1.83	2.4082	0.0418	2.45
$v_0 = 3.15\sqrt{2/Re}$	$x \in [0, \pi]$	3.0486	0.0021	0.279	0.2811
$v_0 = 3.5\sqrt{2/Re}$	$x \in [0, \pi]$	$\pi$	0	0.31	0.31
$v_0 = 3.15\sqrt{2/Re}$	$x \in [1.8, \pi]$	2.9086	0.0321	0.0986	0.1307
$v_0 = 4\sqrt{2/Re}$	$x \in [1.8, \pi]$	3.0624	0.0013	0.1267	0.128
$v_0 = 6.1\sqrt{2/Re}$	$x \in [1.8, \pi]$	$\pi$	0	0.1938	0.1938

**Tabla 4: Coeficientes de resistencia obtenidos corrigiendo el mallado**

A la vista de los resultados puede decirse que no existen grandes variaciones entre ambos tipos de mallado excepto cuando se llega cerca del punto de remanso, donde se observa que es necesario aplicar una  $v_0$  mayor que la calculada anteriormente.

Este último valor de  $v_0$  podría ser útil para emplearlo como fórmula alternativa a la ofrecida por Schlichting en (8.4) ya que se han obtenido sin realizar suposiciones acerca de la forma de la capa límite.

La fórmula en variables adimensionales para aplicar la succión a partir del punto de desprendimiento que se daría sin succión sería:

$$v_0 = 6.1 \sqrt{\frac{\left(-\frac{\partial U_e}{\partial x}\right)}{Re}} \quad (8.8)$$

Mientras que para succión uniforme:

$$v_0 = 3.5 \sqrt{\frac{\left(-\frac{\partial U_e}{\partial x}\right)}{Re}} \quad (8.9)$$

### 8.3 Succión uniforme necesaria para evitar el desprendimiento en elipses de espesor variable

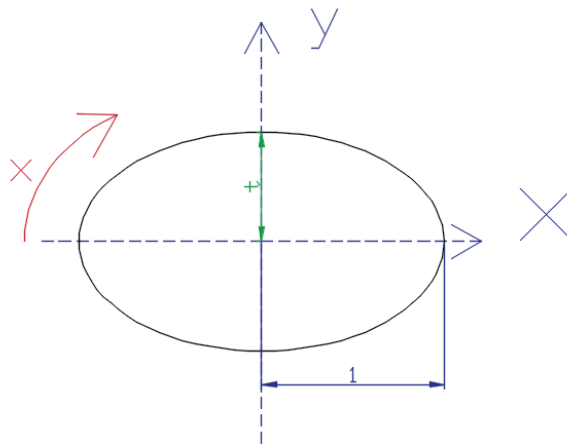


Imagen 5: Coordenadas de la elipse en variables adimensionales

Cualitativamente se puede decir que cuanto mayor sea  $t$  mayor será el gradiente adverso y por tanto mayor deberá ser la succión a aplicar para evitar el desprendimiento de la capa límite. En este apartado se va a realizar un análisis de cómo afecta  $t$  a la succión y a la resistencia para así poder determinar en qué casos merece la pena aplicar la succión y en cuáles no.

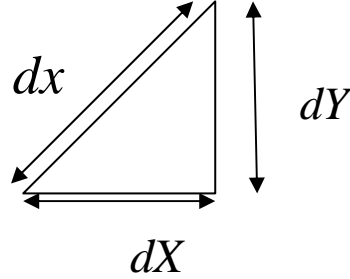
El interés de este estudio resulta puramente académico, sin embargo, puede considerarse como un buen punto de partida para estimar en qué medida la succión puede resultar interesante a la hora de reducir la resistencia en función de la geometría.

La ecuación de la elipse viene dada por

$$\frac{\widehat{X}^2}{a^2} + \frac{\widehat{Y}^2}{(ta)^2} = 1 \quad (8.10)$$

Y tomando como longitud característica  $a$  para adimensionalizar las variables  $\widehat{X}$  e  $\widehat{Y}$

$$X^2 + \frac{Y^2}{t^2} = 1 \quad (8.11)$$



Observando la figura  $dx = \sqrt{dX^2 + dY^2}$ , por lo que

$$\frac{\partial X}{\partial x} = \sqrt{\frac{1 - X^2}{1 + (t^2 - 1)X^2}} \quad (8.12)$$

Integrando dicha ecuación se puede obtener la coordenada  $X$  asociada a cada punto  $x$ , que será la coordenada en la que se realizará el mallado. En el código lo que se hará es calcular la  $X$  asociada a cada estación dentro de un bucle en el que se va aproximando la derivada por un cociente incremental.

$$\frac{\partial X}{\partial x} \approx \frac{X_n - X_{n-1}}{x_n - x_{n-1}} \approx \sqrt{\frac{1 - X_{n-1}^2}{1 + (t^2 - 1)X_{n-1}^2}}, \quad (8.13)$$

$$X_n = X_{n-1} + (x_n - x_{n-1}) \sqrt{\frac{1 - X_{n-1}^2}{1 + (t^2 - 1)X_{n-1}^2}}$$

En cuanto a la corriente externa, viene dada por la ecuación

$$U_e(x) = (1+t) \sqrt{\frac{1 - X^2}{1 + (t^2 - 1)X^2}} \quad (8.14)$$

Como se va a suponer que la capa límite permanece laminar se empleará en todos los casos un número de Reynolds de  $Re_a = 10^4$

Cerca del punto de remanso la velocidad de la corriente exterior es muy pequeña y en consecuencia el concepto de capa límite deja de tener sentido. Por tanto, para considerar que se aplica la succión necesaria para que no se desprenda la corriente la condición que se va a imponer será  $X_s \geq 0.99$  en lugar de  $X_s = 1$ .

En todos los casos se va a realizar un mallado cuadrático hasta  $X = 0$  y a partir de ahí se aplicará simetría para así tener también estrechamiento de la malla en el entorno del punto de remanso situado en  $X = 1$ .

Para comparar la succión uniforme que es necesario aplicar en una elipse de espesor  $t$  con la del cilindro se va a considerar una  $v_0$  de la forma  $v_0 = k\sqrt{\frac{2}{\text{Re}}}$  de manera que se buscará para qué factor  $k$  se logra evitar el desprendimiento.

**t=0.1**

$v_0$	$X_s$	$x_s$	$C_{DP}$	$C_{DF}$	$C_D$
0	0.8812	1.9	0.1441	0.214	0.3581
$-2\sqrt{\frac{2}{\text{Re}}}$	0.9908	2.015	0.0575	1.263	1.3204

**Tabla 5: Resultados obtenidos para una elipse de t=0.1 cuando se aplica la succión necesaria para que la capa límite no se desprenda**

A pesar de que con la adición de la succión se logra reducir la resistencia de presión, el hecho de disminuir el espesor de la capa límite provoca que el coeficiente de resistencia de fricción se incremente de forma muy notable, multiplicando casi por cuatro a la resistencia que se tenía sin succión.

En este caso lo que se tiene prácticamente es una placa plana pero con un gradiente adverso muy brusco prácticamente al final de la elipse. Por ello, hace falta un incremento muy grande de la succión para lograr un ligero avance sin que la corriente se desprenda.

**t=0.5:**

$v_0$	$X_s$	$x_s$	$C_{DP}$	$C_{DF}$	$C_D$
0	0.4822	1.7	0.9171	0.0608	0.978
$-3.35\sqrt{\frac{2}{\text{Re}}}$	0.9902	2.35	0.0188	0.5085	0.5272

**Tabla 6: Resultados obtenidos para una elipse de t=0.5 cuando se aplica la succión necesaria para que la capa límite no se desprenda**

Pese al importante aumento en la resistencia de fricción, se logra reducir a la mitad la resistencia porque aquí la resistencia de presión ya era la principal.

**t=0.75:**

$v_0$	$X_s$	$x_s$	$C_{DP}$	$C_{DF}$	$C_D$
0	0.3617	1.75	1.5693	0.0481	1.6174
$-3\sqrt{\frac{2}{Re}}$	0.991	2.66	0.0118	0.3308	0.3426

**Tabla 7: Resultados obtenidos para una elipse de t=0.75 cuando se aplica la succión necesaria para que la capa límite no se desprenda**

Al contrario de lo que se venía observando en los dos casos anteriores, al aumentar el espesor la succión necesaria para que la capa límite no se desprenda disminuye. La explicación física de este hecho podría estar en que la región cercana al punto de remanso se hace más suave y por ello el gradiente adverso en esa zona es menor.

**t=1:**

$v_0$	$X_s$	$x_s$	$C_{DP}$	$C_{DF}$	$C_D$
0	0.2537	1.83	2.4144	0.0418	2.4562
$-3\sqrt{\frac{2}{Re}}$	0.9961	3.05	0.0057	0.2479	0.2535

**Tabla 8: Resultados obtenidos para un cilindro cuando se aplica la succión necesaria para que la capa límite no se desprenda**

En el caso límite del cilindro la succión necesaria sigue disminuyendo al aumentar el espesor. Además, este resultado permite comprobar que el método empleado para calcular la corriente externa en elipses es adecuado dado que en el cilindro  $x$  coincide con el valor del ángulo en radianes y haciendo  $X_s = -\cos(x_s) = 0.9958$  se tiene un resultado muy parecido al obtenido numéricamente.



Para comparar con (8.9) se va a calcular en cada caso el coeficiente que multiplica a

$\sqrt{\frac{-\partial U_e / \partial x}{\text{Re}}}$  en el punto de desprendimiento.

t	Succión aplicada	$-\frac{\partial U_e}{\partial x}$	Coficiente
0.1	$-2\sqrt{\frac{2}{\text{Re}}}$	13.84	0.76
0.5	$-3.35\sqrt{\frac{2}{\text{Re}}}$	5.3	2.05
0.75	$-3\sqrt{\frac{2}{\text{Re}}}$	2.99	2.45
1	$-3\sqrt{\frac{2}{\text{Re}}}$	1.99	3

**Tabla 9: Comparación de la succión aplicada para los diferentes espesores**

A la vista de los resultados puede deducirse que dicha fórmula no es válida a la hora de estimar el punto de desprendimiento para una geometría en general y que sería necesario considerar más variables aparte de  $-\frac{\partial U_e}{\partial x}$ .

## 9. Aplicación a perfiles NACA de 4 dígitos

Una vez que se han analizado varios tipos de geometrías para ir introduciéndonos en los efectos de la succión se va a pasar a estudiar los perfiles aerodinámicos, que era el objetivo principal de este trabajo. En concreto, se van a tratar los perfiles de la familia NACA de 4 dígitos, que vienen definidos por las siguientes ecuaciones en variables adimensionales:

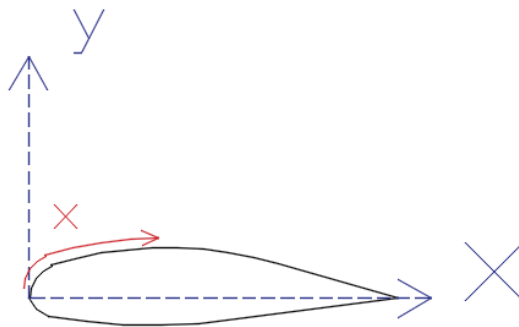


Imagen 6: Coordenadas del perfil en variables adimensionales

Ecuación del espesor:

$$z_e(x, t) = \pm \frac{t}{0.2} \left[ 0.2969\sqrt{x} - 0.126x - 0.3516x^2 + 0.2843x^3 - 0.1015x^4 \right] \quad (9.1)$$

Ecuación de la línea media de curvatura:

$$\begin{aligned} z_c(x, p, h) &= \frac{h}{p^2} [2px - x^2], \quad x \leq p \\ z_c(x, p, h) &= \frac{h}{(1-p)^2} [1 - 2p + 2px - x^2], \quad x > p \end{aligned} \quad (9.2)$$

Donde si se tiene por ejemplo un perfil NACA4412:  $t = 0.12$ ,  $h = 0.04$  y  $p = 0.4$

Para definir la ecuación de un perfil con curvatura habría que hacer

$$\begin{aligned} z_{ext}(x, h, p, t) &= z_c + z_e \cdot \cos(\theta) \\ z_{int}(x, h, p, t) &= z_c - z_e \cdot \cos(\theta) \end{aligned} \quad (9.3)$$

Dónde  $\theta = \text{arcTg}\left(\frac{\partial z_c}{\partial x}\right)$ .

Mientras que para un perfil simétrico

$$z(x, t) = \pm z_e \quad (9.4)$$

## 9.1 Corrección del criterio de Pohlhausen para capa límite con gradiente de presiones

Para considerar el efecto de la turbulencia sobre la capa límite habrá que modificar (4.14) añadiendo el término de viscosidad turbulenta  $\hat{\nu}_T$ , que se calculará a partir del modelo de Reichardt de viscosidad turbulenta. Además, para añadir este término a (4.14) habrá que adimensionalizarlo con  $\nu$ , de manera que  $\nu_T = \frac{\hat{\nu}_T}{\nu}$ . Quedando la ecuación de cantidad de movimiento como:

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + \nu \frac{\partial u}{\partial y} = U_e \frac{\partial U_e}{\partial x} + \frac{1}{\text{Re}_L} \frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{\partial u}{\partial y} (1 + \nu_T) \right] \quad (9.5)$$

Mientras que por el modelo de Reichardt

$$\nu_T(y) = \min \begin{cases} 0.41 \text{Re} \cdot y \cdot u^* - 9.7 \text{Tanh} \frac{\text{Re} \cdot y \cdot u^*}{9.7} \\ 0.018 \text{Re} \cdot u_e(x) \cdot \delta_1(x) \end{cases} \quad (9.6)$$

Siendo  $u^* = \sqrt{\frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=0}}$ .

En los códigos programados en las clases de la asignatura de Mecánica de Fluidos II se empleó el criterio de Pohlhausen para placa plana como medio para determinar si el régimen es laminar o turbulento. Para problemas con gradientes de presiones -como en los perfiles NACA- se aplicó directamente el mismo criterio, sin embargo, al comparar con la literatura se observa que los resultados obtenidos para el punto de transición a la turbulencia son poco realistas.

En realidad, el criterio de Pohlhausen puede ser modificado para incorporar el efecto del gradiente de presiones en la transición a la turbulencia: en las regiones con gradiente favorable el espesor de desplazamiento al que se produce la transición se hace mayor que en aquellas en las que se tiene gradiente adverso. Para recoger este efecto en el código se ha interpolado la siguiente curva obtenida del libro “*Boundary Layer Theory*”.

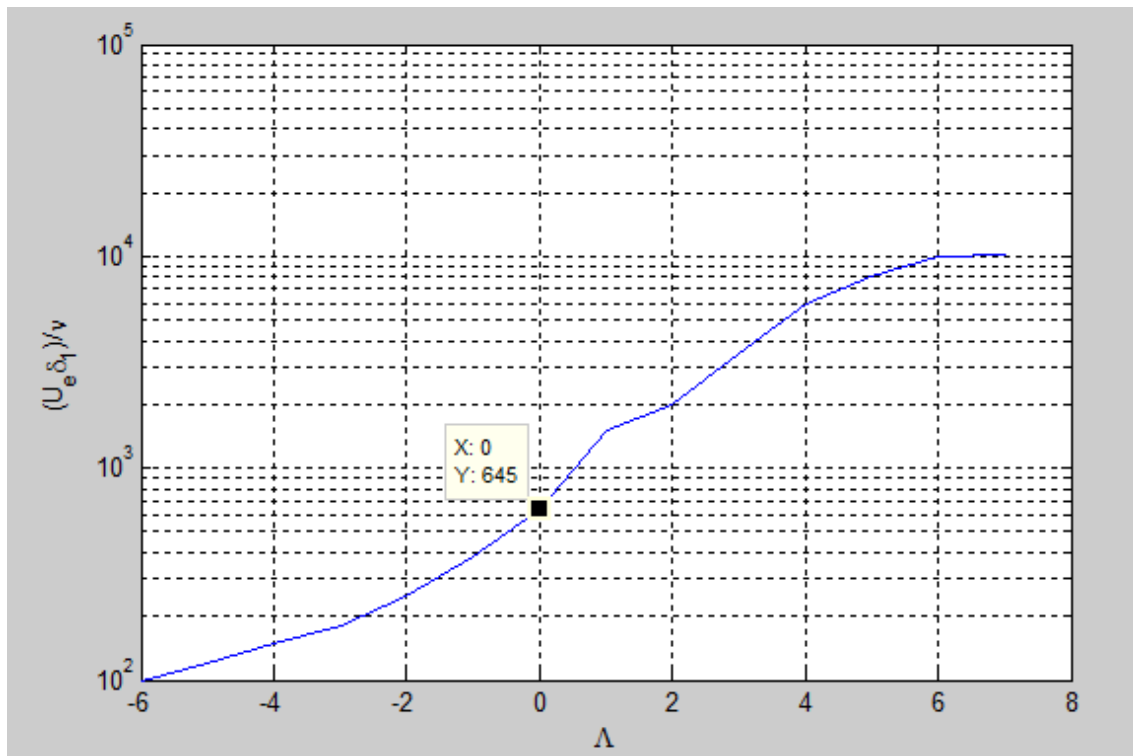


Imagen 7: Criterio de Pohlhausen con gradiente de presiones

Siendo

$$\Lambda = \frac{\delta^2}{\nu} \frac{\partial \bar{U}_e}{\partial \hat{x}} \quad (9.7)$$

Que en las variables adimensionales consideradas hasta ahora sería

$$\Lambda = \text{Re} \delta^2 \frac{\partial U_e}{\partial x} \quad (9.8)$$

Donde  $\delta$  es el espesor de la capa límite calculado como la altura desde la pared hasta que  $u = 0.99U_e$ .

En dicha curva puede apreciarse que para un gradiente de presiones nulo  $\left(\frac{\partial U_e}{\partial x} = 0\right)$  se tiene el mismo criterio que en placa plana: Cuando  $\frac{U_\infty \delta_1}{\nu} \geq 645$  se produce la transición a la turbulencia.

Comparando los valores obtenidos del punto de transición a la turbulencia con los datos experimentales que aparecen en la literatura (“*Boundary Layer Theory*”), especialmente para números de Reynolds moderados:

Re	$X_{transición}$	Schlichting
$10^4$	0.342	0.32
$10^5$	0.21	0.21
$10^6$	0.128	0.15
$10^7$	0.057	0.09
$10^8$	0.018	0.05

Tabla 10: Comparación entre el punto de transición a la turbulencia obtenido a ángulo de ataque nulo con los datos que aparecen en la literatura

## 9.2 Succión necesaria para evitar el desprendimiento a ángulo de ataque nulo

Procediendo de forma análoga a como se ha hecho en elipses se aplicará una succión uniforme desde el punto de desprendimiento que habría sin succión hasta  $X = 0.99$ .

Además, se pondrá  $v_0$  de la forma  $v_0 = k\sqrt{\frac{2}{\text{Re}}}$  para comparar con la succión que sería necesario aplicar en un cilindro.

## NACA005

$$v_0 = 0$$

Re	$X_s$	$C_{Df}$
$10^4$ (laminar)	0.8897	0.0238
$10^4$ (turbulento)	0.93	0.0245
$10^5$	0.988	0.0137

**Tabla 11: Puntos de desprendimiento en un NACA0005 cuando no se aplica succión**

Conforme aumenta el número de Reynolds el efecto de la turbulencia se hace cada vez más importante y llega un momento ( $Re = 10^5$ ) en el que ya no se hace necesario aplicar succión para el evitar el desprendimiento.

$$v_0 \neq 0 \text{ con } X_s \geq 0.99$$

Re	$k$	$v_0$	$C_{Df}$
$10^4$ (laminar)	-1.5	-0.0212	0.0251
$10^4$ (turbulento)	-1.9	-0.0268	0.0257

**Tabla 12: Resultados obtenidos cuando se aplica la succión necesaria para que la capa límite no se desprenda en un NACA0005**

El NACA0005 es un perfil tan fino que sin la ayuda de la succión el desprendimiento prácticamente se produce en el borde de salida, con lo cual, el hecho de añadir succión para retrasar la separación de la capa límite no hace más que aumentar la resistencia debido al aumento del gradiente de velocidades en la pared.

Comparando con (8.8) se puede apreciar que, dado que el gradiente adverso que hay que vencer es mucho menor, la succión necesaria para evitar el desprendimiento es unas cuatro veces menor.

Introduciendo el efecto de la turbulencia se puede comprobar que es análogo al de la succión, es decir, aumenta la velocidad del fluido cercano a la pared y con ello se incrementa el esfuerzo de fricción y se retrasa el desprendimiento. Al darse el punto de separación más cerca del borde de salida el intervalo de succión aplicado es menor y es por ello que se hace necesario aumentar en cierta medida la succión aplicada ya que el

fluido llega a esa misma región con menos inercia. Esta diferencia ya se podría apreciar entre las fórmulas (8.8) y (8.9).

### NACA0012

$$v_0 = 0$$

Re	$X_s$	$C_{Df}$
$10^4$ (laminar)	0.6	0.0221
$10^4$ (turbulento)	0.76	0.0239
$10^5$	0.92	0.0137
$10^6$	0.9721	0.0093
$10^7$	0.99	0.0067

**Tabla 13: Puntos de desprendimiento en un NACA0012 cuando no se aplica succión**

En este caso, a partir de  $Re = 10^7$  la corriente se desprende para  $X > 0.99$  y no se hace necesario añadir succión al perfil.

$$v_0 \neq 0 \text{ con } X_s \geq 0.99$$

Re	$k$	$v_0$	$C_{Df}$
$10^4$ (laminar)	-1.7	-0.024	0.0404
$10^4$ (turbulento)	-1.9	-0.0268	0.0348
$10^5$	-2.2	-0.00983	0.0146
$10^6$	-2.5	-0.00353	0.0093

**Tabla 14: Resultados obtenidos cuando se aplica la succión necesaria para que la capa límite no se desprenda en un NACA0012**

Cuanto mayor es el número de Reynolds más importante se hace el esfuerzo turbulento, con lo cual los perfiles de velocidades se encuentran más pegados a la pared y más tarde se produce el desprendimiento.

Al igual que para el NACA0005, si se compara para un mismo número de Reynolds el caso laminar con el que presenta transición a la turbulencia, el hecho de que la turbulencia retrase el desprendimiento implica que la succión necesaria se hace mayor pero en un intervalo más pequeño. Además, el alto incremento que se produce en la de fricción provoca que el coeficiente de resistencia prácticamente se duplique respecto al que se tenía sin la adición de succión.

Conforme aumenta  $Re$  se observa que el coeficiente  $k$  se hace cada vez mayor pero que en realidad la succión necesaria para evitar la separación de la capa límite va disminuyendo.

### NACA0018

$$v_0 = 0$$

Re	$X_s$	$C_{Df}$
$10^4$ (laminar)	0.45	0.0225
$10^4$ (turbulento)	0.52	0.0232
$10^5$	0.83	0.0137
$10^6$	0.93	0.0093
$10^7$	0.97	0.0069

Tabla 15: Puntos de desprendimiento en un NACA0018 cuando no se aplica succión

Para  $Re = 10^7$  el desprendimiento se produce prácticamente en el borde de salida, por lo que no tendría mucho sentido aplicar succión para  $Re \geq 10^7$ .

$$v_0 \neq 0 \text{ con } X_s \geq 0.99$$

Re	$k$	$v_0$	$C_{Df}$
$10^4$ (laminar)	-1.5	-0.0212	0.0634
$10^4$ (turbulento)	-2.3	-0.0325	0.0646
$10^5$	-3.4	-0.0152	0.0176
$10^6$	-4.6	-0.0065	0.0097

Tabla 16: Resultados obtenidos cuando se aplica la succión necesaria para que la capa límite no se desprenda en un NACA0018



En este caso se observan las mismas tendencias que en el NACA0012 aunque, especialmente para números de Reynolds pequeños, la región desprendida supone ahora la mitad del perfil.

Observando los valores de  $v_0$  de los tres perfiles, como era de esperar, se puede comprobar que al aumentar el espesor relativo también lo hace el valor de  $v_0$  necesario para que la capa límite no se desprenda debido al aumento del gradiente adverso.

A diferencia de lo que ocurría en el cilindro, un hecho que se ha podido observar en los perfiles aerodinámicos es que si se aplica la succión solamente en un intervalo en lugar de hacerlo hasta el borde de salida, la corriente no se desprende inmediatamente e incluso puede llegar adherida hasta prácticamente el borde de salida. Como muestra se van a presentar los resultados para un perfil NACA0018 con  $Re = 10^4$  en régimen laminar.

Intervalo de Succión	$v_0 \sqrt{\frac{Re}{2}}$	$X_s$	$C_{Df}$
0	0	0.4525	0.0225
0.1C	-20	0.8281	0.1343
0.1C	-500	0.8281	3.1845
0.15C	-10	0.8467	0.1023
0.2C	-4	0.8429	0.0592

**Tabla 17: Datos obtenidos al aplicar la succión desde el punto de desprendimiento que se daría sin succión hasta un cierto intervalo pero sin llegar hasta el borde de salida**

Como se había comentado, puede verse que tras aplicar un intervalo de succión de un 15% de la cuerda a partir del punto de desprendimiento que se daría sin succión ( $X = 0.4525$ ), la corriente permanece adherida sin que se continúe aplicando de succión durante un 25% más del perfil. De nuevo, al reducir el intervalo de succión se puede comprobar cómo aumenta la succión necesaria para llegar hasta aproximadamente un mismo valor de  $X_s$ .

Otro hecho observado es que llega un momento en el que por mucha succión que se aplique en un cierto intervalo el valor de  $X_s$  no aumenta. La explicación podría estar en que la corriente permanece adherida sin la succión únicamente en una región con poco gradiente adverso pero, conforme nos acercamos al punto de remanso que teóricamente se da en el borde de salida, el gradiente adverso aumenta y la corriente se desprende

prácticamente sin verse afectada por el incremento de cantidad de movimiento que se dio en el intervalo con succión. Para comprobarlo se pueden tomar como ejemplo los dos casos en los que se ha escogido un 10% de la cuerda como intervalo de succión: aplicando una  $v_0$  25 veces mayor el punto de desprendimiento se ve inalterado.

A la vista de los resultados, se puede concluir que la posible reducción de la resistencia de presión que provocaría la succión –que en perfiles aerodinámicos es muy pequeña frente a la resistencia de fricción- en ningún caso resultará útil para disminuir la resistencia total debido al gran incremento que se produce en  $C_{Df}$ .

Por otra parte, dado que la succión puede retrasar la transición a la turbulencia, es posible que aplicando la succión desde el borde de ataque se llegue a reducir la resistencia de fricción debido a que se evita entrar en régimen turbulento. Para comprobarlo, se empleará como ejemplo un perfil NACA0012 en el que se aplicará un cierto valor de  $v_0$  hasta que se produzca la turbulencia, momento en el que  $v_0 = 0$  para no incrementar la resistencia de forma innecesaria.

$v_0 \sqrt{\frac{Re}{2}}$	$x_{Transición}$	$X_s$	$C_{Df}$
0	0.1293	0.9721	0.0093
-0.5	0.1416	0.9721	0.0095
-1.5	0.2308	0.9761	0.0103
-2	0.4625	0.982	0.0118

**Tabla 18: Punto de transición a la turbulencia obtenido para un NACA0012 con diferentes valores de succión para  $Re=10^6$**

Viendo la tabla anterior queda claro que aplicar una succión uniforme desde el borde de ataque no resulta efectivo a la hora de disminuir la resistencia de fricción ya que, aunque poco, el coeficiente de resistencia incluso aumenta. Es decir, en cuanto a resistencia de fricción la influencia de una succión uniforme es del mismo orden que la que tiene la turbulencia.

### 9.3 Succión necesaria para evitar el desprendimiento a ángulo de ataque distinto de cero

En este caso, que se corresponde con el problema sustentador, habrá que realizar modificaciones adicionales en el código que permitan analizar no sólo el extradós, sino todo el camino desde el punto de remanso, situado en el intradós del perfil, hasta el borde de ataque.

Para el mallado del camino entre el punto de remanso y el borde de salida pasando por el extradós habrá que realizarlo en dos partes: una que se vaya estrechando desde el punto de remanso hasta el borde de ataque y otra que se ensanche entre éste y el borde de salida. De este modo, se logra un aprovechamiento más eficiente de los recursos computacionales al colocarse más puntos en el borde de ataque, que es donde se producen cambios más bruscos, y menos sobre el extradós, donde apenas se producen variaciones en la corriente exterior.

La transición entre las dos mallas deberá ser suave para evitar errores, por lo que se ha tratado de que exista una cierta simetría respecto al borde de ataque de dos modos:

- Haciendo que el número de puntos entre el punto de remanso y el borde de ataque aumente de forma lineal con el ángulo de ataque.
- Imponiendo que el punto final de la primera malla sea el inicial de la segunda.

El código implementado para efectuar el mallado es el siguiente

```
%MALLADO
%=====
ymin=0; ymax=50/sqrt(Re);
Ny=1001;
yv(1:Ny)=(linspace(sqrt(ymin),sqrt(ymax),Ny)).^2;
hy(1)=yv(1);
hy(2:Ny)=yv(2:Ny)-yv(1:Ny-1);

Nx=1001;
xmin=0.00001;

%CORRIENTE EXTERIOR MEDIANTE EL MÉTODO DE PANELES
m=1001; %numero de paneles
alpha=alpha*pi/180;
[cpext,cpint,C_L,Xp,X_PR]=metodo_paneles2(t,h,p,m,alpha);
Nx1=floor(20*alpha/pi*180); %puntos entre el de remanso y el borde de ataque. Más alpha, más puntos.
X1_1(1:Nx1)=(linspace(sqrt(X_PR),0,Nx1)).^2; %Nx1 puntos entre el de remanso y el borde de ataque
X1_2(1:Nx-Nx1+1)=(linspace(0,sqrt(Xmax),Nx-Nx1+1)).^2; %Nx-Nx1 puntos entre el borde de ataque y
el punto final
```

```

X1(1:Nx1)=X1_1(1:Nx1);
X1(Nx1:Nx)=X1_2(1:Nx-Nx1+1);
Cpext1=interp1(Xp,cpext,X1_2); %Cp en Nx puntos
Cpint1=interp1(Xp,cpint,X1_1);
a2=(t/0.2)*(0.2969*(1./(2*sqrt(X1_2)))-0.126-2*0.3516.*X1_2+3*0.2843.*X1_2.^2-
4*0.1015.*X1_2.^3); %derivada de Y respecto de X en Nx puntos
a1=-((t/0.2)*(0.2969*(1./(2*sqrt(X1_1)))-0.126-2*0.3516.*X1_1+3*0.2843.*X1_1.^2-
4*0.1015.*X1_1.^3));
x1(1)=xmin;
% X: coordenada sobre línea media perfil
% x: coordenada sobre superficie perfil
for j=2:Nx1-1
    dYdX1(1:j)=a1(1:j);
    Xaux1(1:j)=X1_1(1:j);
    x1(j)=-trapz(Xaux1,sqrt(1+(dYdX1(1:j)).^2)); %coordenada sobre la superficie desde el punto de
remanso hasta el borde de ataque
end
x1(Nx1)=x1(Nx1-1)+X1_1(Nx1-1); %Para evitar la singularidad de la derivada

for j=3:Nx-Nx1+1
    dYdX2(1:j-1)=a2(2:j); %Para evitar la singularidad de la derivada
    Xaux2(1:j-1)=X1_2(2:j);
    x2(j)=-trapz(Xaux2,sqrt(1+(dYdX2(1:j-1)).^2));%+x1(Nx1);%coordenada sobre la superficie para Nx
puntos en X
    x2cont(j)=x2(j)+x1(Nx1);
end
x2cont(1)=x1(Nx1);
x2cont(2)=x1(Nx1)+X1_2(2);

%Nx puntos sobre el perfil con sus respectivas presiones
x(1:Nx1)=x1(1:Nx1);
x(Nx1:Nx)=x2cont(1:Nx-Nx1+1);
Cp1(1:Nx1)=Cpint1(1:Nx1);
Cp1(Nx1:Nx)=Cpext1(1:Nx-Nx1+1);
%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%

%Nx puntos con malla cuadratica
xv1(1:Nx1)=(linspace(sqrt(xmin),sqrt(x(Nx1)),Nx1)).^2;
% xv1(1:Nx1)=(linspace(xmin,x1(Nx1),Nx1));
xv2(1:Nx-Nx1+1)=(linspace(sqrt(x1(Nx1)),sqrt(x(Nx))-1e-15,Nx-Nx1+1)).^2;
xv(1:Nx1)=xv1(1:Nx1);
xv(Nx1:Nx)=xv2(1:Nx-Nx1+1);
Cp=interp1(x,Cp1,xv);
X=interp1(x,X1,xv); %Para obtener los puntos en X asociados a xv
%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%

hx(1)=xv(1);
hx(2:Nx)=xv(2:Nx)-xv(1:Nx-1);

```

```

%% %% NORMALES AL PERFIL %% %% %% %% %%
ny1(1:Nx1)=-1./sqrt(1+a1(1:Nx1).^2);
ny2(1:Nx-Nx1+1)=1./sqrt(1+a2(1:Nx-Nx1+1).^2);

ny(1:Nx1)=ny1(1:Nx1);
ny(Nx1:Nx)=ny2(1:Nx-Nx1+1);
ny(Nx1)=0;
%% %% %% %% %%

ue(1:Nx)=sqrt(1-Cp(1:Nx));
uedot(1:Nx-1)=(ue(2:Nx)-ue(1:Nx-1))./hx(2:Nx);
uedot(Nx)=uedot(Nx-1);
unm1(1:Ny)=ue(1);
unm2(1:Ny)=ue(1);
% =====

```

Cuando se le da a un perfil aerodinámico un ángulo de ataque distinto de cero se pueden distinguir dos tipos de comportamientos:

- 1. Para ángulos de ataque pequeños** se tiene un resultado similar al que se daba con ángulo de ataque nulo: en perfiles muy finos la corriente se desprende casi en el borde de salida mientras que en perfiles con mayor espesor la corriente se desprende antes. En la imagen siguiente se muestra un ejemplo representando dos perfiles de espesores muy diferentes a un ángulo de ataque de  $1^\circ$  y al mismo número de Reynolds.

