La filosofía de los científicos, 1995, págs. 147-179.

LA FILOSOFÍA DE DAVID HILBERT

José Miguel Gambra. Universidad Complutense

Resumen: Este artículo versa sobre las doctrinas epistemológicas de Hilbert, su evolución e influencia sobre su programa. Empieza por un breve examen de las vacilaciones iniciales de Hilbert acerca de los fundamentos de la matemática. Luego se describen las líneas maestras de su programa, una vez madurado, así como la polémica que mantiene con el logicismo y el intuicionismo. Finalmente, se presentan, con más detalle, los problemas epistemológicos que se ocultan en el programa hilbertiano: ¿Cómo se conocen los primeros contenidos de la teoría de números? ¿Cuál es la naturaleza de las proposiciones ideales? ¿Cómo puede usarse tales proposiciones para demostrar proposiciones reales de la matemática? ¿Cómo es posible la matemática aplicada? En la conclusión, se intentan explicar estas dificultades por la intromisión de la epistemología racionalista y kantiana en la ideas matemáticas del propio Hilbert.

Abstract: This paper deals with Hilbert's epistemological theories, their evolution and their effects on his programme. It begins with a briefly examination of Hilbert's initial doubts regarding the foundations of mathematics. Then, the basic points of the mature program and its debate with logicism and intuitionism are described. A closer view is finally offered of some gnoseological problems hidden by the Hilbertian program, namely, how the very first contents of number theory come to be known, which nature is that of ideal propositions, in which way such propositions can be used to prove real propositions of mathematics, and how is in that applied mathematics are possible. In our conclusion, we try to explain these troubles as a consequence of the influence of rationalistic and Kantian epistemology in Hilbert's mathematical ideas.

1. Introducción

David Hilbert nació el año de 1862 en Königsberg, donde realizó sus estudios y dió los primeros pasos de su carrera universitaria. En 1895 fue nombrado profesor ordinario en Göttingen, en cuya universidad enseñó hasta 1934. Murió en 1943.

Sus investigaciones versaron sobre un buen número de temas matemáticos y físicos, como la teoría algebraica de números (1897), los fundamentos de la geometría (1899), el análisis (1912) y los fundamentos de la física (de 1912 a 1927).

Los primeros pasos de lo que vendrá a llamarse el programa de Hilbert, los dió entre 1998 y 1900, y se reflejan en *Los Fundamentos de la Geometría* y en dos conferencias tituladas *Sobre el Concepto de Número* y

Problemas Matemáticos[1]. En ellos presenta el método axiomático formal que permite exponer los fundamentos de una ciencia, haciendo explícitos sus axiomas cuyo papel es, a la vez, describir las relaciones existentes entre los conceptos primitivos de la ciencia y definirlos explícitamente (PM 299-300). Este método conlleva la exigencia de que se demuestre la independencia y completud de los axiomas, pero sobre todo la no contradicción (CN 245, PM 299-300), que es concebida según el procedimiento de la aritmetización del que luego hablaremos (FG 42, PM 300, Cf. Abrusci, *Introducción a Hilbert* 1978, p. 22).

En esta época, anterior al descubrimiento de las paradojas, Hilbert admite sólo dos clases de conocimiento: la experiencia, que es fuente de problemas y de su solución en estados culturales inferiores, y el pensamiento, que tiene una autonomía y capacidad creativa más allá de los datos y problemas que el conocimiento empírico ofrece (PM 292-3). Por otra parte, manifiesta una especie de fe racionalista, que le hace creer en la capacidad de resolver de forma rigurosa cualquier problema matemático determinado, gracias al método axiomático que, a su juicio, abarca toda la matemática (PM 297-8 y 299-300). Finalmente, parece admitir un cierto platonismo matemático, cuyo alcance no es fácil valorar, según el cual la demostración de no contradicción de un concepto demuestra también su existencia matemática (PM 300-1). Con ello se enfrenta ya a quienes, como Kronecker, han presentado objeciones «a la existencia de conceptos infinitos» (CN 248). También por entonces mantiene Hilbert una correspondencia polémica con Frege acerca del método axiomático, empleado por aquél en *Los Fundamentos de la Geometría.*

