

## EN TORNO A LA IDEA HILBERTIANA DE VERDAD

CARMEN HERNÁNDEZ

A la idea clásica de verdad como correspondencia con la realidad se contraponen con especial énfasis en unos determinados años de nuestro siglo la de verdad meramente sintáctica o verdad formal.

El positivismo lógico, con Carnap en primer plano, es representante paradigmático de esta postura. Los viejos términos kantianos analítico y sintético cobran en la filosofía de la ciencia del positivismo lógico un carácter de total oposición al representar a lo puramente formal por un lado y a la correspondencia con los hechos por otro, sin dar lugar a ninguna otra alternativa. Lo analítico es materia de las ciencias formales, lo sintético de las ciencias empíricas.

El positivismo lógico, que comienza siendo átomo-logicista<sup>1</sup>, se plantea en primer lugar la dicotomía a nivel de proposición. Una proposición es analítica cuando su verdad reside en ella misma sin necesitar realidad externa alguna, cuando es verdadera por su forma, cuando su negación la convierte en contradictoria. Una proposición es sintética cuando sólo desde el exterior puede determinarse su valor de verdad. «Cualquier proposición que se deseara construir y que no encajara en ninguna de estas clases devendría automáticamente un sinsentido»<sup>2</sup>.

La aplicación de la filosofía de la matemática a la filosofía de la ciencia empírica en este marco logicista se desarrolla, al menos en principio, sin problemas. Sólo hay que matizar que en el primer caso hablamos de verdades formales y en el segundo de verdades-correspondencia; y que además en el segundo caso el término «verdad» ha de ser traducido a menudo por los de «probabilidad alta» o «alto grado de confirmación».

Para la filosofía de la matemática logicista el problema de la consistencia de la teoría es secundario. Las proposiciones de la matemática son todas analíticas, los evidentes axiomas y los derivados teoremas, ya que las reglas de derivación cons-

---

1. Hernández Martín [1993].

2. Carnap en Ayer [1959], pag. 83 de la traducción castellana.

tituyen sólo una forma operativa de lo analítico. La consistencia es una consecuencia de la verdad: un conjunto de proposiciones verdaderas no puede ser sino consistente.

El positivismo lógico poco a poco va dejando de ser atomista y renuncia a hablar del sentido o la verdad de cada una de las proposiciones para hablar de la verdad o el sentido del sistema<sup>3</sup>. Se trata ya de un esquema basado en una filosofía de la matemática formalista en que «verdad» va ser sustituido por «consistencia». En la filosofía de la ciencia empírica sigue siendo esencial la correspondencia con los hechos. Pero ahora no hablamos de correspondencia de cada proposición sino de correspondencia del sistema, lo que significa aquí algo muy diferente. No se trata de correspondencia de uno a uno sino de una cierta interpretación indirecta del sistema a través de sus consecuencias. Y ello apoyado antes que nada en la consistencia del sistema. Según lo que se ha denominado teoría de la verdad como coherencia, la verdad de cada enunciado «consiste en su concordancia con el sistema de los demás enunciados»<sup>4</sup>. Es decir, parece que hablar de verdad ahora es llegar a una especie de síntesis entre verdad formal y verdad correspondencia.

Pero ¿es consistencia lo mismo que verdad? No, evidentemente, en el caso de la proposición, que puede ser consistente y falsa. ¿Y en el caso del sistema?

En una carta a Frege, Hilbert dice: «Si los axiomas arbitrariamente establecidos, junto con sus consecuencias, no se contradicen entre sí, entonces existen las cosas definidas por los axiomas. Este es para mi el criterio de la verdad y de la existencia»<sup>5</sup>.

¿Como puede entenderse esta frase de Hilbert? Porque sabemos que se refiere a la verdad de las diferentes geometrías y nos inclinamos a estar de acuerdo con él.

