==
C. R. Acad. Sci. Paris, t. 327, Série IIb, p. 000–000, 1998
Problèmes mathématiques de la mécanique/*Mathematical Problems in Mechanics*

Effet de la rugosité sur un fluide laminaire avec conditions de Fourier

Youcef AMIRAT [a], Blanca CLIMENT [b], Enrique FERNANDEZ-CARA [b], Jacques SIMON [a]

[a] Laboratoire de Mathématiques Appliquées, Université Blaise Pascal et CNRS, 63177 Aubière cedex, France.
amirat@ucfma.univ-bpclermont.fr, simon@ucfma.univ-bpclermont.fr.

[b] Dpto. de Ecuaciones Diferenciales y Análisis Numérico, Universidad de Sevilla, Aptdo. 1160, 41080 Sevilla, Espagne.
blanca@numer.us.es, cara@numer.us.es.

(Reçu le 30 mai 2000, accepté le 30 juin 2000)

Résumé. On étudie l'effet de la rugosité d'une paroi sur l'écoulement d'un fluide gouverné par les équations de Stokes avec des conditions aux limites de Fourier. On calcule l'écoulement limite et on donne des estimations, en fonction de la taille ε des aspérités, de l'écart entre la vitesse, la pression et la traînée et leurs limites. Dans le cas particulier d'une plaque, la trainée limite est strictement supérieure à celle de la paroi lisse, contrairement à ce que donne la condition aux limites de Dirichlet.

Effect of rugosity on the flow of a laminar fluid with Fourier conditions

Abstract. *The effect of tiny asperities covering a wall on a flow governed by Stokes equations with Fourier boundary conditions is investigated. We calculate the limit flow and we give estimates of the deviations of the drag, velocity field and pressure, in terms of the size ε of the asperities. In the particular case of a plate, the limit drag is larger than the drag of the smooth wall, in contrast with the situation found for Dirichlet boundary conditions.*

Abridged English Version

The flow past an infinite rugose wall $\mathcal{R}_\varepsilon$ covered with periodically distributed asperities of size ε is investigated. The region occupied by the fluid is

$$\mathcal{O}_\varepsilon = \{x \in \mathbb{R}^3 : x = (x', x_3),\ x' = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2,\ 0 < x_3 < r_\varepsilon(x')\}$$

where $r_\varepsilon(x') = r(x')(1+\varepsilon\,\eta(x', x'/\varepsilon))$, the function $\eta = \eta(x', y')$ being periodic with respect to both variables x' and y'. The fluid is described by the following Stokes system and Fourier boundary conditions:

$$\begin{cases} -\nu\Delta u_\varepsilon + \nabla p_\varepsilon = 0, \quad \nabla\,.\,u_\varepsilon = 0 \ \text{ in } \mathcal{O}_\varepsilon, \\ \sigma_\varepsilon\,.\,n_\varepsilon + k u_\varepsilon = 0 \ \text{ on } \mathcal{R}_\varepsilon, \\ \sigma_\varepsilon\,.\,n_\varepsilon + k(u_\varepsilon - g) = 0 \ \text{ on } \mathcal{P}, \end{cases}$$

where σ_ε is the stress tensor, n_ε is the normal and k is a friction coefficient.

Note présentée par Evariste SANCHEZ-PALENCIA.

More precisely, we consider the unique solution $(u_\varepsilon, p_\varepsilon) \in (H^1_{\mathrm{per}}(\Omega_\varepsilon))^3 \times L^2_{\mathrm{per}}(\Omega_\varepsilon)$, where H^m_{per} is defined by (3), $\Omega_\varepsilon = \{x \in \mathcal{O}_\varepsilon : x' \in S\}$ and $S = (0, \ell_1) \times (0, \ell_2)$. The drag of the corresponding part of wall is

$$T_\varepsilon = -g \,.\, \int_{R_\varepsilon} \sigma_\varepsilon \,.\, n_\varepsilon \, ds,$$

where $R_\varepsilon = \{x : x' \in S,\ x_3 = r_\varepsilon(x')\}$.

