

Trabajo Fin de Grado

Grado en Ingeniería Aeroespacial

Método numérico basado en el potencial de velocidades para la resolución de problemas linealizados no estacionarios

Autor: Pedro Remesal Nogales

Tutor: José Manuel Gordillo Arias de Saavedra-Guillaume Riboux Acher

Dep. Ingeniería Aeroespacial y Mecánica de Fluidos
Escuela Técnica Superior de Ingeniería
Universidad de Sevilla

Sevilla, 2015



Trabajo Fin de Grado
Grado en Ingeniería Aeroespacial

**Método numérico basado en el potencial de
velocidades para la resolución de problemas
linealizados no estacionarios**

Autor:

Pedro Remesal Nogales

Tutor:

José Manuel Gordillo Arias de Saavedra

Guillaume Riboux Acher

Dep. Ingeniería Aeroespacial y Mecánica de Fluidos

Escuela Técnica Superior de Ingeniería

Universidad de Sevilla

Sevilla, 2015

Trabajo Fin de Grado: Método numérico basado en el potencial de velocidades para la resolución de problemas linealizados no estacionarios

Autor: Pedro Remesal Nogales

Tutor: José Manuel Gordillo Arias de Saavedra-Guillaume Riboux Acher

El tribunal nombrado para juzgar el Proyecto arriba indicado, compuesto por los siguientes miembros:

Presidente:

Vocales:

Secretario:

Acuerdan otorgarle la calificación de:

Sevilla, 2015

El Secretario del Tribunal

1	Introducción y Motivación	1
2	Consideraciones Iniciales	2
	2.1. Ecuación de conservación de la masa	2
	2.2. Potencial de velocidades	3
	2.3. Teoría linealizada	6
	2.4. Problema simétrico y antisimétrico	7
	2.5. Ecuación de Euler-Bernoulli	9
3	Planteamiento General del Problema	11
	3.1. Determinación de incógnitas del problema	11
	3.2. Condiciones de contorno	12
	3.2.1. Condición de impenetrabilidad	12
	3.2.2. Condiciones de contorno en el borde de ataque y bordes laterales	13
	3.3. Fórmula de Green	17
	3.4. Ecuación de Resolución del Problema	26
4	Método de Resolución del Problema	28
	4.1. Discretización del Ala y Estela	28
	4.2. Factores de Influencia	29
	4.2.1. Puntos de colocación	29
	4.2.2. Método de resolución de la integral	31
	4.2.3. Cálculo de factores de influencia	38
	4.3. Montaje de Matriz de Resolución del Problema	44
	4.3.1. Dimensiones del sistema resultante	48
	4.4. Condición de Kutta	50
	4.4.1. Condición de Kutta. Caso estacionario	50
	4.4.2. Condición de Kutta. Caso no estacionario	52
	4.4.3. Introducción de la condición de Kutta en la matriz de resolución del problema	53
	4.5. Desarrollo de la Estela	55
	4.6. Cálculo del Coeficiente de Sustentación	61
	4.7. Algoritmo de Resolución del Problema	64
5	Comprobación de Resultados	65
	5.1. Caso Estacionario	65
	5.2. Aceleración Repentina de Placa Plana	67
	5.3. Placa Plana Oscilante	69
6	Propuestas de Mejora y Trabajos Futuros	73
7	Programas MATLAB Utilizados	74
	7.1. Programa 1. Caso Estacionario	74
	7.2. Programa 2. Aceleración Repentina de Placa Plana	84
	7.3. Programa 3. Placa Plana Oscilante	93

1 INTRODUCCIÓN Y MOTIVACIÓN.

Antes de comenzar con el estudio que se va a desarrollar, se van a explicar las causas que han originado su tratado, y que han llevado a la resolución del problema que se plantea.

A lo largo de las asignaturas de aerodinámica que se imparten en el grado en Ingeniería Aeroespacial, siempre se estudian problemas aerodinámicos estacionarios, donde la variable tiempo no se tiene en cuenta, y, por tanto, es necesario hacer aproximaciones del problema para poder resolverlo.

El hecho de que se consideren problemas únicamente estacionarios es debido a que el comportamiento del aire alrededor del ala de los aviones puede aproximarse de esa manera, obteniéndose soluciones de gran precisión de una forma simple y robusta.

Pero, por el contrario, esa hipótesis de considerar flujo estacionario no siempre es válida.

Existen numerosos casos que se dan en la naturaleza como el movimiento de las alas de los pájaros, el movimiento de la cola de los peces y diversas situaciones similares, que no pueden estudiarse formulando un problema estacionario, necesitan la variable tiempo para poder obtener resultados verídicos.

Es por ello, que la idea que se desarrolla en estas páginas, es formular el problema de la aerodinámica no estacionaria siguiendo razonamientos similares a los que se han hecho para plantear los problemas estacionarios que se han tratado a lo largo del grado, evitando aportar resultados a priori y justificando todos los pasos a seguir.

Por otro lado, también se van a justificar las formas de resolución de problemas que se han tratado en asignaturas de aerodinámica, como pueden ser el uso de torbellinos como soluciones elementales de la Laplaciana. Es decir, se pretende demostrar que esas soluciones elementales del problema aparecen de forma natural durante la resolución del mismo, sin necesidad de imponerlas como solución, tal y como se ha hecho hasta ahora.

Para terminar, a la vez que se formula el modelo matemático utilizado para resolver el problema, se va ir explicando cómo implementar este modelo en un método numérico que permita obtener soluciones del problema y verificar la veracidad del desarrollo matemático considerado.

2 CONSIDERACIONES INICIALES.

Para comenzar con el desarrollo de las ideas fundamentales en las que se basa la resolución matemática del problema, se van a explicar en esta sección, las consideraciones iniciales que son necesarias para comprender el método de resolución que se va a seguir.

La primera de las consideraciones o hipótesis que se van a realizar es que las deformaciones que sufre el ala debido a su movimiento no se van a tener en cuenta, es decir, se va a considerar el ala como un sólido rígido (los esfuerzos a los que está sometida no provocan deformaciones elásticas). Bien es sabido, que el ala sí está sometida a deformaciones elásticas, pero para realizar este estudio aerodinámico no estacionario preliminar, no se va a considerar tal efecto.

En segundo lugar, a lo largo de todo el desarrollo, se va a considerar que el fluido es incompresible, debido a que en las situaciones que se van a tratar se verifica que $M_\infty \ll 1$, irrotacional y además, se desprecia la viscosidad en todo el campo fluido, excluyendo las cercanías del cuerpo (capa límite). Por último, se va a considerar que no hay intercambio de calor entre el cuerpo y el fluido.

Se van a explicar ahora una serie de conceptos básicos para poder entender el planteamiento del problema considerado.

2.1 Ecuación de conservación de la masa.

La ecuación de conservación de la masa o de continuidad de la mecánica de fluidos en forma diferencial es [véase *Introducción a la Aerodinámica Potencial (Gordillo & Riboux) Capítulo 2*]:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla(\rho \cdot \vec{v}) = 0 \quad (2.1)$$

Si se desarrolla dicha ecuación:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \nabla(\vec{v}) + \vec{v} \nabla(\rho) = 0 \quad (2.2)$$

Mientras, por otro lado, la derivada sustancial de la densidad se expresa:

$$\frac{D\rho}{Dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{v} \nabla(\rho) \quad (2.3)$$

Donde, se define $D()/Dt$ como la derivada sustancial de una determinada magnitud, y representa la variación que se produce en esa magnitud considerada respecto al tiempo cuando se sigue a una determinada partícula de fluido a lo largo de su movimiento.

Sustituyendo la igualdad (2.3) en la ecuación (2.2), se obtiene el siguiente resultado:

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla(\vec{v}) = 0 \quad (2.4)$$

Por tanto, si se considera la hipótesis de fluido incompresible, la derivada sustancial de la densidad es nula, y, entonces, la ecuación de conservación de la masa (ecuación (2.4)), puede reescribirse:

$$\nabla(\vec{v}) = 0 \quad (2.5)$$

Es decir, se tiene una condición impuesta sobre el campo de velocidades que aparece en el problema para

garantizar que se cumple la ecuación de conservación de la masa.

2.2 Potencial de velocidades.

La ecuación de conservación de la energía de la mecánica de fluidos en forma diferencial puede expresarse [véase *Introducción a la Aerodinámica Potencial (Gordillo & Riboux) Capítulo 2*]:

$$\rho \frac{De}{Dt} = \rho c_v \frac{\partial T}{\partial t} + \rho c_v \vec{v} \nabla(T) = -p \nabla \cdot \vec{v} \quad (2.6)$$

Por otro lado, si se aplican el primer y segundo principio de la termodinámica:

$$\rho \frac{De}{Dt} = \rho T \frac{DS}{Dt} - p \rho \frac{D}{Dt} \left(\frac{1}{\rho} \right) = \rho T \frac{DS}{Dt} + \frac{p}{\rho} \frac{D\rho}{Dt} \quad (2.7)$$

Teniendo en cuenta la ecuación de conservación de la masa (ecuación (2.4)), la expresión (2.7) puede reescribirse:

$$\rho \frac{De}{Dt} + p \nabla(\vec{v}) = \rho T \frac{DS}{Dt} \quad (2.8)$$

Por tanto, para que se verifique la ecuación (2.6), debe cumplirse:

$$\rho T \frac{DS}{Dt} = 0 \quad (2.9)$$

Según esa expresión, el valor de la entropía permanece constante a lo largo del recorrido de una determinada partícula, luego:

$$S = c_v \ln \left(\frac{p}{\rho^\gamma} \right) = cte = S_\infty = c_v \ln \left(\frac{p_\infty}{\rho_\infty^\gamma} \right) \quad (2.10)$$

Para que se verifique la expresión (2.10), debe cumplirse:

$$\frac{p}{\rho^\gamma} = \frac{p_\infty}{\rho_\infty^\gamma} \quad (2.11)$$

Donde $()_\infty$ representa el valor de la magnitud considerada en zonas alejadas lo suficientemente aguas arriba del cuerpo como para despreciar los efectos que éste ejerce sobre ellas.

La expresión (2.11) puede reescribirse de la siguiente forma:

$$\rho = \rho_\infty \left(\frac{p}{p_\infty} \right)^{1/\gamma} \quad (2.12)$$

Mientras que, a partir de la ecuación (2.10), se obtiene:

$$p = \rho^\gamma e^{\frac{S}{c_v}} \quad (2.13)$$

Entonces, el gradiente de p puede calcularse:

$$\nabla p = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_S \cdot \nabla \rho \quad (2.14)$$

Si se calcula la derivada que aparece en la expresión (2.14), a partir de la igualdad (2.13):

$$\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s = \gamma \rho^{\gamma-1} e^{\frac{s}{c_v}} = \frac{\gamma}{\rho} \cdot \rho^\gamma e^{\frac{s}{c_v}} = \frac{\gamma}{\rho} \cdot p \quad (2.15)$$

Entonces, a partir de los resultados obtenidos en la expresión (2.15), finalmente se obtiene:

$$\nabla p = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s \cdot \nabla \rho = \frac{\gamma}{\rho} p \cdot \nabla \rho = a^2 \cdot \nabla \rho \quad (2.16)$$

Así pues, de esa igualdad (2.16) puede extraerse la siguiente expresión:

$$a^2 = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s \quad (2.17)$$

Por otro lado, la ecuación de conservación de cantidad de movimiento de la mecánica de fluidos puede escribirse en forma diferencial [véase *Introducción a la Aerodinámica Potencial (Gordillo & Riboux) Capítulo 2*]:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla(\vec{v}) = -\frac{\nabla(p)}{\rho} \quad (2.18)$$

Desarrollando, se obtiene:

$$\vec{v} \cdot \nabla(\vec{v}) = \nabla\left(\frac{v^2}{2}\right) - \vec{v} \times (\nabla \times \vec{v}) \quad (2.19)$$

Se va a definir la vorticidad como:

$$\vec{\omega} = (\nabla \times \vec{v}) = 2\vec{\Omega} \quad (2.20)$$

Siendo $\vec{\Omega}$ la velocidad angular con la que rotan los puntos materiales adyacentes a un punto material del fluido. Entonces, la ecuación (2.19) puede reescribirse:

$$\vec{v} \cdot \nabla(\vec{v}) = \nabla\left(\frac{v^2}{2}\right) - \vec{v} \times \vec{\omega} \quad (2.21)$$

Sustituyendo la expresión (2.21) en la ecuación (2.18), se obtiene:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \nabla\left(\frac{v^2}{2}\right) - \vec{v} \times \vec{\omega} = -\frac{\nabla(p)}{\rho} \quad (2.22)$$

Así pues, si se toma el rotacional en esa expresión y considerando la ecuación (2.16), resulta:

$$\frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} + \frac{1}{2} \nabla \times \nabla(\vec{v} \cdot \vec{v}) + \vec{v} \cdot \nabla \vec{\omega} + \vec{\omega} \nabla \cdot \vec{v} - \vec{\omega} \cdot \nabla \vec{v} - \vec{v} \nabla \cdot \vec{\omega} = \frac{1}{\rho^2} \nabla \rho \times \nabla p = \frac{a^2}{\rho^2} \nabla p \times \nabla p = 0 \quad (2.23)$$

Entonces, teniendo en cuenta que el rotacional de un gradiente y la divergencia de un rotacional son cero y aplicando la ecuación de continuidad, finalmente se obtiene:

$$\frac{D}{Dt} \left(\frac{\vec{\omega}}{\rho}\right) = \frac{\vec{\omega}}{\rho} \cdot \nabla \vec{v} \quad (2.24)$$

Esta ecuación impone que la derivada sustancial del vector $\vec{\omega}/\rho$ es igual al término $\vec{\omega}/\rho \cdot \nabla \vec{v}$, por tanto,

explica que la variación de la vorticidad que aparece a lo largo del recorrido de una determinada partícula, es proporcional a la propia vorticidad que posee la partícula. Así, a una distancia lo suficientemente lejos del cuerpo aguas arriba, se puede considerar que las perturbaciones que éste origina sobre las partículas fluidas son despreciables, por lo que la vorticidad en el “infinito” sería nula:

$$\vec{\omega}_{\infty} = 0 \quad (2.25)$$

Llegados a esta conclusión, según la ecuación (2.24), se cumple:

$$\frac{D}{Dt} \left(\frac{\vec{\omega}}{\rho} \right) = 0 \quad (2.26)$$

Lo cual expresa que la vorticidad de las partículas fluidas se mantiene constante a lo largo del recorrido de éstas. Y, como en el infinito, la vorticidad es nula, entonces, la vorticidad es nula a lo largo de todo el recorrido de la partícula.

Puesto que, por otro lado, la ecuación (2.20) expresa:

$$\vec{\omega} = (\nabla \times \vec{v}) = 2\vec{\Omega} \quad (2.27)$$

Entonces, se puede decir que las partículas fluidas no modifican su velocidad angular a lo largo de su recorrido, puesto que la vorticidad es constante.

Físicamente, este efecto es debido a la inexistencia de viscosidad en zonas alejadas al cuerpo, ya que, sin viscosidad, no hay fuerzas capaces de modificar la velocidad angular de las partículas, puesto que es la viscosidad la que origina fuerzas transversales en las partículas que crean momentos distintos de cero, tal y como se representa en la siguiente figura:

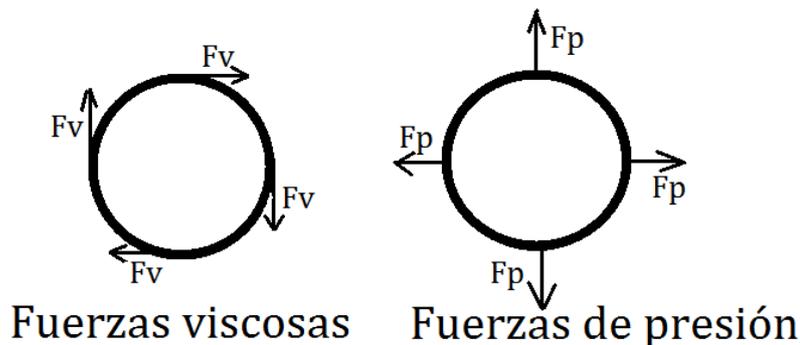


Figura 2.1. Representación de fuerzas viscosas y fuerzas de presión.

En la figura se puede observar claramente, que las fuerzas viscosas sí tienen la posibilidad de transformar la velocidad angular de las partículas, mientras que, por el contrario, las fuerzas de presión no la modifican.

Por tanto, en regiones donde no es apreciable la viscosidad, las fuerzas que actúan sobre las partículas son las fuerzas de presión, que son normales a la superficie y, por tanto, no originan momentos externos. Por eso, únicamente aparecerá vorticidad en aquellas regiones cercanas a la superficie del cuerpo donde sí son apreciables los efectos de viscosidad.

Por ello, en todo el dominio fluido exceptuando la capa límite puede escribirse:

$$\vec{\omega} = 0 = \nabla \times \vec{v} \quad (2.28)$$

Así pues, como el rotacional del campo de velocidades es cero, se puede decir que el campo de velocidades proviene de un gradiente:

$$\vec{v} = \nabla\phi \quad (2.29)$$

Donde la función ϕ se denomina potencial de velocidades.

2.3 Teoría linealizada.

Para la resolución del problema considerado, va a ser fundamental utilizar los resultados que propone la teoría linealizada, es por eso importante explicar los fundamentos e hipótesis en las que ésta se basa.

Se considera un ala sobre la que incide una corriente con velocidad " \vec{U}_∞ " según la dirección del eje "x", tal y como se representa en la siguiente imagen:

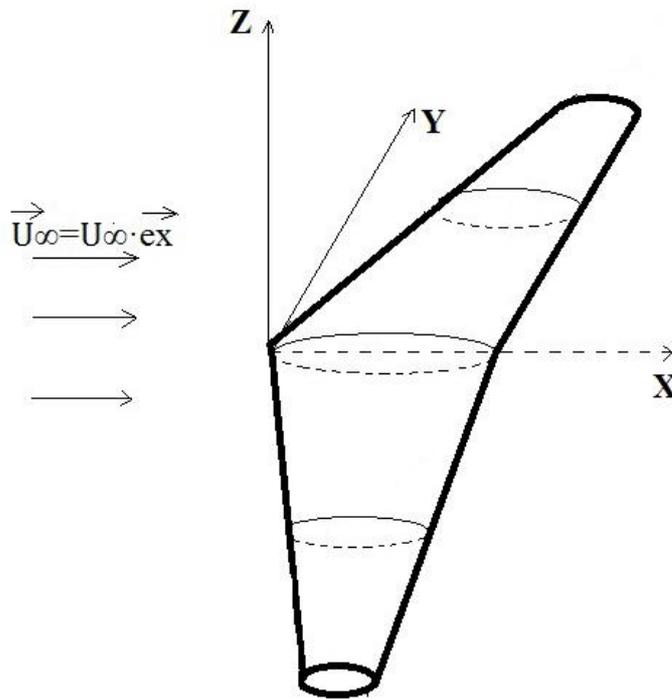


Figura 2.2. Ala con corriente incidente.

Si se hace un corte por un plano $y = cte$ cualquiera, se obtiene un perfil de la forma:

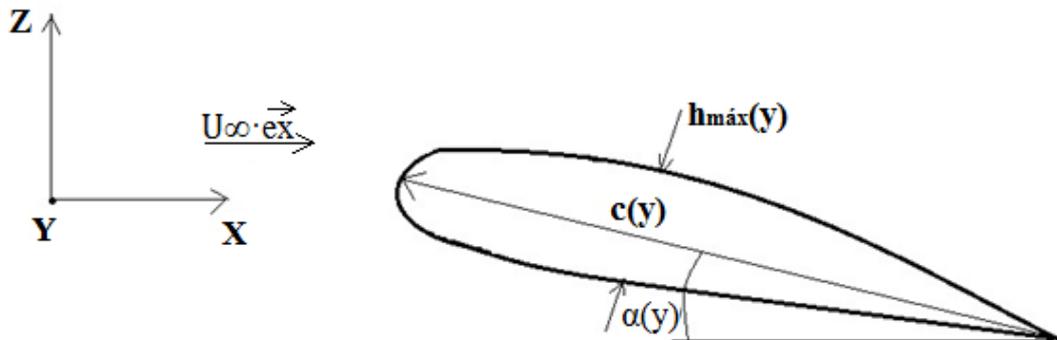


Figura 2.3. Corte por un plano $y = cte$.

Como en el ala no existirán grandes variaciones a lo largo del eje y , se puede considerar:

$$h_{m\acute{a}x}(y) \sim h_{m\acute{a}x}(y=0) = h_0; \quad \alpha(y) \sim \alpha(0) = \alpha_0; \quad c(y) \sim c(0) = c_0; \quad (2.30)$$

La hipótesis fundamental de la teoría linealizada se basa en lo siguiente:

Si se verifica que: $\alpha_0 \ll 1$; $h_0 \ll C_0, b$ donde b es la envergadura del ala, entonces se puede suponer que el ala provoca pequeñas perturbaciones sobre la corriente incidente, de forma que el campo de velocidades, presiones y densidades se puede expresar de la siguiente manera:

$$\vec{v}(\vec{x}) = \vec{U}_\infty + \vec{v}'(\vec{x}); \quad p(\vec{x}) = p_\infty + p'(\vec{x}); \quad \rho = \rho_\infty + \rho'(\vec{x}); \quad (2.31)$$

Donde las variables identificadas con superíndice ($'$), son las perturbaciones que el ala provoca sobre la corriente incidente, que están caracterizadas, como se dijo anteriormente, por ser pequeñas perturbaciones:

$$|\vec{v}'(\vec{x})| \ll |\vec{U}_\infty|; \quad p' \ll p_\infty; \quad \rho' \ll \rho_\infty; \quad (2.32)$$

Por tanto, la ecuación de continuidad para el caso incompresible (expresión (2.5)) se puede reescribir:

$$\nabla(\vec{v}) = \nabla(\vec{U}_\infty + \vec{v}') = \nabla(\vec{v}') = 0 \quad (2.33)$$

En esa expresión, se ha considerado que la velocidad \vec{U}_∞ es constante, ya que no se ve afectada por la presencia del ala.

De aquí en adelante, se considera:

$$\vec{v}' = u' \cdot \vec{e}_x + v' \cdot \vec{e}_y + w' \cdot \vec{e}_z \quad (2.34)$$

Además, el potencial de velocidades se podría representar de la forma:

$$\phi = \phi_\infty + \phi' \quad (2.35)$$

Donde ϕ' se define:

$$\vec{v}' = \nabla(\phi') \quad (2.36)$$

Atendiendo a todos los resultados anteriores, para que se verifique la ecuación de continuidad debe cumplirse:

$$\nabla(\vec{v}') = \nabla^2 \phi' = 0 \quad (2.37)$$

2.4 Problema simétrico y antisimétrico.

De forma general en aerodinámica, cuando se estudia el movimiento de un fluido alrededor de un ala, el problema suele dividirse en dos subproblemas más sencillos, para así facilitar la resolución de éste, estos son el problema simétrico y el problema antisimétrico.

La idea fundamental de este concepto es considerar que la solución general del problema puede obtenerse sumando las soluciones del problema simétrico y del problema antisimétrico.

Si se representa la cuerda media del ala como:

$$\Sigma_m = \frac{\Sigma_{ala}^+ + \Sigma_{ala}^-}{2} \quad (2.38)$$

Y se expresa el espesor del ala:

$$\Sigma_e = \frac{\Sigma_{ala}^+ - \Sigma_{ala}^-}{2} \quad (2.39)$$

Siendo Σ_{ala}^+ el extradós del ala, y Σ_{ala}^- el intradós de ésta.

Con esa notación, el extradós del ala puede expresarse:

$$\Sigma_{ala}^+ = \Sigma_m + \Sigma_e \quad (2.40)$$

Mientras el intradós puede representarse:

$$\Sigma_{ala}^- = \Sigma_m - \Sigma_e \quad (2.41)$$

Según las expresiones (2.40) y (2.41), la superficie del ala puede escribirse de forma general:

$$\Sigma_{ala} = \Sigma_m \pm \Sigma_e \quad (2.42)$$

Entonces, siguiendo el razonamiento anterior, el problema antisimétrico o sustentador, se va a centrar en estudiar el efecto que produce la cuerda media del ala Σ_m sobre la corriente incidente. Mientras el problema simétrico o del espesor, se centra en estudiar el efecto que produce el espesor del ala Σ_e . Por lo que uniendo ambas soluciones, se obtiene la solución general del problema.

Sin embargo, el problema simétrico y el antisimétrico, poseen peculiaridades que permiten simplificaciones importantes.

En el problema antisimétrico, se considera que todas las perturbaciones del problema son antisimétricas respecto a la cuerda media del ala. Es decir, las perturbaciones en el extradós del ala son antisimétricas respecto a las del intradós:

$$\begin{aligned} u'^{ext} &= -u'^{int} \\ v'^{ext} &= -v'^{int} \\ \omega'^{ext} &= \omega'^{int} \\ \varphi'^{ext} &= -\varphi'^{int} \end{aligned} \quad (2.43)$$

Siendo φ' la perturbación de una variable fluida cualquiera.

Precisamente lo contrario ocurre con el problema del espesor, en este caso, las perturbaciones se consideran simétricas respecto a la cuerda media del ala, de forma que se verifica:

$$\begin{aligned} u'^{ext} &= u'^{int} \\ v'^{ext} &= v'^{int} \\ \omega'^{ext} &= -\omega'^{int} \\ \varphi'^{ext} &= \varphi'^{int} \end{aligned} \quad (2.44)$$

Por otro lado, la fuerza que aparece sobre el ala puede calcularse:

$$\overline{F(t)} = \int_{\Sigma_{ala}} (p^{int} - p^{ext}) \cdot (-\vec{n}) dS = \int_{\Sigma_{ala}} (p'^{int} - p'^{ext}) \cdot (-\vec{n}) dS \quad (2.45)$$

De manera que si se considera el problema simétrico:

$$p'^{ext} = p'^{int} \quad (2.46)$$

Por lo que no aparece fuerza sobre el ala.

Mientras, si se considera el problema antisimétrico:

$$p'^{ext} = -p'^{int} \quad (2.47)$$

En ese caso, la fuerza resultante sería:

$$\overline{F(t)} = 2 \int_{\Sigma_{ala}} p'^{ext} \cdot \vec{n} dS \quad (2.48)$$

Como conclusión, se va a remarcar que para estudiar las fuerzas que el fluido ejerce sobre el ala, únicamente es necesario considerar el problema antisimétrico.

2.5 Ecuación de Euler-Bernouilli.

Aunque la ecuación de Euler-Bernouilli es ampliamente conocida y utilizada en el ámbito de la mecánica de fluidos, se cree muy conveniente explicar la procedencia de ésta y obtenerla de forma natural, ya que va a aparecer continuamente a lo largo de las siguientes páginas.

Se va a partir de la ecuación de conservación de cantidad de movimiento en forma diferencial (expresión (2.18)):

$$\rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \rho \vec{v} \cdot \nabla(\vec{v}) = -\nabla p \quad (2.49)$$

Si se considera la expresión (2.29) la ecuación puede reescribirse:

$$\rho \frac{\partial(\nabla\phi)}{\partial t} + \rho \vec{v} \cdot \nabla(\vec{v}) = -\nabla p \quad (2.50)$$

Por otro lado, si se realiza el siguiente desarrollo:

$$\vec{v} \cdot \nabla(\vec{v}) = \frac{1}{2} \nabla(\vec{v} \cdot \vec{v}) = \frac{1}{2} \nabla(v^2) \quad (2.51)$$

Sustituyendo la expresión (2.51) en la ecuación (2.50), se obtiene:

$$\rho \frac{\partial(\nabla\phi)}{\partial t} + \frac{1}{2} \rho \nabla(v^2) = -\nabla p \quad (2.52)$$

Puesto que es indiferente hacer el gradiente de una derivada o la derivada de un gradiente, puede escribirse entonces:

$$\rho \nabla \left(\frac{\partial\phi}{\partial t} \right) + \frac{1}{2} \rho \nabla(v^2) = -\nabla p \quad (2.53)$$

Por lo que si se agrupan términos y se considera el caso incompresible:

$$\nabla \left(p + \rho \frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \rho v^2 \right) = 0 \quad (2.54)$$

Por tanto, ya se tiene la expresión general de la ecuación de Euler-Bernouilli:

$$p + \rho \frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \rho v^2 = cte = C_\infty \quad (2.55)$$

En el caso estacionario:

$$p + \frac{1}{2}\rho v^2 = cte = C_\infty \quad (2.56)$$

Por otro lado, si se linealizan las variables:

$$\begin{aligned} p &= p_\infty + p'; \\ \rho &= \rho_\infty + \rho'; \\ \phi &= \phi_\infty + \phi'; \\ \vec{v} &= U_\infty \vec{e}_x + \vec{v}' \end{aligned} \quad (2.57)$$

Donde la variable \vec{v}' es:

$$\vec{v}' = u' \cdot \vec{e}_x + v' \cdot \vec{e}_x + \omega' \cdot \vec{e}_z \quad (2.58)$$

Sustituyendo las expresiones (2.57) en la ecuación (2.55):

$$\begin{aligned} (p_\infty + p') + (\rho_\infty + \rho') \cdot \left[\frac{\partial \phi'}{\partial t} + \frac{1}{2} ((U_\infty + u') \cdot \vec{e}_x + v' \cdot \vec{e}_x + \omega' \cdot \vec{e}_z)^2 \right] &= cte = \\ &= p_\infty + \frac{1}{2} \rho_\infty (U_\infty \vec{e}_x)^2 \end{aligned} \quad (2.59)$$

Expresión donde se ha tenido en cuenta que el infinito se encuentra una distancia lo suficientemente alejada respecto al ala como para despreciar los efectos que ésta produce sobre las magnitudes fluidas, de forma que a esa distancia, el valor de las perturbaciones es nulo y las magnitudes fluidas serán constantes (valores representados con (∞)).

Si se opera y se desprecian términos de orden superior, la ecuación (2.59) finalmente, queda:

$$p' + \rho_\infty \left[\frac{\partial \phi'}{\partial t} + U_\infty u' \right] = 0 \quad (2.60)$$

Así pues, se denomina ecuación de Euler-Bernouilli no estacionaria linealizada a la expresión:

$$p' = -\rho_\infty \left[\frac{\partial \phi'}{\partial t} + U_\infty u' \right] \quad (2.61)$$

Mientras que en el caso estacionario, la ecuación es:

$$p' = -\rho_\infty U_\infty u' \quad (2.62)$$

3 PLANTEAMIENTO GENERAL DEL PROBLEMA.

A lo largo de esta sección se pretende plantear el problema a resolver, identificando las variables y las incógnitas que aparecen y constatando las condiciones de contorno que afectan al problema, utilizando, para ello las ideas explicadas a lo largo de la sección anterior.

3.1 Determinación de incógnitas del problema.

Se va a explicar en esta sección cuáles son las variables que se necesitan obtener (incógnitas) para resolver el problema considerado.

Como se sabe, el problema a resolver es un ala que sigue un determinado movimiento en el seno de un fluido.

Para obtener la solución del problema, el objetivo es conocer las fuerzas que aparecen sobre el ala en función del tiempo.

De forma general, la fuerza que aparece sobre el ala es:

$$\vec{F}(t) = \int_{\Sigma_{ala}} (p^{int} - p^{ext}) \cdot (-\vec{n}) dS \quad (3.1)$$

Siendo \vec{n} el vector normal a la superficie del ala.

Así pues, la sustentación y la resistencia que aparecen serán:

$$L = \vec{F} \cdot \cos(\alpha); \quad D = \vec{F} \cdot \sin(\alpha) \quad (3.2)$$

Donde α es el ángulo de ataque del ala, tal y como se representa en la siguiente figura:

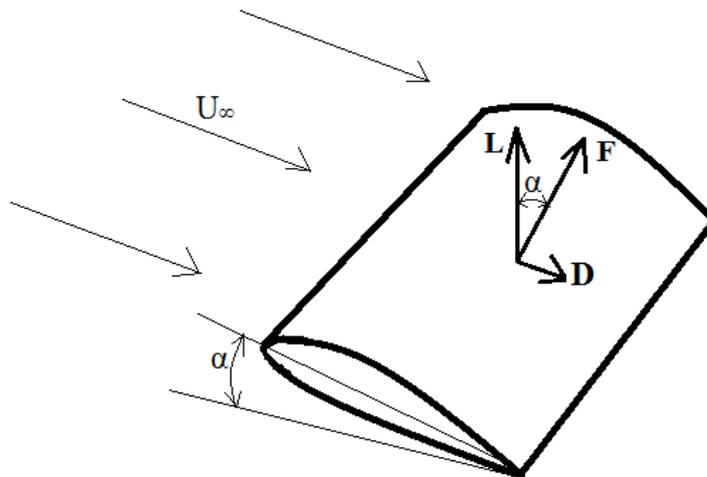


Figura 3.1. Fuerzas que aparecen en el ala.

Entonces, para resolver el problema bastaría con obtener el campo de presiones sobre la superficie del ala y realizar la integral que aparece en la ecuación (3.1).

Para calcular el campo de presiones se va a utilizar la ecuación de Euler-Bernouilli no estacionaria con las

variables linealizadas tal y como aparece en la ecuación (2.61):

$$p' = -\rho_\infty \left[\frac{\partial \phi'}{\partial t} + U_\infty u' \right] = -\rho_\infty \left[\frac{\partial \phi'}{\partial t} + U_\infty \frac{\partial \phi'}{\partial x} \right] \quad (3.3)$$

Sustituyendo esa expresión en la ecuación (3.1), se obtiene:

$$\overrightarrow{F}(t) = \rho_\infty \cdot \int_{\Sigma_{ala}} \left(\frac{\partial(\phi'^+ - \phi'^-)}{\partial t} + U_\infty \cdot \frac{\partial(\phi'^+ - \phi'^-)}{\partial x} \right) dS \cdot \vec{n} \quad (3.4)$$

Siendo ϕ'^+ el valor de ϕ' en el extradós y ϕ'^- el valor de ϕ' en el intradós del ala.

Puesto que para calcular las fuerzas que aparecen sobre el ala, únicamente influye el problema antisimétrico, tal y como se explicó en la sección 2.4, entonces, puede considerarse:

$$\phi'^+ = -\phi'^- \quad (3.5)$$

Introduciendo esos cambios en la ecuación (3.4), finalmente resulta:

$$\overrightarrow{F}(t) = 2\rho_\infty \int_{\Sigma_{ala}} \left(\frac{\partial \phi'^+}{\partial t} + U_\infty \cdot \frac{\partial \phi'^+}{\partial x} \right) dS \cdot \vec{n} \quad (3.6)$$

Es decir, para poder obtener las fuerzas que aparecen en el problema, es necesario obtener el valor del potencial de velocidades sobre la superficie del ala.

Por tanto, el objetivo del método matemático que se va a utilizar para resolver el problema es obtener los valores del potencial de velocidades sobre la superficie del ala, para posteriormente, obtener las fuerzas que aparecen sobre ésta. Por lo que quedan identificadas así las incógnitas del problema (valores del potencial de velocidades sobre la superficie del ala para cada instante de tiempo considerado).

3.2 Condiciones de contorno.

En esta sección se van a explicar las condiciones de contorno que aparecen en el problema, que además, van a ser fundamentales para la resolución del mismo

3.2.1 Condición de impenetrabilidad.

Se va a comenzar en primer lugar, por la condición de contorno que aparece sobre la superficie del ala.

Esta condición de contorno se basa en la idea de que la corriente no puede penetrar en el ala, es decir, el producto escalar del vector normal a la superficie del ala y la velocidad del flujo alrededor de ella debe ser nulo.

