INTUICIONISMO Y OBJETIVIDAD

Miguel Espinoza. Université de Strasbourg

Resumen: Para todo intuicionista en filosofía o en matemáticas, lo que existe en el interior de la mente es el único contenido del pensamiento y del conocimiento, la única fuente de la verdad. Ahora bien, la ciencia es una actividad y un patrimonio colectivos. La pregunta salta a la vista: ¿cómo puede el intuicionista conciliar estos dos hechos? Se explican y se discuten en este ensayo varias de las ideas principales del intuicionismo en matemáticas, en particular del pensamiento de L. E. J. Brouwer (1881-1966), y se evalúan algunas críticas dirigidas contra la supuesta subjetividad de su doctrina. Terminaré sugiriendo que alguna especie de intuicionismo puede ser el complemento epistemológico necesario del platonismo.

Abstract: *Intuitionism and objectivity.* On the one hand, for an intuitionist in philosophy or in mathematics, that which is found within the mind is the only content of knowledge and thought, the only source of truth; on the other hand, science is a collective activity and patrimony. Hence this difficult question: Can the intuitionist conciliate both these facts? In the present essay I explain and discuss several of the central ideas of mathematical intuitionism, in particular those of L. E. J. Brouwer (1881-1966), then I evaluate some of the main criticisms addressed to the supposed subjectivity of his doctrine. Finally I will point out that some kind of intuitionism can be the necessary epistemological complement of platonism.

1. Características generales del intuicionismo

Ya antes de su existencia en matemáticas el intuicionismo es una doctrina filosófica que da la prioridad al conocimiento directo de ciertos objetos o verdades considerados como fundamentales en sus campos respectivos, de objetos o verdades *que se ven.* La intuición produce visionarios como Platón, Descartes o Poincaré. La intuición sugiere un contacto directo con lo aprehendido, la operación del espíritu presenta el carácter de la inmediatez. Luego la percepción directa sería prolongada por la imaginación concreta y hasta ahí llegaría lo intuitivamente verdadero. El entendimiento, el intelecto o la razón, atados al lenguaje, a la lógica y a la abstracción son para siempre, en la tradición intuicionista, un medio sospechoso de conocer.

Se supone que un conocimiento intuitivo no ocurre en etapas, no es gradual como una inferencia, como el conocimiento que presupone el lenguaje, como la aplicación de un algoritmo. Digo «se supone» porque la inmediatez podría ser una ilusión. Que la conciencia sea incapaz de seguir los diferentes pasos del cerebro no significa que biológicamente haya también inmediatez. La rapidez de un ordenador no implica intuición. A veces en matemáticas se entiende también por intuición las operaciones de cálculo o lo que llega a entenderse fácilmente. En la intuición, lo aprehendido y la operación de la mente forman un solo proceso, tienen una sola forma, por eso no se plantea el problema de la verdad-adecuación. Para preguntarnos si lo que pensamos corresponde o no a algo externo al pensamiento, es necesario que el intelecto y la cosa estén separados. Esto no ocurre en la intuición. Es entonces la falta de distinción sujeto-objeto, la inmediatez atribuida a la intuición que ha dado a los intuicionistas la confianza en este modo de conocimiento. Toda inferencia debe estar basada finalmente en verdades intuitivas.

Una cara de la medalla es la confianza en la verdad intuitiva. Pero si el sujeto y el objeto intersectan, si llegan a fundirse, entonces la otra cara es que el problema epistemológico de la objetividad se oscurece puesto que toda distancia, condición de la crítica, es imposible. Por eso, como deberé repetirlo hacia el final de este ensayo, es preciso reconocer que la intuición necesita formalismos que permitan fijar los conceptos para compararlos a otros conceptos y para criticarlos tanto individualmente como al interior de la comunidad científica. Sin formalismo no hay ciencia. Y la ontología puede reforzar esta ausencia de distancia si se afirma que el intelecto es un sistema emergente, que el espíritu forma parte de la naturaleza.

Si el intuicionista se priva del lenguaje como medio de conocimiento, puede conocer muy pocas cosas. Hay un gran intervalo entre lo que afirmamos conocer y lo que conocemos efectivamente de manera intuitiva. ¿Cuál habría sido el contenido de la filosofía cartesiana si su método se hubiera basado en un principio único, la evidencia de la intuición? Una pobreza extrema. El segundo principio cartesiano lo salva, ¡y qué ayuda, la veracidad divina! Ella le garantiza el paso a la ontología. Gracias a la veracidad divina, a la cual Descartes cree llegar mediante su primer principio, las intuiciones pueden organizarse en un discurso, en un saber; la veracidad divina le permite creer que las substancias, las leyes del movimiento, las relaciones lógicas corresponden a sus intuiciones.

Según los intuicionistas, que son típicamente pensadores espiritualistas y solitarios, la razón lingüística mata las esencias, mata la verdad. Las palabras tienen una significación fija que disimula la variabilidad intrínseca de los fenómenos, los signos analizan más allá de lo justo, generalizan y reducen. Bergson criticó al lenguaje matemático su incapacidad de describir la duración que él consideraba como lo esencial de los fenómenos, y a juicio de los intuicionistas, las verdades mueren en el momento en que son encarnadas en las palabras. «La evidencia inmediata es en todo lugar de lejos preferible a la verdad demostrada, y esta última debe ser aceptada sólamente cuando la primera está demasiado apartada, y no cuando está tan cerca, o incluso más cerca que esta última» (cf. Schopenhauer, *El mundo como voluntad y representación,* Libro Primero, párrafo 14). «Es una cosa terrible la inteligencia, dice Unamuno en *Del sentimiento trágico de la vida,* tiende a la muerte como a la estabilidad la memoria... La lógica tiende a reducirlo todo a identidades y a géneros, a que no tenga cada representación más que un solo y mismo contenido en cualquier lugar, tiempo o relación en que se nos ocurra. Y no hay nada que sea lo mismo en dos momentos sucesivos de su ser... La ciencia es un cementerio de ideas muertas.» Brouwer tuvo opiniones tan fuertes como esas contra el lenguaje y su lógica, agregando que ya el hecho de dirigirse a alguien con la palabra, como yo lo hago ahora por ejemplo, es imponer una voluntad y atentar contra la libertad.

Veremos cómo algunas de las características generales del intuicionismo se encuentran manifiestas primero en los pre-intuicionistas franceses y luego en el intuicionismo de Brouwer. La razón para proceder así es que Brouwer se consideraba un discípulo de la manera francesa de pensar que él contraponía a la manera alemana o formalista.

2. *Los pre-intuicionistas*

Los aportes de los pre-intuicionistas fueron admirables en calidad y en cantidad e imposible evidentemente de resumir en pocas páginas. Por eso en este contexto me limito a exponer algunas de las creencias precursoras a las de Brouwer. Antes de convertirse en una serie de tesis conscientes y positivas sobre la naturaleza de las matemáticas en las manos de Brouwer, otros matemáticos, reflexionando sobre el significado de sus trabajos, prepararon el camino con críticas dirigidas a las matemáticas clásicas. Por ejemplo, Kronecker consideraba que los trabajos de Cantor sobre los transfinitos y sobre la teoría de conjuntos no formaban parte de las matemáticas sino del misticismo. Según Kronecker, los enteros naturales, obra divina, son intuitivamente claros y por lo tanto aceptables, mientas que algunas teorías como la de los irracionales son obras humanas de las cuales hay que desconfiar. La crítica global de Kronecker afirma que muchos sectores de las matemáticas no proporcionan ni criterios ni métodos constructivos para determinar sus objetos, y esto en un número finito de pasos. Estas críticas se encuentran sobre todo en los trabajos de lo que puede llamarse «la escuela francesa». Como Kronecker, Poincaré consideraba que los enteros naturales son evidentes y se burla de la complicada definición logicista del número uno por parte de Russell. Para Weyl, el enunciado «hubo estos tonos: ////» es muy inteligible en sí mismo y no hay necesidad de buscar un *conjunto* de tonos escuchados.

