LA SÍNTESIS *A PRIORI* Y LAS GEOMETRÍAS NO EUCLÍDEAS

Ricardo Parellada. Universidad Europea de Madrid

Resumen: Se exponen tres formas de interpretar el carácter analítico o sintético, en términos kantianos, de las geometrías no euclídeas, que en todos los casos se conciben como estructuras matemáticas aprióricas. Y se sugiere que lo que hace inviable la teoría de Kant del espacio como forma de la sensibilidad del hombre no es su reflexión sobre la naturaleza de la geometría, sino la aplicación física de la geometría no euclídea.

Abstract: The author offers three interpretations of the analytic or synthetic character of non-Euclidean geometries, in all cases conceived as *a priori* mathematical structures. He further suggests that the present implausibility of the Kantian theory of space as the form of human sensibility stems not so much from Kant's reflection on the nature of geometry, as from the physical application of non-Euclidean geometry.

La teoría de Kant del espacio y el tiempo como formas *a priori* de la sensibilidad del hombre depende en gran medida de su concepción de la geometría euclídea como disciplina sintética *a priori*. La aparición de las primeras geometrías no euclídeas en el primer tercio del siglo XIX, que se basan en la negación del quinto postulado de Euclides y la afirmación de los otros cuatro, constituye un grave desafío para la teoría kantiana y pone claramente en cuestión, por lo pronto, el papel de la síntesis espacial y la intuición en las distintas versiones del postulado de las paralelas. Pero es la generalización llevada a cabo por Riemann en 1854 de la idea de espacio a continuos de más dimensiones mediante las nociones de métrica y curvatura la que puso de manifiesto que las geometrías no euclídeas suponen la introducción de métricas distintas de la euclídea, que conllevan la curvatura del espacio. [1]

Así pues, para ponderar el valor de la concepción kantiana de la síntesis espacial ante las geometrías no euclídeas es preciso contraponer esta teoría y las nociones fundamentales de métrica y curvatura de la geometría diferencial desarrollada a partir de las ideas de Riemann. El objetivo de este trabajo es exponer los argumentos según los cuales la teoría kantiana no puede dar cuenta de la multiplicidad de estructuras espaciales, pero también el punto de vista opuesto, según el cual la síntesis espacial se encuentra a la base de la métrica más básica, deformando la cual se introducen las demás. Tras abordar la cuestión en el terreno puramente matemático, se apunta la necesidad de examinar también desde estas dos perspectivas la aplicación física de las estructuras geométricas. Es este segundo terreno, objeto de otro trabajo, el que permite formular una tesis clara sobre la inviabilidad de la teoría kantiana de la idealidad transcendental del espacio ante las estructuras espaciales no euclídeas y su aplicación física.

[1] Wiredu, J. E., «Kant's Synthetic A priori in Geometry and the Rise of Non-Euclidean Geometries», en: *Kant-Studien* 61 (1970), 5-27.

Las superficies de dos dimensiones son el caso más conveniente para examinar la relación entre las representaciones ostensivas en el espacio y sus expresiones analíticas. El cilindro, el cono, la esfera, el elipsoide, el toro y la silla de montar se construyen e intuyen fácilmente en el espacio. De acuerdo con la geometría analítica 000instaurada por Descartes, se determinan sus expresiones mediante coordenadas cartesianas, que se generalizan inmediatamente a otros sistemas de coordenadas, como las polares, en armonía con la intuición del espacio.

La visualización más básica y más sencilla de la curvatura de una línea tiene lugar en el caso de la circunferencia, en que corresponde a la inversa del radio: $k = 1/r$. Así, una circunferencia de radio 1 tendrá una curvatura 1, una de radio ½ una curvatura 2 y una de radio 2 curvatura ½. Cuanto mayor es la circunferencia, menor es su curvatura, de acuerdo con la intuición más elemental de curvatura, que se generaliza inmediatamente a otras líneas: en la elipse, por ejemplo, la curvatura es máxima en los puntos que determinan el eje mayor y mínima en los que determinan el menor.