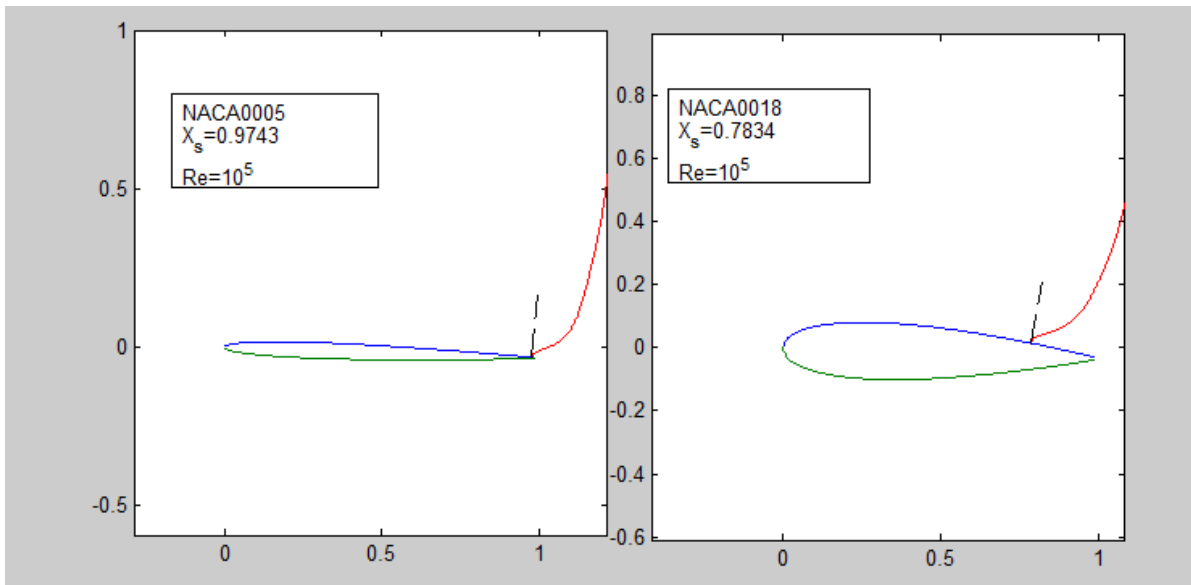


Imagen 8: Comparativa entre el punto de desprendimiento a ángulo de ataque pequeño entre un perfil fino y uno grueso

- 2. Cuando se tienen ángulos de ataque grandes ( $\sim 10^\circ$ )** el gradiente adverso en el borde de ataque se hace muy importante y es ahí donde la corriente se desprende. La separación de la capa límite en el borde de ataque se producirá a ángulos de ataque menores conforme más fino sea el perfil.

Por tanto, a la hora de aplicar la succión se hará o bien desde el punto de desprendimiento sin succión para ángulos de ataque pequeños, lo cual sería repetir el análisis del apartado anterior, o bien desde el borde de ataque hasta un cierto intervalo para ángulos de ataque mayores.

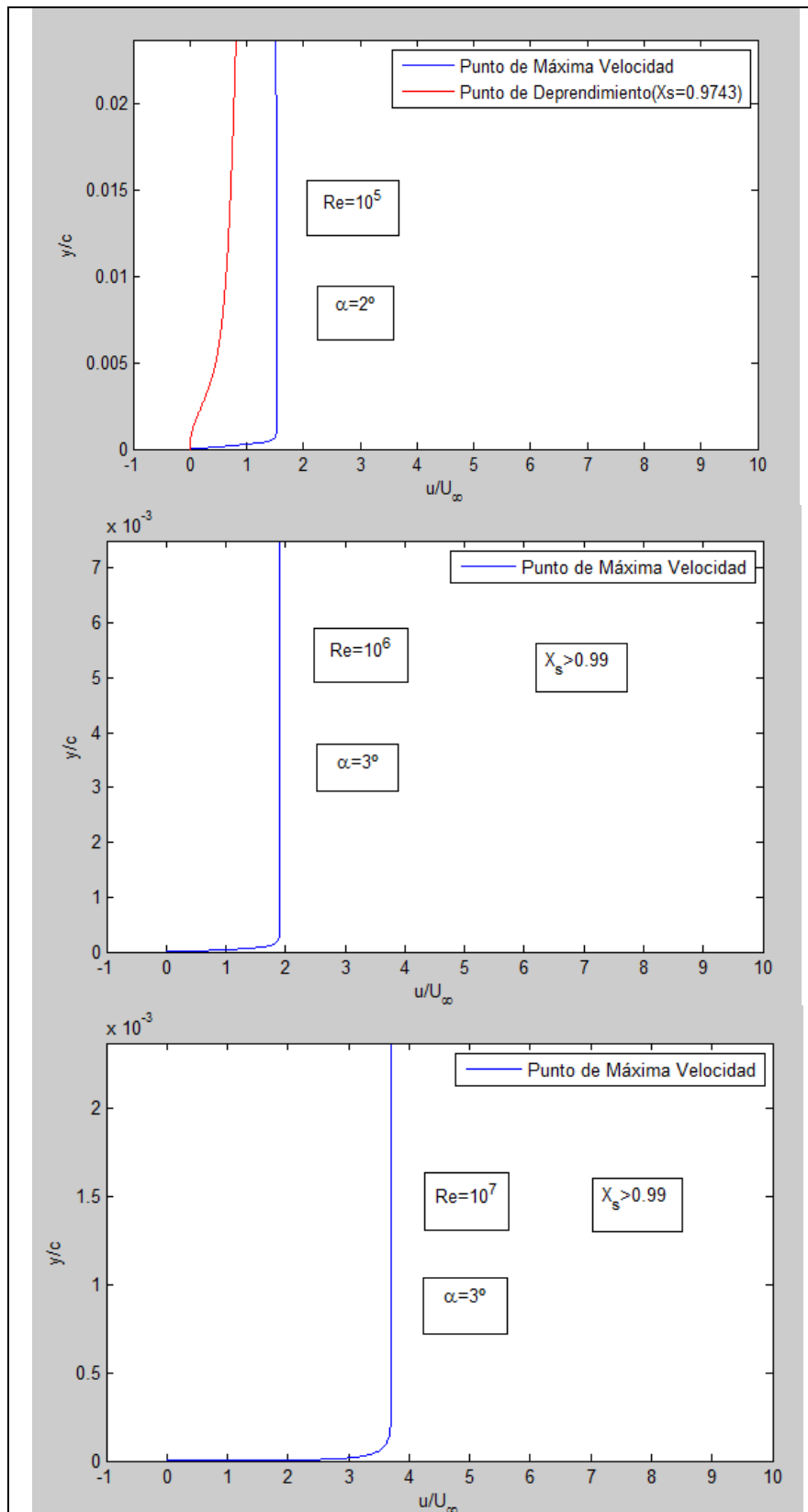
Cuando la succión se aplique en el borde de ataque se hará de forma que el intervalo sea  $x \in [0, 0.15C]$  para hacerlo del mismo modo que aparece en “*Boundary Layer Theory*”, donde aparecen gráficas en las que se muestra el incremento del coeficiente de sustentación en función de la  $v_0$  aplicada. El criterio para decir que la corriente no se desprende en el borde de ataque será que no lo haga durante dicho intervalo de succión.

Realizar numéricamente un estudio de cómo aumenta el coeficiente de sustentación con la succión aplicada es muy complejo dado que, una vez que se desprende la capa límite, la aparición de la estela modifica la corriente exterior y por tanto la distribución de presiones. Lo que sí se puede decir de forma cualitativa es que cuanto más cerca se desprenda la corriente del borde de salida más próxima será la distribución de presiones a la dada por el método de paneles y en consecuencia mayor será la sustentación.

### 9.3.1 NACA0005

Comenzando por un perfil muy fino, se va a buscar primeramente el ángulo de ataque al que se produce el desprendimiento en el borde de ataque para tres valores característicos del número de Reynolds.

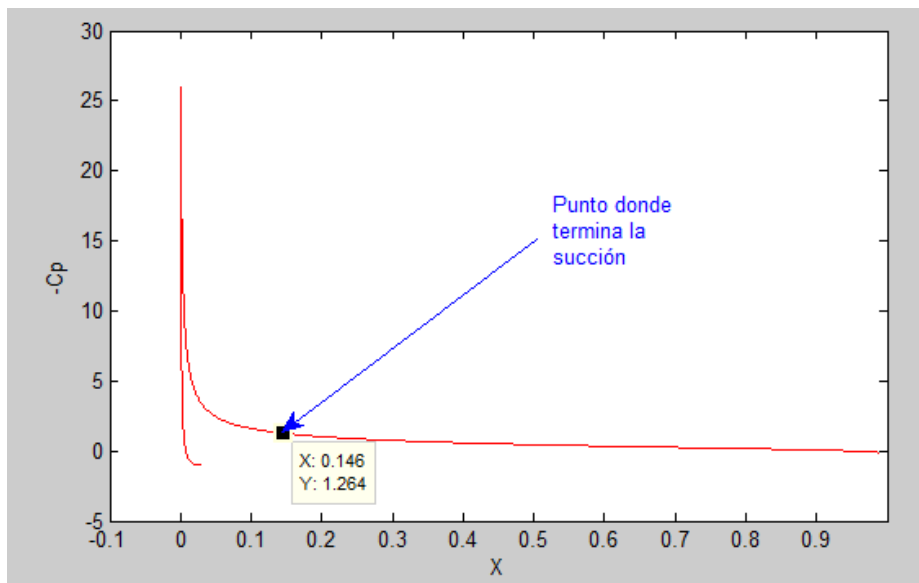
Estos valores de  $Re$  se han escogido de tal forma que se encuentren en el entorno donde es válida la aproximación incompresible ( $0 < M_\infty^2 < 0.1$ ) tomando como altura de referencia 500 m, por lo que en principio sería válida para aeronaves volando bajo y a poca velocidad. Con el programa “*Atmospheric Calculator*” ([www.aerospaceweb.org](http://www.aerospaceweb.org)) se ha comprobado que para una cuerda de 1 m y una velocidad de 100 m/s se tiene  $Re = 2 \cdot 10^6$ . Sabiendo que ese será el orden de magnitud adecuado se han tomado como valores  $Re = 10^5$ ,  $Re = 10^6$  y  $Re = 10^7$ .



**Tabla 19: Perfiles de velocidades obtenidos para el máximo ángulo de ataque que se puede alcanzar con un NACA0005 para cada número de Reynolds sin que la corriente se desprenda en el borde de ataque**

Por tanto, el máximo ángulo de ataque al que se llega dentro de este rango de números de Reynolds es de  $3^\circ$ .

Lo que se hará a continuación es buscar la succión que es necesario aplicar en el borde de ataque para llegar a  $\alpha = 10^\circ$  sin que se desprenda la corriente como función del número de Reynolds. Como se ha mencionado antes, dicha succión sólo se aplica desde el borde de ataque hasta un intervalo igual a un 15% de la cuerda del perfil siguiendo la coordenada tangente al mismo.



**Tabla 20: Distribución de  $C_p$  para un ángulo de ataque de  $10^\circ$**

Puede comprobarse que el intervalo de succión seleccionado resulta suficiente como para salvar la región con mayor gradiente adverso. Además, en el momento en que deja de aplicarse la succión el coeficiente de presiones se hace prácticamente igual al de una placa plana y la inercia que tiene el fluido resulta suficiente como para vencer el menor gradiente adverso que se encuentra hasta muy cerca del borde de salida, donde vuelve a aumentar debido a la existencia teórica de un punto de remanso.

En las siguientes imágenes se presentan los resultados mostrando para cada número de Reynolds una imagen a la izquierda con el punto de desprendimiento sin succión y otra a la derecha con el punto de desprendimiento que se da con la succión necesaria para que la corriente no se desprenda en el borde de ataque.



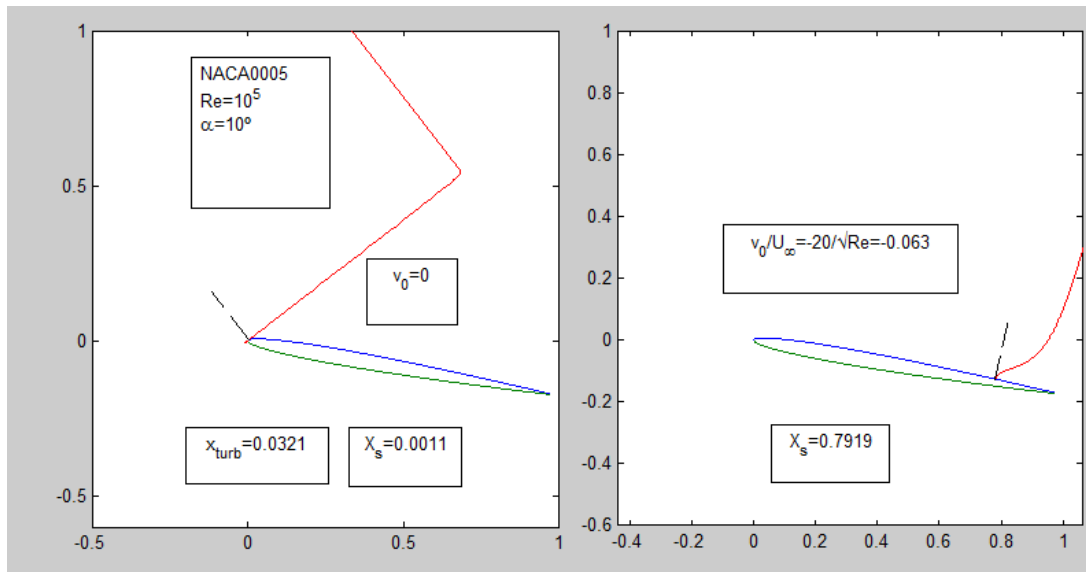


Imagen 9: Resultados obtenidos para un NACA0005 a un ángulo de ataque de 10° con y sin succión

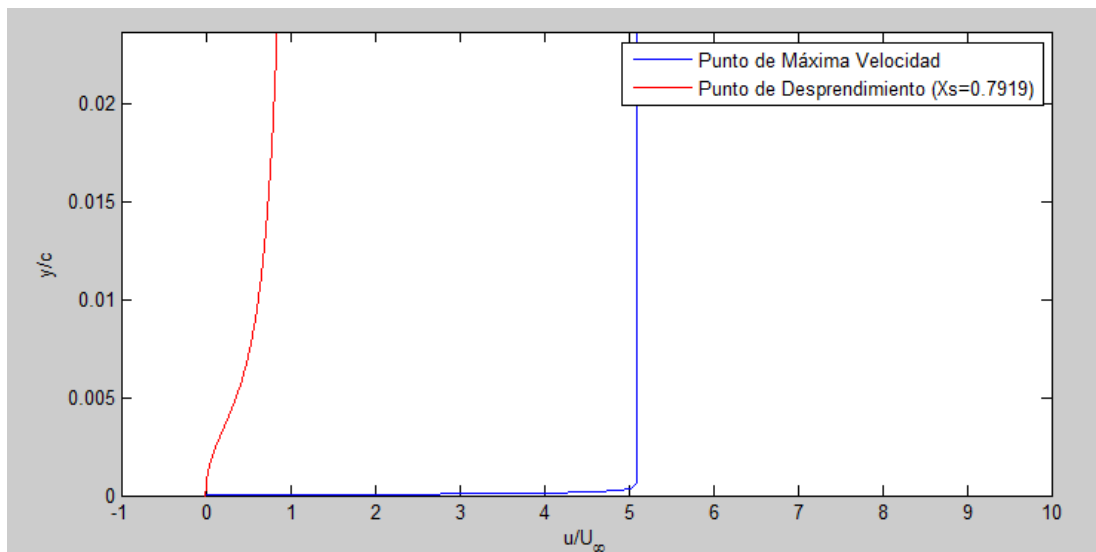
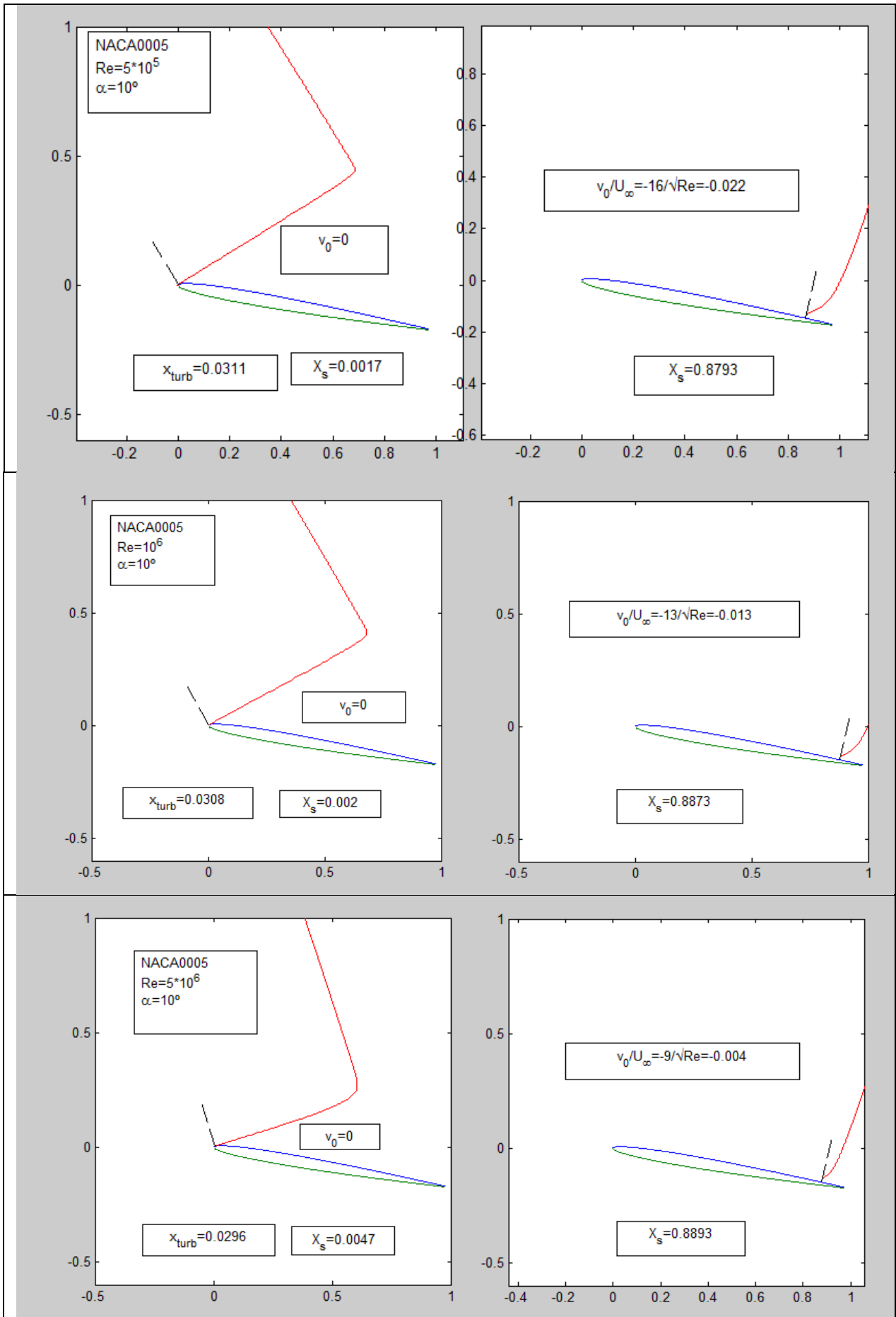
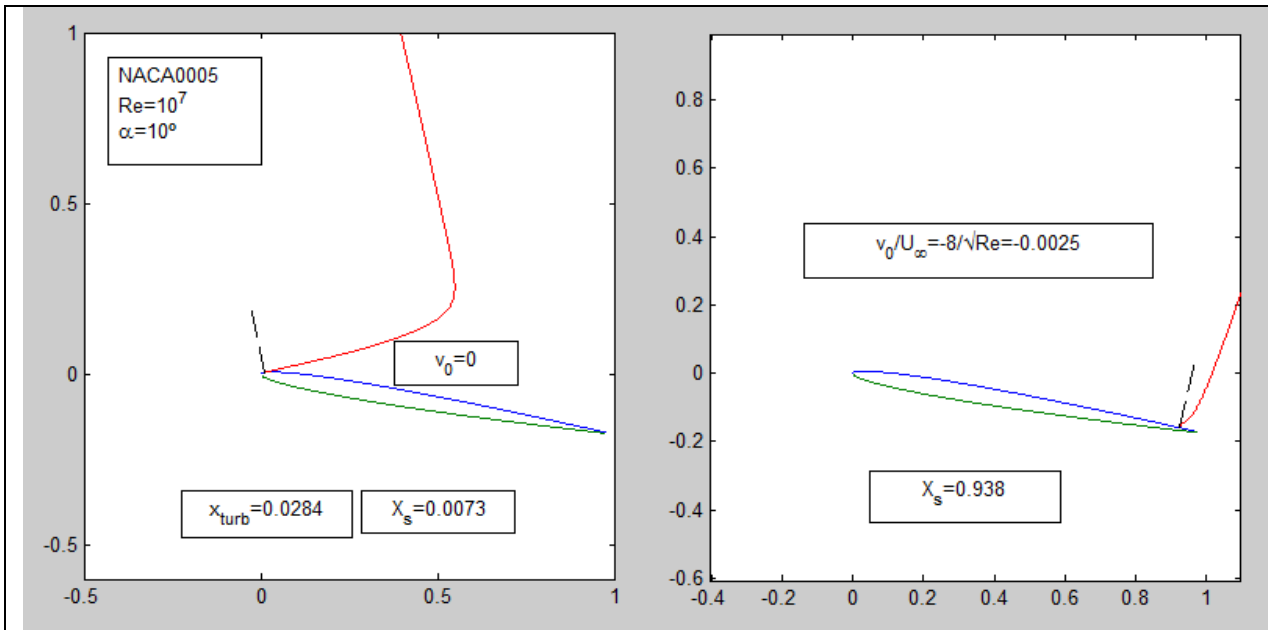


Imagen 10: Perfiles de velocidades para un NACA0005 a un ángulo de ataque de 10° en el que se ha aplicado succión

Comparando con la gráfica asociada al mismo número de Reynolds pero sin succión puede verse que la velocidad máxima, y en consecuencia el pico de succión, a la que se puede llegar con succión resulta notablemente mayor. De hecho, se ha logrado pasar de un  $C_l = 0.2277$  correspondiente a un ángulo de ataque de 2° a uno de  $C_l = 1.1331$ .





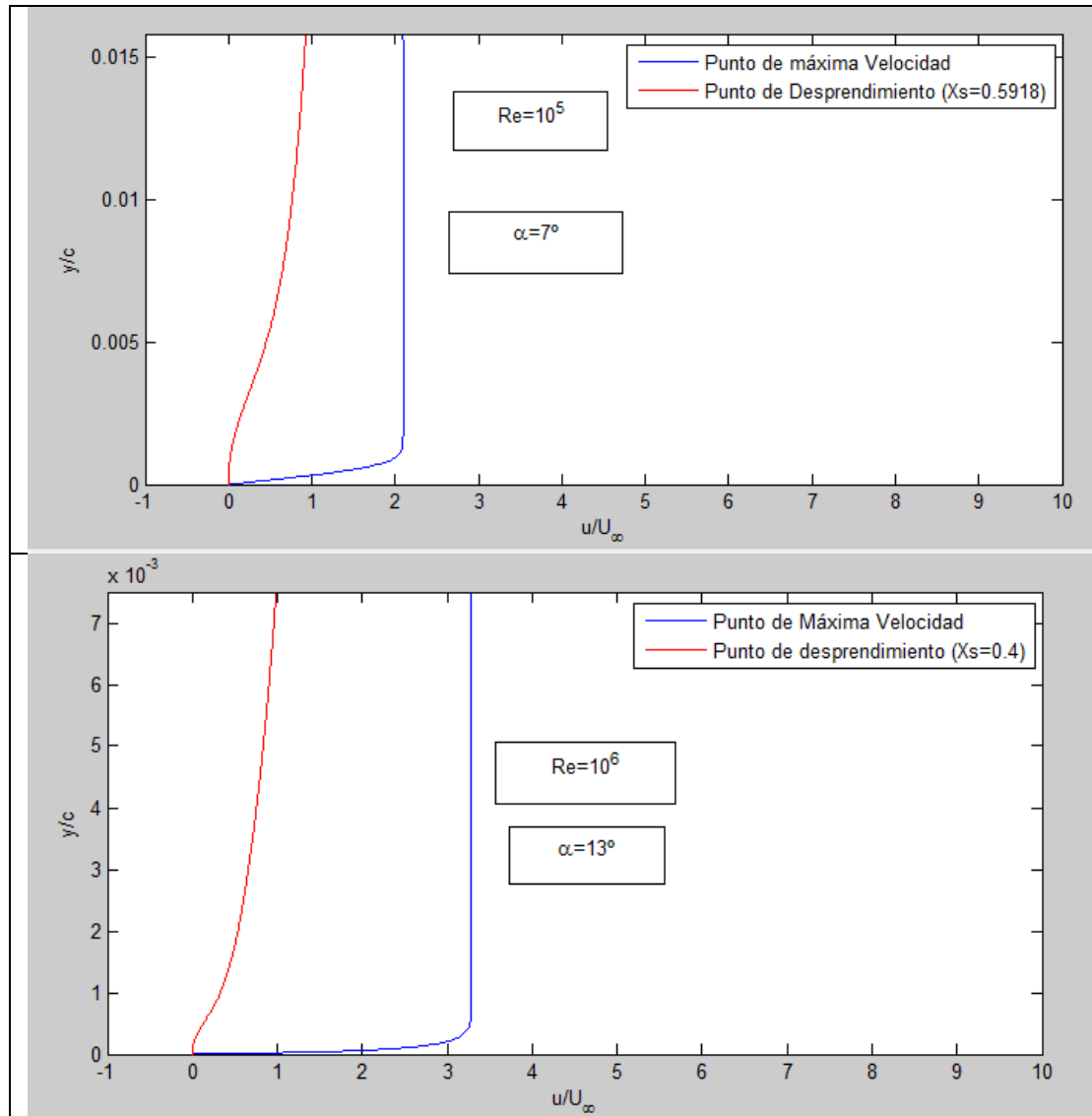
**Tabla 21: Resultados obtenidos con y sin succión para un NACA0005 considerando varios números de Reynolds**

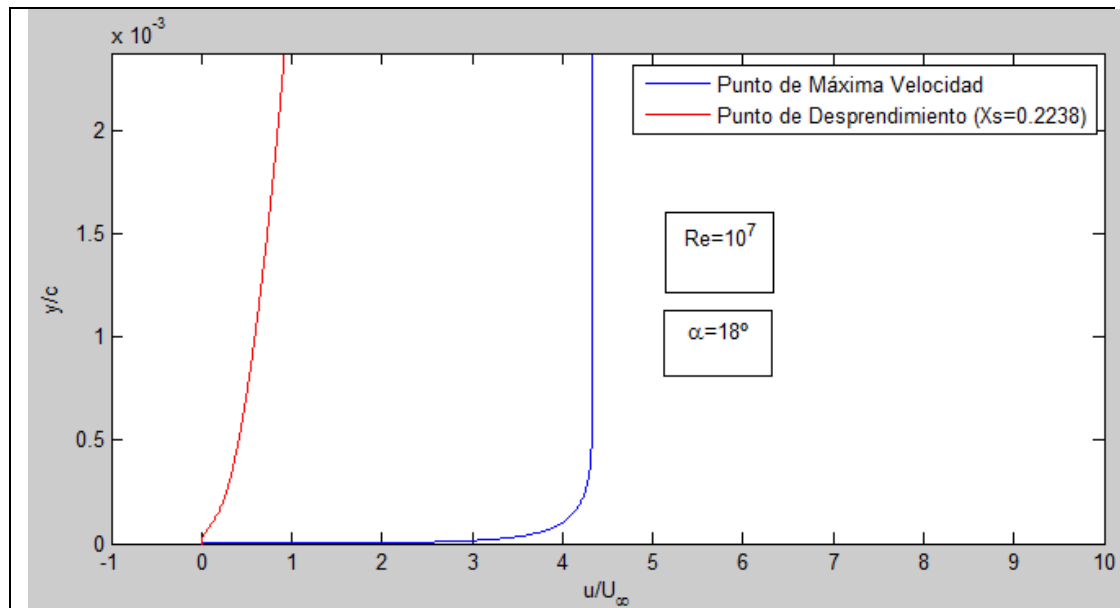
Se puede comprobar que conforme aumenta el número de Reynolds el efecto de la turbulencia se hace cada vez más notable y por ello  $x_s$  va aumentando.

En cuanto a la succión necesaria para que no se produzca el desprendimiento puede apreciarse que, al igual que sucedía con las elipses, sigue una función relacionada con el factor  $1/\sqrt{Re}$ . Sin embargo, la variación del coeficiente que multiplica a dicho factor pone de manifiesto que también depende de otros parámetros, o que la relación con el número de Reynolds es ligeramente diferente. En cualquier caso, el  $v_0$  mínimo para que la corriente no se desprenda en el perfil va disminuyendo con  $Re$ .

### 9.3.2 NACA0012

Para buscar hasta qué ángulo de ataque se puede llegar en cada caso se van a repetir los cálculos realizados en el apartado anterior:

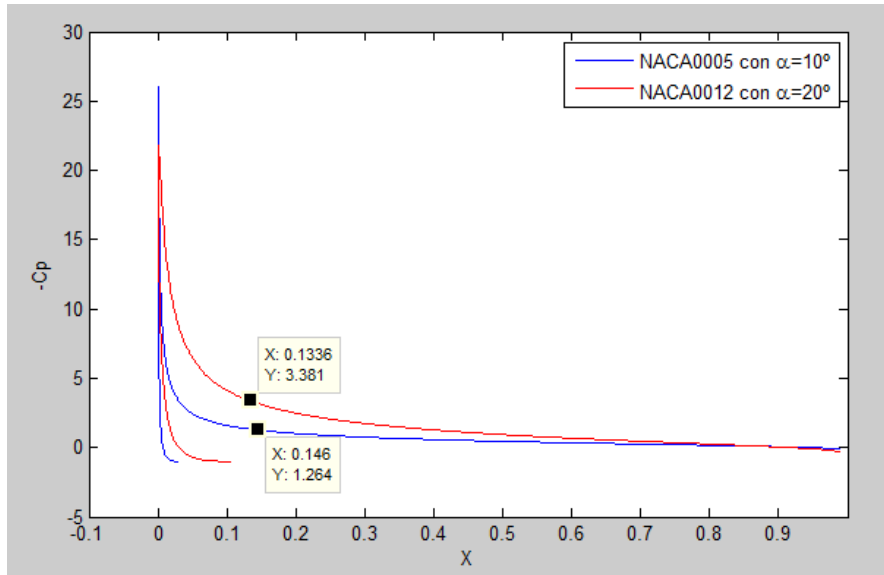




**Tabla 22: Perfiles de velocidades obtenidos para el máximo ángulo de ataque que se puede alcanzar con un NACA0012 para cada número de Reynolds sin que la corriente se desprenda en el borde de ataque**

Ya que dentro del rango de números de Reynolds considerados se puede llegar hasta  $\alpha=18^\circ$  sin que la capa límite se desprenda en el borde de ataque, se va a tratar de aplicar la succión necesaria para alcanzar  $\alpha=20^\circ$  en cada caso.