En efecto, nada sabemos de la verdad de cada una de las proposiciones. Pero sí parece que podemos saber que el sistema es verdadero en el sentido de la enorme proposición que lo sintetiza: es decir, que dadas determinadas proposiciones primitivas o axiomáticas se sigue el conjunto de las teoremas. Esta proposición que plasma el sistema es una implicación formal o tautológica, ya que está traduciendo la relación de deducción. Si la negamos tenemos una contradicción. Verdad formal se transforma pues en consistencia; la consistencia de un sistema ligado por la operación de deducción.

Sin embargo esta solución se resquebraja cuando seguimos pensando en ella. La consistencia del sistema entendida de esta forma no coincide con la consistencia de los axiomas. Los axiomas podrían ser contradictorios y dar origen por tanto a cualquier teorema y su contrario y sin embargo la proposición que traduciría el bloque deductivo seguiría siendo una implicación tautológica.

3. Hernández Martín [1993].

4. Schlick en Ayer [1959], pag. 220 de la tr. cast.

5. Mosterín [1984], pag 123. Hernández Martín [1993].

Necesitamos por tanto introducir la aclaración de que la consistencia del sistema descansa fundamentalmente en la consistencia de los axiomas. Sólo si los axiomas son consistentes será verdadero el sistema. Y si insistimos en considerar a todo el sistema como una proposición analítica de forma condicional, tendremos que decir que esta proposición será verdadera sólo si su antecedente es consistente. Con lo que habremos pasado a afirmar que sólo ciertas proposiciones analíticas son verdaderas. O bien, que hay dos tipos de verdades dentro del ámbito de lo formal.

En la disputa Hilbert-Frege acerca de la verdad de la geometría se evidencia que estos autores están usando la palabra «verdad» en sentidos muy diferentes. Frege sostiene contra Hilbert que si la geometría euclidiana es verdadera las otras geometrías han de ser falsas. Ambos autores se refieren a una verdad formal o abstracta, a una verdad que no remite a contexto empírico alguno. Pero mientras para Frege se trata de una verdad absoluta en que cada una de las proposiciones que la integran se convierte en una contradicción al ser negada, para Hilbert la verdad de las proposiciones es relativa al contexto total y descansa en la consistencia de éste. Podemos negar proposiciones sin que se produzca contradicción si ajustamos el sistema en forma diferente: las proposiciones una a una no son analíticas.

Esta verdad hilbertiana, es como la verdad de Frege independiente de lo empírico, un a priori. Pero mientras en Frege podríamos usar la expresión de Leibniz «verdadero en todos los mundos posibles» parece que Hilbert está justamente apoyando la creación de mundos diferentes. En Hilbert las distintas geometrías son distintos juegos cuya verdad-consistencia es similar a la de la obra de arte.

El concepto de verdad formal como propio de las ciencias formales se nos está volviendo problemático. Verdadero en todos los mundos posibles convive ahora con verdadero en un mundo, que no tiene porque ser el nuestro pues puede ser artificial, creación artística o matemática. Y si de este último caso se trata, el adjetivo de formal se nos sigue imponiendo.

Todo esto que se está planteando es problema del primer tercio de nuestro siglo y su esclarecimiento subyace a una gran parte de la enorme actividad lógico-filosófica de estos años.

La primera cuestión derivada de aquí es la de las relaciones entre implicación y deducción. Ello nos remite a una figura clave, la de Clarence Lewis, y a su cálculo de la implicación estricta<sup>6</sup>.

Lo primero que nos llama la atención en la obra de Lewis es su profunda reflexión y detallado análisis acerca de todos los problemas esenciales del momento, poniendo el dedo en todos los puntos débiles, así como la calidad fecundante de sus escritos que desencadenan una serie de respuestas, como la de Oscar Becker de

---

6. Lewis [1932]. Hernández Martín [1994].

1930, la de Gödel de 1932, o las de Ruth Barcan ya en la década de los 40, generadoras todas de nuevas perspectivas y caminos<sup>7</sup>.