La curvatura de una superficie en una determinada dirección es la de la curva que forma sobre la superficie el plano que la corta perpendicularmente en esa dirección. Y resulta que hay siempre dos direcciones ortogonales, llamadas direcciones principales, en las que la curvatura toma valores máximo y mínimo. Se llama *curvatura gaussiana* de la superficie en un punto al producto de las dos curvaturas principales $K = k_1k_2$. Por ejemplo, en la esfera la curvatura es en todos sus puntos $K = 1/r^2$, pues la curvatura de todos los círculos máximos es $1/r$. Y se ve bien que en los puntos de un toro o donut más cercanos a su eje de revolución y en la silla de montar unas líneas se curvan en una dirección y otras en otra, por lo que se asigna distinto signo a su curvatura y la superficie tiene curvatura gaussiana negativa.

Hasta aquí el tratamiento de las superficies es extrínseco. Las superficies se pueden expresar también mediante coordenadas intrínsecas o gaussianas (u,v), trazadas sobre la superficie, en función de las cuales el elemento diferencial de distancia viene dado por $ds^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$, la primera forma fundamental o forma métrica de la superficie. Los factores E, F y G son función de las coordenadas (u,v) y determinan completamente la geometría intrínseca de la superficie.[2] Gauss demostró que la curvatura de la superficie viene dada por estos factores, es independiente de un cambio de coordenadas y es invariante bajo transformaciones isométricas, es decir, que conservan la función distancia.

Así, por ejemplo, doblando el plano sin estirarlo o encogerlo se puede formar un cono o un cilindro, y las tres superficies tienen curvatura nula. Esto corresponde al tratamiento anterior, pues al cortar el cilindro con un plano perpendicular a su eje de revolución se obtiene una circunferencia de curvatura $1/r$ y al cortarlo en paralelo una recta, de curvatura nula, de manera que el producto de estas curvaturas principales da curvatura nula para la superficie. Asimismo, los cortes del cono que pasan por su eje de revolución son líneas rectas y esta superficie tiene curvatura nula. En esta invarianza de la curvatura gaussiana consiste el *theorema egregium* de Gauss, que da cuenta también del fenómeno elemental de que no se pueda extender un plano sobre una esfera sin estirarlo, es decir, sin cambiar sus relaciones métricas, pues la esfera tiene diferente curvatura que el plano.

---

[2] En la presentación de las nociones de geometría diferencial me apoyo en Faber, R., *Differential Geometry and Relativity Theory. An Introduction*, New York, Dekker, 1983.

Lo decisivo para la contraposición con la teoría kantiana de la síntesis espacial es que las superficies elementales de dos dimensiones admiten, tanto su construcción ostensiva sintética *a priori* en el espacio que intuimos, el de tres dimensiones, como un tratamiento intrínseco mediante relaciones métricas diferentes a las euclídeas y que arrojan curvatura positiva en la esfera y el elipsoide y negativa en el toro y la silla de montar. Desde el punto de vista extrínseco, estas superficies se construyen en el espacio euclídeo de tres dimensiones, pero desde el punto de vista intrínseco se trata de continuos bidimensionales *con relaciones métricas y curvatura no euclídeas.* Hasta aquí parece que la imaginación transcendental kantiana, que es la encargada de llevar a cabo las demostraciones ostensivas en la intuición pura del espacio, es decir, en el espacio euclídeo tridimensional, y mantiene bien derechos, por ejemplo, los ejes cartesianos, no puede tener nada que objetar.

La aceleración de una curva sobre una superficie en un punto se puede descomponer en una componente normal al plano tangente a la superficie en ese punto y otra componente perpendicular a la velocidad y la aceleración normal, esto es, hacia la derecha o la izquierda. La primera componente determina la curvatura normal de esa trayectoria sobre la superficie y la segunda su curvatura geodésica, que mide su desviación hacia los lados. Así, si dejamos caer una bola sobre una esfera, empezará a deslizarse por un círculo máximo y sólo si, por ejemplo, la bola es metálica y está sometida, no sólo a la aceleración de la gravedad, sino también a una aceleración lateral producida por un imán, se desviará su trayectoria de la del círculo máximo.