Si se denomina $z = \Sigma_{ala}^+(x, y)$ al extradós del ala y $z = \Sigma_{ala}^-(x, y)$ al intradós del ala, entonces, la condición se podría representar:

$$\vec{v} \cdot \frac{\nabla(F)}{|\nabla(F)|} = 0 \quad \text{Con } F(x, y) = z - \Sigma_{ala} \quad (3.7)$$

Siendo $\nabla(F)/|\nabla(F)|$ el vector normal al extradós o al intradós del ala, por lo que despreciando términos de orden superior, esa expresión se reescribe:

$$\frac{\nabla(F)}{|\nabla(F)|} = \frac{-\frac{\partial \Sigma_{ala}^{\pm}}{\partial x} \cdot \vec{e}_x - \frac{\partial \Sigma_{ala}^{\pm}}{\partial y} \cdot \vec{e}_y + 1 \cdot \vec{e}_z}{\sqrt{\frac{\partial \Sigma_{ala}^{\pm 2}}{\partial x} + \frac{\partial \Sigma_{ala}^{\pm 2}}{\partial y} + 1}} \approx -\frac{\partial \Sigma_{ala}^{\pm}}{\partial x} \cdot \vec{e}_x - \frac{\partial \Sigma_{ala}^{\pm}}{\partial y} \cdot \vec{e}_y + \vec{e}_z \quad (3.8)$$

Por otro lado, la velocidad consta de las siguientes componentes:

$$\vec{v} = (U_{\infty} + u') \cdot \vec{e}_x + v' \cdot \vec{e}_y + \omega' \cdot \vec{e}_z \quad (3.9)$$

Finalmente, realizando el producto escalar que aparece en la ecuación (3.7) y despreciando términos de orden superior, se obtiene:

$$\omega(x, y, z = \Sigma_{ala}^{\pm}(x, y)) = U_{\infty} \cdot \frac{\partial \Sigma_{ala}^{\pm}}{\partial x} \quad \forall (x, y) \in \text{Forma en planta del ala} \quad (3.10)$$

Generalmente, para simplificar las condiciones de contorno, se considera que el ala es prácticamente plana, por lo que la condición anterior se podría escribir:

$$\omega(x, y, z = 0^{\pm}) = U_{\infty} \cdot \frac{\partial \Sigma_{ala}^{\pm}}{\partial x} \quad \forall (x, y) \in \text{Forma en planta del ala} \quad (3.11)$$

Por otro lado, puesto que la superficie del ala puede expresarse en función de la cuerda media y del espesor de ésta, la condición de impenetrabilidad resulta:

$$\omega(x, y, z = 0^{\pm}) = U_{\infty} \cdot \left(\frac{\partial \Sigma_m}{\partial x} \pm \frac{\partial \Sigma_e}{\partial x} \right) \quad \forall (x, y) \in \text{Forma en planta del ala} \quad (3.12)$$

Sin embargo, para obtener las fuerzas que aparecen sobre el ala, únicamente es necesario resolver el problema antisimétrico, tal y como se ha explicado con anterioridad. Por tanto, la condición de impenetrabilidad para el problema antisimétrico se expresa:

$$\omega(x, y, z = 0^{\pm}) = U_{\infty} \cdot \frac{\partial \Sigma_m}{\partial x} \quad \forall (x, y) \in \text{Forma en planta del ala} \quad (3.13)$$

Así pues, esa es la primera de las condiciones de contorno a las que está sometido el problema.

3.2.2 Condiciones de contorno en el borde de ataque y bordes laterales.

Una vez se ha explicado la condición de contorno que aparece sobre la superficie del ala, se va a proceder ahora, a explicar las condiciones de contorno en los bordes laterales y en el borde de ataque de ésta.

Para ello, se considera la partícula fluida P aguas arriba del ala como se representa en la figura:

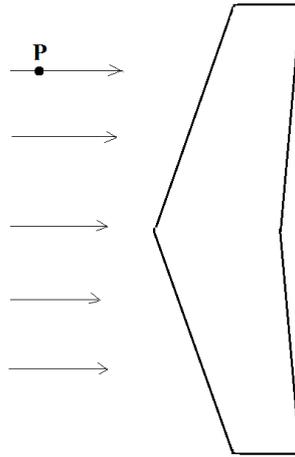


Figura 3.2. Partícula P aguas arriba del ala.

Se va a considerar, además, un volumen fluido diferencial alrededor del punto P tal y como se aparece en la siguiente figura:

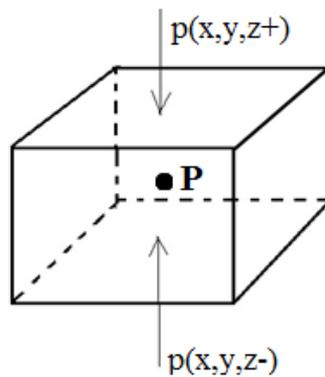


Figura 3.3. Volúmen fluido diferencial alrededor del punto P.

En la imagen se representa la presión en ambas caras del hexaedro diferencial que rodea al punto P, puesto que aguas arriba respecto del ala el fluido está en equilibrio y sin presencia de cuerpo alguno, las presiones en ambas caras del hexaedro deben ser la misma:

$$p'^+ = p'^- \quad (3.14)$$

Cabe remarcar que ese equilibrio de presiones no sólo se cumple aguas arriba del ala, sino que se verifica en toda la región del dominio fluido donde no hay cuerpo alguno.

Por tanto, si se aplica ahora la ecuación de Euler-Bernouilli de la expresión (2.61) a la cara superior e inferior del hexaedro, se obtiene:

$$\begin{aligned}
p'^+ &= -\rho_\infty \left(\frac{\partial \phi'^+}{\partial t} + U_\infty \cdot \frac{\partial \phi'^+}{\partial x} \right) \\
p'^- &= -\rho_\infty \left(\frac{\partial \phi'^-}{\partial t} + U_\infty \cdot \frac{\partial \phi'^-}{\partial x} \right)
\end{aligned} \tag{3.15}$$

Sustituyendo las expresiones (3.15) en la ecuación (3.14), resulta:

$$\frac{\partial(\phi'^+ - \phi'^-)}{\partial t} + U_\infty \frac{\partial(\phi'^+ - \phi'^-)}{\partial x} = \frac{D(\phi'^+ - \phi'^-)}{Dt} = 0 \tag{3.16}$$

Mientras que, por otro lado, si se considera el problema antisimétrico:

$$\phi'^+ = -\phi'^- \tag{3.17}$$

Sustituyendo la igualdad (3.17) en la ecuación (3.16), finalmente resulta:

$$\frac{D\phi'^+}{Dt} = 0 \tag{3.18}$$

Esa expresión es válida en toda la región del espacio donde no exista ala, ya que se ha obtenido a partir del equilibrio de presiones (ecuación (3.14)). Por tanto, se verifica de la misma forma en la estela.

Por otro lado, aguas arriba a una distancia lo suficientemente alejada respecto del ala (infinito), los efectos que ésta produce sobre la corriente incidente se pueden considerar despreciables, por lo que, en esa región, se cumple $\phi'^+ = 0$.

Mientras que por otro lado, la ecuación (3.18) expone que el valor de ϕ'^+ permanece constante aguas arriba del ala cuando se sigue a una partícula fluida como puede ser la anterior partícula P representada en la Figura 3.2. Por tanto, si el valor de ϕ'^+ es constante a lo largo de todo el recorrido de la partícula P en la zona anterior al ala, y en el “infinito”, el valor de $\phi'^+ = 0$, entonces, el valor de ϕ'^+ a lo largo de todo el recorrido de P aguas arriba del ala debe ser cero.

Ese valor de $\phi'^+ = 0$ se va a mantener constante hasta que la partícula P entre en contacto con el ala, es decir, hasta el borde de ataque de ésta. Por lo que se puede decir, que en el borde de ataque, se verifica por condición de contorno:

$$\phi'^+ = 0 \text{ en el b. a del ala} \tag{3.19}$$

Por otro lado, si en lugar de la partícula P, se considera una partícula Q como la que se representa en la figura:

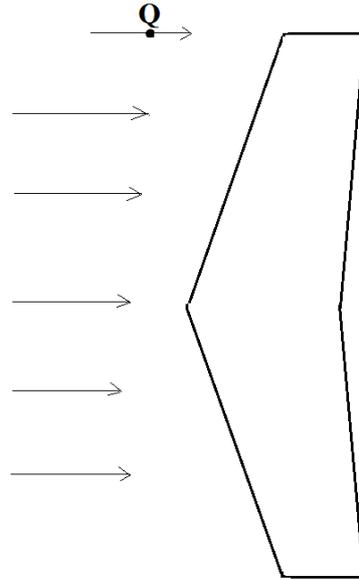


Figura 3.4. Partícula Q aguas arriba del ala.

Al igual que en el caso anterior, se va a verificar que ϕ'^+ es constante a lo largo de todo el recorrido de la partícula e igual a cero. Pero la partícula Q, no llega a tocar al ala, sino que recorre el borde lateral de ésta. Por tanto, el valor de ϕ'^+ se mantendrá constante a lo largo del borde lateral del ala y será precisamente cero. Entonces, puede expresarse que por condición de contorno se verifica:

$$\phi'^+ = 0 \text{ en los bordes laterales del ala} \tag{3.20}$$

Para terminar, de manera visual, las condiciones de contorno sobre los bordes del ala quedarían de la siguiente forma:

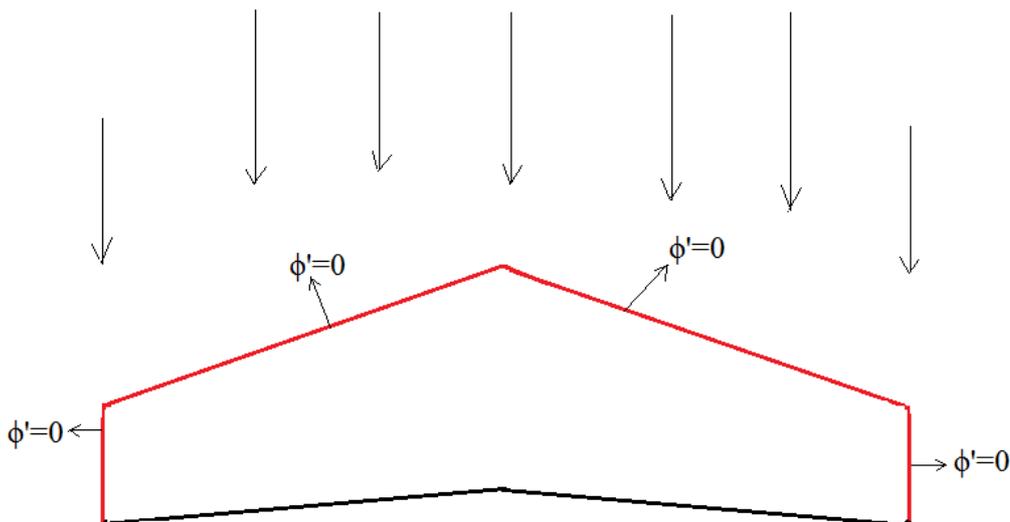


Figura 3.5. Condiciones de contorno en los bordes del ala.

Ya se tendrían por tanto, las condiciones de contorno que afectan al problema considerado.

3.3 Fórmula de Green.

En esta sección, se va a desarrollar la conocida como fórmula de Green, que va a ser el punto de partida para comenzar con la resolución del problema considerado, y es por eso necesario explicar de dónde procede y cuál es su significado.

Para ello, se considera un ala sobre la que incide una corriente con velocidad U_∞ como se representa en la siguiente figura:

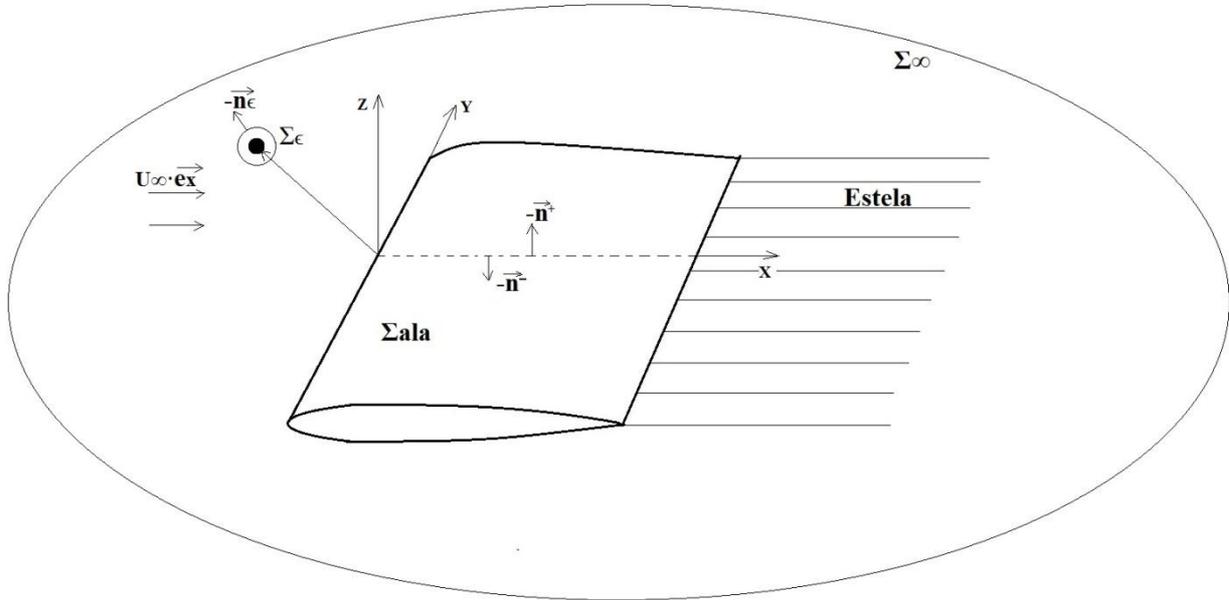


Figura 3.6. Ala delimitada por superficie Σ_{ala} , estela delimitada por superficie Σ_{estela} , esfera delimitada por superficie Σ_ϵ y resto del espacio, delimitado por la superficie Σ_∞ .

Tal y como se puede observar en la imagen, se distinguen principalmente cuatro regiones del espacio: El ala, delimitada por su superficie Σ_{ala} , la estela, cuya superficie es Σ_{estela} , una esfera de radio ϵ delimitada por la superficie Σ_ϵ en cuyo centro se encuentra un punto $\vec{x}_0 = (x_0, y_0, z_0)$, y el resto del espacio, delimitado por la superficie Σ_∞ .

Sobre todos los puntos del espacio debe verificarse la Laplaciana en el potencial de velocidades, ya que debe cumplirse la ecuación de continuidad (ecuación 2.37):

$$\nabla^2 \phi' = 0 \quad (3.21)$$

Así pues, una posible solución a la Laplaciana sería una función de la forma:

$$\psi_0 = \frac{1}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}} \quad (3.22)$$

Esa función es una solución elemental de la Laplaciana, por lo que se cumple:

$$\nabla^2 \psi_0 = 0 \quad (3.23)$$

Por otro lado, según la ecuación de continuidad (ecuación 2.37):

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0 \quad (3.24)$$

Por lo que si calcula el gradiente de esa expresión, se obtiene:

$$\nabla^2 \vec{v} = 0 \quad (3.25)$$

Se puede escribir entonces, la siguiente igualdad:

$$\psi_0 \cdot \nabla^2 \vec{v} - \nabla^2 \psi_0 \cdot \vec{v} = 0 \quad (3.26)$$

Ahora, se va a integrar esa expresión en todo el volumen de dominio fluido, esto es el ala, la estela, la región que rodea a un determinado punto del espacio y todo el resto de espacio, delimitado por la superficie Σ_∞ :

$$\int_{\Omega} (\psi_0 \cdot \nabla^2 \vec{v} - \nabla^2 \psi_0 \cdot \vec{v}) dV = 0 \quad (3.27)$$

Por otro lado, como se cumple la siguiente igualdad:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\psi_0 \cdot \nabla \vec{v} - \nabla \psi_0 \cdot \vec{v}) &= \nabla \psi_0 \cdot \nabla \vec{v} + \psi_0 \nabla^2 \vec{v} - \nabla^2 \psi_0 \cdot \vec{v} - \nabla \psi_0 \cdot \nabla \vec{v} \\ &= \psi_0 \cdot \nabla^2 \vec{v} - \nabla^2 \psi_0 \cdot \vec{v} \end{aligned} \quad (3.28)$$

Entonces, la expresión (3.27) puede reescribirse:

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot (\psi_0 \cdot \nabla \vec{v} - \nabla \psi_0 \cdot \vec{v}) dV = 0 \quad (3.29)$$

Aplicando el teorema de Gauss a esa expresión, resulta:

$$\int_{\Sigma_{ala} \cup \Sigma_{estela} \cup \Sigma_\epsilon} (\psi_0 \vec{n} \cdot \nabla \vec{v} - \vec{n} \cdot \nabla \psi_0 \vec{v}) dS = 0 \quad (3.30)$$

Donde se ha considerado que \vec{v} es cero en Σ_∞ , al encontrarse esta superficie a una distancia lo suficientemente alejada del ala como para considerar despreciables las perturbaciones que ésta ejerce sobre las partículas fluidas.

Por otro lado, según la definición de ψ_0 (ecuación (3.22)):

$$\nabla \psi_0 = -\frac{\vec{e}_r}{r^2} \quad (3.31)$$

Siendo $r = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}$ la distancia desde un punto (x, y, z) al punto (x_0, y_0, z_0) y \vec{e}_r un vector unitario en un sistema de coordenadas esféricas centrado en el punto (x_0, y_0, z_0) .

Así, si se realiza en primer lugar la integral para la superficie Σ_ϵ (que es la superficie de una esfera de radio ϵ) y se tiende a cero el valor de ϵ , se tiene entonces:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Sigma_\epsilon} (\psi_0 \vec{n}_\epsilon \cdot \nabla \vec{v}) dS = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Sigma_\epsilon} \left(\frac{1}{\epsilon} \vec{n}_\epsilon \cdot \nabla \vec{v} \right) dS \rightarrow 0 \quad (3.32)$$

Mientras que por otro lado:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Sigma_\epsilon} -\vec{n}_\epsilon \cdot \nabla \psi_0 \vec{v} \cdot dS = -\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Sigma_\epsilon} \frac{1}{\epsilon^2} \vec{v} \cdot dS = -\vec{v} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Sigma_\epsilon} \frac{1}{\epsilon^2} dS = -\vec{v} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon^2} \cdot 4\pi \epsilon^2 \quad (3.33)$$

Por tanto:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Sigma_\epsilon} -\vec{n}_\epsilon \cdot \nabla \psi_0 \vec{v}' \cdot dS = -\vec{v}'(\vec{x}_0) \cdot 4\pi \quad (3.34)$$

Con estos resultados, la ecuación (3.30) puede reescribirse:

$$4\pi \cdot \vec{v}'(\vec{x}_0) = \int_{\Sigma_{ala} \cup \Sigma_{estela}} (\psi_0 \vec{n} \cdot \nabla \vec{v}' - \vec{n} \cdot \nabla \psi_0 \vec{v}') dS \quad (3.35)$$

Si se multiplica escalarmente esa expresión por el vector \vec{e}_z se obtiene:

$$4\pi \cdot \omega'(\vec{x}_0) = \int_{\Sigma_{ala} \cup \Sigma_{estela}} (\psi_0 \vec{n} \cdot \nabla \omega' - \vec{n} \cdot \nabla \psi_0 \omega') dS \quad (3.36)$$

Así pues, si se considera el problema antisimétrico, tanto para el ala como para la estela se verifica:

$$\begin{aligned} \omega(x, y, z = 0^+) &= \omega(x, y, z = 0^-) \\ \vec{n}^+ \cdot \nabla \psi_0 &= -\vec{n}^- \cdot \nabla \psi_0 \end{aligned} \quad (3.37)$$

Debido a esas igualdades, debe cumplirse:

$$\int_{\Sigma_{ala}^+ \cup \Sigma_{ala}^-} \vec{n} \cdot \nabla \psi_0 \omega' dS = \int_{\Sigma_{estela}^+ \cup \Sigma_{estela}^-} \vec{n} \cdot \nabla \psi_0 \omega' dS = 0 \quad (3.38)$$

Por tanto, sustituyendo esos resultados en la ecuación (3.36), resulta:

$$4\pi \cdot \omega'(\vec{x}_0) = \int_{\Sigma_{ala} \cup \Sigma_{estela}} \psi_0 \vec{n} \cdot \nabla \omega' dS \quad (3.39)$$

Ahora la normal a las superficies Σ_{ala}^+ y Σ_{estela}^+ es $-\vec{e}_z$ y a las superficies Σ_{ala}^- y Σ_{estela}^- es \vec{e}_z , tal y como se ha representado en la Figura 3.6, sustituyendo estas normales en la ecuación (3.39):

$$4\pi \cdot \omega'(\vec{x}_0) = \int_{\Sigma_{ala}^+ \cup \Sigma_{estela}^+} -\psi_0 \frac{\partial \omega'^+}{\partial z} dS + \int_{\Sigma_{ala}^- \cup \Sigma_{estela}^-} \psi_0 \frac{\partial \omega'^-}{\partial z} dS \quad (3.40)$$

Por otro lado, la ecuación de conservación de la masa impone (ecuación (2.37)):

$$\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} + \frac{\partial \omega'}{\partial z} = 0 \quad (3.41)$$

Esa ecuación puede reescribirse:

$$\frac{\partial \omega'}{\partial z} = -\frac{\partial u'}{\partial x} - \frac{\partial v'}{\partial y} \quad (3.42)$$

Sustituyendo la expresión (3.42) en la ecuación (3.40), finalmente resulta:

$$4\pi \cdot \omega'(\vec{x}_0) = \int_{\Sigma_{ala}^+ \cup \Sigma_{estela}^+} \psi_0 \left(\frac{\partial u'^+}{\partial x} + \frac{\partial v'^+}{\partial y} \right) dS - \int_{\Sigma_{ala}^- \cup \Sigma_{estela}^-} \psi_0 \left(\frac{\partial u'^-}{\partial x} + \frac{\partial v'^-}{\partial y} \right) dS \quad (3.43)$$

Por otro lado, se verifican las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned}\psi_0 \frac{\partial u'}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x}(\psi_0 u') - u' \frac{\partial \psi_0}{\partial x} \\ \psi_0 \frac{\partial v'}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y}(\psi_0 v') - v' \frac{\partial \psi_0}{\partial y}\end{aligned}\tag{3.44}$$

Así pues, si se sustituyen las igualdades (3.44) en la ecuación (3.43), se obtiene:

$$\begin{aligned}4\pi \cdot \omega'(\vec{x}_0) &= \int_{\Sigma_{ala} + U\Sigma_{estela}^+} \left[\frac{\partial}{\partial x}(\psi_0 u'^+) + \frac{\partial}{\partial y}(\psi_0 v'^+) - u'^+ \frac{\partial \psi_0}{\partial x} - v'^+ \frac{\partial \psi_0}{\partial y} \right] dS \\ &\quad - \int_{\Sigma_{ala} - U\Sigma_{estela}^-} \left[\frac{\partial}{\partial x}(\psi_0 u'^-) + \frac{\partial}{\partial y}(\psi_0 v'^-) - u'^- \frac{\partial \psi_0}{\partial x} - v'^- \frac{\partial \psi_0}{\partial y} \right] dS\end{aligned}\tag{3.45}$$

Se van a analizar ahora, algunos de los términos que aparecen en las integrales.

Para ello, se considera un ala sumergida en el seno de un fluido, donde la velocidad incidente de ese fluido es U_∞ . Así pues, justo en el instante inicial ($t = 0$) en el que el fluido comienza a incidir sobre el ala, no habrá estela, ya que no ha transcurrido tiempo alguno ($t = 0$) para permitir que la estela se desarrolle.

En esa situación, se considera una partícula P, perteneciente al borde de salida del ala, tal y como se representa en la siguiente figura:

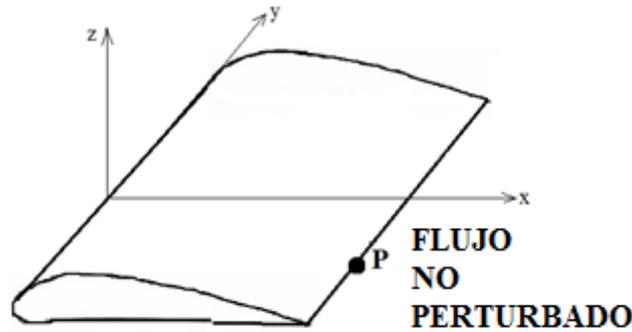


Figura 3.7. Partícula P perteneciente al borde de salida del ala en el instante $t = 0$.

Así pues, la región fluida que se encuentra en la zona posterior a la partícula P, según la dirección del eje x, no estará perturbada por el ala, ya que la estela aún no se ha desarrollado.

Por otro lado, cuando ha transcurrido un instante de tiempo t , la partícula P, habrá recorrido una distancia $U_\infty \cdot t$, pero, esa partícula P, define la frontera entre la estela y el flujo no perturbado, es decir, la estela habrá recorrido una distancia $U_\infty \cdot t$, según la dirección de la corriente incidente, tal y como se representa en la siguiente figura:

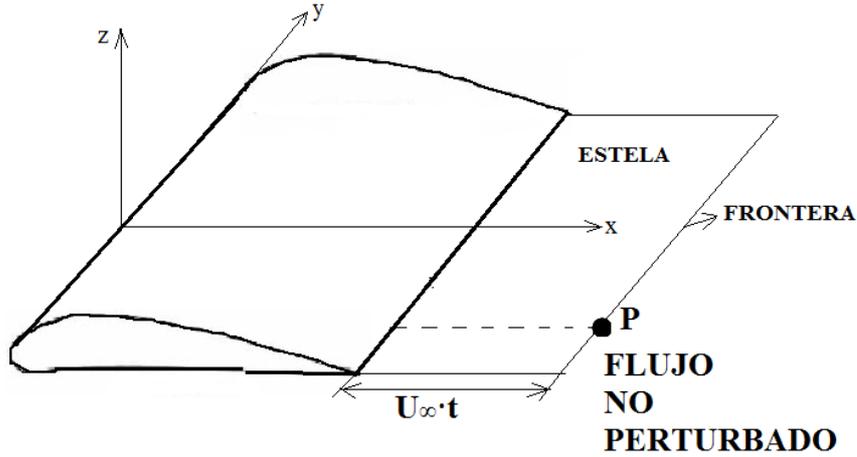


Figura 3.8. Partícula P, perteneciente a la frontera de la estela en el instante t .

Entonces, la región anterior a la partícula P, según la dirección del eje x , está perturbada por la presencia del ala, mientras que la región posterior a esa partícula y toda la frontera, no están perturbadas por el ala. Con lo cual, en esa frontera a la que pertenece el punto P, las perturbaciones producidas por la presencia del ala son nulas, es decir, se verifica:

$$\begin{aligned}\phi'^+ &= \phi'^- = 0 \\ u'^+ &= u'^- = 0 \\ v'^+ &= v'^- = 0\end{aligned}\tag{3.46}$$

Una vez se han explicado estos conceptos, se va a analizar ahora, la siguiente expresión, extraída de la ecuación (3.45):

$$\int_{\Sigma_{ala} + U\Sigma_{estela}} + \frac{\partial}{\partial x}(\psi_0 u'^+) dS - \int_{\Sigma_{ala} - U\Sigma_{estela}} - \frac{\partial}{\partial x}(\psi_0 u'^-) dS\tag{3.47}$$

Considerando el primero de los términos de esa expresión:

$$\int_{\Sigma_{ala} + U\Sigma_{estela}} + \frac{\partial}{\partial x}(\psi_0 u'^+) dS = \int_{-b/2}^{b/2} \left[\int_{b.ataque}^{Frontera} \left(\frac{\partial}{\partial x}(\psi_0 u'^+) \right) dx \right] dy\tag{3.48}$$

Siendo b la envergadura del ala, $b.ataque$, el borde de ataque de ésta, y $Frontera$ la región que delimita la estela del flujo no perturbado posterior al ala.

Así pues, si se realiza la integral respecto a x :

$$\int_{b.ataque}^{Frontera} \frac{\partial}{\partial x}(\psi_0 u'^+) dx = \psi_0 u'^+ \Big|_{b.ataque}^{Frontera} = \psi_0 u'^+ \Big|_{Frontera} - \psi_0 u'^+ \Big|_{b.ataque} = 0\tag{3.49}$$

Esa integral es nula debido a que $u' = 0$ tanto en el borde de ataque (por condición de contorno), como en la frontera que delimita el flujo no perturbado de la estela, como se ha demostrado anteriormente.

Entonces, la integral de la expresión (3.48) es nula

$$\int_{\Sigma_{ala} + U\Sigma_{estela}} + \frac{\partial}{\partial x}(\psi_0 u'^+) dS = 0\tag{3.50}$$

El mismo razonamiento se puede aplicar en el intradós del ala, por tanto:

$$\int_{\Sigma_{ala} - U\Sigma_{estela}} \frac{\partial}{\partial x} (\psi_0 u'^-) dS = 0 \quad (3.51)$$

Finalmente, debido a los resultados proporcionados, la expresión (3.47) es nula.

Por otro lado, se van a considerar ahora, las siguientes integrales, extraídas de la expresión (3.45):

$$\int_{\Sigma_{ala} + U\Sigma_{estela}} \frac{\partial}{\partial y} (\psi_0 v'^+) dS - \int_{\Sigma_{ala} - U\Sigma_{estela}} \frac{\partial}{\partial y} (\psi_0 v'^-) dS \quad (3.52)$$

De nuevo, si se analiza el primero de los términos de la expresión:

$$\int_{\Sigma_{ala} + U\Sigma_{estela}} \frac{\partial}{\partial y} (\psi_0 v'^+) dS = \int_{b.ataque}^{Frontera} \left[\int_{-b/2}^{b/2} \left(\frac{\partial}{\partial y} (\psi_0 v'^+) \right) dy \right] dx \quad (3.53)$$

Si se realiza ahora, la integral respecto de y :

$$\int_{-b/2}^{b/2} \left(\frac{\partial}{\partial y} (\psi_0 v'^+) \right) dy = \psi_0 v'^+ \Big|_{-b/2}^{b/2} = \psi_0 v'^+ \Big|_{b/2} - \psi_0 v'^+ \Big|_{-b/2} = 0 \quad (3.54)$$

Esa integral es nula debido a que, por condición de contorno, $v' = 0$ para los bordes laterales del ala y de la estela.

Entonces, se cumple:

$$\int_{\Sigma_{ala} + U\Sigma_{estela}} \frac{\partial}{\partial y} (\psi_0 v'^+) dS = \int_{b.ataque}^{Frontera} \left[\int_{-b/2}^{b/2} \left(\frac{\partial}{\partial y} (\psi_0 v'^+) \right) dy \right] dx = 0 \quad (3.55)$$

El mismo razonamiento puede aplicarse en el intradós del ala, resultando:

$$\int_{\Sigma_{ala} - U\Sigma_{estela}} \frac{\partial}{\partial y} (\psi_0 v'^-) dS = 0 \quad (3.56)$$

Por tanto, con los resultados proporcionados, la expresión (3.52) es nula.

Introduciendo estos cambios en la ecuación (3.45), finalmente resulta:

$$\begin{aligned} 4\pi \cdot \omega'(\vec{x}_0) = & - \int_{\Sigma_{ala} + U\Sigma_{estela}} u'^+ \frac{\partial \psi_0}{\partial x} dS + \int_{\Sigma_{ala} - U\Sigma_{estela}} u'^- \frac{\partial \psi_0}{\partial x} dS - \\ & - \int_{\Sigma_{ala} + U\Sigma_{estela}} v'^+ \frac{\partial \psi_0}{\partial y} dS + \int_{\Sigma_{ala} - U\Sigma_{estela}} v'^- \frac{\partial \psi_0}{\partial y} dS \end{aligned} \quad (3.57)$$

Puesto que se está considerando el problema antisimétrico:

$$u'^+ = -u'^- ; \quad v'^+ = -v'^- ; \quad \omega'^+ = \omega'^- ; \quad (3.58)$$

Finalmente, introduciendo las expresiones (3.58) en la ecuación (3.57) se obtiene:

$$\omega'(\vec{x}_0) = -\frac{1}{2\pi} \cdot \int_{\Sigma_{ala} + U\Sigma_{estela}} u'^+ \frac{\partial \psi_0}{\partial x} dS - \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{\Sigma_{ala} + U\Sigma_{estela}} v'^+ \frac{\partial \psi_0}{\partial y} dS \quad (3.59)$$

Sin embargo, si se define la variable \vec{v}_s' :

$$\vec{v}_s' = u' \cdot \vec{e}_x + v' \cdot \vec{e}_y \quad (3.60)$$

La expresión (3.59) puede reescribirse:

$$\omega'(\vec{x}_0) = \frac{-1}{2\pi} \cdot \int_{\Sigma_{ala} + U\Sigma_{estela}} \vec{v}_s' \cdot \nabla\psi_0 dS \quad (3.61)$$

Este va a ser el resultado que se va a utilizar como punto de partida en el método empleado para la resolución del problema propuesto.

Por otro lado, la expresión (3.59) se podría modificar y reescribir de la siguiente forma:

$$\omega'(\vec{x}_0) = \omega'_1 + \omega'_2 \quad (3.62)$$

Siendo:

$$\begin{aligned} \omega'_1 &= -\frac{1}{2\pi} \cdot \int_{\Sigma_{ala} + U\Sigma_{estela}} u' + \frac{\partial\psi_0}{\partial x} dS \\ \omega'_2 &= -\frac{1}{2\pi} \cdot \int_{\Sigma_{ala} + U\Sigma_{estela}} v' + \frac{\partial\psi_0}{\partial y} dS \end{aligned} \quad (3.63)$$

Recordando la definición de la función ψ_0 (ecuación (3.22)):

$$\psi_0 = \frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}} \quad (3.64)$$

Entonces, las derivadas parciales que aparecen en las expresiones (3.63) resultan:

$$\begin{aligned} \frac{\partial\psi_0}{\partial x} &= \frac{x_0 - x}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}^{3/2}} \\ \frac{\partial\psi_0}{\partial y} &= \frac{y_0 - y}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}^{3/2}} \end{aligned} \quad (3.65)$$

Por otro lado, cabe recordar, que una de las soluciones elementales de la Laplaciana son los torbellinos. Así pues, si se tiene un torbellino situado en un punto (x, y, z) de intensidad Γ , y un punto del espacio (x_0, y_0, z_0) , tal y como se representa en la siguiente figura:

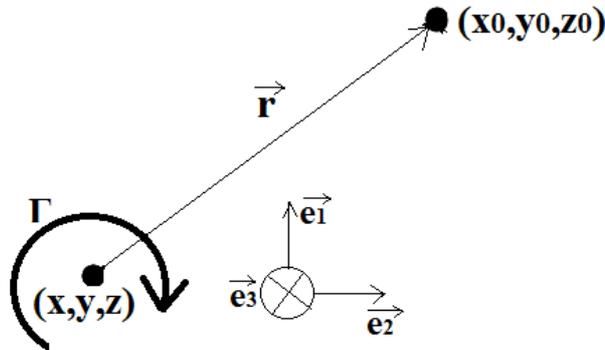


Figura 3.9. Torbellino centrado en el punto (x, y, z) y un punto del espacio (x_0, y_0, z_0) .

La velocidad de perturbación que provoca el torbellino sobre ese punto situado a una distancia $|\vec{r}|$ de su centro es:

$$\vec{v} = \frac{\Gamma}{2\pi} \cdot \frac{\vec{r} \times \vec{e}_3}{|\vec{r}|^3} \quad (3.66)$$

Por tanto, se va a considerar una distribución continua de torbellinos sobre toda la superficie del ala y la estela siguiendo la dirección de la corriente incidente y un punto $P(x_0, y_0, z_0)$ situado en el plano en el que se encuentran el ala y la estela, tal y como se considera en la figura:

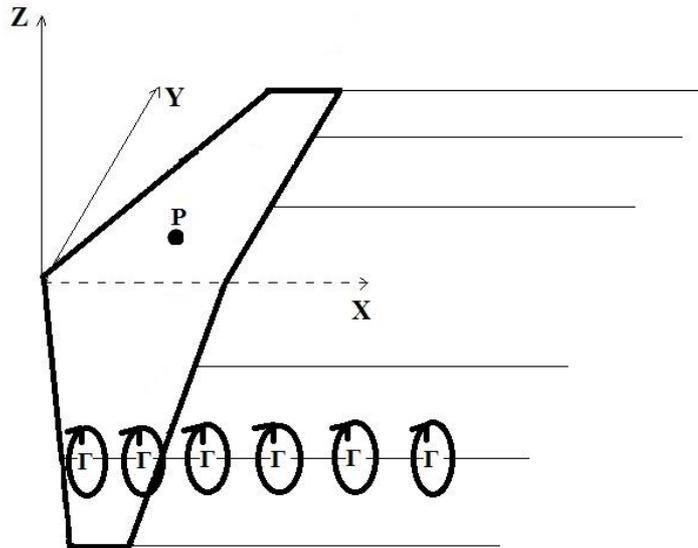


Figura 3.10. Distribución de torbellinos sobre la superficie del ala y estela, según la dirección de la corriente incidente.