Pre-intuicionistas: así pueden llamarse algunos matemáticos como Poincaré, Baire, Borel, Lebesgue y Lusin. Prevalece en ellos una actitud crítica hacia la existencia de entes que no resultan de una intuición, ¿y qué quiere decir «no resultar de una intuición», o «no ser evidente», o «no ser inteligible»? Quiere decir que no se sabe

— cómo especificar una afirmación general,
— cómo nombrar un elemento de un conjunto,
— cómo obtenerlo de manera computacional, es decir, cómo pensar un algoritmo, un mecanismo o una regla que forme el ente en cuestión.

Se trata de una exigencia que hará suya más tarde Brouwer.

Por ejemplo, en lo que concierne los enteros, se tiene la representación de ejemplares particulares más una operación, sucesor, que permite la formación de cualquier entero. En lo concerniente a los números irracionales, se tiene la representación de ejemplares particulares como la raiz cuadrada de 2, o pi. O bien se poseen algoritmos cuya aplicación da una respuesta a problemas de decisión o de calculabilidad en un número finito de etapas, o bien se sabe que una colección posee alguna propiedad invariante cuando se cambia de elemento. Una vez que esta actitud crítica de los pre-intuicionistas se verá completada con elementos positivos y unificados se podrá hablar en sentido estricto de la doctrina intuicionista: es lo que hizo Brouwer.

3. *El problema del infinito*

Un intuicionista, en el sentido filosófico o matemático del término, hace hincapié en el hecho que no hay conocimiento sin contacto concreto con lo que se describe o afirma, que el sujeto es un ser humano cuyos órganos sensoriales e intelectuales son limitados o finitos. Así, el método por excelencia, tanto en las ciencias naturales como en las matemáticas, tiene que ser la inducción puesto que todo contacto de una mente finita con algo no puede ser sino parcial, local, y de ahí se intentará generalizar. Nuestro horizonte es siempre finito. Se entiende entonces que al menos en el caso de los pre-intuicionistas la ocasión de la bifurcación matemáticos «clásicos» por un lado e «intuicionistas» por otro haya sido dada por la discusión alrededor del infinito.

Como se sabe, el problema del infinito fue tratado ya por Zenón de Elea (s. V AC). Sus paradojas, como la de Aquiles que nunca alcanza a la tortuga o aquélla de la flecha que vuela y que sin embargo permanece inmóvil, estaban destinadas a demostrar la doctrina de Parménides, la imposibilidad del movimiento y la unidad del Ser. En casos como éstos se ve claramente la incompatibilidad que puede existir entre la intuición natural y el formalismo. Estas pardojas nos obligan a distinguir los diferentes conceptos de infinito. Aristóteles por ejemplo distinguió dos, a) el infinito por composición, como el número infinito que no podría ser alcanzado agregando unidades a unidades, y b) el infinito por división, como el espacio que él concebía como infinitamente divisible. En el capítulo sobre la filosofía de la naturaleza de su libro *Aristotle* (1923), David Ross muestra que el estagirita reconoce la existencia de series infinitas convergentes hacia una suma finita puesto que «un todo, que es finito, es sin embargo *infinito por composición* en este sentido especial que no se lo podría construir por adición de partes decrecientes según una razón constante.» El espacio sería para Aristóteles una serie convergente infinita, mientras que el tiempo y el número serían series divergentes infinitas.

Tanto la química de fines del siglo XIX con su tabla de elementos como la física de hoy tienen fuertes argumentos a favor del carácter discontinuo de la materia. Pero una invariante de los matemáticos puros es considerar que el infinito no tiene nada que ver con los objetos finitos de nuestro mundo sensible, que el infinito es una idea de la razón sin medida común con los objetos sensibles finitos, que el infinito es y que nada, excepto él mismo, puede dar una idea de sí mismo. No solamente el infinito y lo finito serían de una especie diferente, sino que se excluirían mutuamente. Pero esta opinión no es la única, le parece a los pioneros del cálculo infinitesimal que el infinito y lo finito están ligados en el mundo sensible y en la mente. Por ejemplo la idea de Leibiz es que aunque el infinito sea una nueva especia de cantidad, una cantidad intensiva, una ficción que no se encuentra tal cual en el mundo provisto de cantidades extensivas, tiene sin embargo un fundamento en las cosas reales sensibles. De ahí viene su valor positivo en la explicación del movimiento. Leibniz define la ley universal de la continuidad como el fundamento de la diferencial.

Desde hace mucho tiempo el infinito ha sido parte de las matemáticas sin que su utilización se considere chocante. En el álgebra elemental aparece bajo la forma de una cantidad finita que habría que dividir por cero. ¿Qué sentido puede tener una operación que utiliza un divisor inexistente? El problema no parece tener solución razonable. Pero el matemático no se deja detener por tal imposibilidad y quisiera encontrar una solución. A medida que el divisor disminuye, el cuociente aumenta; y si el divisor se encuentra por debajo de todo grado de pequeñez, el cuociente se eleva sobre todo grado de cantidad. Así la división de un número por cero significa que ninguna cantidad finita soluciona el problema, y así se afirma que la solución es el infinito. En la geometría plana euclidiana, el punto de encuentro entre dos rectas paralelas está situado en el infinito. Se usa también el símbolo del infinito en el estudio de la elipse: si la distancia entre los centros es infinita, se infiere que la elipse tiene un solo centro y que se trata no de una elipse sino de una parábola. Si un polígono tiene un número infinito de lados, se infiere que el polígono es una curva.

Sin la imaginación racional las matemáticas no existirían; quiero decir sin esta operación mental que consiste en no querer dejar jamás sin solución un problema bien planteado. Por ejemplo, es gracias a esta voluntad anti-derrotista que se han descubierto o inventado (en matemáticas, se descubre inventando) los diferentes conjuntos de números. Y esta imaginación, una vez que ha hecho el trabajo de aceptar un nuevo ente en su ontología, vuelve a los mismos algoritmos, repite lo que ya sabe y domina de las operaciones positivas y de sus inversas: la suma y la resta, la multiplicación y la división, la potencia y la raiz, la relación exponencial y la logarítmica, relaciones o funciones circulares o trigonométricas, elípticas, etc. La imaginación aquí es racional y necesaria, excluye lo arbitrario. Esto se ve en las aplicaciones, en la generatividad de las matemáticas. Piénsese por ejemplo en el cálculo infinitesimal.

La imaginación nos ha dado el infinito que aparece en los números irracionales (los inconmensurables), es decir el continuo obtenido aplicando a los números racionales, las fracciones, la idea de una serie infinita de alteraciones de amplitud cada vez menos sensible, los infinitos introducidos con los cálculos diferencial e integral por Leibniz y Newton, las series infinitas convergentes y el transfinito. Ahora bien, varios matemáticos consideran que una constante en la historia de los modos de aparición del infinito es que éste se ha mostrado jabonoso para una lógica que se ha visto cada vez en la incapacidad de dar cuenta de manera satisfactoria de los razonamientos en los que aparece el infinito. Por eso no hay que extrañarse si las discusiones sobre la naturaleza del infinito y las maneras de concebirlo están en el centro de las filosofías de las matemáticas recientes y constituyen un lugar privilegiado para discutir las tesis intuicionistas.