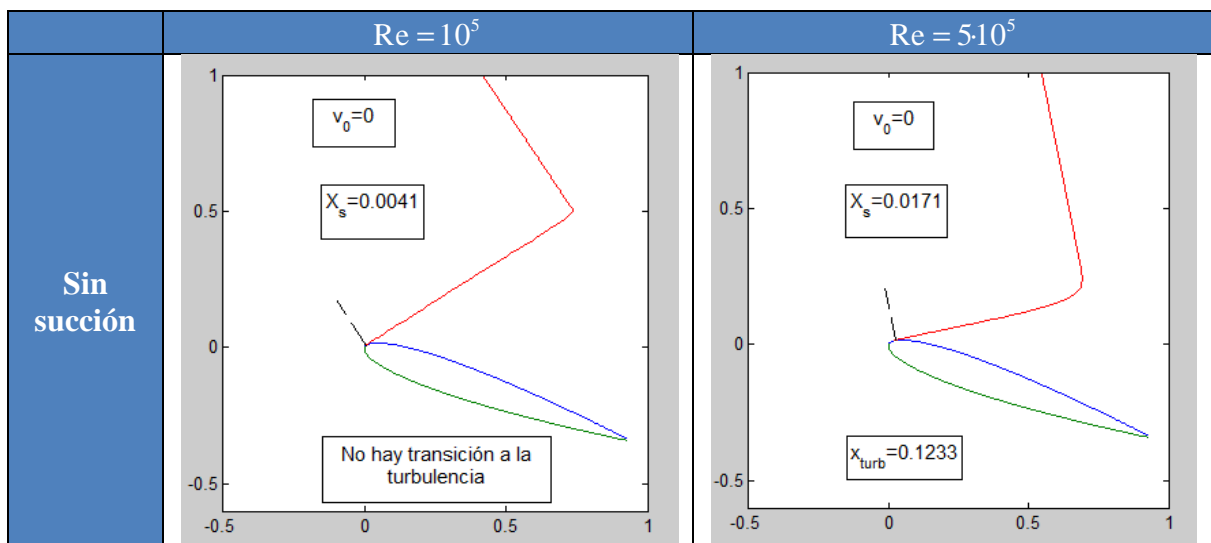
Se observa que a diferencia de con el NACA0005, donde si  $x_s$  pasaba del 15% de la cuerda la corriente ya permanecía adherida hasta prácticamente el borde de salida, ahora se hace necesario seguir aplicando succión después del borde de ataque. Sin embargo, al ser menor el gradiente adverso en esta zona, la succión necesaria es menor y por ello se pueden establecer dos intervalos de succión: uno hasta un 15% de la cuerda y otro hasta el borde de salida a una  $v_0$  menor.

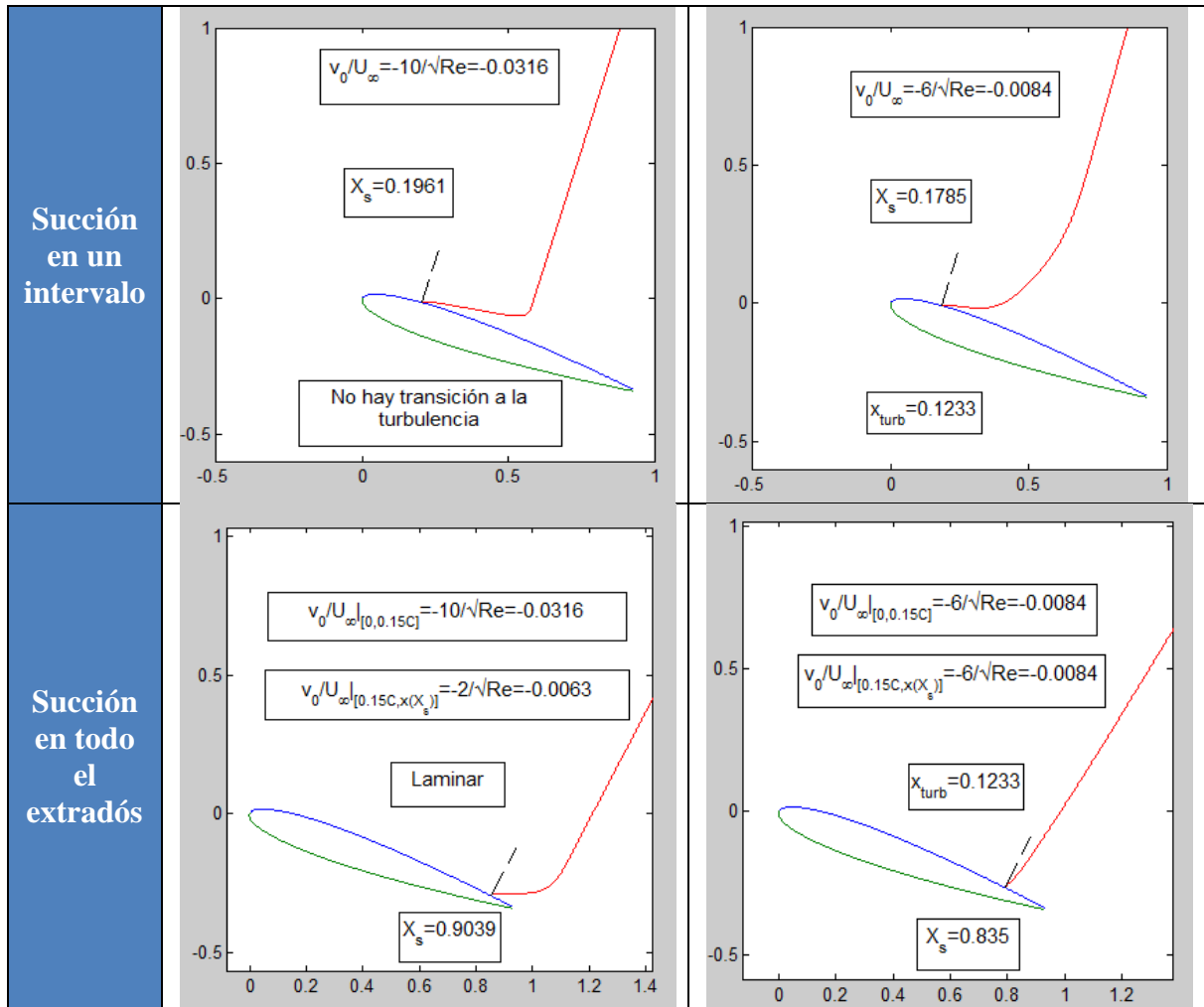


**Tabla 23: Comparativa entre el  $C_p$  del caso anterior y el actual**

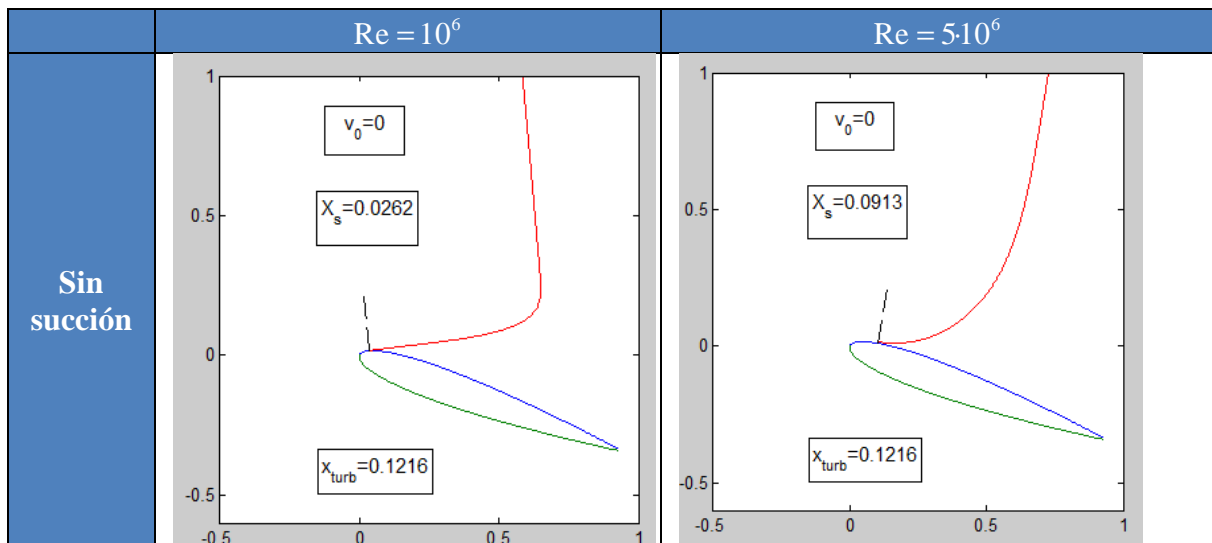
Observando la imagen anterior se puede comprobar que en este caso se tiene un menor pico de succión en el borde de ataque y por ello la  $v_0$  que será necesario aplicar en el primer intervalo será más pequeña. Tras dicho intervalo, se tiene ahora un mayor gradiente adverso que hará necesaria la aplicación de una succión que antes no se realizaba.

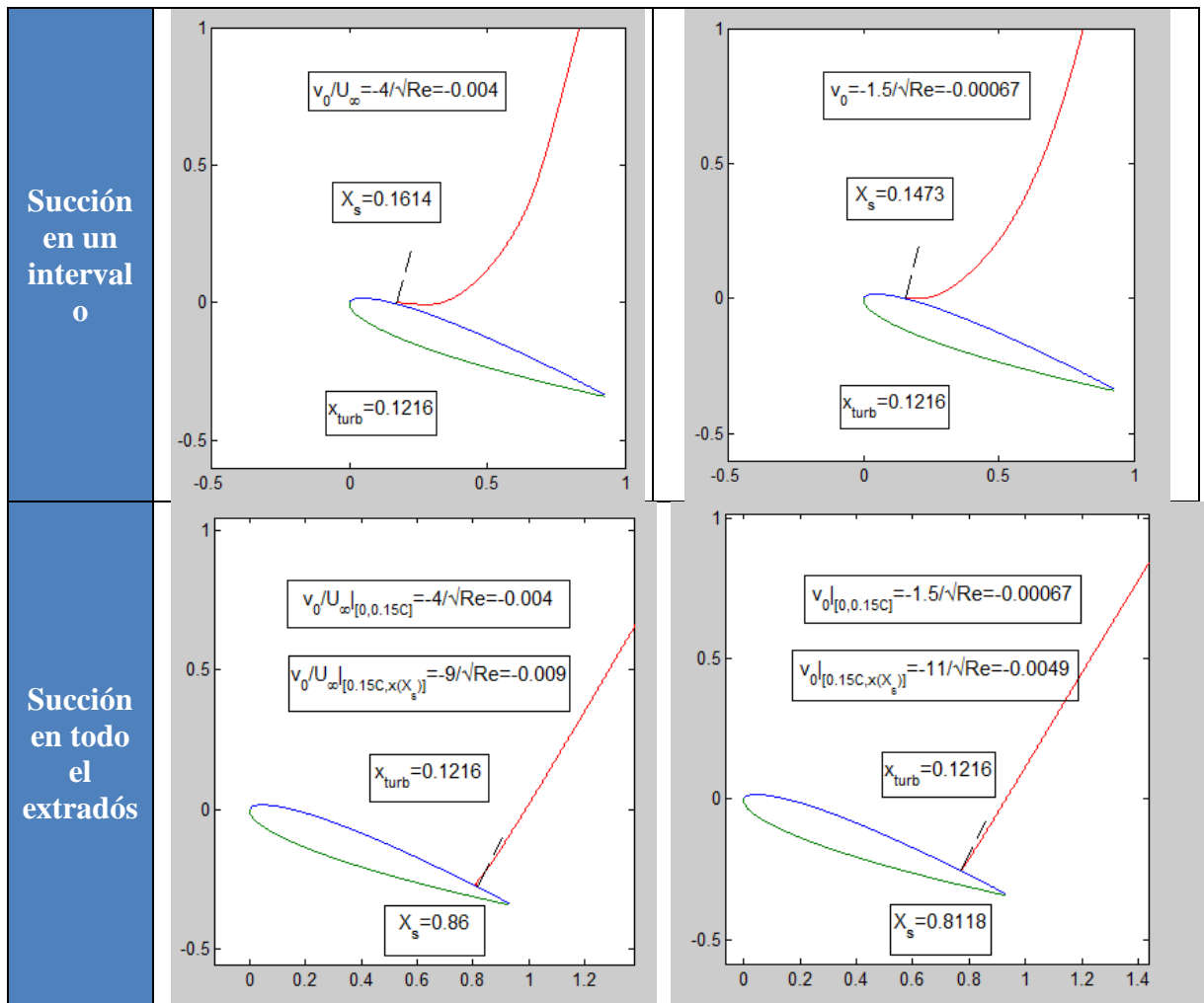
Se va a estudiar en ambos tramos la succión necesaria para que la corriente permanezca adherida hasta al menos  $X = 0.8$ . Así, la distribución de presiones será muy parecida a la que proporciona el método de paneles.



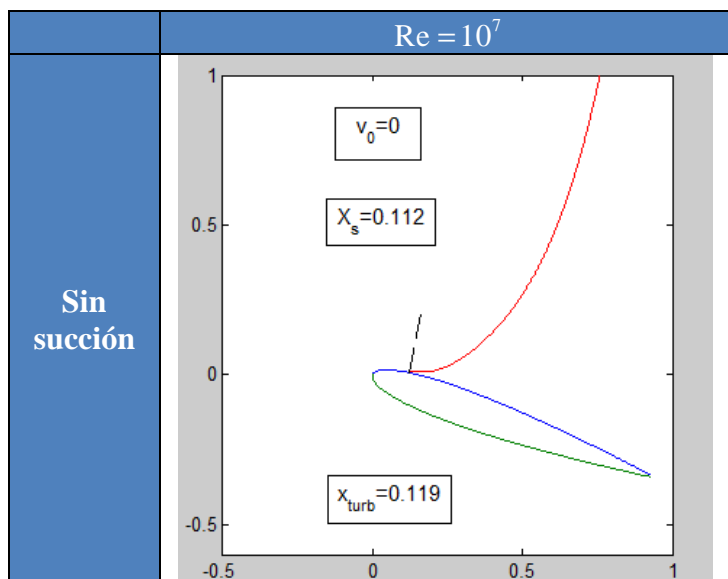


**Tabla 24: Resultados obtenidos para dos modos distintos de aplicar la succión considerando un NACA0012 a  $Re=10^5$  y  $Re=5 \cdot 10^5$**





**Tabla 25: Resultados obtenidos para dos modos distintos de aplicar la succión considerando un NACA0012 a  $Re=10^6$  y  $Re=5 \cdot 10^6$**





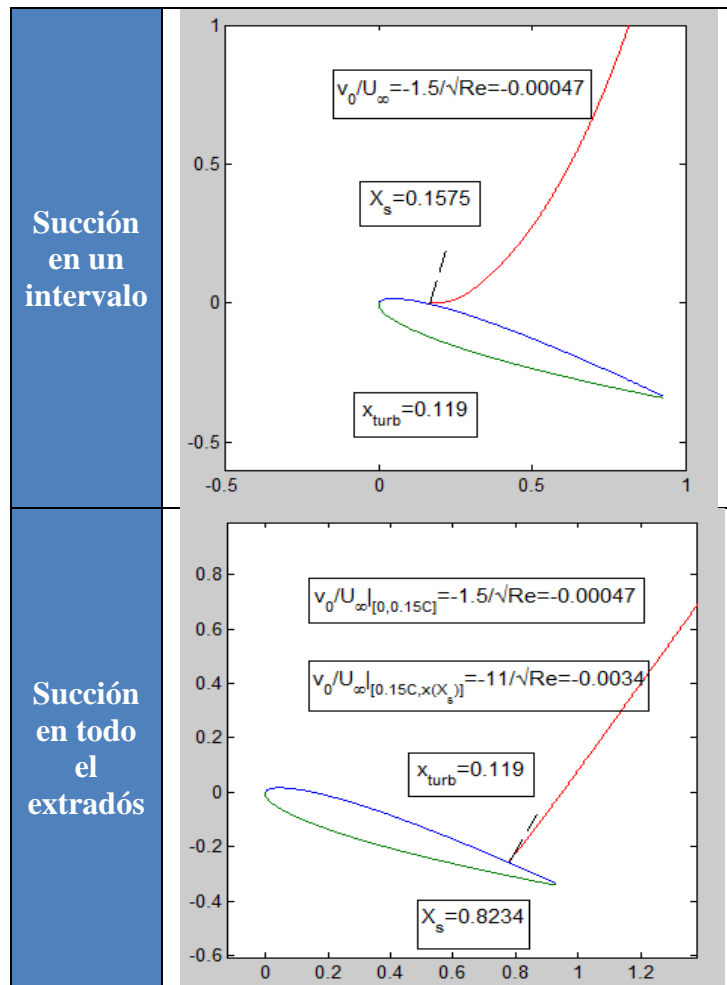


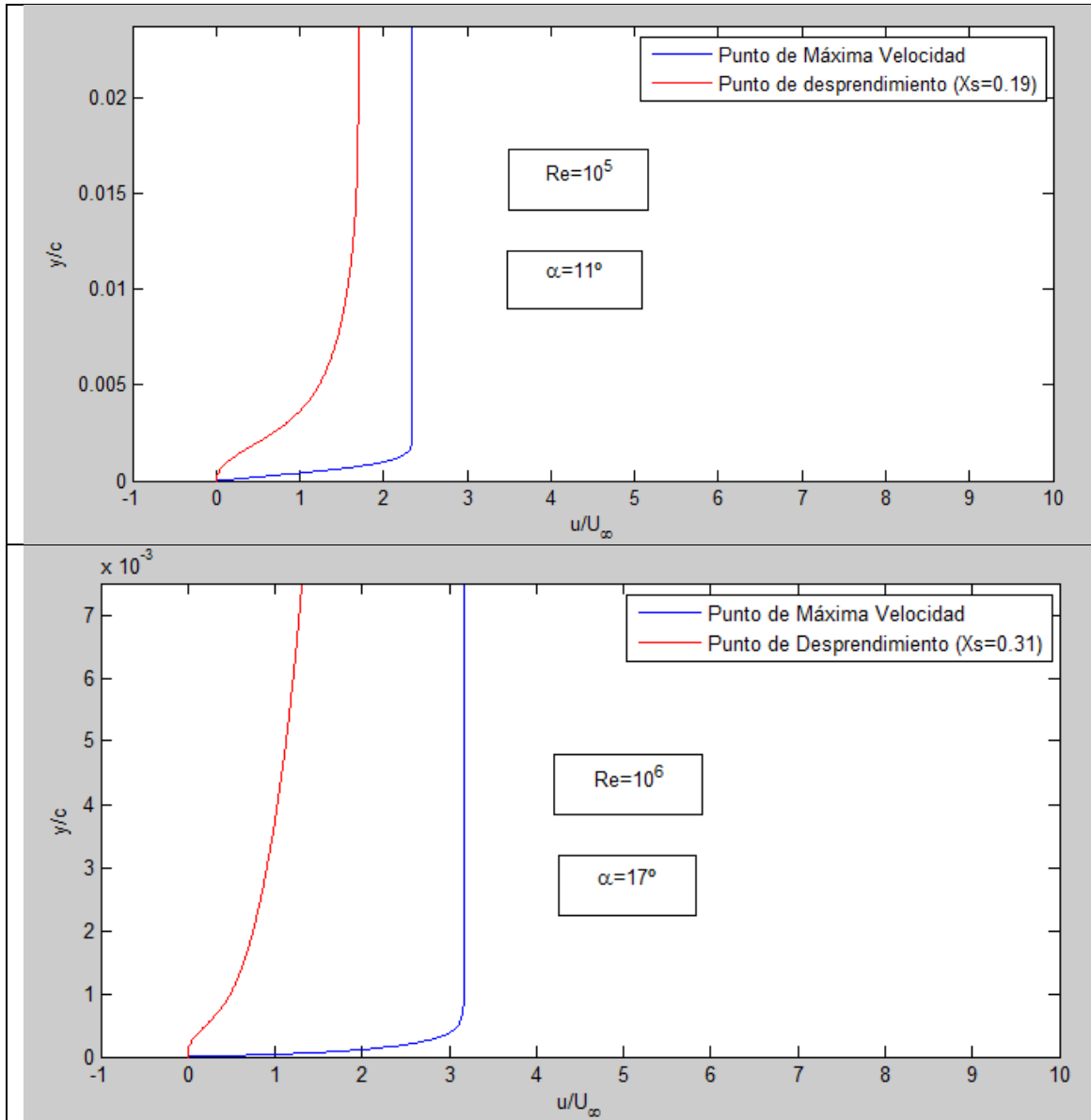
Tabla 26: Resultados obtenidos para dos modos distintos de aplicar la succión considerando un NACA0012 a  $Re=10^7$

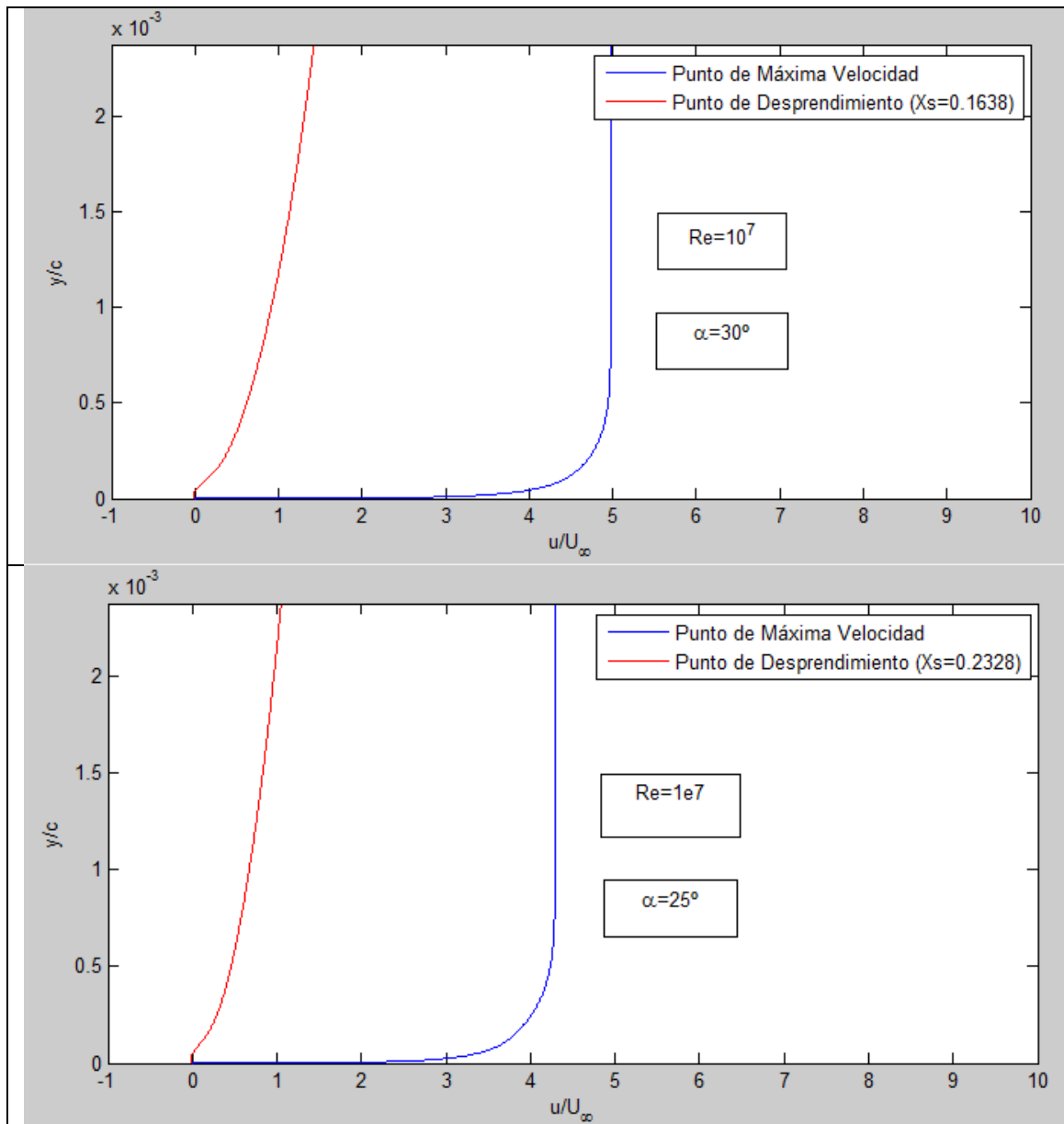
Puede comprobarse que conforme aumenta el número de Reynolds la succión necesaria en el borde de ataque se hace cada vez más pequeña mientras que para la succión en el segundo intervalo se observa que aumenta hasta un máximo con  $Re = 10^6$  para luego disminuir. Este comportamiento, en principio anti intuitivo, se estudiará en mayor profundidad en el apartado 9.4.

### 9.3.3 NACA0018

Tras simular con estos tres tipos de perfiles se ha comprobado que cuanto más grueso sea el perfil más suave se produce la entrada en pérdida, es decir, el desprendimiento no es tan brusco al aumentar el ángulo de ataque sino que  $X_s$  va disminuyendo de forma progresiva.

Si siguiendo el criterio de que la corriente no se desprenda hasta un 15% de la cuerda se pueden llegar a ángulos de ataque superiores a  $30^\circ$  para un  $Re = 10^7$ . Sin embargo, para ángulos de ataque menores, como a  $25^\circ$ , la corriente se desprende lejos del borde de salida debido a que para valores de  $\alpha$  tan grandes el gradiente adverso se hace muy considerable no solo en el borde de ataque, sino en todo el extradós.





**Tabla 27: Perfiles de velocidades obtenidos para el máximo ángulo de ataque que se puede alcanzar con un NACA0018 para cada número de Reynolds sin que la corriente se desprenda en el borde de ataque**

Comparando ahora la distribución de presiones con los casos anteriores puede comprobarse que si bien el pico de succión es casi tan grande como el que se daba para el NACA0005, el gradiente adverso a partir de dicho punto (la pendiente de la curva de  $C_p$ ) es mucho menor, por lo que la succión necesaria en este caso será menor en dicha región que en los casos anteriores. Por otra parte, también puede apreciarse que el gradiente adverso a partir de la zona en la que se deja de aplicar succión es mucho mayor y por ello, al igual que ocurría en el NACA0012, habrá que introducir otro intervalo de succión.

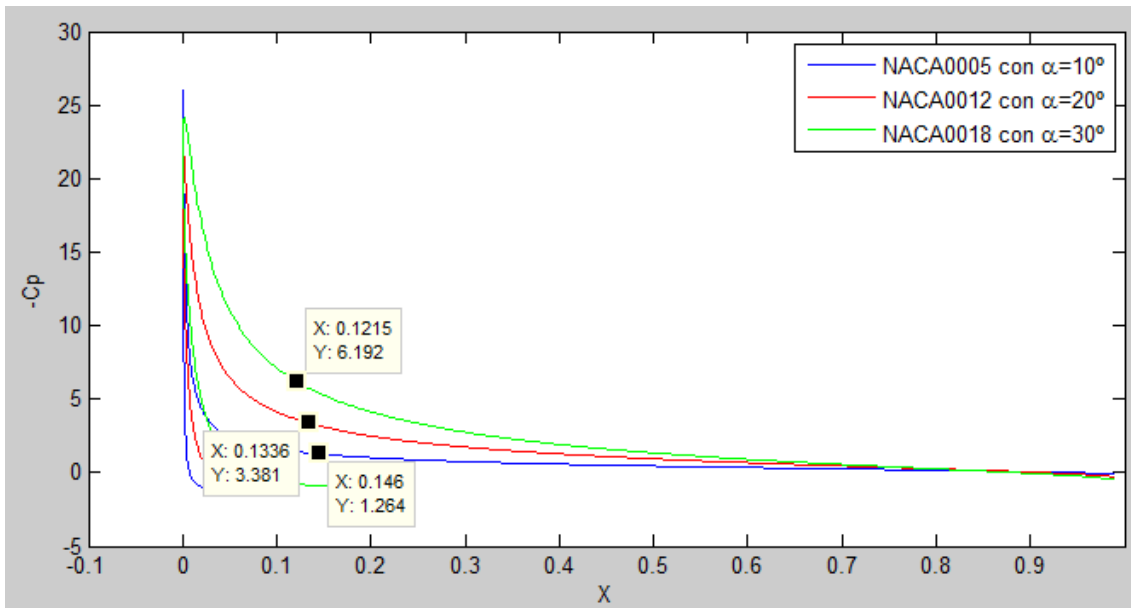
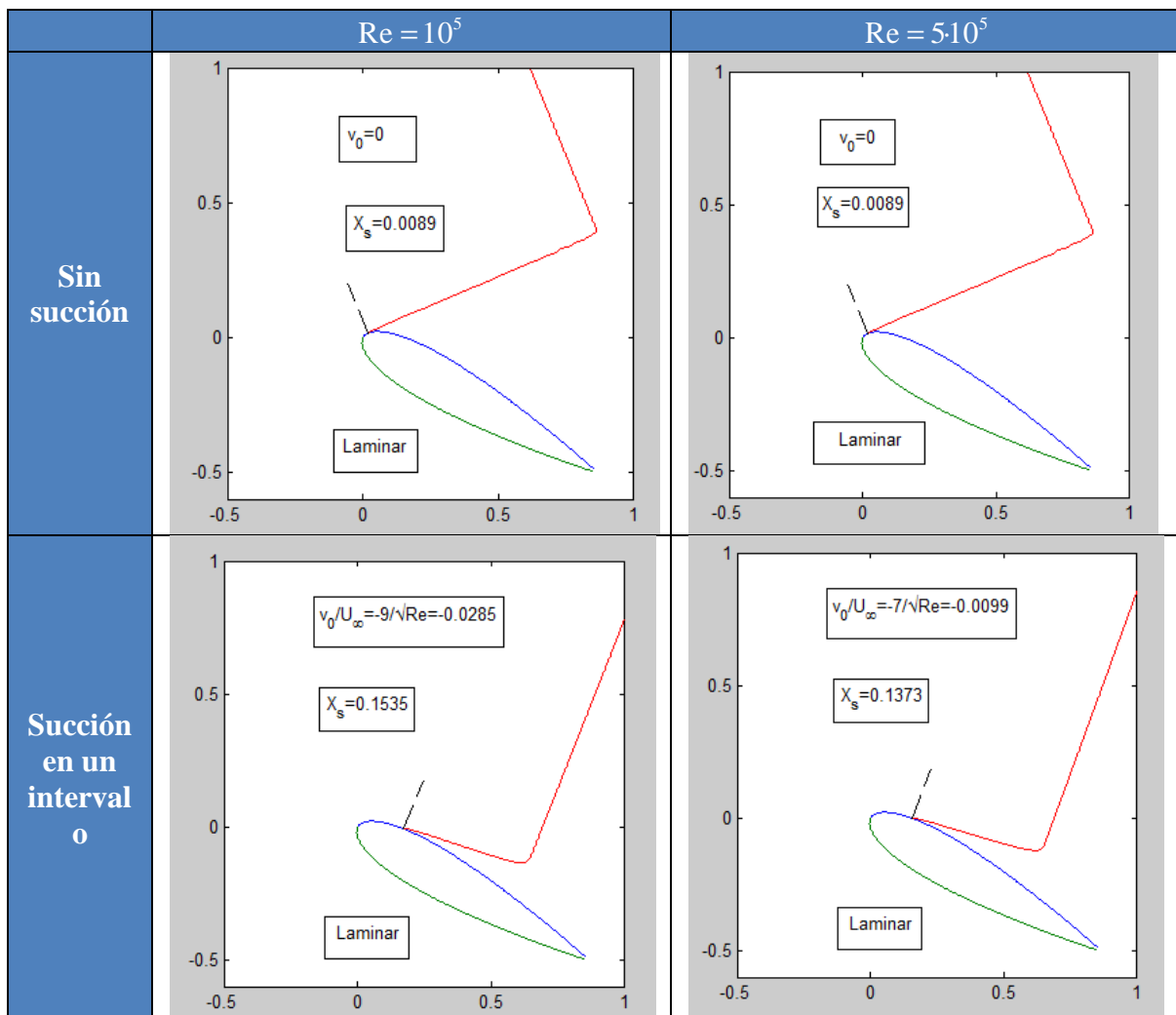


Imagen 11: Comparativa de los Cp entre los 3 casos considerados señalándose en cada curva el punto donde deja de aplicarse la succión en el borde de ataque