Según la ecuación (3.66), la velocidad que provoca uno de esos torbellinos sobre el punto P es:

$$\vec{v} = \frac{\Gamma}{2\pi} \cdot \frac{\vec{r} \times \vec{e}_1}{|\vec{r}|^3} \quad (3.67)$$

Por tanto, si el torbellino está centrado en las coordenadas (x, y, z) , el producto escalar resulta:

$$\vec{r} \times \vec{e}_1 = \begin{bmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ x_0 - x & y_0 - y & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = -(y_0 - y) \cdot \vec{e}_3 \quad (3.68)$$

Por lo que la velocidad de perturbación que provoca ese torbellino sobre el punto considerado es:

$$\vec{v} = \frac{\Gamma}{4\pi} \cdot \frac{-(y_0 - y) \cdot \vec{e}_3}{\left| \sqrt{(x_0 - x)^2 + (y_0 - y)^2} \right|^3} = \omega \cdot \vec{e}_3 \quad (3.69)$$

Entonces, si se distribuyen hilos de torbellinos como el representado en la Figura 3.10 a lo largo de la superficie del ala y de estela, la velocidad de perturbación que produce esa distribución sobre el punto P es:

$$\vec{v} = \frac{\Gamma}{4\pi} \cdot \int_{\Sigma_{ala} \cup \Sigma_{estela}} \frac{-(y_0 - y) \cdot \vec{e}_3}{\left| \sqrt{(x_0 - x)^2 + (y_0 - y)^2} \right|^3} dS = \omega'_2 \cdot \vec{e}_3 \quad (3.70)$$

Mientras, por otro lado, si se considera una distribución de torbellinos repartidos a lo largo de la superficie del ala y de la estela según la dirección de la envergadura, y un punto $P(x_0, y_0, z_0)$, situado en el plano que determinan el ala y la estela como se representa en la siguiente figura:

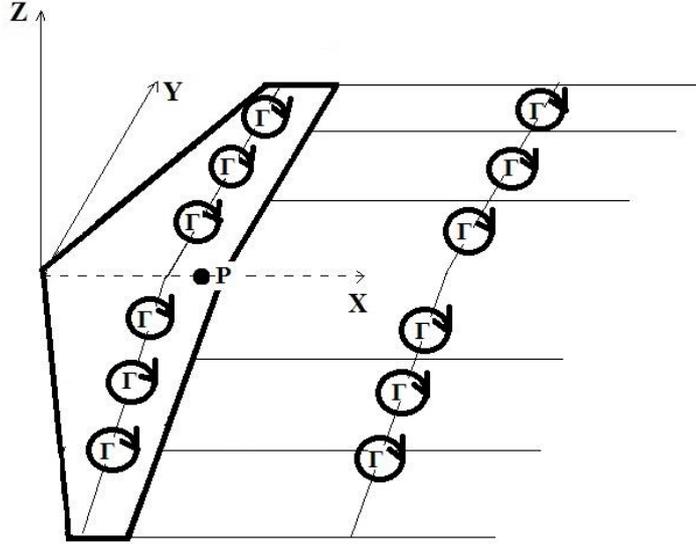


Figura 3.11. Distribución de torbellinos sobre la superficie del ala y estela, según la dirección de la envergadura.

Si ahora se considera uno de esos torbellinos, la velocidad de perturbación que provoca sobre el punto P considerado es:

$$\vec{v} = \frac{\Gamma}{2\pi} \cdot \frac{\vec{r} \times \vec{e}_2}{|\vec{r}|^3} \quad (3.71)$$

Si se realiza el mismo procedimiento que para el caso anterior, se obtiene que la velocidad de perturbación que provoca el torbellino sobre el punto considerado sigue la siguiente expresión:

$$\vec{v} = \frac{\Gamma}{2\pi} \cdot \frac{-(x_0 - x) \cdot \vec{e}_3}{\left| \sqrt{(x_0 - x)^2 + (y_0 - y)^2} \right|^3} = \omega \cdot \vec{e}_3 \quad (3.72)$$

Por tanto, si se considera una distribución de torbellinos como los representados en la figura, distribuidos a lo largo de las superficies del ala y la estela, la velocidad que esa distribución produce sobre el punto P es:

$$\vec{v} = \frac{\Gamma}{4\pi} \cdot \int_{\Sigma_{ala} \cup \Sigma_{estela}} \frac{-(x_0 - x) \cdot \vec{e}_3}{\left| \sqrt{(x_0 - x)^2 + (y_0 - y)^2} \right|^3} dS = \omega'_1 \cdot \vec{e}_3 \quad (3.73)$$

Así pues, recopilando la expresión (3.59), se puede considerar que la velocidad vertical del campo de velocidades perturbado en un punto determinado $\omega'(\vec{x}_0)$ está formado por los siguientes términos:

Una velocidad vertical de perturbación originada por una distribución de torbellinos situados sobre la superficie de la estela y el ala, según la dirección de la envergadura de ésta y con intensidad por unidad de longitud de $\Gamma_1 = 2 \cdot u'^+$:

$$\omega'_1 = -\frac{1}{2\pi} \cdot \int_{\Sigma_{ala}^+} u'^+ \frac{\partial \psi_0}{\partial x} dS \quad (3.74)$$

Más una velocidad vertical de perturbación originada por una distribución de torbellinos situados tanto en la superficie del ala como de la estela, según la dirección de la corriente incidente y con intensidad por unidad de longitud de $\Gamma_2 = 2 \cdot v'^+$:

$$\omega'_2 = -\frac{1}{2\pi} \cdot \int_{\Sigma_{ala}^+ + U\Sigma_{estela}^+} v'^+ \frac{\partial \psi_0}{\partial y} dS \quad (3.75)$$

Así pues, la distribución de torbellinos que origina la velocidad de perturbación vertical en un punto determinado, se representa de forma esquemática en la siguiente figura:

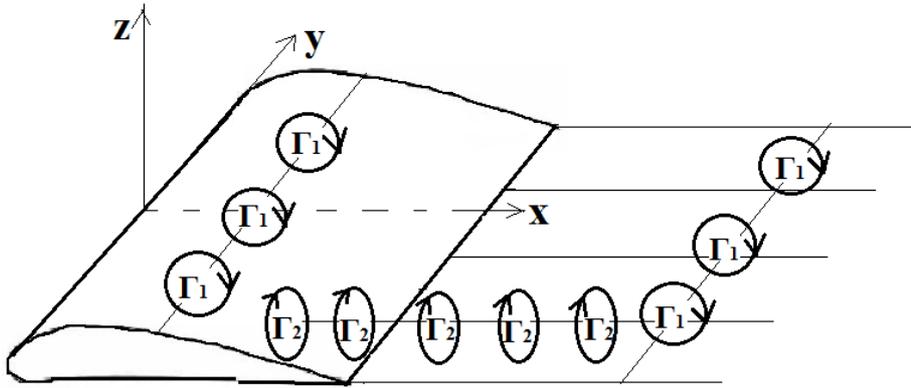


Figura 3.12. Distribución de torbellinos que permite resolver el problema planteado.

3.4 Ecuación de resolución del problema.

En esta sección se va a explicar cómo se va a proceder para resolver el problema considerado y cuál es la ecuación fundamental que permite su resolución.

En la sección 3.2 se han determinado las condiciones de contorno, que permiten calcular los valores de ϕ' en algunos de los bordes del ala. Sin embargo, tal y como se ha explicado en la sección 3.1, es necesario obtener los valores del potencial de velocidades en toda la superficie del ala, para así lograr resolver la integral:

$$\overline{F}(t) = 2\rho_\infty \int_{\Sigma_{ala}} \left(\frac{\partial \phi'^+}{\partial t} + U_\infty \cdot \frac{\partial \phi'^+}{\partial x} \right) \cdot \vec{n} dS \quad (3.76)$$

Para ello, se va a partir de la ecuación (3.61) demostrada en la sección 3.3:

$$\omega' = \frac{-1}{2\pi} \cdot \int_{\Sigma_{ala} + U\Sigma_{estela}} \vec{v}_s' \cdot \nabla \psi_0 dS \quad (3.77)$$

Donde:

$$\psi_0 = \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_0|} \quad (3.78)$$

$$\vec{v}_s' = u' \cdot \vec{e}_x + v' \cdot \vec{e}_y$$

$$u' = \frac{\partial \phi'}{\partial x}; \quad v' = \frac{\partial \phi'}{\partial y};$$

Por otro lado, el valor de ω' es impuesto por la condición de impenetrabilidad sobre el ala:

$$\omega'(x, y) = -U_\infty \cdot \alpha(t, x, y) \quad \forall (x, y) \in \text{Forma en planta del ala} \quad (3.79)$$

Siendo $\alpha(t, x, y)$ el ángulo de ataque del punto (x, y) en el instante "t". Es decir, es el movimiento que va a seguir el ala en el seno del fluido, que, en principio, es un movimiento conocido.

Entonces, la ecuación a resolver en el problema considerado es la siguiente:

$$\omega'(x, y) = -U_\infty \cdot \alpha(t, x, y) = \frac{-1}{2\pi} \cdot \int_{\Sigma_{\text{ala}} \cup \Sigma_{\text{estela}}} \vec{v}_s' \cdot \nabla \psi_0 dS \quad (3.80)$$

$$\forall (x, y) \in \text{Forma en planta del ala}$$

Donde las incógnitas del problema (valores de ϕ') aparecen implícitas en las expresiones de u' y v' .

La idea es obtener las incógnitas del problema a partir de la condición de impenetrabilidad.

Se tiene así la ecuación fundamental necesaria para resolver el problema y las condiciones de contorno que afectan a éste. Por tanto, el siguiente paso sería explicar la forma elegida para despejar las incógnitas de la ecuación anterior, para lo que se ha utilizado un método numérico que permite obtener resultados.

4 MÉTODO DE RESOLUCIÓN DEL PROBLEMA.

El objetivo principal de esta sección es desarrollar el modelo matemático utilizado para resolver el problema que se considera, y la forma en que éste modelo se ha implementado en un método numérico que permita obtener soluciones.

4.1 Discretización del ala y estela.

Para poder obtener una solución de la ecuación (3.80) siguiendo un método numérico, lo primero que se va a hacer es dividir el ala y la estela en diferentes paneles, para así conseguir una discretización de ambos y simplificar el problema.

Por tanto, es necesario realizar un panelado como el que se muestra en la siguiente figura:

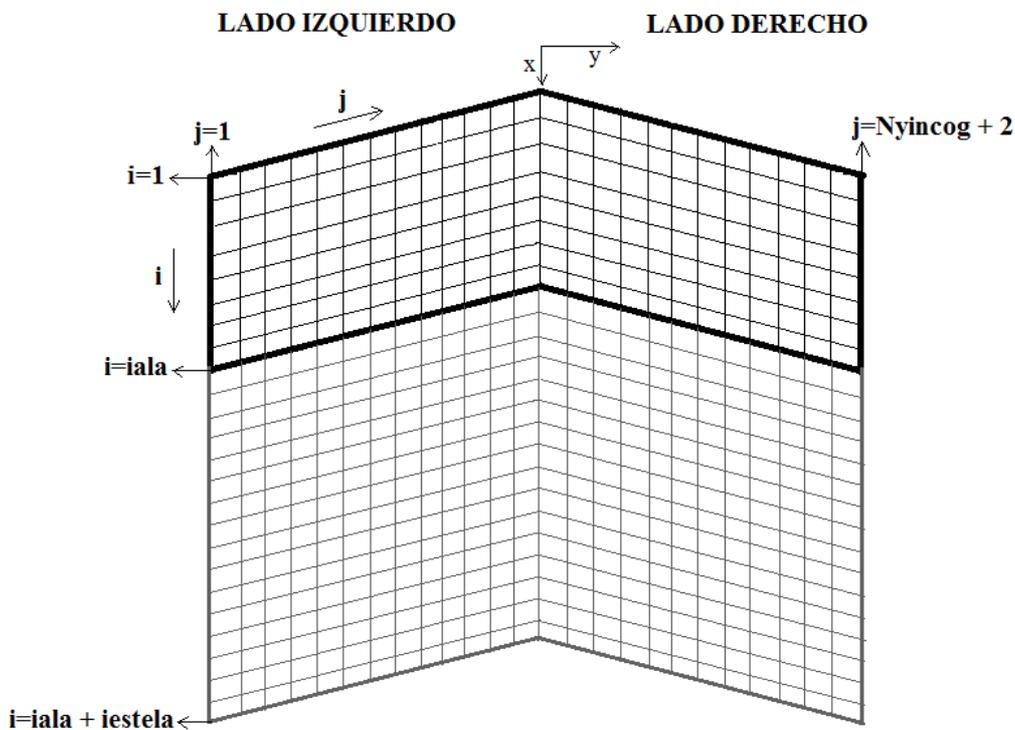


Figura 4.1. Panelado del ala y estela.

Utilizando esta figura, se van matizar algunas ideas.

En primer lugar, se va a definir el lado izquierdo como la zona del ala y de la estela que se encuentren en la parte negativa del eje y . Mientras que el lado derecho, será la zona del ala y de la estela que se encuentren en la parte positiva del eje y .

Además, en la figura aparecen nuevas variables: i , j , $iala$, $iestela$ y $Nyincog$.

La variable j , se va a utilizar para numerar las líneas verticales en las que se divide el ala y la estela, tal y como se observa en la imagen, de manera el valor de $j = 1$ se corresponde con la línea vertical situada en el lateral izquierdo del ala y la estela, mientras que $j = Nyincog + 2$ es la línea vertical que se encuentra en el borde

derecho del ala y la estela.

Por otro lado, la variable i se utiliza para numerar las líneas en las que se divide el ala y la estela según la dirección de j , tal y como se observa en la figura.

De esa forma, la variable $iala$ es el número de líneas según la dirección de j en las que se divide el ala, desde el borde de ataque $i = 1$, hasta el borde de salida $i = iala$.

Mientras que $iestela$ es el número de líneas en las que se divide la estela según la dirección de j comenzando, desde $i = iala + 1$, hasta $i = iala + iestela$.

La nomenclatura anterior va a ser utilizada para nombrar a los vértices de los paneles en los que se divide el ala, de manera que el vértice (i, j) será el que se encuentre en la posición i partiendo desde el borde de ataque del ala siguiendo la dirección del eje x , y en la posición j partiendo desde el lateral izquierdo del ala y la estela siguiendo la dirección de j .

Es importante aclarar, que el panelado del ala y de la estela se va a realizar estableciendo las coordenadas (x, y) de todos los vértices que forman los paneles, por lo que éstas serían conocidas.

En el método numérico que se va a utilizar, el panelado del ala se ha realizado de forma que se concentren un mayor número de paneles en las regiones donde haya mayores variaciones de las magnitudes fluidas, como pueden ser los bordes de ataque, de salida y los bordes marginales.

4.2 Factores de influencia.

Una vez se ha explicado cómo se ha realizado el panelado del ala, es necesario comenzar a resolver la ecuación fundamental del problema:

$$\omega'(x, y) = -U_\infty \cdot \alpha(t, x, y) = \frac{-1}{2\pi} \cdot \int_{\Sigma_{ala} \cup \Sigma_{estela}} \vec{v}_s' \cdot \nabla \psi_0 dS \quad (4.1)$$

$\forall (x, y) \in \text{Forma en planta del ala}$

Ese valor de $\omega'(x, y)$ es el valor de la velocidad de perturbación vertical que aparece en un punto del ala en concreto, y está impuesto por la condición de impenetrabilidad del ala a lo largo de toda su superficie.

Sin embargo, como se ha realizado una discretización del ala y de la estela a través del panelado de éstas, los valores de $\omega'(x, y)$ únicamente se van a imponer en unos puntos determinados del ala, y no en toda su superficie. Esos puntos son los que se denominan puntos de colocación.

4.2.1 Puntos de colocación.

Se va a explicar en esta sección qué se entiende por puntos de colocación y cuál es la distribución que éstos van a seguir en el ala.

En primer lugar, es importante aclarar que los puntos de colocación son los puntos del ala donde se va a imponer la condición de impenetrabilidad.

Los puntos de colocación, se han situado en unos paneles del ala en concreto, que son los representados en color rojo en la siguiente figura:

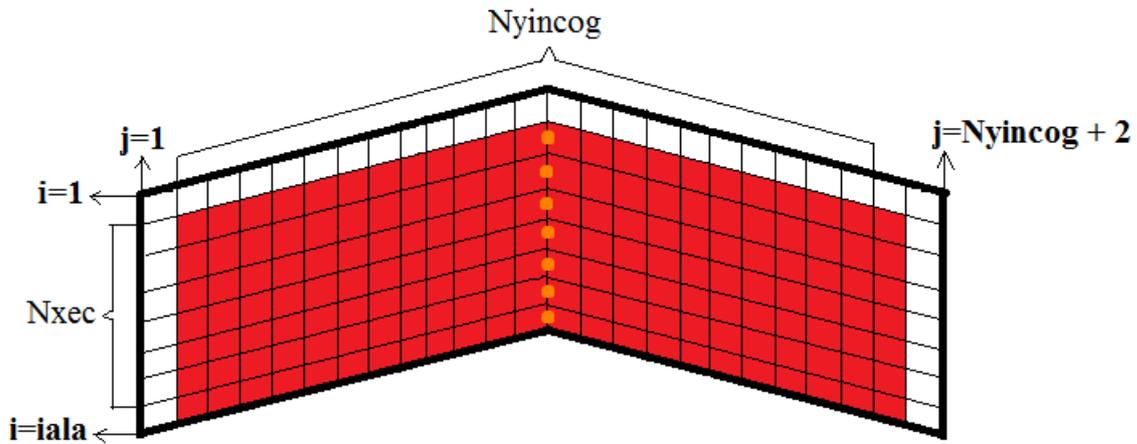


Figura 4.2. Paneles donde se sitúan puntos de colocación.

Es decir, en el interior de cada uno de esos paneles, se sitúa un punto de colocación, cuyas coordenadas (x_c, y_c) son conocidas, como se representa en la siguiente imagen:

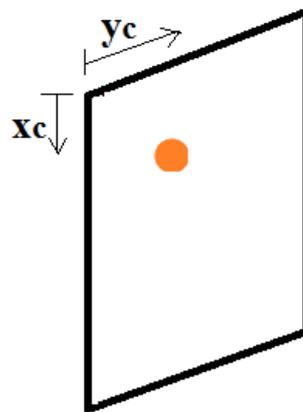


Figura 4.3. Posición relativa de un punto de colocación en un panel.

Además, también se han colocado en la línea central del ala puntos de colocación tal y como se muestra en la Figura 4.2 de color naranja.

Tal y como puede observarse en esa figura, se ha llamado $Nyincog$ al número de puntos de colocación que se han colocado según la dirección de j y se ha denominado $Nxec = iala - 2$ al número de puntos de colocación según el eje x . Por lo que hay $Nxec \cdot Nyincog$ puntos de colocación sobre el ala.

Cabe ahora preguntarse ¿Por qué se han situado puntos de colocación en esos paneles en concreto y no en todos los que forman el ala?

La respuesta a esta pregunta está fundamentada en conocer cuáles van a ser las incógnitas del problema a resolver. Como se explicó con anterioridad, estas incógnitas son los valores de ϕ' en todos los puntos de la superficie del ala, pero, realmente, al haber discretizado el ala en paneles, las incógnitas del problema serán los valores de ϕ' en cada uno de los cuatro vértices que determinan un panel.

Por tanto, se han situado en esos paneles en concreto debido a las implicaciones de las condiciones de contorno del problema. Como se ha explicado, tanto en el borde de ataque como en los bordes laterales del ala,

se cumple que $\phi' = 0$, por tanto, no sería necesario realizar más cálculos en esos bordes en los que el problema estaría resuelto, por eso, no se instauran puntos de colocación en los paneles colindantes con esos bordes.

4.2.2 Método de resolución de la integral.

Se va a explicar en esta sección cómo resolver la integral que aparece en la ecuación (4.1):

$$\frac{-1}{2\pi} \cdot \int_{\Sigma_{ala} \cup \Sigma_{estela}} \vec{v}_s' \cdot \nabla \psi_0 dS \quad (4.2)$$

Esa integral contabiliza los efectos que producen el ala y la estela sobre el punto de colocación que se esté considerando.

Para calcular numéricamente esa integral, se han dividido cada uno de los paneles que componen el ala y la estela en dos triángulos como los que se muestran en la siguiente figura:

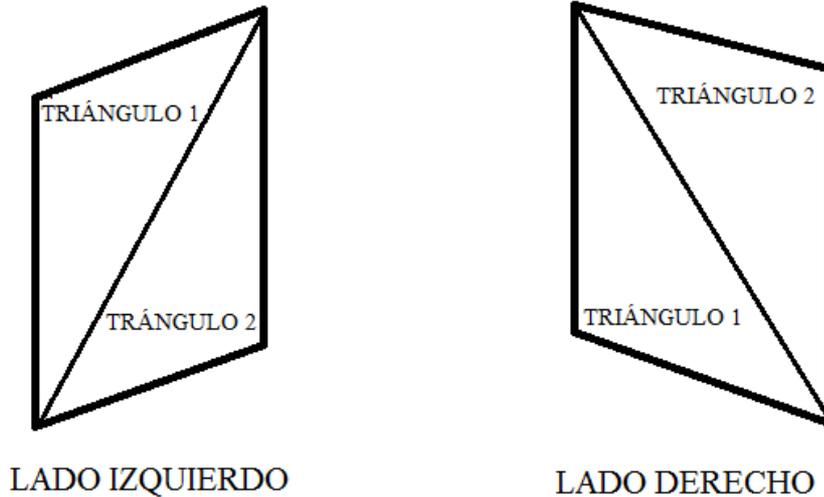


Figura 4.4. Triángulos en los que se dividen los paneles.

La nomenclatura de esos triángulos es la que se muestra en la imagen, y va a depender de si éstos se encuentran en el lado izquierdo o derecho.

Lo que se pretende obtener con esta división de los paneles, es una simplificación de la resolución numérica de la integral (4.2).

Por tanto, como la superficie del ala y la estela es equivalente a la superficie de todos los paneles en los que éstas se dividen, esa integral se puede expresar:

$$\frac{-1}{2\pi} \cdot \int_{\Sigma_{ala} \cup \Sigma_{estela}} \vec{v}_s' \cdot \nabla \psi_0 dS = \frac{-1}{2\pi} \cdot \int_{Superficie \ de \ todos \ los \ paneles} \vec{v}_s' \cdot \nabla \psi_0 dS \quad (4.3)$$

Es decir, sería equivalente realizar la integral sobre la superficie del ala y de la estela a realizarla sobre el área que forman el conjunto de paneles en los que éstas se han dividido.

Por tanto, para conocer cómo se va a realizar esa integral en el conjunto de todos los paneles, se va a explicar el procedimiento para uno de ellos en concreto.

Considerando un panel en concreto, la integral a resolver sería la siguiente:

$$\frac{-1}{2\pi} \cdot \int_{\text{Superficie del panel}} \vec{v}_s \cdot \nabla \psi_0 dS \quad (4.4)$$

Donde la función ψ_0 sigue la expresión:

$$\psi_0 = \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_0|} \quad (4.5)$$

Esa función ψ_0 se define respecto al punto de colocación que se esté considerando, en el cual se va a imponer la condición de impenetrabilidad sobre el ala, siendo, así \vec{r}_0 el vector posición del punto de colocación considerado y \vec{r} el vector posición de un punto en concreto del panel que se está estudiando.

Entonces, la integral (4.4) representa la velocidad vertical que provoca un panel determinado sobre el punto de colocación que se esté considerando, y sobre el que se va a aplicar la condición de impenetrabilidad.

Por tanto, para calcular la integral (4.4) en un panel determinado, habría que sumar la contribución de los dos triángulos que lo componen. Como el procedimiento es el mismo para ambos triángulos, se va a explicar cómo se ha realizado considerando un triángulo en concreto.

Para ello, una de las principales hipótesis realizadas para lograr una simplificación del problema es considerar que la variable \vec{v}_s es constante en cada uno de los triángulos en los que se dividen los paneles, siendo \vec{v}_{s1} el valor que toma \vec{v}_s en el triángulo 1, y \vec{v}_{s2} , el valor que toma \vec{v}_s en el triángulo 2.

Teniendo en cuenta esta hipótesis, la integral (4.4) se puede simplificar, ya que se cumple:

$$\vec{v}_s \cdot \nabla \psi_0 = \nabla (\vec{v}_s \cdot \psi_0) - \nabla \vec{v}_s \cdot \psi_0 \quad (4.6)$$

Si \vec{v}_s es constante en cada uno de los triángulos, entonces $\nabla \vec{v}_s = 0$ sobre cada triángulo, luego:

$$\vec{v}_s \cdot \nabla \psi_0 = \nabla (\vec{v}_s \cdot \psi_0) \quad (4.7)$$

Así pues, para cada uno de los triángulos, la integral a resolver es:

$$\omega_t' = \frac{-1}{2\pi} \cdot \int_{\Sigma_t} \nabla (\vec{v}_s \cdot \psi_0) dS \quad (4.8)$$

Si se aplica el teorema de Stokes a la expresión (4.8), se obtiene:

$$\omega_t' = \frac{-1}{2\pi} \cdot \int_{C_t} \vec{v}_s \cdot \psi_0 \cdot \vec{n}_t dl \quad (4.9)$$

Siendo C_t el contorno que rodea al triángulo considerado y \vec{n}_t el vector normal a ese contorno, como se representa en la figura:

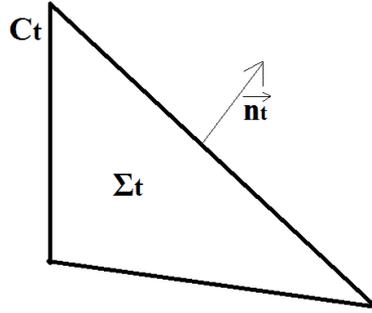


Figura 4.5. Contorno de un triángulo y vector normal al contorno.

La expresión (4.9), representa la velocidad vertical que provoca el triángulo considerado sobre el punto de colocación que se esté tratando.

A su vez, como es necesario realizar la integral a lo largo del contorno de un triángulo, se va a explicar cómo se ha resuelto considerando un segmento en concreto (de los tres que forman el triángulo), mientras que para el resto de segmentos, se sigue un planteamiento equivalente.

Así pues, la integral a resolver sería:

$$\frac{-1}{2\pi} \cdot \int_{\text{Segmento}} \vec{v}_s' \cdot \vec{n} \cdot \psi_0 dl \quad (4.10)$$

De nuevo, esa expresión es la velocidad vertical que provoca el segmento considerado sobre el punto de colocación que se esté tratando.

Debido a las hipótesis anteriores, el término $\vec{v}_s' \cdot \vec{n}$ va a ser un escalar constante a lo largo de todo el segmento considerado. Puesto que, por un lado, el segmento es recto y, por tanto, el vector \vec{n} será constante mientras que, por otro lado, la variable \vec{v}_s' se ha supuesto constante en cada triángulo. Entonces, se puede extraer ese término de la integral anterior, resultando:

$$\frac{-1}{2\pi} \cdot \vec{v}_s' \cdot \vec{n} \int_{\text{Segmento}} \psi_0 dl \quad (4.11)$$

Antes de proceder a explicar la forma de resolución de esta integral, es necesario aclarar algunos conceptos.

En primer lugar, la nomenclatura que se ha utilizado para nombrar a los vértices y los lados de un panel cualquiera es la siguiente:

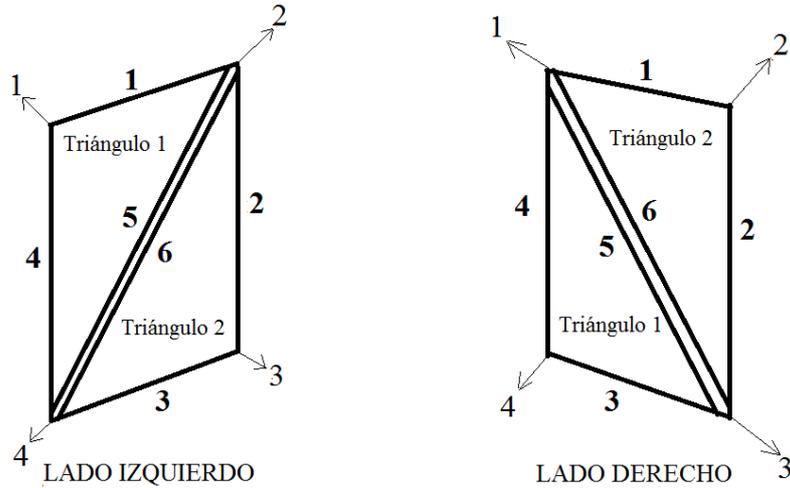


Figura 4.6. Nomenclatura de lados y vértices.

Además, para cada uno de los paneles, se han calculado las coordenadas de los vectores que unen los vértices de un mismo segmento, tal y como se representa en la siguiente figura:

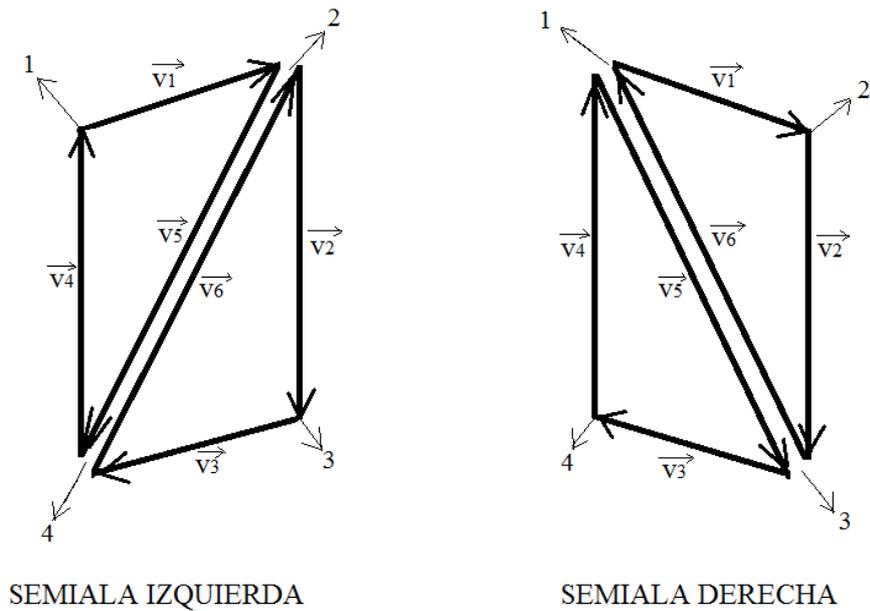


Figura 4.7. Definición de vectores \vec{v} .

Esos vectores se calculan fácilmente debido a que las coordenadas de los vértices que determinan los paneles son conocidas.

Para poder resolver el problema de una forma general para todos los paneles considerados, se ha creado un vector \vec{l}_2 de seis coordenadas asociado a un panel en concreto, donde cada una de esas coordenadas representa:

$$\vec{l}_2(i) = \text{Longitud del segmento } i \text{ de un panel en concreto (Módulo del vector } \vec{v}_i).$$

Una vez matizadas las consideraciones necesarias, se va a explicar la forma de resolución de la integral (4.11)

en un segmento cualquiera.

La integral a resolver es:

$$\frac{-1}{2\pi} \cdot \vec{v}_s \cdot \vec{n} \int_{\text{Segmento}} \psi_0 dl \quad (4.12)$$

Se tiene, por tanto, un segmento perteneciente a un panel cualquiera y un punto de colocación aleatorio a partir de los cuales se quiere calcular esa integral de forma general. El segmento y el punto de colocación aleatorios se representan en la siguiente figura:



Figura 4.8. Segmento AB y punto x_0 .

Los puntos A y B serían dos vértices pertenecientes un panel cualquiera y x_0 el punto de colocación considerado. Cabe recordar que la distancia que hay entre A y B sería una de las componentes del vector \vec{l}_2 , para este desarrollo, a esa componente se le va a llamar l_2

Si se une el punto de colocación x_0 con los vértices A y B aparecen dos segmentos como los que se muestran en la figura:

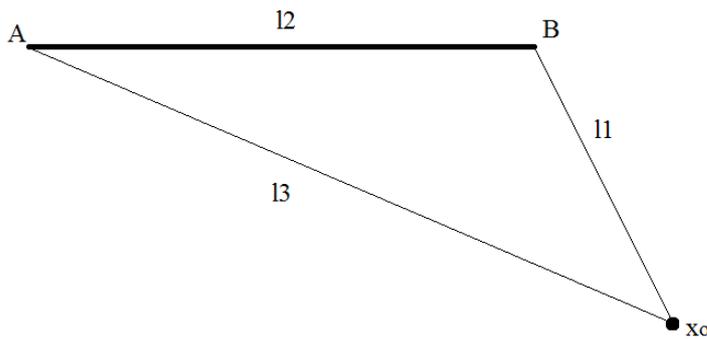


Figura 4.9. Definición de segmentos l_1 y l_3 .

De forma general, siempre uno de los segmentos va a ser mayor o igual que el otro, por ello, se va a denominar l_3 al mayor de los segmentos y l_1 al menor, por tanto, se verifica $l_3 > l_1$.

Así pues, si se está considerando el segmento i de un determinado panel, esas variables l_1 y l_3 se han colocado en la componente i de los vectores \vec{l}_1 y \vec{l}_3 , tal y como ocurrió con el vector \vec{l}_2 .

Por otro lado, la definición de la función ψ_0 es la siguiente:

$$\psi_0 = \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_0|} \quad (4.13)$$

De manera que $|\vec{r} - \vec{r}_0|$ es la distancia que hay entre el punto de colocación que se está tratando y un punto general del segmento considerado. Por lo que se puede expresar de la siguiente forma:

$$\psi_0 = \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_0|} = \frac{1}{d(s)} \quad (4.14)$$

Donde se ha definido la variable s tal y como se representa en la siguiente figura:

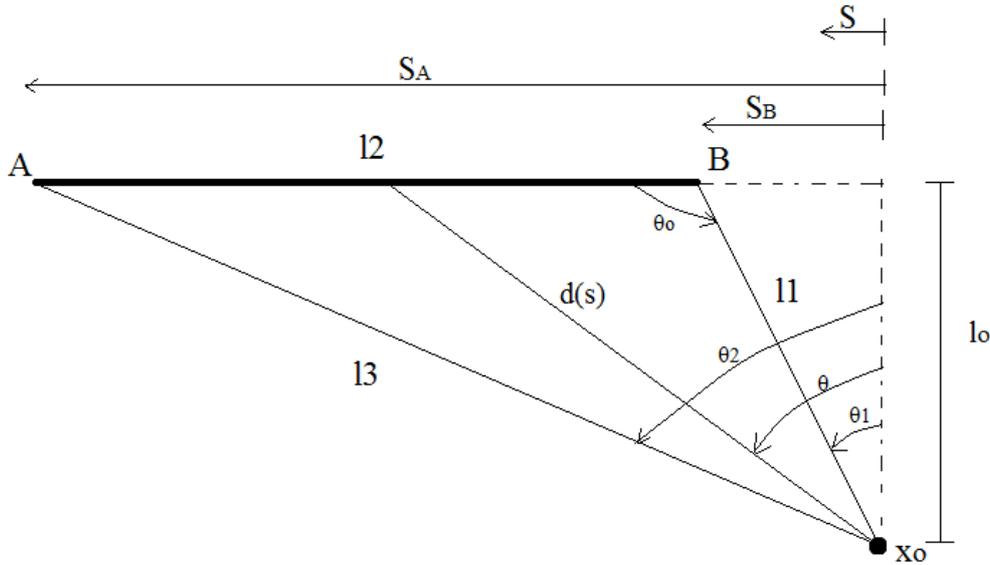


Figura 4.10. Definición de variables para resolver la integral.

Entonces, la integral (4.12) podría reescribirse:

$$\frac{-1}{2\pi} \cdot \vec{v}_s \cdot \vec{n} \cdot \int_{S_B}^{S_A} \frac{1}{d(s)} ds \quad (4.15)$$

A continuación, se va a realizar el cambio de variables:

$$s = l_0 \tan(\theta); \quad ds = \frac{l_0}{\cos^2(\theta)} d\theta \quad d(\theta) = \frac{l_0}{\cos(\theta)} \quad (4.16)$$

Si se introduce dicho cambio de variables en la integral que aparece en la expresión (4.15), resulta:

$$\int_{S_B}^{S_A} \frac{1}{d(s)} dl = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{1}{\cos(\theta)} d\theta \quad (4.17)$$

Se va a realizar ahora, el cambio de variables:

$$x = \text{sen}(\theta); \quad dx = \cos(\theta) d\theta; \quad (4.18)$$

Por tanto, sustituyendo el cambio de variables (4.18) en la integral (4.17), se obtiene:

$$\begin{aligned} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{1}{\cos(\theta)} d\theta &= \int_{\text{sen}(\theta_1)}^{\text{sen}(\theta_2)} \frac{1}{\cos^2(\theta)} dx = \int_{\text{sen}(\theta_1)}^{\text{sen}(\theta_2)} \frac{1}{1-x^2} dx = \\ &= \int_{\text{sen}(\theta_1)}^{\text{sen}(\theta_2)} \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x} \right] dx = \frac{1}{2} \left[\ln \left(\frac{1+\text{sen}(\theta_2)}{1+\text{sen}(\theta_1)} \right) - \ln \left(\frac{1-\text{sen}(\theta_2)}{1-\text{sen}(\theta_1)} \right) \right] \end{aligned} \quad (4.19)$$

Ahora, es necesario calcular los valores de $\text{sen}(\theta_2)$ y $\text{sen}(\theta_1)$ de forma general, para cualquier segmento y puntos de colocación considerados.

Para ello, se van a realizar una serie de cálculos basados en la Figura 4.10.

