Algebras de Abel

por

Juan Arias de Reyna Martínez

Presentado por el académico D. Darío Maravall Casesnoves

Las funciones definidas por series de potencias en un álgebra de Banach no comparten con las funciones analíticas más que algunas propiedades, por ejemplo el radio de convergencia no tiene un significado claro y la serie puede converger fuera de él. Definimos unas álgebras topológicas para las que se extienden prácticamente todas las propiedades de las series de potencias en $\mathbb{C}$. Las llamamos álgebras de Abel porque fue imponiendo al álgebra tolopógica que verificase el lema de Abel como llegamos a su definición.

1. Definición de las álgebras de Abel

Designaremos sencillamente por álgebras a $\mathbb{C}$-á'gebras con elemento unidad, asociativas y conmutativas. Podemos entonces suponer $\mathbb{C} \subset A$, siendo A el álgebra. Consideraremos a veces A como anillo o como espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$; se tratará siempre de las correspondientes estructuras subyacentes a la estructura de álgebra de A.

Llamaremos seminorma en A a una aplicación no idénticamente nula $p : A \to \mathbb{R}$ tal que para todo par de elementos a, b de A y todo $\lambda \in \mathbb{C}$, verifique:

1) $p(a + b) \leqslant p(a) + p(b)$.

2) $p(a, b) \leqslant p(a)\, p(b)$.

3) $p(\lambda a) = |\lambda|\, p(a)$.

Como frecuentemente se usa el concepto sin imponer la condición 2), cuando lo exija la claridad hablaremos de seminormas multiplicativas y no multiplicativas.

Usaremos el concepto de álgebra localmente *m*-convexa, es decir, las álgebras dotadas de una topología definida por un conjunto Γ de seminormas multiplicativas. Para más información, véase E. A. Michael (*).

Necesitaremos el siguiente resultado, que puede encontrarse en C. Rickart.

PROPOSICIÓN 1.—*Sea A un álgebra;* $p : A \to \mathbb{R}$, *una seminorma. Existe siempre el límite*

$$\overset{\circ}{p}(x) = \lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{p(x^n)}$$

y es igual a

$$\inf_n \sqrt[n]{p(x^n)}.$$

Además, $\overset{\circ}{p} : A \to \mathbb{R}$ *es una seminorma que verifica*

$$0 \leqslant \overset{\circ}{p}(x) \leqslant p(x).$$

Podemos definir ya las álgebras de Abel.

DEFINICIÓN 1.—*Llamaremos álgebra de Abel a un álgebra dotada de una topología localmente* m-*convexa* $\mathcal{T}$ *de manera que:* 1) *La Topología* $\mathcal{T}$ *es separada.* 2) *Existe una seminorma continua* $p_0 : A \to \mathbb{R}$, *tal que para cada par de elementos* a, b *de A se tiene*

$$p_0(a\,b) = p_0(a)\,p_0(b)$$

(igualdad y no desigualdad). 3) *Para toda seminorma continua* $p : A \to \mathbb{R}$ *se tiene* $\overset{\circ}{p} = p_0$ *(véase la proposición 1).* 4) *A es completa por sucesiones.*

(*) Las referencias a la bibliografía se darán por el nombre del autor y, si es necesaria, la fecha de publicación.

Posteriormente daremos caracterizaciones más simples de las álgebras de Abel.

Las condiciones 2) y 3) de la definición son las más características. Una seminorma verifica que

$$p\,(x\,y) \leqslant p\,(x)\,p\,(y)$$

En las álgebras de Abel se verifica además

$$\lim \sqrt[n]{p\,(x^n\,y^n)} = \lim \sqrt[n]{p\,(x^n)} \lim \sqrt[n]{p\,(y^n)},$$

lo que evita en parte la desventaja de tener en

$$p\,(x\,y) \leqslant p\,(x)\,p\,(y)$$

un signo de desigualdad y no uno de igualdad, como se verifica para el valor absoluto en los cuerpos valuados.

La seminorma p_0 jugará un papel muy importante en la teoría de las álgebras de Abel. Sustituirá en muchas ocasiones al valor absoluto de $\mathbb{C}$. Si A es un álgebra de Abel, denotaremos por Γ_A un conjunto de seminormas que definan la topología de A. En cambio, designaremos por Γ_A al conjunto de todas las seminormas multiplicativas continuas en A.

Podrían definirse las álgebras de Abel como álgebras completas en el sentido de Bourbaki. Pero la condición 4) es suficiente en las aplicaciones; además en los ejemplos habría que añadir elementos sin interpretación clara. El ejemplo más simple de álgebra de Abel es $\mathbb{C}$. Daremos más adelante ejemplos no triviales. Un álgebra que verifique todas las condiciones de la definición salvo la 4), se dirá *preálgebra de Abel;* estas álgebras pueden completarse y formar así álgebras de Abel.

PROPOSICIÓN 2.—*Si A es una preálgebra de Abel, el espacio topológico completado $\hat{A}$ admite una estructura de $\mathbb{C}$-álgebra que induce en A la dada y que junto con la topología de $\hat{A}$ define en $\hat{A}$ una estructura de álgebra de Abel que llamaremos completada de la preálgebra A.*

Nota.—Como toda álgebra de Abel es preálgebra de Abel, puede usarse la proposición 2 para obtener álgebras completas en el sentido de Boubarki de álgebras de Abel que sólo sean completas por sucesiones.

Sea $\hat{A}$ el anillo topológico completado de A; sabemos que es conmutativo y con unidad (cfr. Bourbaki (19600). Sea $\tau : \mathbb{C} \to A$ la inyección canónica; τ es un homomorfismo uniformemente continuo. Existe una prolongación $\hat{\tau} : \mathbb{C} \to \hat{A}$ única, que proporciona una estructura de $\mathbb{C}$-álgebra en $\hat{A}$. La topología de $\hat{A}$ es separada. La topologa de A está definida por la familia de semidistancias

$$(x, y) \to p\,(x - y),$$

para $p \in \Gamma_A$. Como $p : A \to \mathbb{R}$ son uniformemente continuas, pueden prolongarse a $\hat{A}$, obteniéndose aplicaciones $\hat{p} : \hat{A} \to \mathbb{R}$, que por el principio de prolongación de desigualdades son seminormas en $\hat{A}$. Sea $\hat{\Gamma}_A$ el conjunto de las $\hat{p}$. Las seminormas de $\hat{\Gamma}_A$ definen la topología de $\hat{A}$ (cfr. Bourbaki (1958)).

Por tanto, la topología de A es localmente m-convexa. Veamos que es una estructura de álgebra de Abel. De p_0 se obtiene una seminorma $\hat{p}_0 : \hat{A} \to \mathbb{R}$, que por el principio de prolongación de identidades verifica

$$\hat{p}_0\,(x\,y) = \hat{p}_0\,(x)\,\hat{p}\,(y).$$

Dada una seminorma $\hat{p} \in \hat{\Gamma}_A$ evidentemente $\dot{\hat{p}} = \hat{p}$, pues las dos coinciden en el subconjunto denso A de $\hat{A}$ y son iguales a $\hat{p}_0$ por la misma razón. Por último, la condición 4) de la definición se verifica trivialmente.