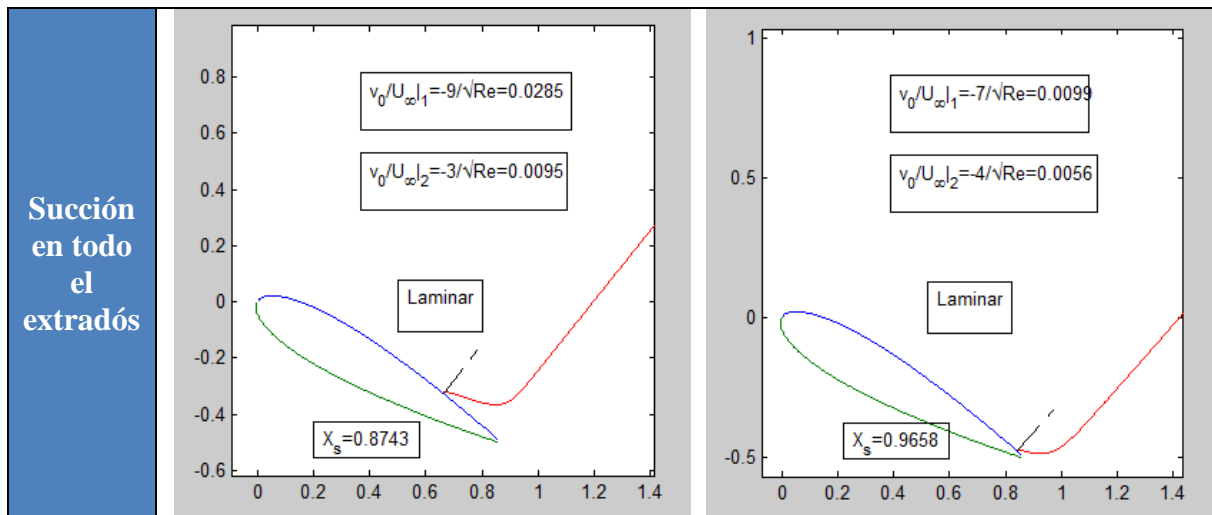
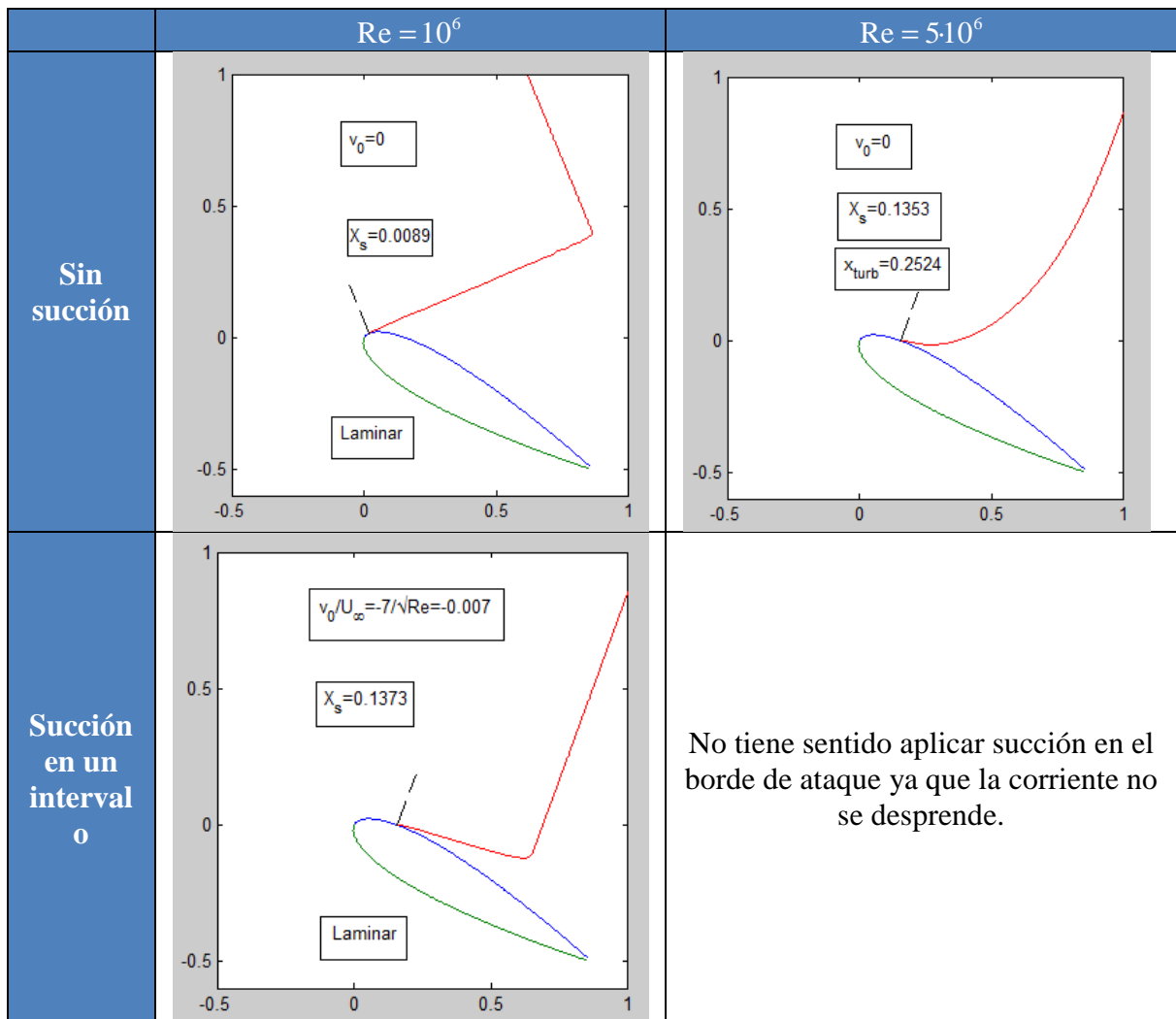


Tabla 28: Resultados obtenidos para dos modos distintos de aplicar la succión considerando un NACA0018 a  $Re=10^5$  y  $Re=5 \cdot 10^5$



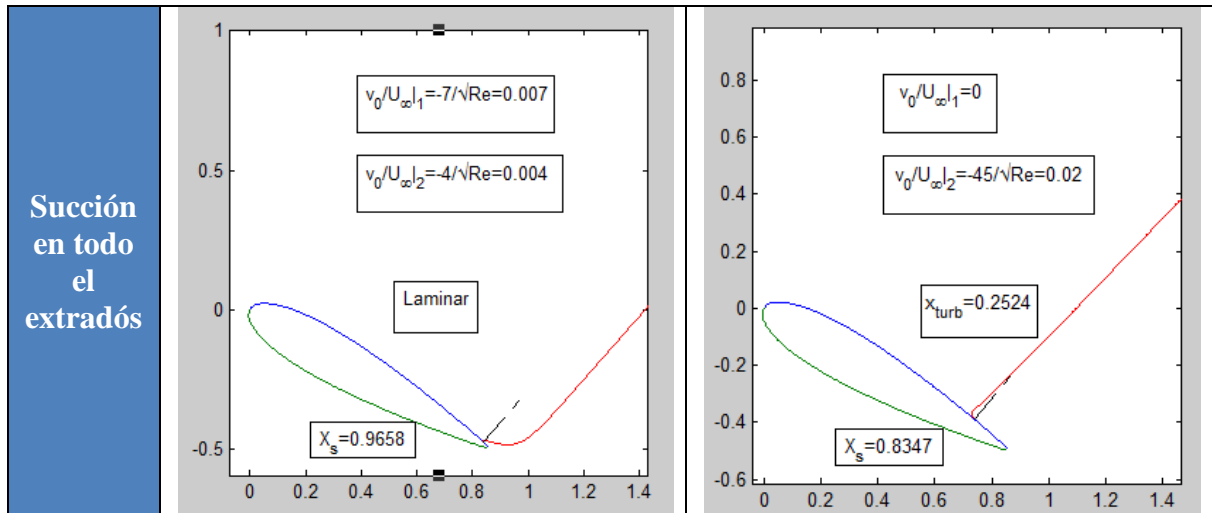
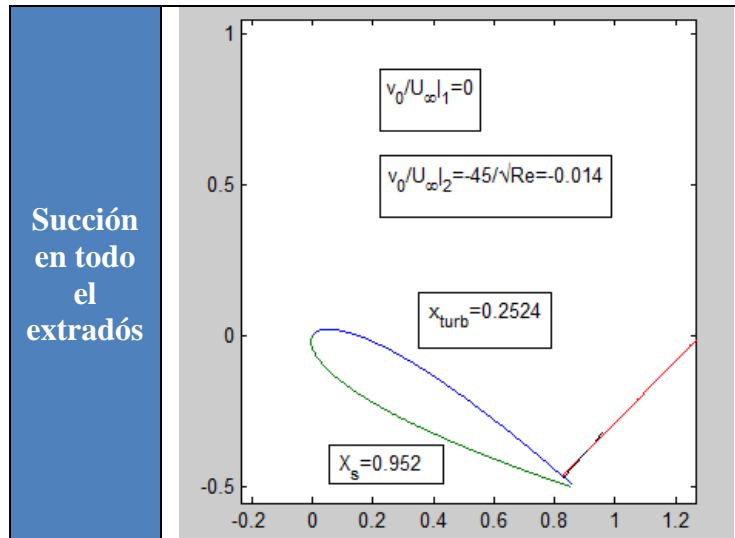


Tabla 29: Resultados obtenidos para dos modos distintos de aplicar la succión considerando un NACA0018 a  $Re=10^6$  y  $Re=5 \cdot 10^6$

Re = $10^7$	
Sin succión	
Succión en un intervalo	<p>No tiene sentido aplicar succión en el borde de ataque ya que la corriente no se desprende.</p>

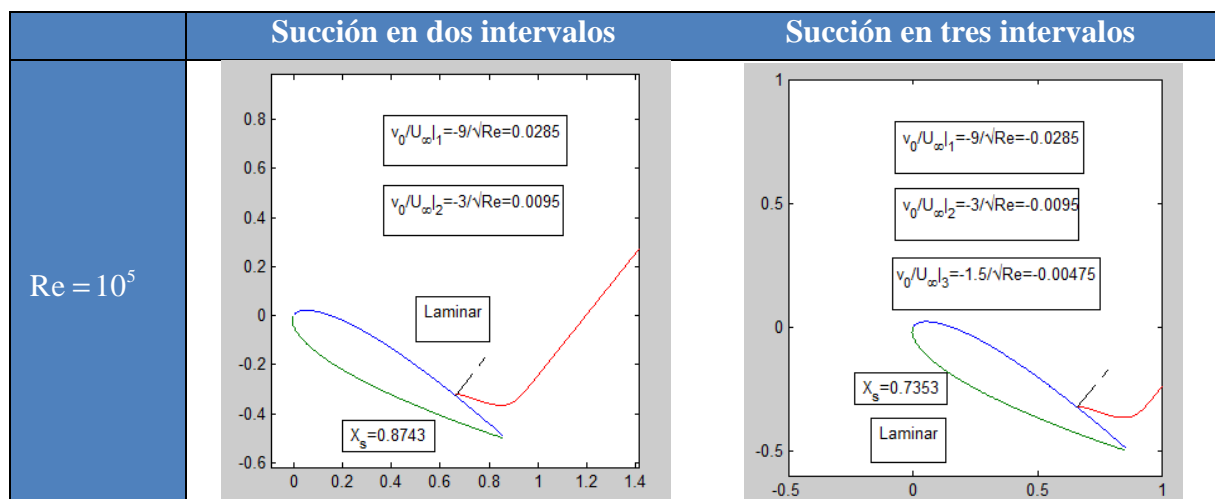


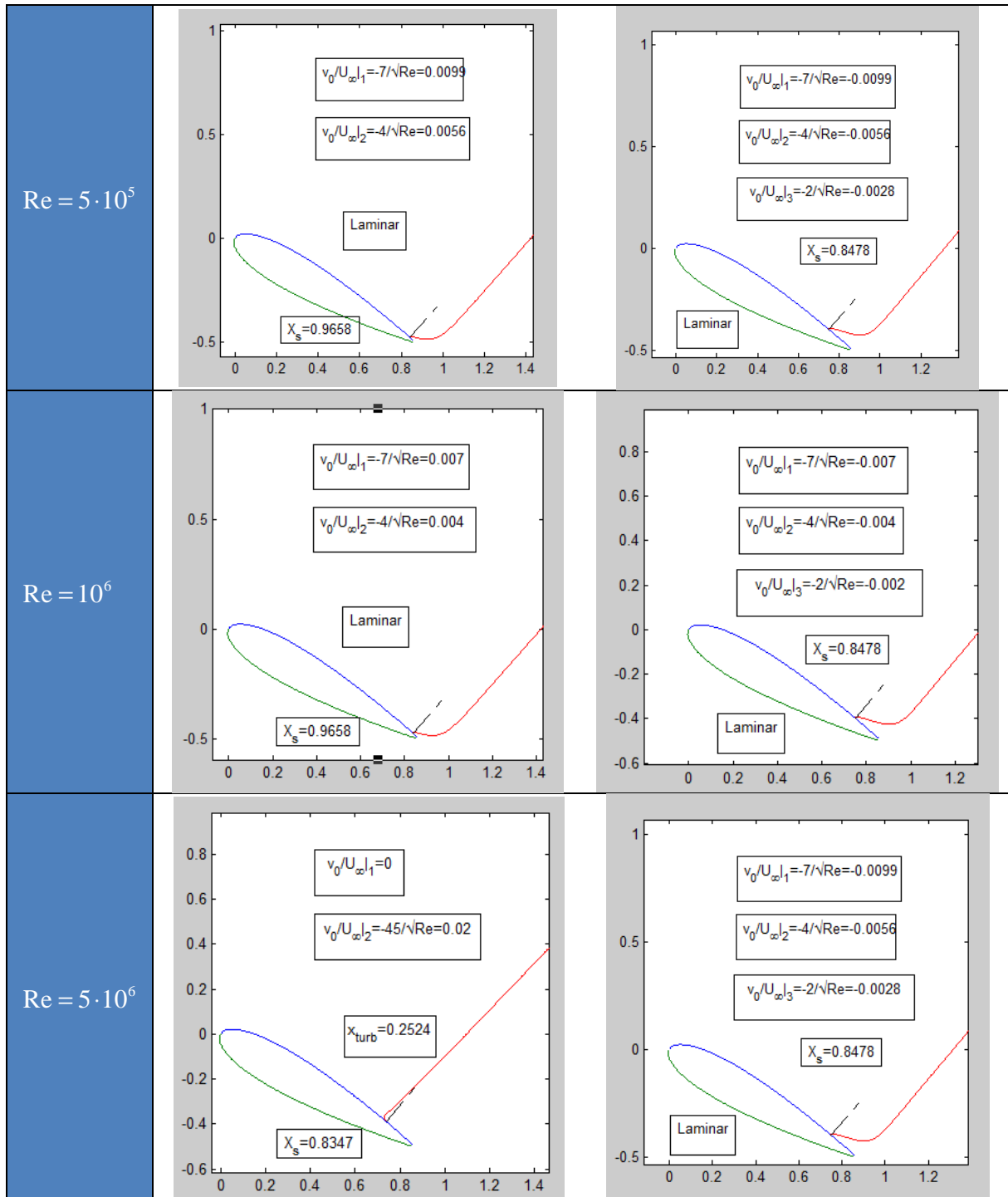
**Tabla 30: Resultados obtenidos para dos modos distintos de aplicar la succión considerando un NACA0018 a  $Re=10^7$**

En la Imagen 11 se puede comprobar que a partir de  $X = 0.6$  el gradiente adverso es muy similar al que se tenía en los perfiles NACA0012 y NACA0005 por lo que aplicar en dicha región la misma succión que la que se daba a partir de  $X = 0.1215$  sería sobredimensionarla respecto a la que se necesita realmente.

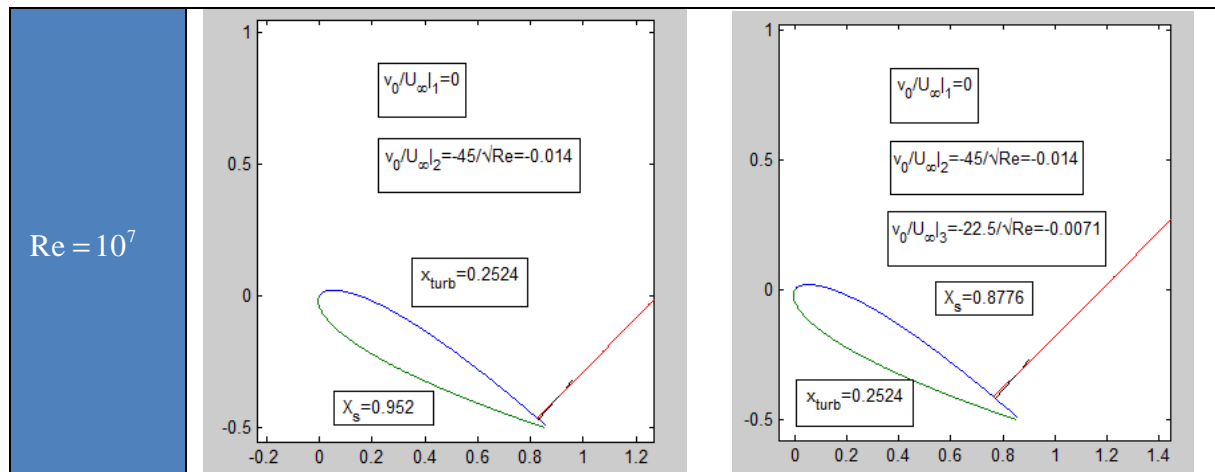
En concreto, se ha comprobado que cuando  $-\frac{\partial U_e}{\partial x}\bigg|_{X=0.12} > -5.5 \frac{\partial U_e}{\partial x}\bigg|_{X=0.68}$  se puede

reducir la succión aplicada a la mitad sin que la corriente se desprenda hasta las cercanías del borde de salida –más cerca de éste conforme mayor es el número de Reynolds-, aunque en general se adelanta el punto de desprendimiento.









**Tabla 31: Comparativa entre los resultados obtenidos aplicando dos intervalos de succión con el caso en el que se aplican 3 intervalos, siendo el tercero el intervalo en el que menos succión se impone**

Como resumen de los resultados obtenidos:

- En el NACA0005 con succionar sólo en el borde de ataque es suficiente.
- Con el NACA0012 la bajada del gradiente adverso a partir del borde de ataque no es tan grande y por ello hacen falta 2 intervalos de succión.
- Con el NACA0018 hay grandes diferencias en el gradiente adverso que permiten establecer tres intervalos de succión. Aquí el rebordeo es mucho más suave que en los perfiles más delgados haciendo que el intervalo donde se requiere una mayor succión sea entre éste y el borde de salida.

## 9.4 Comparación entre el punto de separación en régimen laminar y en turbulento

De entre los resultados del apartado anterior resultaba llamativo que se diera un cierto número de Reynolds en el que la succión que era necesario aplicar para que la capa límite no se desprendiese era mayor en régimen turbulento que en laminar, lo cual, en principio podría resultar extraño si se piensa que el efecto de la succión y de la turbulencia son “análogos”. Este comportamiento se observaba cuando al añadir succión el punto de desprendimiento laminar se encontraba cercano al borde de salida.

Es por ello que puede resultar de interés realizar un estudio del punto a partir del cual se produce este hecho. Todos los cálculos que vienen a continuación se han realizado para un perfil NACA0012 a un  $Re = 10^6$ .

Si no se añade succión se tiene el efecto esperado, es decir, conforme aumenta el ángulo de ataque se adelanta el punto de desprendimiento, que se da mucho más cerca del borde de salida en el caso turbulento. Para estudiar el caso laminar se ha anulado el efecto de la turbulencia en el código mientras que para el caso turbulento se ha considerado como se venía haciendo hasta ahora.

$\alpha [^\circ]$	$X_s  _{Laminar}$	$X_s  _{Turbulento}$
1	0.5102	0.9649
2	0.4116	0.9593
3	0.3181	0.9534

**Tabla 32: Comparativa entre los puntos de desprendimiento laminar y turbulento sin aplicar succión**

Sin embargo, si con la succión se logra que la capa límite permanezca adherida de forma “artificial” durante una mayor longitud del perfil, llega un punto en el que el comportamiento es distinto:

$$\alpha = 10^\circ$$

$v_0, x \leq 0.2C$	$v_0, x > 0.2C$	$X_s  _{Laminar}$	$X_s  _{Turbulento}$
$-3/\sqrt{Re}$	$-1/\sqrt{Re}$	0.7354	0.9221
$-3/\sqrt{Re}$	$-1.3/\sqrt{Re}$	0.89	0.9363
$-3/\sqrt{Re}$	$-1.6/\sqrt{Re}$	0.9425	0.9465
$-3/\sqrt{Re}$	$-1.7/\sqrt{Re}$	0.9527	0.9506

**Tabla 33: Comparativa entre los puntos de desprendimiento laminar y turbulento aumentando la succión hasta que el punto de desprendimiento laminar es mayor que el turbulento a igualdad de succión aplicada para un ángulo de ataque de  $10^\circ$**

$$\alpha = 15^\circ$$

$v_0, x \leq 0.2C$	$v_0, x > 0.2C$	$X_s  _{Laminar}$	$X_s  _{Turbulento}$
$-7/\sqrt{Re}$	$-0.5/\sqrt{Re}$	0.3502	0.6243
$-7/\sqrt{Re}$	$-1/\sqrt{Re}$	0.5897	0.7374
$-7/\sqrt{Re}$	$-1.3/\sqrt{Re}$	0.8186	0.7857
$-7/\sqrt{Re}$	$-1.5/\sqrt{Re}$	0.8885	0.8124

Tabla 34: Comparativa entre los puntos de desprendimiento laminar y turbulento aumentando la succión hasta que el punto de desprendimiento laminar es mayor que el turbulento a igualdad de succión aplicada para un ángulo de ataque de 15°

Como puede observarse para los dos casos mostrados, llega un punto cerca del borde de salida -más lejano a éste cuanto más alto es el ángulo de ataque- en el que a igualdad de succión aplicada el punto de desprendimiento se encuentra más alejado si la capa límite es laminar que si fuera turbulenta.

La explicación podría encontrarse en que al pasar de una capa límite laminar a una turbulenta la velocidad en las proximidades de la pared se hace más pequeña debido al aumento del espesor de la capa límite. Por tanto, ante un gradiente adverso de presiones se hace necesario “pegar más a la pared” el perfil de velocidades en la zona inmediatamente cercana a la misma para que la corriente no se desprendiera.

## 9.5 Succión necesaria para evitar el desprendimiento en cada punto

Para llegar a (8.3) Schlichting realizó una serie de aproximaciones como considerar que los perfiles de velocidades a lo largo de todo el cuerpo mantienen la misma forma que en el punto de separación así como una estimación de la ecuación del perfil de velocidades en dicho instante. Siguiendo el desarrollo para llegar a (8.3):

Partiendo de la ecuación de continuidad (4.7) y la de cantidad de movimiento (4.8) se tiene

$$\hat{u} \frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{x}} + \left( \hat{v}_0 - \int_0^{\hat{y}} \frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{x}} d\hat{y} \right) \frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{y}} = \hat{U}_e \frac{\partial \hat{U}_e}{\partial \hat{x}} + \nu \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial \hat{y}^2} \quad (9.9)$$

Integrando desde la pared hasta una altura  $h$

$$\int_0^h \left( \hat{u} \frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{x}} + \left( \hat{v}_0 - \int_0^{\hat{y}} \frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{x}} d\hat{y} \right) \frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{y}} - \hat{U}_e \frac{\partial \hat{U}_e}{\partial \hat{x}} \right) d\hat{y} = \frac{\mu}{\rho} \left[ \frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{y}} \right]_{\hat{y}=0}^{\hat{y}=h} \quad (9.10)$$

Y definiendo  $h$  como el espesor de la capa límite se tiene que en el segundo miembro de la ecuación anterior  $\frac{\mu}{\rho} \left[ \frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{y}} \right]_{\hat{y}=0}^{\hat{y}=h} = -\frac{\tau_p}{\rho}$

Atendiendo al término  $\int_0^h \left( \hat{v}_0 - \int_0^{\hat{y}} \frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{x}} d\hat{y} \right) \frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{y}} d\hat{y}$  e integrando por partes el miembro asociado a  $\int_0^{\hat{y}} \frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{x}} d\hat{y}$  se tiene

$$\int_0^h \left( \hat{v}_0 - \int_0^{\hat{y}} \frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{x}} d\hat{y} \right) \frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{y}} d\hat{y} = \hat{v}_0 \hat{u}_e - \int_0^h \left( \int_0^{\hat{y}} \frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{x}} d\hat{y} \right) \frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{y}} d\hat{y}, \quad (9.11)$$

$$\int_0^h \left( \int_0^{\hat{y}} \frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{x}} d\hat{y} \right) \frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{y}} d\hat{y} = \left( \hat{u} \int_0^{\hat{y}} \frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{x}} d\hat{y} \right) \Big|_0^h - \int_0^h \hat{u} \frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{x}} d\hat{y} = \hat{u}_e \int_0^h \frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{x}} d\hat{y} - \int_0^h \hat{u} \frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{x}} d\hat{y}$$

Quedando

$$\int_0^h \left( 2\hat{u} \frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{x}} - \hat{u}_e \frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{x}} - \hat{u}_e \frac{\partial \hat{u}_e}{\partial \hat{x}} + \hat{v}_0 \hat{u}_e \right) d\hat{y} = -\frac{\tau_p}{\rho} \quad (9.12)$$

De donde se puede obtener

$$\int_0^h \left( \frac{\partial}{\partial \hat{x}} [\hat{u} (\hat{u}_e - \hat{u})] \right) d\hat{y} + \frac{\partial \hat{u}_e}{\partial \hat{x}} \int_0^h (\hat{u}_e - \hat{u}) d\hat{y} = \frac{\tau_p}{\rho} \quad (9.13)$$

Definiendo ahora  $\delta_1$  como el “Espesor de Desplazamiento” y  $\delta_2$  como el “Momentum Thickness” con las siguientes expresiones

$$\widehat{\delta}_1 \widehat{u}_e = \int_0^h (\widehat{u}_e - \widehat{u}) \partial \widehat{y} \quad (9.14)$$

$$\widehat{\delta}_2 \widehat{u}_e^2 = \int_0^h \widehat{u} (\widehat{u}_e - \widehat{u}) \partial \widehat{y} \quad (9.15)$$

Despejando en (9.13) se obtiene

$$\frac{\partial}{\partial \widehat{x}} (\widehat{u}_e^2 \widehat{\delta}_2) + \widehat{\delta}_1 \widehat{u}_e \frac{\partial \widehat{u}_e}{\partial \widehat{x}} - \widehat{v}_0 \widehat{u}_e = \frac{\tau_p}{\rho} \quad (9.16)$$

Era a partir de esta expresión donde Schlichting introducía sus simplificaciones anulando  $\frac{\partial \widehat{\delta}_2}{\partial \widehat{x}}$  y estimando los valores de  $\widehat{\delta}_1$  y  $\widehat{\delta}_2$ . En nuestro caso, el código permite obtener los valores de  $\widehat{\delta}_1$  y  $\widehat{\delta}_2$  en la estación anterior así como aproximar  $\frac{\partial \widehat{\delta}_2}{\partial \widehat{x}}$  con los datos de dos estaciones precedentes. Por tanto, se puede obtener una expresión de la  $v_0$  necesaria para que el esfuerzo sobre la pared sea nulo considerando que tanto los valores de  $\delta_1$  y  $\delta_2$  como  $\frac{\partial \delta_2}{\partial x}$  permanecen aproximadamente iguales en una estación a los valores que se tenían en la estación anterior. Esta simplificación tenderá a ser exacta cuanto más se refine el mallado según el eje  $x$ .

$$\widehat{v}_0 = \frac{\partial \widehat{u}_e}{\partial \widehat{x}} [\widehat{\delta}_1 + 2\widehat{\delta}_2] + \widehat{u}_e \frac{\partial \widehat{\delta}_2}{\partial \widehat{x}} \quad (9.17)$$

Que en las variables adimensionales consideradas y haciendo  $\widehat{\delta}_1 = L\delta_1$ ,  $\widehat{\delta}_2 = L\delta_2$  se obtendría

$$v_0 = \frac{\partial u_e}{\partial x} [\delta_1 + 2\delta_2] + u_e \frac{\partial \delta_2}{\partial x} \quad (9.18)$$

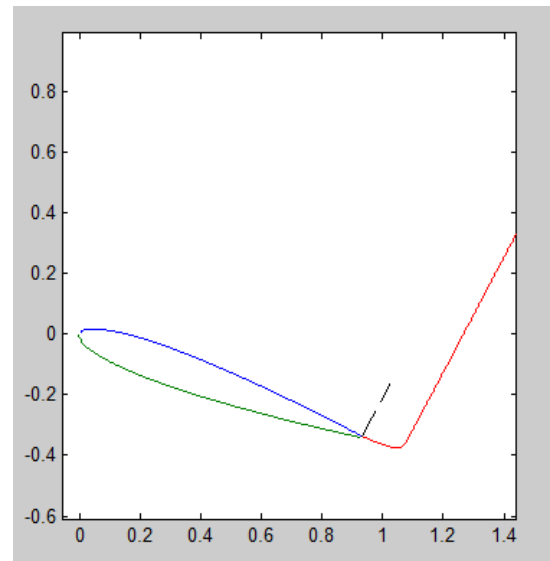
Cabe señalar que, aunque se ha partido de la ecuación de cantidad de movimiento laminar, la ecuación anterior es válida también cuando aparece la turbulencia ya que al integrar, el término de viscosidad turbulenta es nulo en la pared mientras que fuera de la capa límite la velocidad no varía con la coordenada  $y$ .

El modo de proceder consistirá en calcular el  $v_0$  aplicado en un  $x$  determinado imponiendo  $\tau=0$  y dando como valores a  $\delta_1$  y  $\delta_2$  los correspondientes a la estación anterior, por tanto, cuando más fino sea el mallado más se parecerán los valores de  $\delta_1$  y  $\delta_2$  a los de la estación actual y más cerca estaremos de que el esfuerzo sobre la pared obtenido sea igual que el impuesto.

Si se impone  $\tau=0$  en un punto en el que se tiene  $\tau>0$ , se tenderá a reducir el esfuerzo sobre la pared con una  $v_0>0$  con lo que en lugar de prevenir el desprendimiento lo favoreceríamos en una zona donde antes no se producía. Para evitar favorecer la separación de la capa límite se ha impuesto en el código que cuando la succión calculada sea mayor que cero se sustituirá por  $v_0=0$ .

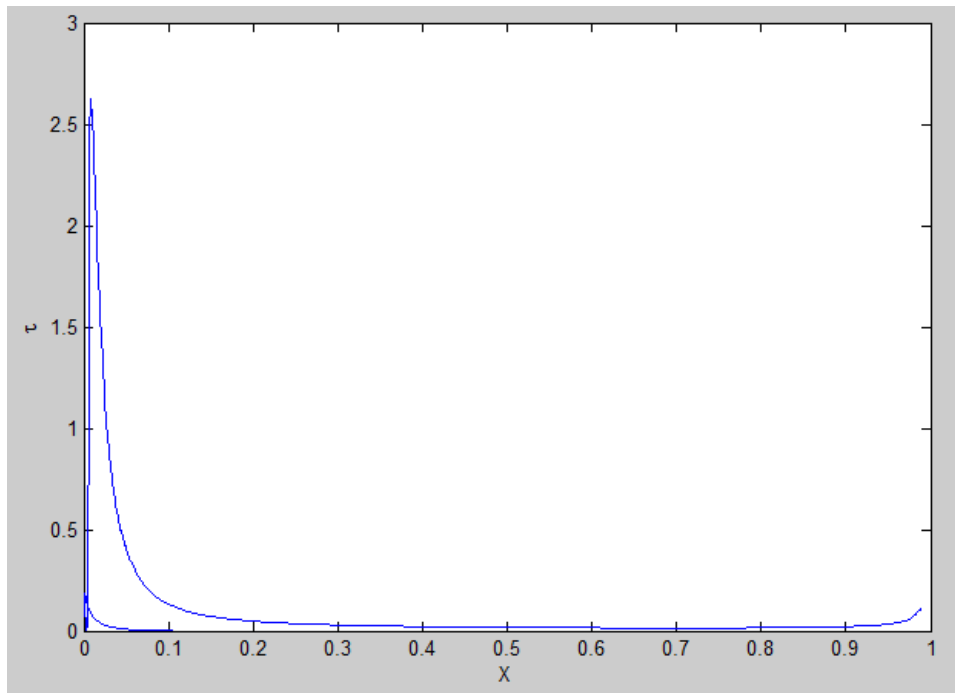
Para comenzar este análisis se hará comparando con resultados ya obtenidos, por ejemplo en un NACA0012 con  $\alpha=20^\circ$  y  $Re=10^5$ . En este caso, como la corriente era completamente laminar se va a anular la turbulencia en el código para poder comparar posteriormente los resultados.

Si se consideran el mismo número de puntos en  $x$  que hasta ahora,  $N_x=1001$ , se comprueba que efectivamente aplicando (9.18) la corriente no se desprende, sin embargo, se obtiene un  $\tau>0$ , por lo que no se puede decir que la ecuación funcione correctamente.