El primer escrito, donde Hilbert se hace eco de las paradojas, data de 1904 (FL 251). Hilbert, para soslayar la dificultad que tales paradojas suponen, propone que la aritmética no se puede construir sólo con los conceptos básicos de la lógica sino que han de emplearse también conceptos aritméticos como el de conjunto o número (FL 252). Para tal construcción, dice, se ha de partir de unas «cosas mentales... designadas por un signo»

[1] Los trabajos de Hilbert serán citados de acuerdo con las siglas siguientes (la fecha que acompaña a las obras indica, en los libros, el año de la primera edición, y en las conferencias, el año en que se pronunciaron) : CN = *Sobre el Concepto de Número* (1899); PM = *Problemas Matemáticos* (1900); FG = *Fundamentos de Geometría* (ed. 1902); FL = *Sobre los Fundamentos de la Lógica y de la Aritmética* (1904); PA = *Pensamiento Axiomático* (1917); NF = *Nueva Fundamentación de la Matemática, primera comunicación* (1922); FLM = *Fundamentos Lógicos de la Matemática* (1922); I = *Sobre el Infinito* (1925), FM = *Los Fundamentos de la Matemática* (1927), PFM = *Problemas de la Fundamentación de la Matemática* (1928); CNL = *Conocimiento de la Naturaleza y Lógica* (1930); FTN = *La Fundamentación de la Teoría Elemental de los Números* (1930); FM2 = Hilbert & Bernays: *Los Fundamentos de la Matemática* (ed. 1934- 39). Los números que acompañarán a estas siglas indicarán las páginas de: Hilbert (1965) para PM, PA, NF, FLM y CNL; Hilbert (1991) para CN, FG, FL, FM y PFMD, y Hilbert (1978) para I, FTN y FM2.

que son 1 y las combinaciones y combinaciones de combinaciones que con ese 1 podemos formar. Se trata de la primera presentación de la intuición básica de la aritmética, de la cual luego hablaremos.

La fundamentación de la matemática se convertirá en el centro de sus investigaciones a partir de 1917, empujado en principio por la publicación de los *Principia Mathematica* de Whitehead y Russell (1910-13). La conferencia titulada *Pensamiento Axiomático*, pronunciada en dicho año y publicada en 1918, muestra cómo Hilbert queda deslumbrado por los *Principia*, a los que considera «la coronación de la obra de la axiomatización» (PA 153). Se vió así llevado a admitir que la axiomatización de la lógica puede «demostrar que la teoría de los números y los conjuntos son sólo parte de la lógica» y a abandonar la idea de 1904 según la cual la aritmética tiene un contenido propio. En ese momento sólo parece disentir del logicismo en exigir demostraciones de consistencia para salvaguardar la matemática de cualquier contradicción posible, y no sólo de las que se han presentado (PA 152).

Pronto cede, sin embargo, este momentáneo deslumbramiento, pues ya en 1922 parece retener del logicismo sólo el cálculo lógico, y rechaza que en la lógica se halle la única fuente del saber matemático (NF 163). A partir de esta fecha Hilbert emprende la construcción definitiva de su programa en oposición al logicismo, pero también contra el intuicionismo de Kronecker y Poincaré de un lado y de Brouwer y Weyl por otro. En esta última época, como se indicará más adelante, no falta cierta evolución en su pensamiento, en lo que a la epistemología se refiere. Sin embargo, empezaremos por hacer una presentación del programa hilbertiano sin atender a estas variaciones. Luego, tras indicar los principales puntos de fricción con las escuelas rivales, trataremos separadamente los aspectos del programa más interesantes para la teoría del conocimiento y terminaremos ofreciendo una panorámica crítica de la epistemología hilbertiana de la matemática.