The limit flow as $\varepsilon \to 0$ is the solution $(u_0, p_0) \in (H^1_{\mathrm{per}}(\Omega))^3 \times L^2_{\mathrm{per}}(\Omega)$ of the following Stokes problem:

$$\begin{cases} -\nu\Delta u_0 + \nabla p_0 = 0, \quad \nabla \,.\, u_0 = 0 \ \text{ in } \mathcal{O}, \\ \sigma_0 \,.\, n + K u_0 = 0 \ \text{ on } \mathcal{R}, \\ \sigma_0 \,.\, n + k(u_0 - g) = 0 \ \text{ on } \mathcal{P}, \end{cases}$$

where $\mathcal{O}$ is the limit domain, which is bounded on the top by the wall without asperities $\mathcal{R}$.

Notice that, in the condition on $\mathcal{R}$, the drag coefficient K is different from k; this is the asymptotic effect of rugosity. The limit drag is

$$T_0 = -g \,.\, \int_R \sigma_0 \,.\, n \, ds.$$

Assuming that $r \in W^{3,\infty}(\mathbb{R}^2)$, we prove (théorème 1) that

$$|T_\varepsilon - T_0| \le C\sqrt{\varepsilon}$$

for all sufficiently small $\varepsilon > 0$.

We also prove that $u_\varepsilon - u_0$ and $p_\varepsilon - p_0$ converge to zero at least as quickly as $\sqrt{\varepsilon}$ in $(H^1_{\mathrm{loc}}(\Omega))^3$ and $L^2_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, respectively. More precisely, we prove that for any $\delta > 0$ there exists $C_\delta > 0$ such that

$$||u_\varepsilon - u_0||_{H^1(\omega_\delta)} \le C_\delta \sqrt{\varepsilon}, \quad ||p_\varepsilon - p_0||_{L^2(\omega_\delta)} \le C_\delta \sqrt{\varepsilon}$$

for all sufficiently small $\varepsilon > 0$. Here, ω_δ stands for the open set

$$\omega_\delta = \{x \in \mathbb{R}^3 : x' \in S,\ 0 < x_3 < r(x') - \delta\}.$$

In the particular case of a flat plate covered with asperities, we check that the limit drag T_0 is strictly larger than the drag T of the associate smooth plate. More precisely, *see* (4), we find the following :

$$\lim_{\varepsilon \to 0} T_\varepsilon = T_0 = \frac{\nu\, \ell_1\, \ell_2\, k\, \langle m \rangle\, |g|^2}{\nu(1 + \langle m \rangle) + \ell_3\, k\, \langle m \rangle} > \frac{\nu\, \ell_1\, \ell_2\, k\, |g|^2}{2\,\nu + \ell_3\, k} = T.$$

---

1. Modélisation d'une paroi rugueuse

On considère un fluide dont la vitesse $u = (u_1, u_2, u_3)$ et la pression p satisfont les équations de Stokes et les conditions aux limites de Fourier suivantes :

$$\begin{cases} -\nu\Delta u + \nabla p = 0, \quad \nabla \,.\, u = 0 \ \text{ dans } \mathcal{O}, \\ \sigma \,.\, n + k u = 0 \ \text{ sur } \mathcal{R}, \\ \sigma \,.\, n + k(u - g) = 0 \ \text{ sur } \mathcal{P}. \end{cases} \tag{1}$$

Le domaine
$$\mathcal{O} = \{x \in \mathbb{R}^3 : x = (x', x_3),\ x' = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2,\ 0 < x_3 < r(x')\}$$
est non borné et limité inférieurement par une plaque plane $\mathcal{P}$ et supérieurement par une paroi $\mathcal{R}$ qui supportera les aspérités. Ici, $\nu > 0$, $k > 0$ et $g = (g', 0)$ sont constants et donnés et n est la normale unitaire extérieure à $\mathcal{O}$. Le tenseur des contraintes est défini par $\sigma = 2\nu\, e(u) - p\, I$ où $e(u) = \frac{1}{2}(\nabla u + {}^t\nabla u)$ et $\sigma \,.\, n$ est le vecteur de composantes $(\sigma \,.\, n)_i = \sum_j \sigma_{ij}\, n_j$. La fonction r est lipschitzienne, strictement positive et périodique en x_1 et x_2, de périodes ℓ_1 et ℓ_2. On considère alors les solutions (u, p) de (1) qui sont périodiques en x_1 et x_2, de périodes ℓ_1 et ℓ_2.