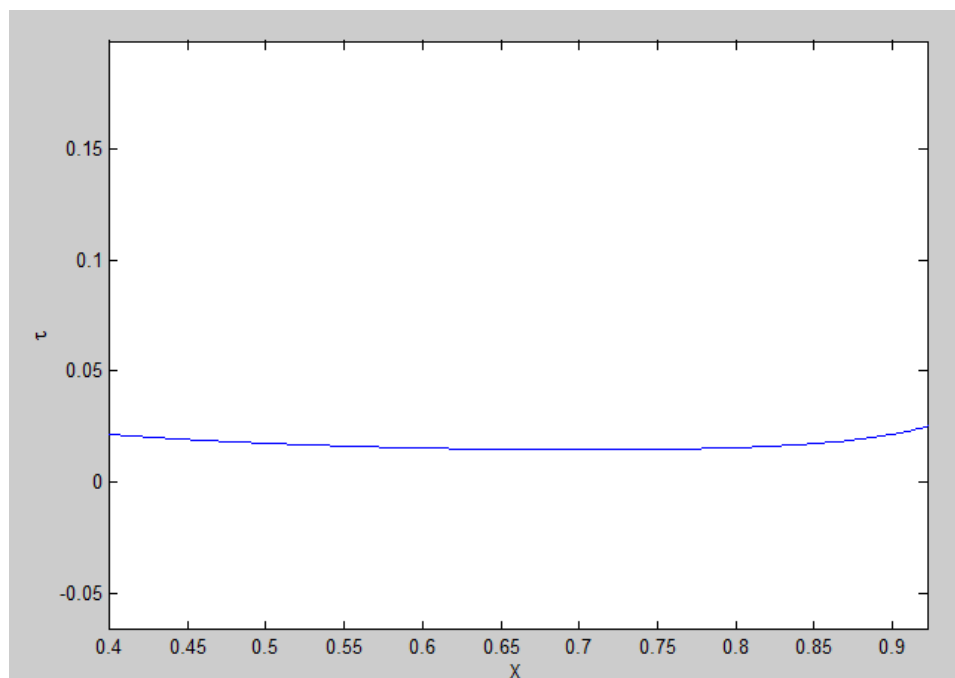
**Imagen 12: Punto de desprendimiento obtenido para  $N_x=1001$  en un NACA0012 a un ángulo de ataque de  $20^\circ$  y  $Re=10^5$**

Observando la distribución de  $\tau$  se comprueba que es prácticamente constante excepto en la zona del borde de ataque y la del borde de salida. Esta diferencia en los extremos del perfil respecto a la zona central se debe a que en ellos los cambios que se producen en la corriente exterior lo hacen en un espacio muy reducido y por tanto las aproximaciones empleadas son menos precisas.

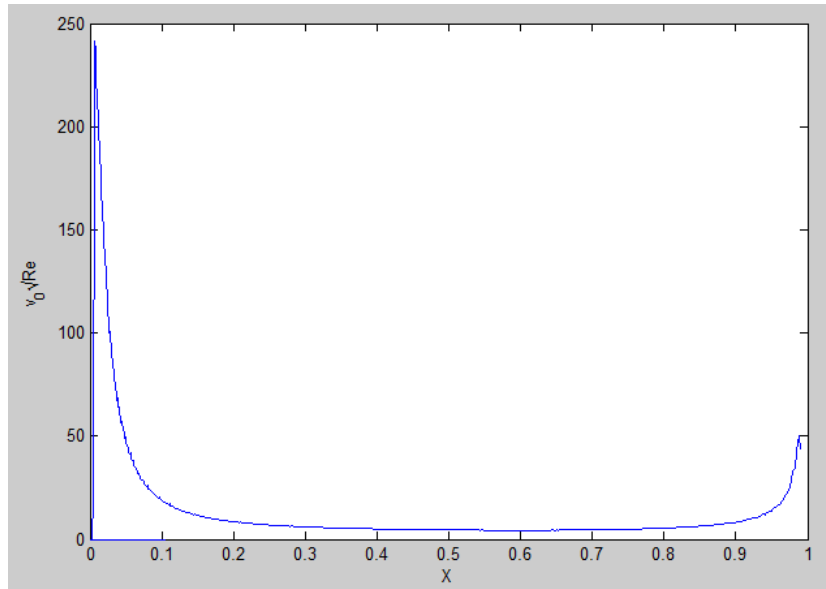


**Imagen 13: Esfuerzo de fricción obtenido para  $N_x=1001$  en un NACA0012 a un ángulo de ataque de  $20^\circ$  y  $Re=105$**

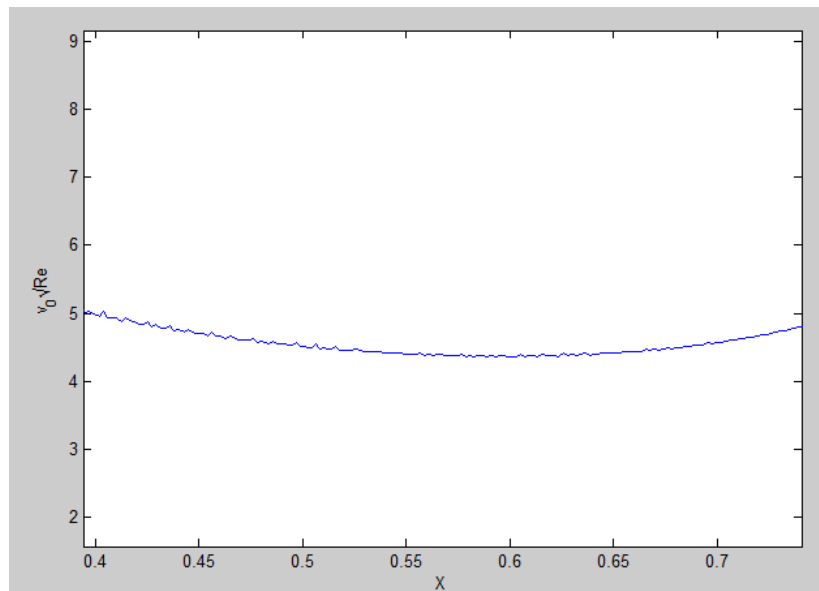
Analizando en mayor detalle la zona central se comprueba que  $\tau$  adquiere un valor cercano a cero, que sería el deseado, pero que en ningún caso llega a alcanzarlo. Para lograrlo, teniendo en cuenta las simplificaciones realizadas será necesario refinar más el mallado.



En cuanto a la succión aplicada, se tiene una distribución muy parecida a la del esfuerzo sobre la pared. De ella se puede deducir que resulta bastante razonable el aplicar una succión uniforme sobre la mayor parte del perfil para evitar la separación de la capa límite.



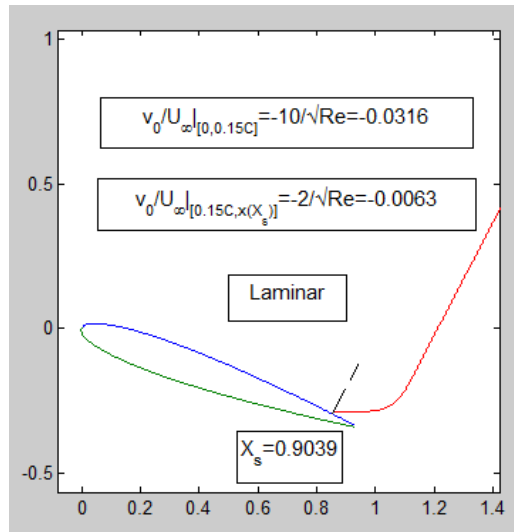
**Imagen 14: Succión aplicada para evitar el desprendimiento para Nx=1001 en un NACA0012 a un ángulo de ataque de 20° y Re=105**



Ampliando la imagen en su parte central se comprueba que dicho valor constante de la succión necesaria para que la capa límite no se desprenda se encuentra entre  $v_0 = -4/\sqrt{Re}$  y  $v_0 = -5/\sqrt{Re}$ .



Recordando los valores que se tenían para este caso en el apartado 7.3:



Se comprueba que los valores obtenidos son del mismo orden pero que quizás, con este mallado se sobreestima la succión necesaria para que  $\tau = 0$ .

Probando ahora con  $N_x=4501$  la corriente sí se desprende aunque permanece adherida más tiempo que en caso de no aplicar succión.

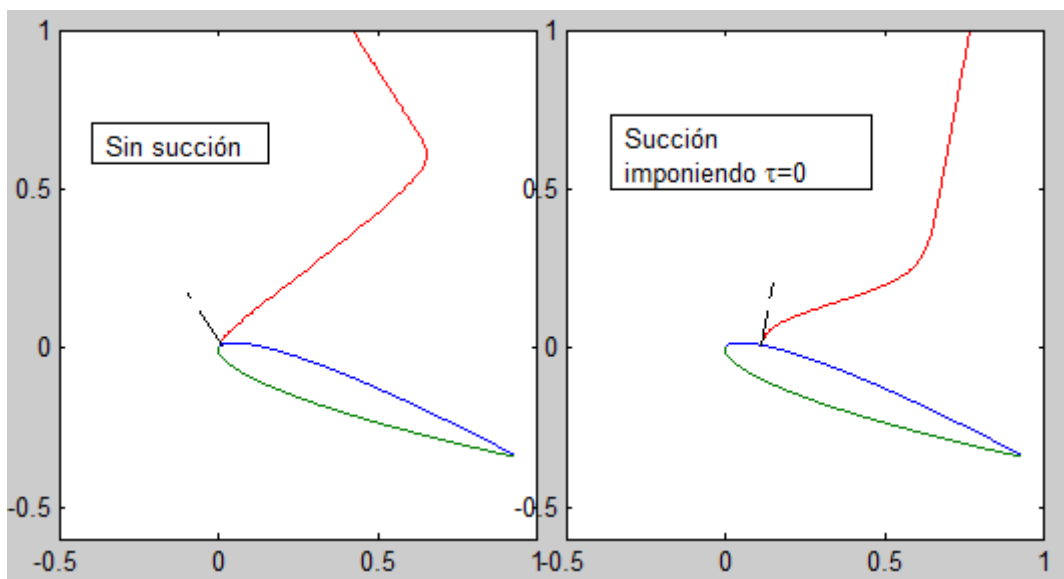


Imagen 15: Prueba realizada con  $N_x=4501$  imponiendo que el esfuerzo sobre la pared sea nulo sobre todo el extradós

En realidad, es razonable que la capa límite se separe ya que si realmente se aplicase la  $v_0$  necesaria para que  $\tau = 0$ , cualquier error en el cálculo de dicha  $v_0$  podría hacer  $\tau < 0$  y que con ello se produzca la separación de la capa límite.

Una posible solución para corregir esta “inestabilidad” es imponer un valor de  $\tau$  de manera que además se podría controlar la resistencia de fricción que tendría el perfil. Para ello, es necesario añadir un término a (9.17):

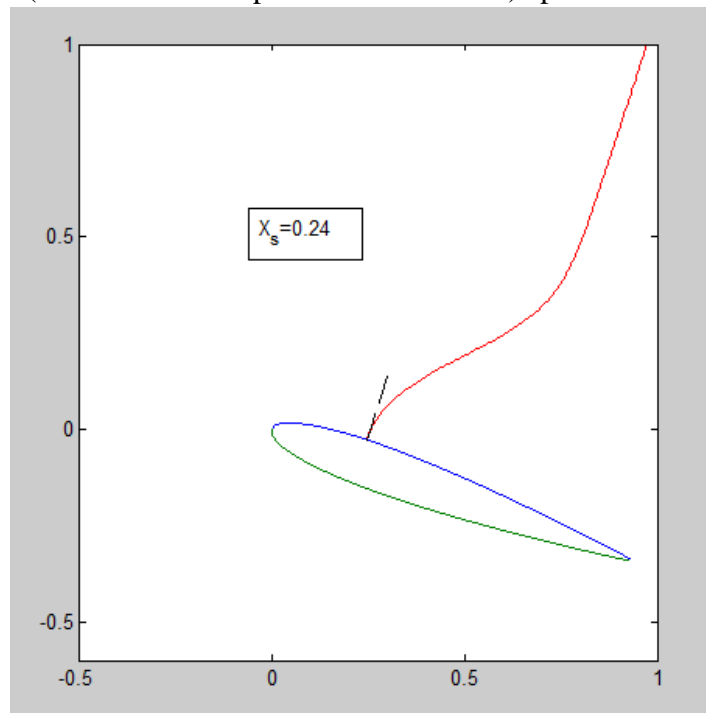
$$\widehat{v}_0 = \frac{\partial \widehat{u}_e}{\partial \widehat{x}} [\widehat{\delta}_1 + 2\widehat{\delta}_2] + \widehat{u}_e \frac{\partial \widehat{\delta}_2}{\partial \widehat{x}} - \frac{\tau_p}{\rho \widehat{u}_e} \quad (9.19)$$

Que en variables adimensionales sería

$$v_0 = \frac{\partial u_e}{\partial x} [\delta_1 + 2\delta_2] + u_e \frac{\partial \delta_2}{\partial x} - \frac{1}{\text{Re} \cdot u_e} \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=0} \quad (9.20)$$

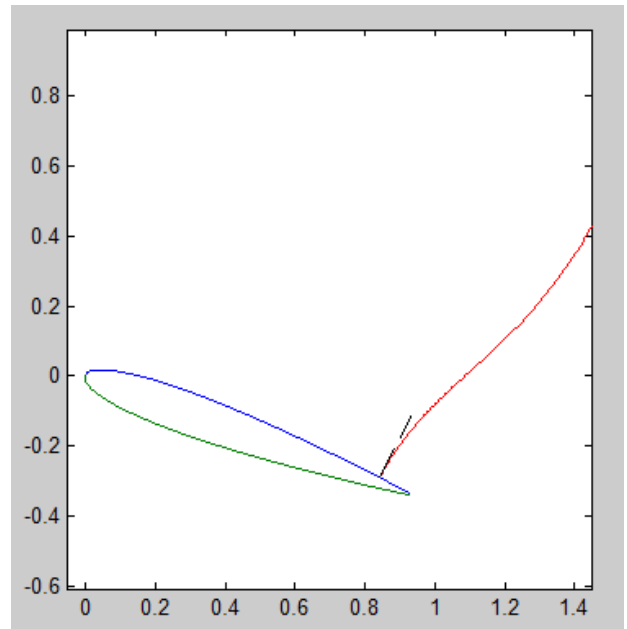
Teniendo en cuenta la zona más crítica para que la corriente se desprenda es el borde de ataque se puede hacer un caso en el que se imponga un  $\tau > 0$ , por ejemplo  $\tau = 0.15$ , en un intervalo del 15% de la cuerda (como en los apartados anteriores) para a continuación establecer  $\tau = 0$ .

El resultado es que la corriente permanece adherida durante el tramo de  $\tau = 0.15$  para desprenderse poco después. Por tanto, para que la capa límite no se separe hasta el borde de salida será necesario imponer un  $\tau > 0$  sobre toda la superficie del extradós.



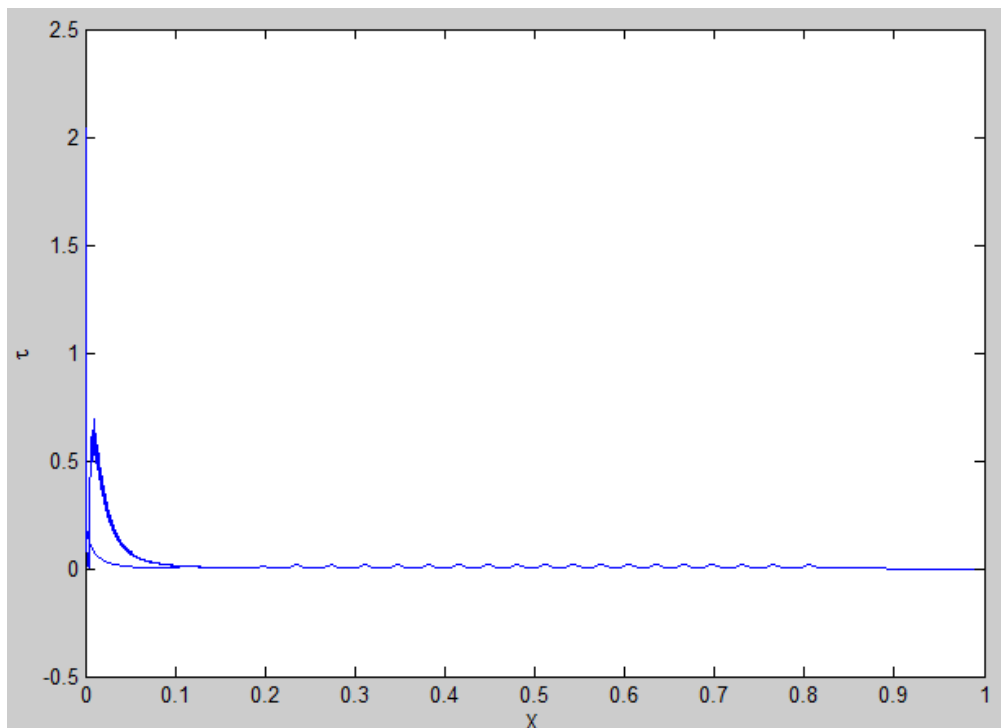
**Imagen 16: Prueba realizada imponiendo un esfuerzo sobre la pared mayor que cero en el borde de ataque y nulo en el resto del extradós**

Estableciendo ahora  $\tau = 0.02$  sobre todo el extradós se obtiene que la corriente permanece adherida hasta prácticamente el borde de salida.



**Imagen 17: Resultado obtenido para  $N_x=4501$  imponiendo un esfuerzo cercano a cero sobre todo el extradós**

Fijándonos ahora en el esfuerzo sobre la pared y en la succión aplicada se observa que, a diferencia de con  $N_x=1001$  donde se obtenían distribuciones muy suaves, aquí aparecen “picos”.



**Imagen 18: Esfuerzo sobre la pared obtenido en el caso en el que  $N_x=4501$  y se impone un esfuerzo de fricción de 0.02**

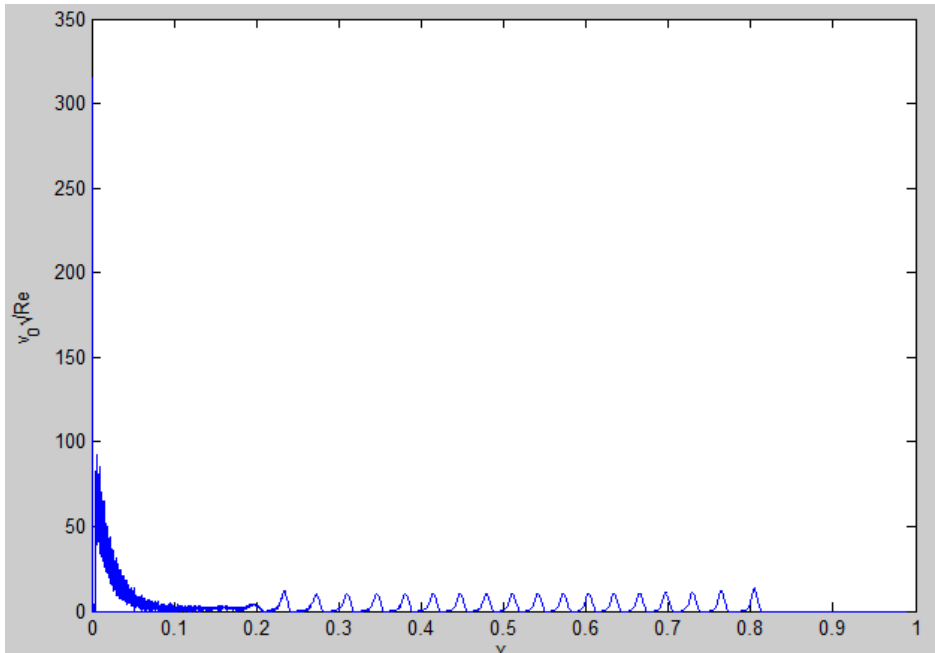
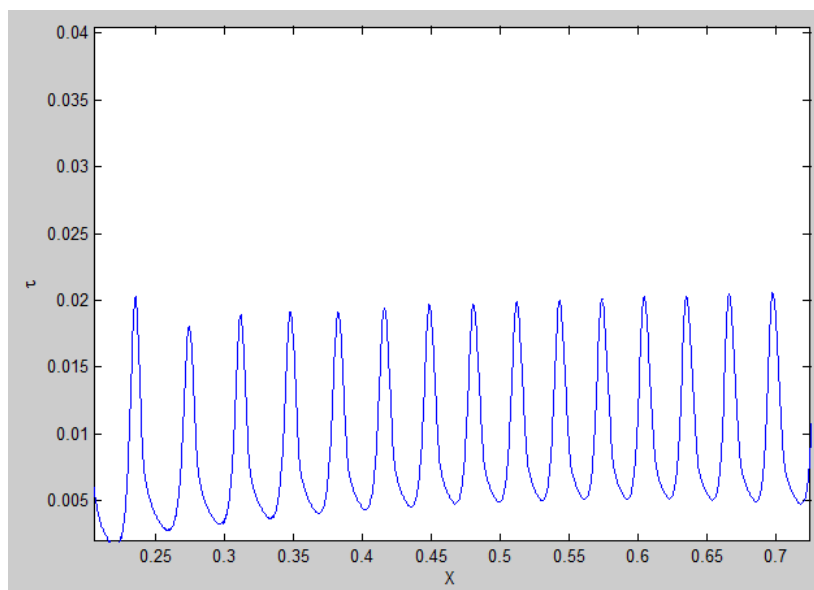
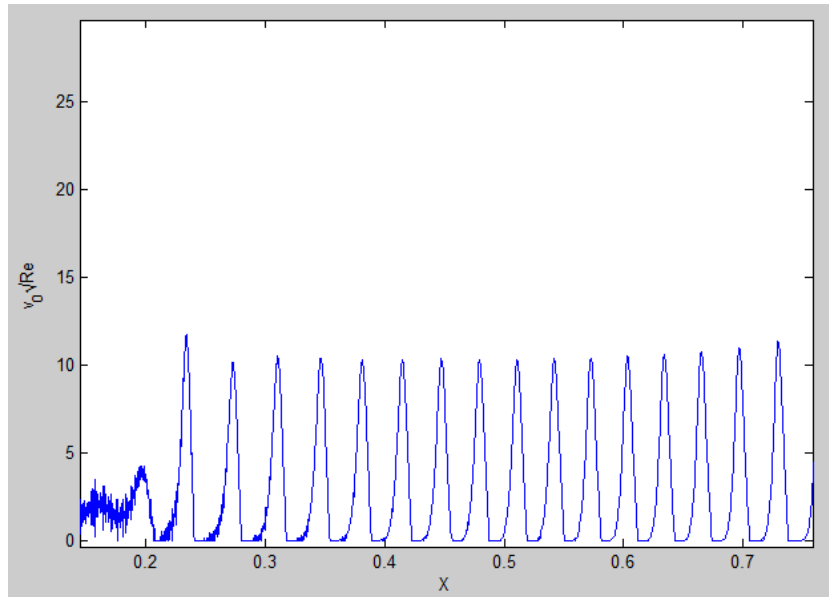


Imagen 19: Succión aplicada para tratar de obtener el esfuerzo de fricción impuesto

Ampliando ambas imágenes en la zona donde se encuentran esos picos se puede apreciar cómo están directamente relacionados: al aumentar la succión el perfil se pega más a la pared y aumenta  $\tau$ .

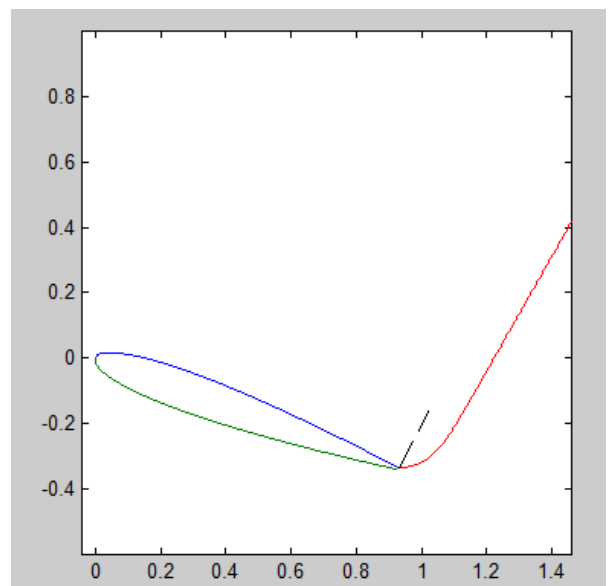
Además, permite deducir el por qué de estos picos: cuando el esfuerzo sobre la pared iguala al deseado, es decir,  $\tau = 0.02$ , el cálculo de la  $v_0$  necesaria da un valor positivo y, como se ha dicho que en ese supuesto se impone  $v_0 = 0$  para no favorecer el desprendimiento, la succión se anula y  $\tau$  empieza a disminuir hasta que llega un punto en el que se da un incremento importante a la  $v_0$  necesaria para que  $\tau = 0.02$ .



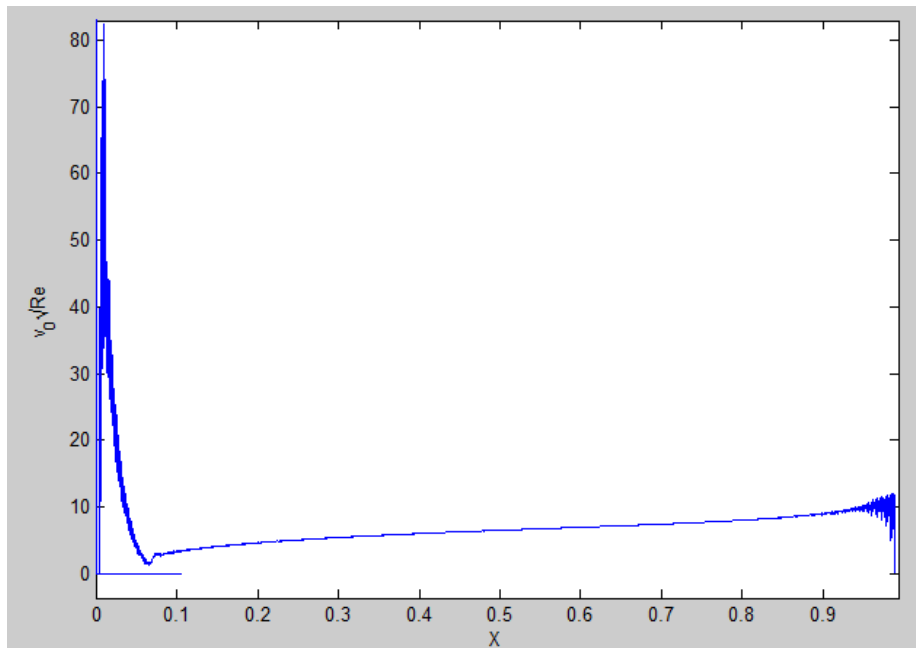


Si se introduce ahora la turbulencia en este mismo caso se comprueba que el punto de desprendimiento se retrasa ligeramente.

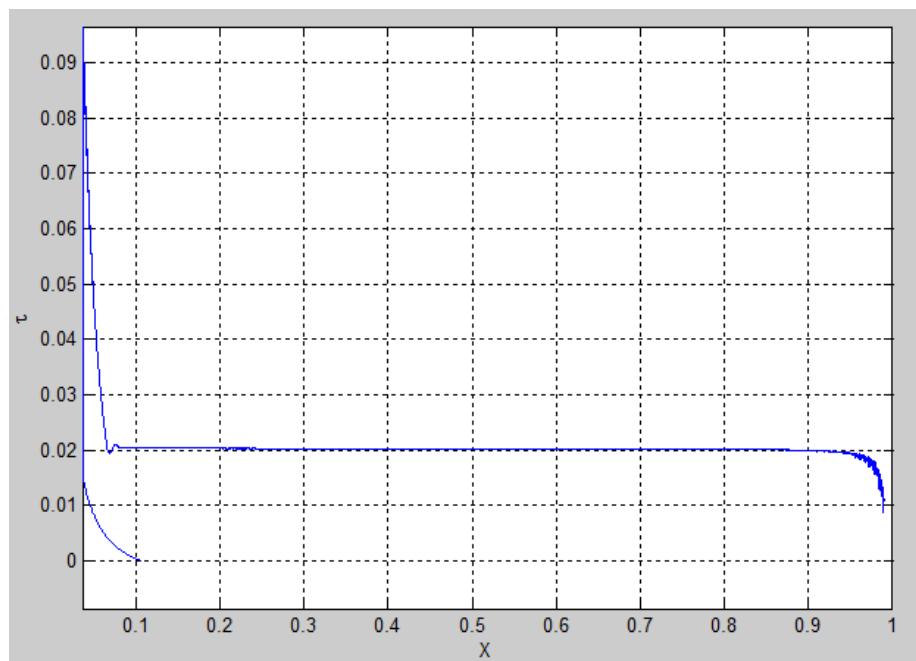
En cuanto a la succión aplicada y al esfuerzo sobre la pared obtenido el resultado es una distribución mucho más suave que en el caso laminar, excepto en la zona del borde de ataque: la succión aplicada aumenta suavemente desde un mínimo hasta el borde de salida mientras que  $\tau$  se mantiene prácticamente constante en un valor que resulta ser casi exactamente el deseado. Por tanto, se puede decir que este mallado es lo suficientemente fino como para obtener el esfuerzo sobre la pared que queremos en la mayor parte del perfil.



**Imagen 20: Resultado obtenido al reproducir el caso anterior pero con la adición del efecto de la turbulencia**



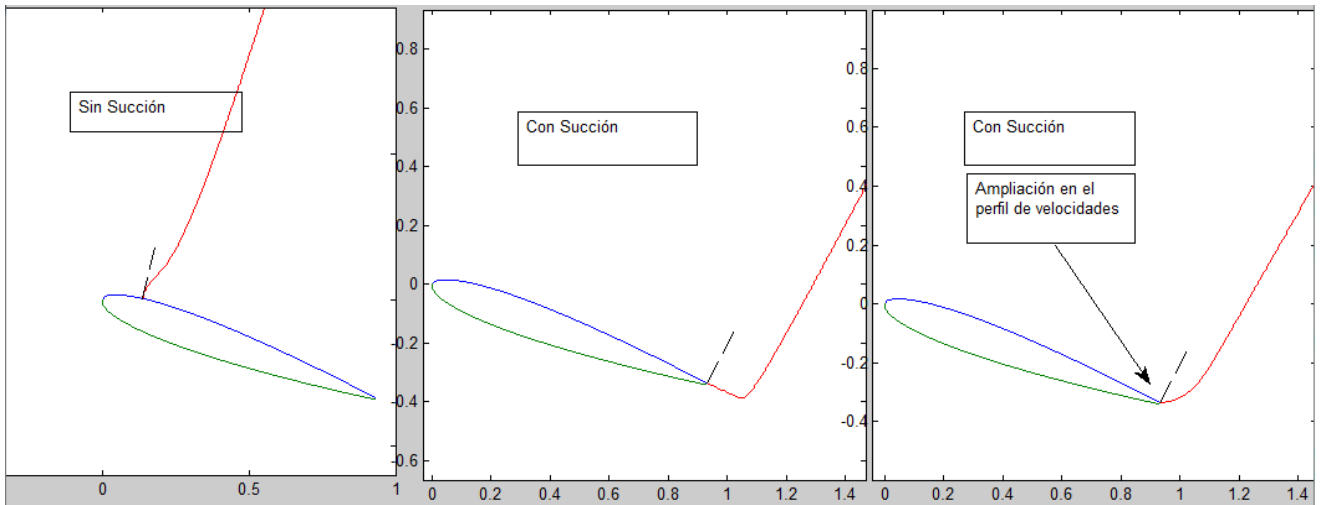
**Imagen 21: Succión aplicada al considerar la turbulencia**



**Imagen 22: Esfuerzo de fricción obtenido al considerar la turbulencia**

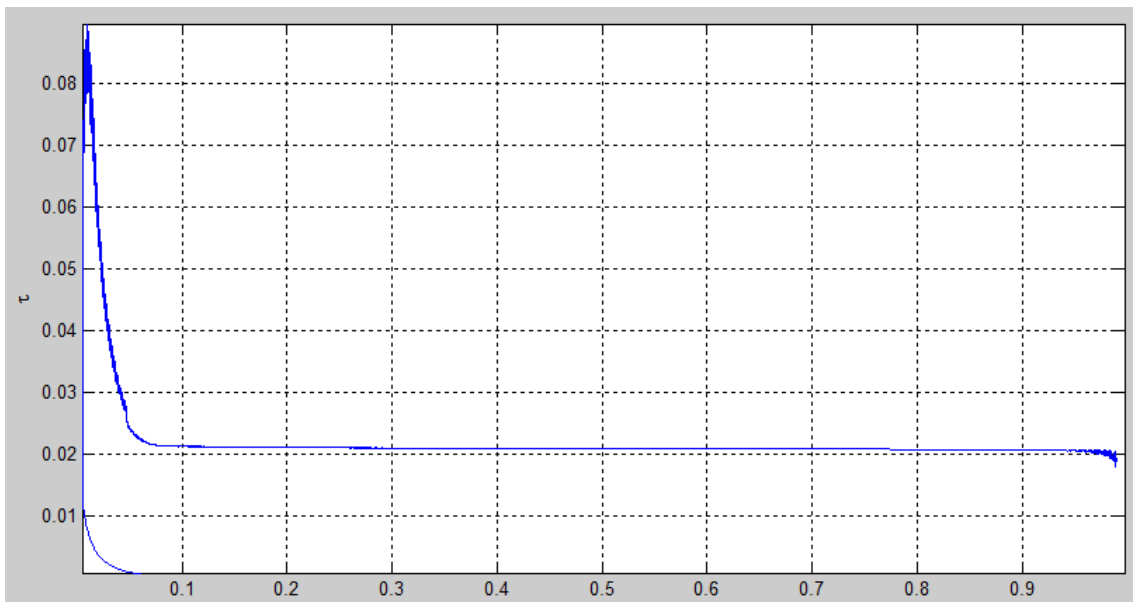
Repitiendo ahora los cálculos para un número de Reynolds de  $10^7$ , donde la turbulencia se hace más importante, de nuevo se obtiene que la corriente no se desprende hasta el borde de salida. Cabe destacar que la curvatura del perfil de velocidades aumenta considerablemente y por ello, para apreciar bien la forma de la capa límite es necesario

ampliar 10 veces la imagen. Esta diferencia se puede apreciar entre la segunda y la tercera imagen, que son en realidad el mismo perfil de velocidades.