Jugarán un papel especial las álgebras de Abel que sean anillos de integridad. Si A es una preálgebra de Abel de integridad, no puede afirmarse que $\hat{A}$ sea de integridad.

2. El homomorfismo $\varphi : A \to \mathbb{C}$

PROPOSICIÓN 3.—*Sea A un álgebra de Abel. Entonces A es un anillo local. Si designamos por $\mathcal{M}$ su ideal maximal, es $A/\mathcal{M}$ isomorfo a $\mathbb{C}$.*

Sea

$$\mathcal{M} = \{\, x \mid x \in A,\ p_0\,(x) = 0 \,\}.$$

$\mathcal{M}$ es un ideal de A, pues

$$p_0 (x - y) \leqslant p_0 (x) + p_0 (y)$$

y

$$p_0 (a\, x) = p_0 (a)\, p_0 (x).$$

Esta última relación, junto con el ser p_0 no idénticamente nulo, prueba que además $\mathcal{M}$ es un ideal primo.

Decir que $a - b \in \mathcal{M}$ equivale a decir que $p_0 (a) = p_0 (b)$, pues como para toda seminorma, se tiene

$$| p_0 (a) - p_0 (b) | \leqslant p_0 (a - b).$$

Por tanto, p_0 induce una aplicación $q : A/\mathcal{M} \to \mathbb{R}$ definida por

$$q (a + \mathcal{M}) = p_0 (a).$$

Esta aplicación evidentemente verifica en el anillo de integridad $A/\mathcal{M}$ las relaciones

$$q (x + y) \leqslant q (x) + q (y), \qquad q (\lambda\, x) = | \lambda |\, q (x), \qquad q (x\, y) = q (x)\, q (y).$$

Podemos hablar de $\lambda\, x$, puesto que $A/\mathcal{M}$ sigue siendo álgebra. Además, $q (x) = 0$ equivale a $x = 0$.

Sea K el cuerpo de las fracciones de $A/\mathcal{M}$. Identifiquemos $A/\mathcal{M}$ con una parte de K. Entonces K es de forma natural una $\mathbb{C}$-álgebra. Podemos prolongar q a K de manera que se convierta en valor absoluto. En efecto, si dos fracciones de $A/\mathcal{M}$ son iguales $a/b = c/d$, se tiene $a\, d = b\, c$, luego

$$q (a)\; q (d) = q (b)\; q (c)$$

y podremos poner para fracciones de $A/\mathcal{M}$

$$\left| \frac{a}{b} \right| = \frac{q (a)}{q (b)}$$

Se tiene entonces para x e y en K: 1) $| x\, y | = | x |\; | y |$;

2) $|x + y| \leqslant |x| + |y|$; 3) $|x| = 0$ equivale a $x = 0$. En efecto, 1) es trivial, 2) se obtiene directamente:

$$\left| \frac{a}{b} + \frac{d}{c} \right| = \left| \frac{a\,c + d\,b}{b\,c} \right| = \frac{q\,(a\,c + d\,b)}{q\,(b\,c)} \leq$$

$$\leq \frac{q\,(a)\;q\,(c) + q\,(d)\;q\,(b)}{q\,(b)\;q\,(c)} = \frac{q\,(a)}{q\,(b)} + \frac{q\,(d)}{q\,(c)}$$

y 3) es cierto, pues $|x| = 0$ implica que si $x = (a/b)$ que $q\,(a) = 0$, luego $a = 0$; así, pues, $x = 0$.

Como ya hemos dicho, K es $\mathbb{C}$-álgebra de manera natural mediante el homomorfismo $i \circ \pi \circ \tau = h$:

$$\mathbb{C} \xrightarrow{\tau} \mathrm{A} \xrightarrow{\pi} \mathrm{A}/\mathcal{M} \xrightarrow{i} \mathrm{K},$$

donde τ es el homomorfismo que define el álgebra A, π la aplicación canónica e i la inyección de $\mathrm{A}/\mathcal{M}$ en su cuerpo de fracciones.

Para $\lambda \in \mathbb{C}$ se tiene

$$|h\,(\lambda)| = |i \circ \pi \circ \tau\,(\lambda)| = q\,(\pi \circ \tau\,(\lambda)) = p_0\,(\tau\,(\lambda)) =$$

$$= p_0\,(\lambda \cdot 1) = |\lambda|\,p_0\,(1) = |\lambda|$$

(es trivial que $p_0\,(1) = 1$). Por tanto, para la $\mathbb{C}$-álgebra K se tiene

$$|\lambda\,x| = |h\,(\lambda)\,x| = |h\,(\lambda)|\;|x| = |\lambda|\;|x|.$$

Es decir, K es una $\mathbb{C}$-álgebra normada.

Aplicando el teorema de Gelfand-Mazur, para cada $x \in \mathrm{K}$ debe existir $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $x - \lambda \cdot 1$ no sea invertible en K, como K es cuerpo $x = \lambda \cdot 1$. Por tanto, $h : \mathbb{C} \to \mathrm{K}$ es sobre. Pero $h\,(\mathbb{C}) = \mathrm{A}/\mathcal{M}$, ya que i es una inyección; así, pues, $\mathrm{A}/\mathcal{M}$ es isomorfo a $\mathbb{C}$ y $\mathcal{M}$ ideal maximal.

Sólo queda ver que A es local, pero antes probaremos la siguiente proposición.

PROPOSICIÓN 4.—*Sea A un álgebra de Abel, para cada* a $\in$ *A el espectro a es unitario:* $S\,\mathrm{p}_A\,(\mathrm{a}) = \{\lambda\}$. *Si designamos por* $\varphi : A \to \mathbb{C}$

la aplicación que a cada a $\in A$ *le hace corresponder el único número complejo en su espectro* φ *es un homomorfismo y*

$$p_0(a) = |\varphi(a)|.$$

En efecto, sea $p_0(a) = 0$, entonces $\mathrm{Sp}_A(a) = \{0\}$; para probarlo observamos que la serie

$$\frac{1}{\lambda} + \frac{a}{\lambda^2} + \frac{a^2}{\lambda^3} + \dots$$

es conmutativamente convergente en A, para todo $\lambda \in \mathbb{C}$ con $\lambda \neq 0$. Pues si $p \in \Gamma_A$, será

$$\lim \sqrt[n]{p(a^n/\lambda^{n+1})} = (1/|\lambda|)\, p_0(a) = 0.$$

Por tanto, la serie

$$p\left(\frac{1}{\lambda}\right) + p\left(\frac{a}{\lambda^2}\right) + p\left(\frac{a}{\lambda^3}\right) + \dots$$

es convergente. La suma de esta serie es trivialmente $1/(\lambda - a)$, lo que prueba que $\mathrm{Sp}_A(a) = \{0\}$.