La aceleración lateral determina la curvatura geodésica de la trayectoria, y se llama *líneas geodésicas* a las que no tienen curvatura geodésica. Son, por así decir, las trayectorias naturales sobre la superficie, que no se van para los lados, y constituyen las líneas localmente más cortas entre dos puntos. Las geodésicas sobre el plano son líneas rectas, sobre la esfera círculos máximos y sobre el cilindro las circunferencias determinadas por planos perpendiculares al eje, las rectas dadas por planos paralelos a éste y las hélices que suben o bajan por el cilindro. La trayectoria más corta entre dos puntos está siempre sobre una geodésica, pero la inversa no es cierta, como se ve por ejemplo en la esfera, pues se puede ir del ecuador al polo norte por un círculo máximo pasando o sin pasar por el polo sur. Ambas trayectorias son geodésicas, pero sólo la segunda es la más corta. De la misma forma, en un cilindro dos puntos sobre la misma vertical están conectados geodésicamente por una recta y por infinitas hélices. Por supuesto, las geodésicas se determinan analíticamente mediante coordenadas intrínsecas y no dependen de la elección de éstas.

La aportación fundamental de Riemann es extender el tratamiento intrínseco gaussiano de las superficies de dos dimensiones a multiplicidades continuas o espacios abstractos de más dimensiones. Exactamente igual que en dos dimensiones, mediante determinadas funciones g_{ij} de las coordenadas se puede definir una métrica en n dimensiones, que con la convención de la suma de Einstein se expresa $ds^2 = g_{ij}\, dx_i\, dx_j$, donde $i, j = 1, \ldots, n$. Riemann generalizó también la curvatura de Gauss y demostró que la métrica generalizada determina también, de una forma análoga, un escalar invariante bajo transformaciones de coordenadas, que se llama curvatura de Riemann del espacio abstracto. Asimismo, las expresiones analíticas permiten generalizar inmediatamente las líneas geodésicas a continuos de más dimensiones.

El tratamiento matemático de todas estas cuestiones es, ciertamente, mucho más complicado, en particular, por ejemplo, las propiedades analíticas que pueden o deben cumplir las funciones g_{ij} y sus derivadas. Pero, de la misma forma que Kant, como también

Leibniz, utiliza hechos matemáticos muy sencillos para disertar sobre los distintos géneros de necesidad o la diferenciación entre nuestras facultades cognoscitivas, quizá estas nociones elementales de geometría diferencial, que Kant no conoció, sirvan para reflexionar sobre su compatibilidad o incompatibilidad con la teoría kantiana de la construcción sintética espacial.

Las superficies o espacios bidimensionales sencillos admiten tratamientos extrínseco e intrínseco, pero los espacios de más dimensiones sólo admiten un tratamiento geométrico intrínseco. Disponemos de cuantas dimensiones numéricas queramos para llevar a cabo un tratamiento analítico análogo de las variedades, multiplicidades o espacios abstractos de Riemann, pero carecemos de una cuarta o quinta dimensión intuitiva o propiamente espacial para contemplarlos desde fuera. Desde un punto de vista matemático está cuestión quizá carezca de interés, pero desde una perspectiva kantiana, que se trata de ver si puede funcionar, quizá se pueda responsabilizar de ello al freno sintético que impone la tridimensionalidad del espacio, ejemplo repetidamente aducido por Kant de juicio sintético *a priori*. Las métricas no euclídeas y las curvaturas positivas y negativas en dos dimensiones parecen asimilables por la teoría kantiana del espacio, mas ¿qué relación hay entre una métrica no euclídea y una curvatura no nula en tres dimensiones y la intuición pura del espacio en que según Kant descansan las proposiciones sintéticas de la geometría euclídea elemental?