**Imagen 23: Resultados obtenidos al aplicar la succión necesaria para que la corriente no se desprenda con  $Re=10^7$**

De nuevo, a excepción de la zona del borde de ataque, se obtiene un valor del esfuerzo sobre la pared del perfil muy cercano al deseado y prácticamente constante que requiere ir aumentando la succión progresivamente para lograrlo.



**Imagen 24: Esfuerzo sobre la pared obtenido con  $Re=10^7$**

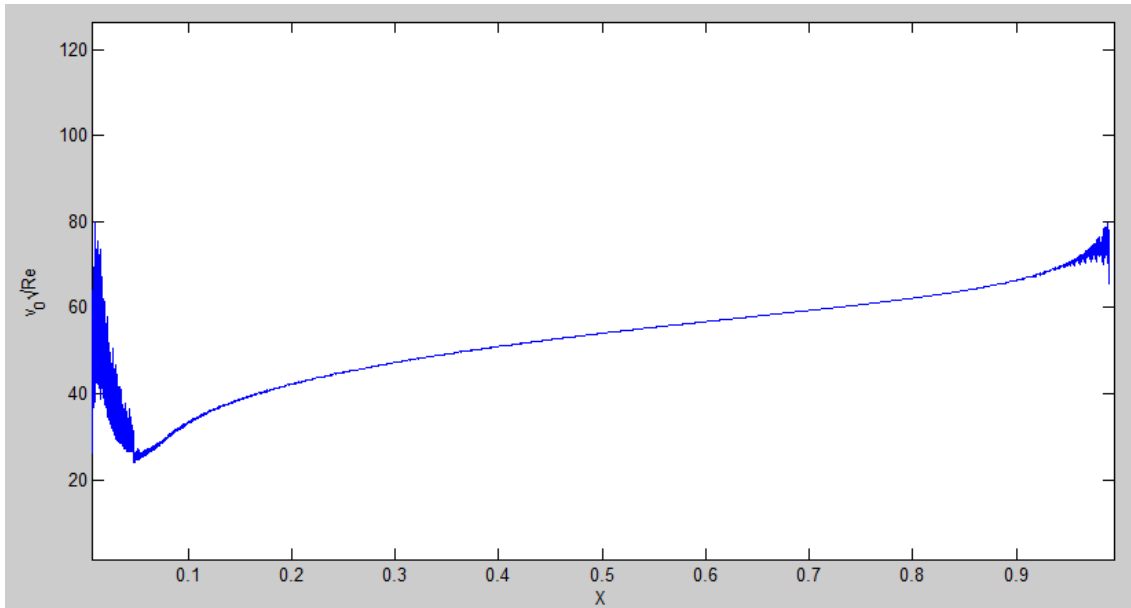


Imagen 25: Succión necesaria para lograr el esfuerzo sobre la pared impuesto con  $Re=10^7$

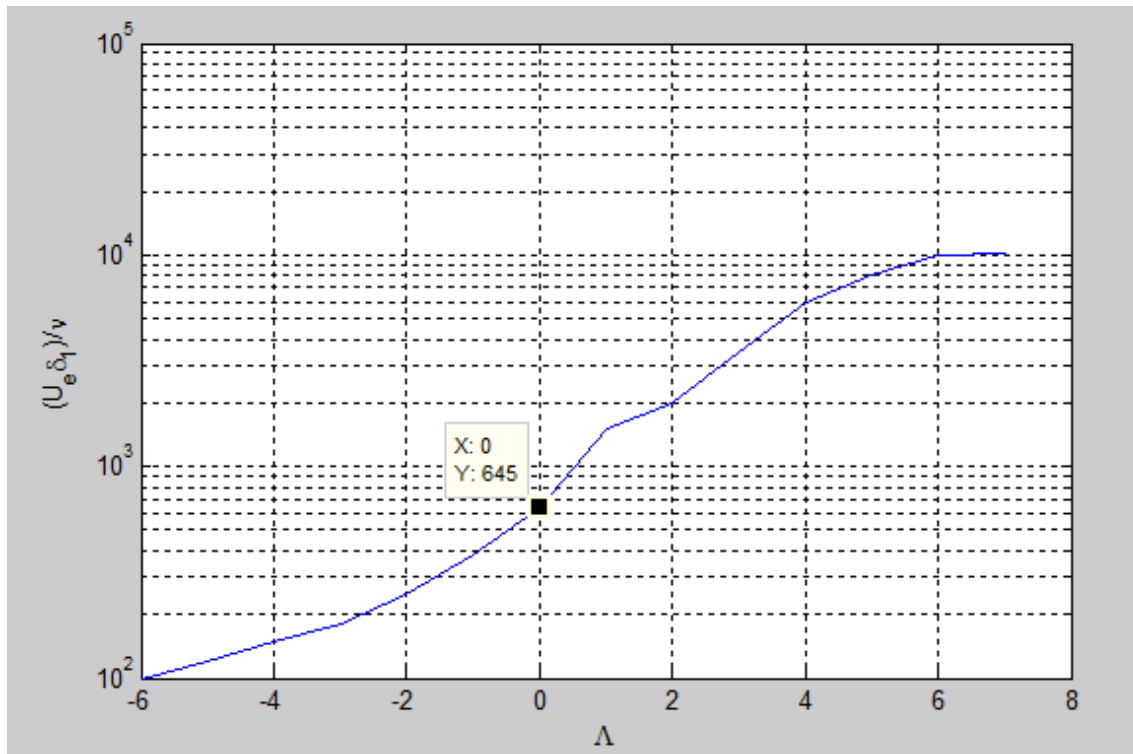
## 9.6 Aplicación de la succión para retrasar la transición a la turbulencia

En el apartado anterior lo que se ha hecho en cada punto  $x$  es que partiendo de (9.20) y fijando  $\delta_1$  y  $\delta_2$  con los valores que se han dado en el punto anterior del mallado, se puede calcular la  $v_0$  que proporcione el esfuerzo sobre la pared que se quiera imponer.

En caso de querer mantener el perfil laminar, hay que tener en cuenta que el criterio de Pohlhausen se basa en el valor de  $\delta_1$ , por lo que se podría seguir la misma filosofía que para fijar  $\tau$ , es decir, calcular  $v_0$  mediante (9.20) con los valores de  $\delta_2$  y  $\left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y=0}$  correspondientes al punto anterior del mallado e impongo el  $\delta_1$  que quiero tener, que será el adecuado para que no se produzca la transición a la turbulencia.



Como primera intuición se podría pensar que simplemente aplicando un valor muy alto de succión se puede evitar la transición a la turbulencia ya que se reduce mucho el espesor de la capa límite y por tanto  $\delta_1$ . Sin embargo, atendiendo a la fórmula de  $\Lambda = \text{Re} \delta \frac{\partial U_e}{\partial x}$  y recordando la gráfica que corrige el criterio de Pohlhausen ante gradiente de presiones:



Es fácilmente deducible que una capa límite muy estrecha hace tender  $\Lambda$  a cero, con lo cual, independientemente de si el gradiente es adverso o favorable, se tendería a tener el criterio de Pohlhausen para placa plana, que en una región con gradiente favorable implica que la transición a la turbulencia se produce a un valor de  $\frac{\hat{u}_e \hat{\delta}_1}{\nu}$  menor.

En caso de encontrarnos en el borde de ataque, donde se tiene un gradiente de presiones favorable y una velocidad exterior muy grande, si el espesor de la capa límite es pequeño el  $\delta_1$  permitido para que nos encontremos en régimen laminar disminuye drásticamente.

A continuación, se muestran varias imágenes en las que se comprueba cómo una succión demasiado grande adelanta la transición a la turbulencia en el borde de ataque, todas ellas se han tomado para un NACA0018 con un ángulo de ataque de  $5^\circ$  y  $Re = 10^7$ .

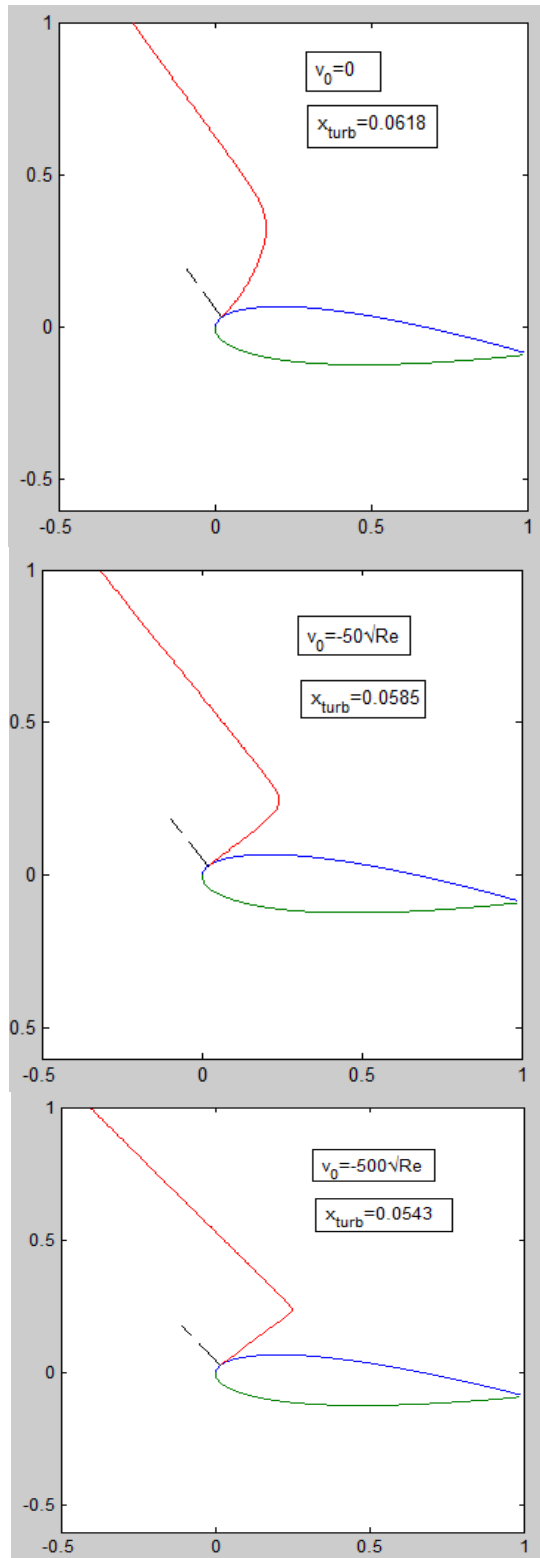


Tabla 35: Demostración de cómo una succión excesiva puede adelantar la transición a la turbulencia si ésta se produce en una región con gradiente favorable de presiones

Este hecho se produce cuando la transición a la turbulencia se da en un lugar con gradiente favorable de presiones, como ocurre en los tres ejemplos anteriores:

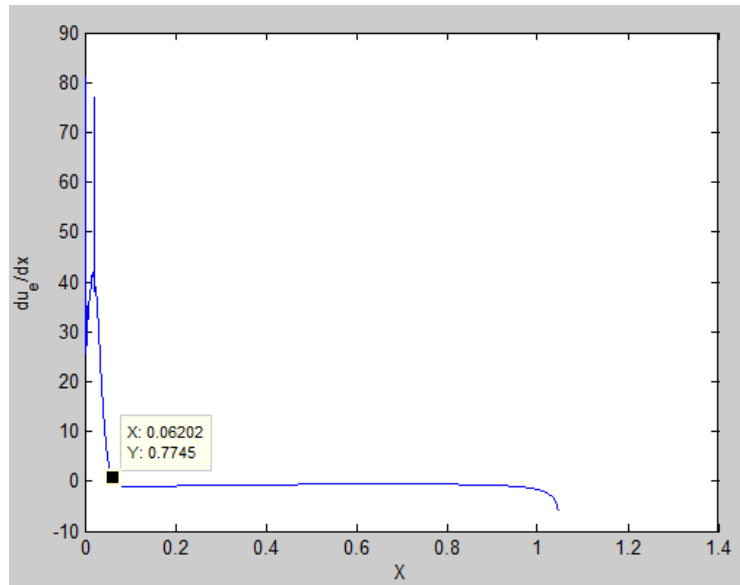


Imagen 26: Variación de la velocidad exterior para un NACA0018 con  $\alpha=5^\circ$  y  $Re=10^7$

En cambio, si se sigue el mismo razonamiento, cuanto menor sea el espesor de la capa límite en una región con gradiente adverso más tarde se producirá la transición a la turbulencia. Probando para el mismo caso de antes pero con  $Re = 10^6$ , donde se puede comprobar que la transición a la turbulencia se produce en una región con gradiente adverso de presiones:

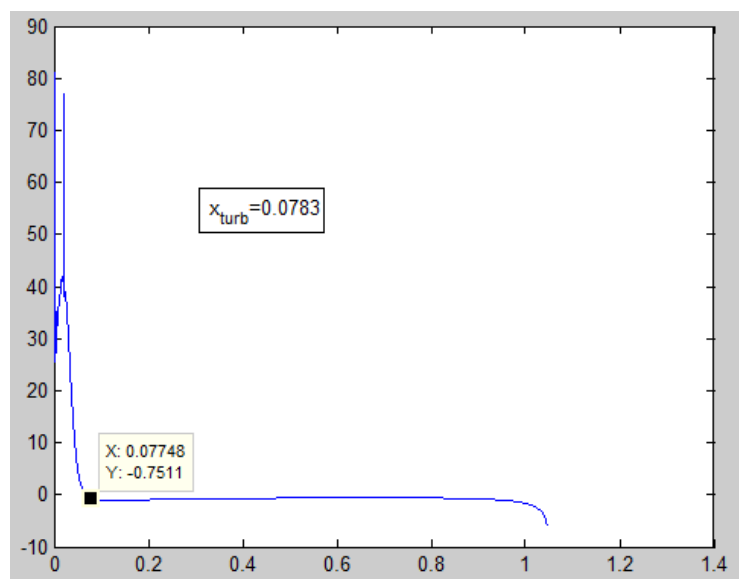


Imagen 27: Variación de la velocidad exterior para un NACA0018 con  $\alpha=5^\circ$  y  $Re=10^6$

Al aplicar una succión uniforme desde el borde de ataque hasta  $x=0.2$  con valor  $v_0 = -100\sqrt{\text{Re}}$  el punto de transición a la turbulencia se retrasa hasta  $x=0.2309$ .

Por tanto, como conclusión se puede decir que si la transición a la turbulencia se produce en una región con gradiente favorable el valor de  $v_0$  que se debe aplicar tendrá que ser estudiado con detenimiento mientras que, en caso de que la transición se produzca en una región con gradiente adverso, para aumentar el porcentaje de capa límite laminar en el perfil tan solo hay que aumentar el valor de la succión aplicada.

Sin embargo, como ya se mostró en apartados anteriores, una  $v_0$  excesiva aumenta tanto el esfuerzo sobre la pared que, en lugar de reducir la resistencia por evitar la transición a la turbulencia, puede incluso aumentarla de forma considerable. Es por tanto de interés el aplicar el método descrito anteriormente porque implicaría aplicar la succión “justa” como para evitar que se produzca la transición a la turbulencia, por lo que se conseguiría minimizar la resistencia de fricción del perfil.

A la hora de aplicar este método, se ha comprobado que en la zona con gradiente favorable -donde se producen variaciones más bruscas- hay que tratar de fijar el espesor de desplazamiento para el caso más desfavorable posible, es decir, que el criterio de transición a la turbulencia sea  $u_e \text{Re} \delta_1 = 600$  para tener un cierto margen respecto al caso más restrictivo, que sería con  $\delta_1 = \frac{645}{u_e \text{Re}}$ .

Por otro lado, en la zona con gradiente favorable lo que se ha hecho es multiplicar por un factor de 0.9 el valor del  $u_e \text{Re} \delta_1$  para el que se produce la turbulencia en ese punto según la criterio que se ha explicado anteriormente.

El código a implementar en el cálculo de  $v_0$  es el siguiente

```

if xv(n)>=suc1 && xv(n)<=suc2 && Succion==1
    if uedot(n)>0 %Si hay gradiente favorable se aplica la succion adecuada
        delta1_deseado(n)=600/Re/ue(n);
        if delta1(n)>delta1_deseado(n)
            delta2_deseado=trapz(yv,(1-(unm1/ue(n-1)).^2))-delta1_deseado(n); %MOMENTUM
            THICKNESS esperado con esa succion
        if delta2_deseado>delta2(n)
            delta2_deseado=delta2(n);
        end
        d2d(n)=delta2_deseado;
        ddelta2_dx(n)=(delta2_deseado-delta2(n))/(xv(n)-xv(n-1));
        v0=uedot(n)*(delta1_deseado(n)+2*delta2_deseado)+ue(n)*ddelta2_dx(n)-(un(2))/...
        (yv(2)-yv(1))/(Re*ue(n));
    else

```

```

v0=0;
end

else

delta1_deseado(n)=0.9*Re1turb/Re/ue(n);
if delta1(n)>delta1_deseado(n)
    delta2_deseado=trapz(yv,(1-(unm1/ue(n-1)).^2))-delta1_deseado(n); %MOMENTUM
    THICKNESS esperado con esa succion
if delta2_deseado>delta2(n)
    delta2_deseado=delta2(n);
end
d2d(n)=delta2_deseado;
ddelta2_dx(n)=(delta2_deseado-delta2(n))/(xv(n)-xv(n-1));
v0=uedot(n)*(delta1_deseado(n)+2*delta2_deseado)+ue(n)*ddelta2_dx(n)-(un(2))/...
(yv(2)-yv(1))/(Re*ue(n));
else
v0=0;
end

end

```

SuccionAplicada(n)=v0;

```

else
v0=0;
end
vnm1=v0-(Trap*dunm1x)';

```

%%%%%%%%%

Recordando las fórmulas de  $\delta_1$  y  $\delta_2$ :

$$\widehat{\delta}_1 \widehat{u}_e = \int_0^h (\widehat{u}_e - \widehat{u}) \partial \widehat{y}$$

$$\widehat{\delta}_2 \widehat{u}_e^2 = \int_0^h \widehat{u} (\widehat{u}_e - \widehat{u}) \partial \widehat{y}$$

Resulta evidente que si se impone un valor de  $\delta_1$  variará la forma del perfil de velocidades y también lo hará el valor de  $\delta_2$ , por ello, se ha tratado de tener en cuenta de alguna manera dicha variación en  $\delta_2$  de la siguiente forma:

Sabiendo que

$$\delta_2 = \int_0^h \frac{u}{u_e} \left( 1 - \frac{u}{u_e} \right) \partial y = \int_0^h \left( 1 - 1 + \frac{u}{u_e} - \left( \frac{u}{u_e} \right)^2 \right) \partial y = \int_0^h \left( 1 - \left( \frac{u}{u_e} \right)^2 \right) \partial y - \delta_1 \quad (9.21)$$

Se puede calcular el  $\delta_2$  impuesto a través del espesor de desplazamiento que queremos imponer y el perfil de velocidades de la estación anterior. Por tanto, se sigue teniendo una aproximación pero teniendo en cuenta ciertas variaciones en  $\delta_2$ .

Además, el imponer los valores comentados del espesor de desplazamiento sólo se va a aplicar cuando sea necesario reducir  $\delta_1$  para evitar la transición a la turbulencia. De este modo, sólo se aplica succión donde es necesario con el objetivo de evitar la transición pero minimizando todo lo posible la resistencia.

Por tanto, como siempre que se aplique succión será para disminuir  $\delta_1$ ,  $\delta_2$  también lo hará y es por esta razón por la que se ha impuesto que en caso de calcularse con (9.21) un  $\delta_2$  mayor al de la estación anterior se imponga el valor de dicha estación.

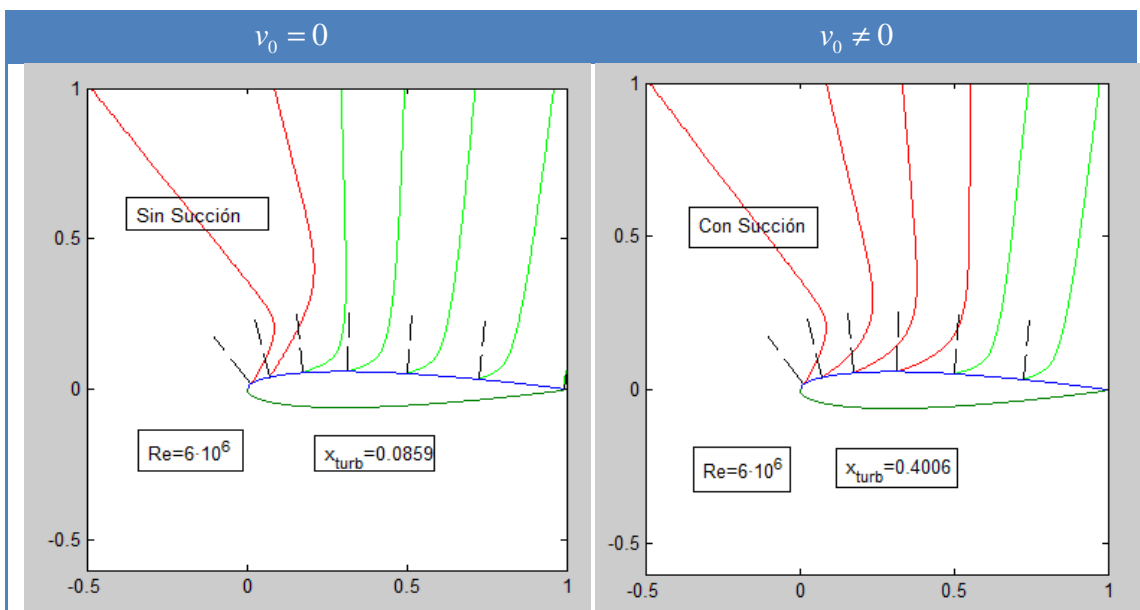
Se ha comprobado que en cada caso particular habrá que estudiar cual es el refinamiento mínimo de la malla que consigue que la capa límite permanezca laminar, pudiendo haber diferencias importantes entre unos casos y otros. Una opción para no refinar excesivamente el mallado, con el consiguiente coste computacional, es dar un margen mayor al valor de  $\delta_1$  respecto al que se produce la transición a la turbulencia.

### 9.6.1 Perfil Simétrico NACA0012

En un perfil simétrico la aplicación de la succión puede tener interés desde el punto de vista de disminuir la resistencia de fricción así como para aumentar la deflexión máxima del rudder, lo cual permitiría reducir la superficie del estabilizador vertical y con ello la resistencia. De hecho, como se mencionó en la introducción, esta posibilidad está siendo estudiada actualmente por Boeing conjuntamente con la NASA de cara a ser aplicada en sus futuras aeronaves.

Para hacer una simulación del perfil de un estabilizador vertical se va a tomar un NACA0012 a ángulo de ataque nulo para un valor característico del número de Reynolds como  $Re = 6 \cdot 10^6$ .

Se ha impuesto que el intervalo en el que se deberá mantener la capa límite laminar sea  $x \leq 0.4c$ , siendo necesario para conseguirlo que  $N_x = 7000$ . En la siguiente tabla se muestran imágenes con varios perfiles de velocidades a lo largo de la cuerda tanto para el caso con succión como para el caso en que  $v_0 = 0$ . Los perfiles en color rojo se corresponden con una capa límite laminar mientras que en verde sería cuando aparece la turbulencia.



**Imagen 28: Retraso del punto de transición a la turbulencia al aplicarse la succión calculada para tal efecto**

Como se puede comprobar, la capa límite laminar se mantiene durante todo el intervalo deseado y la transición a la turbulencia se produce prácticamente en el momento en que se anula la succión.

Para comprobar la validez del método, se van a mostrar una comparativa entre el espesor de desplazamiento obtenido y el impuesto como función de la posición en  $x$ .

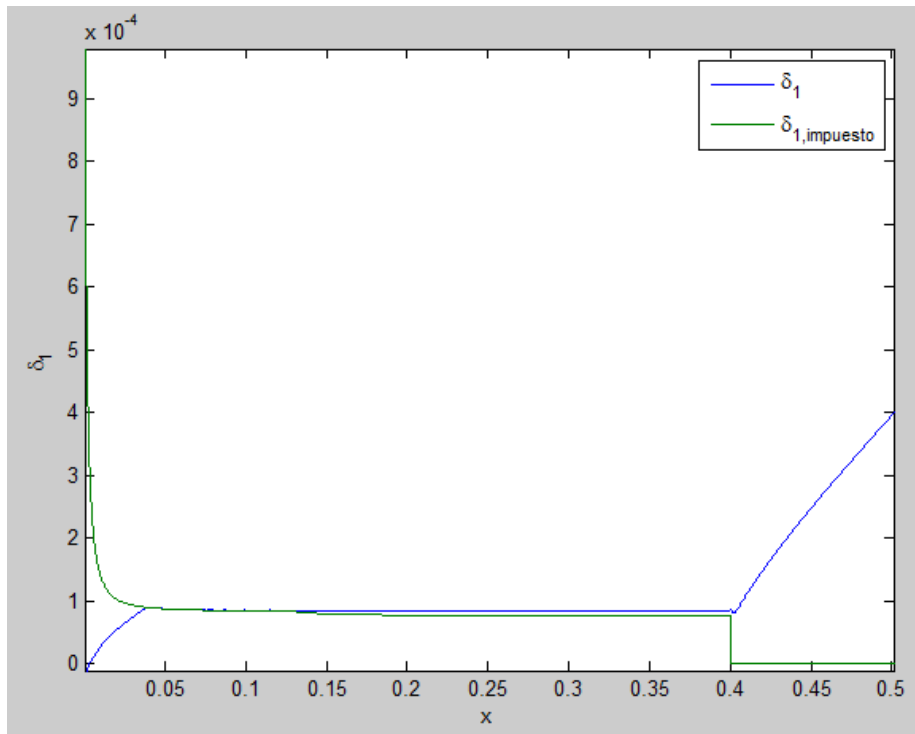


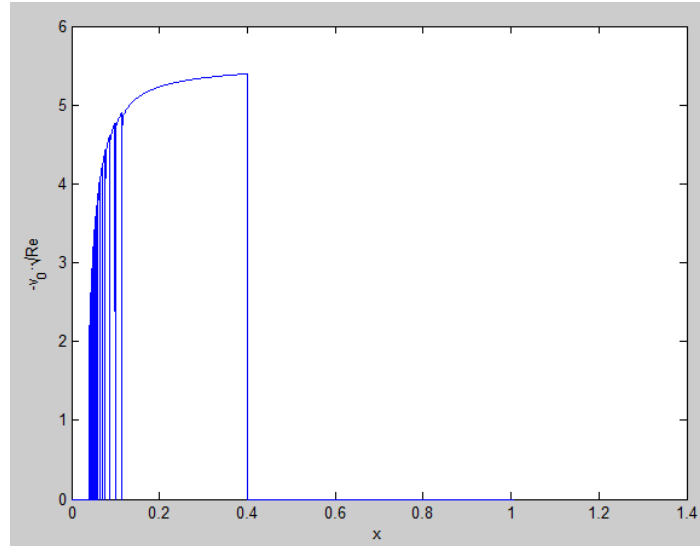
Imagen 29: Comparativa entre el perfil de desplazamiento impuesto y el obtenido

Debido al modo en el que se ha aplicado la succión, el espesor de desplazamiento no empieza a seguir al impuesto hasta que coinciden. Se puede observar que conforme se avanza por el extradós la diferencia entre ambos valores va aumentando ligeramente pero siempre permaneciendo el valor del espesor de desplazamiento muy cercano al deseado, asegurando así que no se va a producir la transición a la turbulencia. Respecto a dicho error, ya se ha comentado antes que puede deberse a que no es posible conocer con exactitud el valor que tendrá  $\delta_2$  al aplicar la succión, sin embargo, se ha comprobado que si el mallado es suficientemente fino los errores son pequeños y el método funciona razonablemente bien.

En cuanto a la succión aplicada, se obtienen valores ligeramente crecientes al avanzar sobre el extradós, por lo que de cara a aplicar una succión uniforme -por su mayor simplicidad- se podría escoger el valor más alto obtenido,  $v_0 = -5.4\sqrt{Re}$ , y se estaría empleando prácticamente el valor mínimo de la succión para que no se produzca la transición a la turbulencia en el intervalo considerado.

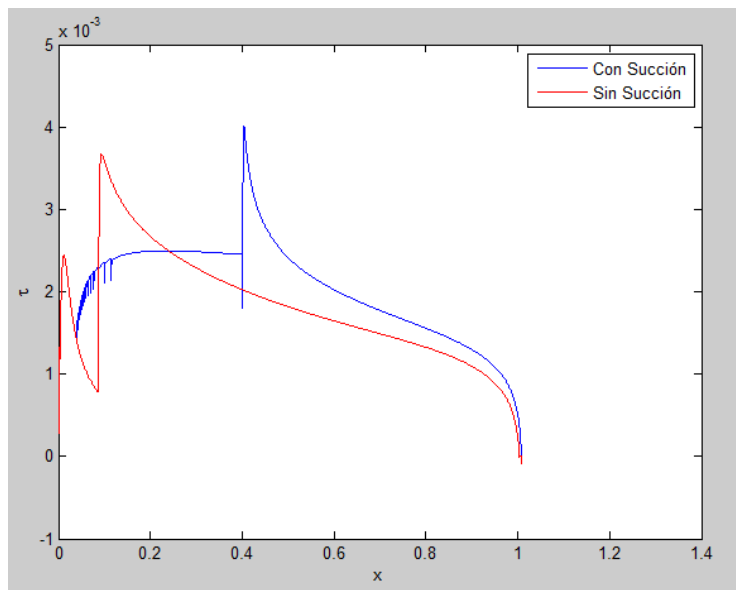


Cabe señalar que en la región con gradiente favorable la succión aplicada se realiza mediante pulsos rectangulares –se aplica un cierto valor de  $v_0$  para a continuación hacer  $v_0 = 0$ - mientras que en la región con gradiente adverso se obtiene una succión mucho más suave. Todo esto se debe a que cuando el espesor de desplazamiento es menor que el impuesto se anula la succión para no incrementar la fricción sobre la pared.



**Imagen 30: Succión aplicada como función de la coordenada sobre el perfil**

Comparando ahora el esfuerzo de fricción en ambos casos se puede comprobar que mientras se aplica la succión  $\tau$  permanece prácticamente constante y llega un momento en el que se tendría un menor valor de  $\tau$  en el caso turbulento que en el laminar.



**Imagen 31: Comparativa entre los esfuerzos de fricción que se dan con y sin la succión aplicada para mantener la capa límite laminar**

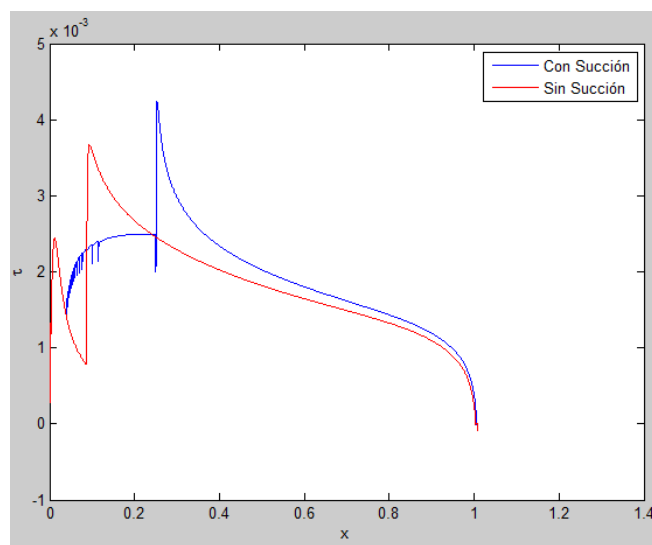
Integrando  $\tau$  a lo largo de  $x$  se obtiene:

$$C_{Df,Laminar} = 0.0042$$

$$C_{Df,Turbulento} = 0.0036$$

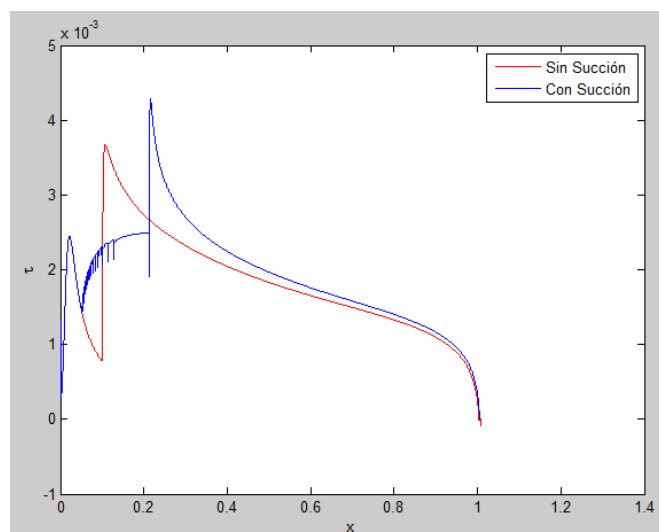
Se tiene por tanto que la resistencia, en lugar de disminuir por haber aumentado el porcentaje de perfil laminar, se incrementa al aplicar la succión. Observando la gráfica se intuye que si el intervalo de succión es el adecuado se podría lograr reducir algo la resistencia.