Les conditions imposées sur $\mathcal{P}$ et $\mathcal{R}$ sont de type Fourier. Si le coefficient de friction k est "grand", elles sont, au moins formellement, des approximations des conditions d'adhérence usuelles $u = 0$ sur $\mathcal{R}$ et $u = g$ sur $\mathcal{P}$. Il serait plus "réaliste" de supposer que le fluide satisfait les conditions de glissement suivantes
$$\begin{cases} u \,.\, n = 0, \quad (\sigma \,.\, n)_t + ku = 0 \ \text{ sur } \mathcal{R}, \\ u \,.\, n = 0, \quad (\sigma \,.\, n)_t + k(u - g) = 0 \ \text{ sur } , \end{cases}$$
où $(\sigma \,.\, n)_t$ est la composante tangentielle de $\sigma \,.\, n$. Malheureusement, on ne sait pas démontrer un résultat analogue au théorème 1 lorsque u et p satisfont ces conditions.

On note $S = (0, \ell_1) \times (0, \ell_2)$ la section de base et
$$\Omega = \{\ x \in \mathbb{R}^3 \ :\ x' \in S,\ 0 < x_3 < r(x')\ \}$$
la partie bornée du domaine limitée par les portions de parois
$$R = \{x : x' \in S,\ x_3 = r(x')\} \ \text{ et } \ P = \{x : x' \in S,\ x_3 = 0\}$$
et par la frontière latérale immatérielle $L = \{(x', r(x')) : x' \in \partial S\}$. La traînée engendrée par la portion R de paroi est
$$T = -g \,.\, \int_R \sigma \,.\, n\, ds = g \,.\, \int_R ku\, ds.$$

On note $\mathcal{R}_\varepsilon$ la paroi supérieure une fois couverte d'aspérités de petite taille, d'ordre ε. Plus précisément, son profil est donné par
$$r_\varepsilon(x') = r(x')\Big(1 + \varepsilon\, \eta\Big(x', \frac{x'}{\varepsilon}\Big)\Big),$$
où la fonction $\eta = \eta(x', y')$ est lipschitzienne sur S^2 et périodique par rapport à chaque variable et
$$\varepsilon\, \|\eta\|_\infty \le \tfrac{1}{2}, \quad \varepsilon^{-1} \text{ est entier.} \tag{2}$$
Cette dernière hypothèse permet de disposer un nombre entier d'aspérités dans la section de base S ; elle pourrait être évitée.

On note $\mathcal{O}_\varepsilon$ le domaine correspondant, $(u_\varepsilon, p_\varepsilon)$ la solution de (1) dans $\mathcal{O}_\varepsilon$, Ω_ε la partie bornée de base S, et T_ε la traînée correspondante. Plus exactement, on s'intéresse à l'unique solution telle que
$$(u_\varepsilon, p_\varepsilon) \in (H^1_{\mathrm{per}}(\Omega_\varepsilon))^3 \times L^2_{\mathrm{per}}(\Omega_\varepsilon),$$
où, pour $m \ge 0$,
$$H^m_{\mathrm{per}}(\Omega_\varepsilon) = \{v \in H^m_{\mathrm{loc}}(\mathcal{O}_\varepsilon) : v\big(x + (\ell_1, 0, 0)\big) = v\big(x + (0, \ell_2, 0)\big) = v(x) \ \text{ p.p.}\}. \tag{3}$$
L'existence et l'unicité d'une solution dans cet espace se démontre par une méthode variationnelle.

2. Effet de la rugosité

On s'intéresse au comportement limite, quand ε tend vers 0, de la solution $(u_\varepsilon, p_\varepsilon)$ et de la traînée T_ε. Avec une condition aux limites d'adhérence sur R_ε, l'effet de la rugosité est négligeable puisque, d'après [2], T_ε tend vers la traînée de la paroi lisse. Ici, au contraire, la limite T_0 obtenue est distincte de la traînée de la paroi lisse. Notons

$$m(x', y') = \left(\frac{1 + |\nabla r(x')|^2 + |r(x')\, \nabla_{y'} \eta(x', y')|^2 + 2\, r(x')\, \nabla r(x') \,.\, \nabla_{y'} \eta(x', y')}{1 + |\nabla r(x')|^2} \right)^{1/2},$$

