LA CIENCIA DE LOS FILÓSOFOS, 1996, págs. 199-222.

LA TEORÍA DEL NÚMERO EN NATORP Y CASSIRER (1898-1910). (Una contribución histórica al estructuralismo matemático y a los orígenes del «semantic turn»)[1]

Mario Ariel González Porta. Pontificia Universidad Católica de São Paulo

Resumen: El neokantismo desarrolla una concepción logicista del número que con todo se diferencia claramente de la fregueana en su inspiración estructuralista. En la base de la misma no se encuentra sino una aplicación consecuente del método transcendental. Así, el análisis de la polémica del logicismo neokantiano con el fregueano conduce a una comparación de los presupuestos metódicos de la filosofía transcendental y del «giro semántico».

Abstract: Neokantism offers a logicist definition of number that clearly differs –in its structuralist inspiration, from that of Frege. On its base there lies a consistent application of the transcendental method. Thus the analysis of the controversy between Frege's and Neo-kantians' logicism leads to a comparison of the methodological assumptions of transcendental philosophy and those of the «semantic turn».

1. Introducción

El «método transcendental» constituye el núcleo vertebrador del neokantianismo. La filosofía no es otra cosa que reflexión sobre el «Faktum» de la ciencia dirigida al establecimiento y explicitación de sus condiciones de posibilidad. Si se toma en serio este programa se comprenderá que los neokantianos no podían ser sin más «kantianos». En el siglo XIX el desarrollo de las matemáticas ha colocado la filosofía frente a un nuevo «Faktum» que, como tal, debía ser reflexionado.

La filosofía neokantiana de las matemáticas está centrada en el concepto de número. El surgimiento de nuevos sistemas numéricos conduce a la pregunta por la naturaleza del número y la respuesta a ésta habrá de exigir una elucidación de las relaciones entre matemáticas e intuición. El punto principal que el neokantianismo habrá de desarrollar, contra Kant, será: la fundamentación del número debe ser proporcionada por el pensamiento, esto es, en el marco de la lógica y sin apelo a la intuición.[2]

---

[1] Debo valiosas críticas y sugerencias para este artículo al Prof. Dr. M. Schirn (München).

[2] Es recién por atención a este contexto que el tratamiento neokantiano de las geometrías no euclideanas puede ser adecuadamente comprendido. La filosofía neokantiana de las matemáticas no es en primera línea una defensa de Kant frente a las geometrías no euclideanas y, ni siquiera, propiamente una reacción contra ellas.

El surgimiento del «logicismo» fue acompañado por la crítica de la filosofía de las matemáticas kantiana, la cual aparece como definitivamente refutada y superada.[3] Esta crítica no permaneció sin respuesta y pensadores de primera orden, como Poincaré, asumieron la defensa de Kant.[4] Sin embargo, la oposición de inspiración kantiana contra el logicismo y a favor de la intuición, es característica del neokantianismo francés, pero no del alemán. En Alemania el logicismo de Frege y Russell enfrentó resistencias por parte de los neokantianos.[5] Pero la discusión no se desarrolló en el sentido de una polémica entre logicistas e intuicionistas, sino entre dos variantes o formas del logicismo. Ambos logicismos comparten la convicción negativa de que el número (y las matemáticas como un todo) no pueden ser fundados en la intuición y la positiva de que el número (y las matemáticas como un todo) deben ser fundados en la lógica. Pero ambas concepciones discrepan en el sentido de esta tesis, o sea, en la naturaleza misma de la lógica y su contenido y, en consecuencia, en el sentido de esta derivación.

De esa discrepancia se seguirán dos concepciones diversas del número: la una, la fregueana, según la cual números son objetos lógicos (abstractos), la otra, la marburguesa, según la cual números se disuelven en sistemas de relaciones. Quien crea descubrir en esta oposición similitudes con aquella que décadas después será colocada en el centro de la discusión en torno a la filosofía fregueana de las matemáticas por Benacerraf,[6] está en lo cierto. Y esto es un signo claro de la actualidad de la filosofía neokantiana de las matemáticas y de la necesidad de su estudio.

---

[3] Compare Frege, G.: *Die Grundlagen der Arithmetik*. Hamburg, 1986. (G) § 5, 12, 88, 89, 108; Couturat, L.: *La philosophie dés mathématiques de Kant*. En: *Les principes des mathématiques*. Paris, 1905 (Repr. Hildesheim, 1979) (PM) y Russell, B.: *The Principles of mathematics*. London, 1903 (1964[8]), § 432ss. (PM), etc.. Las letras en paréntesis después de la primera referencia a un texto, indican el modo en que será citado con posterioridad.

[4] Véase Bowne, G. D.: *The philosophy of Logic (1880-1908)*. London, 1966.

[5] He hablado del Neokantianismo por comodidad, pero fuera de algunos rasgos muy generales y casi siempre de naturaleza estrictamente programática, existen pocas doctrinas (o ninguna), que se encuentren en todos los neokantianos sin excepción y que se mantengan inmodificadas a través del tiempo. Esto vale también para el «logicismo». Éste es dominante en la Escuela de Marburgo, pero contradice la orientación mayoritaria de la escuela de Baden. Compare Rickert, H.: *Das Eine, die Einheit und das Eins. Bemerkungen zur Logik des Zahlbegriffes*. Tübingen, 1924[2]. Su crítica del logicismo es también una crítica de los marburgueses. Referencias polémicas entre ambas escuelas, casi siempre, sin citarse expresamente, son numerosas. Compare además Hönigswald, R.: *Die Grundlagen der Mathematik*. Berlin, 1910; Odebrecht: *H. Cohens Philosophie der Mathematik*. Diss. Erlangen. Berlin, 1906; Gawronsky, D.: *Das Urteil der Realität*. Diss. Marburg, 1910; Görland, A.: *Aristoteles und die Mathematik*. Marburg, 1898 y Cohn, J.: *Voraussetzungen und Ziele des Erkennens. Untersuchungen über die Grundfragen der Logik*. Leipzig, 1908 (Véase la severa recensión que le dedica Cassirer en *Deutsche Literaturzeitung*, Nr. 39, XXXI Jahrgang, 24 September 1910, 2437-2445).

[6] «What Numbers Could not be». *Philosophical Review*, 74 (1965), 47-73 (también en Benacerraf, P. y Putnam, H: Philosophy of mathematics: Selected readings. Blackwell, 1964). Véase además sobre el tema: Wright, C.: *Frege's conception of numbers as objects*. Aberdeen, 1983; Resnik, M.: *Frege and the philosophy of mathematics*. Ithaca-London, 1980; del mismo: «Mathematics as a Science of Patterns: Ontology and Reference». *Nous*, 15 (1981), 529-550 y Dummet, M.: *Frege's Philosophy of mathematics*. London, 1991.

2. *La filosofía de las matemáticas en Cohen*

La filosofía de las matemáticas marburguesa toma su punto de partida en Cohen y se concentra en una teoría del infinitesimal. Esta goza de una difundida mala fama debido a que es, por una parte, exasperantemente oscura y confusa y, por otra, desactualizada para su época, dado que no considera adecuadamente el replanteamiento del tema en Dedekind y Weierstraß.[7]

Hay cuatro puntos, sin embargo, que merecen ser considerados. Se trata de convicciones centrales de Cohen que marcarán el desarrollo del neokantianismo:

1. Cohen nunca concibió la matemática como ciencia formal,[8] sino en su relación y en su orientación a la física. Para decirlo en el jargón marburgués, la matemática es «Método», o sea, no propiamente una teoría, sino un instrumento de objetivación de los fenómenos.[9]

2. Si se atiende a esta circunstancia se comprenderá que la doctrina del infinitesimal, que constituye el aporte principal de Cohen a una filosofía de las matemáticas, no está en primera línea interesada en el mismo como objeto puramente matemático, sino en su aplicación a la física.

3. La tesis principal del *Principio del método infinitesimal* es de naturaleza eminentemente epistemológica y se inscribe en la tradición idealista. El objeto de la física es el producto, no de la percepción, sino de la concepción, esto es, no la resultante de una datitud, sino de una actividad constructiva y espontánea del pensamiento. La prueba de tal tesis toma la forma de establecer una línea de continuidad entre el objeto de las matemáticas y el de la física, siendo el camino para ello la asimilación de la cualidad o magnitud intensiva al infinitesimal.[10]

4. En 1902, con la *Logik der reinen Erkenntisse*, Cohen propugna una teoría crítica que, eliminando una estética transcendental autónoma, una intuición pura autosuficiente y un dado de la sensación irreductible, se comprenda a sí misma como «Logik». Si la posición coheniana alcanza toda su radicalidad hacia 1902, no es difícil ver como ya desde *Das Prinzip der infinitesimalen Methode...* la intuición pura pierde poco a poco su autosuficiencia y la estética transcendental su autonomía, para disolverse en el «reines Denken» y en la «transzendentale Logik».[11] Son

---

[7] Véanse las recensiones de Frege (*Zeitschrift für Philosophie und philosophischer Kritik*, 87 (1885), 25 (también en: Frege, G.: *Kleine Schriften*, v. 1. Editado por Angelelli. Darmstadt, 1967, p. 99ss.; Cantor (*Deutsche Literaturzeitung*, V. Jg., Nr. 8. Berlin, 23.2.1884, 266ss.) y Russell (PM, § 318). Compárese Schulthess, Peter: Introducción a Hermann Cohen: *Das Prinzip der infinitesimalen Methode und seine Geschichte*. Hildesheim, 1984. p. 7*-46*.

[8] El rechazo de la idea de una ciencia formal, que se extiende por igual a la lógica, fue un factor decisivo en el modo de recepción de ésta.

[9] Cohen, H.: «Einleitung mit kritischem Nachtrag» a la 5ta. edición de Lange, F. A.: *Geschichte des Materialismus*, 1896. Repr. Hildesheim, 1984.

[10] Claro está, este programa contiene e implica una crítica y revisión de la posición kantiana que asentaba el objeto fisico en las intuiciones puras del espacio y del tiempo y, por ello, lo constituía únicamente como magnitud extensiva o mera relación, sin dar cuenta de aquello que se encuentra en la relación. Espacio y tiempo pueden fundar el objeto como magnitud extensiva o sistema de relaciones, pero no pueden fundar el contenido del mismo, el *quale* o cualidad, el cual aparece en consecuencia como alógico..