En principio, se puede sostener que el descubrimiento de las geometrías no euclídeas y la generalización de la noción de espacio refutan lisa y llanamente la teoría kantiana. No hay conocimiento sintético *a priori* del espacio, pues el espacio euclídeo considerado por Kant no es más que un caso particular entre las múltiples estructuras métricas que puede adoptar un continuo tridimensional, cuyo tratamiento exhaustivo corresponde a la geometría diferencial, que no necesita apelar a ninguna misteriosa intuición pura del espacio. La necesidad propia de este tratamiento es la necesidad analítica matemática de los números y sus manipulaciones algebraicas y diferenciales, completamente ajena a toda construcción espacial.

Según esta lectura analítica, la síntesis espacial kantiana se disuelve en las formas y tensores métricos y en las curvaturas de Gauss y Riemann, con lo que se constata de paso la índole absolutamente primitiva de la concepción kantiana de la analiticidad, que remite siempre a *conceptos discursivos* y no tiene relevancia alguna, no ya para la matemática de los siglos XIX y XX, sino tampoco para la geometría analítica de Descartes y el análisis infinitesimal de Newton y Leibniz, anteriores al filósofo de Königsberg. Y la disolución de la síntesis espacial en la geometría analítica o numérica en el más amplio sentido es independiente de una eventual consideración inspirada en Kant de la relación entre el análisis y el tiempo, y poco importa que desde la perspectiva kantiana más canónica esta geometría no sea propiamente analítica, puesto que no se basa en el análisis puramente lógico de los conceptos de línea, superficie o diferencial, sino en procedimientos simbólicos fundados en la intuición del tiempo.

Desde este punto de vista se podría dar la razón a Leibniz frente a Kant. A decir de Leibniz, la necesidad de las proposiciones geométricas, en particular de los axiomas de Euclides, no puede descansar en ningún sentido en la imaginación. Los axiomas sobre la línea recta parecen descansar en ella, pero, al no admitir ningún género de necesidad distinto de la necesidad lógica, Leibniz concluía que la noción de línea recta no estaba suficientemente analizada.[3] En cambio, Kant niega la posibilidad de un tratamiento puramente lógico o conceptual de los términos y las proposiciones más elementales de la geometría y sostiene que, por ejemplo, la necesidad de los axiomas sobre la recta y la imposibilidad de que más de tres rectas se corten perpendicularmente, esto es, la tridimensionalidad del espacio, la proporciona la imaginación transcendental al trazarlas de una forma completamente *a priori*.

De acuerdo con esta lectura analítica, la generalización de la noción de espacio introducida por Riemann habría permitido aclarar la confusión de las nociones geométricas elementales como la de línea recta, o más bien su indistinción, si utilizamos la terminología de Leibniz.[4] Al explicitar las relaciones métricas propias del espacio euclídeo frente a otras posibles, se habría dado con el fundamento analítico de la necesidad de los axiomas de Euclides, ante el que se disipa la ambigüedad de las nociones y proposiciones geométricas elementales, que llevó a Kant a postular un extraño fundamento de su necesidad: la intuición pura. La noción de línea recta es solidaria de la estructura del espacio, sus propiedades son perfectamente inambiguas en el espacio euclídeo y se generaliza de manera natural a las líneas geodésicas en los espacios no euclídeos. Cuando se conocen las propiedades métricas y analíticas del espacio, es claro el comportamiento de las rectas, las paralelas y las geodésicas y no tiene sentido la cuestión de qué se puede sintetizar *a priori*, intuir o dejar de intuir.

Ahora bien, desde la teoría kantiana parece posible alegar, con todo, que el lugar de la síntesis *a priori* y la necesidad intuitiva no está *después*, cuando éstas ya no son necesarias, como señala acertadamente la lectura analítica, sino *antes* de las determinaciones métricas. Lo que la generalización de la noción de espacio habría confirmado es más bien la naturaleza sintética *a priori* de la geometría euclídea elemental, única en la que tenemos conocimiento constructivo y necesario independiente de toda consideración discursiva y numérica, pues en todos los demás casos es preciso, como ha puesto de manifiesto Riemann, deformar analítica o numéricamente el espacio y las distancias sintéticas intuitivas y naturales recogidas en el teorema de Pitágoras.