Sea ahora a cualquier elemento de A y usemos las notaciones establecidas en la demostración de la proposición (3). Como $\pi(a) \in K$ existe $\mu \in \mathbb{C}$ tal que $\pi(a) = h(\mu)$, es decir, $a - \mu \in \mathcal{M}$ y por tanto $p_0(a - \mu) = 0$.

Según hemos probado, $\mathrm{Sp}_A(a - \mu) = \{0\}$, luego escrito en otra forma, $\mathrm{Sp}_A(a) = \{\mu\}$. Además,

$$|p_0(a) - |\mu|| = |p_0(a) - p_0(\mu)| \leqslant p_0(a - \mu) = 0.$$

Esto es, $|\mu| = p_0(a)$.

Sólo queda, pues, ver que φ es homomorfismo, pero por la definición, $\varphi = h^{-1} \circ \pi$.

También se obtiene así que $\varphi \circ \tau = \mathrm{Id.}$, c. d. d.

Podemos ahora terminar la demostración de la proposición 3.

$\mathcal{M}$ es el único ideal maximal de A, pues si a no es invertible en A, $\mathrm{Sp}_A(a) = \{0\}$ (usando la proposición 4). Entonces

$$p_0(a) = |\varphi(a)| = |0| = 0;$$

esto es, $a \in \mathcal{M}$. Por tanto, $\mathcal{M}$ es el conjunto de los elementos no invertibles de A, lo que claramente implica que es el único maximal.

Hemos visto unas propiedades de las álgebras de Abel; veremos ahora que en cierto sentido las caracterizan.

Tendremos que usar la fórmula del radio espectral en álgebras de Banach. Si E es un álgebra de Banach (compleja y con unidad) representamos por $SP_E(x)$ para cada $x \in E$ el conjunto de los $\lambda \in \mathbb{C}$ tales que $x - \lambda$ no sea invertible en E. Entonces

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{\| x^n \|} = \sup_{\lambda \in Sp_E(x)} | \lambda |.$$

Probaremos entonces la siguiente caracterización de las álgebras de Abel.

PROPOSICIÓN 5.—*Sea A un álgebra, $\mathcal{T}$ una topología localmente* m-*convexa separada y completa por sucesiones. Condición necesaria y suficiente para que A dotada de $\mathcal{T}$ sea un álgebra de Abel es que A sea un anillo local.*

La necesidad la hemos probado en la proposición 3. Supongamos, pues, anillo local y vamos a probar que es álgebra de Abel.

Sea $\mathcal{M}$ el ideal maximal de A. $\overline{\Gamma}_A$ el conjunto de seminormas continuas para la topología $\mathcal{T}$. Sea por fin $p \in \overline{\Gamma}_A$. El conjunto

$$\mathcal{J} = \{ x \in A, \ p(x) = 0 \}$$

es un ideal de A. Tenemos así definida un álgebra $B = A/\mathcal{J}$. Si $x - y \in \mathcal{J}$ se tiene $p(x) = p(y)$. Podemos definir una aplicación de B en $\mathbb{R}$, que representaremos por $\| \ \|$, de manera que

$$\| x + \mathcal{J} \| = p(x).$$

B dotada de $\| \ \|$ es un álgebra normada sobre los complejos; completándola obtenemos un álgebra de Banach compleja $\hat{B}$.

Sea ahora $x \in A$. Pongamos $\dot{x} = x + \mathcal{J}$. Como $\hat{B}$ es un álgebra de Banach existe un elemento en el espectro de $\dot{x}$, sea λ. $\dot{x} - \lambda$ no es invertible en $\hat{B}$. Con más razón no es invertible en B. Por tanto tampoco en A. Como A es anillo local, debe ser $x - \lambda \in \mathcal{M}$. No existe otro λ que verifique esta relación, pues si fuese $x - \lambda' \in \mathcal{M}$ se tendría $\lambda - \lambda' \in \mathcal{M}$, luego $\lambda = \lambda'$, ya que $\mathcal{M} \neq (1)$. Esto es, $A/\mathcal{M}$ es isomorfo a $\mathbb{C}$. Existe, pues, un homomorfismo φ de núcleo $\mathcal{M}$ de A en $\mathbb{C}$.

Hemos probado además que x no tiene más que a $\varphi(x)$ en su espectro en $\hat{B}$. Según la fórmula del radio espectral y la definición de la norma $\| \; \|$ en $\hat{B}$ se tendría

$$|\varphi(x)| = \lim \sqrt[n]{\| \hat{x}^n \|} = \lim \sqrt[n]{p(x^n)}.$$

Esto prueba que si $p \in \overline{\Gamma}_A$ y $q \in \overline{\Gamma}_A$ se tiene $\overset{\circ}{p} = \overset{\circ}{q}$. Si a esta seminorma la llamamos p_0 se tiene $p_0(x) = |\varphi(x)|$. Evidentemente se tiene

$$p_0(x\,y) = |\varphi(x\,y)| = |\varphi(x)\;\;\varphi(y)| = p_0(x)\;\;p_0(y).$$

Sólo queda ver que $p_0 \in \overline{\Gamma}_A$. Pero esto es consecuencia inmediata de ser

$$0 \leqslant p_0(x) = \overset{\circ}{p}(x) \leqslant p(x),$$

para toda $p \in \overline{\Gamma}_A$.

3. Series de potencias en un Álgebra de Abel

Probaremos a continuación el lema de Abel, pero es necesario antes definir un concepto que juega el papel de la convergencia absoluta en las álgebras de Abel.

Definición 2.—*Sea A un álgebra de Abel; una serie* $\Sigma\, a_n$ *de elementos de A se dice absolutamente convergente si para todo* $p \in \overline{\Gamma}_A$ *se tiene* $\Sigma\, p(a_n) < +\infty$.

Proposición 6.—*Si la serie* $\Sigma\, a_n$ *es absolutamente convergente en un álgebra de Abel A, la familia* $(a_n)_{n \in N}$ *es sumable y su suma coincide con el valor de la serie.*

En efecto, dada una seminorma $p \in \Gamma_A$ y un $\varepsilon > 0$ existe un n_0 tal que

$$\sum_{n \geq n_0} p(a_n) < \varepsilon$$

Sea entonces J una parte finita de $\mathbb{N}$ que no corte a $[0, n_0]$. Se tiene

$$p\left(\sum_{n \in J} a_n\right) < \varepsilon.$$

Así, pues, el filtro de las secciones del conjunto de las partes finitas de $\mathbb{N}$ se transforma por la aplicación

$$I \longrightarrow \sum_{n \in I} a_n$$

en un filtro de Cauchy. Puesto que A es completa, por sucesiones este filtro tiene un punto adherente

$$\lim \sum_{n=0}^{h} a_n,$$

luego es convergente.