[11] Un análisis detenido de este punto se encuentra en Holzhey, H.: *Cohen und Natorp. Ursprung und*

varios los motivos que juegan un papel en este proceso, entre ellos los propios principios básicos del método transcendental y la lucha antipsicologista, que llevan a que debamos invertir las relaciones entre intuición y matemáticas. Dado que sólo en las matemáticas y como reflexión sobre las matemáticas puede discutirse el significado transcendental de la intuición pura, no debemos fundar las matemáticas en la intuición sino, por el contrario, la intuición en las matemáticas.

Hacia 1900 el pensamiento de Cohen corre inercialmente por carriles preestablecidos. Si en *Das Prinzip der infinitesimalen Methode...* Cohen estaba desactualizado, la *Logik der reinen Erkenntnisse* ya no se encuentra ni siquiera dispuesta a una discusión seria con las nuevas tendencias. Ella cierra un desarrollo, antes que abrir algo nuevo. «El sistema» deviene la preocupación principal y el motivo decisivo. Muy otra es la situación en Natorp. Éste se encuentra en la cumbre de sus posibilidades intelectuales y desenvuelve una intensa actividad científica. Atento a las nuevas tendencias tanto en el campo de las matemáticas como en el de los fundamentos de ésta, Natorp abre la escuela a una recepción crítica de las mismas, colocando su filosofía de las matemáticas sobre nuevas bases. El concepto de relación sustituye al de infinitesimal como concepto llave de la epistemología marburguesa de las matemáticas y sólo en el marco de aquél habrá ahora de encontrar este su tratamiento adecuado.

3. *En la senda de Gauss: Dedekind y el logicismo no fregueano en Alemania*

Independientemente de Frege, e incluso con anterioridad a él, existe en Alemania en la segunda mitad del siglo XIX una tendencia logicista creciente[12] que, de una u otra forma, hunde sus raíces en Gauss.[13] Reconstruir esta evolución es ciertamente una tarea interesante y necesaria, pero que excedería en mucho los límites impuestos a este artículo. Sin embargo, dado que la reflexión neokantiana tomará en esta tradición su punto de partida, y esta constituye su marco de fondo presupuesto, algunas observaciones al respecto son absolutamente imprescindibles.

Einheit. Die Geschichte der Marburguer Schule als Auseinandersetzung um die Logik des Denkens. Basel, 1986. 2 vol.

[12] Se trata de una tendencia, y no propiamente de una escuela.

[13] Véase por ejemplo Graßmann, H.: *Die Wissenschaft der extensiven Grösse oder die Ausdehnungslehre, eine neue mathematische Disziplin dargestellt und durch Anwendungen erläutert. Erster Teil: Die Lineale Ausdehnungslehre.* Leipzig, 1844. A fines del siglo XIX y debido a la reedición de la «Ausdehnungslehre» promovida por Felix Klein, Graßmann, que tuvo en vida a Hamilton como único interlocutor, comienza a ser recepcionado. En tal sentido será decisiva la retomada de ideas fundamentales de Graßmann por Whitehead (*Algebra. A treatise on Universal Algebra with Applications.* Cambridge, 1898). Vía Husserll (véase la correspondencia Husserl-Natorp en *Husserliana: Husserl-Dokumente. Bd. V: Die Neukantianer*. Dordrecht, 1994) es estudiado con atención por Natorp, quien le dedica un rico comentario («Zu den logischen Grundlagen der neueren Mathematik». *Archiv für systematische Philosophie*, VII (1901), 77-209 y 372-382). Frege conocía a Graßmann, a quien cita en los «Grundlagen» (§6 y 18) y, de un modo sumamente interesante, en el artículo «Booles rechnende Logik und die Begriffschrift», p. 38 (En: Frege, G.: Nachgelassene Schriften. Ed. por Hermes, H., Kambartel, F. y Kaulbach, F.. Hamburg, 1969 (pp. 9-52)), en donde alude a la lógica de Graßmann, que era parte esencial de su programa logicista (véase Graßmann; H.: *Begriffslehre oder Logik.* Stettin, 1877).

Con tal objetivo tomemos como centro de referencia de nuestra exposición a Dedekind, quien sin duda constituye un punto culminante en este movimiento.[14]

En *Was sind und was sollen Zahlen*[15] Dedekind propone y ejecuta el programa de una fundamentación puramente lógica del número, esto es, absolutamente independiente de las intuiciones de espacio y tiempo. Los números son libres construcciones del espíritu, productos espontáneos de las leyes del pensamiento puro, el cual no es otra cosa que la capacidad de establecer relaciones.[16] Sobre esta única base debe ser fundada la ciencia del número. Las matemáticas no son otra cosa, que aquella parte de la lógica que trata de la teoría del número (GMW, III, 335ss.).

La estrategia de Dedekind para definir lógicamente el número no consiste en partir de nuestra comprensión intuitiva y guiarse y justificarse por esta, sino en definir un cierto objeto, el «sistema simplemente infinito» (ssi) para, a continuación, pasar a afirmar la tesis de la identidad del mismo con el número.

Seguir paso a paso la construcción que Dedekind efectúa del ssi requeriría un artículo para sí. Pero, para que un lector contemporáneo reciba una idea adecuada y suficiente de ella, alcanzará con dos observaciones:

1. Un ssi no es otra cosa que una serie o clase ordenada de infinitos miembros. El concepto fundamental para definir ésta es el de proyección de una clase en sí misma. El carácter ordenado y el carácter infinito de la clase remiten al concepto de un primer miembro, que tiene su imágen en un otro miembro de la clase, pero que no es imágen de ninguno.

2. Importa no pasar por alto que, si el concepto definido por Dedekind es hoy usual en cualquier manual de lógica, no así el modo en que Dedekind lo define, ya que el no dispone de una lógica de predicados y de relaciones. Su punto de partida es propiamente la «Mengenlehre», la cual, por otra parte, tiene que comenzar por construir.

Si hasta aquí resulta claro que lo que Dedekind ha logrado definir es una serie infinita, en la cual para cualquier elemento están definidas sus relaciones de anterioridad y posterioridad, no es nada obvio que los elementos de esta serie deban ser identificados con los números. Es esto, sin embargo, justamente lo que pretende Dedekind. El punto central no será que la serie numérica tiene algunas propiedades formales comunes con la estructura que acabamos de definir, sino que ésta estructura, así definida, *es* la serie numérica o que la serie numérica no es otra cosa que esta estructura, o sea, un ssi en el cual se abstrae de la particular constitución de sus elementos y se atiende meramente a las relaciones en que ellos

---

[14] Como es sabido, Dedekind no fue discípulo directo de Gauss, pero es heredero del mismo a través de Dirichlecht (véase la introducción de Dedekind a la «Zahlentheorie» de Dirichlecht en: Dedekind, R.: *Gesammelte mathematische Werke*. Ed. por Robert Fricke, Immy Noether y Öystein Ore. Vol. II. Braunschweig, 1932. pp. 282-283 (GMW).

[15] Braunschweig, 1888. Las citas están referidas al tercer volumen de la *Gesammelte mathematische Werke*, mencionada en la nota anterior.

[16] «Verfolgt man genau, was wir bei dem Zahlen oder Menge oder Anzahl von Dingen tun, so wird man auf die Betrachtung der Fähigkeit des Geistes geführt, Dinge auf Dinge zu beziehen, einem Dinge ein Ding entsprechen zu lassen, oder ein Ding durch ein Ding abzubilden, ohne welche Fähigkeit überhaupt kein Denken möglich ist. Auf dieser einzigen auch sonst unentbehrlichen Grundlagen muß nach meiner Ansicht..., die gesamte Wissenschaft der Zahlen errichtet werden.» (GMW, III, 336)

se encuentran de acuerdo a nuestras definiciones. Este punto esencial merece ser precisado. El número no es cualquier cosa que, además, cumple con ciertas relaciones. Números no son propiamente «objetos», sino posiciones en la serie y, en consecuencia, se agotan en su carácter de relaciones.

Podría aún preguntarse: ¿y cómo sabe Dedekind que los números no son otra cosa que aquello que él dice que son? La respuesta a esta pregunta nos coloca en la pista del verdadero núcleo argumentativo de Dedekind. Ya indicamos que Dedekind trabaja en dos movimientos: primero define un cierto objeto, luego identifica el mismo con la serie numérica. Quizás sea esta identificación para Dedekind en sí misma evidente. Lo cierto es, sin embargo, que Dedekind argumenta para ella y lo hace de un modo tal que merece toda nuestra atención, pues este argumento contiene el importante presupuesto de que la aritmética es la instancia realmente decisiva para decidir lo que sean los números. Ahora, el objeto de la aritmética no es otro que la investigación de las leyes o relaciones que se siguen puramente de las condiciones establecidas por la definición enunciada y que, en consecuencia, valen para todo ssi.[17] O sea: los elementos del sistema así definido son los números, *porque* ellos cumplen con todo lo que normalmente se hace con los números en las matemáticas. En total coherencia con esta perspectiva se encuentra la ulterior indagación de Dedekind[18] para definir las operaciones algebraicas tomando como base el concepto de ssi.

La derivación «lógica» del número en Dedekind se funda, como la fregueana, en la teoría de conjuntos. Ahora, el uso que una y otra hacen de la misma y, en consecuencia, el modo en que el concepto de número remitirá al concepto de clase, es radicalmente distinto. Para definir el concepto de número, Frege parte de una multiplicidad de clases, Dedekind sólo de una. Para Frege, lo esencial son las relaciones entre clases, para Dedekind, las relaciones existentes entre los elementos de una clase. De lo anterior resultará, que mientras que la definición de número natural en Frege es una definición del número cardinal finito, la de Dedekind es propiamente una definición del ordinal (GMW, III, 360). Para Dedekind los números verdaderamente originarios son los ordinales, siendo que los cardinales tienen que ser derivados de ellos (GMW, III, 387).