2. *El programa de Hilbert*

El estado de la investigación sobre los fundamentos de la matemática, en los tiempos en que Hilbert maduró su pensamiento, no presentaba una faz muy saludable. Por un lado, el logicismo había conducido a paradojas que sólo pudieron salvarse por medio de obscuros postulados; por otro, los viejos y los nuevos intuicionistas rechazaban la teoría cantoriana de conjuntos, por hacer uso de métodos no constructivos que involucraban la admisión del infinito actual, causa, a su juicio, de las paradojas. Con ello se cercenaba del cuerpo de la matemática el análisis moderno basado en la teoría de conjuntos y se expoliaba a las ciencias de la naturaleza de su instrumento más precioso. La matemática parecía por entonces condenada a la pérdida de su certeza o a la pérdida de su integridad.

Frente a semejante situación, Hilbert se subleva con el fin de defender los fueros que siempre se han reconocido a la matemática, sin merma de su extensión. Con sus propias palabras, sus investigaciones sobre los fundamentos de la matemática pretenden

> «restituir a la matemática la antigua reputación de verdad incontestable que parece que va perdiendo por causa de las paradojas de la teoría de conjuntos; pero creo que esto es posible conservando el patrimonio total de la matemática» (NF 160).

Brouwer, como Descartes hizo con toda la filosofía, subordinó a una evidencia —la intuición de la «biunidad»— la totalidad de la matemática, tras ponerla en duda por causa de las paradojas. El itinerario intelectual de Hilbert se asemeja mucho más al de Kant, pues da por sentada sin sombra de duda la matemática, para luego buscar las condiciones de su posibilidad. La similitud de este punto de partida y de esta meta con los de Kant no sólo es patente, sino explícitamente admitida por el propio Hilbert, como más tarde indicaremos.

2.1. Las etapas del pensamiento matemático

La aparición de las paradojas, dada su confianza en la ciencia matemática existente, no le hace a Hilbert sino confirmar en la necesidad, largo tiempo sentida antes, de asegurar este saber con demostraciones de no contradicción. Esto no puede lograrse con la sola ayuda de conceptualizaciones puramente lógicas, pues éstas, cuando no nos conducen a paradojas, sólo nos permiten partir de inciertas hipótesis de contenido como el axioma de reducibilidad y del infinito. Para evitar el derrumbamiento de partes esenciales de la matemática, sólo queda ahondar en las demostraciones de no contradicción y admitir una fuente de evidencia intuitiva ajena a la lógica, pues toda ciencia tiene un contenido y toda demostración parte de algo indemostrable.

Para entender cómo se articula, por una lado, la intuición y, por otro, las demostraciones de no contradicción, de manera que entre ambas se dé completa seguridad al edificio de la matemática en su totalidad, conviene ahora examinar las etapas en que se desarrolla su construcción desde sus partes más fundamentales.

2.11. La aritmética elemental y el álgebra. Los métodos finitistas

En su conferencia de 1922 *Nueva Fundamentación de la Matemática*, una vez abandonado el logicismo, Hilbert vuelve a la idea apuntada en 1904, según la cual tienen que ser dados unos contenidos sobre los que se apliquen las operaciones lógicas (NF 162). Estos datos han de cumplir unas exigencias de especial claridad y facilidad de manejo, para que sobre ellos se puedan emplear las leyes de la lógica con completa seguridad. Estas exigencias son invariablemente descritas por Hilbert de la manera siguiente:

> «esos objetos deben ser completamente dominables en todas sus partes y, junto con los objetos, su exhibición, su distinción, el seguirse unos de otros y el estar unos junto a otros, debe darse de manera inmediatamente intuitiva, como una cosa que no puede reducirse a ninguna otra ni requiere semejante reducción» (FM 288-9, Cfr. NF 163, FTN 314, I 243-4).

Las sucesivas explicaciones que Hilbert ofrece acerca de la naturaleza de estos objetos y de la facultad que los conoce, son bastante oscuras y llenas de evidentes variaciones: en 1904 entiende que son objetos mentales (FL 253); más adelante parece admitir que se conocen a través de la experiencia sensible (NF 163); y finalmente declara explícitamente que son productos de una intuición a priori (CNL 382-3). De ello nos ocuparemos más tarde (vid. 4.1).