Según Cantor, existe una infinidad no numerable de números, y Lebesgue observa que Cantor no se da los medios de nombrar tal infinidad. «Se muestra solamente, continúa Lebesgue, que cada vez que se tendrá una infinidad numerable de números, se podrá definir un número que no forma parte de esta infinidad. (La palabra definir quiere decir: nombrar una propiedad característica de lo definido.) Una existencia de esta naturaleza puede ser utilizada en un razonamiento y de la siguiente manera: una propiedad es verdadera si el hecho de negarla lleva a admitir que se pueden ordenar todos los números en una serie numerable. Creo que no puede intervenir sino de esta manera». Y Baire escribe: «Para mi, el progreso en este orden de ideas consistiría en delimitar el dominio de lo que es definible. Y, a fin de cuentas, a pesar de las apariencias, todo debe reducirse a lo finito.» He aquí un tercer testimonio de Borel: «Cuando se trata del infinito que no es numerable, creo constatar que todos los discursos por medio de los cuales se ha intentado despertar en mí la idea no han sugerido otra cosa a mi imaginación que el infinito numerable; los razonamientos sobre los símbolos alephs conservan para mí un carácter solamente abstracto que no corresponden a ninguna realidad.» En su artículo «Intuicionismo y formalismo» de 1912 Brouwer no dirá otra cosa.

Una de las reglas mencionadas por Poincaré en su polémica contra Russell establece que «nunca hay que perder de vista que toda proposición sobre el infinito debe ser la traducción, el enunciado abreviado de proposiciones sobre lo finito.» («La logique de l'infini» *in Dernières pensées*). Russell adopta el punto de vista realista del matemático clásico, es decir, aquél que atribuye a la lógica un valor absoluto y universal, y este valor sería el mismo tanto en el dominio de los entes finitos como en el de los infinitos. Por ejemplo, en su artículo «Sobre los axiomas de la geometría» publicado en la Revista de Metafísica y de Moral en 1899, Russell escribe que «todo lo que se puede descubrir mediante una operación debe existir independientemente de esta operación. América existió antes que Cristóbal Colón y dos cantidades de la misma especie son necesariamente iguales o desiguales antes de ser medidas.» Como Russell, Hadamard (que en esto es una excepción en el ambiente francés de la época), toma la posición contraria a la de los pre-intuicionistas. A la pregunta: ¿puede demostrarse la existencia de un ente matemático sin definirlo? Hadamard responde afirmativamente, y escribe: «Que nos sea imposible, por lo menos actualmente, nombrar un elemento de un conjunto infinito, es verdad. Pero eso es un problema para ustedes (quiere decir, para los intuicionistas), no para mí.» (Esta cita, así como las otras de Baire, Lebesgue y Borel están sacadas del libro de Emile Borel *Lecciones sobre la teoría de funciones.)*

4. El intuicionismo de Luitzgen Egbertus Jan Brouwer

Según los períodos de la historia y los adversarios del idealismo, esta doctrina ha adoptado diversas formas. Se supone que una de ellas en el campo de la filosofía de las matemáticas es el intuicionismo. Pero no es fácil establecer si en particular el intuicionismo de Brouwer es un idealismo. Para un idealista, ser es ser concebido en una experiencia mental. Ahora bien, decir, como lo hace el matemático holandés, que no tenemos derecho a afirmar la existencia si no tenemos contacto intuitivo con ella, no equivale a la afirmación idealista que ser, es ser concebido o percibido, que nada existe fuera de la experiencia humana.

Una vez que Brouwer estudió las matemáticas de los pre-intuicionistas y de los formalistas llegó a la conclusión siguiente que determinó su orientación filosófica y matemática: una parte de las matemáticas es autónoma, es decir, exacta, absoluta, confiable y universalmente reconocida sin tener necesidad de la lógica ni del lenguaje. Es lo que ocurre, por ejemplo, con la teoría elemental de los enteros naturales, con el principio de la inducción completa y con otras partes del álgebra. En cambio, la parte que no es autónoma y que requiere de la lógica y del lenguaje es la teoría del continuo y de los números reales. En este caso se requiere una prueba de la existencia no-contradictoria de tales entes.

Las dos tesis principales de la filosofía intuicionista, o actos del intuicionismo, son los siguientes: «El primer acto del intuicionismo, escribe Brouwer («Historical Background, Principles and Methods on Intuitionism» in South African Journal of Science, Oct.-Nov., 1952, p. 142) separa completamente las matemáticas del lenguaje matemático, y en particular de los fenómenos del lenguaje descritos por la lógica teórica, y reconoce que la matemática intuicionista es esencialmente una actividad mental desprovista de lenguaje cuyo origen se encuentra en la percepción del movimiento del tiempo, es decir, de la separación de un momento de vida en dos cosas distintas, una de las cuales hace surgir la otra pero queda retenida por la memoria. Si se le quita a la *dos-unidad* así obtenida toda cualidad, queda la forma vacía del substrato común a todas las *dos-idades.* Tal substrato común, tal forma vacía, constituye la intuición básica de las matemáticas.» El segundo acto del intuicionismo o segunda tesis, es constructivo y prolonga lo que el primer acto hace posible; así el autodesarrollo de la intuición primordial del paso del tiempo es la base de la construcción de los números naturales y del continuo intuicionista.

Uno de los artículos principales de Brouwer intitulado «Conciencia, filosofía y matemática» se termina así: «Espero haber mostrado que el intuicionismo por una parte hace de la lógica una ciencia más sutil, y que por otra no la reconoce como fuente de verdad. Espero haber mostrado también que la matemática intuicionista es una estructura interior y que la investigación de los fundamentos de las matemáticas es una búsqueda interior con consecuencias importantes, esclarecedoras y liberadoras incluso en áreas del pensamiento más allá de la matemática.» (10th Internaional Congress of Philosophy, Amsterdam, 1948, Proceedings I, Fascicule 11, Amsterdam, North Holland Publishing Company, 1949, pp. 1243-9). Lo que Brouwer implica es que lo colectivo, lo exterior, limita la libertad.

Para Brouwer la matemática es una arquitectura interior, mental. Una de las fuentes principales del intuicionismo brouweriano, Kant, había visto en el tiempo y en el espacio, que son según él formas puras a priori de la sensibilidad, la posibilidad de los juicios sintéticos a priori de las matemáticas. Para Kant la mayoría de los enunciados de las matemáticas (no todos) son sintéticos a priori, a) sintéticos (la frase del predicado agrega algo a lo contenido en el sujeto) porque no son susceptibles de recibir una demostración analítica (en el juicio analítico el predicado está contenido en el sujeto) y a priori puesto que se supone que son independientes de la experiencia, que no son refutables por ella. El espacio es la condición de la geometría, el tiempo, la condición de la aritmética. El intuicionismo brouweriano puede ser asociado sólo parciamente a Kant porque, por una parte, si bien para ambos las matemáticas dependen del tiempo y éste está íntimamente ligado al sentido interno, a la conciencia, por otra parte de los dos sólo Brouwer piensa que se puede reducir la geometría al álgebra, como lo mostró Descartes. El estatuto del espacio en Brouwer es inferior al que tiene en Kant.