Tal y como se puede comprobar en la imagen, se verifica:

$$\theta_o - \frac{\pi}{2} = \theta_1 \quad (4.20)$$

Por lo que entonces, se cumple:

$$\text{sen}(\theta_1) = -\cos(\theta_o) \quad (4.21)$$

Por otro lado:

$$\text{sen}(\theta_2) = \frac{l_2 + l_1 \text{sen}(\theta_1)}{l_3} = \frac{l_2 - l_1 \cos(\theta_o)}{l_3} \quad (4.22)$$

Según las expresiones (4.22) y (4.21), los valores $\text{sen}(\theta_1)$ y $\text{sen}(\theta_2)$ están expresados en función del valor de $\cos(\theta_o)$.

Mientras, si se aplica el teorema del coseno, es posible determinar el valor de $\cos(\theta_o)$, de la siguiente forma:

$$\cos(\theta_o) = \frac{l_2^2 + l_1^2 - l_3^2}{2l_1 l_2} \quad (4.23)$$

Donde, se verifica que $l_3 > l_1$, como se explicó con anterioridad, por lo que se tiene una forma general de calcular la integral para cualquiera que sea el segmento considerado y para cualquier punto de colocación.

Por tanto, ya se tiene el método para poder calcular la integral de influencia de un determinado segmento sobre el punto de colocación en el que se va a aplicar la condición de impenetrabilidad.

Entonces, en términos de notación, se va a denominar $\text{faclog}(i)$ a:

$$\text{faclog}(i) = \frac{1}{2} \left[\ln \left(\frac{1+\text{sen}(\theta_2)}{1+\text{sen}(\theta_1)} \right) - \ln \left(\frac{1-\text{sen}(\theta_2)}{1-\text{sen}(\theta_1)} \right) \right] \quad (4.24)$$

Ese término será el valor de la integral asociada al segmento i del panel que se está considerando para calcular la influencia que éste ejerce sobre el punto de colocación elegido.

Es decir:

$$\text{faclog}(i) = \int_{\text{Segmento } (i)} \psi_0 dl \quad \text{En el panel considerado} \quad (4.25)$$

Pero, sin embargo la contribución a la velocidad vertical de un determinado segmento sobre el punto de colocación considerado, sigue la expresión (4.12):

$$\frac{-1}{2\pi} \cdot \vec{v}_s^T \cdot \vec{n} \int_{\text{Segmento}} \psi_0 dl \quad (4.26)$$

Se ha explicado una manera de calcular la integral de forma general para cualquier segmento y cualquier punto de colocación, pero ahora, es necesario realizar el mismo procedimiento para calcular el valor de $\vec{v}_s' \cdot \vec{n}$.

4.2.3 Cálculo de factores de influencia.

Tal y como se ha comentado anteriormente, para conocer la velocidad vertical que un segmento ejerce sobre un punto de colocación considerado, no basta con resolver la integral de la expresión (4.26), sino que también es necesario obtener el valor de $\vec{v}_s' \cdot \vec{n}$, por lo que el objetivo de esta sección es explicar el procedimiento general que se ha utilizado para calcular esos valores y obtener definitivamente los factores de influencia.

En primer lugar, se va a explicar cómo se han definido los vectores normales a los contornos de los triángulos y qué procedimiento se ha utilizado para calcularlos.

Los vectores normales a los segmentos siempre se han definido hacia “fuera” de los triángulos, tal y como se representa en la siguiente figura:

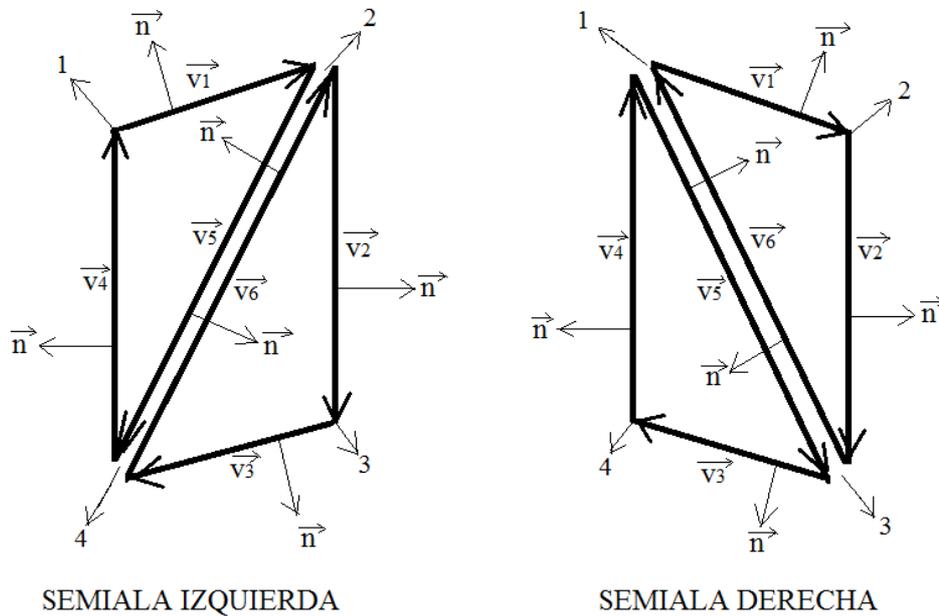


Figura 4.11. Definición de vectores normales.

Así pues, si se considera el eje “z” perpendicular al plano que forma el ala, esos vectores serán el producto escalar del vector \vec{k} (Según la dirección del eje z) y el vector \vec{v} correspondiente a cada segmento.

Entonces, si se desea calcular el vector normal al segmento i :

$$\vec{n}_i = \frac{1}{|\vec{v}_i|} \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & 1 \\ v_{ix} & v_{iy} & 0 \end{vmatrix} = -\frac{v_{iy}}{l_2(i)} \cdot \vec{i} + \frac{v_{ix}}{l_2(i)} \cdot \vec{j} \quad (4.27)$$

Siendo \vec{v}_i el vector \vec{v} del segmento i del panel considerado y $l_2(i)$ el módulo del vector \vec{v}_i , ya que $l_2(i)$ es la longitud del segmento i del panel considerado.

En términos de notación, se van a denominar:

$$n_x(i) = -\frac{v_{iy}}{l_2(i)};$$

$$n_y(i) = \frac{v_{ix}}{l_2(i)};$$
(4.28)

Así pues, como los vectores \vec{v} son conocidos para todos los segmentos, entonces, se ha conseguido una forma sencilla y metódica de calcular esos vectores normales.

La última variable que queda por calcular son los vectores \vec{v}_s' . En esas variables se van a introducir las incógnitas del problema.

Según la expresión (3.60):

$$\vec{v}_s' = u' \cdot \vec{e}_x + v' \cdot \vec{e}_y$$
(4.29)

Por tanto, el objetivo es determinar los valores de u' y de v' en cada uno de los triángulos que, en principio, serían las incógnitas del problema.

Realmente, éstas son las incógnitas del problema, pero para obtener la solución de éste de una forma metódica, se van a realizar una serie de operaciones que permitan modificar las incógnitas del problema, de manera que éstas sean el valor del potencial de velocidades en cada uno de los cuatro vértices que determinan un panel.

Es decir, para un panel determinado, las incógnitas van a ser ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 y ϕ_4 tal y como se representan en la siguiente figura:

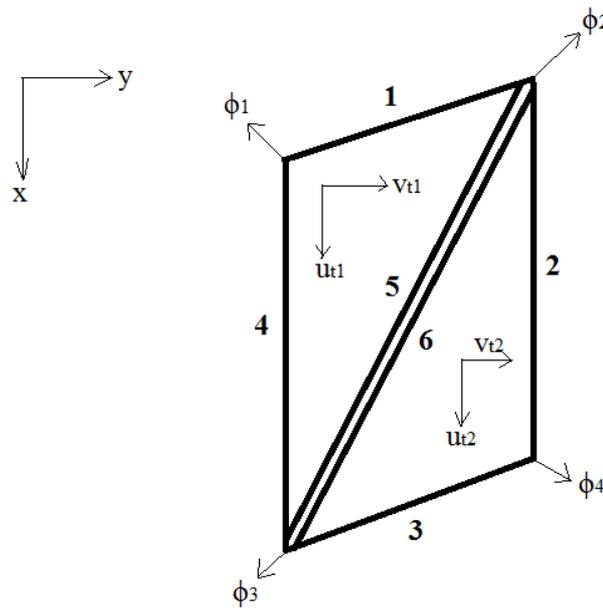


Figura 4.12. Panel perteneciente al lado izquierdo.

Por tanto, la idea es expresar las velocidades que aparecen en cada uno de los dos triángulos que forman un panel $u_{t1}, v_{t1}, u_{t2}, v_{t2}$ como función de las serán las incógnitas del problema ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 y ϕ_4 .

Se va a comenzar por un panel que se encuentre en el lado izquierdo como es el que se ha representado en la Figura 4.12.

En ese caso, se puede decir que:

$$u_{t1} = \frac{\partial \phi}{\partial x} \approx \frac{\phi_3 - \phi_1}{\vec{l}_2(4)} = -\frac{1}{\vec{l}_2(4)} \cdot \phi_1 + \frac{1}{\vec{l}_2(4)} \cdot \phi_3 \quad (4.30)$$

Esa expresión se reescribe:

$$u_{t1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\vec{l}_2(4)} & 0 & \frac{1}{\vec{l}_2(4)} & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \phi_4 \end{bmatrix} = \bar{u}_{t1} \cdot \bar{\phi} \quad (4.31)$$

Donde $\vec{l}_2(4)$ sería la longitud del segmento 4, del panel considerado.

De la misma forma debe verificarse que el gradiente de ϕ según el segmento 1 cumpla:

$$\frac{v_{1x} \cdot u_{t1} + v_{1y} \cdot v_{t1}}{\vec{l}_2(1)} = \frac{\phi_2 - \phi_1}{\vec{l}_2(1)} \quad (4.32)$$

Donde las componentes v_{1x} y v_{1y} , son las coordenadas x e y del vector \vec{v}_1 .

Por tanto, si se opera y se sustituye la expresión (4.30) en la ecuación (4.32), finalmente se obtiene:

$$v_{t1} = \left(\frac{1}{v_{1y}} \cdot \frac{v_{1x}}{\vec{l}_2(4)} - \frac{1}{v_{1y}} \right) \cdot \phi_1 + \frac{1}{v_{1y}} \cdot \phi_2 - \frac{v_{1x}}{v_{1y}} \cdot \frac{1}{\vec{l}_2(4)} \cdot \phi_3 \quad (4.33)$$

De nuevo, esa ecuación puede reescribirse:

$$v_{t1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{v_{1y}} \cdot \left(\frac{v_{1x}}{\vec{l}_2(4)} - 1 \right) & \frac{1}{v_{1y}} & -\frac{v_{1x}}{v_{1y}} \cdot \frac{1}{\vec{l}_2(4)} & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \phi_4 \end{bmatrix} = \bar{v}_{t1} \cdot \bar{\phi} \quad (4.34)$$

Se van a realizar los mismos procedimientos para el triángulo 2:

$$u_{t2} = \frac{\partial \phi}{\partial x} \approx \frac{\phi_4 - \phi_2}{\vec{l}_2(2)} = -\frac{1}{\vec{l}_2(2)} \cdot \phi_2 + \frac{1}{\vec{l}_2(2)} \cdot \phi_4 \quad (4.35)$$

Por lo que:

$$u_{t2} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{\vec{l}_2(2)} & 0 & \frac{1}{\vec{l}_2(2)} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \phi_4 \end{bmatrix} = \bar{u}_{t2} \cdot \bar{\phi} \quad (4.36)$$

De nuevo, el gradiente de ϕ según el segmento 3 verifica:

$$\frac{v_{3x} \cdot u_{t2} + v_{3y} \cdot v_{t2}}{\vec{l}_2(3)} = \frac{\phi_3 - \phi_4}{\vec{l}_2(3)} \quad (4.37)$$

Si se opera se obtiene:

$$v_{t2} = \frac{v_{3x}}{v_{3y}} \cdot \frac{1}{\vec{l}_2(2)} \cdot \phi_2 + \frac{1}{v_{3y}} \cdot \phi_3 - \left(\frac{1}{v_{3y}} \cdot \frac{v_{3x}}{\vec{l}_2(2)} + \frac{1}{v_{3y}} \right) \cdot \phi_4 \quad (4.38)$$

Esa expresión puede escribirse:

$$v_{t2} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{v_{3x}}{v_{3y}} \cdot \frac{1}{\vec{l}_2(2)} & \frac{1}{v_{3y}} & -\frac{1}{v_{3y}} \left(\frac{v_{3x}}{\vec{l}_2(2)} + 1 \right) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \phi_4 \end{bmatrix} = \bar{v}_{t2} \cdot \bar{\phi} \quad (4.39)$$

Por tanto, se pueden expresar las velocidades de cada uno de los triángulos en función del potencial de velocidades en los vértices de los paneles, que serán las incógnitas del problema a resolver.

Esos cálculos se corresponden a un panel que se encuentre en el lado izquierdo.

Un procedimiento similar se realiza para un panel que se encuentre en el lado derecho como el que se representa en la siguiente figura:

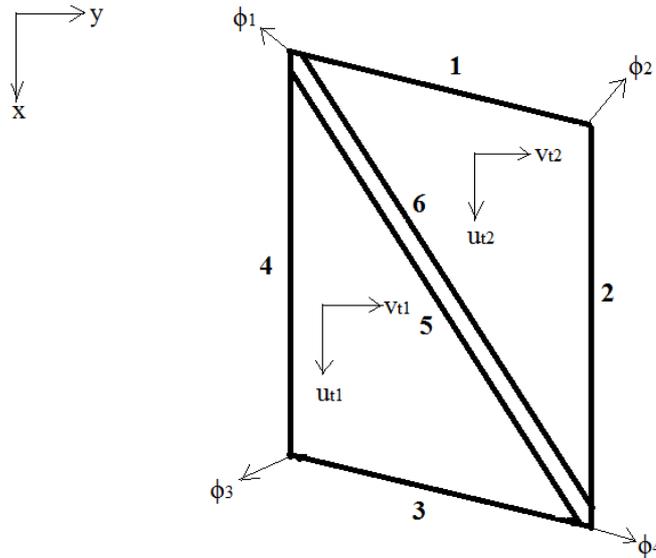


Figura 4.13. Panel perteneciente al lado derecho.

Comenzando por el triángulo 1, ahora se verifica:

$$u_{t1} = \frac{\partial \phi}{\partial x} \approx \frac{\phi_3 - \phi_1}{\vec{l}_2(4)} = -\frac{1}{\vec{l}_2(4)} \cdot \phi_1 + \frac{1}{\vec{l}_2(4)} \cdot \phi_3 \quad (4.40)$$

Por tanto puede escribirse:

$$u_{t1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\vec{l}_2(4)} & 0 & \frac{1}{\vec{l}_2(4)} & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \phi_4 \end{bmatrix} = \bar{u}_{t1} \cdot \bar{\phi} \quad (4.41)$$

Igualmente, el gradiente de ϕ según el segmento 3 debe verificar:

$$\frac{v_{3x} \cdot u_{t1} + v_{3y} \cdot v_{t1}}{\vec{l}_2(3)} = \frac{\phi_3 - \phi_4}{\vec{l}_2(3)} \quad (4.42)$$

Operando, se obtiene:

$$v_{t1} = \begin{bmatrix} \frac{v_{3x}}{v_{3y}} \cdot \frac{1}{\vec{l}_2(4)} & 0 & \frac{1}{v_{3y}} \left(-\frac{v_{3x}}{\vec{l}_2(4)} + 1 \right) & -\frac{1}{v_{3y}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \phi_4 \end{bmatrix} = \bar{v}_{t1} \cdot \bar{\phi} \quad (4.43)$$

Igualmente, en el triángulo 2:

$$u_{t2} = \frac{\partial \phi}{\partial x} \approx \frac{\phi_4 - \phi_2}{\vec{l}_2(2)} = -\frac{1}{\vec{l}_2(2)} \cdot \phi_2 + \frac{1}{\vec{l}_2(2)} \cdot \phi_4 \quad (4.44)$$

Puede expresarse:

$$u_{t2} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{\vec{l}_2(2)} & 0 & \frac{1}{\vec{l}_2(2)} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \phi_4 \end{bmatrix} = \bar{u}_{t2} \cdot \bar{\phi} \quad (4.45)$$

Por último, el gradiente de ϕ en el segmento 1 debe cumplir:

$$\frac{v_{1x} \cdot u_{t2} + v_{1y} \cdot v_{t2}}{\vec{l}_2(1)} = \frac{\phi_2 - \phi_1}{\vec{l}_2(1)} \quad (4.46)$$

Lo cual se representa:

$$v_{t2} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{v_{1y}} & \frac{1}{v_{1y}} \left(\frac{v_{1x}}{\vec{l}_2(2)} + 1 \right) & 0 & -\frac{v_{1x}}{v_{1y}} \cdot \frac{1}{\vec{l}_2(2)} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \phi_4 \end{bmatrix} = \bar{v}_{t2} \cdot \bar{\phi} \quad (4.47)$$

Según los cálculos anteriores, se tiene la forma de expresar las velocidades de los triángulos en función del valor del potencial en los vértices del panel, que serán las incógnitas del problema. Entonces, por ejemplo, el valor $\bar{v}_{t2}(i)$ es la influencia que ejerce ϕ_i sobre v_{t2} .

Cabe recordar que el objetivo es calcular:

$$\frac{-1}{2\pi} \cdot \vec{v}_s' \cdot \vec{n} \int_{\text{Segmento}} \psi_0 dl \quad (4.48)$$

Que es la velocidad vertical que un determinado segmento provoca sobre el punto de colocación considerado.

Por tanto, para calcular la velocidad vertical que un panel provoca sobre el punto de colocación considerado, habría que calcular ese factor para cada uno de los seis segmentos que determinan el panel (3 segmentos por cada triángulo).

La idea es calcular esa influencia que un determinado panel provoca sobre el punto de colocación considerado en función de las que serán las incógnitas del problema. Es decir, en función del valor del potencial de velocidades en los cuatro vértices que determinan el panel.

Por tanto, el objetivo es obtener una expresión para cada panel de la forma:

$$\omega_{panel} = \sum_{i=1}^4 \phi_i \cdot factor(i) \quad (4.49)$$

Donde ω_{panel} es la velocidad vertical que provoca un panel determinado sobre el punto de colocación que se está considerando.

Entonces, hay que determinar el valor de $factor(i)$ para los cuatro vértices de cada panel.

Después de todos los cálculos que se han realizado con anterioridad, y teniendo en cuenta la expresión (4.49) el valor de $factor(i)$ en el caso en que el panel se encuentre en el lado izquierdo es el siguiente:

$$\begin{aligned}
factor(i) = & -\frac{1}{2\pi} \left[\left(\overline{u}_{t1}(i) \cdot n_x(1) + \overline{v}_{t1}(i) \cdot n_y(1) \right) faclog(1) \right. \\
& + \left(\overline{u}_{t1}(i) \cdot n_x(5) + \overline{v}_{t1}(i) \cdot n_y(5) \right) faclog(5) \\
& + \left. \left(\overline{u}_{t1}(i) \cdot n_x(4) + \overline{v}_{t1}(i) \cdot n_y(4) \right) faclog(4) \right] \\
& - \frac{1}{2\pi} \left[\left(\overline{u}_{t2}(i) \cdot n_x(3) + \overline{v}_{t2}(i) \cdot n_y(3) \right) faclog(3) \right. \\
& + \left(\overline{u}_{t2}(i) \cdot n_x(6) + \overline{v}_{t2}(i) \cdot n_y(6) \right) faclog(6) \\
& + \left. \left(\overline{u}_{t2}(i) \cdot n_x(2) + \overline{v}_{t2}(i) \cdot n_y(2) \right) faclog(2) \right]
\end{aligned} \tag{4.50}$$

Mientras que si se encuentra en el lado derecho es:

$$\begin{aligned}
factor(i) = & -\frac{1}{2\pi} \left[\left(\overline{u}_{t1}(i) \cdot n_x(5) + \overline{v}_{t1}(i) \cdot n_y(5) \right) faclog(5) \right. \\
& + \left(\overline{u}_{t1}(i) \cdot n_x(3) + \overline{v}_{t1}(i) \cdot n_y(3) \right) faclog(3) \\
& + \left. \left(\overline{u}_{t1}(i) \cdot n_x(4) + \overline{v}_{t1}(i) \cdot n_y(4) \right) faclog(4) \right] \\
& - \frac{1}{2\pi} \left[\left(\overline{u}_{t2}(i) \cdot n_x(1) + \overline{v}_{t2}(i) \cdot n_y(1) \right) faclog(1) \right. \\
& + \left(\overline{u}_{t2}(i) \cdot n_x(2) + \overline{v}_{t2}(i) \cdot n_y(2) \right) faclog(2) \\
& + \left. \left(\overline{u}_{t2}(i) \cdot n_x(6) + \overline{v}_{t2}(i) \cdot n_y(6) \right) faclog(6) \right]
\end{aligned} \tag{4.51}$$

Esto es debido que el triángulo 1 está formado por los segmentos 1,5 y 4 cuando está en la parte izquierda y 5,3 y 4 cuando está en la parte derecha. Mientras el triángulo 2 está formado por los segmentos 3,6 y 2 cuando está en la parte izquierda, y 1,2 y 6 cuando está en la derecha, tal y como se representa en la siguiente figura:

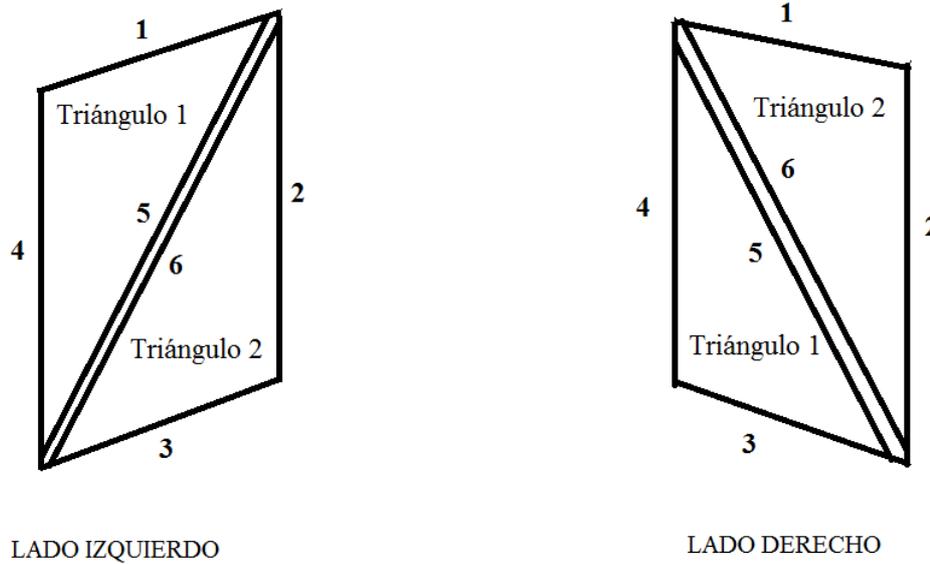


Figura 4.14. Segmentos que componen cada triángulo.

Con ese procedimiento se determina el valor de $factor(i)$, que sería el factor de influencia asociado al potencial de velocidades perteneciente al vértice i de un panel determinado sobre el punto de colocación que se está considerando.

4.3 Montaje de matriz de resolución del problema.

En la sección anterior, se ha explicado cómo calcular el factor de influencia asociado al potencial de velocidades que se encuentra en el vértice i de un panel determinado sobre el punto de colocación que se está considerando.

Para lograr resolver el problema, es necesario crear un sistema de ecuaciones de la siguiente forma:

$$Mat \cdot \phi = \omega' \quad (4.52)$$

Donde ϕ es una matriz compuesta por las incógnitas del problema que son los valores del potencial de velocidades en cada uno de los vértices que componen todos los paneles en los que se divide el ala y la estela.

Mat es la matriz que contiene los factores de influencia que ejercen los potenciales de velocidades que se encuentran en los vértices de los paneles sobre los puntos de colocación considerados.

Mientras que ω' es la velocidad vertical que aparece sobre esos puntos de colocación y que está determinada por la condición de impenetrabilidad sobre el ala.

Por tanto, el objetivo de esta sección es explicar cómo se produce el montaje de la matriz Mat y cuáles son sus componentes.

Se va a comenzar, en primer lugar, por las filas de la matriz. En cada fila de la matriz se encuentran los factores de influencia que ejercen todos los vértices que forman la estela y el ala sobre un punto de colocación considerado.

Antes de continuar con la explicación es necesario aclarar cuál es la nomenclatura de los puntos de colocación

que se sitúan sobre el ala.

Los puntos de colocación se denominan con las variables (i_0, j_0) . La variable i_0 indica cuál es la posición del punto de colocación respecto al borde de ataque, y j_0 indica la posición en la que se encuentra respecto al lateral izquierdo del ala. Esta idea se representa mejor en la siguiente figura:

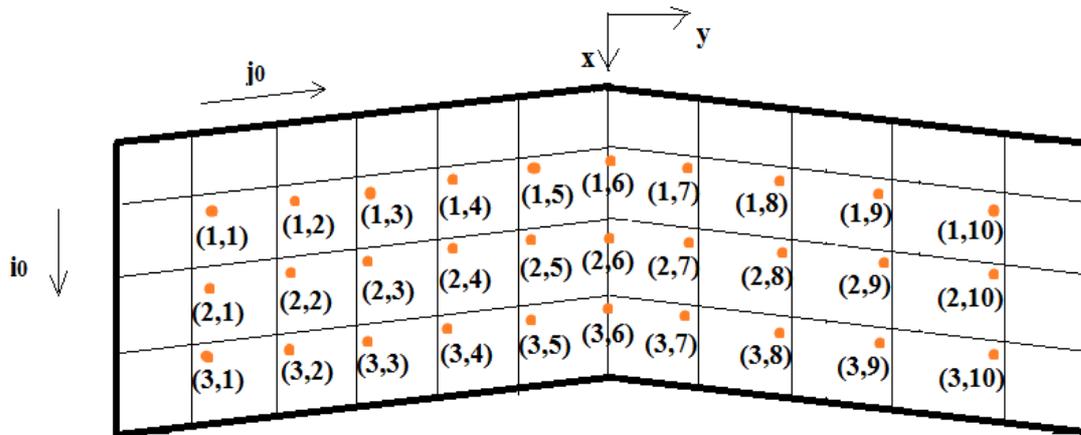


Figura 4.15. Nomenclatura de los puntos de colocación.

Así pues, las filas de la matriz *Mat* se van a organizar de modo que los factores de influencia que ejercen los potenciales de velocidades de todos los vértices del ala y la estela sobre el punto de colocación (i_0, j_0) se sitúen en la fila $(i_0 - 1) \cdot N_{yec} + j_0$. Por tanto, las filas que ocuparían los factores de influencia que afectan a los puntos de colocación representados en la imagen anterior serían las siguientes:

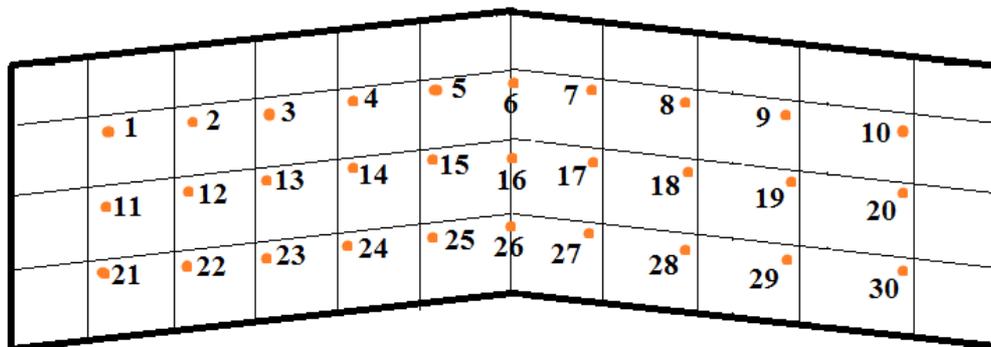


Figura 4.16. Filas de la matriz *Mat* en las que se colocan los factores de influencia asociados a los puntos de colocación de la figura anterior.

En la imagen se enumeran las filas donde se van a situar los factores de influencia que afectan a los puntos de colocación representados.

Ahora, queda por explicar cómo se organizan las columnas.

Sobre las columnas de la matriz, se van a colocar los factores de influencia que cada vértice ejerce sobre el punto de colocación considerado.

Tal y como se explicó en la sección 4.1 la nomenclatura utilizada para identificar los vértices de todos los paneles en los que se divide el ala y la estela es la que se representa en la siguiente figura:

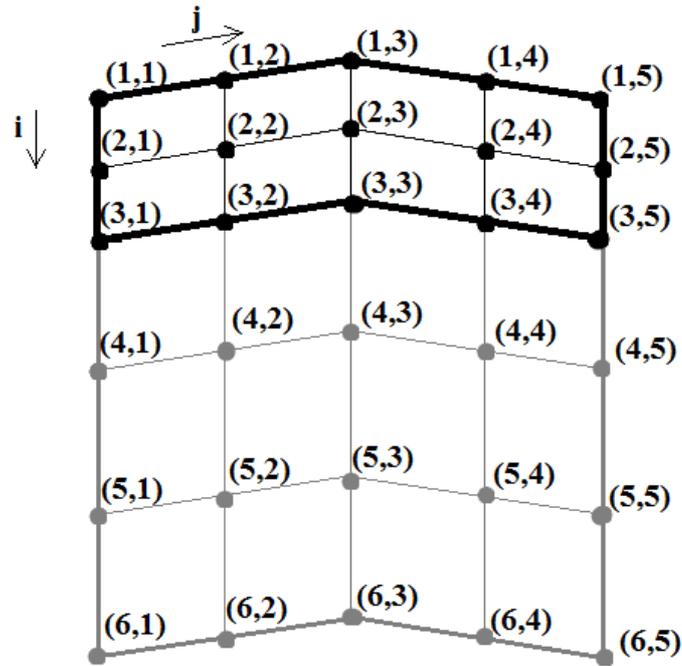


Figura 4.17. Nomenclatura de los vértices del ala y estela.

Por otro lado, los paneles se identifican de tal forma que el panel (i, j) es aquel cuyo vértice superior izquierdo es el vértice (i, j) . Es decir, si se representa el ala y la estela anteriores, la nomenclatura de los paneles es:

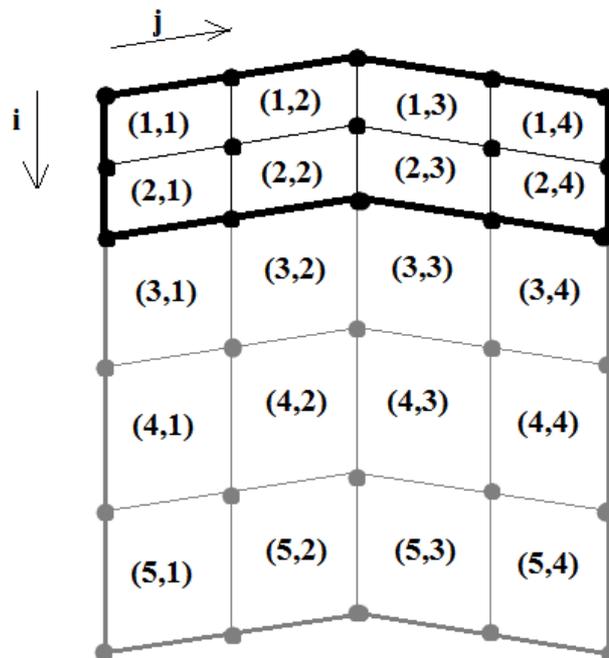


Figura 4.18. Nomenclatura de paneles del ala y estela.

Así pues, la forma de actuar va a ser la siguiente:

Se elige un punto de colocación (i_0, j_0) . Por lo que la fila de la matriz que se va rellenar es la fila

$(i_0 - 1) \cdot Nyec + j_0$. Ahora hay que calcular los factores de influencia que ejercen los potenciales de velocidades de todos los vértices sobre ese punto de colocación elegido.

Por tanto, es necesario considerar cada uno de los paneles que forman el ala y la estela, de manera que en un panel determinado (i, j) , se tienen los siguientes factores de influencia:

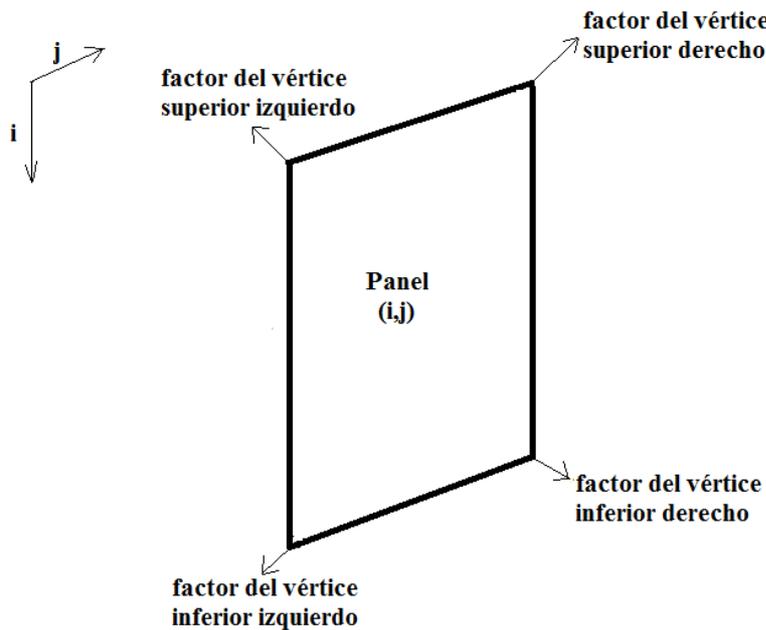


Figura 4.19. Factores de influencia de cada panel.

Entonces, los factores de influencia del panel (i, j) , se van a colocar en las siguientes columnas:

- El factor de influencia del vértice superior izquierdo, se coloca en la columna $(i - 2) \cdot Nyincog + j - 1$.
- El factor de influencia del vértice superior derecho, en la columna $(i - 2) \cdot Nyincog + j$
- El factor de influencia del vértice inferior izquierdo, en la columna $(i - 1) \cdot Nyincog + j - 1$
- El factor de influencia del vértice inferior derecho, en la columna $(i - 1) \cdot Nyincog + j$

Donde los valores (i, j) serán los correspondientes a la nomenclatura del panel considerado.

Siguiendo ese procedimiento, habría que colocar en la matriz todos los factores de influencia de todos los paneles que forman el ala y la estela.

En las fórmulas utilizadas para colocar los factores en las columnas de la matriz, se puede observar, que en ocasiones pueden resultar columnas negativas, o, incluso el valor cero, lo cual no tiene sentido alguno.

Eso ocurre en los vértices superiores cuando $i = 1$. En este caso, no se colocará ese factor de influencia en la matriz, ya que se corresponde con los potenciales de velocidades del borde de ataque, que, por condición de contorno, son cero.

Además, es necesario también destacar que cuando se tienen paneles en los que $j = 1$ (paneles colindantes con el borde izquierdo del ala y estela) y $j = Nyincog + 1$ (paneles colindantes con el borde derecho del ala y estela), los factores de influencia correspondientes a los vértices izquierdos y derechos respectivamente, tampoco se colocarán en la matriz, ya que, de nuevo, por condición de contorno, en los bordes laterales del ala y de la estela, el potencial de velocidades es cero.

Por tanto, el orden de los factores de influencia de cada uno de los vértices en las columnas de la matriz es el siguiente:

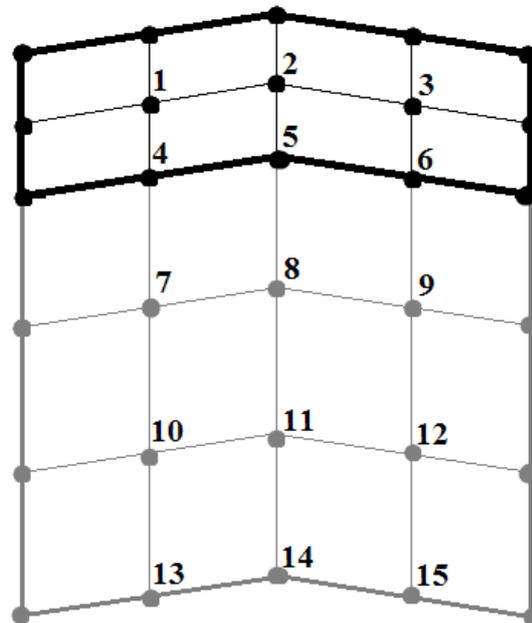


Figura 4.20. Columnas en los que se van a situar los factores de influencia asociados a los vértices representados.

En la imagen, se representa la columna de la matriz donde se colocan los factores de influencia correspondientes a esos vértices. Se puede comprobar que tanto los valores del borde de ataque como los bordes laterales del ala y la estela no se han tenido en cuenta.