La cuestión es si el espacio plano tridimensional, es decir, el espacio euclídeo, tiene o no algún género de prioridad sobre sus generalizaciones analíticas. Desde la perspectiva kantiana, el conocimiento sintético *a priori* en el espacio euclídeo sólo puede descansar en la intuición pura del espacio, en la que la imaginación transcendental traza completamente *a priori* tres rectas perfectamente rectas y perpendiculares, sólo tres, sobre las que se pueden situar después los números reales. La intuición pura es la condición de la posibilidad de los ejes cartesianos y de la geometría analítica de Descartes. Como la geometría diferencial es una generalización de ella mediante las nociones analíticas o numéricas de métrica y curvatura, su desarrollo es irrelevante para la teoría kantiana del espacio, cuyos argumentos valen o no valen por otras razones.

A mi juicio, esta lectura kantiana conlleva una determinada interpretación de los postulados de Euclides. Según las exposiciones habituales de las geometrías euclídea y no euclídeas, Euclides no hace uso del postulado de las paralelas al probar las veintiocho primeras proposiciones del primer libro de los *Elementos*, por lo que estas proposiciones son independientes de ese postulado y forman parte de la geometría absoluta o neutra

---

[3] Leibniz, *Nouveaux essais sur l'entendement humain*, IV, XII, § 6 (Gerhardt Phil. V, 432).

[4] *Meditationes de cognitione, veritate et ideis* (Gerhardt Phil. IV, 422-426).

común a las de Euclides y Lobachevski. Los dos primeros postulados, referidos a las líneas rectas, son válidos, tanto para las rectas euclídeas, como para las también así llamadas de Lobachevski, mientras que en la geometría elíptica es necesario modificar el segundo para que unas curiosísimas líneas rectas puedan volver sobre sí mismas. En cambio, en el uso que hace Kant de la geometría euclídea no es posible hacer sitio a estas consideraciones.

Los juicios sintéticos *a priori* geométricos de Kant son las proposiciones de la geometría euclídea. Kant pone como ejemplos que dos puntos determinan una recta única, que la recta es la distancia más corta entre dos puntos, que el bilátero plano es imposible, que los ángulos de un triángulo suman dos rectos, y resultaría completamente ajeno a Kant pretender dar cabida a la interpretación no euclídea de los referidos a las líneas rectas. A mi juicio, Kant hace de hecho descansar la métrica euclídea en la intuición pura, y al no considerar si las veintiocho primeras demostraciones de Euclides hacen o no uso del quinto postulado, interpreta los axiomas sobre las rectas en un sentido restringido y exclusivamente euclídeo, según el cual conllevan la fijación de la métrica, por lo que no le resulta necesario un tratamiento separado de las paralelas.

Según esta lectura kantiana, habría una diferencia esencial entre las métricas no euclídeas y la curvatura del espacio en dos y en más dimensiones. Como hemos visto, el tratamiento intrínseco de las superficies no euclídeas parece asimilable por la teoría kantiana. Sea o no posible desconectar la tercera dimensión para intentar intuirlas en dos dimensiones, la inmersión de las superficies en el espacio, al menos en los casos más sencillos, permite visualizar el comportamiento de las métricas no euclídeas en dos dimensiones, pero la patente tridimensionalidad de la intuición del espacio impone una limitación sintética que impide hacer lo mismo en más dimensiones. Al comprender e intuir el funcionamiento de la definición de una métrica y una curvatura en dos dimensiones, se comprende muy bien el funcionamiento analítico de tal procedimiento en más dimensiones, que determina la estructura de los espacios abstractos. Mas, desde este punto de vista, no se puede pretender que con ello se deforma también la intuición del espacio, que no sabe de números.