Al comienzo de su ensayo «Conciencia, filosofía y matemática» Brouwer escribe: «La conciencia en su morada más profunda parece oscilar lenta, involuntaria y reversiblemente entre el reposo y la sensación. Pareciera que sólo el estado de sensación hace posible el fenómeno que marca el comienzo del movimiento del paso que acabo de mencionar, y que es un acto del tiempo. Gracias a la acción del tiempo (o al «golpe del tiempo» según algunos traductores) una sensación presente hace surgir otra sensación presente, de manera que la conciencia preserva la primera de estas sensaciones en tanto que sensación pasada y que además, gracias a esta distinción entre el presente y el pasado, se aleja de una y de otra, y también del reposo, para llegar a ser un intelecto». (Compare estas ideas con las de Bergson. Para el filósofo la intuición consciente se deriva del instinto. La conciencia humana está en un estado de somnolencia en la actividad instintiva, luego la evolución la despierta. La intuición es el instinto convertido en conciencia desinteresada, distanciada de las exigencias de la acción y de la vida social, comparable a la experiencia estética. En este estado se ve el mundo tal como se presenta a la percepción pura. ¿Cómo no ver aquí una experiencia semejante a la vida de la conciencia brouweriana *en su morada más profunda?* Muchos fenomenólogos asentirían a estas ideas y de manera general en filosofía de las matemáticas el estudio comparativo entre Husserl y Brouwer se revela útil).

En su Discurso inaugural de la Universidad de Amsterdam en 1912 «Intuicionismo y formalismo», Brouwer dice que «la intuición de la *dos-idad*, la intuición fundamental de las matemáticas, crea no sólo los números uno y dos sino también todos los números ordinales finitos, puesto que uno de los elementos de la *dos-idad* puede pensarse como una nueva *dos-idad,* proceso que puede repetirse indefinidamente y cuya continuación engendra el número ordinal infinito más pequeño, ω. Finalmente, esta intuición fundamental de las matemáticas donde se unen lo conexo y lo separado, lo continuo y lo discreto, da lugar inmediatamente a la intuición del continuo lineal, es decir, del «entre» que no se agota con la interposición de nuevas unidades, y que por lo tanto no puede nunca pensarse como una simple colección de unidades.»

Las ideas que acabo de describir son capitales para entender a Brouwer y podemos ordenarlas de la manera siguiente: Primero, antes de la aparición del intelecto, la conciencia estaría en un estado de indiferencia. Segundo, el paso del tiempo la saca de esta indiferencia. Tercero, al salir de la indiferencia, se producen sensaciones; la conciencia oscila reversiblemente entre las sensaciones. Cuarto, al interior de las sensaciones podemos distinguir el sujeto del objeto. Quinto, el paso del tiempo reúne las sensaciones distintas y la infinidad de lo que está entre estos límites (las sensaciones distintas son los límites del intervalo temporal). Sexto, la percepción de la *dos-idad* abstracta (es decir, la percepción exenta de toda cualidad afectiva), es la intuición primordial, el origen de la actividad matemática. Séptimo, esta *dos-idad* engendra por iteración la multiplicidad del mundo de la representación y del devenir, los enteros naturales y los números ordinales finitos. Octavo, la intuición del continuo es posible porque la segunda parte de la *dos-idad* presupone el recuerdo de la primera, ambas unidades se sostienen o contienen mutuamente. Finalmente, la reflexión permite la introducción del intelecto que separa y con él la individuación.

Esta concepción del nacimiento de las matemáticas es metafísica o si se quiere metafísicamente rara, sin conexión con el pensamiento occidental, y eso puede explicar que incluso algunos de los que ven el intuicionismo brouweriano con simpatía no quieran retener sino los aspectos lógicos de su doctrina desarrollados en gran parte por sus discípulos. Como hecho curioso, quisiera hacer notar que varias páginas del artículo «Filosofía, conciencia y matemáticas», capitales para entender a Brouwer, fueron dejadas de lado en la edición hecha por Putnam y Benacerraf en el volumen colectivo *Filosofía de las matemáticas,* como si la metafísica fuera un equipaje inútil para el profesional. Recientemente, en algunos textos anglosajones (por ejemplo en los de M. Dummett), se considera el intuicionismo casi únicamente desde un punto de vista lógico: lo esencial de la discusión actual ha llegado a ser *la revisión* de las leyes de base de la lógica. Pero la comprensión de la metafísica de Brouwer permite apreciar mejor lo que quiso hacer, así como su comportamiento dentro y fuera de las matemáticas; de manera más específica, como ya lo veremos, permite elucidar malentendidos acerca de su supuesto solipsismo o subjetivismo. La obra de Brouwer muestra que armonizó las matemáticas con su metafísica.

Muchas veces se puede distinguir nítidamente entre las creencias no científicas que han dado origen a una hipótesis o a un método, y el resultado científico positivo. Si la ciencia es una colección de resultados, éstos pueden utilizarse sin que nos preocupemos de su génesis; pero si la ciencia es, como la filosofía, una búsqueda de inteligibilidad, entonces el aparato metafísico es indispensable. De todas maneras la metafísica siempre encontrará una justificación suficiente en el hecho que, en todo momento, el número de problemas que nos intereresan, y sobre los cuales no estamos dispuestos a abandonar la meditación, es superior al número de problemas resolubles por un algoritmo eficaz.

5. Intuición y construcción

No hay que ver en la intuición o en la construcción algo místico porque es, en las palabras de Arend Heyting, «la facultad de considerar distintamente algunos conceptos y conclusiones que intervienen normalmente en nuestros pensamientos habituales.» La idea de construcción viene de las operaciones de la geometría como aquéllas efectuadas con regla y compás por los geómetras de la Antigüedad: se dibujan figuras y se buscan enseguida las propiedades significativas. Piénsese por ejemplo en el método exhaustivo empleado por Arquímides para medir la longitud de la circunferencia.

Recordemos que para los geómetras de la Antigüedad la construcción no es criterio de existencia, contrario a lo que constatamos hoy. Desde la Antigüedad los procedimientos constructivos por excelencia son los algoritmos. Una cosa es demostrar la existencia pura de un objeto y otra, distinta, es construir, dar teoremas que muestran cómo se obtienen los objetos. Para Brouwer, la intuición no es exactamente lo mismo que la aplicación de un algoritmo porque lo último puede hacerse mecánicamente, mientras que la intuición exige la comprensión. Jean Largeault se dio cuenta de algo importante, que la paradoja de Brouwer consiste en haber querido unificar, bajo el nombre de intuición, el análisis del geómetra y la síntesis demostrativa o algebraica, sometiendo la generatividad formal de esta última a criterios de visión directa, gracias a los ojos del espíritu.