4.3.1 Dimensiones del sistema resultante.

Según todo lo que se ha explicado con anterioridad, el sistema de ecuaciones a resolver es el siguiente:

$$Mat \cdot \phi = \omega' \quad (4.53)$$

Se van a analizar ahora las dimensiones de cada una de las matrices que aparecen.

Se va a comenzar por la matriz *Mat* que contiene los factores de influencia de todos los vértices.

El número de filas de esta matriz es el número de puntos de colocación que se distribuyen sobre el ala, por tanto, posee $N_{xec} \cdot N_{yincog}$ filas.

Mientras que el número de columnas de la matriz es el número total de vértices que componen el ala y la estela, exceptuando aquellos que se encuentren en el borde de ataque del ala o en los bordes laterales del ala y la estela, por tanto tiene $[(iala - 1) + iestela] \cdot N_{yincog}$ columnas.

Es por eso importante remarcar que la matriz *Mat* no es una matriz cuadrada y, por tanto, todavía no se está en disposición de resolver el problema. La estructura general de la matriz *Mat* es la siguiente:

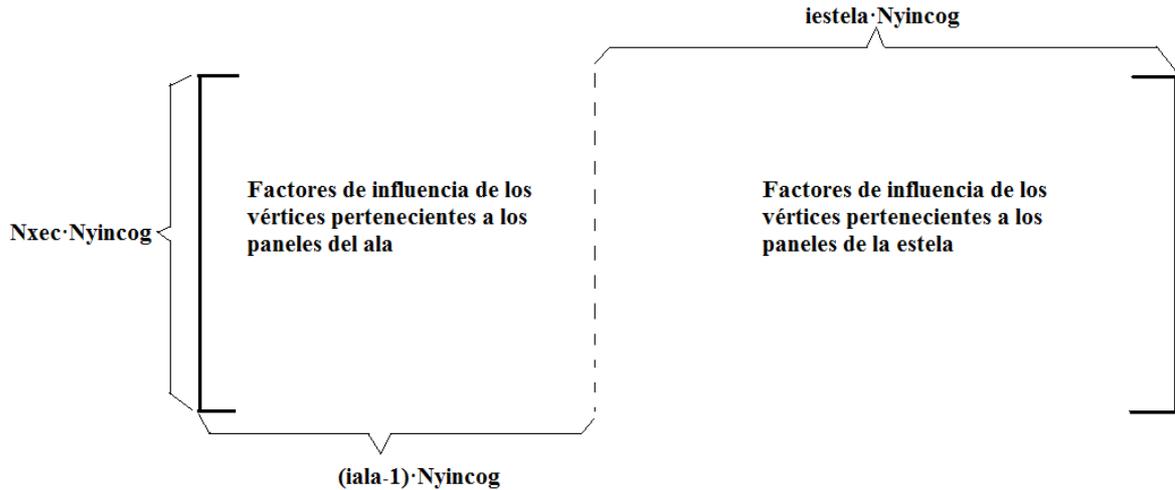


Figura 4.21. Estructura de la matriz Mat .

En las $(iala - 1) \cdot Nyincog$ primeras columnas se encuentran los factores de influencia asociados a los vértices pertenecientes a los paneles del ala. Mientras en las últimas $iestela \cdot Nyincog$ columnas se encuentran los factores de influencia asociados a los vértices pertenecientes a los paneles de la estela.

Por otro lado la matriz ϕ está formada por los valores del potencial de velocidades en todos los vértices que forman el ala y la estela excepto los que se encuentran en el borde de ataque del ala y los bordes laterales. Las componentes de esta matriz serían en principio las incógnitas del problema.

Por eso, la matriz ϕ es una matriz columna formada por $[(iala - 1) + iestela] \cdot Nyincog$ componentes, donde las primeras $(iala - 1) \cdot Nyincog$ componentes serán los valores de ϕ en vértices pertenecientes a paneles del ala, mientras que las últimas $iestela \cdot Nyincog$ componentes, serán los valores de ϕ en vértices pertenecientes a paneles de la estela.

Por último, la matriz ω' es el término independiente del sistema, y está formada por las condiciones de impenetrabilidad que se imponen sobre cada uno de los puntos de colocación. Por eso, es un vector columna formado por $Nxec \cdot Nyincog$ componentes, tantas como puntos de colocación, de manera que la componente $\omega'(k)$ sería la condición de contorno que se aplica en el punto de colocación asociado a la fila k de la matriz Mat .

De forma visual, la estructura del sistema es la que se representa en la siguiente imagen:

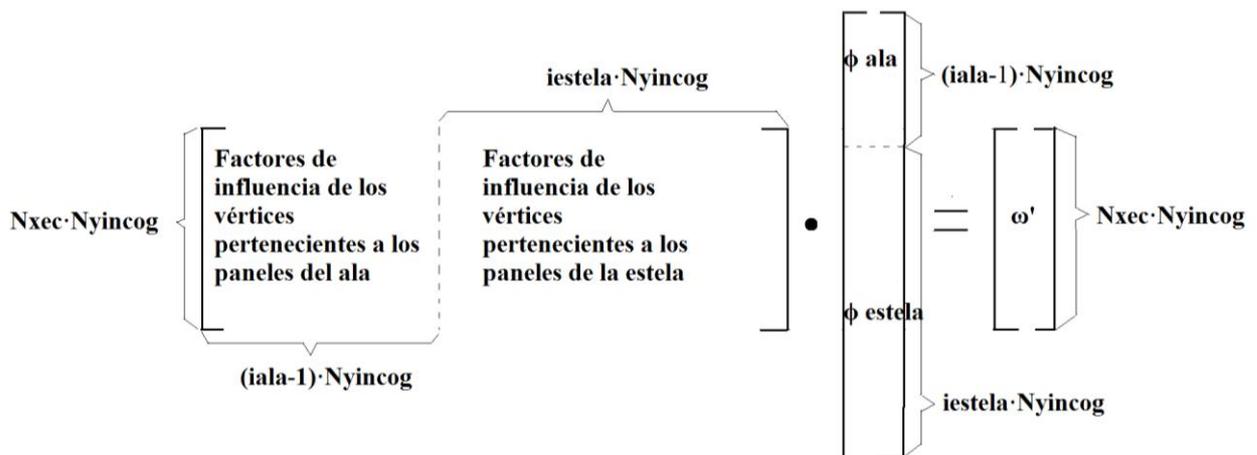


Figura 4.22. Estructura del sistema de ecuaciones.

Como se puede comprobar, no es posible resolver el sistema, ya que se poseen $N_{xec} \cdot N_{yincog}$ ecuaciones mientras hay $[(iala - 1) + iestela] \cdot N_{yincog}$ incógnitas, por lo que es imposible obtener una solución al problema. Por ello, es necesario introducir nuevas consideraciones que permitan obtener un sistema compatible determinado.

4.4 Condición de Kutta.

Según los resultados obtenidos, el sistema a resolver es un sistema compatible indeterminado, ya que se poseen más incógnitas que ecuaciones. Por eso, el objetivo de esta sección es aplicar una condición necesaria para completar parcialmente el problema. Esa condición es la conocida como condición de Kutta.

En primer lugar, la ecuación de Euler-Bernouilli no estacionaria (expresión 2.61) particularizada para el extradós e intradós del ala proporciona las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned} p'^+ &= -\left(\frac{\partial\phi'^+}{\partial t} + U_\infty \cdot \frac{\partial\phi'^+}{\partial x}\right)\rho_\infty \\ p'^- &= -\left(\frac{\partial\phi'^-}{\partial t} + U_\infty \cdot \frac{\partial\phi'^-}{\partial x}\right)\rho_\infty \end{aligned} \quad (4.54)$$

Si se restan ambas ecuaciones se obtiene:

$$p'^+ - p'^- = -\left[\frac{\partial(\phi'^+ - \phi'^-)}{\partial t} + U_\infty \frac{\partial(\phi'^+ - \phi'^-)}{\partial x}\right]\rho_\infty \quad (4.55)$$

La condición de Kutta impone que para evitar el rebordeo en el borde de salida, las presiones en el intradós y en el extradós deben ser iguales, por lo que la expresión (4.55) resulta:

$$\frac{\partial(\phi'^+ - \phi'^-)}{\partial t} + U_\infty \frac{\partial(\phi'^+ - \phi'^-)}{\partial x} = 0 \quad (4.56)$$

Por otro lado, como se está considerando el problema antisimétrico, se verifica:

$$\phi'^+ = -\phi'^- \quad (4.57)$$

Sustituyendo la igualdad (4.57) en la ecuación (4.56), resulta:

$$\frac{\partial\phi'^+}{\partial t} + U_\infty \frac{\partial\phi'^+}{\partial x} = 0 \quad (4.58)$$

Esa es la expresión general de la condición de Kutta, que se verifica en el borde de salida del ala.

Por otro lado, en todos los desarrollos anteriores, no ha sido necesario tener en cuenta la presencia de la variable tiempo. La condición de Kutta es básica para considerar problemas no estacionarios, ya que va a proporcionar las ecuaciones necesarias para modelar la variable tiempo en el problema.

Por ello, se va a distinguir entre el caso estacionario y el no estacionario.

4.4.1 Condición de Kutta. Caso estacionario.

Si se considera, en primer lugar, el caso estacionario, se verifica entonces:

$$\frac{\partial \phi'^+}{\partial t} = 0 \quad (4.59)$$

Por tanto, la ecuación (4.58) queda:

$$\left. \frac{\partial \phi'^+}{\partial x} \right|_{x=b.s} = 0 \quad (4.60)$$

Es decir, esa condición se cumple para todo el borde de salida.

A continuación, se va a explicar cómo se ha implementado esa condición en el método numérico que se está desarrollando.

En primer lugar, se ha aproximado la derivada que aparece en la expresión (4.60) de la siguiente forma:

$$\left. \frac{\partial \phi'^+(y)}{\partial x} \right|_{x=b.s} \approx \frac{\phi'_{b.s}(y) - \phi'_{b.s-1}(y)}{\Delta x_{bs}} \quad (4.61)$$

Sustituyendo la expresión (4.61) en la ecuación (4.60) se obtiene:

$$\phi'_{b.s} - \phi'_{b.s-1} = 0 \quad (4.62)$$

Donde $\phi'_{b.s}$ es el valor de ϕ' en el vértice que se encuentran en el borde de salida del ala para un valor de y dado. Mientras que $\phi'_{b.s-1}$ es el valor de ϕ' en el vértice que se encuentra un panel adelantado respecto al borde de salida para un valor de y dado. Tal y como se representa en la siguiente figura:

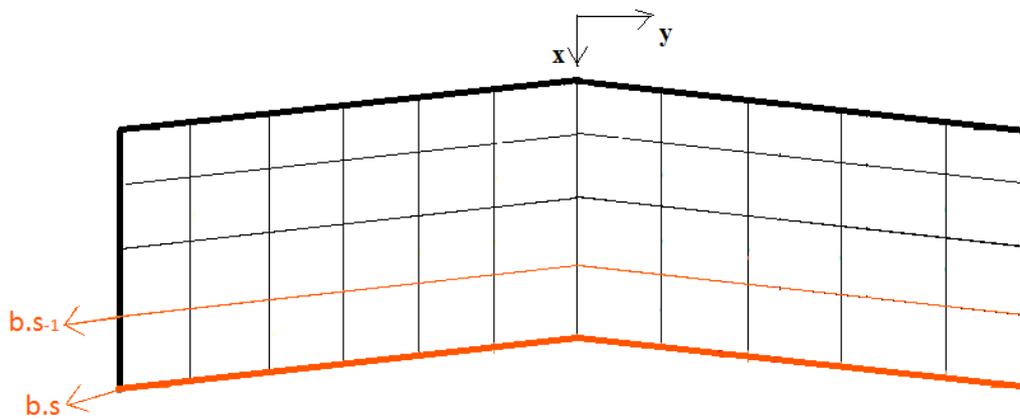


Figura 4.23. Vértices pertenecientes al borde de salida ($b.s$) y a un panel de distancia del borde de salida ($b.s - 1$).

Así, se eligen los vértices de un y determinado como es el que se ha marcado de color rojo:

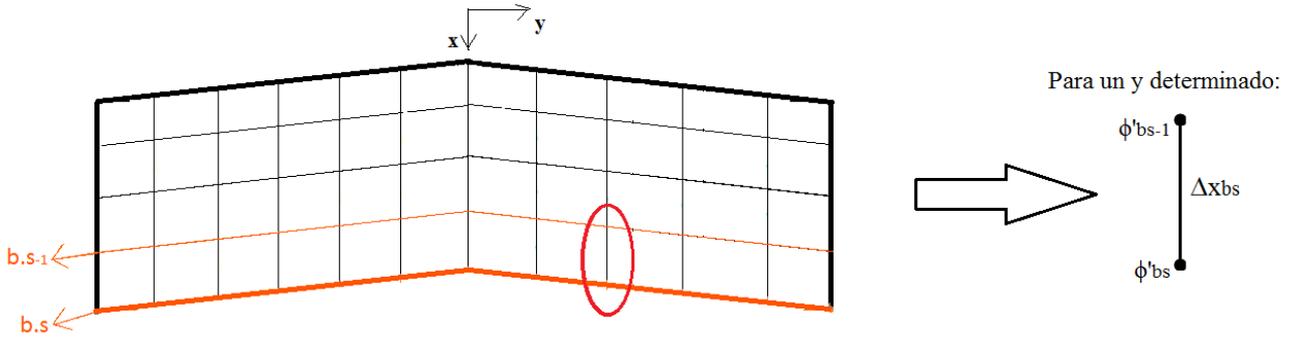


Figura 4.24. Elección de variables para un valor de y determinado.

En la figura se puede comprobar que la derivada que aparece en la expresión (4.60), se puede aproximar numéricamente de la forma representada en la ecuación (4.61).

Así pues, según la expresión (4.62), el término independiente de la condición de Kutta en el caso estacionario es nulo.

Por tanto, según estos desarrollos, la condición de Kutta impondrá tantas ecuaciones como vértices haya en el borde de salida. Pero si se aplican las condiciones de contorno, en los bordes laterales, el valor de $\phi'_{b.s} = 0$, por lo que realmente, la condición se impone en $Nyincog$ vértices en el borde de salida, sin considerar los dos que se encuentran en los bordes laterales. Por ello, esta condición proporciona $Nyincog$ ecuaciones adicionales.

4.4.2 Condición de Kutta. Caso no estacionario.

Si se considera ahora el caso no estacionario, la condición de Kutta es la que aparece en la expresión (4.58):

$$\left. \frac{\partial \phi'^+}{\partial t} \right|_{b.s} + U_{\infty} \left. \frac{\partial \phi'^+}{\partial x} \right|_{b.s} = 0 \quad (4.63)$$

Esa condición se verifica en todo el borde de salida del ala.

De nuevo se va a explicar cómo se ha implementado esta ecuación en el método numérico considerado.

Para poder implementar numéricamente esa expresión es necesario, en primer lugar, aproximar las derivadas que en ella aparecen. Se va a comenzar por la derivada respecto al tiempo.

La derivada de ϕ' respecto del tiempo se va a aproximar de la forma:

$$\left. \frac{\partial \phi'^+}{\partial t} \right|_{b.s} \approx \frac{\phi'^+_{b.s}(t) - \phi'^+_{b.s}(t - \Delta t)}{\Delta t} \quad (4.64)$$

Donde $\phi'^+_{b.s}(t)$ es el valor que toma ϕ'^+ en el vértice perteneciente al borde de salida para un y dado, en un instante t . Mientras que $\phi'^+_{b.s}(t - \Delta t)$ es el valor que tomó ese mismo ϕ'^+ un instante Δt anterior.

Mientras que, por otro lado, la segunda de las derivadas se va a aproximar de la siguiente forma:

$$\left. \frac{\partial \phi'^+}{\partial x} \right|_{b.s} = 0.5 \cdot \left(\frac{\phi'^+_{b.s}(t) - \phi'^+_{b.s-1}(t) + \phi'^+_{b.s}(t - \Delta t) - \phi'^+_{b.s-1}(t - \Delta t)}{\Delta x_{bs}} \right) \quad (4.65)$$

Por tanto, si se considera adimensionalizando que el valor de $U_\infty = 1 \text{ m/s}$, finalmente, la ecuación de Kutta en el caso no estacionario para un valor de y determinado es:

$$\begin{aligned} & \phi'_{b.s}(t) \cdot \left[1 + 0.5 \frac{\Delta t}{\Delta x_{bs}} \right] - \phi'_{b.s-1}(t) \cdot 0.5 \frac{\Delta t}{\Delta x_{bs}} = \\ & = \phi'_{b.s}(t - \Delta t) \cdot \left[1 - 0.5 \frac{\Delta t}{\Delta x_{bs}} \right] + \phi'_{b.s-1}(t - \Delta t) \cdot 0.5 \frac{\Delta t}{\Delta x_{bs}} \end{aligned} \quad (4.66)$$

Donde se va a suponer que los valores de $\phi'_{b.s}(t - \Delta t)$ y de $\phi'_{b.s-1}(t - \Delta t)$ son conocidos, ya que es el valor que tomaron las variables $\phi'_{b.s}$ y $\phi'_{b.s-1}$ un instante Δt anterior al instante t que se está considerando. Mientras que en el instante inicial ($t = 0$), esos valores son nulos. Por tanto, todo aquello que se encuentra a la derecha de la igualdad es el término independiente de la ecuación, que, además, es conocido para cada instante t .

Entonces, para cada uno de los vértices que se encuentran en el borde de salida habría que imponer esa condición, exceptuando los dos vértices que encontrándose en el borde de salida del ala pertenecen, además, a los bordes laterales de ésta.

Por tanto, de nuevo, la condición de Kutta aporta *Nyincog* ecuaciones adicionales al problema para cada instante t considerado.

4.4.3 Introducción de la condición de Kutta en la matriz de resolución del problema.

Como se ha explicado anteriormente, la condición de Kutta aporta *Nyincog* ecuaciones adicionales al problema que se desea resolver. Una vez que se conocen estas ecuaciones, se va a explicar dónde se van a introducir en la matriz *Mat* de resolución del problema

Esta matriz *Mat* está compuesta por $Nxec \cdot Nyincog$ filas, tantas como puntos de colocación existentes sobre el ala. Así pues, las ecuaciones de la condición de Kutta, se van a añadir en las filas posteriores.

Para colocar estas ecuaciones en la matriz, se va a comenzar por aquella asociada al vértice inferior izquierdo (sin contar el perteneciente al borde lateral), y se va a ir avanzando según la dirección j tal y como se representa en la figura:

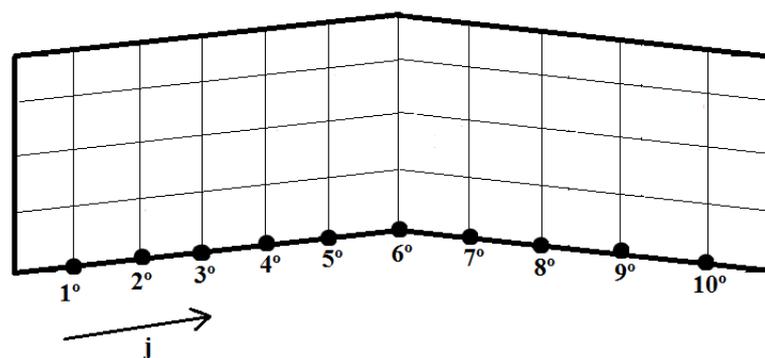


Figura 4.25. Orden en el que se colocan las ecuaciones asociadas a la condición de Kutta en la matriz *Mat*.

De manera que la ecuación de la condición de Kutta asociada al primer vértice, se va a colocar en la fila $Nxec \cdot Nyincog + 1$, mientras que la ecuación asociada al vértice j -ésimo, se va a colocar en la fila $Nxec \cdot Nyincog + j$, resultando finalmente, $(iala - 1) \cdot Nyincog$ filas, es decir, habría $(iala - 1) \cdot Nyincog$ ecuaciones.

Por otro lado, las ecuaciones de la condición de Kutta afectan a los valores del potencial de los vértices del borde de salida, $\phi'_{b,s}$, y también a los que se encuentran a un panel de distancia del borde de salida, $\phi'_{b,s-1}$. Por ello, si se considera la ecuación de la condición de Kutta del vértice j –ésimo del borde de salida, el término que multiplica a $\phi'_{b,s}$ se va a colocar en la columna $Nxec \cdot Nyincog + j$, mientras el término que multiplica a $\phi'_{b,s-1}$, se coloca en la columna $(Nxec - 1) \cdot Nyincog + j$. Además, estos términos son constantes para todos los instantes de tiempo considerados, por lo que no necesitan ser actualizados con el tiempo.

Por último, los términos independientes de las ecuaciones se han añadido al vector ω siguiendo el mismo orden que se ha utilizado para las filas de la matriz Mat , en el caso estacionario, el término independiente de las ecuaciones es cero y no varía con el tiempo. Mientras, en el caso no estacionario, el término independiente de las ecuaciones para un valor de y dado es:

$$\phi'^+_{b,s}(t - \Delta t) \cdot \left[1 - 0.5 \frac{\Delta t}{\Delta x_{bs}} \right] + \phi'^+_{b,s-1}(t - \Delta t) \cdot 0.5 \frac{\Delta t}{\Delta x_{bs}} \tag{4.67}$$

Por eso, es necesario actualizar para cada instante de tiempo considerado este término.

El método utilizado para actualizar las variables en el caso no estacionario para cada instante de tiempo t es el siguiente:

- En el instante inicial ($t = 0$), los valores $\phi'^+_{b,s}((0) - \Delta t) = 0$ y $\phi'^+_{b,s-1}((0) - \Delta t) = 0$. Por lo que tras resolver el problema se conocen los valores de $\phi'^+_{b,s}(0)$ y de $\phi'^+_{b,s-1}(0)$.
- Así pues en un instante Δt posterior se actualizan las variables $\phi'^+_{b,s}((t = \Delta t) - \Delta t) = \phi'^+_{b,s}(0)$, y $\phi'^+_{b,s-1}((t = \Delta t) - \Delta t) = \phi'^+_{b,s-1}(0)$ que ya son conocidos. Tras resolver el problema, quedan determinadas las variables $\phi'^+_{b,s}(t = \Delta t)$ y $\phi'^+_{b,s-1}(t = \Delta t)$.
- Por tanto, de forma general, en un instante t , los valores de $\phi'^+_{b,s}(t - \Delta t)$ y $\phi'^+_{b,s-1}(t - \Delta t)$ serían conocidos, y así, se actualiza el término independiente de la ecuación de Kutta.

Finalmente, la estructura que tiene el sistema de ecuaciones tras introducir la condición de Kutta, tanto en el caso estacionario como en el caso no estacionario es la siguiente:

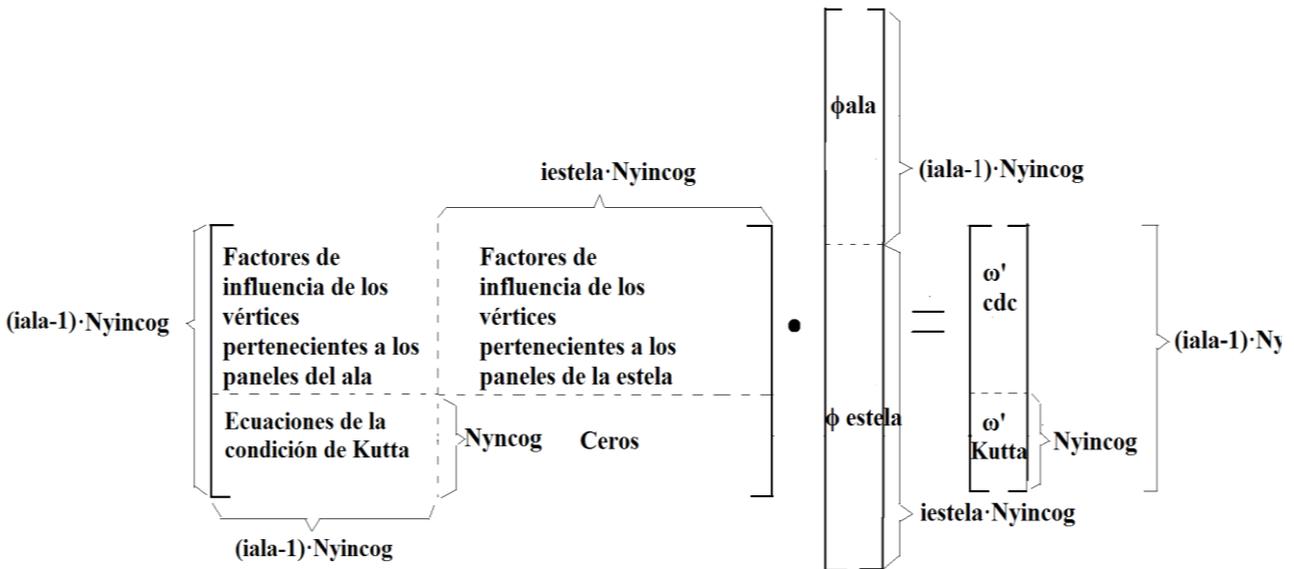


Figura 4.26. Estructura del sistema de ecuaciones tras introducir las ecuaciones de la condición de Kutta.

Como se puede comprobar, aunque se ha aumentado el número de ecuaciones del problema, el sistema sigue

siendo compatible indeterminado, por lo que no es posible obtener todavía una solución.

4.5 Desarrollo de la estela.

Hasta ahora, se tiene un sistema compatible indeterminado del cual no es posible extraer aún una solución. Esto se debe a que hay efectos que no se han tenido en cuenta en el desarrollo matemático del problema.

En esta sección, se va a estudiar la forma en la que se desarrolla la estela y los efectos que ésta produce. De manera que al tener en cuenta esos resultados, el sistema va a pasar a ser compatible determinado, y el problema quedaría totalmente cerrado.

Tal y como se comentó en la sección 3.2.2 en toda la región del espacio donde no hay ala, se verifica la expresión (3.18):

$$\frac{D\phi'^+}{Dt} = 0 \quad (4.68)$$

Es decir, si se tiene una partícula P que recorre la estela, tal y como se representa en la figura:

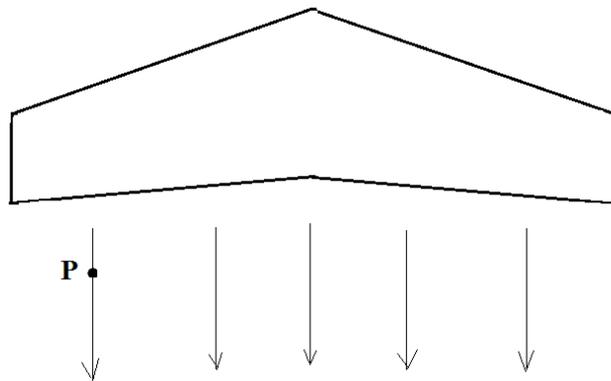


Figura 4.27. Partícula P perteneciente a la estela.

Según la expresión (4.68), el valor de ϕ'^+ permanece constante a lo largo de todo el recorrido de P en la estela.

Por otro lado, la partícula P viaja con una velocidad U_∞ , por lo que en un instante Δt habrá recorrido una distancia $U_\infty \cdot \Delta t$. Por tanto, se va a suponer que en un determinado instante t , la partícula se encuentra en un punto de la estela en el que hay un potencial de velocidades ϕ'_p , tal y como se representa en la figura:

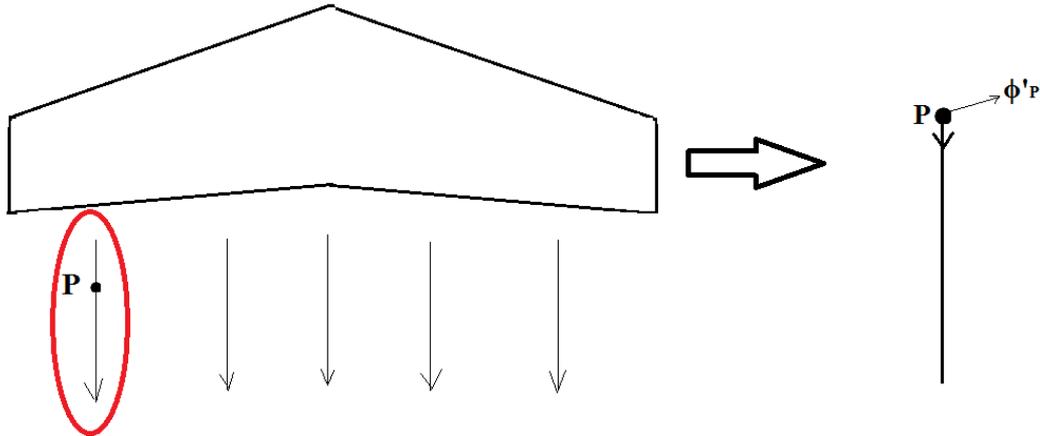


Figura 4.28. Posición de la partícula P en el instante t considerado, y potencial de velocidades existente en el punto donde se encuentra la partícula.

Cuando pase un instante Δt , la partícula P habrá recorrido una distancia $U_\infty \cdot \Delta t$, y, el valor de ϕ'^+ es constante a lo largo del recorrido de la partícula (según la expresión (4.68)), por lo que, en el nuevo punto donde se encuentra la partícula, de nuevo el valor del potencial de velocidades será ϕ'_P , es decir, se puede decir que el potencial de velocidades se traslada aguas abajo con la partícula considerada:

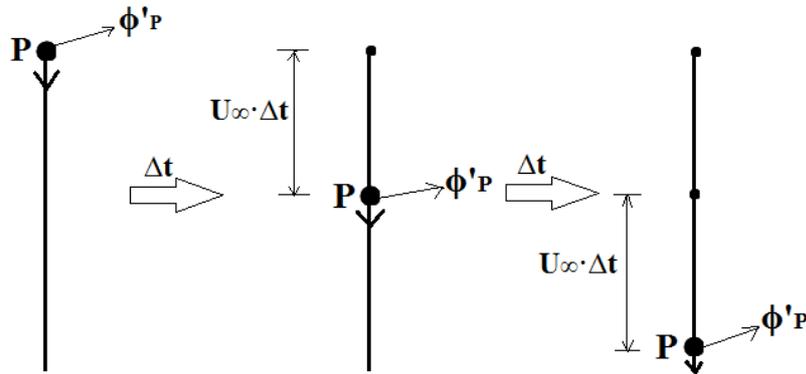


Figura 4.29. Avance de la partícula P con el tiempo y evolución del potencial de velocidades.

Se ha explicado entonces, que el potencial de velocidades se traslada por la estela de forma conjunta con las partículas de fluido que recorren a ésta. Pero ahora cabe preguntarse ¿Cuál es el valor de ϕ'_P ?

Para responder a esa pregunta, basta con seguir el recorrido de la partícula P. Así, justo antes de recorrer la estela, esta partícula P se encuentra en el borde de salida del ala. Por tanto, justo en el instante en el que la partícula comienza a recorrer la estela, el valor del potencial de velocidades en el punto en el que se encuentra la partícula es $\phi'_{b,s}$ para un valor de y dado. Por ello, cuando la partícula comienza a recorrer la estela, el valor de ϕ'_P es precisamente $\phi'_{b,s}$, pero mientras la partícula recorre la estela, el valor del potencial de velocidades se traslada con ella, por lo tanto, el valor de ϕ'_P va a ser $\phi'_{b,s}$ a lo largo de todo el recorrido de la partícula por la estela. Esta idea se representa en la siguiente figura:

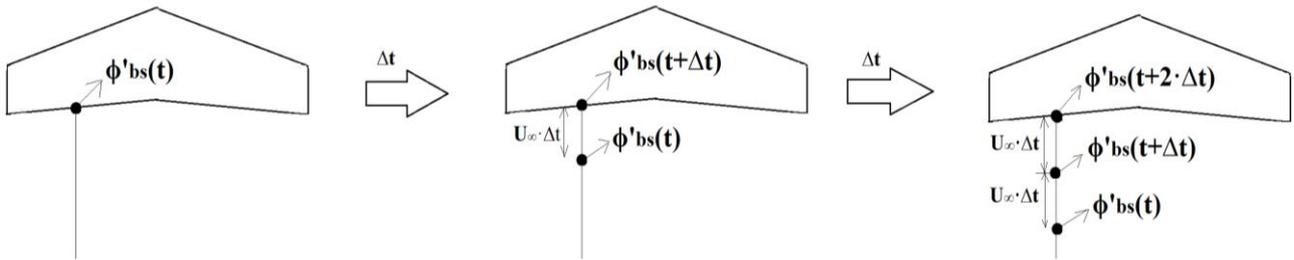


Figura 4.30. Evolución del potencial de velocidades en la estela.

En cada instante, aparece un nuevo valor de $\phi'_{b,s}$ que se traslada a lo largo de la estela, de forma que en el instante $t + k \cdot \Delta t$, el potencial de velocidades $\phi'_{b,s}(t)$, se encuentra a una distancia $U_\infty \cdot k \Delta t$ del borde de salida, mientras que en ese instante, aparece un nuevo valor $\phi'_{b,s}(t + k \cdot \Delta t)$, que se irá trasladando por la estela.

Por tanto, siguiendo el razonamiento anterior, los valores que toma el potencial de velocidades en la estela, serán los valores que éste ha tomado instantes antes en el borde de salida, por lo que si en instantes anteriores se conocen los valores del potencial de velocidades en el borde de salida, los valores que éste toma en la estela también serán conocidos, y, por tanto, no serán incógnitas adicionales al problema.

Para tratar estos resultados numéricamente, el panelado de la estela se ha hecho de forma que los paneles estén equiespaciados una distancia $\Delta t \cdot U_\infty = \Delta t$ (en términos adimensionales, el valor de U_∞ se considera unitario), como se representa en la figura:

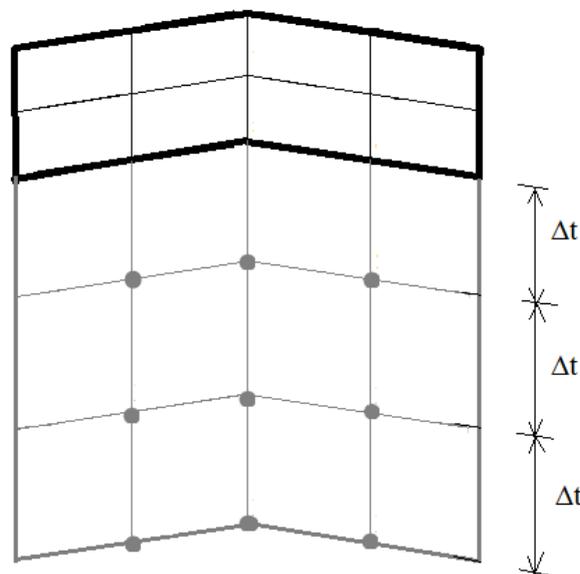


Figura 4.31. Panelado realizado en la estela.

Por tanto, cada vez que transcurre un instante Δt , el valor del potencial en la estela se va a trasladar de un vértice de los paneles a otro, tal y como se ha explicado con anterioridad.

De esta manera, los valores del potencial de velocidades que aparecen en los vértices de la estela, ya son conocidos en todos los instantes de tiempo, excepto en el instante inicial, donde van a ser nulos, por tanto, se reduce así el número de incógnitas del problema.

La forma de transformar el sistema considerado a un sistema compatible determinado se va a explicar a

continuación.

Actualmente, el sistema de ecuaciones posee la estructura que se representa en la siguiente figura:

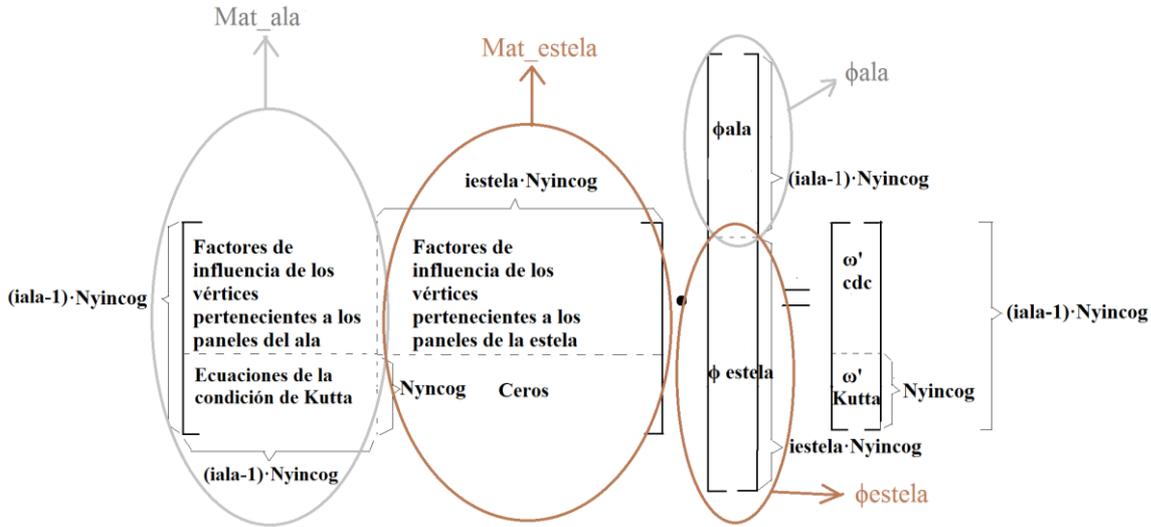


Figura 4.32. Estructura del sistema de ecuaciones.