Aplicando ahora un intervalo de succión del 25% de la cuerda:



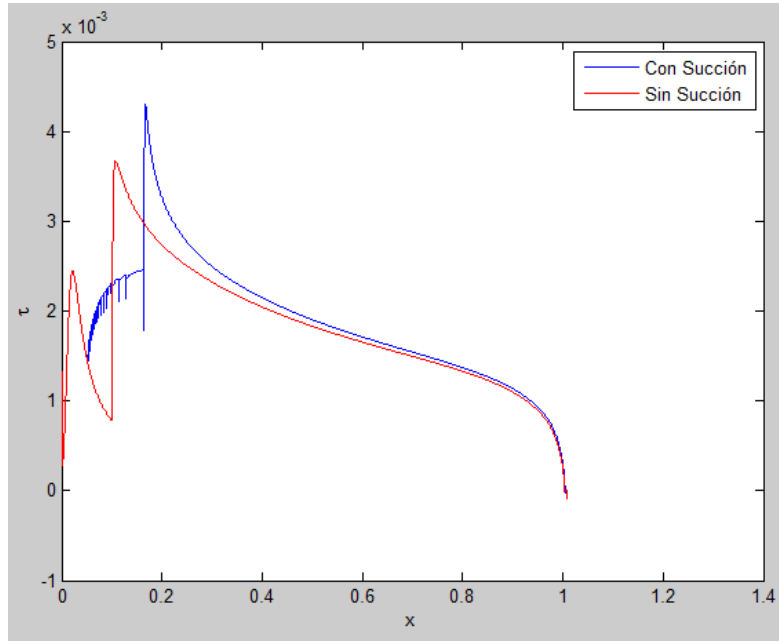
$$C_{Df,Laminar} = 0.004$$

Con el 20% laminar:



$$C_{Df,Laminar} = 0.0038$$

Con el 15% laminar:



$$C_{Df,Laminar} = 0.0038$$

Viendo los resultados, se puede decir que en ningún caso se va a mejorar a la resistencia que se tenía sin aplicar succión.

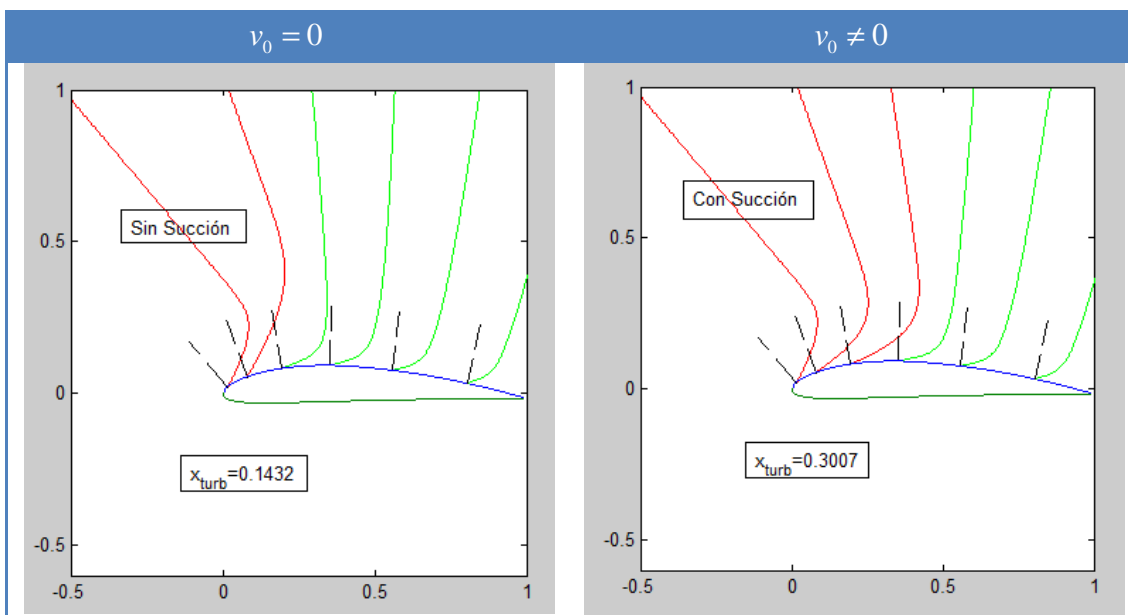
## 9.6.2 Perfil con curvatura NACA4412

Debido a la gran superficie que tienen las alas también podría resultar de interés aplicar la succión para tratar de reducir la resistencia de fricción retrasando la transición a la turbulencia.

Para estudiar este caso, será necesario modificar el programa para introducir perfiles con curvatura añadiendo al problema de espesor la ecuación de la cuerda media.

En este caso, para mantener la corriente laminar en un intervalo del 30% de la cuerda ha sido necesario hacer  $Nx=9000$  y reducir el espesor de desplazamiento impuesto con gradiente favorable a  $\delta_1 = \frac{500}{u_e Re}$

Repetiendo los cálculos realizados en el apartado anterior para un ángulo de ataque de  $1^\circ$ :



**Tabla 36: Retraso de la turbulencia para un perfil con curvatura NACA4412 con la aplicación de succión**

Comparando con un perfil simétrico de igual espesor, el NACA0012, el hecho de tener un perfil donde la corriente ve una mayor cantidad de cuerda con geometría convergente, es decir, con gradiente favorable de presiones, hace que la transición a la turbulencia se retrase.

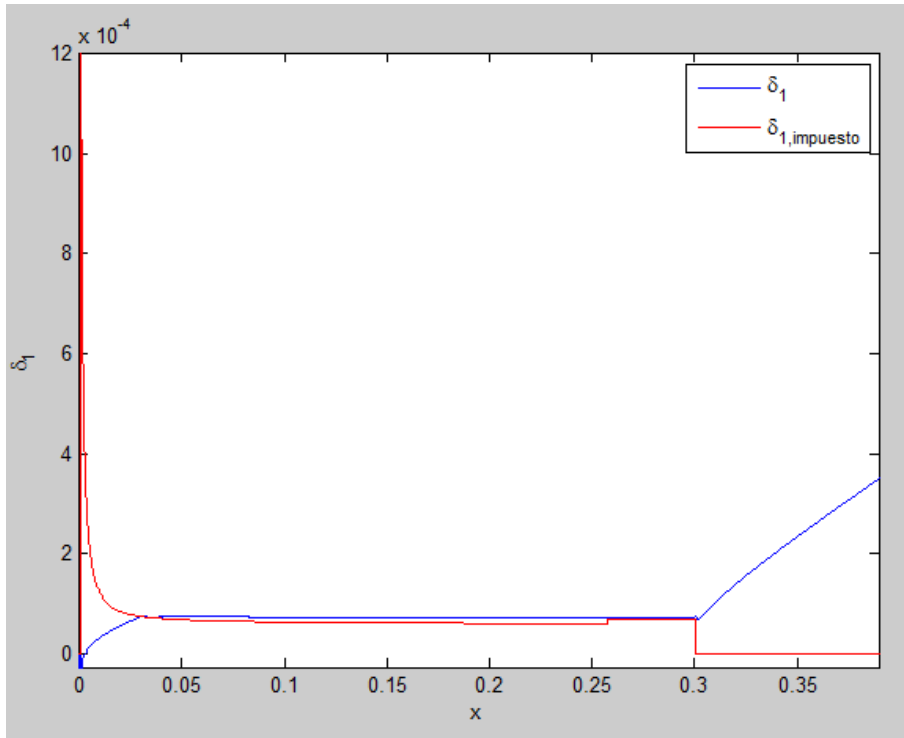


Imagen 32: Comparativa entre el espesor de desplazamiento obtenido y el impuesto

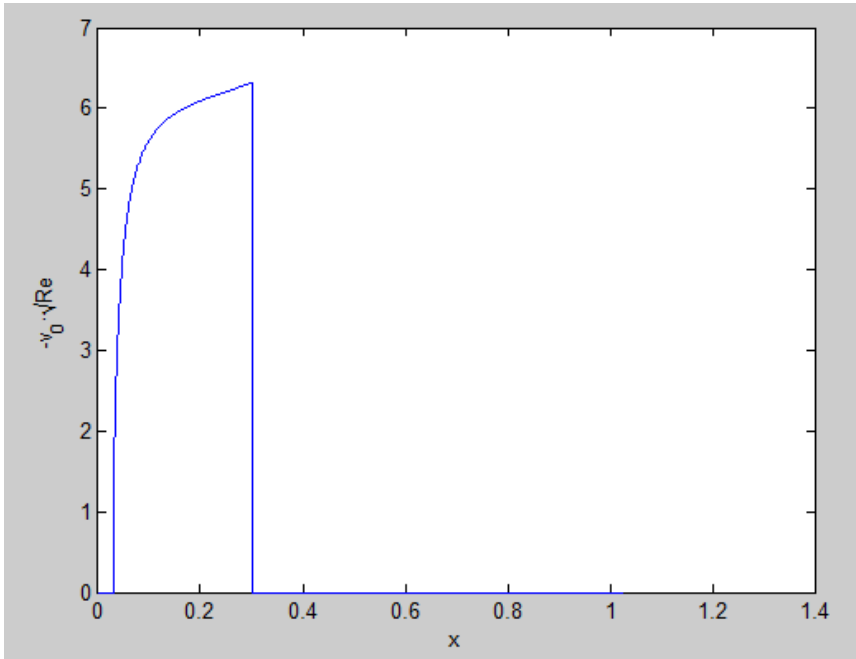
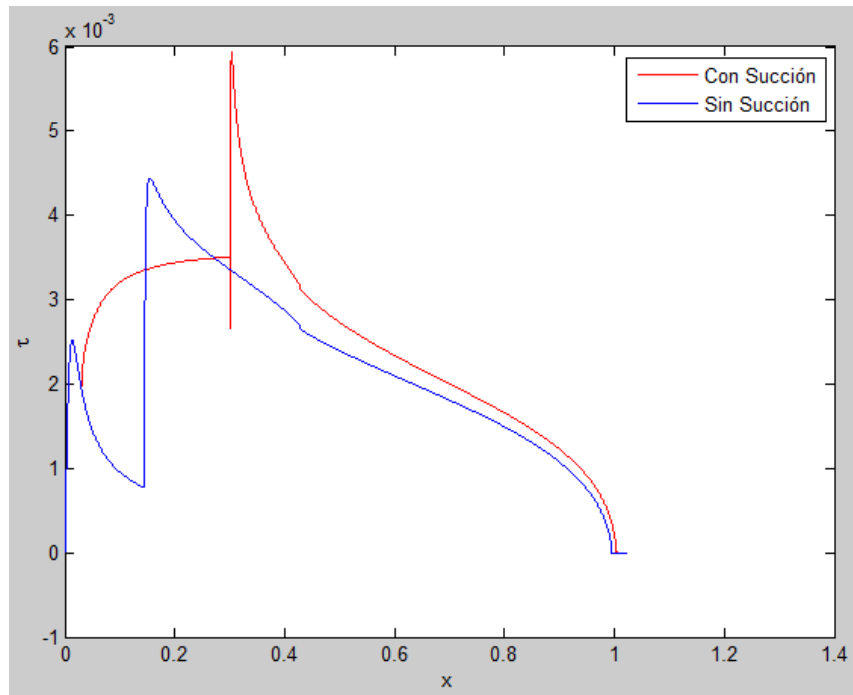


Imagen 33: Succión aplicada para mantener el flujo laminar durante un 30% de la cuerda



**Imagen 34: Comparativa entre el esfuerzo de fricción que se obtiene con y sin la adición de succión**

Integrando el esfuerzo sobre la pared:

$$C_{Df, Turbulento} = 0.0021$$

$$C_{Df, Laminar} = 0.0025$$

A la vista de los resultados, no se ha logrado disminuir la resistencia en este tipo de perfiles mediante el retraso de la transición a la turbulencia. Por tanto, a la hora de reducir la resistencia de fricción resulta más útil diseñar un perfil con una geometría que sea capaz de mantener la capa límite laminar durante un mayor porcentaje de la cuerda, como con el NACA4412 en comparación con el NACA0012, que añadir succión a un perfil cualquiera para retrasar la transición a la turbulencia.

## 10. Adaptación del Método de Líneas para corriente compresible

Debido a que las variaciones relativas de densidad son del orden de  $M_\infty^2$ , la aproximación incompresible sólo proporcionaría resultados aceptables para  $M_\infty < 0.3$ , por lo que su aplicación queda muy limitada a casos en los que la velocidad es pequeña. Por esta razón, para obtener resultados más realistas, se va a tratar de abordar el problema de capa límite compresible con la adición de succión.

Para tener un método de líneas con corriente compresible será necesario reformular las ecuaciones que se han empleado hasta ahora. Al no considerar a la densidad como una constante se tienen 3 incógnitas: densidad y velocidades según las direcciones  $x$  e  $y$ . Por tanto, ya no se puede desacoplar la ecuación de la energía -donde aparece como nueva incógnita la temperatura- por lo que para cerrar el problema será necesario considerar además la ecuación de los gases ideales, quedando así un sistema de 4 ecuaciones con 4 incógnitas que se deberá cumplir para todo punto del dominio fluido.

Ecuación de continuidad:

$$\frac{\partial(\hat{\rho}\hat{u})}{\partial\hat{x}} + \frac{\partial(\hat{\rho}\hat{v})}{\partial\hat{y}} = 0 \quad (10.1)$$

Ecuación de cantidad de movimiento:

$$\hat{\rho}\hat{u}\frac{\partial\hat{u}}{\partial\hat{x}} + \hat{\rho}\hat{v}\frac{\partial\hat{u}}{\partial\hat{y}} = -\frac{\partial\hat{P}}{\partial\hat{x}} + \frac{\partial}{\partial\hat{y}}\left(\mu\frac{\partial\hat{u}}{\partial\hat{y}}\right) \quad (10.2)$$

Ecuación de la energía:

$$\hat{\rho}C_p\hat{u}\frac{\partial\hat{T}}{\partial\hat{x}} + \hat{\rho}C_p\hat{v}\frac{\partial\hat{T}}{\partial\hat{y}} = -\hat{u}\frac{\partial\hat{P}_e}{\partial\hat{x}} + \frac{\partial}{\partial\hat{y}}\left(k\frac{\partial\hat{T}}{\partial\hat{y}}\right) + \mu\left(\frac{\partial\hat{u}}{\partial\hat{y}}\right)^2 \quad (10.3)$$

Ecuación de los gases ideales:

$$\frac{\hat{P}_e}{\hat{\rho}} = R_g\hat{T} \quad (10.4)$$

Como también se van a considerar a  $k$  y  $\mu$  como variables será necesario añadir otras dos ecuaciones

$$\hat{\mu} = \mu_{\infty} \left( \frac{\hat{T}}{T_{\infty}} \right)^w \left( \frac{T_{\infty} + S}{\hat{T} + S} \right)^{\sigma} \quad (10.5)$$

$$\hat{k} = \frac{\hat{\mu} C_p}{Pr} \quad (10.6)$$

Siendo  $Pr$  el número de Prandtl, que es una constante propia del fluido, mientras que  $w$ ,  $\sigma$  y  $S$  son parámetros que modelizan la variación de  $\hat{k}$  y  $\hat{\mu}$  y que dependerán también del tipo de fluido. En este caso, se ha tomado  $w=1.5$ ,  $\sigma=1$  y  $S=110/T_{\infty}$  como valores característicos.

De forma análoga al caso incompresible las ecuaciones se resolverán en variables adimensionales, para ello se realiza el siguiente cambio de variable:

$$\begin{aligned} \hat{u} &= U_{\infty} u, & \hat{v} &= U_{\infty} v \\ \hat{x} &= Lx, & \hat{y} &= Ly \\ \hat{U}_e &= U_{\infty} U_e, & \hat{P} &= P_{\infty} P \\ \hat{T} &= T_{\infty} T, & \hat{\rho} &= \rho_{\infty} \rho \\ \hat{\mu} &= \mu_{\infty} \mu, & \hat{k} &= k_{\infty} k \end{aligned} \quad (10.7)$$

Quedando las ecuaciones en variables adimensionales

Ecuación de continuidad:

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} = 0 \quad (10.8)$$

Ecuación de cantidad de movimiento:

$$\rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\gamma M_{\infty}^2} \frac{\partial P_e}{\partial x} + \frac{1}{Re_L} \frac{\partial}{\partial y} \left( \mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad (10.9)$$

Ecuación de la energía:

$$\rho u \frac{\partial T}{\partial x} + \rho v \frac{\partial T}{\partial y} = -\frac{\gamma-1}{\gamma} u \frac{\partial P_e}{\partial x} + \frac{1}{Re Pr} \frac{\partial}{\partial y} \left( k \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{M_{\infty}^2 (\gamma-1)}{Re} \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \quad (10.10)$$

Ecuación de los gases ideales:

$$\frac{P_e}{\rho} = T \quad (10.11)$$



Ecuaciones para  $\mu$  y  $k$ :

$$\mu = (T)^w \left( \frac{1 + \delta_1 / T_\infty}{T + \delta_1 / T_\infty} \right)^\sigma, \quad (10.12)$$

$$k = \mu$$

Además, para obtener la presión de la corriente exterior a la capa límite se puede considerar que el movimiento es isentrópico, por lo que se desprecia la viscosidad y la transmisión de calor en esa región:

$$\frac{\hat{u}_e^2}{2} + \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{\hat{P}_e}{\hat{\rho}} = \frac{u_\infty^2}{2} + \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{P_\infty}{\rho_\infty} \quad (10.13)$$

$$\frac{\hat{u}_e^2}{2} + \frac{1}{\gamma-1} \hat{a}^2 = \frac{u_\infty^2}{2} + \frac{1}{\gamma-1} a_\infty^2$$

Teniendo en cuenta que de las ecuaciones del movimiento isentrópico

$$\left( \frac{\hat{a}}{a_\infty} \right)^2 = \left( \frac{\hat{P}_e}{P_\infty} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \quad (10.14)$$

Sustituyendo y adimensionalizando

$$M_\infty^2 \frac{u_e^2}{2} + \frac{\gamma}{\gamma-1} P_e^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} = M_\infty^2 \frac{1}{2} + \frac{\gamma}{\gamma-1} \quad (10.15)$$

Y derivando con respecto de  $x$  se obtiene el término que se incluirá en la ecuación de cantidad de movimiento:

$$\frac{\partial P_e}{\partial x} = -M_\infty^2 \gamma \frac{u_e}{P_e^{-1/\gamma}} \frac{\partial u_e}{\partial x} \quad (10.16)$$

El método de paneles empleado hasta ahora es sólo válido para una corriente incompresible, sin embargo, se pueden extender de forma aproximada sus resultados mediante la Teoría Linealizada y la Analogía de Prandtl-Glauert teniendo en cuenta el siguiente cambio de variable:

$$x = X_i$$

$$z = \frac{Z_i}{\sqrt{1 - M_\infty^2}} \quad (10.17)$$

Donde  $X_i$  y  $Z_i$  son las coordenadas en el problema incompresible, es decir, el que se calcula mediante el método de paneles. Por tanto, si el perfil tiene un espesor  $t$ , en el método de paneles habrá que introducir:

$$t_i = t\sqrt{1-M_\infty^2} \quad (10.18)$$

Una vez obtenida la distribución de  $Cp_i$  en el problema incompresible se emplea la analogía de Prandtl-Glauert para obtenerlo en el caso compresible

$$Cp = \frac{Cp_i}{\sqrt{1-M_\infty^2}} \quad (10.19)$$

Aplicando la teoría linealizada se pueden obtener las magnitudes de perturbación, es decir, las variaciones que sufren las variables respecto a su valor en el infinito:

$$\begin{aligned} \hat{u}_e &= U_\infty + \hat{u}_e' = U_\infty \left(1 - \frac{Cp}{2}\right) \\ \hat{P}_e &= P_\infty + \hat{P}_e' = P_\infty - \rho_\infty U_\infty \hat{u}_e' = P_\infty \left(1 - \gamma \frac{U_\infty}{a_\infty^2} \hat{u}_e'\right) \\ \hat{\rho}_e &= \rho_\infty + \hat{\rho}_e' = \rho_\infty + \frac{\rho_\infty}{\gamma P_\infty} \hat{P}_e' = \rho_\infty \left(1 + \frac{1}{\gamma P_\infty} \hat{P}_e'\right) = \rho_\infty \left(1 - \frac{U_\infty}{a_\infty^2} \hat{u}_e'\right) \end{aligned} \quad (10.20)$$

Que en variables adimensionales sería

$$\begin{aligned} u_e &= 1 - \frac{Cp}{2} \\ P_e &= 1 - \gamma M_\infty^2 u_e' \\ \rho_e &= 1 - M_\infty^2 u_e' \end{aligned} \quad (10.21)$$

Y para obtener la temperatura de la corriente exterior en variables adimensionales se aplica la ecuación de los gases ideales

$$T_e = \frac{P_e}{\rho_e} \quad (10.22)$$

De nuevo, el tenerse ecuaciones no lineales, se procederá de forma análoga al caso incompresible: aproximando las variables que multiplican a las derivadas por su valor en la estación anterior.

$$\begin{aligned}(\rho u)_n &\approx (\rho u)_{n-1}, \\ (\rho v)_n &\approx (\rho v)_{n-1}\end{aligned}\tag{10.23}$$

Quedando así un sistema lineal de ecuaciones en el que además se desacopla la ecuación de cantidad de movimiento del resto. El procedimiento a seguir será el siguiente:

1. Se resuelve la ecuación linealizada de la cantidad de movimiento para obtener el perfil de velocidades de la capa límite.
2. Esas velocidades se introducen en la ecuación de la energía y se obtiene la temperatura de cada línea.
3. Aplicando la ecuación (10.11) se obtiene la nueva densidad.
4. Empleando (10.12) en cada línea se obtienen los nuevos valores de  $k$  y  $\mu$
5. Se pasa a la siguiente estación.

Tanto para la obtención de  $u$  como de  $T$  se tendrá un sistema del tipo  $Ax=b$  en el que  $A$  tiene la misma forma que en (5.5) pero con distintos coeficientes según si se resuelve la ecuación de la energía o la de la cantidad de movimiento.

Otro cambio que habrá que realizar en el código será el cálculo de  $v$  ya que ahora la ecuación de continuidad es diferente:

$$v_j^{n-1} = v_0 - \frac{1}{\rho_j^{n-1}} \int_0^{y_j} \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} \Big|_{n-1} dy\tag{10.24}$$

En la ecuación de cantidad de movimiento:

$$\begin{aligned}a_j &= -\frac{v_j^{n-1} \rho_j^{n-1}}{y_{j+1} - y_{j-1}} - \frac{1}{\text{Re}_L} \frac{\mu_{j+1} - \mu_{j-1}}{(y_{j+1} - y_{j-1})^2} - \frac{\mu_j}{\text{Re}_L} \frac{2}{(y_j - y_{j-1})(y_{j+1} - y_{j-1})} \\ b_j &= \frac{u_j^{n-1} \rho_j^{n-1}}{x_j - x_{j-1}} + \frac{2\mu_j}{\text{Re}_L} \left( \frac{1}{(y_{j+1} - y_j)(y_{j+1} - y_{j-1})} + \frac{1}{(y_j - y_{j-1})(y_{j+1} - y_{j-1})} \right), \\ c_j &= \frac{v_j^{n-1} \rho_j^{n-1}}{y_{j+1} - y_{j-1}} - \frac{1}{\text{Re}_L} \frac{\mu_{j+1} - \mu_{j-1}}{(y_{j+1} - y_{j-1})^2} - \frac{\mu_j}{\text{Re}_L} \frac{2}{(y_{j+1} - y_j)(y_{j+1} - y_{j-1})}, \\ r_j &= \frac{u_e}{P_e^{1/\gamma}} \frac{\partial u_e}{\partial x} \Big|_n + \rho_j^{n-1} \frac{(u_j^{n-1})^2}{x_j - x_{j-1}}\end{aligned}\tag{10.25}$$

De nuevo, para hacer cumplir con las condiciones de contorno (4.9)

$$\begin{aligned} a_1 = c_1 = r_1 = 0, \quad b_1 = 1 \\ a_{Ny} = c_{Ny} = 0, \quad b_{Ny} = 1, \quad r_{Ny} = Ue_n \end{aligned} \quad (10.26)$$

Mientras que en la ecuación de la energía:

$$\begin{aligned} a_j &= -\frac{v_j^{n-1} \rho_j^{n-1}}{y_{j+1} - y_{j-1}} + \frac{1}{\text{Re}_L \text{Pr}} \frac{k_{j+1} - k_{j-1}}{(y_{j+1} - y_{j-1})^2} - \frac{k_j}{\text{Re}_L \text{Pr}} \frac{2}{(y_j - y_{j-1})(y_{j+1} - y_{j-1})} \\ b_j &= \frac{u_j^{n-1} \rho_j^{n-1}}{x_j - x_{j-1}} + \frac{2k_j}{\text{Re}_L \text{Pr}} \left( \frac{1}{(y_{j+1} - y_j)(y_{j+1} - y_{j-1})} + \frac{1}{(y_j - y_{j-1})(y_{j+1} - y_{j-1})} \right), \\ c_j &= \frac{v_j^{n-1} \rho_j^{n-1}}{y_{j+1} - y_{j-1}} - \frac{1}{\text{Re}_L \text{Pr}} \frac{k_{j+1} - k_{j-1}}{(y_{j+1} - y_{j-1})^2} - \frac{k_j}{\text{Re}_L \text{Pr}} \frac{2}{(y_{j+1} - y_j)(y_{j+1} - y_{j-1})}, \\ r_j &= -\frac{\gamma-1}{\gamma} u_j^n M_\infty^2 \gamma \frac{u_e}{P_e^{-1/\gamma}} \frac{\partial u_e}{\partial x} \Big|_n + \rho_j^{n-1} u_j^{n-1} \frac{T_j^{n-1}}{x_n - x_{n-1}} + \frac{M_\infty^2 (\gamma-1)}{\text{Re}} \mu_j \left( \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{y_{j+1} - y_{j-1}} \right)^2 \end{aligned} \quad (10.27)$$

Las condiciones de contorno que se tienen para la temperatura son

$$\begin{aligned} \hat{T}(\hat{y} \rightarrow 0) &= T_p, \\ \hat{T}(\hat{y} \rightarrow \infty) &= T_e \end{aligned} \quad (10.28)$$

Donde  $T_p$  es la temperatura en la pared y  $T_e$  es la temperatura de la corriente exterior.

Para implementar esta diferencia de temperaturas en el método habrá que poner, para las temperaturas en la primera y en la última línea:

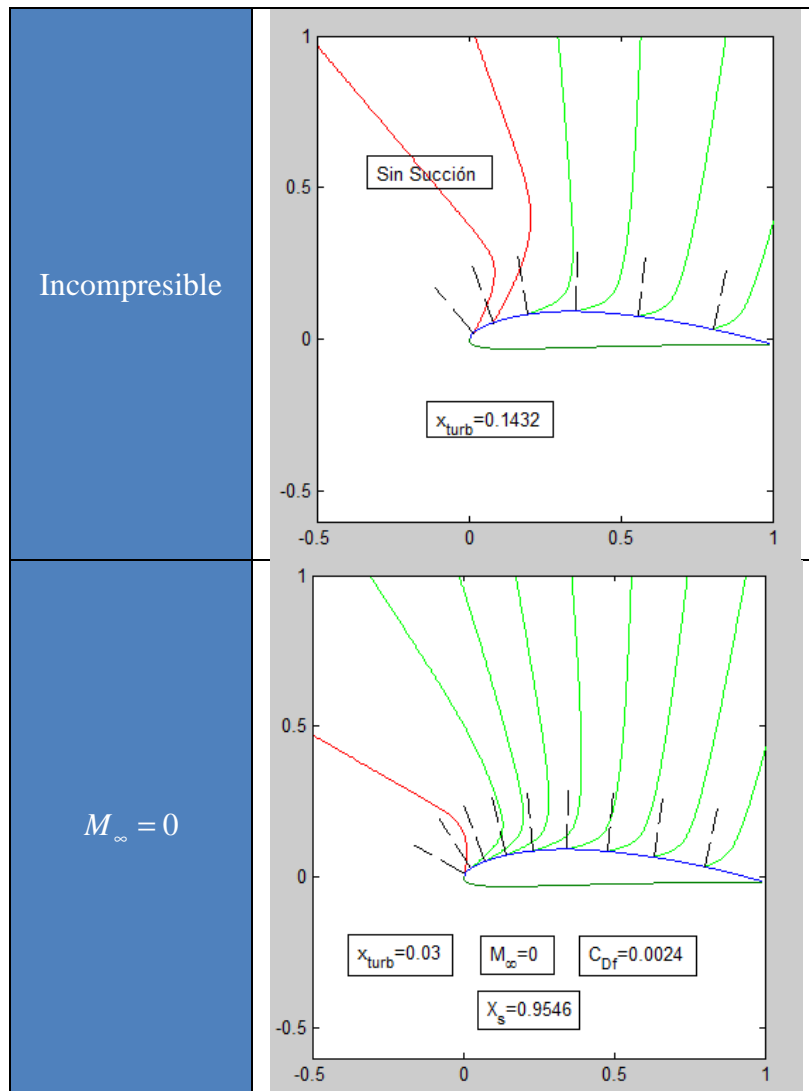
$$\begin{aligned} a_1 = c_1 = 0, \quad b_1 = 1, \quad r_1 = T_p / T_\infty \\ a_{Ny} = c_{Ny} = 0, \quad b_{Ny} = 1, \quad r_{Ny} = T_e / T_\infty \end{aligned} \quad (10.29)$$

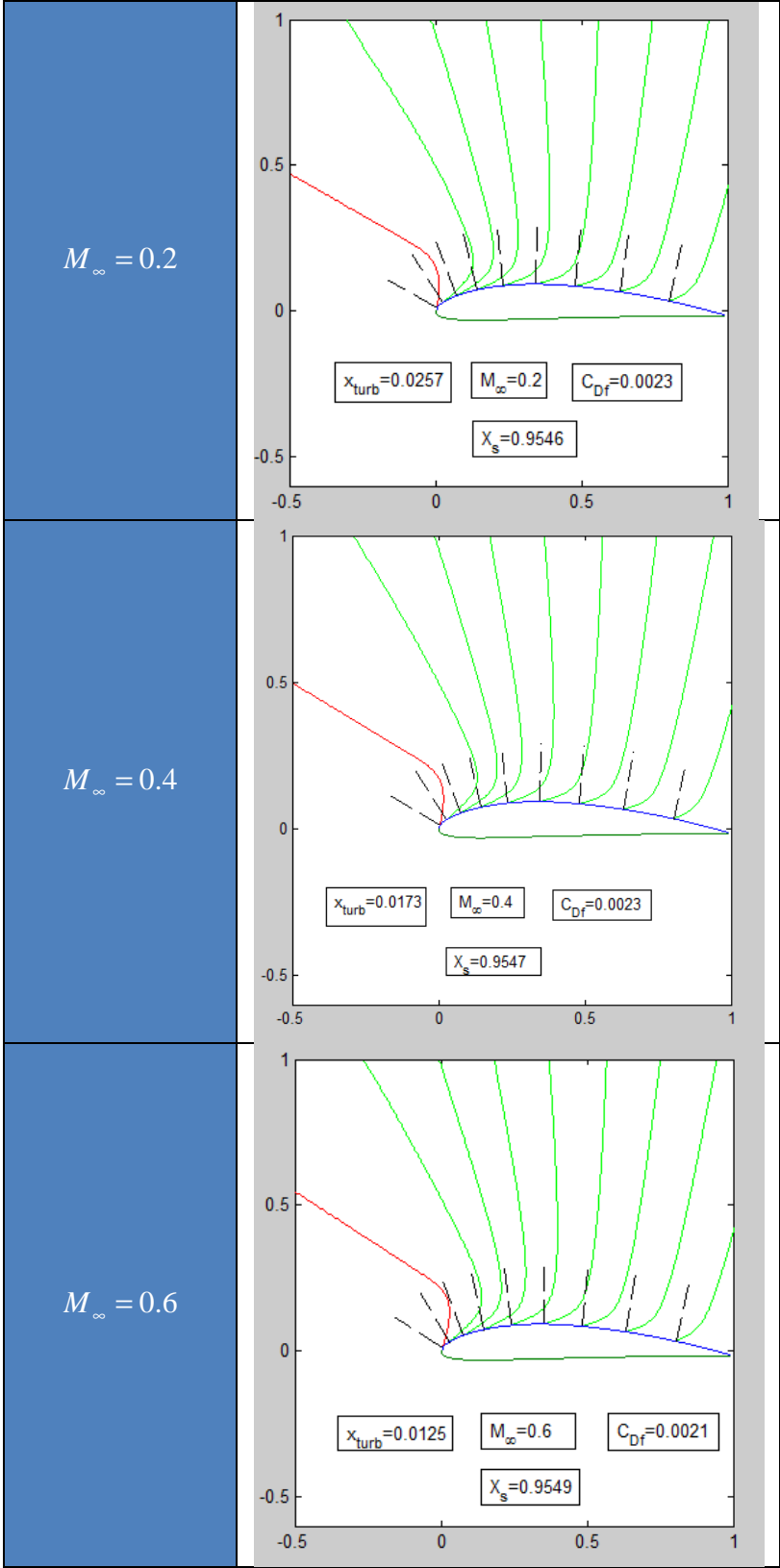
Una vez obtenido el perfil de temperaturas se calcula la densidad en cada línea

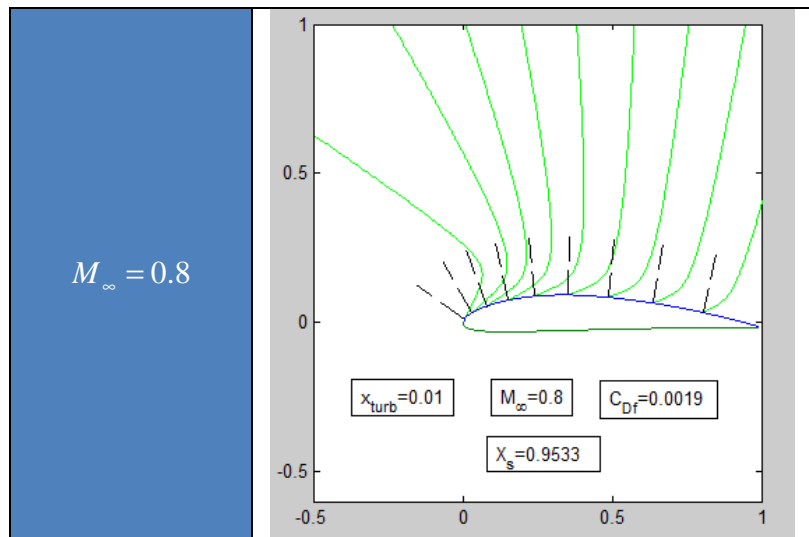
$$\rho_j = \frac{P_e}{T_j} \quad (10.30)$$

Finalmente se aplica (10.12) en cada línea para actualizar los valores de  $k$  y  $\mu$  en cada una de ellas.