De las rectas, círculos, polígonos y poliedros tenemos conocimiento *sintético*, completamente distinto a los conceptos y los números, y los desplegamos completamente *a priori*, sin apoyarnos en ningún sentido en consideraciones empíricas o inductivas. Tal cosa sólo es posible, como muestra la *Crítica de la razón pura*, por el concurso de la intuición pura del espacio, aunque podamos expresar eso mismo también mediante los instrumentos analíticos adecuados. Así pues, siempre según esta lectura kantiana y en contra de lo que pretende la interpretación analítica, la generalización de la noción de espacio propia de la geometría diferencial habría permitido aclarar más bien, frente a Leibniz, el papel de la intuición como sostén del espacio plano tridimensional y fundamento de la métrica más básica, presupuesta por las demás. Lo cual ya fue detectado por Kant y permite, una vez claras las nociones de métrica y curvatura, desligar el tratamiento de la relación entre intuición y geometría de la discusión sobre la posibilidad de intuir o no la intersección de las rectas convergentes.

Sin embargo, desde otra perspectiva kantiana quizá resulte razonable examinar la posibilidad de una cierta construcción de lo no euclídeo también en tres dimensiones, en lugar de considerarlo puramente analítico. Una vez que se comprende de forma extrínseca e intrínseca lo que supone la definición de una métrica y una curvatura no euclídeas en dos dimensiones, ¿por qué no reconocer una cierta continuidad entre las determinaciones analíticas y su visualización, trasladable en cierta medida a tres dimensiones?

Al perseguir esta idea, Roberto Torretti señala la diferencia entre la presentación de la síntesis espacial, por un lado en la *Dissertatio* y en la Estética transcendental, y por otro en la Deducción transcendental de las categorías.[5] En el primer caso, la propia intuición espacial parece ofrecer ya todos los rasgos del espacio euclídeo o plano, y resultaría artificial pretender compatibilizarla con una construcción sintética de lo no euclídeo. Mas en el segundo caso, en ambas versiones de la Deducción, Kant matiza mucho más las tareas de la sensibilidad, la imaginación y el entendimiento. Como señala Torretti, es claro que Kant no tematiza realmente la posibilidad de la construcción no euclídea, pero el papel de la sensibilidad es aquí mucho más pasivo y se limita a ofrecer a la imaginación transcendental, facultad intermedia entre ella y el entendimiento, la mera multiplicidad. Esta determinación de la multiplicidad sensible informe, obrada por la imaginación por encargo del entendimiento, se puede relacionar en alguna medida, desde el desarrollo de la geometría, con la introducción de una métrica mediante la definición del elemento diferencial de distancia con funciones de las coordenadas intrínsecas.

Ciertamente, podemos desplegar en el espacio las superficies más sencillas de métrica no euclídea. Mas al transitar del tratamiento tridimensional al bidimensional, al pasar de contemplar la curvatura desde fuera mediante coordenadas extrínsecas a caracterizarla desde dentro mediante coordenadas intrínsecas, nos hacemos una idea cabal de lo que significa, por ejemplo, estirar las relaciones métricas planas sobre la esfera. Y se comprende que la primera forma fundamental de la superficie, que expresa el elemento diferencial de distancia mediante coordenadas intrínsecas, determina completamente la geometría intrínseca de la superficie, incluyendo su curvatura. ¿No conlleva este tránsito vislumbrar en alguna medida sintética o intuitiva los efectos de las determinaciones métricas? No podemos desplegar las determinaciones métricas en la intuición tan diáfanamente como desplegamos, por ejemplo, los cinco poliedros regulares, pero quizá se pueda decir que el tránsito entre los tratamientos extrínseco e intrínseco de lo no euclídeo en dos dimensiones sí nos permite comenzar a intuir espacialmente lo que supone cambiar la métrica y la curvatura del espacio. Y esta intuición incipiente de lo no euclídeo, aunque sólo sea local, es la que se necesita, en primer lugar, para poder quebrar la distinción radical entre la constructividad de lo euclídeo y el carácter exclusivamente analítico de lo no euclídeo y, en segundo lugar, para reflexionar sobre la construcción no euclídea tridimensional.