Si, por un lado, esta diferencia entre Dedekind y Frege es tan clara, curiosamente, ella no está en el centro de la discusión entre ambos. Su importancia crecerá, sin embargo, en la controversia posterior y, rodeando a la misma de numerosas confusiones, terminará por constituir un punto decisivo para el establecimiento de una línea divisoria entre las dos escuelas logicistas. La tesis de la

[17] Como en las exposiciones de Dedekind se pasa por alto este punto, que sin embargo es decisivo para el neokantianismo, conviene citar al propio Dedekind: «Die Beziehungen oder Gesetze, welche ganz allein aus den Bedingungen a, b, c, y d in 71 abgeleitet werden und deshalb in allen geordneten einfach unendlichen Systemen immer dieselben sind, wie auch die in den einzelnen Elementen zufällig gegebenen Namen lauten mögen... *bilden den nächsten Gegenstand der Wissenschaften von den Zahlen* oder der Arithmetik.» GMW, III, 360. Compare: Parsons, Ch.: «The structuralist view of mathematical objects». *Synthese*, 84 (1990), 303-346; Kitcher, Ph.: «Frege, Dedekind, and the Philosophy of Mathematics» (En Sluga, H. (Ed.): *The Philosophy of Frege. A four Volume Collection of Scholarly Articles on All Aspects of Frege's Philosophy.* Berkeley, 1993) y Dummet, M.: op. cit.

[18] Que, por tanto, debe ser entendida como parte decisiva de la prueba y no como derivación de consecuencias a partir de una tesis ya probada.

prioridad del ordinal sobre el cardinal no es de autoría de Dedekind, sino que sus orígenes se remontan a Helmholtz[19] y Kronecker,[20] alcanzando rápidamente amplia difusión.[21] Este hecho puramente histórico merece ser tenido en cuenta desde el punto de vista sistemático. Si la dicotomía ordinal-cardinal va a centrar la discusión entre las dos escuelas logicistas, ambas oposiciones no deben ser identificadas sin más. Existe en la primera una serie de motivos y connotaciones, que no reaparecerán necesariamente en la segunda.[22] Es importante pues no meramente atender a la afirmación de la tesis ordinalista sino, para fijar el verdero sentido de la misma, a los argumentos que la sustentan. Si bien Dedekind se limita a retomar una tesis ya difundida, será el primero que, al vincularla a un programa logicista, ofrecerá propiamente una prueba de la misma.[23] La oposicion entre ordinal y cardinal y la derivación del segundo a partir del primero, son anteriores a Dedekind, pero no así la propia construcción lógica del ordinal, que será al mismo tiempo construcción lógica del número. Hacia la virada del siglo no hay prácticamente autor que no haya tomado posición sobre este tema, deviniendo el mismo una fuente continua de confusiones y malentendidos. Russell procura poner punto final a la polémica, y Couturat habrá de dar a la totalidad del problema la presentación que habrá de transformarse en standard (PM, 44-60). Dos puntos decisivos son señalados por Russell:

1. No existe una prioridad ni del ordinal, ni del cardinal.
2. Ambos números suponen por igual series.

La posición de Russell, que parece a primera vista ser conciliatoria, decide en realidad la totalidad de la cuestión (en lo que esta tenía justamente de esencial y filosóficamente relevante) a favor del «cardinalismo».[24] La razón para ello es, claro está, por un lado, que Russell concede la posibilidad de una definición del cardinal que sea lógicamente independiente de la del ordinal, lo cual es ciertamente coherente con la tesis de que números son clases de clases equivalentes (PM, §

[19] «Zählen und Messen, erkenntnistheoretisch betrachtet». En: *Philosophische Aufsätze. Ed. Zeller gewidmet.* Leipzig, 1887.

[20] «Über den Zahlbegriff». En: Hensel, K. (Ed.): *Leopold Kronecker's Werke.* Herausgegeben auf Veranlassung der Königlich preussischen Akademie der Wissenschaften. Vol. 3. 1a. Parte. New York, 1968. pp. 251-274. La primera edición apareció en el homenaje a Zeller junto con el trabajo de Helmholtz, que citamos en la nota anterior.

[21] Lipps, G. F.: «Untersuchung über die Grundlagen der Mathematik». *Philosophische Studien,* IX (1893), 151-175 y 358-383; X (1894), 169-202 y XI (1895), 256-306. Compare la recensión de Natorp, P.: «Bericht über Deutsche Schrifften zur Erkenntnistheorie aus den Jahren 1894-1895». Viertes Stuck. *Archiv für systematische Philosophie,* VI (1900), 457-475. Véase también Husserl, E.: *Philosophie der Arithmetik.* Halle, 1891; Peano, G.: «Sull concetto di numero». *Rivista di matematica,* I (1891), 87-102 y 252-267 y Whitehead, A. N.: «On Cardinal Numbers». *American Journal of mathematics,* XXIV (1902), 367-394.

[22] Así, por ejemplo, en Helmholtz o en Kronecker, ella implica un nominalismo, que simplemente no tiene paralelo en Dedekind.

[23] Kronecker ofrece una derivación del cardinal a partir del ordinal, pero no ofrece propiamente una derivacion lógica del ordinal mismo, sino que parte de él.

[24] O sea: acepta el carácter primitivo tanto del ordinal como del cardinal, pero se pronuncia contra una concepción puramente relacional del número, esto es, precisamente contra el motivo principal de Dedekind para considerar al ordinal como el número originario.

230). Pero no menos importante, es el argumento negativo (PM, § 242). El punto principal es por qué un ordinalismo puramente relacional como el propugnado por Dedekind, no puede admitirse. Russell coloca a Dedekind en una alternativa cuyos términos son igualmente insostenibles: o la serie no define propiamente un objeto o, si lo define, entonces fuera de la del ordinal, ninguna serie está formada de objetos simples. El punto principal es: la mera construcción de una serie no es aún construcción del número, pues la serie como tal admite infinitas interpretaciones.[25] El argumento russelliano cambia el plano de la discusión. Hasta ahí se arguía primariamente u ofreciendo argumentos contra el logicismo en general (denunciando que en definitiva supone lo que quiere probar) o (cuando se ataca más específicamente el cardinalismo) intentando mostrar que en su punto de partida supone los conceptos claves de su oponente. El argumento de Russell es filosóficamente más interesante que los mencionados y se asienta en la idea de que la definición es inadecuada porque no identifica unívocamente un objeto.[26]

El programa de Dedekind consistía en derivar el número de la lógica y sin apelo a la intuición. ¿Ha cumplido Dedekind con tal promesa? El primer punto que debemos llamar la atención es el referente al concepto de lógica en Dedekind, que ya Frege apuntaba como problemático.[27] Mientras que en Frege el programa logicista requiere un replanteamiento y significativo desarrollo de la propia lógica, nada de eso encontramos en Dedekind. Su logicismo no fecunda la lógica ni tampoco es obvio el sentido en que la presuponga. Mirado con ojos poco tolerantes, Dedekind no parte propiamente de la lógica, sino de la «Mengenlehre», presuponiendo simplemente la identidad de ambas. Sin embargo, si consideramos la situación en el marco de los presupuestos de Dedekind, y no los negamos dogmáticamente, vemos que existe coherencia. Ciertamente, y esto es decisivo, Dedekind tiene otro concepto de lógica que Frege, fijando el mismo en el marco del distingo —eminentemente epistemológico— entre pensamiento e intuición. Lógica es la doctrina de las leyes del «Denken». Pero, se preguntará, ¿no es esto psicologismo? Propiamente no. «Denken» no significa aquí otra cosa que la capacidad de establecer relaciones (por oposición a la intuición como capacidad de darse objetos) y la connotación noética, que aún podría contener un tal concepto, y cualquier discurso sobre actos mentales, es claramente prescindible. El «Beziehen» se disuelve en la «Beziehung» en su sentido puramente objetivo. Lógica, como teoría del «Denken», no es pues otra cosa que la teoría de la «Beziehung».[28]

---

[25] La formulación que da Russell a su argumento subraya el papel de la abstracción en la posición dedekindiana, lo cual introduce problemas ulteriores que en esta corta presentación dejo de lado. Compare nota 29.

[26] «Moreover it is impossible that the ordinal should be as Dedekind suggest nothing but the terms of such relation as constitute a progression. *If they are to be anything at all, they must be intrinsically something*; they must differ from other entities as points from instants, or colours from sounds.» (PM,§242). Ironía del destino será que un argumento similar estará en la base del resurgimiento del «ordinalismo». La crítica de Benacerraf a Frege apunta al mismo núcleo que la de Russell a Dedekind. Si es cierto que el hecho de no identificar un objeto por admitir más de una interpretación invalida la definición ordinal, el mismo motivo invalida también la cardinal. Esto debe querer decir algo con respecto a la naturaleza y límites de toda definición «lógica» del número.

[27] Frege, G.: *Grundgesetze der Arithmetik*. vol. 1. Jena, 1893. Repr. Darmstadt, 1962. p. VIII (GA).

[28] Como teoría de la «Beziehung», por otra parte —y esto no es nada obvio—, lógica no es

En nuestra exposición de Dedekind hemos subrayado el elemento estructuralista y logicista, haciendo pasar a segundo plano el idealista y, eventualmente, el psicologismo que pueda estar vinculado a él. Lo cierto es que en el Dedekind histórico la totalidad de la cuestión culmina en una teoría según la cual el pensamiento, por medio de actos de abstracción, crea nuevos objetos a partir de la estructura. La razón de esta tendencia cosificante inesperada puede ser —si descartamos el interpretarla como simple confesión del fracaso de la totalidad del programa—, por un lado, ciertamente el interés de Dedekind en subrayar la espontaneidad del espíritu, capaz de construir «objetos», pero por otro, el hecho de que Dedekind es propiamente un estructuralista que no dispone del concepto de estructura. Decir que el sistema de los números enteros positivos es lo que «tienen en común» todos los ssi, cuando se prescinde de su particular contenido, es una forma confusa de decir, que el ssi define propiamente una estructura. El apelo a la abstracción parece ser necesario para introducir un nuevo objeto, pero es justamente esto, lo que Dedekind no precisa. De todas formas, esta doctrina no será acompañada por el neokantianismo, el cual, apartándose del Dedekind histórico, procuró dar una formulación más consecuente al motivo estructuralista.[29]

4. Natorp

El punto de partida de la reflexión natorpiana sobre las matemáticas es «la poderosa generalización experimentada tanto por el concepto de número, como por el concepto de espacio» (LGNM, 177-178).[30] Ella muestra una tendencia inequí

---

propiamente ciencia formal, sino por su propia naturaleza, orientada a los instrumentos de la objetivación. No son los números los que se fundamentan en la intuición, sino por el contrario la intuición la que se fundamenta en los números (y en la matemática en general), pues recién estos tornan a aquélla, que en sí es racionalmente opaca, inteligible, en cuanto hacen manifiesta una estructura conceptual.