$$\langle m \rangle (x') = \frac{1}{|S|} \int_S m(x', y')\, dy'.$$

Le coefficient de friction "homogénéisé" K, qui diffère de k et qui dépend de la position x', est donné par

$$K = k\, \langle m \rangle.$$

L'écoulement limite est l'unique solution $(u_0, p_0) \in (H^1_{\text{per}}(\Omega))^3 \times L^2_{\text{per}}(\Omega)$ de

$$\begin{cases} -\nu \Delta u_0 + \nabla p_0 = 0, \quad \nabla \,.\, u_0 = 0 \ \text{ dans } \mathcal{O}, \\ \sigma_0 \,.\, n + K u_0 = 0 \ \text{ sur } \mathcal{R}, \\ \sigma_0 \,.\, n + k(u_0 - g) = 0 \ \text{ sur } \mathcal{P}, \end{cases}$$

où $\sigma_0 = 2\nu e(u_0) - p_0 I$. La traînée limite est

$$T_0 = -g \,.\, \int_R \sigma_0 \,.\, n\, ds = g \,.\, \int_R K u_0\, ds.$$

Les vitesses u_ε et u_0, ayant des domaines de définition distincts, sont comparées sur le domaine suivant

$$\omega_\delta = \{ x \in \mathbb{R}^3 : x' \in S,\ 0 < x_3 < r(x') - \delta \}.$$

Plus précisément, on a le résultat suivant.

THÉORÈME 1. – *On suppose $r \in W^{3,\infty}(\mathbb{R}^2)$. Alors, il existe un réel $C > 0$ tel que, pour tout ε vérifiant* (2), *on ait :*

$$|T_\varepsilon - T_0| \le C \sqrt{\varepsilon}.$$

Pour tout $\delta > 0$, il existe C_δ et $c_\delta > 0$ tels que, pour tout $\varepsilon < c_\delta$ vérifiant (2), *on ait :*

$$||u_\varepsilon - u_0||_{H^1(\omega_\delta)} \le C_\delta \sqrt{\varepsilon}, \quad ||p_\varepsilon - p_0||_{L^2(\omega_\delta)} \le C_\delta \sqrt{\varepsilon}.$$

Remarque. – Le facteur géométrique qui intervient dans le coefficient de traînée homogénéisé est encadré par

$$\frac{1}{1 + |\nabla r(x')|^2} \le \langle m \rangle (x') \le \left(1 + \frac{r^2(x')}{1 + |\nabla r(x')|^2} \frac{1}{|S|} \int_S |\nabla_{y'} \eta(x', y')|^2\, dy' \right)^{1/2}.$$

Ce dernier terme est majoré par le rapport des surfaces des frontières, à savoir

$$\langle m \rangle (x') \le \frac{\lim_{a \to 0} \lim_{\varepsilon \to 0} |R_\varepsilon \cap B(x', a)|}{\lim_{a \to 0} |R \cap B(x', a)|}$$

où $B(x';a)$ désigne la boule de rayon a centrée en $(x', r(x'))$.

Si $\mathcal{R}$ est un plan et si les aspérités ont toutes la même taille, *i.e.* si $r(x') = \ell_3$ pour tout $x' \in S$ et si la fonction η ne dépend pas de x', la traînée T_ε du plan rugueux est supérieure à la traînée T du plan lisse. En effet, alors,

$$\lim_{\varepsilon\to 0} T_\varepsilon = T_0 = \frac{\nu\,\ell_1\,\ell_2\,k\,\langle m\rangle\,|g|^2}{\nu(1+\langle m\rangle)+\ell_3\,k\,\langle m\rangle} > \frac{\nu\,\ell_1\,\ell_2\,k\,|g|^2}{2\,\nu+\ell_3\,k} = T, \tag{4}$$

puisque $\langle m\rangle > 1$ (sauf si η est constante).

Remarque. – Des estimations analogues à celles du théorème 1, pour l'opérateur de Laplace avec une condition aux limites de Fourier ou de Neumann, sont démontrées dans [3] et [4], voir aussi [5].