Pasamos ahora a considerar el lema de Abel en la forma válida para álgebras de Abel.

Proposición 7.—*Sea A un álgebra de Abel;*

$$S = \sum_{n \geq 0} a_n X^n$$

una serie de potencias $S \in A[[X]]$. Existe un $R \in [0, +\infty]$ tal que:
a) *La serie $\Sigma a_n X^n$ es absolutamente convergente para $p_0(X) < R$;*
b) *La serie $\Sigma a_n X^n$ es divergente para $p_0(X) > R$.*

Además, si Γ_A es un sistema de seminormas que defina la topología de A se tiene

$$\frac{1}{R} = \sup_{p \in \Gamma_A} \overline{\lim_{n \to \infty}} \sqrt[n]{p(a_n)}.$$

Supongamos $p_0(X) < R$. Entonces la serie $\Sigma\, a_n X^n$ es absolutamente convergente, ya que para cada $p \in \Gamma_A$,

$$\overline{\lim}\, \sqrt[n]{p(a_n X^n)} \leqslant \overline{\lim}\, \sqrt[n]{p(a_n)}\, \sqrt[n]{p(X^n)} = p_0(X)\, \overline{\lim}\, \sqrt[n]{p(a_n)} \leqslant p_0(X)/R < 1.$$

Para justificar la igualdad es necesario tener en cuenta que como suponemos $p_0(X) < R$, es $1/R$ finito. Debe usarse esto si $p_0(x) = 0$.

Por tanto, $\Sigma\, p(a_n X^n)$ es convergente para cada $p \in \Gamma_A$, pero para todo $q \in \overline{\Gamma}_A$ existe un $p \in \Gamma_A$ y un $k > 0$ tal que $q(a) \leqslant k\, p(a)$ para todo $a \in A$.

Supongamos ahora $p_0(X) > R$. En la demostración clásica las dos desigualdades usadas anteriormente:

$$\overline{\lim}\, \sqrt[n]{p(a_n X^n)} \leqslant \overline{\lim}\, \sqrt[n]{p(a_n)}\, \sqrt[n]{p(X^n)} \quad \text{y} \quad \overline{\lim}\, \sqrt[n]{p(a_n)} \leqslant 1/R$$

son igualdades, puesto que p es el valor absoluto en $\mathbb{C}$ y la demostración de la divergencia resulta por tanto de que entonces

$$\overline{\lim}\, \sqrt[n]{|a_n X^n|} = |X| / R > 1.$$

En nuestro caso todavía puede escogerse un $p \in \Gamma_A$ de manera que ya que $p_0(X) > R$, también sea cierto

$$p_0(X)\, \overline{\lim}\, \sqrt[n]{p(a_n)} > 1,$$

dada la definición de R.

Todavía debemos probar que la segunda de las desigualdades es bajo ciertas condiciones una igualdad. Antes de terminar la demostración de la proposición probaremos un lema que es de demostración fácil, pero que tenía un papel oscurecido por las particularidades en el caso de $\mathbb{C}$.

LEMA 1.—*Sea A un álgebra de Abel;* $(a_n)_{n \in N}$ *una sucesión de elementos de A y* $x \in A$. *Si* $p \in \Gamma_A$ *y el segundo miembro está definido, se tiene la igualdad*

$$\overline{\lim}\, \sqrt[n]{p(a_n X^n)} = p_0(X)\, \overline{\lim}\, \sqrt[n]{p(a_n)}.$$

Nota.—Cuando el segundo miembro no está definido; esto es cuando p_0 (X) $= 0$ y el factor vale $+\infty$ no puede afirmarse nada sobre el primer miembro. No es difícil probarlo con ejemplos.

Sabemos ya que

$$\overline{\lim}\sqrt[n]{p(a_n X^n)} \leqslant \overline{\lim}\sqrt[n]{p(a_n)}\sqrt[n]{p(X^n)} = \overset{o}{p}(X)\,\overline{\lim}\sqrt[n]{p(a_n)} =$$

$$= p_0(X)\,\overline{\lim}\sqrt[n]{p(a_n)}.$$

Salvo si estamos en el caso de indeterminación.

Debemos probar la desigualdad opuesta. Si p_0 (X) $= 0$, la desigualdad no puede ser más que una igualdad. Podemos, pues, suponer p_0 (X) $\neq 0$. Entonces φ (X) $\neq 0$, luego $x \notin \mathcal{M}$. Así, pues, X tiene un inverso y en A X $y = 1$. Aplicando la desigualdad que ya conocemos, pero $a\, a_n\, X^n$ se tiene:

$$\overline{\lim}\sqrt[n]{p(a_n X^n y^n)} \leqslant p_0(y)\,\overline{\lim}\sqrt[n]{p(a_n X^n)}.$$

Como

$$\varphi(X)\,\varphi(y) = 1,\ p_0(X) = 1/p_0$$

y la desigualdad equivale a

$$p_0(X)\,\overline{\lim}\sqrt[n]{p(a_n X^n y^n)} \leqslant \overline{\lim}\sqrt[n]{p(a_n X^n)}.$$

Por fin, como X $y = 1$

$$p_0(X)\,\overline{\lim}\sqrt[n]{p(a_r)} \leqslant \overline{\lim}\sqrt[n]{p(a_r X^n)}.$$

que prueba el teorema.

Podemos terminar ahora la demostración de la proposición 7. Si p_A (X) $>$ R, existe $p \in \Gamma_A$ tal que

$$p_0(X)\,\overline{\lim}\sqrt[n]{p(a_n)} > 1.$$

Puesto que p_0 (X) $>$ R, se puede usar el lema 1. Esto proporciona la desigualdad

$$\overline{\lim}\sqrt[n]{p(a_n X^n)} > 1.$$

Por tanto la sucesión $p(a_n X^n)$ no está acotada. La serie $\Sigma\, a_n X^n$ no es convergente entonces, pues su término general no tiende a cero

De la demostración se deduce que la fórmula análoga a la de Hadamard puede escribirse con cualquier familia Γ_A de seminormas que defina la topología de A.

Si una serie de potencias con coeficientes en un álgebra de Abel tiene radio no nulo, representaremos por la misma letra S la serie y la función que define en su disco de convergencia. Vemos a continuación las relaciones que existen entre la serie y la función.

PROPOSICIÓN 8.—*Sean M y N dos series formales de $A\,[[X]]$ con radio de convergencia $\geqslant R$. Las series suma y producto $M + N$ y $M\,N$ tienen radio $\geqslant R$. Si $p_0(x) < R$ se tiene*

$$(M + N)(x) = M(x) + N(x)$$

y

$$(M\,N)(x) = M(x)\,N(x).$$

No merece la pena detallar la demostración, que es idéntica a la demostración clásica. La demostración de la parte relativa al producto usa, como la demostración en $\mathbb{C}$, el lema siguiente.