[29] Pese a la coincidencia en la tendencia general, existen en este punto importantes diferencia entre Cassirer y Natorp, las cuales conducen a una diversa interpretación de la teoría de los cortes. Hoy sabemos que, en lo que respecta a la interpretación del Dedekind histórico, Natorp estaba más próximo de la verdad, aunque esto no compromete en nada el interés sistemático de la lectura que efectúa Cassirer, que no dejaría de recibir la aprobación de Natorp en su intención fundamental. Compare carta de Dedekind a H. Weber del 24 de enero de 1981 (GMW, III, 489), citada por Tait, W. W.: «Critical Notice: Charles Parson's Mathematics in Philosophy». *Philosophy of Science*, 53 (1986), 588-606 y la discusión entre Cassirer y Natorp (carta de Cassirer a Natorp del 30 de Octubre de 1909 (manuscrito en la Universidad de Marburgo Hs. 831:633)).

[30] Sobre la teoría natorpiana del número véase: «Bericht über Deutsche Schrifften zur Erkenntnistheorie». *Archiv für systematische Philosophie*, III (1897), 101-121 y 457-475 (BDSE); «Nombres, Temps, Space». *Bibliotheque du Congres International de Philosophie* Vol. 1, 1900, 343-389 (NTS); «Zu den logischen Grundlagen der neueren Mathematik». *Archiv für systematische Philosophie*, VII (1901), 177-209 y 372-382 (LGNM); «Die erkenntnistheoretischen Grundlagen der Mathematik». *Unterrichtsblätter für Mathematik und Naturwissenschaft*, VIII (1902), 2-8 (EGM); *Die logischen Grundlagen der exakten Wissenschaften*. Leipzig, 1910 (LGEW); *Philosophie. Ihr Problem und ihre Probleme*. Göttingen, 1911 (PPP); *Logik. Grundlegung und logischer Aufbau der Mathematik und mathematischen Naturwissenschaft (in Leitsätzen zu akademischen Vorlesungen)*. Marburg, 1904. 2a. 1910

voca de las matemáticas a adquirir una forma puramente lógica prescindiendo en todo punto de la intuición y aceptando como límite sólo los principios establecidos por el pensamiento puro (LGNW, 185). Una filosofía respetuosa del «Faktum» de la ciencia sólo puede estar en armonía con esa tendencia. La tarea es explicitar el fundamento común de la aritmética y la geometría, efectuando para ello una deducción puramente lógica, tanto del espacio como del tiempo (EGM, 2; LGEW, 3; NM, 56).

Consecuente con la concepción de la matemática como «método», la filosofía de las matemáticas natorpiana se inscribe en el marco de una epistemología general, que apunta en última instancia a la fundamentación del conocimiento empírico, tal como tiene lugar en la «Naturwissenschaft». Ahora, desde Galileo, el objetivo del conocimiento científico no es la sustancia, la cosa, sino la relación y ésta centralidad de la relación para el conocimiento objetivo será determinante para el propio concepto de «pensamiento». Si la relación fija el objeto del pensamiento en general y, por tanto, de la lógica, fija también el de las matemáticas, estableciendo una continuidad entre ambas.

El número no se funda en cosa o datitud alguna, sino en la legalidad del «pensamiento puro» (LGEW, 98 y 100; L, 31). Ahora, qué hemos de entender por «pensamiento puro»? Ciertamente no una actividad psicológica. «Denken» es entendido aquí como contenido pensado y, en cuanto tal, no es otra cosa que «posición» de relaciones (PPP, 39; LGEW, 98ss.). El objetivo es pues mostrar cómo el pensamiento por sí sólo y sin ayuda de ningún elemento extraño a él es capaz de fundar el número. Ahora, dado que el pensamiento no es otra cosa que la «posición» de relaciones («in Beziehung Setzen»), lo anterior equivale a mostrar que para fundar el número no precisamos de otra cosa que de relaciones.[31]

Si el primer paso es la afirmación de que las matemáticas tienen que ver sólo con relaciones, el segundo será la afirmación de que los relata no anteceden a la relación sino que son puestos por ésta (L, 100-101). El sentido de la tesis de que las matemáticas se ocupan de relaciones, debe ser fijado pues junto con la tesis que define el carácter *interno* de estas relaciones.[32]

(L). Sobre la teoría del número en Natorp véase: Ferrari, M. (ed).: «Lettere die Louis Couturat a Paul Natorp (1901-1902)». *Rivista di Storia della filosofia*, XLIV (NS) (1989), 115-139; Mainzer, K.: *Kant's philosophische Begründung des mathematischen Konstruktivismus und seiner Wirkung in der Grundlagenforschung.* Münster, Univ. Diss., 1973 (en especial pp. 62-90).

[31] Si el «Denken» no significa una actividad psicológica, la fundación de la tesis del carácter puramente relacional no es ciertamente introspectiva. Ella no es otra cosa que la «Wissenschaftstheorie», la cual es en primera línea teoría de la «Naturwissenschaft». Ahora, dado que la filosofía de las matemáticas natorpiana supone, en última instancia, la teoría del «Denken» como «Beziehung», es claro que ella supone la epistemología marburguesa como un todo. Con lo anterior queda dicho que el sometimiento de la lógica formal a la lógica transcendental, es decisivo para la asimilación de las matemáticas a la lógica. Obsérvese, asimismo, como sugiere lo anterior, que por relación no hemos de entender un predicado poliádico. La idea marburguesa de la lógica es propiamente pre-fregueana.

[32] Sobre el tema de la relación en Natorp véase Wolzogen, Ch. von: *Die autonome Relation. Zum Problem der Beziehung im Spätwerk Paul Natorps. Ein Beitrag zur Geschichte der Theorie der Relationen.* Würzburg, 1984. El trabajo está muy bien documentado; lamentablemente, no se preocupa de establecer puentes con la lógica contemporánea. Sobre el tema de las relaciones internas véase Horstmann, R. P.: *Ontologie und Relationen. Hegel, Bradley, Russell und die Kontroverse über interne und externe*

En el origen de esta teoría de las relaciones internas no se encuentra otra cosa que la concepción idealista marburguesa. Pensar es establecer relaciones. Pero esto no debe ser entendido en el sentido de un acto que suponga un elemento dado sobre el cual se opera. El pensamiento no posee ningún dado. Lo dado sólo puede tener el sentido de aquello que es dado como tarea, o sea, no «gegeben» sino «aufgegeben». En consecuencia es el pensamiento propiamente quien pone los relata junto con la relación (LGEW, 99-100).

Si de las declaraciones programáticas pasamos ahora a la ejecución, debemos entonces comenzar por constatar que parecen existir en Natorp dos procedimientos diferenciables para la derivación del número (que quizás se encuentran entre sí en una sucesión evolutiva). En sus primeros escritos (EGM, 2ss.), Natorp se limita a colocar una cierta relación como primitiva e indefinible, a saber la relación que une un punto de referencia a otro y «pone» a ambos para, a continuación, pasar a construir una serie por repetición de la misma. En escritos posteriores (LGEW, S. 99ss.) el procedimiento es un tanto más elaborado: no partimos de una relación, sino del concepto de relación, entendida como relación interna para, mediante un análisis, descomponerlo en sus elementos, construyendo a partir de ellos una serie. Una relación supone por lo menos dos términos. Esos términos tienen que ser diferentes, el uno «antecede», el otro lo «sigue». Pero al mismo tiempo que separa, la relación une y, por tanto, forma una nueva unidad que puede entrar nuevamente en relación. Por otra parte, cada término puede, no en esa, pero sí en otra relación asumir una nueva función, o sea, el antecedente virar consecuente y viceversa. Así, adquirimos una serie que se prolonga en dos direcciones. Cualquiera de estos dos procedimientos cumple con el objetivo natorpiano. Lo que queda descartado, tanto en un caso, como en otro, es la partida de elementos absolutos o dados (EGM, 5).

Para un lector contemporáneo ciertamente no es fácil ver aquí argumentos conclusivos. Las dificultades giran en última instancia en torno a la asumición del caracter primitivo e indefinible de la relación, con la cual parece presuponerse justamente lo que se trata de probar. Ciertamente que la relación en cuestión no es «aún» la relación +1, pero sin duda ella no es derivable, con lo cual Natorp parece colocarse en una posición más adecuada propiamente para una axiomatización de la aritmética que para una derivación lógica del número. Frege comenzaría por definir esta relación fundamental, la sucesión, y lo haría en términos puramente lógicos. Pero Natorp no se plantea en ningún momento la tarea de

a. definir la relación que existe entre los números
b. diferenciar lo particular de esta relación frente a otras o
c. definirla en términos «lógicos».

La razón de ello reside en las características peculiares del programa logicista natorpiano, que condicionan claramente la naturaleza de los argumentos posibles. Si se concede que el concepto de relación define el concepto de «pensamiento» y, en consecuencia, de «lógica»,[33] es claro que reducir el número a la lógica, es reducirlo a relaciones y, por eso, nada obsta a que el argumento coloque estas relaciones como primitivas. La cuestión central *no es* de dónde vienen estas rela-

Beziehungen. Hain, 1984.

[33] Y esto, desde el punto de vista de una lógica transcendental, ciertamente no es infundado.

ciones, *sino* si ellas son suficientes para construir la matemática; o sea: concedido de una forma u otra esta relación, se trata de mostrar que, a partir de ella, se construyen ciertas estructuras que cumplen con todas las propiedades de los números y que, en consecuencia, deben ser identificadas con ellos. La atención al programa natorpiano no sólo hace comprensible que su logicismo asuma un punto de partida en relaciones simples y primitivas, sino que una consideración más detenida muestra que incluso así lo exige. El carácter interno de las relaciones impide desenvolver una teoría diferenciada de sus tipos (distinguiendo por ejemplo entre simétricas y asimétricas). Natorp efectúa propiamente dos movimientos conceptuales simultáneos: como la relación «pone» los miembros, esta relación no puede ser estudiada como un tipo de relación especial que existe entre ellos. El carácter «productor» y el carácter «primitivo» de la relación se exigen recíprocamente.

Es claro que lo que Natorp quiere es mostrar como, a partir del concepto de relación (y sin introducir ningún elemento extraño), se puede construir una serie en la cual cada elemento se determina como tal por su posición con respecto al resto. El pensamiento fundamental es que en la serie no hay elementos absolutos sino que cada elemento se disuelve en un sistema de relaciones: «Contar significa ordenar en una serie...» (EGM, 3).

La serie que Natorp ha obtenido tiene algunas características nada obvias como serie numérica, que impiden que ella pueda ser identificada sin más con la de los naturales o los enteros positivos.[34] Esta serie parece aún más primitiva y general que la de Dedekind.