Por el momento nos bastará con señalar que, a juicio de Hilbert, la captación intuitiva de combinaciones del signos 1, dispuestos de la manera siguiente:

1, 11, 111

proporciona el contenido básico de la aritmética.

Estas combinaciones del signo 1 forman unas figuras a las cuales Hilbert llama cifras. Estas cifras se emplean en «experimentos mentales» (FM2 366), por medio de los cuales establecemos las proposiciones elementales de la aritmética. Para expresar tales proposiciones se usan unos signos en orden a la comunicación que, a diferencia de las cifras, ya no son ellos mismos objeto de la aritmética. Entre ellos están los números, como «3», que expresa abreviadamente la cifra 111, el signo «+» que significa un proceso de construcción de una cifra a partir de otras por composición, el signo «=» que expresa la coincidencia figurativa, y las letras cursivas que significan una cifra cualquiera.

Con estos signos, entre otros, se pueden representar proposiciones como $2+3=5$, cuya verdad se basa en el experimento mental de poner las cifras representadas por 2 y 3 una junto a la otra, de modo que se forme la cifra 11111. Dando un paso más se hallan las proposiciones universales del álgebra como $a+b=b+a$. Para fundamentarlas se ha de recurrir a la inducción matemática. Esta inducción se realiza por la composición concreta de cifras: sea que un enunciado vale para 1 y que se sabe que si vale para la cifra *n*, vale para la cifra *n+1*, entonces ese enunciado vale para cualquier cifra *a* que se presente. Pues esa cifra *a* se compone a partir de 1, añadiendo repetidamente 1. Según Hilbert no se trata, pues, de un principio autónomo, ajeno a la intuición, como el que se emplea en los sistemas axiomáticos, sino de un procedimiento de contenido intuitivo (FM2 370, NF 164)[2].

Los métodos que se emplean en la teoría elemental de los números y en el álgebra se llaman finitistas y se caracterizan porque todos ellos se basan directamente en los experimentos mentales de composición y descomposición del contenido concreto de las cifras. La teoría de números no constituye, pues, un sistema axiomático donde los principios carecen de contenido intuitivo y necesitan demostración de no contradicción. Se trata de un conocimiento intuitivo e inmediato de contenidos concretos, donde, por ello mismo no cabe la contradicción (NF 164).

2.12. El álgebra y el análisis. Los métodos no finitistas

Merece especial atención el significado que, en este ámbito finitista, tienen los enunciados particulares y universales. Un enunciado universal significa aquí un enunciado hipotético acerca de cualquier cifra presentada. Así $a+b=b+a$ quiere decir que, para cualquier cifra que pongamos en lugar de *a* y de *b* se cumplirá lo que dice esta ley. Un enunciado particular, desde el punto de vista finitista, es un enunciado incompleto que puede determinarse o precisarse mostrando una cifra —o un procedimiento para obtener tal cifra— que cumpla lo que el enunciado dice (FM2 381-2, I 246-7).

Estas consideraciones permiten ver cómo, en el seno mismo de la teoría de los números, se presentan métodos que no son intuitivos o finitistas. Basta para este fin con considerar el sentido de la negación cuando afecta a proposiciones universales o existenciales.

La negación de una enunciado que afirma la existencia de una cifra *n* con la propiedad *A(n)*, puede entenderse de manera débil, relativa a un estado subjetivo de nuestro conocimiento. En tal caso, lo que niega es que estemos en disposición de mostrar una cifra con tal propiedad. Pero hay también una negación en sentido fuerte, independiente de cualquier estado de conocimiento, que, en nuestro caso lo que hace es negar que pueda haber una cifra *n* que tenga la propiedad *A(n)*, lo cual sólo podrá obtenerse

[2] Con la distinción entre un principio de inducción formal y otro de contenido, contesta Hilbert a una objeción presentada por Poincaré, de la que luego hablaremos (vid infra § 3).

por una demostración de imposibilidad.