Sin construcción efectiva, el concepto de existencia es absurdo. La teoría del conocimiento de Brouwer tiene elementos que nos recuerdan el empirismo, la verdad baja del pedestal metafísico al epistemológico: la verdad es la verificación, claro que esta verificación es racional en el caso de Brouwer. «Las únicas verdades que existen, dice el matemático, son aquellas de las cuales hemos tenido la experiencia» (Brouwer). Así Brouwer acepta, porque se lo puede construir intuitivamente, el número ordinal infinito más pequeño, ω. Este número es numerable. Los conjuntos de la misma potencia que el número ordinal ω son numerablemente infinitos y su potencia es el Aleph0, la potencia infinita más pequeña. Esta es la unica potencia infinita admitida por los intuicionistas. Pero el concepto de «número ordinal numerablemente infinito» no da el derecho de crear el conjunto de todos los números ordinales numerablemente infinitos, este último no tiene ningún significado claro. Se sigue que el Aleph1 no tiene significación clara, lo que implica a su vez que no se tiene derecho a afirmar que el Aleph1 sea superior al Aleph0. De la imposibilidad de construir un conjunto de números ordinales numerablemente infinitos del cual se pueda probar que tenga una potencia inferior a la del Aleph1 y mayor que la del Aleph0, no se puede inferir que el Aleph1 sea el segundo ordinal infinito más pequeño –la proposición no tiene sentido intuicionista. (Ver Brouwer, «Intuicionismo y formalismo»).

¿Qué contiene exactamente la intuición inteligible según Brouwer? Lo hemos visto al considerar los pre-intuicionistas: inluye cómo especificar una afirmación general, cómo nombrar un elemento de un conjunto, cómo pensar una regla que forme el ente en cuestión. Pero eso no es todo: si los métodos intuicionistas utilizan los conceptos abstractos de predicado, propiedad, prueba, función y especie o clase, entonces estos métodos van más allá de lo intuitivamente evidente. Por la misma razón Hilbert pensaba que la inducción no es intuitivamente evidente. Estas dificultades explican, por lo menos en parte, el sentido del trabajo de un seguidor de Brouwer como Heyting quien en su lógica intuicionista transforma los fundamentos del intuicionismo para asentar la doctrina en una base menos estrecha.

6. La verdad, el tercio excluso y la doble negación

Un objeto matemático existe, según Brouwer, si puede ser construido a partir de la intuición primordal. No basta con que la concepción de un ente matemático esté exenta de contradicción, no basta con que se lo pueda obtener mediante la aplicación de los principios de la lógica tales como la ley del tercero excluído y la doble negación. Por ejemplo, Cantor creía en la realidad objetiva de los números transfinitos y en su ausencia de contradicción. Si es falso que algo no es verdadero, entonces aquello es verdadero según Aristóteles, la lógica clásica bivalente y el sentido común al menos en Occidente (aparentemente en Oriente las cosas no son así). Se trata de la base de la demostración por reducción al absurdo, procedimiento benéfico en la ampliación del dominio de las matemáticas. Sin embargo, uno de los puntos principales de la filosofía de Brouwer es que un argumento por reducción al absurdo no constituye un medio para construir efectivamente la entidad demostrada. Por eso, comenta Brouwer, la física aristotélica que utiliza el tercio excluso no es válida a priori y debe verificarse por la experiencia. Recordemos que Leibniz, entre otros, pensaba que una de las diferencias entre los entes matemáticos y los físicos es que para afirmar la existencia de los primeros es necesario y suficiente que sean no-contadictorios, mientras que los entes físicos necesitan, además, una razón suficiente. Brouwer no aceptaría esta diferencia afirmando que los entes matemáticos necesitan, ellos también, una razón suficiente para existir.

De la falsedad de una proposición que afirme la inexistencia de un objeto no se puede inferir, en lógica brouweriana, que el objeto existe. Lo que Brouwer quiere es poder controlar la existencia que se afirma, por eso el principio del tercero excluido no es problemático cuando se trata del conocimiento de propiedades definidas de colecciones finitas, pero dado que la misma claridad no existe en el dominio de las colecciones infinitas, ahí su uso incontrolado es ilícito. La creencia en la aplicación universal del tercero excluido puede explicarse históricamente en tres pasos: la lógica clásica fue abstraida de las matemáticas de los subconjuntos de un conjunto finito definido, es decir, de un conjunto cuyos elementos se exhiben; luego se le dio a esta lógica una existencia a priori independiente de las matemáticas, y finalmente, de manera ilícita se aplicó esta lógica a las matemáticas de los conjuntos infinitos.

El matemático intuicionista exige que a toda forma discursiva o lingüística corresponda una idea que la conciencia pueda observar. El uso generalizado del tercero excluido presupone erróneamente que toda proposición es necesaria y eternamente verdadera o falsa. Eso presupone erróneamente el carácter completo, acabado y determinado de todos los conceptos y sistemas de conceptos. Brouwer creía en la libertad y en la contingencia de por lo menos algunos de los entes matemáticos. Piénsese por ejemplo en el axioma de elección de Zermelo sugún el cual es siempre posible elegir un elemento simple de cada elemento *M, N, R*... de *T*–donde *T* es un conjunto cuyos elementos son todos conjuntos distintos de 0 y mutuamente disyuntos– y combinar todos los elementos elegidos, *m, n, r...,* en un conjunto *S*1. Brouwer creía también que algunos entes matemáticos, como el infinito potencial, tienen propiedades que evolucionan, por lo que no todo ente tiene un cierto número de propiedades fijas de una vez para siempre.

Lo verdadero es lo verdadero conocido, mientras que para un realista platónico, todo enunciado bien formado es eternamente verdadero o falso. (Recordemos la afirmación de Russell: «Todo lo que se puede descubrir mediante una operación debe existir independientemente de esta operación»). De acuerdo al intuicionista sólo tenemos el derecho de afirmar que hay entes cuando están debidamente construidos, mientras que los que no cumplen con este requisito son seres aparentes, insubstantiales. Según Brouwer, las verdaderas matemáticas son aquéllas que están bien construidas y en ese caso son necesariamente consistentes. Pero podemos preguntarnos ¿por qué lo que está bien construido tiene que ser necesariamente consistente? Nótese que los realistas piensan que el mundo es coherente, y que si hay incoherencias en la ciencia como la dualidad onda-partícula, es porque nos desorientamos. Si lo que está bien construido es necesariamente consistente se entiende que el matemático holandés no haya prestado interés a los teoremas de Gödel, en particular al segundo que afirma que lo que no se puede probar es que un enunciado de una teoría pueda expresar su consistencia. En sentido estricto, desde el punto de vista intuicionista una prueba formal de consistencia está demás. (Schopenhauer: «La prueba interesa menos a los que quieren aprender que a los que buscan la disputa». Esta certera observación, por lo menos en lo que respecta a la prueba empírica, cae como anillo al dedo para describir tanto a los positivistas como a los popperianos).

7. El continuo y el devenir

Brouwer, como Knonecker, reconoce a los enteros naturales 1, 2, 3... un estatuto especial: su formación es paradigma de la construcción mental. La base es la idea de unidad y el poder operatorio de la mente, lo que nos trae a la mente, entre otros, a Kant y a E. Le Roy. Se puede repetir la unidad y el paso de n a n+1 conduce a los conjuntos infinitos. Desde Cantor y Dedekind los conjuntos se caracterizan por la consideración simultánea de una infinidad de elementos, por lo que el infinito llega a ser concebido como una totalidad acabada en acto. Brouwer modifica la noción de conjunto considerando en cambio los conjuntos en devenir e introduce la noción de secuencia de selección de números racionales. Tal secuencia está formada por un segmento inicial finito y por una regla que indica cómo continuar la secuencia, pero la regla puede dejar espacio para una cierta libertad en la selección de los elementos sucesivos. Brouwer admite sólo aquellas secuencias que están determinadas por su regla y por un número finito de elecciones efectivas. Estas nociones le permitieron probar, contrario a lo que ocurre en las matemáticas clásicas, que toda función completamente definida en un intervalo de números reales es uniformemente continua.