1. Si la consideramos por lo que respecta a su formación, observamos que ella está abierta en dos sentidos y que, en consecuencia, no posee dirección.

2. Esto implica, ulteriormente, que no hay nada que marque las posiciones de un 0 y de un 1. Natorp critica la admisión de un comienzo de la serie, polemizando expresamente con Frege, Lipps y, Dedekind. La razón filosófica es clara: si aceptamos el principio de las relaciones internas, en ningún momento podemos apelar a un elemento absoluto. No otra cosa supone, sin embargo, la constitución de la serie numérica a partir de un elemento primero. 1 y 0, como todo otro número, no pueden ser sino relaciones y, en consecuencia, cualquier elemento de la serie puede asumir su función.

3. Por tanto, los elementos de la serie natorpiana no son ni positivos, ni negativos,

4. y todo parece indicar que tampoco son ni cardinales, ni ordinales.[35] Como es característico hacia 1900, Natorp no puede elaborar una teoría del número sin participar al mismo tiempo en la polémica ordinal-cardinal. El niega, por una parte, que estemos realmente frente a una alternativa y cuestiona que haga sentido afirmar la prioridad del uno o del otro[36]; pero, por otro, toma un partido decidido por la concepción relacional.

---

[34] Propiamente ni siquiera es una serie en un sentido lógico-formal preciso.

[35] Natorp parece incluso querer ir mas lejos y afirmar que ordinal y cardinal no son propiamente dos tipos de números diferentes, sino dos funciones que puede asumir el número.

[36] Ambos se suponen recíprocamente, siendo momentos de un proceso único.

5. Si la serie no tiene comienzo ni dirección, si sus elementos no son ni positivos ni negativos y tampoco cardinales u ordinales, entonces es claro, que aquí se hace necesario un nuevo paso deductivo (que evidencie el pasaje de la serie «proto-numérica» natorpiana a los enteros positivos). No menos claro es, sin embargo, que Natorp en ningún momento se coloca esta cuestión del modo diferenciado que sería necesario.

Hemos llegado a una serie en donde sus elementos se definen de un modo puramente relacional. Esta serie no es la serie de los enteros positivos. Ahora: son sus elementos propiamente «números»? Es ésto, justamente lo que afirma Natorp, y no sin argumento. El paso decisivo es mostrar que a partir de estas series se pueden derivar:

a. todas las propiedades que normalmente le atribuimos a los números (como la infinitud),

b. todo lo que normalmente hacemos con los números (como las operaciones algebraicas) y, en definitiva,

c. todo lo que *en las matemáticas* llamamos «número».

Veamos esto con más detalle:

a. El primer punto es para Natorp tan obvio, que casi que no argumenta para el de un modo especial. La infinitud de la serie no sólo no repugna, sino que incluso es exigida por la concepción relacional del número y esto, en sentido actual y no meramente potencial (LGEW, 160ss.).

b. Con respecto al segundo. La tesis de números como relaciones permite elaborar una clara teoría de las operaciones algebraicas y una satisfactoria definición de la igualdad que, según Natorp, son imposibles sobre la base de la concepción de números como «objetos» (LGEW, 128ss.). En un sentido propio, la matemática no opera con los números, ni hace nada con ellos, sino que los contempla. Lo que contempla son justamente sus relaciones. Las operaciones aritméticas no son otra cosa que el desarrollo metódico de las relaciones existentes entre los números. Ahora, toda operación supone el establecimiento de una equivalencia y, en consecuencia, la clarificación del concepto de aquella pasa por la clarificación del concepto de ésta. El primer paso para ello es diferenciar equivalencia e identidad. Decimos que dos números son iguales. Pero propiamente no hay dos «dos» o dos «tres», sino tan sólo uno. La igualdad numérica, contra la apariencia linguística, constituye una proporción que contiene cuatro términos, siendo que ella no tiene lugar entre objetos, sino entre relaciones.

c. La aparente indigencia del punto de partida natorpiano debe ser entendida en relación con el punto de llegada, el cual no es otro que la totalidad de los sistemas numéricos y, bajo tal punto de vista, ella se transforma en ventaja. El tratamiento de los negativos ya muestra este hecho con claridad. Si partimos de una serie que carece de un primer elemento absoluto, la justificación de los negativos no contiene problema alguno. Los negativos no son ni números de segunda clase, ni en algún sentido «derivados». Ellos son tan originarios como los positivos, *porque* son producidos por el mismo procedimiento que éstos. Y lo mismo vale para todo tipo de número, desde los enteros positivos a los reales. Lo importante es que en la base de *todo* número está el proceso de construcción serial con diferentes grados de complejidad, pero homogéneo en su motivo fundamental. Así, Natorp otorga un tratamiento uniforme de la aritmética a la geometría, introduciendo a partir de la primera noción de serie, las nociones de dirección, inversión de la serie, multiplicidad de las series, etc. y con ellos los diferentes tipos de números.

El neokantianismo quiso ser reflexión sobre el «Faktum» de la ciencia y debemos una y otra vez volver a éste programa si queremos entender los rasgos particulares que asume su epistemología. En tanto la matemática se ocupaba de números naturales, no se colocó la pregunta por la naturaleza del número. Esta pregunta se coloca cuando, como acontece en el siglo XIX, aparecen nuevos sistemas numéricos en los cuales el número se aparta más y más de la concepción cotidiana e intuitiva. Si se atiende a este contexto histórico del surgimiento de la pregunta por el número, entonces es claro que una respuesta a esta pregunta que se atenga al método transcendental (o sea, que se proponga dar cuenta de lo que *efectivamente* significa el número en las matemáticas) es sólo satisfactoria, si vale por igual para *todo* tipo de número. Ella no puede implicar en modo alguno la existencia de números privilegiados, asumiendo en consecuencia un carácter meramente «derivacionista».[37] Ella debe aplicarse, de modo inmediato y originario a *todo* tipo de número, haciendo asi evidente la unidad del número como tal. Con una tal condición cumple la teoría relacional del número, siendo este hecho (en la perspectiva marburguesa) en buena medida una prueba de su verdad. Los motivos lógicos fundamentales son exactamente los mismos, en el entero positivo y en el real.[38]

Al criticar la idea de un primer elemento como punto de partida, Natorp cuestiona propiamente el derecho de una derivación «lógica» del número a partir de una multiplicidad «dada» y, en consecuencia, la estrategia conjuntista, común a Frege y Dedekind. Este cuestionamiento conduce, en sus supuestos y en sus consecuencias, a uno de la teoría de conjuntos como tal, el cual, aún cuando rodeado de oscuridades —derivadas en buena medida de la insuficiente recepción de la lógica simbólica— posee, sin embargo, un núcleo legítimo. Si la derivación de las matemáticas de la lógica ha de poseer sentido, entonces, no se puede partir de un elemento «extralógico». Frente a tal peligro, sin embargo, se encuentra la concepción conjuntista del número. La teoría de conjuntos parte de una multiplicidad «dada» y, con ello, compromete la pureza de las matemáticas. No es el concepto de «multiplicidad», sino el de «datitud», el que contiene aquí el problema. Si la matemática ha de partir de una «multiplicidad», esta no puede ser sino de naturaleza lógica. Ahora, si no queremos negar sin más la posibilidad de una teoría de conjuntos como doctrina matemática, parece necesario que esta crítica se

[37] O sea valer en primera línea para los enteros positivos, deduciendo otros tipos de números a partir de éstos.

[38] Es en Cassirer y, en particular, en su análisis de los cortes de Dedekind, en donde en forma más clara se cumple con ésta exigencia. ¿Cuál es la enseñanza de la teoría de los cortes? Básicamente, el que en la matemática no introducimos un objeto, para luego estudiar sus relaciones, sino que definimos un sistema de relaciones que fijan el objeto. Interesante en esta estructura de argumento es que el mismo tiene un carácter «retroactivo». La explicación del «Schnitt» no es solamente compatible con la explicación del natural, sino que arroja claridad retrospectiva sobre la misma. La idea básica —que vale, no sólo para la matemática, sino para la ciencia en general— es que la evolución de los sistemas numéricos no hace sino colocar cada vez con mayor claridad y nitidez los motivos lógicos que, desde un comienzo, están a la obra en las formas más primitivas.

desenvolviese en una formulación positiva. El camino que habrá de tomar la axiomatización de la teoría de conjuntos, en la medida que elimina la idea de elementos originarios («Urelemente»), muestra que esto no meramente era posible, sino incluso necesario. Este camino no fue imaginado por Natorp o Cassirer y, posteriormente, cuando estuvo a su disposición, no fue recepcionado. Él ofrece, sin embargo, como es obvio, un interesante elemento a favor de la tesis marburguesa. Si el cardinalismo pretendió basar su concepto de número como objetos en la teoría de conjuntos, lo hizo sobre el supuesto de que la teoria de conjuntos trata de cierto tipo de objetos. La consideración de números como objetos remite a la legitimidad de la consideración de clases como objetos. Pero si clases son el tema de una teoría matemática, clases pueden ser tan poco «objetos» como los propios números y esto, por los mismos motivos.

5. *Cassirer*

La filosofía cassireriana de la matemática[39] sigue la de Natorp en sus motivos fundamentales, pero no se limita a repetirla, y esto, no sólo porque la modifica en puntos particulares,[40] sino porque la explicita de modo decisivo. Esto acontece sobre todo debido a un cambio de acento temático. Que las matemáticas han colocado a la filosofía transcendental frente a un nuevo «Faktum», que éste invalida la fundamentación kantiana de las matemáticas en la intuición y que exige su fundamentación en la lógica, son puntos de partida para los cuales ya ni siquiera se argumenta con particular énfasis (SF, 46-51). El acento está puesto ahora en delimitar el logicismo marburgués de otras variantes posibles del mismo.[41]

Por el motivo mencionado y para evitar repeticiones, no ofreceremos una exposición de la teoría cassireriana del número, sino que nos limitaremos a enunciar brevemente sus tesis principales, para pasar luego a una consideración más detenida de aquellos aspectos que le son específicos. Las tesis fundamentales de la filosofía cassireriana del número son:

1. El número no se funda en la intuición (SF, 51).
2. El número es deducible de conceptos puramente lógicos (SF, 46).
3. La derivación del número de la lógica implica dar a la lógica una nueva forma (SF, 54).
4. La lógica de las relaciones contiene los supuestos del número (SF, 48).