Es decir, se puede considerar que, a grandes rasgos, posee la siguiente estructura:

$$[Mat_ala \quad Mat_estela] \cdot \begin{bmatrix} \phi_ala \\ \phi_estela \end{bmatrix} = \omega \quad (4.69)$$

Las dimensiones de las submatrices son las siguientes:

$$Dim(Mat_ala) = [(iala - 1) \cdot Nyincog, (iala - 1) \cdot Nyincog]$$

$$Dim(Mat_estela) = [(iala - 1) \cdot Nyincog, iestela \cdot Nyincog]$$

$$Dim(\phi_ala) = [(iala - 1) \cdot Nyincog, 1] \quad (4.70)$$

$$Dim(\phi_estela) = [iestela \cdot Nyincog, 1]$$

$$Dim(\omega) = [(iala - 1) \cdot Nyincog, 1]$$

Por tanto, el sistema anterior puede reescribirse:

$$Mat_ala \cdot \phi_ala + Mat_estela \cdot \phi_estela = \omega \quad (4.71)$$

Pero los valores de ϕ_estela son conocidos, ya que son los valores del potencial de velocidades en el borde de salida en instantes de tiempo anteriores. Por tanto, el sistema se reescribe:

$$Mat_ala \cdot \phi_ala = \omega - Mat_estela \cdot \phi_estela \quad (4.72)$$

Entonces, la estructura del sistema ahora es la siguiente:

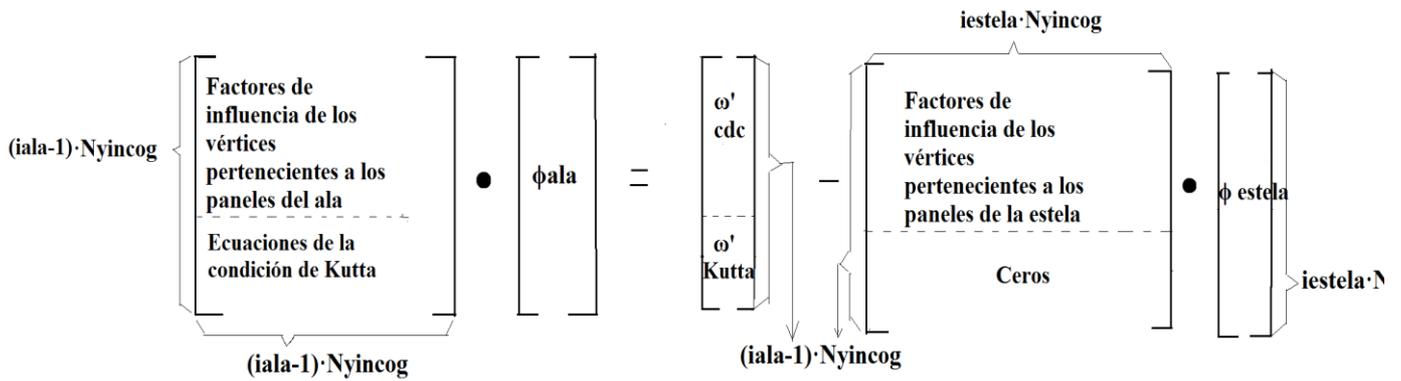


Figura 4.33. Estructura definitiva del sistema de ecuaciones.

Por ello, el sistema pasaría a ser compatible determinado con $(iala - 1) \cdot Nyincog$ ecuaciones e incógnitas, y es posible obtener una solución. Por lo que de esa manera, quedarían determinados los valores de potencial de velocidades en todos los vértices que conforman el ala, y el problema quedaría cerrado.

Todo lo explicado hasta ahora, es válido tanto para el caso estacionario como para el no estacionario, sin embargo, en el caso estacionario, el problema se simplifica, ya que el valor de $\phi'_{b,s}$ es constante respecto al tiempo, y, por tanto, el valor que se traslada a la estela también lo será, por lo que se tendrá una situación como la que se representa en la siguiente figura:

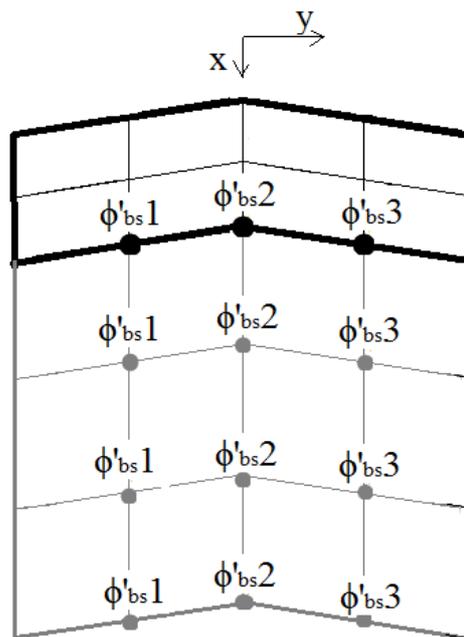


Figura 4.34. Potencial de velocidades en la estela en el caso estacionario.

Es decir, para un valor de y determinado el valor de ϕ' en la estela va a ser constante e igual al valor de ϕ' del vértice perteneciente al borde de salida para ese y determinado.

Se va a explicar ahora, el procedimiento utilizado para transformar la matriz de resolución del problema en este caso estacionario.

La matriz Mat , contiene los factores de influencia que ejercen los potenciales de velocidades que se

encuentran en todos los vértices que forman el ala y la estela sobre los puntos de colocación situados en el ala.

Así pues, se verifica:

$$\sum_{\forall(i,j)} \phi_{(i,j)} \cdot \text{Factor de influencia}(i,j) = \omega(x,y) \forall(x,y) \in \text{ala} \quad (4.73)$$

Pero, en ese caso, el valor de ϕ en la estela para un j determinado es el mismo que hay en el borde de salida del ala para ese valor de j . Así pues, se va a considerar los factores de influencia que ejercen los potenciales de velocidades que se encuentran en la posición j –ésima según la dirección j y pertenecen al borde de salida y a la estela, como se representa en la siguiente figura:

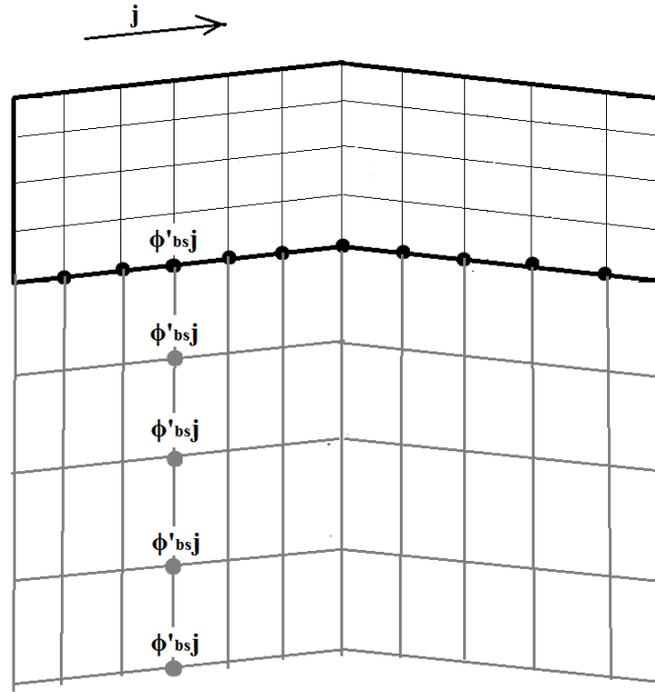


Figura 4.35. Potencial de velocidades en la estela, en la posición j –ésima.

La influencia que esos potenciales representados ejercen sobre un determinado punto de colocación será:

$$\begin{aligned} & \sum_{i=i_{ala}}^{i_{ala} + i_{estela}} \phi_{(i,j)} \cdot \text{Factor de influencia}(i,j) = \\ & = \phi_{b.s}(j) \cdot \sum_{i=i_{ala}}^{i_{ala} + i_{estela}} \text{Factor de influencia}(i,j) = \\ & = \phi_{b.s}(j) \cdot \text{Factor de influencia } b.s(j) \end{aligned} \quad (4.74)$$

Donde se ha llamado:

$$\text{Factor de influencia } b.s(j) = \sum_{i=i_{ala}}^{i_{ala} + i_{estela}} \text{Factor de influencia}(i,j) \quad (4.75)$$

Es decir, se considera que el factor de influencia que ejerce un potencial de velocidades situado en el vértice

$j - \text{ésimo}$ del borde de salida es la suma del factor de influencia asociado a ese vértice del borde de salida, más la suma de los factores de influencia asociados a los vértices de la estela para ese valor de j dado.

De esa forma, se logran eliminar incógnitas del sistema y reducir las dimensiones de la matriz Mat . Además, se ha cambiado su estructura, y es necesario recalcular los factores de influencia asociados a los vértices pertenecientes al borde de salida, lo cual se realiza numéricamente como se muestra a continuación.

En primer lugar, cabe recordar que los factores de influencia asociados a los vértices del borde de salida, se encuentran en las columnas $(iala - 2) \cdot Nyincog + j$ donde j toma los valores desde 1 hasta $Nyincog$. Así pues, la matriz se ha modificado de la siguiente forma:

Desde que i vale 1 hasta que vale $Nxec \cdot Nyincog$:

Desde que j vale 1 hasta que vale $Nyincog$:

Desde que k vale 1 hasta que vale $iestela$:

$$Mat(i, (iala - 2) \cdot Nyincog + j) = Mat(i, (iala - 2) \cdot Nyincog + j) + Mat(i, (iala - 2 + k) \cdot Nyincog + j) \quad (4.76)$$

Es decir, lo que se ha hecho es sumar al factor de influencia asociado al vértice $j - \text{ésimo}$ del borde de salida, los factores de influencia de la estela que se encuentran en esa misma posición j , tal y como se ha explicado con anterioridad.

Por tanto, con ese proceso, se reducen las dimensiones de la matriz de resolución del problema, ya que no es necesario tener en cuenta a los factores de influencia de los vértices asociados a la estela, puesto que éstos ya se han añadido a los factores de influencia de los vértices del borde de salida. De la misma forma, los valores de ϕ en los vértices de la estela tampoco serían incógnitas del problema, ya que conociendo los valores del potencial en el borde de salida, aquellos pertenecientes a la estela serían conocidos.

Con todas estas ideas, la estructura del sistema es la siguiente:

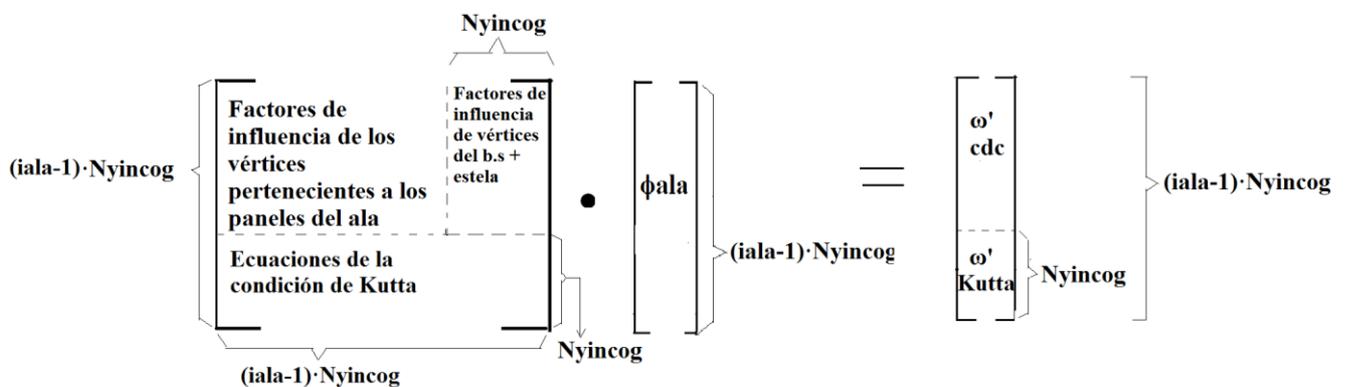


Figura 4.36. Estructura definitiva del sistema de ecuaciones en el caso estacionario.

Es decir, se tiene un sistema de $(iala - 1) \cdot Nyincog$ ecuaciones e incógnitas, por lo que el sistema es compatible determinado. Resolviendo el sistema, se obtienen los valores del potencial de velocidades asociados a los vértices del ala y, por tanto, el problema quedaría cerrado.

4.6 Cálculo del coeficiente de sustentación.

El objetivo de todo este desarrollo, es estudiar la aerodinámica de un ala considerando régimen no estacionario. Para ello, es primordial calcular las fuerzas que aparecen en ésta, tal y como se explicó en la sección 3.1, donde se demostró que la fuerza que aparece sobre el ala sigue la expresión (3.6):

$$\overline{F}(t) = 2\rho_\infty \int_{\Sigma_{ala}} \left(\frac{\partial \phi'^+}{\partial t} + U_\infty \cdot \frac{\partial \phi'^+}{\partial x} \right) dS \cdot \vec{n} \quad (4.77)$$

Y, la sustentación, por tanto, se calcula:

$$L(t) = \vec{F} \cdot \cos(\alpha) = 2\rho_\infty \left[\int_{\Sigma_{ala}} \left(\frac{\partial \phi'^+}{\partial t} + U_\infty \cdot \frac{\partial \phi'^+}{\partial x} \right) dS \right] \cdot \cos(\alpha) \quad (4.78)$$

Para poder calcular esa sustentación, es necesario conocer el valor del potencial de velocidades en todos los puntos que forman el ala. Y eso, precisamente, es lo que se ha resuelto en las secciones anteriores. Por tanto, ya se estaría en disposición de calcular la sustentación del ala en la situación considerada.

Así pues, el objetivo de esta sección es explicar el procedimiento que se ha seguido para calcular el coeficiente de sustentación del ala, a partir de los resultados obtenidos anteriormente.

En primer lugar, el coeficiente de sustentación se define de la siguiente forma:

$$C_L = \frac{L}{\frac{1}{2} \rho_\infty U_\infty^2 S} \quad (4.79)$$

Se va a considerar un ala en flecha con las siguientes dimensiones:

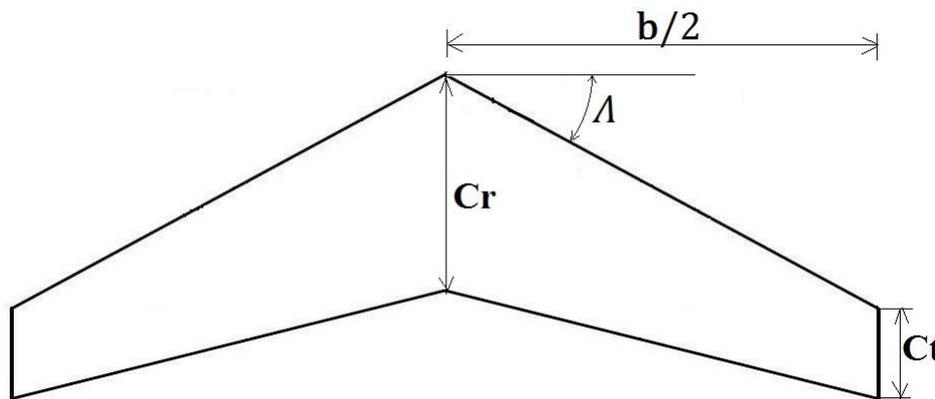


Figura 4.37. Definición de la geometría del ala.

Así pues, la superficie del ala es:

$$S = \frac{(C_r + C_t)}{2} \cdot b \quad (4.80)$$

Si se define el estrechamiento del ala de la forma:

$$E = \frac{C_t}{C_r} \quad (4.81)$$

Entonces, la superficie se expresa:

$$S = C_r \cdot \frac{(1 + E)}{2} \cdot b \quad (4.82)$$

Por otro lado, se considera en términos adimensionales que tanto C_r como U_∞ toman valores unitarios. Por

tanto, el coeficiente de sustentación se calcula:

$$C_L(t) = \frac{L}{\frac{1}{2}\rho_\infty U_\infty^2 S} = \frac{8}{(1+E)b} \cdot \left[\int_{\Sigma_{ala}} \left(\frac{\partial \phi'^+}{\partial t} + \frac{\partial \phi'^+}{\partial x} \right) dS \right] \cdot \cos(\alpha) \quad (4.83)$$

Entonces, para calcular el coeficiente de sustentación, es necesario resolver la integral:

$$\int_{\Sigma_{ala}} \left(\frac{\partial \phi'^+}{\partial t} + \frac{\partial \phi'^+}{\partial x} \right) dS = \int_{-b/2}^{b/2} \left[\int_{b.a}^{b.s} \left(\frac{\partial \phi'^+}{\partial t} + \frac{\partial \phi'^+}{\partial x} \right) dx \right] dy \quad (4.84)$$

Para ello, se va a realizar en primer lugar, la integral respecto a x :

$$\int_{b.a}^{b.s} \left(\frac{\partial \phi'^+}{\partial t} + \frac{\partial \phi'^+}{\partial x} \right) dx = \int_{b.a}^{b.s} \frac{\partial \phi'^+}{\partial t} dx + \int_{b.a}^{b.s} \frac{\partial \phi'^+}{\partial x} dx \quad (4.85)$$

Así pues, si se considera la segunda de las integrales de la expresión (4.85):

$$\int_{b.a}^{b.s} \frac{\partial \phi'^+}{\partial x} dx = \phi'^+ \Big|_{b.a}^{b.s} = \phi'^+(b.s, y) - \phi'^+(b.a, y) \quad (4.86)$$

Por condición de contorno se verifica que ϕ'^+ es cero en el borde de ataque, por lo que la expresión (4.86) resulta:

$$\int_{b.a}^{b.s} \frac{\partial \phi'^+}{\partial x} dx = \phi'^+(b.s, y) \quad (4.87)$$

Donde $\phi'^+(b.s, y)$ es el valor que toma el potencial de velocidades en un punto perteneciente al borde de salida para un valor de y dado.

Por tanto, ya se tiene resuelta una de las integrales que es necesario calcular.

Ahora, se va a considerar la primera de las integrales de la expresión (4.85):

$$\int_{b.a}^{b.s} \frac{\partial \phi'^+}{\partial t} dx \quad (4.88)$$

Para calcular esa integral numéricamente, lo primero que se va a hacer es una aproximación de la derivada que aparece:

$$\frac{\partial \phi'^+}{\partial t} \approx \frac{\phi'^+(t) - \phi'^+(t - \Delta t)}{\Delta t} \quad (4.89)$$

Donde $\phi'^+(t)$ es el valor que toma el potencial de velocidades en un punto del ala considerado en un instante t y $\phi'^+(t - \Delta t)$ es el valor que tenía el potencial de velocidades en ese mismo punto del ala un instante Δt anterior al instante t .

Así pues, la integral (4.88) se reescribe:

$$\begin{aligned} \int_{b.a}^{b.s} \frac{\partial \phi'^+}{\partial t} dx &= \frac{1}{\Delta t} \cdot \int_{b.a}^{b.s} [\phi'^+(t) - \phi'^+(t - \Delta t)] dx = \\ &= \frac{1}{\Delta t} \cdot \left[\int_{b.a}^{b.s} \phi'^+(t) dx - \int_{b.a}^{b.s} \phi'^+(t - \Delta t) dx \right] = Integral(y) \end{aligned} \quad (4.90)$$

Por tanto, si se conoce el valor del potencial de velocidades para todos los vértices de los paneles que forman el ala y en todos los instantes de tiempo considerados, la integral anterior puede calcularse por la regla de los trapecios.

Al resultado de esa integral para cada valor de y se le ha llamado $Integral(y)$.

Por otro lado, según la expresión (4.84) ahora es necesario calcular la integral respecto a y :

$$C_L(t) = \frac{8}{(1+E)b} \cdot \int_{-b/2}^{b/2} \left[\int_{b.a}^{b.s} \left(\frac{\partial \phi'^+}{\partial t} + \frac{\partial \phi'^+}{\partial x} \right) dx \right] dy \cdot \cos(\alpha) =$$

$$= \int_{-b/2}^{b/2} [Integral(y) + \phi'^+(b.s, y)] dy \cdot \cos(\alpha) \quad (4.91)$$

De nuevo, si se conocen los valores de $Integral(y)$, $\phi'^+(b.s, y)$ en todos los vértices de los paneles que forman el ala para cada valor de y considerado, es posible calcular esa integral con la regla de los trapecios.

Así, con ese procedimiento, se calcula el coeficiente de sustentación en un instante t determinado. Por lo que si se quiere calcular el valor de C_L a lo largo de un periodo de tiempo, es necesario calcular con ese procedimiento el coeficiente de sustentación para cada instante de tiempo considerado.

4.7 Algoritmo de resolución del problema.

Con todos los desarrollos anteriores, el problema queda totalmente cerrado. Así pues, en esta sección se van a resumir los pasos a seguir para la resolución numérica del problema, para aclarar todos los conceptos y tener una visión general del método.

Los pasos a seguir serían los siguientes:

1. Definición de la geometría del ala. Se define la flecha, el estrechamiento y la envergadura del ala.
2. Se define la ley $\alpha(t)$ (movimiento que va a seguir el ala). Se impone la condición de impenetrabilidad.
3. Panelado del ala y estela y distribución de los puntos de colocación. Se dividen tanto el ala como la estela en paneles y se sitúan los puntos de colocación.
4. Cálculo de factores de influencia. Se calculan los factores de influencia asociados a los potenciales de velocidades de los vértices que componen los paneles del ala y de la estela respecto a un punto de colocación considerado y se sitúan en la componente adecuada de la matriz Mat .
5. Se crea el incremento de tiempo Δt y el instante final de tiempo hasta el que va a durar la simulación t_{final} . Para cada instante de tiempo se realizan los siguientes pasos:
 - 5.1. Se crea/actualiza el término independiente de las ecuaciones de Kutta y se introducen en el sistema de ecuaciones.
 - 5.2. Se actualizan los valores del potencial de velocidades en los vértices de los paneles de la estela, y se reorganiza el sistema de ecuaciones.
 - 5.3. Se resuelve el sistema de ecuaciones $Mat \cdot \phi = \omega$.
 - 5.4. Se calcula el valor del coeficiente de sustentación.

Esa es la estructura general del método numérico que se ha utilizado para resolver el problema.

5 COMPROBACIÓN DE RESULTADOS.

A lo largo de todas las secciones anteriores, se ha explicado el modelo matemático utilizado para resolver el problema planteado, y, además, se ha desarrollado la forma de implementar dicho modelo en un método numérico que permita resolver el problema de forma rápida y robusta.

Ahora, el objetivo es ir más allá, se quiere implementar el método numérico que se ha ido explicando anteriormente para comprobar si el modelo matemático que se ha hecho es correcto.

Para conseguir tal propósito, se van a resolver diferentes problemas cuyas soluciones ya son conocidas, tanto estacionarios, como no estacionarios. Se van a utilizar esos problemas ya resueltos para comparar los resultados que proporciona el método explicado con las soluciones reales del problema, y así poder visualizar la eficiencia del método.

Para la implementación del método numérico, se va a utilizar el programa de cálculo numérico MATLAB.

5.1 Caso estacionario.

El primer problema que se va a tratar para comprobar la eficiencia del método desarrollado, va a ser un problema estacionario.

Para ello, se van a considerar alas con diferentes geometrías, en concreto, se va a estudiar cómo varía la pendiente de la curva del coeficiente de sustentación $C_{L\alpha}$ en función del alargamiento del ala para diferentes valores de flecha.

Así pues, los resultados obtenidos tras realizar la simulación son los siguientes:

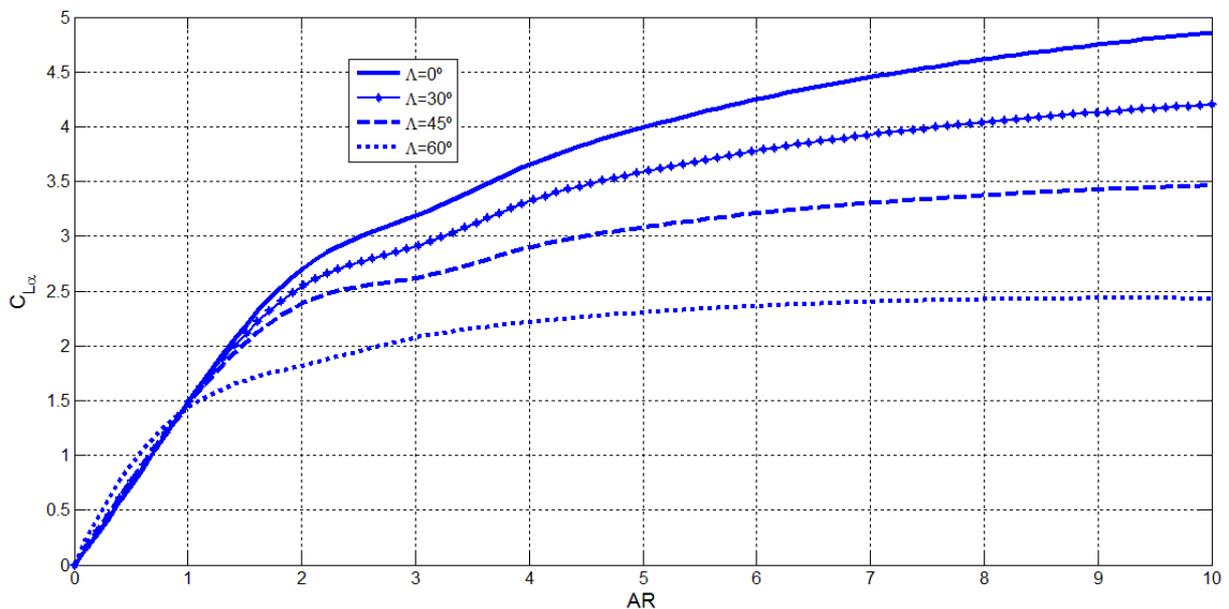


Figura 5.1. Pendiente de la curva de sustentación $C_{L\alpha}$ en función del alargamiento AR para diferentes valores de flecha Λ .

Este mismo problema, está resuelto en Low-Speed Aerodynamics (Joseph Katz-Allen Plotkin), donde los resultados que aparecen son los siguientes:

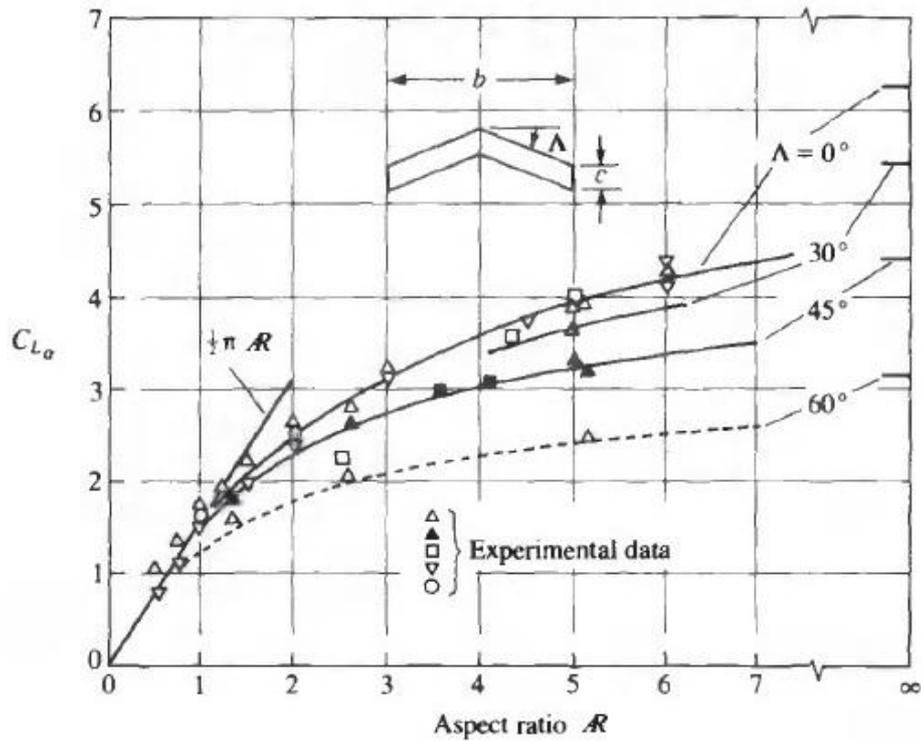


Figura 5.2. Imagen extraída de Low-Speed Aerodynamics (Joseph Katz-Allen Plotkin), donde representa la pendiente de la curva de sustentación $C_{L\alpha}$ en función del alargamiento AR para diferentes valores de flecha Λ .

Para verificar que los resultados obtenidos son adecuados, se van a superponer ambas imágenes, obteniendo la siguiente figura:

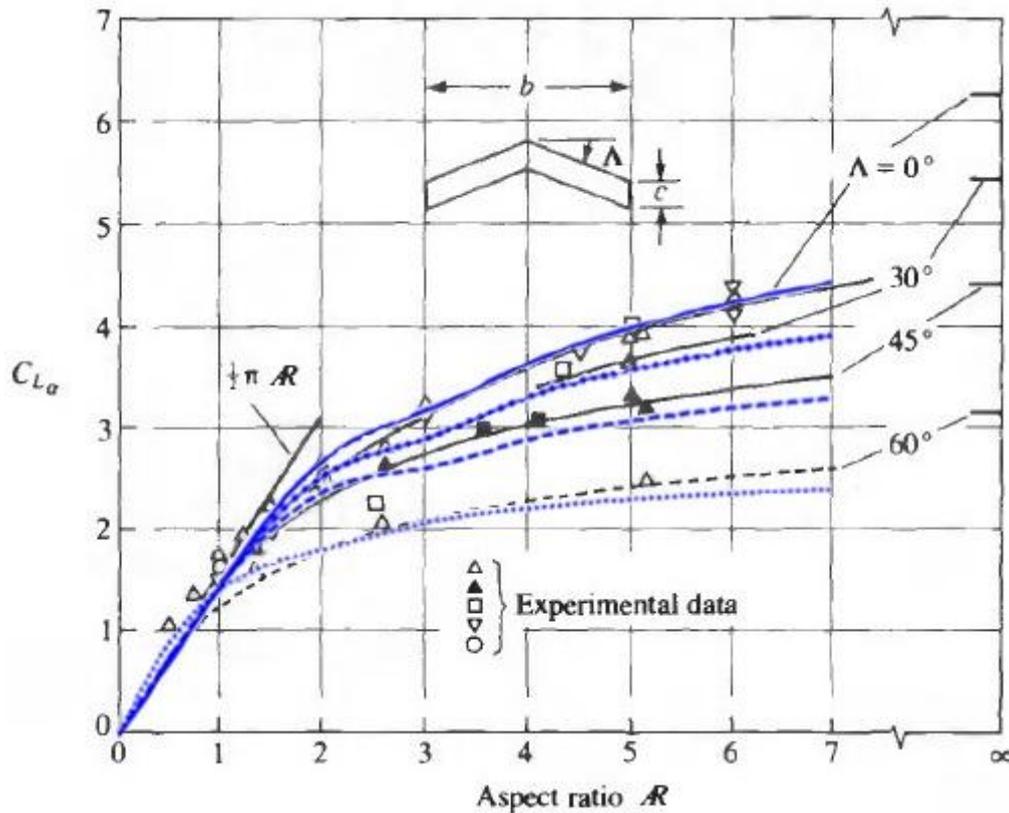


Figura 5.3. Superposición de las figuras 5.1 y 5.2.

Se puede comprobar que los resultados obtenidos son bastante buenos, además, se observan algunos comportamientos característicos.

En primer lugar, se verifica que para alargamientos pequeños los resultados son prácticamente idénticos, mientras que a medida que el alargamiento aumenta, los resultados comienzan a divergir relativamente.

En segundo lugar, también se observa que para ala rectangular los resultados son prácticamente idénticos, mientras, a medida que la flecha aumenta, las diferencias comienzan a ser mayores.

Por tanto, tras la primera de las comparaciones considerando un problema estacionario, se puede decir que los resultados son bastante buenos, y, al parecer, el método funciona correctamente para el caso estacionario.

5.2 Aceleración repentina de placa plana.

Una vez se ha comprobado que para el caso estacionario el método funciona correctamente, se van a chequear los resultados considerando ahora un problema no estacionario.

El problema a considerar es una placa plana que acelera de forma instantánea desde una velocidad cero hasta una velocidad U_∞ con un ángulo de ataque de 5° .

Se pretende estudiar la evolución del coeficiente de sustentación respecto del tiempo para placas planas con diferentes valores de alargamiento.

Tras realizar la simulación, los resultados obtenidos son los siguientes:

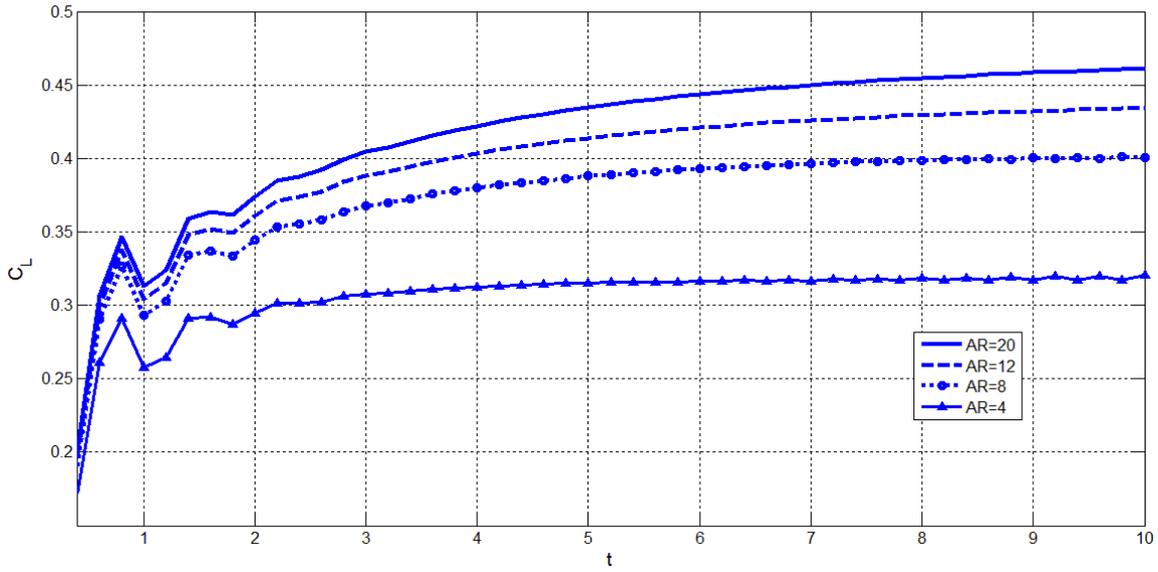


Figura 5.4. Representación del coeficiente de sustentación C_L en función del tiempo t , para alas rectangulares con diferentes valores de alargamiento AR .

De la misma forma que ocurría con el caso considerado anteriormente, este problema también aparece resuelto en Low-Speed Aerodynamics (Joseph Katz-Allen Plotkin), proporcionando los siguientes resultados:

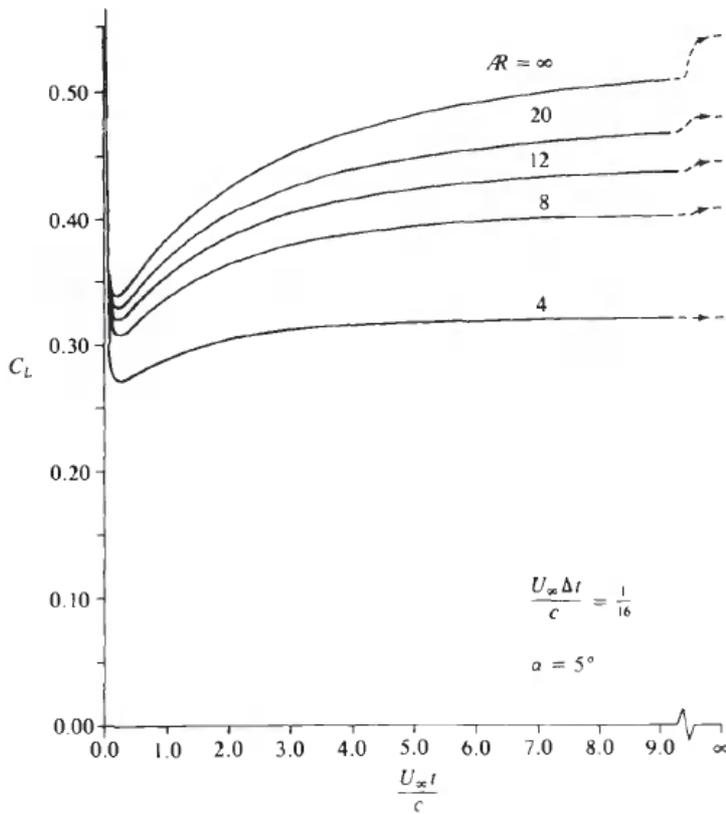


Figura 5.5. Imagen extraída de Low-Speed Aerodynamics (Joseph Katz-Allen Plotkin), donde representa el coeficiente de sustentación C_L en función del tiempo t , para alas rectangulares con diferentes valores de alargamiento AR .