Para estudiar los efectos de la compresibilidad se va a partir del último caso estudiado en el apartado anterior, es decir, un perfil NACA4412 con  $Re = 6 \cdot 10^6$ ,  $\alpha = 1^\circ$  y considerando que no hay transferencia de calor.





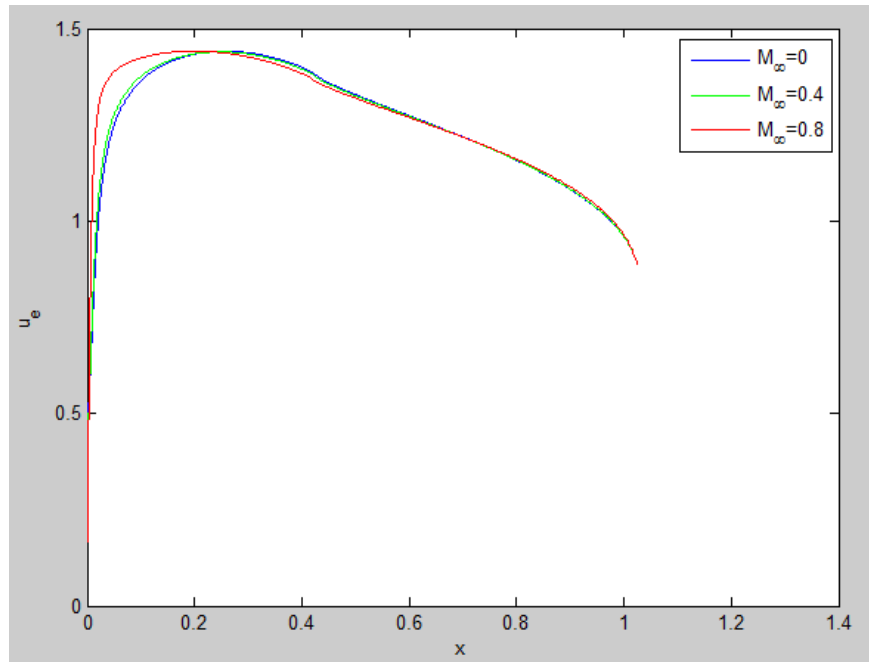


**Tabla 37: Variación del punto de transición a la turbulencia con el número de Mach**

En primer lugar, se ha querido comprobar la validez del método empleado para calcular la capa límite compresible imponiendo en el programa  $M_\infty = 0$ . El resultado es que se produce una diferencia en el punto de transición a la turbulencia pero que el esfuerzo de fricción en el extradós es prácticamente el mismo.

Respecto a esta diferencia, hay que tener en cuenta que la teoría linealizada no ofrece buenos resultados en el borde de ataque, de hecho, en el punto de remanso la velocidad exterior calculada no es nula. Por tanto, en el borde de ataque siempre se tendrá un cierto error respecto a la corriente real que modifica la capa límite en esa región, lo que puede provocar que varíe el punto de transición a la turbulencia. En el resto de perfil, la corriente exterior dada por la teoría linealizada es más precisa y por ello el coeficiente de resistencia obtenido es muy parecido al que se consigue en el caso incompresible, que era  $C_{Df} = 0.0025$ .

Calculando cómo varía la corriente exterior con el número de Mach se comprueba que para números de Mach moderados la diferencia aportada por la compresibilidad es muy pequeña mientras que para  $M$  cercanos al régimen supersónico las velocidades en la región del borde de ataque aumentan de forma notable.



**Imagen 35: Velocidad exterior a lo largo del perfil como función del número de Mach**

Por otra parte, al aumentar el número de Mach se observa cómo se adelanta la transición a la turbulencia. La explicación la podemos encontrar en el hecho de que conforme se aumenta el efecto de la compresibilidad, mayor es el calentamiento provocado por la fricción sobre la pared. Este aumento de temperatura en la región cercana a la pared hace que el espesor de la capa límite sea mayor y que por tanto se produzca antes la transición a la turbulencia. Como muestra, se van a presentar los espesores de la capa límite a lo largo del perfil para tres números de Mach diferentes:



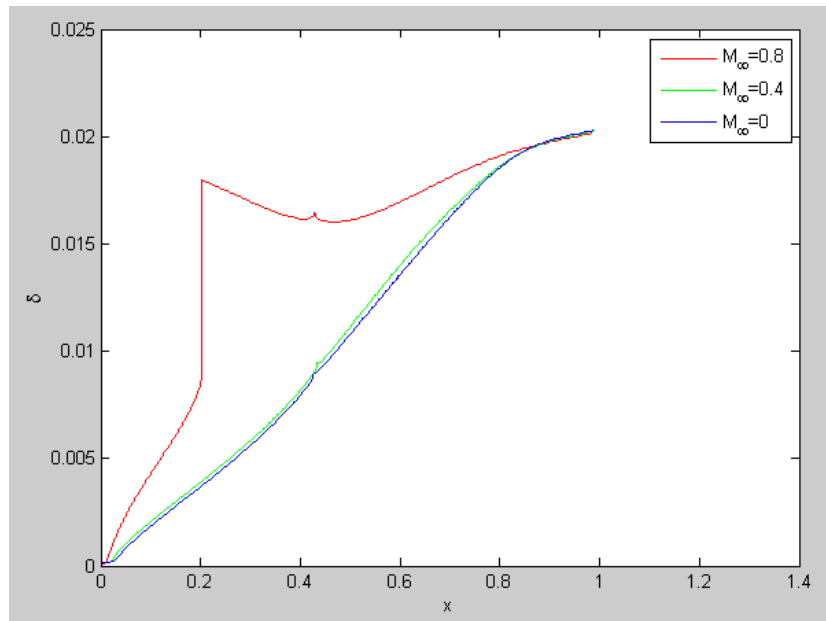


Imagen 36: Espesor de la capa límite a lo largo del perfil como función del número de Mach

De nuevo, observando la imagen anterior se comprueba que para números de Mach moderados los resultados apenas difieren de los que proporciona la solución incompresible.

Para estudiar el efecto de la transmisión de calor se va a comparar entre 2 casos: uno en el que la temperatura de la pared y de la corriente exterior son iguales y otro en el que la temperatura en la pared es de 320k mientras que en la corriente exterior es de 298.15k.

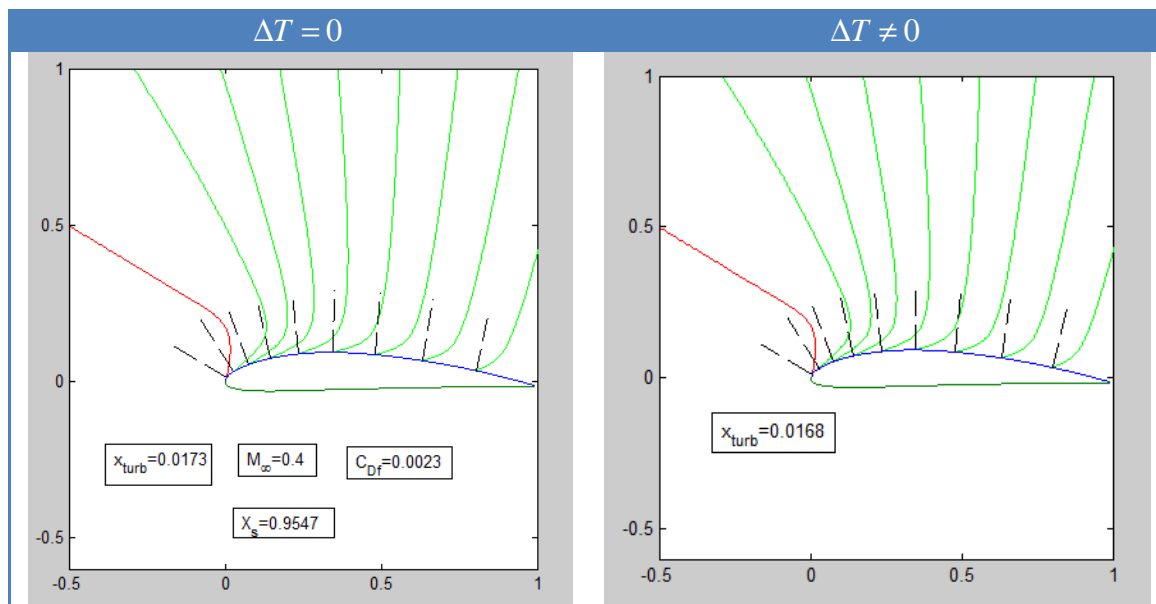
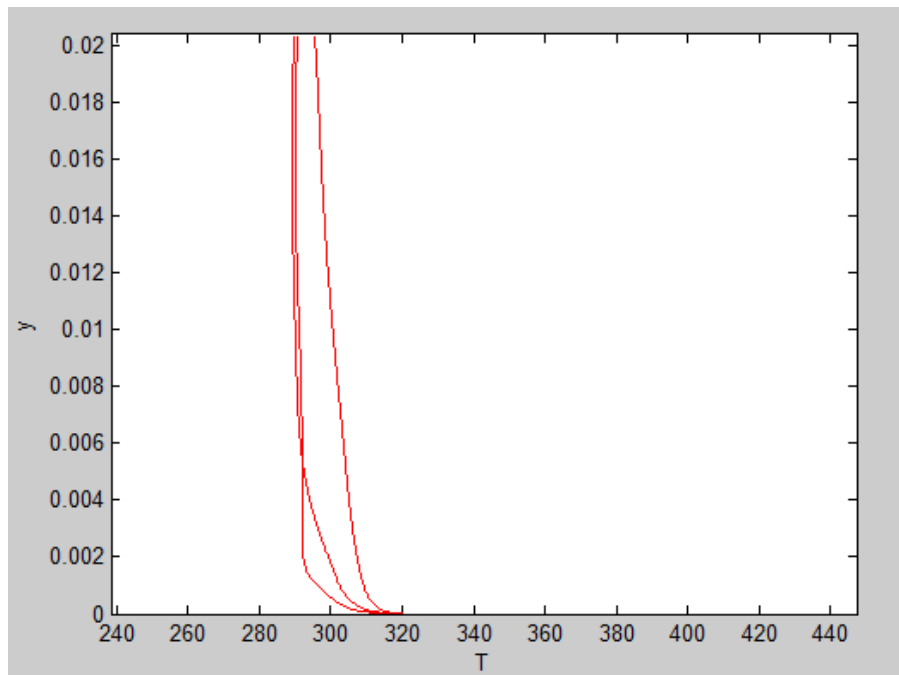
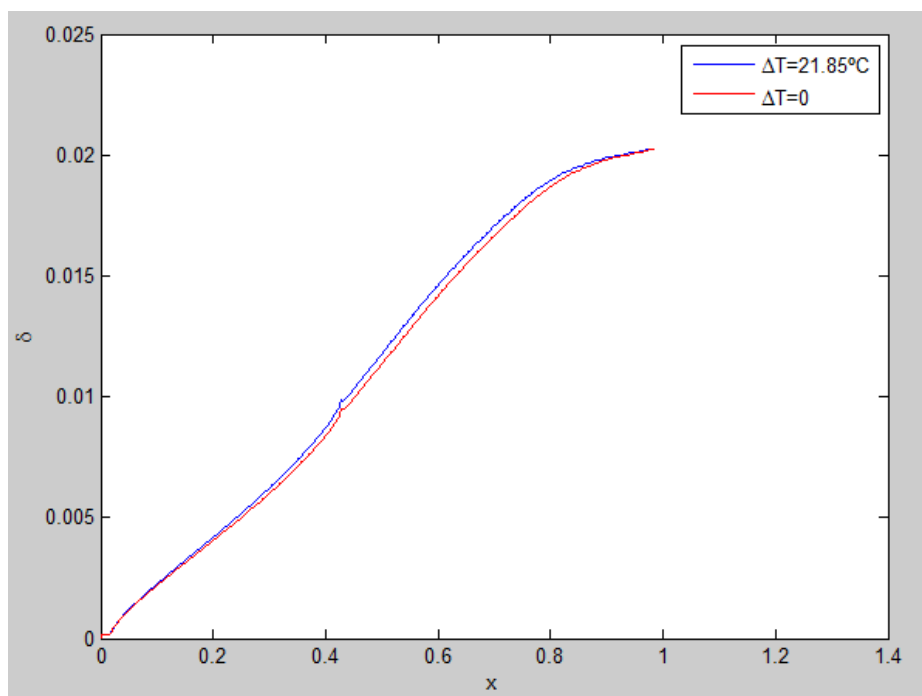


Tabla 38: Efecto de la transmisión de calor en la transición a la turbulencia

Representando algunas estaciones de la capa límite térmica se puede comprobar cómo su espesor es del mismo orden que el de la capa límite viscosa:



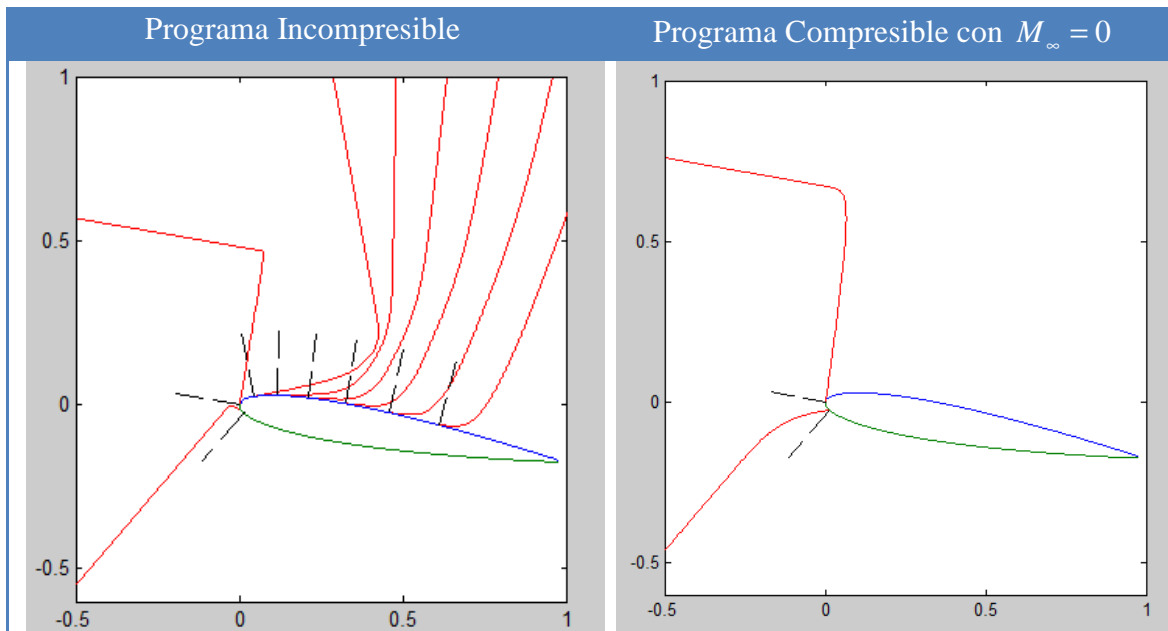
Comparando ahora los espesores de capa límite:



**Tabla 39: Espesores de capa límite con y sin intercambio de calor**

Se deduce por tanto que una diferencia de temperaturas entre la corriente exterior y el perfil aumenta el espesor de la capa límite y que ello se adelanta la transición a la turbulencia.

Una vez estudiados los efectos de la compresibilidad se va a comprobar cómo afecta a la succión cuando se pretende evitar la separación de la capa límite en un perfil NACA0012 para  $Re = 10^6$  y  $\alpha = 10^\circ$ . Hay que señalar que si se pone un ángulo de ataque demasiado grande o un número de Mach muy alto el aumento del gradiente de velocidades hace que la teoría linealizada no funcione y se obtengan resultados en el programa con números complejos.



**Tabla 40: Muestra del error que produce la teoría linealizada en el borde de ataque**

Como se puede comprobar, el error provocado por la teoría linealizada en el borde de ataque hace que la corriente se desprenda en dicho lugar cuando en realidad debería hacerlo cerca del borde de salida. Por otra parte, si se busca un ángulo de ataque para el que tenga mayor validez la teoría linealizada no sería necesario aplicar succión sobre el extradós y no tendría sentido este análisis.

Por tanto, aunque los resultados obtenidos por ambos programas no sean comparables para este ángulo de ataque, se puede calcular la succión necesaria para que la corriente no se desprenda variando el número de Mach para tener al menos una información cualitativa de cómo afecta la compresibilidad a dicho valor de la succión.

Análogamente a como se hizo en el estudio del NACA0012 se van a considerar dos intervalos de succión, siendo el primero desde el borde de ataque hasta un 15% de la cuerda y el segundo desde ese punto hasta el borde de salida.

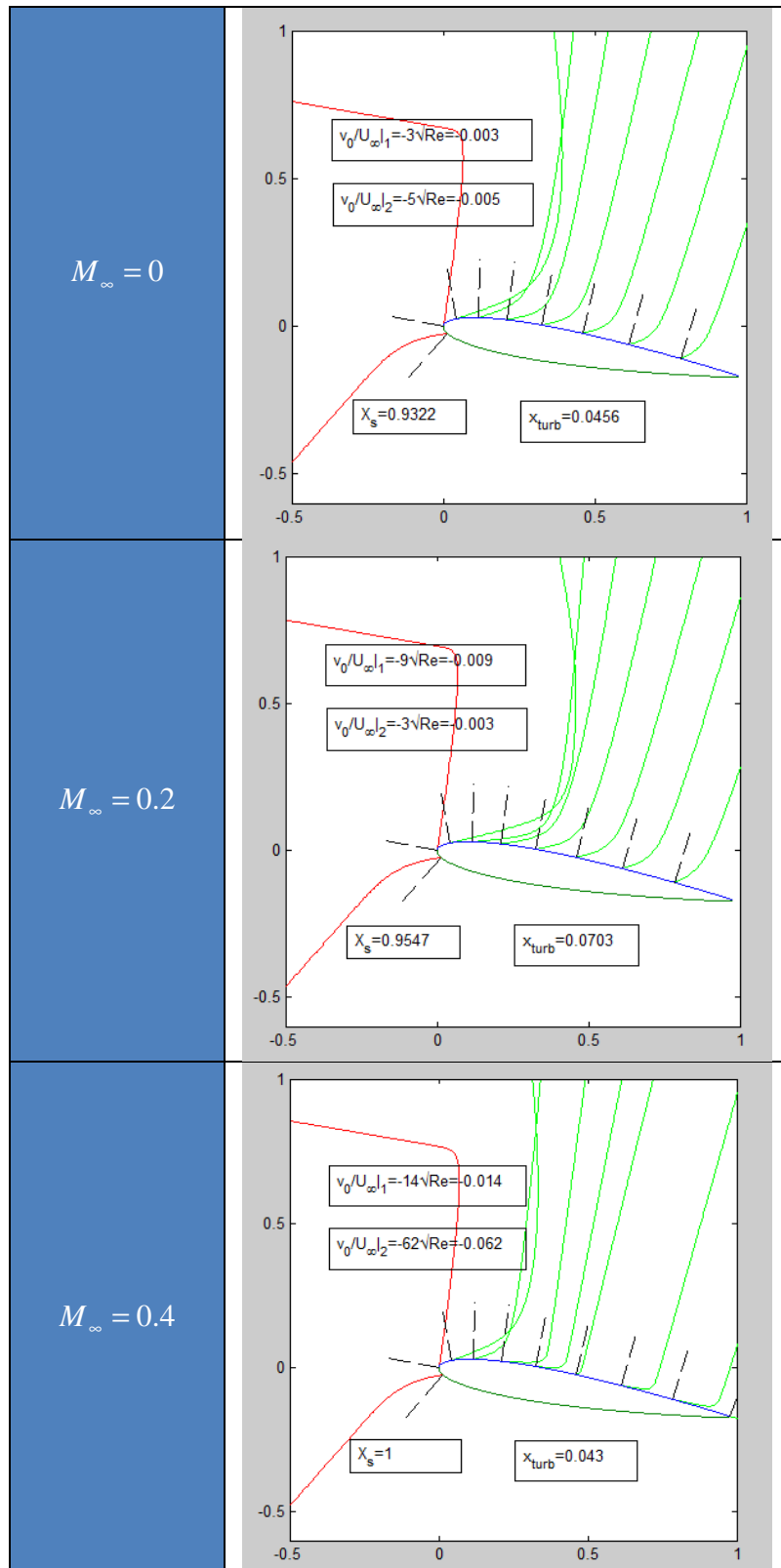


Tabla 41: Succión necesaria para que la corriente no se desprenda como función del número de Mach

En realidad, para  $M_\infty = 0.4$  el espesor de la capa límite llega hasta el máximo valor del mallado en dirección  $y$  ( $y_{\max} = 50/\sqrt{\text{Re}}$ ), por lo que no se obtienen resultados válidos y habría que aumentar el espesor considerado de capa límite.

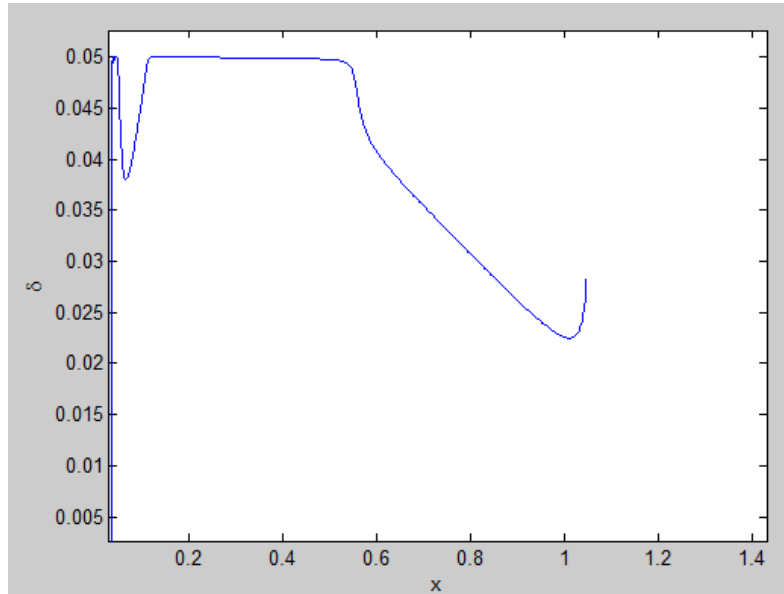
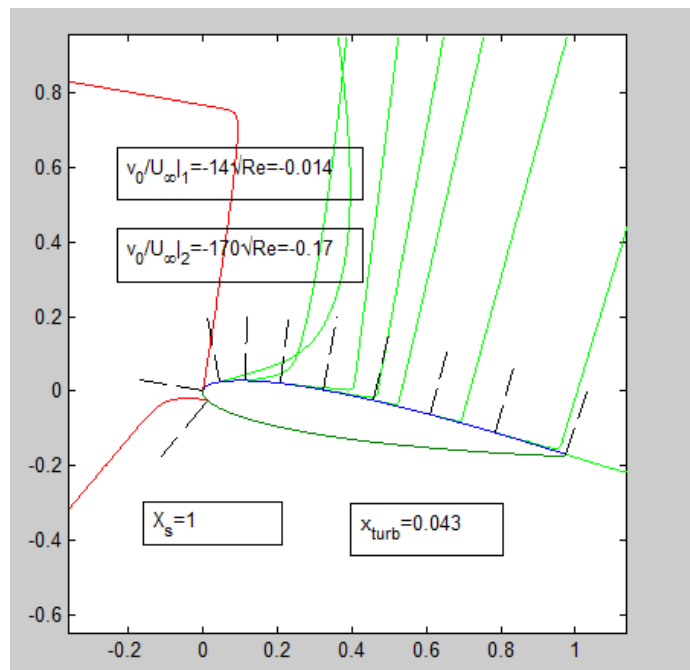


Imagen 37: Espesor de capa límite para  $M=0.4$  con  $y_{\max}=0.05$

Probando con  $y_{\max} = 100/\sqrt{\text{Re}}$  y  $N_y=2000$



De nuevo, se llega hasta el valor máximo de la capa límite.

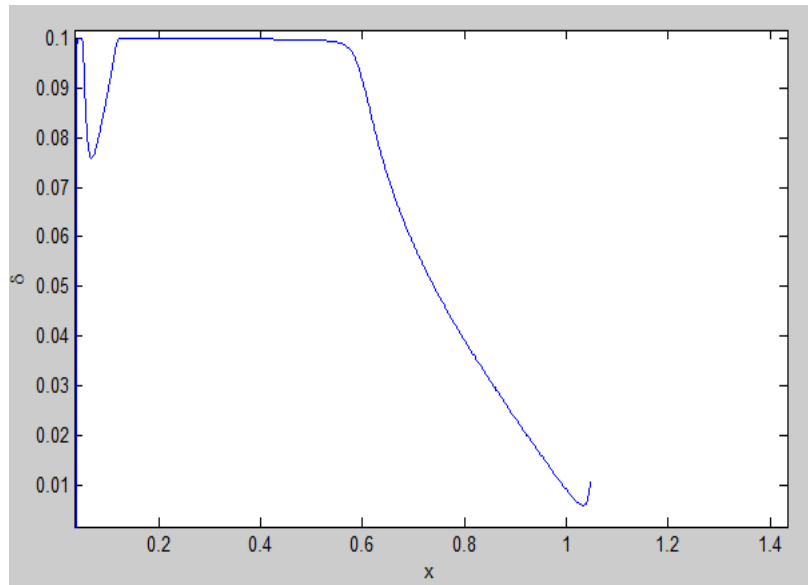


Imagen 38: Espesor de capa límite con  $y_{max}=0.1$

A la vista de los resultados:

- Para números de Mach muy pequeños, como  $M_{\infty} = 0.2$ , habrá que aplicar más succión en el borde de ataque al ser la región donde la fricción es mayor y por tanto donde más se desprejará la capa límite mientras que sobre el resto de perfil, al tenerse una velocidad exterior mayor que con  $M_{\infty} = 0$ , la succión necesaria disminuye debido a que el fluido tiene más inercia.
- Conforme aumenta el número de Mach, el hecho de pegar la capa límite a la pared mediante la adición de succión incrementa tanto la fricción que el espesor de la capa límite aumenta drásticamente. A su vez, con una capa límite mayor la succión necesaria para que la corriente no se desprenda también aumenta y por tanto, se entra en un círculo en el que es necesario aumentar la succión pero este aumento también incrementa el espesor de la capa límite.

Por tanto, se puede concluir que mientras que la compresibilidad tiene el efecto de aumentar el espesor de la capa límite, la succión hace lo contrario y, en consecuencia, un mayor número de Mach implicaría que se hace necesaria una mayor succión para evitar el desprendimiento de la capa límite. Sin embargo, cuando los efectos de compresibilidad se hacen importantes, el incremento de la fricción que provoca la succión hace que ésta resulte poco efectiva a la hora de controlar la separación de la capa límite.

# 11. Conclusiones

## 11.1 Motivo y aportación del proyecto

Las aplicaciones de la succión, pese a haber sido ampliamente estudiadas desde mediados del siglo pasado, nunca han sido implementadas comercialmente de forma generalizada como sí es el caso de otro método de control de la capa límite, el soplado. Sin embargo, hoy en día, los avances tecnológicos han permitido que se vuelva a poner el foco sobre este sistema de cara a lograr una reducción de la superficie del estabilizador vertical, lo cual puede suponer un importante ahorro de combustible en los próximos años para las aeronaves comerciales.

En este trabajo, se ha tratado de demostrar cómo se puede abordar el problema de la succión de una forma rigurosa y moderna, haciendo uso del ordenador, pero a su vez asequible en relación a los conocimientos adquiridos por los alumnos a lo largo de la carrera.

Además de haberse analizado los efectos de la succión en numerosos casos, para la realización de este proyecto se han implementado programas que permiten el análisis de la capa límite en toda la familia NACA de 4 dígitos a cualquier ángulo de ataque y tanto para el caso compresible como el incompresible, por lo que podrían emplearse incluso como una herramienta para la docencia

## 11.2 Métodos numéricos empleados

Para la resolución de las ecuaciones de capa límite de Prandtl se ha empleado el método de las diferencias finitas. De esta forma, se logra sustituir un sistema de ecuaciones diferenciales no lineales con diferentes condiciones de contorno para cada problema por la resolución de un sistema de ecuaciones lineales en el que sólo hay que modificar el mallado cuando se cambia de geometría, lo que dota al método de una mayor simplicidad en la resolución.

Además, con el método de diferencias finitas no se pierde la rigurosidad ya que destaca porque los resultados convergen a los reales conforme más se refina la discretización.

## 11.3 Resumen de los resultados obtenidos

En este trabajo ha quedado patente que la principal aplicación de la succión se encuentra en la capacidad para retrasar el desprendimiento de la capa límite, lo que permitiría reducir la resistencia de presión en cuerpos no fuselados (como en coches o trenes) o aumentar la deflexión de las superficies de control.

Respecto al aumento del porcentaje de perfil laminar, se ha visto que no se logra reducir la resistencia, sin embargo, se podría aplicar de forma que a la vez que se evita la separación de la capa límite se retrase la transición a la turbulencia y que con ello se logre controlar la capa límite sin incrementar la resistencia.

En relación al número de Mach, el hecho de que la adición de succión incremente la fricción hace que conforme se aumente el efecto de la compresibilidad el calentamiento de la capa límite provoque que se vaya perdiendo la efectividad de la succión.

## **11.4 Líneas futuras**

En este trabajo se han desarrollado códigos para el cálculo de la capa límite con succión para múltiples geometrías, por tanto, para continuar con esta línea el paso natural sería comparar y discutir los resultados teóricos con los experimentales con el objetivo de mejorar el código.

Por otra parte, para mejorar los resultados del programa que calcula la capa límite compresible, se podría sustituir la combinación entre la teoría linealizada y la Analogía de Prandtl-Glauert para la obtención de la corriente exterior por otro método más preciso.



## 12. Bibliografía

- Anderson, J. “Introduction to Flight”, Mc Graw-Hill.
- Gordillo, J. M.; Riboux, G. “Introducción a la Aerodinámica Potencial”, Paraninfo.
- <http://www.aerospaceweb.org/design/scripts/atmosphere/>
- <http://www.wired.com/2013/11/manipulating-airflow-airplane-tail-777x/>
- Mc Cormack, R. W. “Numerical Computation of Compressible and Viscous Flow”, AIAA.
- Schlichting, H. “Boundary Layer Theory”, Mc Graw-Hill.
- White, F.M. “Fluid Mechanics”, Mc Graw-Hill.