---

[39] Véase: «Kant und die moderne Mathematik. M. Bez. auf Russells und Couturats Werke über die Prinzipien der Mathematik». *Kant Studien*, XII (1907), 1-49 (KMM); *Substanzbegriff und Funktionsbegriff. Untersuchungen über die Grundfragen der Erkenntnistheorie.* Berlin, 1910 (Repr. Darmstadt, 1994) (SF). Sobre la teoría del número en Cassirer compárese: Molek, W. R.: «Cassirer on Mathematics». *Dialoge*, May 1971, 24-27; Weiher, Ch. F.: «Three notions of number». *Philosophia Mathematica*, VII, No. 1-2, 25-56; Vecca, Salvatore: «Il concetto di numero nella filosofia di E. Cassirer». *Il Pensiero*, 13 (1968), 77-108; Ihmig, K. N.: «Reine Anschauung und Reihenbegriff. Zu Cassirers Rezeption von Kants Theorie der Geometrie». *Dialektik*, 1 (1993), 113-138.

[40] En el tratamiento de la geometría, en la interpretación de la teoría de los cortes, en su pronunciamiento frente a la polémica ordinal-cardinal, etc..

[41] Mientras que los trabajos de Natorp son primariamente constructivos, tanto KMM como SF obedecen a un interés polémico.

5. El número no es un objeto o entidad autosubsistente.
6. El número se reduce a relaciones (SF, 47 y 51).
7. Que el número sea deducible de la lógica quiere decir que el número no es otra cosa que un sistema de relaciones.
8. Las relaciones que constituyen el número no tienen lugar entre relatas autosubsistentes.
9. El carácter puramente relacional del número sólo es adecuadamente respetado por la doctrina ordinal. El número en cuanto ordinal está siempre en relación a todo otro. El no es nada en sí subsistente, sino su posición en la serie (SF, 47 y 62).
10. Los números ordinales son los realmente originarios y primitivos y de ellos se deben deducir los cardinales (SF, 53-55), los cuales no contienen ningún momento lógico específico.
11. La aparente derivación del ordinal del cardinal, por el contrario, es circular.
12. Todas las operaciones algebraicas se dejan definir con el ordinal.
13. Todas las proposiciones de la aritmética se dejan derivar de las propiedades relacionales del número (SF, 47 y 62-63).
14. Todo los tipos de números son relaciones.

Si dejamos las tesis 3 y 4 de lado,[42] lo que a primera vista llama la atención es el hecho de que Cassirer toma partido por Dedekind en la polémica entre ordinalistas y cardinalistas. Pero aquí, donde Cassirer parece distanciarse de Natorp e, incluso, retroceder a un grado de compresión del problema anterior a él, en realidad, cuando la tesis es entendida en relación al argumento que la sustenta, observamos que, por un lado, sigue habiendo una coincidencia fundamental y, por otro, incluso un avance. El aporte de Cassirer a la discusión ordinal-cardinal no es de naturaleza lógico-formal,[43] sino epistemológico. Cassirer parte sin más de Dedekind y supone como concedido que su derivación del número es correcta. Basado en el principio de que el ataque es la mejor defensa, asume el camino del confronto y critica la fundamentación Russell-Frege del número en la «Mengenlehre», que define números como clases de clases equivalentes, puesto que una tal posición implica hacer de los números «objetos», esto es, entidades autosubsistentes previas a toda relación. El mismo motivo que conduce a una crítica de Frege, conduce a una concordancia con Dedekind: números no son otra cosa que relaciones. El verdadero sentido de la oposición entre la derivación ordinal y la cardinal del número, es el hecho que mientras que en la primera el número se disuelve en relaciones y la relación se evidencia como su esencia, en la segunda, los números son cuasi-mónadas que subsisten en sí y que si tienen relaciones con otros, éstas en todo caso, no los constituyen (SF, 62).[44]

[42] Ellas son objeto de un artículo del autor de próxima aparición.

[43] Aquí Cassirer no tiene ningún argumento nuevo sino que se limita a repetir y sintetizar los usuales en la época.

[44] Obsérvese que no hay nada en esta doctrina que se comprometa con una posición idealista. Cuando analizamos a Natorp observamos que el idealismo está en el orígen de la teoría de las relaciones internas. El propio desarrollo de esta tesis, que pasa, como vimos, por tomar a la relación en su sentido noemático y, de este modo, desvincularla de toda mitología de actos, conduce a independizarla de él.

Si formulamos la tesis cassireriana de modo suscinto diciendo, por ejemplo: «Números no son objetos» e, inmediatamente a continuación, observamos ue esta tesis se dirije críticamente contra Frege, es casi inevitable que se produzcan confusiones en un lector contemporáneo. Por eso observemos:

1. La crítica de Cassirer no apunta única y específicamente a Frege, sino a lo que podríamos llamar «concepción cardinal del número», no surgiendo en primera línea de una confrontación con los *Grundlagen*, sino con los *Principles*.

2. La tesis cassireriana de que números no son objetos, no es la simple negación de la tesis fregueana. El término «objeto» no está tomado en el mismo sentido en ambos casos, sino que se define por oposiciones diferentes en el marco de contextos sistemáticos diversos. Mientras que en Frege, el concepto de objeto remite al concepto de concepto y función proposicional y, de este modo, a la diferencia existente entre lo completo y lo incompleto, en Cassirer el concepto de objeto se define por oposición al concepto de relación. Para evitar confusiones diferenciemos entonces, a partir de ahora, entre objetos(C) y objetos(F) y reformulemos la cuestión diciendo:

a. Para Cassirer los números no son objetos(C).

b. Según Cassirer, Frege afirma, por el contrario, que números son objetos(C).

c. Cassirer no está interesado en primera línea en negar la tesis que números sean objetos(F).

3. Si es ciertamente una carencia del análisis de Cassirer, el que en su crítica a Frege no advierte al lector sobre los diferentes sentidos del concepto de «objeto», ésto no invalida la cuestión, contenida en la triple pregunta:

a. ¿Son para Frege los números objetos(C)?

b. Y si los son, ¿por qué? ¿Cuáles son los elementos de la concepción fregueana que invitan a una tal interpretación?

c. ¿Son para Frege los números objetos(C) porque son objetos(F)? ¿Implica la determinación de objeto(F) la determinación necesaria de objeto(C), y viceversa?

Comencemos por la primera pregunta. El camino más corto para atribuir a Frege la tesis de que números son objetos(C), es su definición del número como clase de clases equivalentes —que remite a su vez a una concepción de clases como objetos—, en cuanto esto implica concebir a los números como entidades aisladas que recién a posteriori son puestas en relación unas con otras. Ahora, no es obvio que la tesis de Frege, que números sean objetos(F), implique *necesariamente* la tesis de que números sean clases de clases equivalentes. Un lector de los *Grundlage* apuntará, con razón, que es el problema de Julio Cesar y la dificultad de una definición puramente contextual del número, lo que conduce a esa ulterior precisión. Esto no debe impedir, sin embargo, visualizar una diferencia más fundamental y, vinculada a ella, un problema más básico. La tesis que números son objetos, parece contener *—necesariamente—* la ulterior cuestión, de *cuales* objetos

---

Ella adquiere así un carácter eminentemente semántico. Ella no dice que el pensamiento en su espontaneidad «pone» la relación, o que «produce» su relata, sino que *el sentido* de los relata se disuelve en la relación. Cassirer explorará en su filosofía de madurez las posibilidades de esta reformulación semiótica del idealismo y no es en modo alguno casualidad que se constituya en uno de los fundadores del estructuralismo. Véase: «Structuralism in modern linguistic». *Word*, I (1946), 99-120.

ellos sean. Admitamos que Frege, a partir de su tesis de que números son objetos(F) no está obligado a afirmar que números son clases de clases. Sí está obligado, sin embargo, a decir qué objetos son, y en consecuencia, se coloca nuevamente la pregunta, de si, los nuevos candidatos son o no objetos(C). Este es el punto central. ¿Es posible, respetando la tesis de que números son objetos(F), identificar a números con objetos que, sin embargo, no son objetos(C)? Que esta cuestión (y quizás fundada sospecha) es legítima, se evidencia en que son las propias observaciones del último Frege, las que invitan a considerarla.[45] Para nuestro análisis es de particular interés, que las mismas van en estrecha relación con una revisión de los supuestos metódicos sobre los cuales se asienta la teoria del número en los *Grundlagen*.

Hasta ahora nos hemos limitado a referir la posición de Cassirer y su crítica a Frege de un modo puramente descriptivo. Los argumentos que hemos dado determinan, en todo caso, cuál sea la tesis de su oponente, pero ninguno de estos argumentos explica, por qué Cassirer la considera falsa. Ciertamente que para muchos, sobre todo para aquéllos que no sienten ninguna simpatía por el platonismo fregueano una posición como la de Cassirer parece en sí misma razonable y, por ese mismo hecho, sin necesidad de apelo a un argumento ulterior, preferible. Ahora, si bien Cassirer no siente simpatía por un platonismo como el de Frege,[46] su crítica no se dirije de todos modos a la ontología de éste. El argumento decisivo contra el «cardinalismo» no es ontológico ni lógico-formal, sino epistemológico y, en última instancia, de cuño estrictamente metódico. La tesis esencial sobre la naturaleza del número está íntimamente vinculada a una tesis sobre la propia naturaleza de las matemáticas, siendo que ambas confluyen en un mismo punto. Números no son otra cosa que relaciones, *porque* la matemática no se ocupa de otra cosa que de relaciones *y* números no son otra cosa que el objeto de las matemáticas.[47] Aquí hay varios elementos que debemos diferenciar.

La tesis de que el objeto de las matemáticas son las relaciones, no debe ser igualada sin más a la tesis de que números son relaciones. El motivo de ello es, en primera instancia, que la primera es ciertamente más general que la segunda, pues vale no sólo para números, sino para todo objeto pretendidamente matemático.[48] Pero el punto realmente clave aquí no es la diferencia de generalidad entre ambas tesis, sino el que la tesis de que los números son relaciones *se funda* en la tesis de que el objeto de las matemáticas son las relaciones y *se sigue necesariamente* de ella. Sin embargo no lo hace de modo directo. Ello se evidenciará si formulamos

---

[45] Ver Frege, G.: *Nachgelassene Schrifften.* Ed. por Hermes, H., Kambartel, K., Kaulbach, F.. Hamburg,1969. (NS). Más abajo citamos por extenso los textos pertinentes.