Por tanto, para visualizar los posibles errores y variaciones que puedan aparecer, se van a comparar y superponer ambas gráficas:

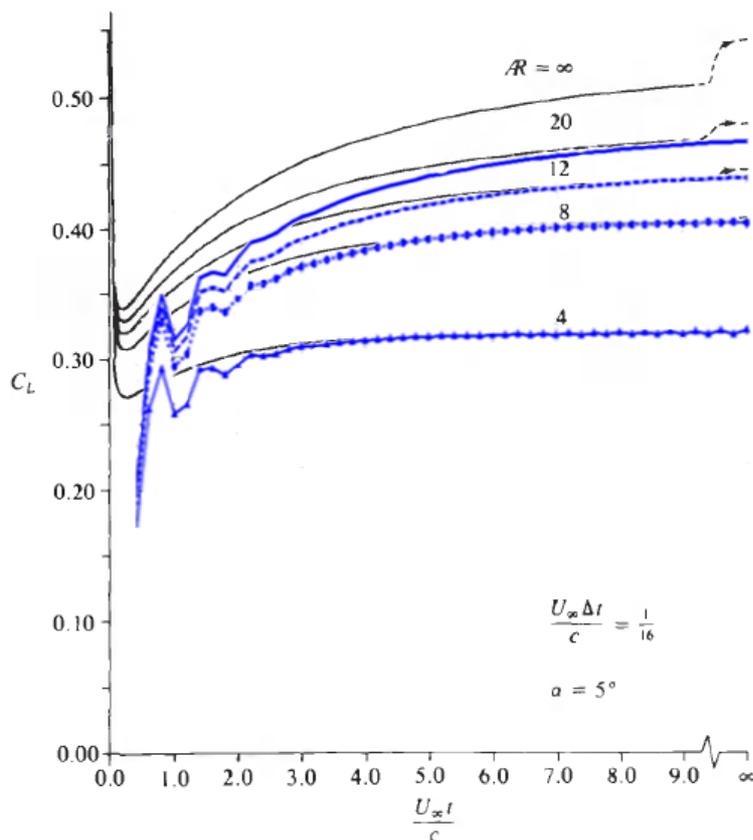


Figura 5.6. Superposición de las figuras 5.4 y 5.5.

De nuevo la imagen permite observar algunos comportamientos.

El primero de ellos es que los resultados no son buenos en los primeros instantes, pero que convergen de forma idéntica a medida que avanza el tiempo, estabilizándose por completo al final de la simulación.

Por otro lado, también se puede comprobar que a medida que el alargamiento de la placa va aumentando los resultados tardan más tiempo en converger, pero finalmente se obtienen resultados muy precisos, incluso mejores que para el caso estacionario.

Así pues, se ha comprobado que el método funciona correctamente tanto para el caso estacionario como para el caso no estacionario, obteniendo en ambos casos resultados muy precisos.

5.3 Placa plana oscilante.

El último de los problemas que se van a resolver es una placa plana oscilante respecto del tiempo.

Se va a considerar una placa plana que forma un ángulo α_0 respecto a la corriente incidente con velocidad U_∞ , además, esta placa sigue un movimiento vertical definido por la función $h(t)$, tal y como se representa en la siguiente figura:

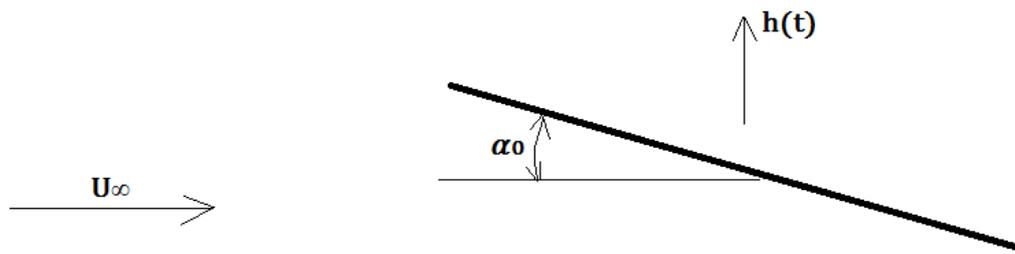


Figura 5.7. Placa plana con movimiento vertical $h(t)$ sobre la que incide una velocidad U_∞ .

Esa función $h(t)$ va a ser la siguiente:

$$h(t) = 0.1 \cdot c \cdot \sin(\omega \cdot t) \quad (5.1)$$

Donde ω se va a expresar de la siguiente forma:

$$\omega = \frac{U_\infty}{c} \cdot 2k \quad (5.2)$$

Siendo k una constante arbitraria que modifica el valor de ω y c la cuerda de la placa plana.

Sin embargo, para expresar el movimiento que sigue la placa en el método que se ha desarrollado, es necesario obtener la expresión del ángulo de ataque de la placa respecto del tiempo $\alpha(t)$.

Para ello, en lugar de considerar que la placa sigue un movimiento vertical definido por la función $h(t)$, se va a considerar que el fluido que incide sobre la placa posee una componente vertical de la velocidad $\dot{h}(t)$, tal y como se representa en la siguiente figura:

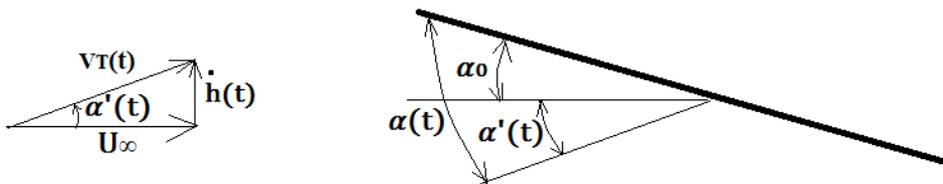


Figura 5.8. Ángulo de ataque real de la placa plana.

Así pues, el objetivo es determinar $\alpha(t)$, por lo que a partir de la figura anterior, puede escribirse la siguiente expresión:

$$\alpha(t) = \alpha_0 + \alpha'(t) \quad (5.3)$$

Por otro lado, el ángulo $\alpha'(t)$ puede calcularse:

$$\alpha'(t) = \text{atan} \left(\frac{\dot{h}(t)}{U_\infty} \right) \quad (5.4)$$

Por tanto, puesto que los valores de U_∞ y de c se consideran unitarios en términos adimensionales, finalmente

el ángulo de ataque de la placa se expresa:

$$\alpha(t) = \alpha_0 + \alpha'(t) = \alpha_0 + \text{atan}(0.1 \cdot 2k \cdot \cos(2k \cdot t)) \quad (5.5)$$

Con esas ideas, se ha resuelto el problema para una placa plana donde $\alpha_0 = -5^\circ$ y donde los valores de k considerados son 0.1, 0.3 y 0.5. Los resultados obtenidos se representan en la siguiente figura:

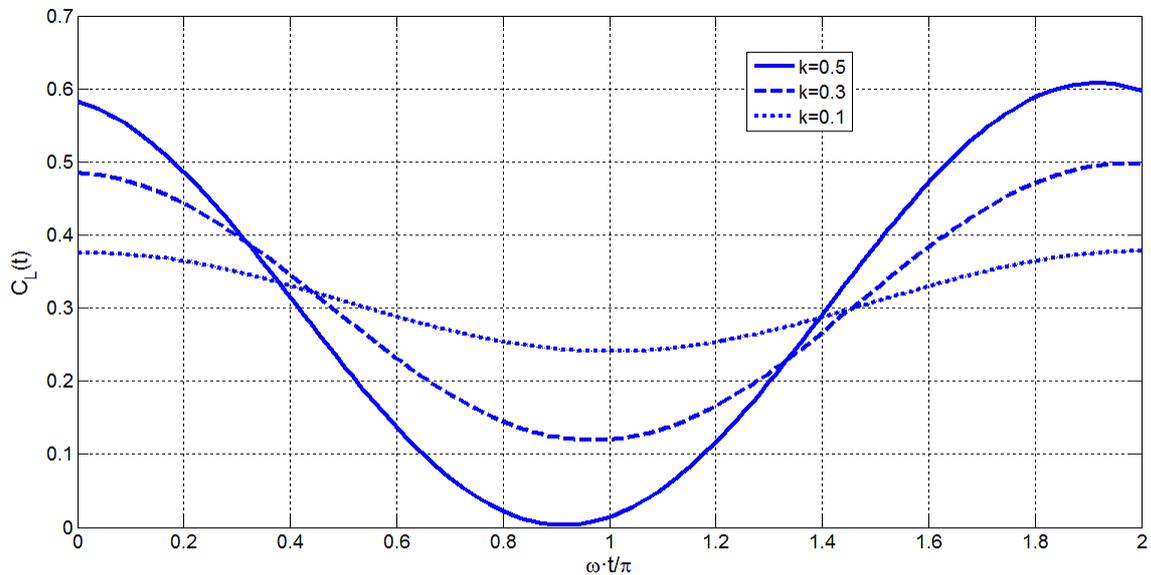


Figura 5.9. Representación del coeficiente de sustentación C_L en función del tiempo t para diferentes valores de k .

Sin embargo, este mismo problema aparece resuelto en Low-Speed Aerodynamics (Joseph Katz-Allen Plotkin), donde los resultados proporcionados son los siguientes:

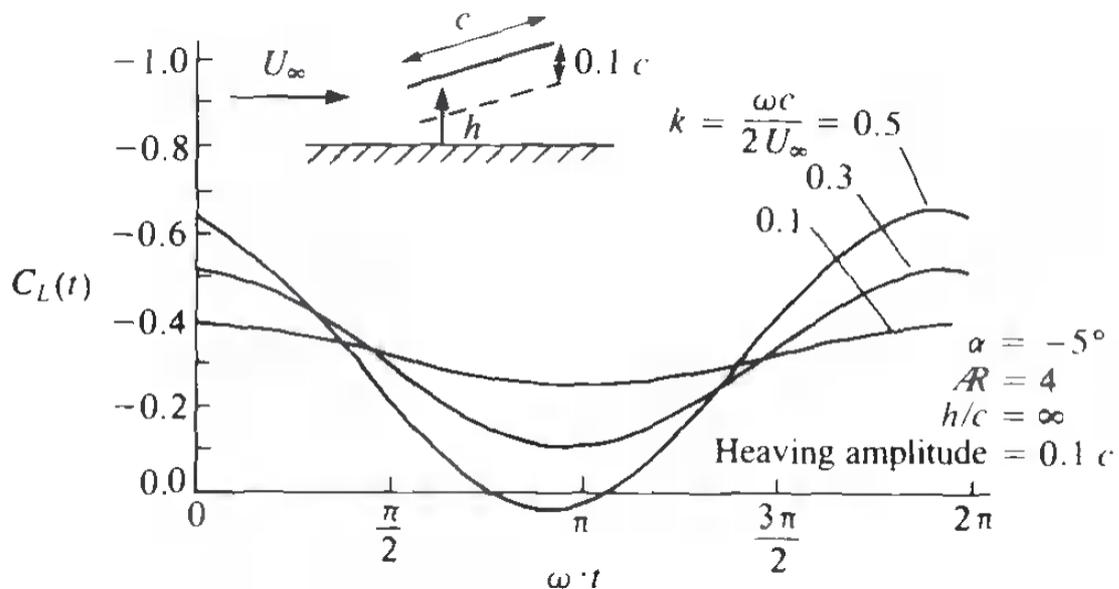


Figura 5.10. Imagen extraída de Low-Speed Aerodynamics (Joseph Katz-Allen Plotkin), donde representa el coeficiente de sustentación C_L en función del tiempo t para diferentes valores de k .

Para comprobar la eficacia y la veracidad de los resultados que ha proporcionado el método considerado, se van a superponer ambas gráficas, tal y como se muestra en la siguiente figura:

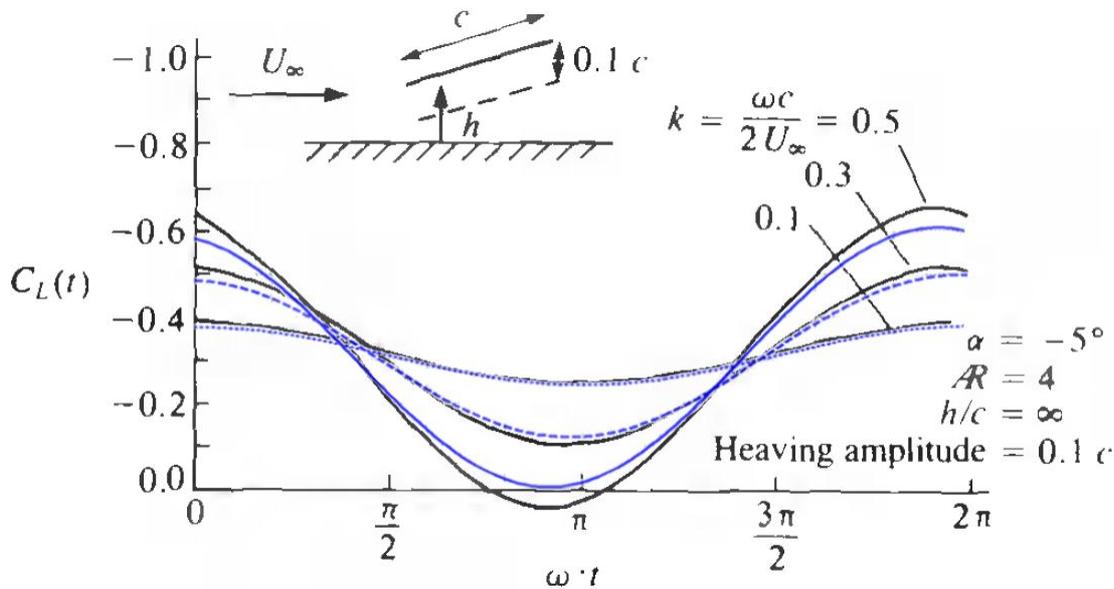


Figura 5.11. Superposición de las figuras 5.9 y 5.10.

A la luz de los resultados obtenidos, pueden destacarse algunas características principales:

En primer lugar, puede comprobarse que a medida que aumenta la frecuencia de variación del movimiento, existen mayores diferencias entre ambos resultados, de forma que cuando $k = 0.1$, los resultados son prácticamente idénticos, mientras que a medida que aumenta el valor de k , las diferencias son mayores.

En segundo lugar, puede destacarse que la zona donde aparecen las máximas divergencias son aquellas donde se alcanzan los valores máximos y mínimos del coeficiente de sustentación, a medida que los resultados se alejan de esas regiones, convergen de manera significativa.

Por tanto, como conclusión, puede afirmarse que el método funciona correctamente y, por tanto, los desarrollos matemáticos que se han realizado son correctos, además, se obtienen resultados precisos y adecuados, aunque existen zonas donde los resultados divergen relativamente.

6 PROPUESTAS DE MEJORA Y TRABAJOS FUTUROS.

Puesto que ya se ha explicado el método matemático de resolución del problema y, además, se ha comprobado que funciona correctamente. Ahora se van a comentar las principales deficiencias que presenta el método empleado, y por dónde seguir avanzando en el supuesto caso en que se quisiera mejorar dicho desarrollo.

En primer lugar, el principal problema que presenta el método numérico descrito, es la extrema dependencia de la geometría del ala. De manera que éste puede funcionar correctamente para unos valores determinados de flecha y estrechamiento, y al cambiar esos valores, no proporciona resultados adecuados.

La causa de este problema es estrictamente numérica, ya que el desarrollo matemático es correcto como se ha comprobado anteriormente.

Haciendo diferentes simulaciones, se ha verificado que esa dependencia de la geometría del ala está muy relacionada con la posición que ocupan los puntos de colocación.

Lo que ocurre es que si se eligen unos puntos de colocación determinados para una geometría en concreto el programa puede funcionar correctamente. Pero si se cambia la geometría y se mantienen fijos la posición relativa de los puntos de colocación, los resultados no serán adecuados casi con toda probabilidad.

Por ello, uno de los temas a abordar para mejorar la eficiencia del método sería lograr identificar la causa raíz de esta idea y solucionarla, de manera que con unos puntos de colocación generales, el método proporcione resultados adecuados y precisos.

Por eso, algunas de las ideas que se pueden utilizar para mejorar el método numérico podrían ser:

- Situar los puntos de colocación en los bordes de los paneles, para mejorar la condición de la matriz de resolución del problema y así conseguir buenos resultados para todas las geometrías consideradas.
- Utilizar una forma más precisa para aproximar las derivadas que aparecen, puesto que la manera que se ha utilizado es:

$$f'(x) \approx \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \quad x \in [x_1, x_2] \quad (6.1)$$

- Modificar la hipótesis de que la variable \vec{v} permanece constante en todos los triángulos en los que se divide el ala. Esta hipótesis provoca que la variable \vec{v} esté formada por valores constantes discretos a lo largo de toda la superficie del ala. Si en lugar de considerarse constante, se considera lineal, los resultados mejorarían de forma notable.

Por otro lado, aparte de conseguir mejorar la eficiencia numérica del método, otra posibilidad de trabajo sería considerar las deformaciones que aparecen sobre el ala.

En este desarrollo, como se ha explicado, no se han considerado las deformaciones elásticas que sufre el ala debido a los esfuerzos que aparecen, sino que se ha considerado el ala como un sólido rígido.

Por eso, sería interesante añadir las ecuaciones de la membrana al método para considerar tales deformaciones y obtener también, resultados más precisos.

7 PROGRAMAS MATLAB UTILIZADOS.

En esta sección, se encuentran los programas numéricos que se han implementado en MATLAB para resolver los problemas que se explican en la sección 5.

7.1 Programa 1. Caso estacionario.

Este programa se corresponde con el problema que se explica en la sección 5.1 y su implementación en MATLAB es la siguiente:

```

%%%%%%%%                               %%%%%%%%%
%%% INICIO DEL PROGRAMA %%%
%%%%%%%%                               %%%%%%%%%

for aux = 1:10
%%%%%%%%                               %%%%%%%%%
%%% GEOMETRÍA Y PANELADO DEL ALA Y ESTELA %%%
%%%%%%%%                               %%%%%%%%%
%%Se define la envergadura del ala (b):
b = aux;
b_cont(aux) = b;
%%Se expresa que se está considerando caso no estacionario:
UNSTEADY = 0;
%%Se definen el número de paneles que forman el ala en dirección "x" e "y":
iala = 31;
Nyincog = 21;
%%Se define la flecha del ala:
flecha = 60;
%%Se definen los paneles de la estela, dependiendo de si se considera
casoestacionario o no estacionario:
if UNSTEADY==0
iestela = 50;
finT = 0;
Dt = 200*b/iestela;
else
    finT = 80;
    Dt = 0.05;
    iestela = fix(10/Dt);
end
%%Se inicializa el tiempo con valor cero:

```

```

contT = 0;
%%Se define la posición central del ala según la dirección de la
%%envergadura:
N05 = (Nyincog+2)/2+1;
%%Se define el ángulo de ataque:
alpha0 = 5*pi/180;
%%Se definen parámetros para realizar el panelado del ala de forma
%%discontinua:
dthetax = pi/(iala-1);
dthetay = pi/(Nyincog+1);
%%Se definen el número de incógnitas que hay sobre el ala:
Nxec = iala-2;
Nyec = Nyincog;
%%Se realiza el panelado del ala:
for i=1:iala
    for j=1:(Nyincog+2)
        my(i,j) = -0.5*b*cos((j-1)*dthetay);
        mx(i,j) = 0.5*(1-cos((i-1)*dthetax)+ 1)*dthetax)+ 1)*dthetax))+
1)*dthetax))+abs(my(i,j))*tan(flecha*pi/180);
    end
end
%%Se realiza el panelado de la estela:
for i=1:iestela
    for j=1:(Nyincog+2)
        mx(iala+i,j) = mx(iala,j)+i*dt;
        my(iala+i,j) = -0.5*b*cos((j-1)*dthetay);
    end
end
%%Se calcula la longitud según la dirección "x" del panel del borde de salida.
Dxbs = mx(iala,1)-mx(iala-1,1);
%%Se sitúan los puntos de colocación sobre el ala y la estela:
for i = 1:Nxec
    for j = 2:(Nyec+1)
        if j==fix(Nyincog/2+2)
            mx0(i,j-1) = 0.75*mx(i+1,j) + 0.25*mx(i+2,j);
            my0(i,j-1) = my(i,fix(Nyincog/2)+2);
        else
            if j<fix(Nyincog/2+2)
                my0(i,j-1) = 0.75*my(i,j) + 0.25*my(i,j+1);
                mx0(i,j-1) = 0.75*(0.75*mx(i+1,j)+0.25*mx(i+1,j+1)) +
0.25*(0.75*mx(i+2,j)+0.25*mx(i+2,j+1));
            else

```

```

        mx0(i,j-1) = 0.75*(0.75*mx(i+1,j)+0.25*mx(i+1,j-1)) +
0.25*(0.75*mx(i+2,j)+0.25*mx(i+2,j-1));
        my0(i,j-1) = 0.75*my(i,j) + 0.25*my(i,j-1);
    end
end
end
end

%%%%%%%%
%%%%%%%%
%%%%%%%%
%%%%%%%%

%%%%%%%%                                %%%%%%%%%
%%%% MONTAJE DEL SISTEMA DE ECUACIONES %%%
%%%%%%%%                                %%%%%%%%%

%%Se inicializan con valores nulos todas las variables que afectan al
%%problema:
Mat(1:(iala-1)*Nyincog,1:(iala+iestela)*Nyincog) = 0;
sol(1:(iala-1)*Nyincog) = 0;
Phiestela(1:iestela,1:Nyincog) = 0;
phibs(1:(Nyincog+2)) = 0;
phibstm1(1:(Nyincog+2)) = 0;
phibsm1(1:(Nyincog+2)) = 0;
phibsm1tm1(1:(Nyincog+2)) = 0;
intphiunsteadym1(1:(Nyincog+2)) = 0;
intphiunsteady(1:(Nyincog+2)) = 0;
intphitotal(1:(Nyincog+2)) = 0;
intphitotalm1(1:(Nyincog+2)) = 0;
ubssalidatm1(1:(Nyincog+2)) = 0;
%% Se comienza a montar la matriz Mat:
for k=1:(Nxec)
    for l=1:Nyec
        for j=1:(Nyincog+1)
i1=1:(iala+iestela-1);
j1=j;
i0=k;
j0=1;

```

```

%%Se definen las coordenadas del punto de colocación que se va a tratar:
vx0=mx0(i0,j0);
vy0=my0(i0,j0);

%%Se calculan las distancias desde el punto de colocación que se está tratando a los
%%vértices del panel que se está considerando:
L1=sqrt((mx(i1,j1)-vx0).^2+(my(i1,j1)-vy0).^2);
L2=sqrt((mx(i1,j1+1)-vx0).^2+(my(i1,j1+1)-vy0).^2);
L3=sqrt((mx(i1+1,j1)-vx0).^2+(my(i1+1,j1)-vy0).^2);
L4=sqrt((mx(i1+1,j1+1)-vx0).^2+(my(i1+1,j1+1)-vy0).^2);

%%Se calculan las componentes los vectores v:
vx(:,1)=mx(i1,j1+1)-mx(i1,j1);
vy(:,1)=my(i1,j1+1)-my(i1,j1);
vx(:,2)=mx(i1+1,j1+1)-mx(i1,j1+1);
vy(:,2)=my(i1+1,j1+1)-my(i1,j1+1);
vx(:,3)=mx(i1+1,j1)-mx(i1+1,j1+1);
vy(:,3)=my(i1+1,j1)-my(i1+1,j1+1);
vx(:,4)=mx(i1,j1)-mx(i1+1,j1);
vy(:,4)=my(i1,j1)-my(i1+1,j1);
if j1<N05
    vx(:,5)=mx(i1+1,j1)-mx(i1,j1+1);
    vy(:,5)=my(i1+1,j1)-my(i1,j1+1);
    vx(:,6)=-vx(:,5);
    vy(:,6)=-vy(:,5);
else
    vx(:,5)=mx(i1+1,j1+1)-mx(i1,j1);
    vy(:,5)=my(i1+1,j1+1)-my(i1,j1);
    vx(:,6)=-vx(:,5);
    vy(:,6)=-vy(:,5);
end

%%Se calculan las componentes de los vectores l1, l2 y l3:
l2(:,1:6)=sqrt(vx(:,1:6).^2+vy(:,1:6).^2);
for contador=1:length(i1)
    l3(contador,1)=max(L2(contador),L1(contador));
    l1(contador,1)=min(L2(contador),L1(contador));
    l3(contador,2)=max(L4(contador),L2(contador));
    l1(contador,2)=min(L4(contador),L2(contador));
    l3(contador,3)=max(L4(contador),L3(contador));
    l1(contador,3)=min(L4(contador),L3(contador));
    l3(contador,4)=max(L3(contador),L1(contador));
    l1(contador,4)=min(L3(contador),L1(contador));
end

```

```

if j1<N05
    for contador=1:length(i1)
        l3(contador,5)=max(L2(contador),L3(contador));
        l1(contador,5)=min(L2(contador),L3(contador));
    end
else
    for contador=1:length(i1)
        l3(contador,5)=max(L4(contador),L1(contador));
        l1(contador,5)=min(L4(contador),L1(contador));
    end
end

l3(:,6)=l3(:,5);
l1(:,6)=l1(:,5);

%%Se calcula el coseno de theta0 y el seno de theta2 respectivamente:
for i=1:5
    Rbas(:,i)=(l2(:,i).^2+l1(:,i).^2-l3(:,i).^2)/(2*l1(:,i).*l2(:,i));
    Sbas(:,i)=(l2(:,i)-l1(:,i).*Rbas(:,i))./l3(:,i);
%%Se calcula el valor de la integral:
    for j=1:length(i1)
        if (abs(Sbas(j,i))>(1-1e-14)) || (abs(Rbas(j,i))>(1-1e-14))
            faclog(j,i)=0;
        else
            faclog(j,i)=0.5*(log((1+Sbas(j,i))/(1-Sbas(j,i)))+log((1+Rbas(j,i))/(1-
Rbas(j,i))));
        end
    end
end

faclog(:,6)=faclog(:,5);

%%Se calculan los valores de v·n, necesarios para resolver el problema:
nx(:,1:6)=-vy(:,1:6).*faclog(:,1:6)./l2(:,1:6);
ny(:,1:6)=vx(:,1:6).*faclog(:,1:6)./l2(:,1:6);
phit(:,1:4)=zeros(length(i1),4);

%%Se realizan las modificaciones para cambiar las variables del problema
%%(pasar de las velocidades de perturbación al potencial de velocidades):
if j1<N05
    ut1(:,1)=-1./l2(:,4);
    ut1(:,2)=0;
    ut1(:,3)=-ut1(:,1);
    ut1(:,4)=0;
    vt1(:,1)=(1./vy(:,1)).*(vx(:,1)./l2(:,4)-1);
    vt1(:,2)=1./vy(:,1);

```

```

vt1(:,3)=-vx(:,1)/(vy(:,1).*l2(:,4));
vt1(:,4)=0;
ut2(:,1)=zeros(length(i1),1);
ut2(:,2)=-1./l2(:,2);
ut2(:,3)=0;
ut2(:,4)=-ut2(:,2);
vt2(:,1)=zeros(length(i1),1);
vt2(:,2)=vx(:,3)/(vy(:,3).*l2(:,2));
vt2(:,3)=1./vy(:,3);
vt2(:,4)=-(1./vy(:,3)).*(1+vx(:,3)./l2(:,2));

%%Se calcula la influencia que ejerce el potencial de velocidades que se
encuentra en un
%%vérticice del panel considerado sobre el punto de colocación:
for i=1:4
    phit(:,i)=(ut1(:,i).*nx(:,1)+vt1(:,i).*ny(:,1))+(ut1(:,i).*nx(:,5)+vt1(:,i).*ny(
(:,5)))+(ut1(:,i).*nx(:,4)+vt1(:,i).*ny(:,4))+(ut2(:,i).*nx(:,2)+vt2(:,i).*ny(:,2)
)+(ut2(:,i).*nx(:,3)+vt2(:,i).*ny(:,3))+(ut2(:,i).*nx(:,6)+vt2(:,i).*ny(:,6));
end
else
    ut1(:,1)=-1./l2(:,4);
    ut1(:,2)=0;
    ut1(:,3)=-ut1(:,1);
    ut1(:,4)=0.;
    vt1(:,1)=(vx(:,3)./vy(:,3))./l2(:,4);
    vt1(:,2)=0;
    vt1(:,3)=(1./vy(:,3)).*(1-vx(:,3)./l2(:,4));
    vt1(:,4)=-(1./vy(:,3));
    ut2(:,1)=zeros(length(i1),1);
    ut2(:,2)=-1./l2(:,2);
    ut2(:,3)=0;
    ut2(:,4)=-ut2(:,2);
    vt2(:,1)=-1./vy(:,1);
    vt2(:,2)=(1./vy(:,1)).*(1+vx(:,1)./l2(:,2));
    vt2(:,3)=0;
    vt2(:,4)=-(1./vy(:,1)).*(vx(:,1)./l2(:,2));
    for i=1:4
        phit(:,i)=(ut1(:,i).*nx(:,5)+vt1(:,i).*ny(:,5))+(ut1(:,i).*nx(:,3)+vt1(:,i).*ny(
(:,3)))+(ut1(:,i).*nx(:,4)+vt1(:,i).*ny(:,4))+(ut2(:,i).*nx(:,1)+vt2(:,i).*ny(:,1)
)+(ut2(:,i).*nx(:,2)+vt2(:,i).*ny(:,2))+(ut2(:,i).*nx(:,6)+vt2(:,i).*ny(:,6));
    end
end

%%Se define la fila de la matriz Mat donde se van a insertar los valores de phit
considerados:
nfila=(i0-1)*Nyec+j0;

```



```

end
%%Se realiza el desarrollo de la estela en el caso estacionario:
if UNSTEADY==0
    for j=2:(Nyincog+1)
        for k=1:iestela
            Mat(1:(Nxec*Nyec), (iala-2)*Nyincog+j-1)=Mat(1:(Nxec*Nyec), (iala-
2)*Nyincog+j-1)+Mat(1:(Nxec*Nyec), (iala+k-2)*Nyincog+j-1);
        end
    end
end
end
%%Se define el número total de incógnitas que afectan al problema:
Ntot = (iala-1)*Nyincog;
%%Comienza a contar el tiempo:
while contT<=finT
    %%Se va avanzando en el tiempo:
    contT = contT+1;
    vecT(contT) = Dt*contT;
    %%Se inicializa el vector w con valores nulos:
    for i=1:(Ntot)
        w(i) = 0;
    end
    %%Se define el ángulo de ataque del problema:
    if UNSTEADY==0
        alpha = alpha0;
    else
        alpha = alpha0;
        for j=1:Nyincog
            %%Se calculan los términos independientes de la condición de Kutta en el caso no
estacionario:
            w(Nyec*Nxec+j) = phibstm1(j)*(1-0.5*Dt/Dxbs)+0.5*Dt*phibsm1tm1(j)/Dxbs;
        end
    end
end
end
%%Se introduce la condición de impenetrabilidad:
w(1:Nxec*Nyec) = -alpha;
if UNSTEADY==1
    for i=1:Nxec*Nyec
        for k=1:iestela
            for j=1:Nyincog
                %%Se realiza la reorganización del sistema debido a que los valores del
potencial en la estela son conocidos en el caso no estacionario:
                w(i) = w(i)-Mat(i, (iala+k-2)*Nyincog+j)*Phiestela(k,j);
            end
        end
    end
end

```

```

    end
end
end
%%Se resuelve el sistema de ecuaciones:
sol = Mat\w';
%%Se actualizan los valores requeridos:
for j=1:Nyincog
    phibstm1(j)=phibs(j);
    phibsm1tm1(j)=phibsm1(j);
    phibs(j)=sol((iala-2)*Nyincog+j);
    phibsm1(j)=sol((iala-3)*Nyincog+j);
    intphitotalm1(j)=intphitotal(j);
    intphiunsteadym1(j)=intphiunsteady(j);
    ubsalidatm1(j)=(Phiestela(1,j)-phibs(j))/Dt;
end
%%Se actualizan los valores de la estela:
Puntero=Phiestela(iestela);
for i=iestela:-1:2
    Phiestela(i)=Phiestela(i-1);
end
Phiestela(1)=Puntero;

for j=1:Nyincog
    Phiesetela(1,j) = phibs(j);
end
%%%%
%%%%
%%%%
%%%%

%%%%                                %%%
%% CÁLCULO DEL COEFICIENTE DE SUSTENTACIÓN %%%
%%%%                                %%%
for j=1:Nyincog

    if UNSTEADY==1
        intphiunsteady(j)=0;
        for i=1:(iala-1)
            nfila0=(i-2)*Nyincog+j;

```

```

        nfilal=(i-1)*Nyincog+j;
%%Se resuelven las integrales que permiten calcular el coeficiente de
sustentación:
        if i==1
            intphiunsteady(j)=intphiunsteady(j)+0.5*sol(nfilal)*(mx(i+1,j+1)-mx(i,j+1));
        else
intphiunsteady(j)=intphiunsteady(j)+0.5*(sol(nfila0)+sol(nfilal))*(mx(i+1,j+1)-
mx(i,j+1));
        end
    end
        intphitotal(j)=2*((intphiunsteady(j)-intphiunsteadym1(j))/Dt+phibs(j));
    else
        intphitotal(j) = 2*phibs(j);
    end
end
CL=0;
phibs(Nyincog+1) = 0;
intphitotal(Nyincog+1) = 0;
%%Se calcula el coeficiente de sustentación en el instante "t":
for j=2:(Nyincog+1)
    alpha=alpha0;
    CL = CL+2*0.5*(intphitotal(j-1)+intphitotal(j))*(my(1,j+1)-my(1,j))/b;
end
CL = CL+2*(0.5*intphitotal(1))*(my(1,2)-my(1,1))/b;
CLT(contT) = CL;
%%Se calcula la pendiente de la curva de sustentación:
CL_alpha(aux) = CLT(contT)/alpha
end
end
b_cont = [0,b_cont];
CL_alpha = [0,CL_alpha];
b_inter = linspace(b_cont(1),b_cont(end),100);
CL_alpha_inter = spline(b_cont,CL_alpha,b_inter);

figure(1)
plot(b_inter,CL_alpha_inter)
hold on
%%%%%          %%%%%%%%%
%%% FIN DEL PROGRAMA %%%
%%%%%          %%%%%%%%%

```

7.2 Programa 2. Aceleración repentina de placa plana.

Este programa se corresponde con el problema que se explica en la sección 5.2 y su implementación en MATLAB es la siguiente:

```

%%%%%%%%%
%%%%%%%%%
%%% INICIO DEL PROGRAMA %%%
%%%%%%%%%
%%%%%%%%%

%%%%%%%%%
%%%%%%%%%
%%% GEOMETRÍA Y PANELADO DEL ALA Y ESTELA %%%
%%%%%%%%%
%%%%%%%%%
%%Se define que el problema es no estacionario:
UNSTEADY=1;
%%Se definen el número de paneles en los que se divide el ala:
iala=21;
Nyincog=21;
%%Se define el alargamiento del ala:
AR=12;
%%Se define la flecha del ala:
flecha=0;
%%Se define el estrechamiento del ala:
E=1;
%%Se calcula la envergadura del ala:
b=(1+E)/2*AR;
%%Se define un factor que va a influir en la situación de los puntos de
%colocacion:
factor=0.7;
%%Se definen los paneles de la estela, dependiendo de si se considera %caso
estacionario o no estacionario:
if UNSTEADY==0
    iestela=50;
    finT=0;
    Dt=20*b/iestela;
else
    finT=100;
    Dt=0.2;
    iestela=fix(2.5*b/Dt);
end
%%Se inicializa el tiempo con valor cero:
contT=0;
%%Se define la posición central del ala, según la dirección de la