El infinito de Brouwer es un medio en devenir libre; el infinito es sólamente posible como el infinito potencial de Aristóteles, «aquello fuera de lo cual siempre hay algo». Según Brouwer, el número real que es el individuo con el cual se forma el continuo, no tiene que ser definido por un conjunto sino por una secuencia de números naturales. Muestra que muchas veces cuando las proposiciones del análisis tradicional son correctamente interpretadas, ellas conciernen simplemente la totalidad de los números naturales, y cuando eso no ocurre, entonces la noción de secuencia cambia de significado:

ya no se trata de una secuencia determinada por una u otra ley -y esto es muy importante- sino que se trata de una secuencia creada paso a paso gracias a actos libres de selección, por lo que la secuencia permanece en un estado de devenir constante. La secuencia selectiva en devenir representa el continuo, mientras que la secuencia determinada al infinito por una ley representa el número real individual que cae en el continuo.

Reflexionando sobre la inteligibilidad del continuo, Jean Largeault observa lo siguiente: las entidades pueden ubicarse por lo menos en una de estas dos clases: en una de ellas estarían el punto, lo sólido, lo finito, lo discreto, la esencia, lo racional, mientras que en la otra clase encontraríamos el continuo, lo fluido, lo indefinido, la imaginación, la percepción del movimiento, el tiempo que transcurre entre dos instantes, la existencia, etc. La ventaja de la concepción atomista del continuo es que permite aprehender los puntos individuales, pero el precio es elevado ya que se sacrifica la comprensión del flujo del continuo.

8. Intuicionismo y objetividad

No se puede apuntar hacia Brouwer tal cual la batería de objeciones que tradicionalmente se han presentado contra los intuicionistas. Veamos cuáles han sido o podrían haber sido estas objeciones, y si valen o no contra él desde el punto de vista del matemático. La encuesta se complica porque aparentemente, por motivos de polémica o para asegurarse que su originalidad no pasaba desapercibida, Brouwer se habría expresado algunas veces de un modo que no refleja fielmente su pensamiento. Mi trabajo no consiste aquí en decidir, sobre el fondo las cosas, quien, Brouwer o sus críticos, tiene razón. Aunque eso es importante en sí, nos llevaría a una larga discusión que no puede tener lugar en nuestro contexto actual. Me limito entonces a exponer varias críticas importantes y las respuestas que Brouwer puede dar.

1) *El argumento contra el solipsismo.* El solipsismo sería la consecuencia del carácter subjetivo o ideal del conocimiento; los otros yoes de los cuales se tiene una representación son ficciones, seres sin existencia independiente.

Respuesta: Para Brouwer la noción de una realidad en sí, independiente de la conciencia, no construida, no tiene sentido, o bien, en el mejor de los casos, designa la representación de una conciencia universal. ¿Y por qué descartar la posibilidad que en la mente del genio la intuición y la realidad en sí se unan? El componente principal de su metafísica es que existe un solo Yo, una sola conciencia universal. Por eso no puede siquiera decirse que la filosofía de Brouwer sea solipsista. Afirmar, como lo hizo Brouwer en su Tesis de 1907 *Sobre los fundamentos de las matemáticas,* que los otros yoes y que incluso sus propios estados mentales futuros son ficciones, no es declararse solipsista. El solipsismo es la idea que la existencia de las conciencias diferentes de la mía no puede ser demostrada. Se piden argumentos. Así, el solipsismo presupone la multiplicidad de conciencias, pero según Brouwer esta última idea es absurda: la conciencia no es algo que se pueda multiplicar ni dividir. Hemos visto que lo que se experimenta cuando la conciencia está en su última morada es el todo indiferenciado. El intelecto, la razón y el lenguaje, fuente de diferenciación y de individuación, surgen después, por decirlo así, en un segundo momento. Esta metafísica especial de Brouwer neutraliza el uso corriente de los términos «subjetivo» y «objetivo» y los convierte en términos de utilización difícil cuando se habla de su filosofía.

2) *El argumento de la falibilidad del yo individual.* Se rechaza a menudo de manera implícita la existencia del Yo universal brouweriano. El yo no sería otro que el yo particular de cada uno de nosotros. Este yo ya no sería infalible, por lo que habría necesidad de verificar la evidencia interna de las matemáticas intuicionistas con los medios del lenguaje y de la lógica. Ellos permiten el consenso, la verdad intersubjetiva. Puede agregarse la objeción más fuerte que simplemente no existe una facultad intuitiva. Kant criticó a Descartes el hecho de creer en tal facultad. El autor de la *Crítica de la razón pura* afirmó además que la intuición sin conceptos es ciega y que el concepto sin intuición es vacío.

Respuesta: En cuanto a la verificación externa tan apreciada por los científicos: Brouwer no tenía ninguna estima por este tipo de objetividad, el consenso, la verdad intersubjetiva, dependiente del lenguaje y de la multiplicidad de intelectos. Esta objetividad no puede ser sino el ropaje externo de actos conscientes. Por supuesto Brouwer cree en la capacidad intuitiva y rechazaría a su vez la afirmación de Kant, admitiendo que es verdad que el concepto sin intuición es vacío, pero no aceptaría la otra cláusula, que la intuición sin concepto es ciega –ella es lo más lúcido que el hombre puede tener.

3) *El argumento de la subordinación de las verdades intuitivas a las verdades eternas.* Se trata, por ejemplo, de las críticas que Leibniz y Kant dirigieron contra Descartes. Leibniz comienza el conocimiento con las verdades del ser que son para él el principio de no-contradicción y el principio de razón suficiente. Según estos principios, incluso la teología sería lógica, las verdades eternas serían co-substanciales a Dios, y las verdades intuitivas, que deben ser clasificadas con las verdades contingentes, estarían subordinadas a las verdades eternas. La verdad estaría en las cosas antes de estar en la mente.

Respuesta: Quedan algunas dudas para saber si Brouwer niega la existencia de una realidad platónica; sucede que lo que enfatiza no es que ella no exista. En cambio está claro que Brouwer piensa que tal mundo es ininteligible, que no tiene sentido, en la medida en que no es intuitivo o no está bien construido. El comienzo intuicionista del conocimiento transforma la verdad metafísica en verificación intuitiva.

4) *El argumento de la multiplicidad de informes diferentes de la supuesta misma evidencia interna.* ¿Cómo podría el intuicionista, sin el recurso al lenguaje y a la lógica que fijan las ideas para examinarlas, distinguir la mera creencia en el carácter evidente de una introspección de la verdadera evidencia? Considérese por ejemplo la afirmación «el círculo cuadrado no puede existir». Tal proposición es un teorema para Brouwer. Stephen Körner en *The Philosophy of Mathematics* hace notar que Brouwer lo describe como una construcción que consiste en suponer primero que hemos construido un cuadrado que es al mismo tiempo un círculo, para derivar luego una contradicción a partir de la suposición. Pero una supuesta construcción que es además irrealizable es una cosa, y una construcción efectiva es otra. Por otra parte hay intuicionistas, que Körner no menciona, que niegan que una suposición irrealizable tenga sentido para ellos. Así, los informes de la experiencia interna evidente pueden ser diferentes entre intuicionistas, lo que tendería a quitarle a la evidencia su carácter evidente. Uno puede preguntarse, de manera análoga, si no hay incoherencias en los informes que describen las propriedades del Yo universal.