[46] Aunque no por eso se oponga de principio a todo platonismo.

[47] «*Die Zahl mag an sich selbst sein, was sie will: für Analysis und Algebra* kommt sie einzig dadurch im Betracht, daß sie sich rein und vollständig in der Form einer Progression darstellen und entwickeln läßt. Wird die aber einmal zugestanden, so ist damit streng genommen der Streit über den methodischen Vorrang der Ordnungszahl bereits aufgehoben: *denn wo ließe sich eine sichere Auskünft über das Wesen der Zahl im erkenntniskritischen Sinne gewinnen, als in ihrem allgemeinsten wissenschaftlichen Gebrauch?*» SF, 62-63

[48] O sea, también para entidades geométricas o para clases.

el argumento por medio de un silogismo, pues de este modo se explicita la premisa que está siendo presupuesta:

—El objeto de las matemáticas son las relaciones.

—Números son objetos de las matemáticas.

—Números son relaciones.

Este silogismo da a la menor una formulación tal, que ella parece inofensiva. Justamente por ello no es conclusivo. Si le damos una formulación lógica adecuada, evidenciamos al mismo tiempo el problema que ella contiene:

—El objeto de las matemáticas son las relaciones.

—Números *no son otra cosa que* objetos de las matemáticas.

—Números no son otra cosa que relaciones.

Si este silogismo es en sí mismo formalmente correcto y nos pone en el camino para entender la posición marburguesa, no nos conduce al fin, pues es claro que el problema ahora se ha trasladado y concentrado en las premisas.[49]

La tesis de que números son, en última instancia, relaciones, y no objetos, se funda en la tesis de que el objeto de las matemáticas son estructuras como su fundamento. Ahora: ¿cuál es la prueba de esta última tesis? La respuesta a esta pregunta es para un neokantiano obvia: el «Faktum», o mejor dicho, el «Fieri» de la ciencia.[50] Porque la ciencia ha devenido «Fieri», el análisis histórico aporta elementos decisivos desde el punto de vista sistemático.[51] En *Substanzbegriff und Funktionsbegriff* defiende Cassirer la tesis —en sus aspectos sistemáticos claramente deudora de Natorp— que la historia de la ciencia se caracteriza por la lucha entre el concepto de sustancia y el concepto de función —lucha esta que es buena medida lucha contra el lenguaje (SF,296)—, siendo que la evolución está signada por un desplazamiento de la primera por la segunda y esto, tanto en la física como en las matemáticas. Dentro de esta perspectiva resulta claro

a) que la filosofía de las matemáticas cassireriana se orienta por el principio fundamental de que el objeto de las matemáticas son las relaciones (y no la «cosa»),

b) que para él la discusión en torno a la primacía del ordinal o el cardinal no hace sino prolongar la eterna lucha entre la sustancia y la función y

c) que en el intento fregueano de identificar los números con ciertos objetos sólo puede ver un retroceso cosificante.

El neokantianismo es en su propio orígen y por su naturaleza esencial en primera línea una opción metódica. Este principio debe ser respetado también cuando se coloca la pregunta por el número. La tesis de que las matemáticas se

---

[49] La tesis neokantiana puede ser falsa por dos motivos: o porque la matemática no se ocupa de estructuras, o porque la matemática no sea la instancia adecuada para resolver que sean los números.

[50] Sobre la transformación del «Faktum» de la ciencia en «Fieri» compárese Natorp, P.: «Kant und die Marburguer Schule». *Kant Studien,* 17 (1912), 193-221.

[51] Son al día de hoy innúmeros los trabajos sobre Cassirer que clasifican sus obras en históricas y sistemáticas. Un tal proceder es la consecuencia de un esquematismo superficial que pasa por alto al elemento realmente decisivo: dado que el «Faktum» de la ciencia se ha transformado en «Fieri», el argumento sistemático exige una perspectiva histórica. Compárese la «Einleitung» a *Das Erkenntnisproblem in der Philosophie und Wissenschaft der neueren Zeit.* Vol 1. Berlin, 1906 (2a. 1911; 3ra. 1922).

ocupan de relaciones es una tesis sobre las matemáticas, o sea, una tesis propiamente epistemológica. La tesis de que números son (sólo) objeto de las matemáticas, parece ser una tesis sobre los números y revestir en consecuencia un carácter ontológico, pero esta apariencia engaña. La menor tiene una naturaleza diferente de la mayor; mientras que la primera es una proposición teorética, la segunda es propiamente metódica. Ella dice propiamente: las matemáticas son la (única) instancia adecuada para resolver la cuestión de lo que sean los números. No es pues una tesis ni sobre los números, ni sobre las matemáticas, sino sobre el método de la filosofía, y éste no es otro que el transcendental.

6. *A modo de conclusión: neokantianismo y «semantic turn»*

Si la teoría del número marburguesa se presenta como fundada en una consecuente aplicación del método transcendental, ¿qué hemos de decir con respecto a la fregueana? La respuesta a esta pregunta abre una perspectiva sobre la relación del neokantianismo al «semantic turn» y sobre los orígenes de éste.

Para Frege y Russell, a diferencia del neokantianismo, un análisis satisfactorio del número no puede restringirse a la matemática, sino que ha de dar cuenta de sus «aplicaciones».[52] Con certeza que no habrán de faltar fregueanos que vean aquí, una prueba más de la superioridad de Frege con respecto a la «filosofía tradicional». Pero el concepto de «aplicación» está quizás antes del problema, pues da un tratamiento fugaz e insuficiente justamente a lo que parece ser el punto fundamental. «Aplicaciones» de números tienen lugar tanto en la física como en la vida cotidiana y en el lenguaje común y es de este último de lo que realmente se trata. A la cuestión cassireriana por el *locus* de la teoría del número (SF, 63), Frege y Russell tienen una respuesta esencialmente diferente de la de Cassirer: ciertamente quizás «también» en la matemática, pero con certeza en primer lugar en el lenguaje.[53]

En *Principles* Russell reconoce que sólo las propiedades relacionales del número son relevantes en las matemáticas y que son justamente estas propiedades las que están contempladas en la definición ordinal e incluso motivan ésta. Sin embargo, y podríamos decir casi paradojalmente, rechaza esta última. Dado que para ello obviamente no dispone, de acuerdo a lo dicho, de argumentos extraídos de las matemáticas,[54] ¿cuáles son sus razones? No otras que el hecho, de que la concepción ordinal no da cuenta del uso del número, tal como aparece en «las afirmaciones sobre números» en «daily life».[55]

---

[52] De particular importancia al respecto es la tercera parte de los «Grundgesetze». En relación a Russell veáse la introducción a la segunda edición de los «Principles» (pp. III-IV).

[53] «Wie soll uns denn eine Zahl gegeben sein, wenn wir keine Vorstellung oder Anschauung von ihr haben können? Nur im Zusammenhang eines Satzes bedeuten die Wörter etwas. Es wird also darauf ankommen, den Sinn eines Satzes zu erklären, in dem ein Zahlwort vorkommt.» G, § 62. Cfe. Russell PM, § 230.

[54] Esto es: la concepcion ordinal no es «matemáticamente» insatisfactoria.

[55] «Of such progression everything relevant to finite Arithmetic can be proved... Apart from the principle of mathematical induction, what is chiefly interesting about this process is, that it shows that only the serial or ordinal properties of finite numbers are used by ordinary mathematics, what may be called the logical properties being wholly irrelevant. By the logical properties of numbers, I mean their

En el caso de Frege vale la pena recordar que, casi de un modo imperceptible, su análisis del número (y en general su renovación de la lógica) colocan al lenguaje común en un puesto central en la filosofía. O mejor dicho: característico de los *Grundlage* es que su estrategia argumentativa se desplaza sin solución de continuidad del lenguaje común a las matemáticas o viceversa, y esto de dos maneras. A veces el análisis del lenguaje común es introducido junto con el principio de contextualidad realizándose así dos movimientos en uno.[56] Por este recurso Frege funda la tesis de que números no son propiedades de objetos sino de conceptos (G, § 46). En otros casos, el lenguaje común es metalenguaje que expresa una propiedad «matemática» del número.[57] Por este medio y de un modo casi imperceptible, por atención al uso a primera vista inofensivo del artículo «el», se abre camino a la tesis de que números son objetos.

¿Es todo esto tan obvio? La posición de Russell y Frege deviene problemática una vez que generalizamos su principio metódico y consideramos a la física como parte esencial del problema —como era usual entre los neokantianos—. Para un neokantiano es evidente que el procedimiento de construcción de conceptos en la «Naturwissenschaft» es simplemente una prolongación del procedimiento de construcción de conceptos en las matemáticas. Justamente por eso las matemáticas son aplicables a la «experiencia». Pero no es en modo alguno evidente, muy por el contrario, es totalmente dudoso, que la constitución lingüística y la constitución físico-matemática de conceptos respondan a los mismos principios. Justamente por ello la lógica (transcendental) no puede orientarse al lenguaje, el cual posee otras funciones que las del conocimiento objetivo.[58] Dicho brevemente, la posi-

---

definition by means of purely logical ideas.... It is number so defined that are used in daily life, and that are essential to any assertion of numbers. It is the fact that numbers have these logical properties that makes them important. But it is not these properties that ordinary mathematics employs and number might be bereft of them withouth any injury to the truth of Arithmetic and Analysis. What is relevant to mathematics is solely the fact tha finite numers form a progression. This is the reason why mathematicians —e.g. Helmholtz, Dedekind and Kronecker— have maintained that ordinals numbers are prior to cardinals; for it is solely the ordinal properties of number that are relevant.» PM, § 230. No puedo dejar de llamar la atención sobre el hecho de que Russell vincula sin mas la lógica al lenguaje. Pero ello coloca la pregunta, en qué relación quede la lógica con las matemáticas, esto es, con la ciencia.

[56] Se puede admitir el principio de contextualidad y sin embargo cuestionar, que las formulas adecuadas para el análisis son del tipo 4 + 4 = 8 y no del tipo «El carruaje del Kaiser es tirado por cuatro caballos».

[57] P. ej. «7 es un número primo».