Principe de démonstration du théorème 1. – On travaille sur la formulation variationnelle suivante : pour tout $\phi \in (H^1_{\text{per}}(\Omega_\varepsilon))^3$,

$$2\nu \int_{\Omega_\varepsilon} e(u_\varepsilon) \,.\, e(\phi) - \int_{\Omega_\varepsilon} p_\varepsilon \nabla \,.\, \phi + k \int_{R_\varepsilon \cup P} u_\varepsilon \,.\, \phi = k \int_P g \,.\, \phi.$$

On commence par établir deux estimations dans Ω_ε uniformes en ε. D'une part une inégalité de Korn, d'où on déduit que $||u_\varepsilon||_{(H^1(\Omega_\varepsilon))^3}$ reste borné. D'autre part, toute fonction $\psi \in L^2(\Omega_\varepsilon)$ à moyenne nulle peut être représentée par $\psi = \nabla \,.\, \phi$ avec $\phi \in (H^1_0(\Omega_\varepsilon))^3$ et

$$||\phi||_{(H^1(\Omega_\varepsilon))^3} \leq C\,||\psi||_{L^2(\Omega_\varepsilon)}. \tag{5}$$

Ensuite, on se ramène au domaine fixe Ω par une homothétie dans la direction verticale, ce qui introduit des coefficients oscillants. En notant avec un $\widehat{\ }$ les fonctions transportées, on montre par des techniques d'homogénéisation que

$$||\widehat{u}_\varepsilon - u_0 - \varepsilon u_1||_{(H^1(\Omega))^3} \leq C\,\sqrt{\varepsilon}$$

où $u_1 = x_3\,\eta(x', x'/\varepsilon)\,\partial_3 u_0$. On obtient la valeur du coefficient de friction homogénéisé en observant que, dans la formulation variationnelle transportée, la contribution de la paroi rugueuse s'écrit

$$k \int_{R_\varepsilon} u_\varepsilon \,.\, \phi\, ds = k \int_R \Big(\frac{1+|\nabla_{x'} r_\varepsilon|^2}{1+|\nabla r|^2}\Big)^{1/2} \widehat{u}_\varepsilon \,.\, \widehat{\phi}\, ds$$

et que $((1+|\nabla_{x'} r_\varepsilon|^2)/(1+|\nabla r|^2))^{1/2} \to \langle m\rangle$ quand $\varepsilon \to 0$.

Avec (5), on en déduit que

$$||\widehat{p}_\varepsilon - p_0||_{L^2(\Omega)} \leq C\,\sqrt{\varepsilon}.$$

En revenant au domaine Ω_ε, on obtient les estimations de u_ε et p_ε annoncées.

Pour la traînée, on observe que $T_\varepsilon = kg \,.\, \int_P g - u_\varepsilon\, ds$ et $T_0 = kg \,.\, \int_P g - u_0\, ds$, donc

$$|T_\varepsilon - T_0| \leq Ck\,|g|\,||u_\varepsilon - u_0||_{(H^1(\omega_\delta))^3}.$$

Les détails seront donnés dans [1].□

Remerciements

Les deuxième et troisième auteurs ont été partiellement financés par D.G.E.S. (Espagne), Projet PB98–1134. Le quatrième auteur a été financé par IBERDROLA, en tant que Professeur Invité en Sciences et Technologie à l'Université de Séville.

Références bibliographiques

[1] Y. Amirat, B. Climent, E. Fernández-Cara, J. Simon, The Stokes equations with Fourier boundary conditions on a wall with asperities, Math. Methods Appl. Sci. (à paraître).

[2] Y. Amirat et J. Simon, Influence de la rugosité en hydrodynamique laminaire, C.R. Acad. Sci. Paris, 323 Série I (1996) 313–318.

[3] G.A. Chechkin, A. Friedman et A.L. Piatnitski, Boundary value problems in domains with rapidly oscillating boundary with large height of "cogs", Prépublication.

[4] O.A. Oleinik, A.S. Shamaev et G.A. Yosifian, Mathematical problems in elasticity and homogenization, North-Holland, Amsterdam, 1992.

[5] E. Sanchez-Palencia, Non-homogeneous media and vibration theory, Lectures Notes in Physics, no 127, Springer-Verlag, Berlin, 1980.