Respuesta: Ninguna, que yo sepa.

Vemos entonces que Brouwer podría responder de manera satisfactoria a casi todas las críticas y, lo que es interesante, manteniendo su punto de vista rígido en un período en que muchos, conscientes de la dificultad de los problemas, son eclécticos.

Excursus. Otra manera de hablar de la objetividad en matemáticas consiste en decir que son objetivas al menos en la medida en que, asociadas a la física matemática o a las ciencias naturales, constituyen una descripción adecuada del mundo sensible. Pero el matemático holandés detestaba (el calificativo no es demasiado fuerte) la aplicación. Las matemáticas son para él un arte espiritual, un fin en sí mismas, el resultado de la creativad del sujeto universal. Por eso además las matemáticas no tienen necesidad de fundamentos. En tanto que «puras», las matemáticas constructivistas son superiores a las clásicas a causa de su mayor evidencia, de su mayor inteligibilidad.

Sin embargo, desde el punto de vista de la aplicabilidad, las matemáticas clásicas, más simples que las intuicionistas, pueden ser preferibles. Weyl menciona en este contexto una razón negativa, el hecho que de todas maneras no podemos tener una evidencia interna de la materia. Hilbert ha mostrado la manera de utilizar las matemáticas clásicas en las ciencias naturales: puede pensarse que algunos entes como los números infinitos no-numerables son objetos ideales, de hecho inexistentes pero útiles para simplificar el cálculo. Pero hay que hacer notar que la estrategia hilbertiana revela una visión positivista de la ciencia. Para un realista, al contrario, es inconcebible tener una teoría física explicativa, es decir, verdadera, cuya parte matemática sea ficticia. La verdad de la teoría física implica la verdad de la parte matemática.

9. Aristóteles, Brouwer y Gödel

El abstraccionismo de Aristóteles puede ser comparado al intuicionismo siguiendo varios criterios, los principales son que tanto en uno como en otro las matemáticas no existen a menos que el intelecto adopte una actitud activa: la mente debe poner mucho de su parte tanto para abstraer como para construir; luego está el problema de la naturaleza y del dominio de validez del tercero excluido. (No puedo hacer justicia aquí a la riqueza de la comparación entre la abstracción y la intuición y me limito a exponer esquemáticamente algunas ideas que me parecen centrales. No retomo el tercero excluido).

Propongo enunciar las tesis de Aristóteles sobre la realidad matemática y sobre la ciencia matemática así: 1) Existe una realidad física cognoscible. 2) Esta realidad posee propiedades de orden matemático. 3) El modo de existencia de la realidad matemática en el interior del mundo físico es la potencia. 4) La realidad matemática no es un conjunto de seres, de propiedades o de relaciones separables –en los hechos– de la realidad física; la primera es separable de esta última solamente en el pensamiento. 5) Nuestro intelecto es capaz de abstraer, de considerar aparte una propiedad o una relación, un aspecto de una substancia natural, y de tratarla como si fuera un ser. La clave de la abstracción se encuentra en este paso de la *propiedad* (en la realidad) al *ser* (en el intelecto). 6) La ciencia matemática es la descripción de la realidad matemática, es decir de la materia inteligible. 7) La materia inteligible es, aunque no lo sea exclusivamente, la cantidad. 8) La cantidad continua es el objeto de la geometría, la cantidad discreta es el objeto de la aritmética. 9) Las matemáticas son verdaderas en la medida en que se aplican con justeza al mundo físico.

Según el estagirita, Platón no se dio cuenta que el conocimiento existe, en parte, porque el intelecto es capaz de abstraer, de considerar aparte en el entendimiento lo que en realidad está unido. Toda substancia se compone de materia y de forma, y es porque las cosas tienen una forma que son cognoscibles. La materia no puede penetrar en nuestro espíritu, mientras que la forma geométrica, la figura y el número que existen *ligadas* a las cosas reales pueden adquirir una existencia *separada* en el entendimiento. La materia inteligible es un substrato universal, una especie de flujo presente en todo. Es una propiedad de la substancia, es por lo tanto algo real. Ahora bien, esta materia inteligible llega a ser concepto en el intelecto, y algunos conceptos son matemáticos (el volumen, la superficie, el punto, etc.). Nótese que según Aristóteles algo, la materia inteligible, puede existir a la vez en el mundo externo al espíritu y en el espíritu: esta es una condición del realismo, mientras que para un idealista como Berkeley si las cualidades secundarias como los colores y los sonidos, e incluso si las cualidades primarias existen en el espíritu, entonces no pueden existir en el mundo exterior, y de ahí sigue erróneamente la conclusión idealista.

El proceso de la abstracción es en parte manufacturado, el entendimiento debe usar su energía, por decirlo así, para arrancar la propiedad, como la circularidad de la luna llena, y transformarla en ser matemático, en círculo, sujeto de la definición exacta que conocemos. La abstracción supone etimológicamente, según los casos, el acto de sacar algo de algo, de suprimir, de sustraer, de privar. Para hacer esto, es fundamental reconocer en Aristóteles su utilización del operador *«en tanto que»:* el matemático y el físico estudian las mismas cosas, pero no las consideran de la misma manera. El físico estudia la luna circular en tanto que objeto material sujeto al movimiento y al tiempo, el matemático estudia el círculo en tanto que objeto ideal desprovisto de movimiento y de duración. Es esta idealización, este paso de la propiedad sensible al ser matemático en el intelecto que da a las matemáticas su aspecto de ficción. El hombre separa con el pensamiento lo separable y lo transforma, lo idealiza, pero no lo inventa, no construye todas sus piezas. Brouwer tampoco cree que el matemático lo inventa o lo construye todo, él hace algo a partir de algo, aunque la base de la construcción no es una cosa sensible exterior al entendimiento sino un acto psíquico. Por eso no hay que dejarse desorientar por el hecho que a Brouwer le gusta describir las matemáticas como la actividad de un «sujeto creador».

En resumen, Brouwer suspendería el juicio en lo que respecta a las tesis aristotélicas 1, 2, 3 y 4, y no presentaría objeciones a las tesis 5, 6 y 7. La reducción de la geometría a la aritmética por parte de Brouwer hace que no sea fácil formarse una idea segura de lo que pensaría sobre la tesis 8. Luego Brouwer ve las matemáticas como un arte, un fin en sí, por eso rechazaría la tesis 9. Por otra parte, como lo hemos visto antes, para ambos sólo el infinito potencial es posible. Finalmente hay más participación activa del entendimiento según Brouwer que según Aristóteles.

Es acaso necesario recordarlo: Brouwer está lejos de ser popular fuera de la filosofía de las matemáticas, e incluso ahí es un marginal. Pero el destino hizo que sus ideas fueran entendidas y vistas con simpatía por algunos grandes científicos como Kurt Gödel o Hermann Weyl. Por supuesto el gran lógico no puede aceptar tal cual el intuicionismo porque un principio estricto de verificación es incompatible con el platonismo. Gödel reconoce que para Brouwer las matemáticas no son arbitrarias; ¿cómo podrían serlo si expresan la esencia de la mente? Recién lo recordamos: cuando Brouwer dice que los objetos matemáticos son *actos,* que las matemáticas son una creación del espíritu, no quiere decir creación de la nada: la *dos-idad* es el material con el que se obtienen los números mediante la iteración. Según Brouwer, el matemático ni determina ni decide lo que se crea. En vez de hablar de «creación», sería más preciso hablar de «fabricación», dice Gödel, y en ese sentido el trabajo del matemático es creativo como una constructora de automóviles lo es, haciendo algo a partir de algo (el ejemplo es de Gödel). Uno puede preguntarse si los críticos del intuicionismo que argumentan contra Brouwer han entendido bien lo que no pasó desapercibido a Gödel, es decir, que Brouwer hace lo posible por evitar lo arbitrario y que su sujeto pretende ser universal.