```

```

%%envergadura:
N05=(Nyincog+2)/2+1;
%%Se define el ángulo de ataque:
alpha0=5*pi/180;
%%Se definen parámetros para realizar el panelado del ala de forma
%%discontinua:
dthetax=pi/(iala-1);
dthetay=pi/(Nyincog+1);
%%Se definen el número de incógnitas que hay sobre el ala:
Nxec=iala-2;
Nyec=Nyincog;

%%Se realiza el panelado del ala:
for i=1:iala
    my(i,1:(Nyincog+2))=-0.5*b*cos((0:(Nyincog+1))*dthetay);
    bataque(1:(Nyincog+2))=tan(flecha*pi/180)*abs(my(i,1:(Nyincog+2)));
    bsalida(1:(Nyincog+2))=bataque(1:(Nyincog+2))+1+(E-
1)*abs(my(i,1:(Nyincog+2))/my(i,Nyincog+2));
    cuerda(1:(Nyincog+2))=bsalida(1:(Nyincog+2))-bataque(1:(Nyincog+2));
    mx(i,1:(Nyincog+2))=(0.5*(1-cos((i-
1)*dthetax))*cuerda(1:(Nyincog+2))+bataque(1:(Nyincog+2)));
end
%%Se realiza el panelado de la estela:
for i=1:iestela
    mx(i+iala,1:(Nyincog+2))=mx(iala,1:(Nyincog+2))+i*Dt;
    my(i+iala,1:(Nyincog+2))=-0.5*b*cos((0:(Nyincog+1))*dthetay);
end
%%Se calcula la longitud según la dirección "x" del panel del borde de
%%salida.
Dxbs(1:length(mx(iala,:)))=mx(iala,:)-mx(iala-1,:);
%%Se sitúan los puntos de colocación sobre el ala y la estela:
for i=1:(Nxec)
    for j=2:(Nyec+1)
        if j==(fix(Nyincog/2)+2)
            mx0(i,j-1)=factor*mx(i+1,j)+(1-factor)*mx(i+2,j);
            my0(i,j-1)=my(i,2+fix(Nyincog/2));
        else
            if j<(fix(Nyincog/2)+2)
                mx0(i,j-1)=factor*mx(i+1,j)+(1-
factor)*mx(i+2,j);
                my0(i,j-1)=factor*my(i,j)+(1-factor)*my(i,j+1);
            else

```

```

mx0(i,j-1)=factor*mx(i+1,j)+(1-factor)*mx(i+2,j);
my0(i,j-1)=factor*my(i,j)+(1-factor)*my(i,j-1);

        end
    end

end

end

%%%%%%%%
%%%%%%%%
%%%%%%%%
%%%%%%%%

%%%%%%%%                                %%%%%%%%%
%% MONTAJE DEL SISTEMA DE ECUACIONES %%
%%%%%%%%                                %%%%%%%%%

%%Se inicializan con valores nulos todas las variables que afectan al
%%problema:
Mat(1:(iala-1)*Nyincog,1:(iala+iestela)*Nyincog)=0;
sol(1:(iala-1)*Nyincog,1)=0;
Phiestela(1:iestela,1:Nyincog)=0;
phibs(1:(Nyincog+2))=0;
phibstm1(1:(Nyincog+2))=0;
phibsm1(1:(Nyincog+2))=0;
phibsm1tm1(1:(Nyincog+2))=0;
intphiunsteadym1(1:(Nyincog+2))=0;
intphiunsteady(1:(Nyincog+2))=0;
intphitotal(1:(Nyincog+2))=0;
intphitotalm1(1:(Nyincog+2))=0;
ubsalidatm1(1:(Nyincog+2))=0;
vecT(1)=0;

%% Se comienza a montar la matriz Mat:
for k=1:(Nxec)
    for l=1:Nyec
        for j=1:(Nyincog+1)
i1=1:(iala+iestela-1);
j1=j;
i0=k;
j0=1;

```

```

%%Se definen las coordenadas del punto de colocación que se va a tratar:
    vx0=mx0(i0,j0);
    vy0=my0(i0,j0);

%%Se calculan las distancias desde el punto de colocación que se está %tratando
a los vértices del panel que se está considerando:
    L1=sqrt((mx(i1,j1)-vx0).^2+(my(i1,j1)-vy0).^2);
    L2=sqrt((mx(i1,j1+1)-vx0).^2+(my(i1,j1+1)-vy0).^2);
    L3=sqrt((mx(i1+1,j1)-vx0).^2+(my(i1+1,j1)-vy0).^2);
    L4=sqrt((mx(i1+1,j1+1)-vx0).^2+(my(i1+1,j1+1)-vy0).^2);

%%Se calculan las componentes los vectores v:
    vx(:,1)=mx(i1,j1+1)-mx(i1,j1);
    vy(:,1)=my(i1,j1+1)-my(i1,j1);
    vx(:,2)=mx(i1+1,j1+1)-mx(i1,j1+1);
    vy(:,2)=my(i1+1,j1+1)-my(i1,j1+1);
    vx(:,3)=mx(i1+1,j1)-mx(i1+1,j1+1);
    vy(:,3)=my(i1+1,j1)-my(i1+1,j1+1);
    vx(:,4)=mx(i1,j1)-mx(i1+1,j1);
    vy(:,4)=my(i1,j1)-my(i1+1,j1);
    if j1<N05
        vx(:,5)=mx(i1+1,j1)-mx(i1,j1+1);
        vy(:,5)=my(i1+1,j1)-my(i1,j1+1);
        vx(:,6)=-vx(:,5);
        vy(:,6)=-vy(:,5);
    else
        vx(:,5)=mx(i1+1,j1+1)-mx(i1,j1);
        vy(:,5)=my(i1+1,j1+1)-my(i1,j1);
        vx(:,6)=-vx(:,5);
        vy(:,6)=-vy(:,5);
    end

%%Se calculan las componentes de los vectores l1, l2 y l3:
    l2(:,1:6)=sqrt(vx(:,1:6).^2+vy(:,1:6).^2);
    for contador=1:length(i1)
        l3(contador,1)=max(L2(contador),L1(contador));
        l1(contador,1)=min(L2(contador),L1(contador));
        l3(contador,2)=max(L4(contador),L2(contador));
        l1(contador,2)=min(L4(contador),L2(contador));
        l3(contador,3)=max(L4(contador),L3(contador));
        l1(contador,3)=min(L4(contador),L3(contador));
        l3(contador,4)=max(L3(contador),L1(contador));
        l1(contador,4)=min(L3(contador),L1(contador));
    end
    if j1<N05

```

```

    for contador=1:length(i1)
    l3(contador,5)=max(L2(contador),L3(contador));
    l1(contador,5)=min(L2(contador),L3(contador));
    end
else
for contador=1:length(i1)
l3(contador,5)=max(L4(contador),L1(contador));
l1(contador,5)=min(L4(contador),L1(contador));
end
end
l3(:,6)=l3(:,5);
l1(:,6)=l1(:,5);
%%Se calcula el coseno de theta0 y el seno de theta2 respectivamente:
for i=1:5
Rbas(:,i)=(l2(:,i).^2+l1(:,i).^2-l3(:,i).^2)/(2*l1(:,i).*l2(:,i));
Sbas(:,i)=(l2(:,i)-l1(:,i).*Rbas(:,i))./l3(:,i);
%%Se calcula el valor de la integral:
for j=1:length(i1)
if (abs(Sbas(j,i))>(1-1e-14)) || (abs(Rbas(j,i))>(1-1e-14))
    faclog(j,i)=0;
else
    faclog(j,i)=0.5*(log((1+Sbas(j,i))/(1-Sbas(j,i)))+log((1+Rbas(j,i))/(1-
Rbas(j,i))));
end
end
end
faclog(:,6)=faclog(:,5);
%%Se calculan los valores de v·n, necesarios para resolver el problema:
nx(:,1:6)=-vy(:,1:6).*faclog(:,1:6)./l2(:,1:6);
ny(:,1:6)=vx(:,1:6).*faclog(:,1:6)./l2(:,1:6);
phit(:,1:4)=zeros(length(i1),4);
%%Se realizan las modificaciones para cambiar las variables del %%problema
%%(pasar de las velocidades de perturbación al potencial de %%velocidades):
if j1<N05
    ut1(:,1)=-1./l2(:,4);
    ut1(:,2)=0;
    ut1(:,3)=-ut1(:,1);
    ut1(:,4)=0;
    vt1(:,1)=(1./vy(:,1)).*(vx(:,1)./l2(:,4)-1);
    vt1(:,2)=1./vy(:,1);
    vt1(:,3)=-vx(:,1)./(vy(:,1).*l2(:,4));

```

```

vt1(:,4)=0;
ut2(:,1)=zeros(length(i1),1);
ut2(:,2)=-1./l2(:,2);
ut2(:,3)=0;
ut2(:,4)=-ut2(:,2);
vt2(:,1)=zeros(length(i1),1);
vt2(:,2)=vx(:,3)./(vy(:,3).*l2(:,2));
vt2(:,3)=1./vy(:,3);
vt2(:,4)=-(1./vy(:,3)).*(1+vx(:,3)./l2(:,2));

%%Se calcula la influencia que ejerce el potencial de velocidades que se
encuentra en un
%%vérticice del panel considerado sobre el punto de colocación:
for i=1:4

phit(:,i)=(ut1(:,i).*nx(:,1)+vt1(:,i).*ny(:,1))+(ut1(:,i).*nx(:,5)+vt1(:,i).*ny(
(:,5)))+(ut1(:,i).*nx(:,4)+vt1(:,i).*ny(:,4))+(ut2(:,i).*nx(:,2)+vt2(:,i).*ny(:,2)
)+(ut2(:,i).*nx(:,3)+vt2(:,i).*ny(:,3))+(ut2(:,i).*nx(:,6)+vt2(:,i).*ny(:,6));

end
else
ut1(:,1)=-1./l2(:,4);
ut1(:,2)=0;
ut1(:,3)=-ut1(:,1);
ut1(:,4)=0.;
vt1(:,1)=(vx(:,3)./vy(:,3))./l2(:,4);
vt1(:,2)=0;
vt1(:,3)=(1./vy(:,3)).*(1-vx(:,3)./l2(:,4));
vt1(:,4)=-(1./vy(:,3));
ut2(:,1)=zeros(length(i1),1);
ut2(:,2)=-1./l2(:,2);
ut2(:,3)=0;
ut2(:,4)=-ut2(:,2);
vt2(:,1)=-1./vy(:,1);
vt2(:,2)=(1./vy(:,1)).*(1+vx(:,1)./l2(:,2));
vt2(:,3)=0;
vt2(:,4)=-(1./vy(:,1)).*(vx(:,1)./l2(:,2));

for i=1:4
phit(:,i)=(ut1(:,i).*nx(:,5)+vt1(:,i).*ny(:,5))+(ut1(:,i).*nx(:,3)+vt1(:,i).*ny(
(:,3)))+(ut1(:,i).*nx(:,4)+vt1(:,i).*ny(:,4))+(ut2(:,i).*nx(:,1)+vt2(:,i).*ny(:,1)
)+(ut2(:,i).*nx(:,2)+vt2(:,i).*ny(:,2))+(ut2(:,i).*nx(:,6)+vt2(:,i).*ny(:,6));

end
end

%%Se define la fila de la matriz Mat donde se van a insertar los %%valores de
phit considerados:
nfila=(i0-1)*Nyec+j0;

```

```

%%Se definen las columnas de la matriz Mat, donde se van a insertar %%los
valores de phit considerados:
    ncol(:,1)=(i1-2).*Nyincog+j1-1;
    ncol(:,2)=ncol(:,1)+1;
    ncol(:,3)=(i1-1).*Nyincog+j1-1;
    ncol(:,4)=ncol(:,3)+1;
    if j1==1
        ncol(:,3)=-10*ones(length(i1),1);
        ncol(:,1)=ncol(:,3);
    end
    if j1==(Nyincog+1)
        ncol(:,4)=-10*ones(length(i1),1);
        ncol(:,2)=ncol(:,4);
    end
    for i=1:4
        for contador=1:length(i1)
            if ncol(contador,i)>0
                %%Se introducen esos valores en la matriz MaT:
                Mat(nfila,ncol(contador,i))=Mat(nfila,ncol(contador,i))-
1/(2*pi)*phit(contador,i);
            end
        end
    end
end

%%Se introducen las condiciones de Kutta en el caso no estacionario y
%%estacionario respectivamente:
if UNSTEADY==0
    for j=2:(Nyincog+1)
        Mat(Nyec*Nxec+j-1,(iala-2)*Nyincog+j-1)=Mat(Nyec*Nxec+j-1,(iala-2)*Nyincog+j-
1)+1;
        Mat(Nyec*Nxec+j-1,(iala-3)*Nyincog+j-1)=Mat(Nyec*Nxec+j-1,(iala-3)*Nyincog+j-
1)-1;
    end
else
    for j=2:(Nyincog+1)
        Mat(Nyec*Nxec+j-1,(iala-2)*Nyincog+j-1)=Mat(Nyec*Nxec+j-1,(iala-2)*Nyincog+j-
1)+1+0.5*Dt/Dxbs(j);
        Mat(Nyec*Nxec+j-1,(iala-3)*Nyincog+j-1)=Mat(Nyec*Nxec+j-1,(iala-3)*Nyincog+j-
1)-0.5*Dt/Dxbs(j);
    end
end

```

```

end
%%Se realiza el desarrollo de la estela en el caso estacionario:
if UNSTEADY==0
    for j=2:(Nyincog+1)
        for k=1:iestela
            Mat(1:(Nxec*Nyec),(iala-2)*Nyincog+j-1)=Mat(1:(Nxec*Nyec),(iala-
2)*Nyincog+j-1)+Mat(1:(Nxec*Nyec),(iala+k-2)*Nyincog+j-1);
        end
    end
end
end
%%Se define el número total de incógnitas que afectan al problema:
Ntot=(iala-1)*Nyincog;
%%Comienza a contar el tiempo:
while contT<=finT
    %%Se va avanzando en el tiempo:
    contT=contT+1;
    vecT(contT)=Dt*contT;
    %%Se inicializa el vector w con valores nulos:
    w(1:(Ntot+1))=0;
    %%Se define el ángulo de ataque del problema:
    if UNSTEADY==0
        alpha=alpha0;
    else
        alpha=alpha0;
    %%Se calculan los términos independientes de la condición de Kutta
    %% en el caso no estacionario:
        w(Nyec*Nxec+(1:Nyincog))=phibstm1(1:Nyincog).*(1-
0.5*Dt./Dxbs(2:(Nyincog+1)))+0.5*Dt.*phibsm1tm1(1:Nyincog)./Dxbs(2:(Nyincog+1));
    end
    %%Se introduce la condición de impenetrabilidad:
    w(1:(Nyec*Nxec))=-alpha;
    if UNSTEADY==1
        for k=1:iestela
            for j=1:Nyincog
                %%Se realiza la reorganización del sistema debido a que los valores
                %%del potencial en la estela son conocidos en el caso no
                %%estacionario:
                w(1:(Nxec*Nyec))=w(1:(Nxec*Nyec)-(Mat(1:(Nxec*Nyec),(iala+k-
2)*Nyincog+j)*Phiestela(k,j))');
            end
        end
    end
end
end

```

```

%%Se resuelve el sistema de ecuaciones:
    sol=Mat(1:Ntot,1:Ntot)\(w(1:Ntot)');
%%Se actualizan los valores requeridos:
phibstml(1:Nyincog)=phibs(1:Nyincog);
phibsm1tm1(1:Nyincog)=phibsm1(1:Nyincog);
phibs(1:Nyincog)=sol((iala-2)*Nyincog+(1:Nyincog));
phibsm1(1:Nyincog)=sol((iala-3)*Nyincog+(1:Nyincog));
intphitotalm1(1:Nyincog)=intphitotal(1:Nyincog);
intphiunsteadym1(1:Nyincog)=intphiunsteady(1:Nyincog);
ubsalidatm1(1:Nyincog)=(Phiestela(1,(1:Nyincog))-phibs(1:Nyincog))/Dt;
%%Se actualizan los valores de la estela:
Puntero=Phiestela(iestela);
Phiestelaauxiliar=Phiestela;
Phiestela(iestela:-1:2,:)=Phiestelaauxiliar((iestela:-1:2)-1,:);
Phiestela(1)=Puntero;
Phiestela(1,1:Nyincog)=phibs(1:Nyincog);
%%%%
%%%%
%%%%
%%%%

%%%%                                %%%
%%% CÁLCULO DEL COEFICIENTE DE SUSTENTACIÓN %%%
%%%%                                %%%

for j=1:Nyincog
    if UNSTEADY==1
        intphiunsteady(j)=0;
        for i=1:(iala-1)
            nfila0=(i-2)*Nyincog+j;
            nfila1=(i-1)*Nyincog+j;

%%Se resuelven las integrales que permiten calcular el coeficiente de
%%sustentación:
                if                                                    i==1
intphiunsteady(j)=intphiunsteady(j)+0.5*sol(nfila1)*(mx(i+1,j+1)-mx(i,j+1));
                else
intphiunsteady(j)=intphiunsteady(j)+0.5*(sol(nfila0)+sol(nfila1))*(mx(i+1,j+1)-
mx(i,j+1));
                end
            end

                intphitotal(j)=2*((intphiunsteady(j)-
intphiunsteadym1(j))/Dt+phibs(j));

```

```

else
    intphitotal(j)=2*phibs(j);
end

end

CL=0;
phibs(Nyincog+1)=0;
intphitotal(Nyincog+1)=0;
intphitotal(1)=intphitotal(Nyincog+1);
%%Se calcula el coeficiente de sustentación en el instante "t":
for j=2:(Nyincog+1)
    CL=CL+2*((0.5*(intphitotal(j-1)+intphitotal(j))*1))*(my(1,j+1)-
my(1,j))/b;
end
CLT(contT)=CL;
end
%%Se representa el coeficiente de sustentación:
figure(2),plot(vecT,CLT)
%%%%%                %%%%%%%%%
    %%% FIN DEL PROGRAMA %%%
%%%%%                %%%%%%%%%

```

7.3 Programa 3. Placa plana oscilante.

Este programa se corresponde con el problema que se explica en la sección 5.3 y su implementación en MATLAB es la siguiente:

```

%%%%%                %%%%%%%%%
    %%% INICIO DEL PROGRAMA %%%
%%%%%                %%%%%%%%%

%%%%%                %%%%%%%%%
    %%% GEOMETRÍA Y PANELADO DEL ALA Y ESTELA %%%
%%%%%                %%%%%%%%%
%%Se define que el problema es no estacionario:
UNSTEADY=1;
%%Se definen el número de paneles en los que se divide el ala:
iala=41;
Nyincog=41;
%%Se define el alargamiento del ala:
AR=4;
%%Se define la flecha del ala:

```

```

flecha=0;
%Se define el estrechamiento del ala:
E=1;
%Se calcula la envergadura del ala:
b=(1+E)/2*AR;
%Se define un factor que va a influir en la situación de los puntos de
%colocacion:
factor=0.89;
%Se definen los paneles de la estela, dependiendo de si se considera %caso
%estacionario o no estacionario:
if UNSTEADY==0
    iestela=50;
    finT=0;
    Dt=20*b/iestela;
else
    finT=400;
    Dt=0.05;
    iestela=fix(10/Dt);
end
%Se inicializa el tiempo con valor cero:
contT=0;
%%Se define la posición central del ala, segun la direccion de la
%%envergadura:
N05=(Nyincog+2)/2+1;
%%Se define el ángulo de ataque:
alpha0=5*pi/180;
%%Se definen parámetros para realizar el panelado del ala de forma
%%discontinua:
dthetax=pi/(iala-1);
dthetay=pi/(Nyincog+1);
%%Se definen el número de incógnitas que hay sobre el ala:
Nxec=iala-2;
Nyec=Nyincog;

%%Se realiza el panelado del ala:
for i=1:iala
    my(i,1:(Nyincog+2))=-0.5*b*cos((0:(Nyincog+1))*dthetay);
    bataque(1:(Nyincog+2))=tan(flecha*pi/180)*abs(my(i,1:(Nyincog+2)));
    bsalida(1:(Nyincog+2))=bataque(1:(Nyincog+2))+1+(E-
1)*abs(my(i,1:(Nyincog+2))/my(i,Nyincog+2));
    cuerda(1:(Nyincog+2))=bsalida(1:(Nyincog+2))-bataque(1:(Nyincog+2));

```

```

    mx(i,1:(Nyincog+2))=(0.5*(1-cos((i-
1)*dthetax)))*cuerda(1:(Nyincog+2))+bataque(1:(Nyincog+2));
end
%%Se realiza el panelado de la estela:
for i=1:iestela
    mx(i+iala,1:(Nyincog+2))=mx(iala,1:(Nyincog+2))+i*Dt;
    my(i+iala,1:(Nyincog+2))=-0.5*b*cos((0:(Nyincog+1))*dthetay);
end
%%Se calcula la longitud según la dirección "x" del panel del borde de
%%salida.
Dxbs(1:length(mx(iala,:)))=mx(iala,:)-mx(iala-1,:);
%%Se sitúan los puntos de colocación sobre el ala y la estela:
for i=1:(Nxec)
    for j=2:(Nyec+1)
        if j==(fix(Nyincog/2)+2)
            mx0(i,j-1)=factor*mx(i+1,j)+(1-factor)*mx(i+2,j);
            my0(i,j-1)=my(i,2+fix(Nyincog/2));
        else
            if j<(fix(Nyincog/2)+2)
                mx0(i,j-1)=factor*mx(i+1,j)+(1-factor)*mx(i+2,j);
                my0(i,j-1)=factor*my(i,j)+(1-factor)*my(i,j+1);
            else
                mx0(i,j-1)=factor*mx(i+1,j)+(1-factor)*mx(i+2,j);
                my0(i,j-1)=factor*my(i,j)+(1-factor)*my(i,j-1);
            end
        end
    end
end

end

%%%%%
%%%%%
%%%%%
%%%%%

%%%%%%%%%
%%%%%%%%%
%%Se inicializan con valores nulos todas las variables que afectan al
%%problema:

```

```

Mat(1:(iala-1)*Nyincog,1:(iala+iestela)*Nyincog)=0;
sol(1:(iala-1)*Nyincog,1)=0;
Phiestela(1:iestela,1:Nyincog)=0;
phibs(1:(Nyincog+2))=0;
phibstm1(1:(Nyincog+2))=0;
phibsm1(1:(Nyincog+2))=0;
phibsm1tm1(1:(Nyincog+2))=0;
intphiunsteadym1(1:(Nyincog+2))=0;
intphiunsteady(1:(Nyincog+2))=0;
intphitotal(1:(Nyincog+2))=0;
intphitotalm1(1:(Nyincog+2))=0;
ubsalidatm1(1:(Nyincog+2))=0;
vecT(1)=0;
%% Se comienza a montar la matriz Mat
for k=1:(Nxec)
    for l=1:Nyec
        for j=1:(Nyincog+1)
i1=1:(iala+iestela-1);
j1=j;
i0=k;
j0=1;
%%Se definen las coordenadas del punto de colocación que se va a tratar:
        vx0=mx0(i0,j0);
        vy0=my0(i0,j0);
%%Se calculan las distancias desde el punto de colocación que se está
%%tratando a los vértices del panel que se está considerando:
        L1=sqrt((mx(i1,j1)-vx0).^2+(my(i1,j1)-vy0).^2);
        L2=sqrt((mx(i1,j1+1)-vx0).^2+(my(i1,j1+1)-vy0).^2);
        L3=sqrt((mx(i1+1,j1)-vx0).^2+(my(i1+1,j1)-vy0).^2);
        L4=sqrt((mx(i1+1,j1+1)-vx0).^2+(my(i1+1,j1+1)-vy0).^2);
%%Se calculan las componentes los vectores v:
        vx(:,1)=mx(i1,j1+1)-mx(i1,j1);
        vy(:,1)=my(i1,j1+1)-my(i1,j1);
        vx(:,2)=mx(i1+1,j1+1)-mx(i1,j1+1);
        vy(:,2)=my(i1+1,j1+1)-my(i1,j1+1);
        vx(:,3)=mx(i1+1,j1)-mx(i1+1,j1+1);
        vy(:,3)=my(i1+1,j1)-my(i1+1,j1+1);
        vx(:,4)=mx(i1,j1)-mx(i1+1,j1);
        vy(:,4)=my(i1,j1)-my(i1+1,j1);
        if j1<N05
            vx(:,5)=mx(i1+1,j1)-mx(i1,j1+1);

```

```

        vy(:,5)=my(i1+1,j1)-my(i1,j1+1);
        vx(:,6)=-vx(:,5);
        vy(:,6)=-vy(:,5);
    else
        vx(:,5)=mx(i1+1,j1+1)-mx(i1,j1);
        vy(:,5)=my(i1+1,j1+1)-my(i1,j1);
        vx(:,6)=-vx(:,5);
        vy(:,6)=-vy(:,5);
    end
%%Se calculan las componentes de los vectores l1, l2 y l3:
    l2(:,1:6)=sqrt(vx(:,1:6).^2+vy(:,1:6).^2);
    for contador=1:length(i1)
        l3(contador,1)=max(L2(contador),L1(contador));
        l1(contador,1)=min(L2(contador),L1(contador));
        l3(contador,2)=max(L4(contador),L2(contador));
        l1(contador,2)=min(L4(contador),L2(contador));
        l3(contador,3)=max(L4(contador),L3(contador));
        l1(contador,3)=min(L4(contador),L3(contador));
        l3(contador,4)=max(L3(contador),L1(contador));
        l1(contador,4)=min(L3(contador),L1(contador));
    end
    if j1<N05
        for contador=1:length(i1)
            l3(contador,5)=max(L2(contador),L3(contador));
            l1(contador,5)=min(L2(contador),L3(contador));
        end
    else
        for contador=1:length(i1)
            l3(contador,5)=max(L4(contador),L1(contador));
            l1(contador,5)=min(L4(contador),L1(contador));
        end
    end
    l3(:,6)=l3(:,5);
    l1(:,6)=l1(:,5);
%%Se calcula el coseno de theta0 y el seno de theta2 respectivamente:
    for i=1:5
        Rbas(:,i)=(l2(:,i).^2+l1(:,i).^2-l3(:,i).^2)/(2*l1(:,i).*l2(:,i));
        Sbas(:,i)=(l2(:,i)-l1(:,i).*Rbas(:,i))./l3(:,i);
%%Se calcula el valor de la integral:
        for j=1:length(i1)
            if (abs(Sbas(j,i))>(1-1e-14)) || (abs(Rbas(j,i))>(1-1e-14))

```

```

        faclog(j,i)=0;
    else
        faclog(j,i)=0.5*(log((1+Sbas(j,i))/(1-Sbas(j,i)))+log((1+Rbas(j,i))/(1-
Rbas(j,i)))));
    end
end
end
faclog(:,6)=faclog(:,5);
%%Se calculan los valores de v·n, necesarios para resolver el problema:
nx(:,1:6)=-vy(:,1:6).*faclog(:,1:6)./l2(:,1:6);
ny(:,1:6)=vx(:,1:6).*faclog(:,1:6)./l2(:,1:6);
phit(:,1:4)=zeros(length(i1),4);
%%Se realizan las modificaciones para cambiar las variables del %%problema
%%(pasar de las velocidades de perturbación al potencial de %%velocidades):
if j1<N05
    ut1(:,1)=-1./l2(:,4);
    ut1(:,2)=0;
    ut1(:,3)=-ut1(:,1);
    ut1(:,4)=0;
    vt1(:,1)=(1./vy(:,1)).*(vx(:,1)./l2(:,4)-1);
    vt1(:,2)=1./vy(:,1);
    vt1(:,3)=-vx(:,1)./(vy(:,1).*l2(:,4));
    vt1(:,4)=0;
    ut2(:,1)=zeros(length(i1),1);
    ut2(:,2)=-1./l2(:,2);
    ut2(:,3)=0;
    ut2(:,4)=-ut2(:,2);
    vt2(:,1)=zeros(length(i1),1);
    vt2(:,2)=vx(:,3)./(vy(:,3).*l2(:,2));
    vt2(:,3)=1./vy(:,3);
    vt2(:,4)=- (1./vy(:,3)).*(1+vx(:,3)./l2(:,2));
%%Se calcula la influencia que ejerce el potencial de velocidades que se
encuentra en un
%%vérticice del panel considerado sobre el punto de colocación:
for i=1:4

phit(:,i)=(ut1(:,i).*nx(:,1)+vt1(:,i).*ny(:,1))+(ut1(:,i).*nx(:,5)+vt1(:,i).*ny(
(:,5)))+(ut1(:,i).*nx(:,4)+vt1(:,i).*ny(:,4))+(ut2(:,i).*nx(:,2)+vt2(:,i).*ny(:,2)
)+(ut2(:,i).*nx(:,3)+vt2(:,i).*ny(:,3))+(ut2(:,i).*nx(:,6)+vt2(:,i).*ny(:,6));

    end
else
    ut1(:,1)=-1./l2(:,4);
    ut1(:,2)=0;

```

```

ut1(:,3)=-ut1(:,1);
ut1(:,4)=0.;
vt1(:,1)=(vx(:,3)./vy(:,3))./l2(:,4);
vt1(:,2)=0;
vt1(:,3)=(1./vy(:,3)).*(1-vx(:,3)./l2(:,4));
vt1(:,4)=-(1./vy(:,3));
ut2(:,1)=zeros(length(i1),1);
ut2(:,2)=-1./l2(:,2);
ut2(:,3)=0;
ut2(:,4)=-ut2(:,2);
vt2(:,1)=-1./vy(:,1);
vt2(:,2)=(1./vy(:,1)).*(1+vx(:,1)./l2(:,2));
vt2(:,3)=0;
vt2(:,4)=-(1./vy(:,1)).*(vx(:,1)./l2(:,2));
for i=1:4

phit(:,i)=(ut1(:,i).*nx(:,5)+vt1(:,i).*ny(:,5))+(ut1(:,i).*nx(:,3)+vt1(:,i).*ny(
(:,3)))+(ut1(:,i).*nx(:,4)+vt1(:,i).*ny(:,4))+(ut2(:,i).*nx(:,1)+vt2(:,i).*ny(:,1)
)+(ut2(:,i).*nx(:,2)+vt2(:,i).*ny(:,2))+(ut2(:,i).*nx(:,6)+vt2(:,i).*ny(:,6));

    end

end

%%Se define la fila de la matriz Mat donde se van a insertar los %%valores de
phit considerados:
    nfila=(i0-1)*Nyec+j0;

%%Se definen las columnas de la matriz Mat, donde se van a insertar %%los
%%valores de phit considerados:
    ncol(:,1)=(i1-2).*Nyincog+j1-1;
    ncol(:,2)=ncol(:,1)+1;
    ncol(:,3)=(i1-1).*Nyincog+j1-1;
    ncol(:,4)=ncol(:,3)+1;
    if j1==1
        ncol(:,3)=-10*ones(length(i1),1);
        ncol(:,1)=ncol(:,3);
    end
    if j1==(Nyincog+1)
        ncol(:,4)=-10*ones(length(i1),1);
        ncol(:,2)=ncol(:,4);
    end
    for i=1:4
        for contador=1:length(i1)
            if ncol(contador,i)>0
                %%Se introducen esos valores en la matriz MaT:
                Mat(nfila,ncol(contador,i))=Mat(nfila,ncol(contador,i))-

```

```

1/(2*pi)*phit(contador,i);
        end
    end
end
    end
end
end
%%Se introducen las condiciones de Kutta en el caso no estacionario y
%%estacionario respectivamente:
if UNSTEADY==0
    for j=2:(Nyincog+1)
        Mat(Nyec*Nxec+j-1,(iala-2)*Nyincog+j-1)=Mat(Nyec*Nxec+j-1,(iala-2)*Nyincog+j-1)+1;
        Mat(Nyec*Nxec+j-1,(iala-3)*Nyincog+j-1)=Mat(Nyec*Nxec+j-1,(iala-3)*Nyincog+j-1)-1;
    end
else
    for j=2:(Nyincog+1)
        Mat(Nyec*Nxec+j-1,(iala-2)*Nyincog+j-1)=Mat(Nyec*Nxec+j-1,(iala-2)*Nyincog+j-1)+1+0.5*Dt/Dxbs(j);
        Mat(Nyec*Nxec+j-1,(iala-3)*Nyincog+j-1)=Mat(Nyec*Nxec+j-1,(iala-3)*Nyincog+j-1)-0.5*Dt/Dxbs(j);
    end
end
if UNSTEADY==0
    for j=2:(Nyincog+1)
        for k=1:iestela
            Mat(1:(Nxec*Nyec),(iala-2)*Nyincog+j-1)=Mat(1:(Nxec*Nyec),(iala-2)*Nyincog+j-1)+Mat(1:(Nxec*Nyec),(iala+k-2)*Nyincog+j-1);
        end
    end
end
%%Se define el número total de incógnitas que afectan al problema:
Ntot=(iala-1)*Nyincog;
%%Comienza a contar el tiempo:
while contT<=finT
%%Se va avanzando en el tiempo:
contT=contT+1;
vecT(contT)=Dt*contT;
%%Se inicializa el vector w con valores nulos:
w(1:(Ntot+1))=0;
%%Se define el ángulo de ataque del problema:
if UNSTEADY==0

```

```

        alpha=alpha0;
else
%%Se calcula el ángulo de ataque
    kfrec=0.5;
    Ua=0.1*2*kfrec*sin(2*kfrec*Dt*contT);
    alpha=-alpha0-atan(Ua);
%%Se calculan los términos independientes de la condición de Kutta
%% en el caso no estacionario:
    w(Nyec*Nxec+(1:Nyincog))=phibstml(1:Nyincog).*(1-
0.5*Dt./Dxbs(2:(Nyincog+1)))+0.5*Dt.*phibsm1tml(1:Nyincog)./Dxbs(2:(Nyincog+1));
end
%%Se introduce la condición de impenetrabilidad:
w(1:(Nyec*Nxec))=-alpha;
if UNSTEADY==1
    for k=1:iestela
        for j=1:Nyincog
            %%Se realiza la reorganización del sistema debido a que los valores
%%del potencial en la estela son conocidos en el caso no
%%estacionario:
                w(1:(Nxec*Nyec))=w(1:(Nxec*Nyec)-(Mat(1:(Nxec*Nyec),(iala+k-
2)*Nyincog+j)*Phiestela(k,j)));
            end
        end
    end
end
%%Se resuelve el sistema de ecuaciones:
    sol=Mat(1:Ntot,1:Ntot)\(w(1:Ntot)');
%%Se actualizan los valores requeridos:
phibstml(1:Nyincog)=phibs(1:Nyincog);
phibsm1tml(1:Nyincog)=phibsm1(1:Nyincog);
phibs(1:Nyincog)=sol((iala-2)*Nyincog+(1:Nyincog));
phibsm1(1:Nyincog)=sol((iala-3)*Nyincog+(1:Nyincog));
intphitotalm1(1:Nyincog)=intphitotal(1:Nyincog);
intphiunsteadym1(1:Nyincog)=intphiunsteady(1:Nyincog);
ubsalidatm1(1:Nyincog)=(Phiestela(1,(1:Nyincog))-phibs(1:Nyincog))/Dt;
%%Se actualizan los valores de la estela:
Puntero=Phiestela(iestela);
Phiestelaauxiliar=Phiestela;
Phiestela(iestela:-1:2,:)=Phiestelaauxiliar((iestela:-1:2)-1,:);
Phiestela(1)=Puntero;
Phiestela(1,1:Nyincog)=phibs(1:Nyincog);
%%%%
%%%%

```

```

%%
%%

%%
%%
%% CÁLCULO DEL COEFICIENTE DE SUSTENTACIÓN
%%
%%
for j=1:Nyincog
    if UNSTEADY==1
        intphiunsteady(j)=0;
        for i=1:(iala-1)
            nfila0=(i-2)*Nyincog+j;
            nfila1=(i-1)*Nyincog+j;

%%Se resuelven las integrales que permiten calcular el coeficiente de
%%sustentación:
            if i==1

intphiunsteady(j)=intphiunsteady(j)+0.5*sol(nfila1)*(mx(i+1,j+1)-mx(i,j+1));
                else

intphiunsteady(j)=intphiunsteady(j)+0.5*(sol(nfila0)+sol(nfila1))*(mx(i+1,j+1)-
mx(i,j+1));
                end
            end
            intphitotal(j)=2*((intphiunsteady(j)-
intphiunsteadym1(j))/Dt+phibs(j));
            else
                intphitotal(j)=2*phibs(j);
            end
        end
    end
    CL=0;
    phibs(Nyincog+1)=0;
    intphitotal(Nyincog+1)=0;
    intphitotal(1)=intphitotal(Nyincog+1);
%%Se calcula el coeficiente de sustentación en el instante "t":
    for j=2:(Nyincog+1)
        alpha=alpha0;

            CL=CL+2*((0.5*(intphitotal(j-1)+intphitotal(j))*1))*(my(1,j+1)-
my(1,j))/b;
        end
    end
    CLT(contT)=CL;

```

end

```
%%%%%%%%%          %%%%%%%%%%  
    %%% FIN DEL PROGRAMA %%%  
%%%%%%%%%          %%%%%%%%%%
```

BIBLIOGRAFÍA.

Los desarrollos que aparecen en todas estas páginas, se fundamentan en las aportaciones de dos publicaciones:

- Introducción a la AERODINÁMICA POTENCIAL (José Manuel Gordillo Arias De Saavedra-Guillaume Riboux Archer).
- Low-Speed Aerodynamics (Joseph Katz-Allen Plotkin).

Estas dos obras han sido esenciales para poder fundamentar las ideas que se han explicado.