LEMA 2.—*Sean $\Sigma\, u_n$ y $\Sigma\, v_n$ dos series absolutamente convergentes en un álgebra de Abel A. Si ponemos*

$$w_n = \sum_{\alpha+\beta=n} u_\alpha\, v_\beta,$$

la serie $\Sigma\, w_n$ es absolutamente convergente y se verifica la igualdad

$$\Sigma\, w_n = (\Sigma\, u_n)(\Sigma\, v_n).$$

PROPOSICIÓN 9.—*Sea $S \in A\,[[X]]$ una serie de potencia con coeficientes en un álgebra de Abel y radio R. La serie derivada S' tiene radio justamente igual a R.*

Es trivial usando la fórmula de Hadamard válida para el radio de convergencia.

Veremos más adelante la relación existente entre las funciones asociadas a la serie y a su serie derivada. Pasaremos antes a analizar algunas propiedades de las funciones definidas por series de potencias.

Las series de potencias con coeficientes en $\mathbb{C}$ y radio positivo R convergen uniformemente en discos cerrados de radio menor que R. La demostración no vale en álgebras de Abel, puesto que la desigualdad

$$\overline{\lim} \sqrt[n]{p(a_n x^n)} \leqslant \overline{\lim} \sqrt[n]{p(a_n)} \sqrt[n]{p(x^n)} =$$

$$= p_0(x) \overline{\lim} \sqrt[n]{p(a_n)} \leqslant p_0(x)/\mathrm{R}$$

no permite acotar uniformemente en x los números $p(a_n x^n)$. Sin embargo, se puede decir aún mucho en nuestro caso. Esencialmente las series de potencias en álgebras de Abel siguien convergiendo uniformemente en compactos, la diferencia está en que los conjuntos

$$\{ x \mid p_0(x) < \rho, \ x \in \mathrm{A} \}$$

no son ya compactos. A pesar de todo, la demostración no es tan directa como en el caso clásico.

Necesitaremos el siguiente lema.

LEMA 2.—*Sea K un espacio topológico compacto;* $\mathrm{u}_n : K \to \mathbb{R}_+$ *una sucesión de funciones reales positivas y continuas tales que*

$$\mathrm{u}_{n+m}(\mathrm{x}) \leqslant \mathrm{u}_n(\mathrm{x})\, \mathrm{u}_m(\mathrm{x})$$

para toda $\mathrm{x} \in K$. *Existe entonces* $\mathrm{v} : K \to \mathbb{R}_+$ *tal que para cada* $\mathrm{x} \in K$ *se tiene*

$$\overline{lim} \sqrt[n]{\mathrm{u}_n(\mathrm{x})} = \mathrm{v}(\mathrm{x}).$$

Además, si v *es continua se tiene* $\mathrm{v} = lim \sqrt[n]{\mathrm{u}_n}$ *uniformemente en K.*

La existencia de v es consecuencia de un conocido teorema de Polya y Szegö, que ya hemos usado en la demostración de la proposición 1. En efecto, obsérvese que allí se demuestra que existe el límite

$$\lim \sqrt[n]{p(x^n)} = \inf \sqrt[n]{p(x^n)}$$

basándose únicamente en la propiedad

$$p\,(x^{n+m}) \leqslant p\,(x^n)\,p\,(x^m)$$

y por tanto la demostración nos puede servir sustituyendo $p\,(x^n)$ por $u_n\,(x)$. Por tanto, existe el límite

$$v\,(x) = \lim \sqrt[n]{u_n\,(x)} = \inf \sqrt[n]{u_n\,(x)}$$

para todo $x \in K$. Nos queda probar que si v es continua, el límite se alcanza uniformemente en x. La conclusión se parece a la del teorema de Dini, sólo que la hipótesis no nos permite asegurar que la sucesión $\sqrt{u_n}$ sea decreciente, sólo es casi decreciente en el siguiente sentido.

Dado $m \in \mathbb{N}$ y $\varepsilon > 0$, existe n_0 tal que para $n > n_0$

$$\sqrt[n]{u_n\,(x)} \leqslant \varepsilon + \sqrt[m]{u_m\,(x)}.$$

Una vez probado este enunciado, el teorema será consecuencia del siguiente teorema de Diní negeralizado.

PROPOSICIÓN 10.—*Sea K un espacio topológico compacto* $\mathrm{f_n} : K \to \mathbb{R}$ *una sucesión de funciones continuas que converge simplemente en K hacia* $\mathrm{f} : K \to \mathbb{R}$ *también continua. Supongamos además que dado* $m \in \mathbb{N}$ y $\varepsilon > 0$, *existe* $\mathrm{n_0}$ *tal que*

$$\mathrm{f_n\,(x)} \leqslant \mathrm{f_m\,(x)} + \varepsilon$$

para todo $\mathrm{n} \geqslant \mathrm{n_0}$ *y todo* $\mathrm{x} \in K$. *Entonces* $\mathrm{f_n}$ *converge uniformemente en K hacia* f.

En primer lugar, para todo m se verifica $f_m\,(x) \geqslant f\,(x)$. Pues dado ε, a partir de un n_0 se verifica

$$f_n\,(x) \leqslant \varepsilon + f_m\,(x)$$

y tomando límites para n, tendiendo a infinito, se obtiene

$$f\,(x) \leqslant \varepsilon + f_m\,(x),$$

y esto para todo ε.

Demos ahora $\varepsilon > 0$ y sea $x \in \mathrm{K}$ existe $m(x)$ tal que

$$f_{m(x)}(x) - f(x) < \epsilon/2.$$

Esta igualdad se verificará en un entorno $\mathrm{V}(x)$ de x. Así, pues,

$$t \in \mathrm{V}(x) \Longrightarrow f_{m(x)}(t) - f(t) < \epsilon/2.$$

Un número finito de estos entornos

$$\mathrm{V}(x_1), \ldots, \mathrm{V}(x_r)$$

cubren K. Para cada $i\ (1 \leqslant i \leqslant r)$ existe un $n_0(x_i)$ tal que

$$n \geqslant n_0(x_i) \Longrightarrow f_n(x) \leqslant \epsilon/2 + f_{m(x_i)}(x).$$

Sea N el mayor de los $n_0(x_i)$ y sea $t \in \mathrm{K}$. Para algún i, $t \in \mathrm{V}(x_i)$. Para este i se tiene si $n \geqslant \mathrm{N}$

$$f_n(t) - f(t) \leqslant \epsilon/2 + f_{m(x_i)}(t) - f(t) < \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon.$$

Esto es, dado $\varepsilon > 0$, hemos encontrado N tal que si $n \geqslant \mathrm{N}$,

$$|f_n(t) - f(t)| < \epsilon$$

para $t \in \mathrm{K}$.