Los matemáticos están de acuerdo para reconocer que en su ciencia hay pruebas que tienen un carácter concluyente que manifiesta la objetividad y la universalidad de las matemáticas. Ahora bien, esta objetividad, ¿es solamente un consenso, o va más allá par alcanzar la realidad en si? Para Gödel como para Brouwer, habría que decir que las pruebas (con las restricciones necesarias en el caso de Brouwer) reflejan la realidad en sí. Pero hay una diferencia importante: según el platonismo de Gödel, podemos aplicar el principio del tercio excluso porque en el mundo de las Ideas los objetos y las propiedades están fijas, por lo que toda proposición, o bien es verdadera, o bien su negación lo es.

Una de las ideas de Gödel es que la intuición capta entes que *están hechos* y en consecuencia tiene que existir en nuestro cerebro una estructura capaz de aprehender los entes matemáticos *acabados*. Encontramos aquí otra diferencia con respecto a Brouwer: para el intuicionista holandés el mundo matemático está en devenir y los entes que todavía no existen o que están en proceso de existir no tienen todavía todas las propiedades de manera fija, hay lugar para la contingencia, y por eso el tercero excluido debe manejarse cuidadosamente. Como lo dice en su artículo de 1908 sobre el carácter indigno de confianza de los principios de la lógica, la utilización sin precaución del tercero excluido presupone de manera ilegítima que todos los problemas matemáticos tienen solución. En cambio el mundo platónico está regido por la necesidad que hace que todo ente sea de una vez para siempre de una manera o de otra. Por eso Gödel cree que para cada concepto intuitivo vago existe un concepto eterno y exacto, y los obstáculos para captarlo con esas propiedades se encuentran en nosotros, no en el concepto.

Lo anterior muestra claramente una vez más la influencia de la metafísica en la manera de concebir y de hacer matemáticas: el centro de la discusión aquí es el rol del devenir y del tiempo. Ambos están ausentes en el mundo platónico y presentes en el mundo de la conciencia brouweriano. Concluyamos entonces que Brouwer es tan objetivo como su visión metafísica se lo permite puesto que el sujeto creador es universal y no crea las matemáticas de la nada. Luego se ve en Gödel una diferencia más nítida entre lo epistemológico y lo ontológico: el devenir, los esfuerzos por llegar a la verdad, la construcción, la existencia de conceptos vagos, etc. deben ponerse al lado del sujeto del conocimiento que vive en el mundo sensible, mientras que la verdad habita en el mundo de las Ideas.

9. Conclusión: hacia la construcción de un puente entre la mente y la extensión

1. Hay que admitir con el intuicionista que nuestras capacidades son limitadas y que a veces se considera como conocimiento la sombra de la verdad, meros símbolos

vacíos de sentido. De ahí el interés de la intuición como fuente de verdad y como medio de verificación. Pero hay que admitir también, esta vez con el deductivista, que no hay conocimiento *científico* sin un formalismo: éste permite fijar las ideas para reproducirlas, comunicarlas y adicionarlas; un formalismo está dotado de un poder deductivo, el cual, al desarrollar una intuición, hace que sea más apta a la verificación para poder separar lo verdadero de la ilusión de la verdad. Los símbolos pueden en algunos casos ayudarnos a vislumbrar una realidad como la dimensión de lo infinitamente grande o de lo infinitamente pequeño, que estará para siempre más allá de los límites de la intuición.

2. Entre las cosas más importantes que habría que hacer para responder a las exigencias legítimas de los intuicionistas y de sus críticos está la construcción de una filosofía de la naturaleza que tienda un puente entre la mente y la extensión. No considero que esta tarea sea imposible.

3. Si el conocimiento es, por lo menos en parte, la manifestación del inconsciente, se entiende que los creadores en las ciencias y en las artes describan el acto creador como espontáneo e involuntario, una iluminación repentina durante la cual el sujeto no parece ser otra cosa que el lugar de la manifestación. Platón: el conocimiento es reminiscencia, y la reminiscencia es una forma de intuición. La visión platónica tiene méritos *ontológicos* innegables. Cuando se demuestra, se demuestra *algo,* un contenido, un hecho matemático. Ninguna doctrina explica mejor que el platonismo la fuerza con que se nos impone la verdad, la coherencia y la convergencia del conocimiento matemático. Pero el platonismo es *epistemológicamente* incompleto porque como lo muestra la historia de las ciencias y en particular la historia de las matemáticas, se descubre inventando. El intelecto necesita ponerse en un estado especial si quiere recibir algo. Y no significa en absoluto rebajar el valor del intuicionismo si se lo considera como el complemento epistemológico necesario del platonismo.

* * *

Bibliografía

L. E. J. Brouwer, *Collected Works,* 1, North-Holland, 1975.

J. M. Beeson, *Foundations of Constructive Mathematics,* Springer, 1985.

E. Bishop, *Foundations of Constructive Analysis,* McGraw-Hill, 1967.

C. P. Bruter, *De l'intuition a la controverse,* Blanchard, París, 1987.

D. van Dalen, editor, *Brouwer's Cambridge Lectures on Intuitionism,* Cambridge, 1981.

M. Espinoza, *Les mathématiques et le monde sensible,* Ellipses, París, 1997.

A. Heyting, *Intuitionism, An Introduction,* North-Holland, reedición 1971.

D. Jacquette (editor), *Philosophy of Mathematics,* Blackwell, 2002.

St. C. Kleene, *Mathematical Logic,* John Wiley & Sons, Nueva York, 1967.

St. Körner, *The Philosophy of Mathematics,* Dover, Nueva York, 1960.

J. Largeault, *Intuition et intuitionisme,* Vrin, París, 1993.

J. Largeault, editor, *Intuitionisme et théorie de la démonstration,* Vrin, París, 1992

J. de Lorenzo, *La matemática: de sus fundamentos y crisis,* Tecnos, Madrid, 1988.

R. Torretti, *El paraíso de Cantor*, Editorial Universitaria, Universidad Nacional Andrés Bello, Santiago de Chile, 1998.

A. Troelstra, D. van Dalen, eds., *The L.E.J. Brouwer Centenary Symposium* (junio 1981), North-Holland, 1982.

A. Troelstra, *Principles of Intuitionism,* Springer, 1969.

A. Troelstra, *Constructivism in Mathematics, An Introduction,* I y II, North-Holland, 1988.

H. Wang, *A Logical Journey. From Gödel to Philosophy,* M.I.T. Press, Cambridge, Mass., 1996.

H. Weyl, *The Continuum. A Critical Examination of the Foundation of Analysis,* trad. al inglés por S. Pollard y Th. Bole, Dover, Nueva York, ed. 1994.

H. Weyl, *Philosophy of Mathematics and Natural Science,* Princeton University Press, 1949.

* * *

Miguel Espinoza
Département de Philosophie. Université de Strasbourg
14, rue Descartes. 67084 Strasbourg Cedex. France