*Principia Mathematica* había pretendido caracterizar exhaustivamente la deducción. Pero lo había hecho a través de la implicación material, conectiva veritativo-funcional, cuyo valor depende de los valores de sus proposiciones integrantes. Ello planteaba una serie de limitaciones que Lewis saca a la luz. Es cierto que el propio Russell esboza el concepto de implicación formal, la implicación que para nada depende de los valores de verdad de sus componentes porque es tautológica; y es cierto que afirma que es esta implicación la que nos permite conocer por deducción. Pero la explicación es oscura y los ejemplos desafortunados<sup>8</sup>.

Lo que Lewis hace es recoger la explicación russelliana y esclarecerla totalmente. El verdadero significado de la relación de deducción no queda expresado por la implicación material, que es una relación meramente extensional. Esta relación sólo prohíbe el caso en que el antecedente sea verdadero y el consecuente falso. Sobrevuela por tanto el ámbito deductivo creando las paradojas de la implicación material, es decir, las paradojas que aparecen cuando queremos traducir el signo  $\vdash$  por el signo  $\text{Æ}$ . Si cualquier proposición falsa implica a cualquier proposición verdadera, este «implica» tiene un significado debilitado con respecto al del lenguaje ordinario, en que no se da en absoluto dicha afirmación. La deducción tiene más que ver con el significado del «implica» ordinario, que con el «implica» veritativo-funcional.

Pero si parecía que esta distinción entre implicación material e implicación estricta iba a resolver el problema de la verdad hilbertiana haciéndola equiparable a la tautología, pronto se descubriría su limitación al tropezar con las nuevas paradojas: el cálculo de Lewis evidencia que de lo simplemente falso no se sigue estrictamente cualquier proposición, pero no ha podido evitar que ello ocurra cuando la falsedad es formal, es decir cuando se trata de una contradicción; tampoco ha podido evitar que una tautología se siga estrictamente de cualquier premisa<sup>9</sup>.

Hemos tropezado de hecho con las limitaciones del planteamiento puramente sintáctico para caracterizar a la verdad, incluso cuando se trata de verdad formal. Y ello ocurre en el momento en que estamos también tropezando con las dificultades de caracterización de la consistencia.

Y es ahora (1931) cuando aparece Tarski insistiendo en su caracterización de la verdad como correspondencia; y ello particularmente en el ámbito de lo formal. Y es Tarski el que va a confirmarnos en la idea apuntada de que la verdad hilbertiana no coincide con la tautología, al distinguir precisamente entre verdade-

7. Para mayor abundancia en este punto de las repercusiones de la obra de Lewis, consúltense los diez primeros años del *Journal of Symbolic Logic*.

8. Russell & Whitehead [1910-13], vol I, pg. 199.

9. Lewis [1932]. Hernández Martín [1994].

ro en un ámbito determinado y verdadero en todo ámbito posible. «En las investigaciones que están en progreso en este momento sobre la metodología de las ciencias deductivas (en particular en el trabajo de la escuela de Göttingen agrupada en torno a Hilbert) otro concepto de carácter relativo juega un papel mucho mayor que el concepto absoluto de verdad y lo incluye como un caso especial. Este es el concepto de proposición correcta o verdadera en un dominio individual a»<sup>10</sup>.

Incluso en un ámbito como el hilbertiano, en que, como advierte Tarski en una nota, no se manejan proposiciones realmente sino funciones proposicionales —o más aún en él, precisamente por esto—, «verdad» es un concepto semántico, verdad es correspondencia con un modelo. Y es consistencia, como Hilbert quería, puesto que también la consistencia descansa en el modelo.

En sus *Elementos de Lógica teórica* de 1928, Hilbert, con Ackermann, analiza el planteamiento de Lewis y rechaza sus paradojas, sin aceptar que los problemas de Lewis nacen de referirse fundamentalmente a la lógica clásica<sup>11</sup>. Una lógica que elimine estas paradojas habrá de ser necesariamente una lógica debilitada, como dirá Tarski<sup>12</sup>. Ellos mismos citan el cálculo intuicionista mínimo de Johansson con el que dicen estar de acuerdo. No puede extrañarnos que Ackerman, años más tarde, recogiera este problema, que no es sino el de una lógica deductiva relevante, impulsando toda una serie de trabajos que culminarán ya en nuestros días en la obra de Anderson y Belnap.