Así, la multiplicidad ofrecida por la sensibilidad en tres dimensiones admitiría distintas determinaciones no meramente numéricas, sino propiamente espaciales, aunque no dispongamos de una cuarta dimensión para contemplarla en un espacio plano de cuatro dimensiones. Por supuesto, no podemos intuir globalmente el espacio ilimitado pero finito de la geometría esférica en tres dimensiones, porque para ello tendríamos que contemplar su finitud desde fuera, en un espacio de cuatro dimensiones. Pero quizá podamos decir que, a una escala mucho menor, a partir del caso de dos dimensiones nos hacemos una idea también intuitiva o espacial local de la curvatura del espacio, de manera que la construcción *a priori* en el espacio descrita por Kant y evidente en el espacio plano no es exclusiva de éste, aunque las complicaciones analíticas no se puedan presentar ante la intuición pura del espacio.

---

[5] Torretti, R., «La geometría en el pensamiento de Kant», en: Cordua, C. y Torretti, R., *Variedad en la razón.* Ensayos sobre Kant, Ed. Univ. Puerto Rico, 1992, 77-95, publicado originalmente en *Anales del Seminario de Metafísica* IX (1974); *Philosophy of Geometry from Riemann to Poincaré,* Dordrecht, Reidel, 1978, 2ª ed. 1984, 29-33.

Mas es importante notar que la construcción no euclídea no invalidaría ni corregiría en ningún sentido la síntesis *a priori* euclídea. El bilátero plano es imposible y los poliedros regulares son los que son, y lo sabemos sin necesidad de números, aunque cuando aprendemos a describir las rectas analíticamente vemos que determinan el espacio plano y que las ecuaciones permiten probar también analíticamente las proposiciones sintéticas. Las geometrías no euclídeas no nos permiten negar la imposibilidad del bilátero plano o la necesidad de que las rectas convergentes se corten más que cambiando la métrica del espacio, lo cual no corrige nada de lo sabemos acerca del espacio euclídeo.

Ahora bien, la teoría kantiana del espacio como forma *a priori* de la sensibilidad del hombre pretende dar cuenta, no sólo de la naturaleza sintética *a priori* de la geometría, sino también de la posibilidad de la aplicación física de este saber apriórico. En este trabajo he considerado distintas maneras de interpretar la relación entre la teoría kantiana y el desarrollo de las geometrías no euclídeas y la geometría diferencial desde el punto de vista matemático. Pero en todos los casos, en que se interpreta la suerte de la síntesis y la construcción espacial kantianas de distinta forma, parece incuestionable la índole apriórica del conocimiento matemático sobre el espacio y los números. Las interpretaciones del carácter analítico, sintético o intuitivo de la geometría difieren, pero su carácter apriórico, frente toda consideración empírica o inductiva, resulta incuestionable en todos los casos.

A continuación es preciso examinar la relación entre la teoría kantiana del espacio y la aplicación física de la geometría de Riemann por parte de la teoría de la relatividad general. Tras dar cuenta de la naturaleza sintética *a priori* de las proposiciones geométricas por el concurso de la intuición pura del espacio, el segundo paso del argumento de Kant es concebir la intuición del espacio matemático como una intuición plenamente sensible y como la forma de toda intuición empírica espacial, para poder explicar también la aplicación física de este saber apriórico o, con otras palabras, que tengamos un conocimiento apriórico de la estructura del espacio físico. En ello consiste la idealidad transcendental del espacio que, junto a la del tiempo, hace de los objetos empíricos fenómenos y no cosas en sí mismas.

Si la explicación del carácter analítico o sintético, en términos kantianos, de las estructuras geométricas no euclídeas ofrece las dificultades y admite las interpretaciones que he intentado exponer en este artículo, la aplicación física de estructuras espaciales no euclídeas en la teoría de la relatividad parece imposibilitar el segundo paso del argumento kantiano, el paso que conduce propiamente a la teoría del espacio como forma de la sensibilidad del hombre. Al describir la estructura del espacio físico con una geometría no euclídea, que viene dictada por la distribución de la materia, la teoría de la relatividad parece volver completamente inviable el idealismo transcendental de Kant como explicación de la posibilidad de la ciencia matemática de la naturaleza. Es lo que espero exponer con suficiente cuidado en otro trabajo.

* * *

Ricardo Parellada
Universidad Europea de Madrid
Departamento de Filosofía
Villaviciosa de Odón
28670 Madrid