Para terminar la demostración del lema 3 tenemos que probar que dados $m \in \mathbb{N}$ y $\varepsilon > 0$ existe n_0 tal que

$$n \geqslant n_0 \quad \text{y} \quad x \in \mathrm{K} \Longrightarrow \sqrt[n]{u_n(x)} \leqslant \epsilon + \sqrt[m]{u_m(x)}.$$

Observemos en primer lugar que u_n es continua y se verifica

$$u_{n+m}(x) \leqslant u_n(x)\, u_m(x).$$

Dado m, sea $n \in \mathrm{N}$; dividiendo se obtiene $n = q\,m + r$, con $0 \leqslant r < m$. Entonces

$$u_n(x) \leqslant u_m(x) \overset{q)}{\ldots} u_m(x)\, u_r(x) = u_m(x)^q\, u_r(x).$$

Tomando la raíz n-ésima

$$\sqrt[n]{u_n(x)} \leqslant \left(\sqrt[m]{u_m(x)}\right)^{\frac{q\,m}{n}} (u_r(x))^{\frac{1}{n}}$$

Como $\sqrt{u_m(x)}$ es función continua en K, tiene un máximo en K. Sea M. La función $(x, \alpha) \longmapsto x^\alpha$ definida en el rectángulo

$$[0, \mathrm{M}] \times [1 - \delta, 1 + \delta]$$

con $0 < \delta < 1$ es continua. Por tanto, uniformemente continua. Existe entonces δ' tal que $0 < \delta' < 1$ y

$$(x, \alpha) \in [0, \mathrm{M}] \times [1 - \delta', 1 + \delta'] \Longrightarrow |x^\alpha - x| < \varepsilon/3.$$

Por tanto, a partir de un n'_0 se verifica

$$n \geqslant n'_0 \Longrightarrow \left(\sqrt[m]{u_m(x)}\right)^{\frac{q\,m}{n}} \leqslant \sqrt[m]{u_m(x)} + \varepsilon/3.$$

Para $0 \leqslant r < m$, $u_r(x)$ está acotado por una constante L. Para $y \leqslant \mathrm{L}$ y $\alpha > 0$ es $y^\alpha \leqslant \mathrm{L}^\alpha$ y $\lim\limits_{\alpha \to 0} \mathrm{L}^\alpha = 1$; existe, por tanto, un n_0'' tal que

$$n \geqslant n_0'' \quad \text{y} \quad 0 \leqslant r < m \Longrightarrow \sqrt[n]{u_r(x)} \leqslant 1 + \varepsilon'.$$

Tomemos $\varepsilon' \leqslant \min\{2/3, \varepsilon/(3\,\mathrm{M})\}$.

Sea ahora $n_0 = \text{máx.}\{n'_0, n_0''\}$ y sea $n \geqslant n_0$, se tiene:

$$\sqrt[n]{u_n(x)} \leqslant \left[\sqrt[m]{u_m(x)} + \varepsilon/3\right][1 + \varepsilon'] \leqslant \sqrt[m]{u_m(x)} + \varepsilon/3 + \mathrm{M}\,\varepsilon' +$$

$$+ \varepsilon'\,\varepsilon/3 \leqslant \sqrt[m]{u_m(x)} + \varepsilon.$$

Podemos ahora probar que una serie de potencias converge uniformemente en compactos.

Proposición 11.—*Sea $S = \Sigma\, \mathrm{a_n} X^{\mathrm{n}}$ una serie de potencias en un álgebra de Abel con radio $R > 0$. La serie $\Sigma\, \mathrm{a_n}\, \mathrm{z^n}$ converge uniformemente en compactos de $\{\mathrm{z} \mid \mathrm{z} \in A,\ \mathrm{p_0}(\mathrm{z}) < R\}$ hacia $S(\mathrm{z})$.*

Sea K un compacto contenido en

$$\{ z \mid \in A,\ p_0(z) < R \}.$$

Sea $p \in \overline{\Gamma}_A$ una seminorma. Debemos probar que dado $\varepsilon > 0$, existe n_0 tal que

$$n \geqslant n_0 \quad \text{y} \quad z \in K \quad p\Big(\sum_{n \geq n_0} a_n z^n \Big) \leqslant \varepsilon.$$

Consideremos las funciones $p(z^n)$ definidas en K. Se verifica

$$p(z^{n+m}) \leqslant p(^n)\, p(z^m).$$

Según el lema 3, $\sqrt[n]{p(z^n)}$ converge simplemente en K. Por ser A un álgebra de Abel, sabemos que su límite es $p_0(z)$. Además, en un álgebra de Abel, $p_0(z)$ y $p(z^n)$ son funciones continuas. Por el lema 3 se tiene

$$\lim \sqrt[n]{p(z^n)} = p_0(z)$$

uniformemente en K. En K, $p_0(z) < R$. Pero por ser K compacto, será $p_0(z) < r$ para un cierto $r < R$ y todo $z \in K$.

Sea $r < r' < R$; como el límite se alcanza uniformemente en K existe m_0 tal que

$$n \geqslant m_0 \Rightarrow p(z^n) \leqslant r'^n.$$

Se puede entonces encontrar una constante M tal que

$$z \in K \Rightarrow p(z^n) < M\, r'^n.$$

Sabemos que R es el radio de convergencia de S; así, pues, tomando $r' < \rho < R$ se tiene

$$\overline{\lim} \sqrt[n]{p(a_n)} \leqslant 1/\rho.$$

Existe entonces n_0 tal que $n \geqslant n_0$ implica

$$p\Big(\sum_{n \geq n_0} a_n z^n \Big) \leqslant \sum_{n \geq n_0} p(a_n)\, M\, r'^n < \varepsilon$$

ya que $r' < \rho$.

El teorema análogo en el caso clásico permite asegurar que la función S (z) asociada a una serie de potencias convergente es continua. Como las álgebras de Abel no son, en general, localmente compactas, este razonamiento no es válido aquí. A pesar de todo, la función S (z) es continua, pero éste es un resultado que hay que ligarlo al criterio de analiticidad que estudiaremos a continuación. La convergencia uniforme nos será, sin embargo, útil para probar la existencia del desarrollo de Taylor de las funciones regulares.

Clásicamente se definen las funciones analíticas como funciones definidas en un abierto y conexo de $\mathbb{C}$ qu een cada punto admiten un desarrollo en serie de potencias. Esta definición es conveniente por el hecho de que los conjuntos donde convergen las series de potencias (los discos) forman una base de la topología de $\mathbb{C}$.

En un álgebra de Abel los «d'scos»

$$\{ z \mid z \in A,\ p_0(z) < R \}$$

no forman una base. Aparece de este modo aquí la necesidad de considerar la topología en A para la que estos discos forman una base Evidentemente esta topología es la definida por la seminorma p_0, por tanto no es separada. Hemos usado $\mathcal{T}$ para designar la topología en A que hace de A un álgebra de Abel. Llamaremos $\mathcal{T}_0$ a esta nueva topología. $\mathcal{T}_0$ es la topología menos fina que hace continua la aplicación φ A $\to \mathbb{C}$. Si U es abierto de $\mathbb{C}$, φ^{-1} (U) es abierto de A para $\mathcal{T}_0$; recíprocamente, si V es abierto de A para $\mathcal{T}_0$, φ (V) es un bierto de $\mathbb{C}$ y V $= \varphi^{-1} (\varphi (V))$. Estas consideraciones hacen trivial el hecho de que un abierto V de A para $\mathcal{T}_0$ es conexo si y sólo si lo es φ (V).