Lo que está saliendo a la luz es que la matemática, como ciencia que construye, como ciencia que habla de entidades, aunque sean artificiales o imaginadas, tiene los mismos problemas en sus relaciones con la lógica que los positivistas habían ido encontrando en las relaciones entre lógica y ciencia empírica. Es necesaria una lógica modificada, restringida, para poder referirnos tanto a la ciencia empírica como a la matemática. Una lógica que suprima las irrelevancias; irrelevancias a veces simplemente entorpecedoras y otras veces inadmisibles.

Y está evidenciándose que la verdad matemática está más cerca del planteamiento hilbertiano que del primer logicismo. Como hemos visto en Tarski, en el ámbito de lo formal existen dos tipos de verdades: una verdad absoluta, la tautología o proposición analítica, que no dice realmente nada porque sólo marca los límites del lenguaje, y una verdad relativa, la de la matemática, que habla de un mundo construido por nosotros y de sus entidades.

---

10. Tarski [1956], pag. 199.

11. Hilbert & Ackermann [1928], pag. 49 de la tr. cast.

12. Tarski [1944], pag. 67 de la tr. cast.

## REFERENCIAS

- Ackermann, W. «Begründung einer strengen Implikation» en *Journal of Symbolic Logic*, vol. 21, 1956, pp. 113–128.
- Ayer, A.J. *El Positivismo lógico*, Chicago, 1959 (tr. cast. México, Madrid, 1965.).
- Carnap, R. «La superación de la Metafísica mediante el análisis lógico del lenguaje», en *Erkenntnis*, vol. II, 1932; en Ayer [1959].
- Frege, G. *Die Grundlagen der Arithmetik*, Breslau, 1884, (tr. cast. México, 1972).
- Hernández Martín, M.C. «Filosofías de la matemática y evolución del positivismo lógico» en *Fragmentos de filosofía*, vol. 3, 1993, pp. 71-75.
- Hernández Martín, M.C. «El cálculo de la implicación estricta de C.I. Lewis», *Actas del X Congreso de Lenguajes Naturales y Lenguajes Formales* (Sevilla, Barcelona, 1994).
- Hilbert, D. *Grundlagen der Geometrie*, 1899, (tr. cast. Madrid, 1991; incluye 10 apéndices).
- Hilbert, D. & Ackermann, W. *Elementos de lógica teórica*, 1928 (tr. cast. Madrid, 1962).
- Lewis, C.I. *A Survey of Symbolic Logic*, Univ. of California, 1918.
- Lewis, C.I. & Langford, C.H. *Symbolic Logic*, New York, 1932.
- Mosterín, J. «La polémica entre Frege y Hilbert acerca del método axiomático» en *Conceptos y teorías en la ciencia*, Madrid, 1984.
- Nepomuceno, A. & Hernández Martín M.C. «Lógica e Historia en la investigación de fundamentos», *Actas del IX Congreso de Lenguajes Naturales y Lenguajes Formales*, Reus, Barcelona, 1993.
- Russell, B. & Whitehead, A.N. *Principia mathematica*, Cambridge, 1910-13.
- Schlick, M. «Sobre el fundamento del conocimiento» en Ayer [1959].
- Tarski, A. «The concept of truth in formalized languages», en *Ruch Filozoficzny*, XII, 1930-31, en *Studia philosophica*, vol. I, 1936 y en *Logic, Semantics, Metamathematics*, Oxford, 1956, pp. 152-277.
- Tarski, A. «The semantic conception of truth» en *Philosophy and phenomenological research*, vol. 4, 1944, (tr. cast. Buenos Aires, 1972).