[58] Kant —observa Natorp— se ha orientado «zunächst am sprachlichen Ausdruck des Gedachten... *Doch liegt in der allzu engen Anlehnung an die Sprachform offenbar die Gefahr, daß man die Gesetzlichkeit des Denkens nicht genug bei der Wurzel faßt.* Die Sprache, als Mitteilung, als soziale Schöpfung zum Verkehr der Gedanken, hat im allgemeinen keine Veranlassung, bis auf die letzten Wurzel des Denkens zurückzugreifen; sie zeigt, wenigstens direkt, nur die fertige und vielfach bereits stark abgeschliffene Prägung der Gedanken, in der sie gleichsam auf den Markt kommen; der Verkehr der Gedanken hat aber offenbar eigene, von dem Zwecke der reinen Erkenntnis verschiedene, oft mit ihm kaum harmonisierende Zwecke. Er arbeitet vor allem notgedrungen mit schon in gewissen Maße fertig überkommenen, fest gewordenen daher mehr oder minder erstarren oder nur in bestimmten, engen Geleisen noch beweglichen Gedankenbildungen läßt daher gerade von der Schöpfung der Begriffe und Begriffsverbindungen also von dem ursprünglichsten Leben des Gedankens meist wenig genug erkennen.» Natorp, P.: *Philosophie Ihr Problem und ihre Problemen.* Göttingen, 1904. pp. 48-49.

ción de los neokantianos está más cerca del segundo Wittgenstein, que del «primer» Frege.

Ciertamente Frege tiene conciencia de la no-identidad entre lenguaje común y científico, conciencia ésta que da sentido al programa mismo de construcción de un lenguaje lógicamente perfecto. Frege no parece ver, sin embargo, propiamente una diferencia de naturaleza entre ambos.[59] Su posición parece ser: no tenemos acceso directo, intuitivo al reino del pensamiento, sino sólo a través de sistemas de signos. Ahora, hay sistemas de signos que producen una imágen más y otros menos adecuada de este reino. Pero lo representado por todo sistema de signos, de un modo más o menos adecuado, es siempre lo mismo.[60] No parece haber sistema de signos que, al mismo tiempo que representa algo, dé la espalda a este reino *único* de Gedanken y, por tanto, la totalidad de la cuestión se reduce a una diferencia de grado. Los textos del último Frege reafirman esta interpretación y esto, porque justamente asumen una nueva perspectiva. Ahora se registra como una importante adquisición: «Die Sprache ist nicht nach dem logischen Lineal geschnitten».[61] Para una mera diferencia de grado ya no hay lugar. La diferencia tiende ahora a ser de naturaleza. La función del lenguaje parece no ser ahora —por lo menos únicamente— la de reproducir el universo lógico y, por ello, su reproducción del mismo es esencialmente inadecuada.

Si lo dicho es en sí mismo sumamente importante para entender Frege en general, es absolutamente decisivo para nuestro tema, pues justamente las observaciones con respecto a la relación entre lenguaje y lógica están efectuadas en el marco de un esfuerzo revisionista que indaga la causa del fracaso de la teoría de números como objetos y cree encontrar[62] la misma en la tendencia cosificante y

[59] Como parece sugerir la comparación del lenguaje artificial con el microscopio en el «Begriffsschrift» (Véase Frege, G.: *Begriffsschrift. Eine der arithmetischen nachgebildete Formelsprache des reinen Denkens.* Halle, 1879. Repr. Hildesheim, 1964).

[60] En tal presupuesto parecen fundarse textos como el siguiente: «Danach haben Zahlzeichen und Zahlwort dieselbe Aufgabe, nämlich die, eine Zahl zu bezeichnen, nur das Bezeichnungsmittel ist verschieden.» *(Zahl.* Sept. 1924. En: NS, 284). Una otra posición parece sugerir este otro texto: «Kann der Mathematiker nicht auch in Formeln denken? Auch die mathematische Formelsprache ist ein Geschöpf des Menschen, wie die Lautsprache, aber von dieser grundverschieden. Jene Eigenheit der Lautsprache, aber von die, wie wir gesehen haben, zu logischen Fehlern verführen, können hierbei vermieden werden... In der mathematischen Formelsprache ist ein wichtiger Unterschied ans Licht getreten, der in der Wortsprache verdeckt ist.» (*Erkenntnisquellen der Mathematik und der mathematischen Naturwissenschaften.* 1924-1925. En: NS, 289).

[61] «Gewiß ist auch die logische Anlage des Menschen bei der Sprachbildung wirksam gewesen, gewiss aber auch neben dieser manche andere Anlagen, z.B. auch die Anlage des Dichters. Die Sprache ist daher nicht nach dem logischen Lineal gemacht.» (*Tagebucheintragungen über den Begriff der Zahl.* En: NS, 282).

[62] «Meine Anstrengungen über das ins Klare zu kommen, was man Zahl nennen will, haben zu einem Mißerfolge geführt. Man läßt sich gar zu leicht durch die Sprache irreführen und gerade in diesem Falle ist diese Irreführung ganz besonders schlimm... Ja bei längerer Beschäftigung mit diesen Fragen kommt man zu der Vermutung, daß der Sprachgebrauch irreführe, daß die Zahlwörter gar nicht Eigennamen von Gegenständen sind und Wörter wie Zahl Quadratzahl u. dgl. keine Begriffswörter sind, so daß durch einen Satz wie "Vier ist eine Quadratzahl" gar nicht die Subsumption eines Gegenstandes unter einen Begriff ausgedrückt wird, und als dieser Satz gar nicht aufgefaßt werden kann

sensualista del lenguaje. Justamente éste es el punto sobre el cual Cassirer ya había llamado la atención catorce años antes.[63]

La filosofía analítica, que en sus comienzos pretendió asumir una actitud plenamente a-histórica, se encuentra en el camino de recepcionar su propio pasado y, de este manera, comprenderse mejor a sí misma.[64] Pero es aún mucho lo que falta por hacer y la tendencia a ofrecer una imágen simplificada y distorsionante de su verdadera novedad, está aún muy lejos de ser superada. A tres conceptos, que por otra parte se encuentran entre sí en estrecha relación sistemática, se apela con particular énfasis cuando se trata de caracterizar la situación de la filosofía contemporánea a Frege: intuicionismo, psicologismo e introspeccionismo. Ninguno de estos tres, sin embargo, es adecuado para caracterizar al neokantianismo, como resulta obvio de lo que hemos expuesto. La teoría neokantiana del número es la consecuencia de la orientación de la filosofía a la ciencia y la aplicación rigurosa del método transcendental. Pero si esto es cierto, entonces, *en relación al neokantianismo*, la virada al «lenguaje» y a la «semántica», ha de entenderse como un desplazamiento del lenguaje científico al lenguaje común. Los

---

wie der Satz "Sirius ist ein Fixstern".» (*Tagebucheintragungen über den Begriff der Zahl.* 23.3.1924-25.3.1924. En: NS, 282).

«Eine für die Zuverlässigkeit des Denkens verhängnisvolle Eigenschaft der Sprache ist ihre Neigung, Eigenamen zu schaffen, denen kein Gegenstand enstpricht. Wenn da in der Dichtung geschieht, die jeder als Dichtung versteht, so hat das keinen Nachtteil. Anders ist es, wenn es in einer Darlegung geschieht, die den Anspruch auf strenge Wissenschaftlichkeit macht. Ein besonders merkwürdiges Beispiel dazu ist die Bildung eines Eigennamens nach dem Muster "der Umfang des Begriffes a" z.B. der "Umfang des Begriffes Fixstern". Dieser Ausdruck scheint einen Gegenstand zu bezeichnen wegen des bestimmten Artikels aber es gibt keinen Gegenstand, der sprachgemäss so bezeichnet werden könnte. Hieraus sind die Paradoxien der Mengenlehre entstanden, die diese Mengenlehre vernichtet haben. Ich selbst bin bei dem Versuchen, die Zahlen logisch zu begründen, dieser Täuschung unterlegen, in dem ich die Zahlen als Mengen auffasen wollte. Es ist schwer einen allgemeinen üblichen Ausdruck zu vermeiden, wenn man die Fehler, die daraus entspringen konnen, noch nicht kennengelernt hat. Es ist gar gar schwer, vielleicht unmöglich, jeden Ausdruck, den uns die Sprache darbietet auf seine logische Unverfänglichkeit zu prüfen. So besteht denn ein grosser Teil der Arbeit des Philosophen - oder sollte wenigstens bestehen - in einem Kampfe mit der Sprache.» (*Erkenntnisquellen der Mathematik und der mathematischen Naturwissenschaften.* 1924-1925. En: NS, 288).

[63] Dice Frege: «Hierbei erweist sich die Neigung der Sprache durch den Gebrauch des bestimmten Artikels als Gegenstand abzustempeln, was Funktion also Nichtgegenstand ist, als Quelle von schiefen und irrleitenden Ausdrücken und damit auch von Gedankenfehlern. Wahrscheinlich haben die meisten Verunreinigung der logischen Erkenntnisquelle hier ihren Grund.» (*Erkenntnisquellen der Mathematik und der mathematischen Naturwissenschaften.* 1924-1925. NS, 292). La tesis fundamental de «Substanzbegriff Funktionsbegriff» es que la historia de la ciencia es la historia de esa «Reinigung», y esto, con la importantísima ulterior observación (desenvuelta por extenso en *Philosophie der symbolischen Formen* (Berlin, 1923-1929. 3 vol.), de que esto no es meramente índice de una insuficiencia lógica de parte del lenguaje sino, más bien, de que el lenguaje tiene otra tarea positiva que la ciencia.

[64] Sluga, H: *Gottlob Frege.* London, 1980; del mismo: «Frege as a Rationalist». En: Schirn, M. (Ed.): *Studien zu Frege I.* Stuttgart - Bad Canndstatt 1976. pp. 27-47; del mismo: «Frege's Alleged Realism». *Inquiry*, 20 (1977). pp. 227-242; Dummet, M.: *Ursprünge der analytischen Philosophie.* Frankfurt, 1992; von Wright, G.H.: «Analytische Philosophie - eine historisch-kritische Betrachtung». En: Meggle, G. y Wessels, U.: Analyomen 1. Proceedings of the 1st. Conference «Perspectives in Analytical Philosophy». Berlin, 1994.

textos simplemente no admiten otra interpretación. Ellos muestran con claridad porque, pese a los importantes puntos de contacto, generalmente pasados por alto, Frege, sin embargo, no era un neokantiano.[65]

* * *

Mario González
Pontificia Universidade Católica
de São Paulo
Rua Monte Alegre, 984
CEP 05014 São Paulo. Brasil.

[65] Gabriel, G.: «Frege als Neukantianer». En: *Kant Studien* 77, 84-101.