Llamaremos *región* de A un conjunto de A no vacío abierto y conexo para $\mathcal{T}_0$. Dada una región de A Ω, $\varphi (\Omega)$ será una reg'ón de $\mathbb{C}$; recíprocamente, si G es una región de $\mathbb{C}$, φ^{-1} (G) es una región de A.

Siempre que hablemos de la topología o de algún concepto topológico en un álgebra de Abel, se entenderá que nos referimos a la topología $\mathcal{T}$, salvo que se indique lo contrario. El concepto de región, sin embargo, se referirá siempre al definido arriba.

Podemos definir el concepto de función analtica.

DEFINICIÓN 3.—*Sea A un álgebra de Abel; Ω una región de A; f : $\Omega \to$ A una aplicación. Diremos que* f *es analítica si para cada* a $\in \Omega$ *existe una serie de potencias con coeficientes en A y radio no nulo* $S = \Sigma a_n X^n$ *tal que* $f(z) = S(z - a)$ *en un entorno en* $\mathcal{T}$ *de* a.

Nota.—Probaremos más adelante que en este caso $f(z) = S(z - a)$ en un entorno para $\mathcal{T}_0$ de a.

Admitiendo la nota que probaremos cuando establezcamos el teorema de Cauchy, vamos a estudiar una relación importante entre las funciones analíticas clásicas y las aquí definidas.

PROPOSICIÓN 12.—*Sea* $f : \Omega \to A$ *una función analítica definida en la región* Ω *del álgebra de Abel A. Pongamos* $\varphi(\Omega) = G$. *Existe una función analítica única* $g : G \to \mathbb{C}$ *que hace conmutativo el diagrama*

$$\begin{tikzcd} \Omega \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\varphi"'] & A \arrow[d, "\varphi"] \\ G \arrow[r, "g"] & \mathbb{C} \end{tikzcd}$$

Sea $\alpha \in G$. Existe $a \in \Omega$ tal que $\varphi(a) = \alpha$; f admite un desarrollo en serie en un entorno (en $\mathcal{T}_0$) de a. Es decir,

$$f(z) = \Sigma\, a_n (z - a)^n$$

para $\varphi(z) \in \Delta_\alpha$, donde Δ_α es un disco de centro α en $\mathbb{C}$.

Como φ es continua

$$\varphi(f(z)) = \Sigma\, \varphi(a_n)(w - \alpha)^n,$$

donde hemos puesto $w = \varphi(z)$. Además, la serie del segundo miembro converge con seguridad. Basta poner para

$$w \in \Delta_\alpha \; g(w) = \Sigma\, \varphi(a_n)(w - \alpha)^n$$

y se tiene que g es analítica en Δ_α y tal que para $\varphi(z) \in \Delta_\alpha$

$$\varphi(f(z)) = g(\varphi(z)).$$

$G \subset \Omega$ y podemos definir g en G por

$$g(w) = \varphi \circ f(w).$$

Si hubiese solución al problema sería esa g, pero el razonamiento anterior prueba que esa g es analítica en G y verifica la condición del teorema.

Vamos a probar a continuación un criterio de analiticidad.

PROPOSICIÓN 13.—*Sea $S = \Sigma a_n X^n$ una serie de potencias con coeficientes en un álgebra de Abel A y radio no nulo R. La función asociada S definida en la región*

$$\Delta_R = \{ x \mid x \in A,\ p_0(x) < R \}$$

es analítica.

Más exactamente: las derivadas sucesivas de S tienen el mismo radio que S y si $a \in \Delta_R$, la serie

$$S_a = (S^{(n}(a)/n!)\, X^n$$

tiene radio mayor o igual que $R - p_0(a)$ y se verifica

$$S(z) = S_a(z - a)$$

para

$$z - a \in \{ x \mid x \in A,\ p_0(x) < R - p_0(a) \}.$$

La derivada r-ésima es

$$S^{(r} = \sum_s ((r+s)!/s!)\, a_{r+s}\, X^s$$

y sabemos que el radio de esta serie es R (proposición 10). Por tanto, los números $s^{(n}(a)$ están definidos, así como la serie S_a.

La serie S_a conduce de manera natural a la serie doble

$$\sum_{r,s} ((r+s)!/r!\,s!)\, a_{r+s}\, a^s (z-a)^r.$$

Trataremos de ver que es absolutamente convergente para

$$z - a \in \{ x \mid x \in A,\ p_0(x) < R - p_0(a) \}.$$

Sea $p \in \overline{\Gamma}_A$ una seminorma de A. Pongamos $\rho = R - p_0(a)$. Entonces $p_0(z - a) < \rho$. Sabemos que

$$\lim \sqrt[n]{p\{(z-a)^n\}} = p_0(z-a).$$

Luego si

$$p_0(z-a) < r_1 < \rho$$

existe un M tal que

$$p\{(z-a)^n\} \leqslant M\, r_1{}^n.$$

Análogamente, como

$$p_0(z-a) < r_1 < R - p_0(a)$$

existe r_2 tal que

$$p_0(a) < r_2 < R - r_1,$$

ya que

$$p_0(z-a) + p_0(a) < r_1 + p_0(a) < R.$$

Existe entonces un N tal que

$$p(a^n) \leqslant N\, r_2{}^n.$$

Entonces

$$\sum_{r\,s} p\{((r+s)!/r!\,s!)\, a_{r+s}\, a^s (z-a)^r\} \leqslant \sum_{r\,s} ((r+s)!/r!\,s!)\, p(a_{r+s})\, N\, M\, r_1{}^r\, r_2{}^s$$

$$= N\, M \sum_n p(a_n)(r_1 + r_2)^n < +\infty,$$

pues $r_1 + r_2 < R$, y como R es el radio de S.

$$\overline{\lim} \sqrt[n]{p(a_n)} \leqslant (1/R).$$

Por la proposición 6 la familia es sumable y pueden reagruparse sus términos; vamos a hacerlo de dos maneras distintas.

Una primera agrupación proporciona

$$\sum_{r\,s} ((r+s)!/r!\,s!)\, a_{r+s}\, a^s (z-a)^r = \sum_n a_n \sum \binom{n}{p} (z-a)^p a^{n-p} =$$

$$= \sum a_n z^n = S(z).$$

Otra agrupación es

$$\sum ((r+s)!/r!\,s!)\, a_{r+s}\, a^s (z-a)^r = \sum_r (z-a)^r \Big((1/r!) \sum_s (r+s)!/s!\, a_{r+s}\, a^s \Big)$$

$$= \sum (z-a)^r (S^r(a)/r!) = S_a(z-a).$$

Esto implica, por un lado, que e lradio de S_a es como mínimo $p_0(z-a)$, que lo hemos tomado de cualquier modo siempre menor que $R - p_0(a)$; es decir, el radio de S_a es mayor o igual a $R - p_0(a)$. En segundo lugar, $S(z) = S_a(z-a)$, lo que prueba la analiticidad de S.

Vamos a continuación a obtener algunas consecuencias del teorema anterior.

Proposición 14.—*Sea A un álgebra de Abel;* $f : \Omega \to A$ *una función analítica definida en una región* Ω *de A.* f *es entonces continua en* Ω.

Sea $a \in \Omega$; vamos a probar la continuidad de f en a. Existe una serie de potencias S de radio no nulo tal que en un entorno V de a se tiene $f(z) = S(z-a)$. Como la aplicación que pasa de z a $z-a$ es continua en a, basta probar la continuidad de $S(z)$ en 0. Pero esto es trivial, pues si

$$S = \sum_{n \geq 0} a_n X^n$$

sea $p \in \overline{\Gamma}_A$ y demos $\varepsilon > 0$. Se tiene $S(0) = a_0$ y

$$p(S(z) - S(0)) = p\Big(\sum_{n\geq 1} a_n z^n \Big) \leqslant \sum_{n \geq 1} p(a_n)\, p(z^n) \leqslant \sum_{n \geq 1} p(a_n)\, p(z)^n.$$

Pero la serie S tiene radio no nulo y por la proposición 7 se deduce que

$$\sum_{n \geq 1} p(a_n) X^n$$

tiene un radio mayor o igual. La función definida por esta serie es continua y se anula en 0 luego existe δ tal que

$$p(z) < \delta \Longrightarrow p(S(z) - S(0)) < \epsilon.$$

PROPOSICIÓN 15. — *Sea A un álgebra de Abel;* f : $\Omega \to A$ *una función analítica. Sea* a $\in \Omega$. *En un entorno de* a (*salvo en* a) *está definido el cociente incremental*

$$(f(z) - f(a))/(z - a) = g(z)$$

y existe el límite de g (z) *cuando* z $\to$ a.

Nota.—Cuando A no sea anillo de integridad no podemos asegurar que el cociente incremental sea único; pero veremos que existe una g tal que

$$(z - a)\, g(z) = f(z) - f(a)$$

que verifica las condiciones del enunciado. Más adelante se puede probar que éste que definimos aquí es el único cociente continuo.

Por la proposición 13 sabemos que puede escribirse

$$f(z) = f(a) + S(z - a),$$

donde S es una serie de primer coeficiente nulo. Pongamos entonces $g(z) = T(z - a)$, donde T es la única serie tal que X T = S. Sabemos que la serie T tiene el mismo radio que la S y además

$$f(z) = f(a) + b(z - a) + b_2(z - a)^2 + \ldots$$

Es evidente, después de la proposición 14, que existe el límite de $g(z)$. Puede asegurarse que el límite coincide con el valor de la serie derivada en a. Basta comparar las demostraciones de las proposiciones 13 y 15.

Por último, veamos que una función analítica es diferenciable. Usaremos la teoría de la diferenciabilidad desarrollada en J. Arias de Reyna (tesis).

PROPOSICIÓN 16. — *Sea A un álgebra de Abel;* f $: \Omega \to A$ *una función analítica. Sea* a $\in \Omega$. f *es diferenciable en* a *y la diferencial tiene la forma* D f (a) (x) = b · x. *Donde* b $\in A$ *es el coeficiente de* (z — a) *en el desarrollo de* f *en el entorno de* a.

Sea

$$f(z) = f(a) + b(z - a) + b_2 (z - a)^2 + \dots$$

el desarrollo de $f(z)$ en el entorno de a. Pongamos

$$r(z - a) = f(z) - f(a) - b(z - a) = b_2 (z - a)^2 + \dots$$

Basta probar que r es resto.

r es continua en un entorno de 0, luego dado K compacto que contiene a a, existe un entorno de a tal que $r(V \cap K)$ es relativamente compacto. Sólo queda ver que

$$\lim (1/t)\, r(t z) = 0$$

tomando el límite cuando $t \to 0$ y $z \in K$. Esto es

$$\lim (b_2\, t z^2 + b_3\, t^2 z^3 + \dots) = 0.$$

Es decir,

$$z \cdot \lim (b_2 (t z) + b_3 (t z)^2 + \dots) = 0.$$

Por ser K compacto y la función

$$b_2 z + b_3 z^2 + b_4 z^3 + \dots$$

continua en cero, el resultado es trivial.

Llamemos L A el conjunto de aplicaciones lineales continuas de A en A definidas por cada elementos $a \in A$ por ser $x \longmapsto a x$. Hemos visto que si f es analítica en a, $D f(a) \in$ L A. Estas son precisamente las condiciones de Cauchy-Riemann en el caso clásico, de manera que podemos esperar la validez de la proposición:

PROPOSICIÓN 17.—*Sea A un álgebra de Abel;* f : $\Omega \to A$ *una función definida en una región* Ω *de* A. *Condición necesaria y suficiente para que* f *sea analítica en* Ω *es que* f *sea diferenciable en todo punto de* Ω *y se verifiquen las condiciones de Cauchy-Riemann. Esto es, que* D f (a) $\in L A$ *para todo* a $\in \Omega$.

La demostración la pospondremos hasta que dispongamos de la teoría de la integración.

BIBLIOGRAFÍA

ARIAS DE REYNA, J.: *Diferenciación en espacios vectoriales topológicos*. Tesis doctoral. Sevilla (1973).

— — *Prolongación de seminormas multiplicativas*. Comunicación presentada en las II Jornadas Matemáticas Hispano-Lusitanas (1973).

BOUBARKI, N.: *Topologie générale*, Chap 2 y 3, 3.ª edition, Hermann, Paris (1960).

— — *Topologie générale*, Chap 9, Nouvelle édition, Hermann, Paris (1958).

— — *Algèbre Commutative*, Chap. 1 a 7, Hermann, Paris.

CARTAN, H.: *Seminaire Henri Cartan* 1951-52, 1953-54. W. A. Benjamin, Inc. (1967).

MICHAEL, E. A.: *Locally multiplicatively-convex topological Algebras*. Memoirs of the «Amer. Math. Soc.», number 11, Providence R. I. (1952).

PÓLYA, G., y SZEGÖ, G.: *Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis*, 3rd. ed., 2 vols., Springer, Berlin (1964).

RICKART, C.: *Generl theory of Banach algebras*. D. Van Nostrand, New York (1960).

RAYNAUD, M.: *Anneaux Locaux Henséliens*. «Lectures Notes», número 169. Springer Verlag (1970).