Negación y afirmación de un enunciado existencial se corresponden con estados distintos de conocimiento. La afirmación de existencia se apoya sobre el hallazgo de una cifra n que posea la propiedad $A(n)$, mientras que la negación fuerte se basa en el conocimiento de una ley general sobre los números. Ahora bien, hallar una cifra con una propiedad y conocer una ley general son dos modos de conocer muy diversos, entre los cuales no es claro que haya una oposición contradictoria, de manera que tampoco es intuitivamente obvio que haya de darse uno de estos estados de conocimiento. De ahí que, desde el punto de vista finitista, desde el punto de vista de lo intuitivamente fundado, no valga el principio del tercero excluso sobre enunciados existenciales: es decir no vale siempre la alternativa «o hay una cifra n que posee la propiedad $A(n)$ o está excluído que $A(n)$ valga para cifra alguna». Lo mismo *mutatis mutandis* le ocurre a la alternativa entre las proposiciones universales y sus negaciones (FM2 382-3, I 246-7).

En otras palabras, el principio del tercero excluso no tiene siempre la evidencia que exigen los métodos finitistas. Cuando se trata de proposiciones elementales de la aritmética, es decir, de proposiciones sobre números finitos, es válido dicho principio. Es, en efecto, claro que, dada una cantidad finita de números, o bien se encuentra un número n que posee una propiedad $A(n)$ determinada, o bien se puede determinar, recorriendo los números dados, que ninguno posee esa propiedad[3].

Sin embargo, en enunciados sobre un dominio infinito, como el conjunto de los números naturales, ya no es intuitivamente válido este principio, pues, al ser imposible recorrer todo el dominio, no cabe siempre decidir si una propiedad vale para alguno o no vale para ninguno. Así ocurre, por ejemplo, con el último teorema de Fermat que, al menos hasta hace poco tiempo, no ha sido ni demostrado ni refutado. No puede entonces aplicarse el principio del tercero excluso, pues no podemos estar intuitivamente seguros de que o bien hay un número entero $n>2$, tal que existan tres enteros a, b, c que cumplan la ecuación $a^n+b^n = c^n$, o bien no existe tal entero n (FM2 386).

En la aritmética aparecen ya proposiciones en las cuales no se puede aplicar los principios de la lógica aristotélica que se emplea en la actitud

[3] Esto mismo puede verse claramente si se observa que las proposiciones existenciales acerca de conjuntos finitos son equivalentes a disyunciones finitas, y su negación es equivalente a una conjunción finita de negaciones. De esta manera resulta que siempre se puede aplicar el simple método decisorio de inspeccionar todos los casos para determinar si los elementos de la disyunción o conjunción poseen o no una propiedad determinada. Lo mismo ocurre con las proposiciones universales que son equivalentes, en un dominio finito, a una conjunción finita (I 245-6).

finitista. La razón de esto se halla en la utilización que hace la aritmética de conjuntos infinitos como totalidades. Por ejemplo, el conjunto de los enteros. Sin embargo, conforme a lo que Brouwer ha mantenido, las demostraciones que, en la aritmética común hacen uso de este tipo de conjuntos, es decir del infinito actual, pueden evitarse por procedimientos bastante simples (FM2 386).

Donde no se puede evitar el infinito actual es en el análisis. En cualquiera de las definiciones del número real, sea como fracción decimal, sea por medio de la cortadura de Dedekind o de las sucesiones fundamentales, siempre se da por supuesto un dominio infinito de individuos como totalidad completa. Así, en el procedimiento de la cortadura, se parte del conjunto de los números racionales como un dominio de individuos. Pero, además, todo el análisis está fundado en métodos no finitistas como el uso del tercero excluso sobre conjuntos infinitos actuales. Así ocurre, por ejemplo, al establecer la relación > entre los números reales definidos por cortaduras: se da $a>b$ si en b hay un racional que no está en a. Pues bien, al enunciar la simple ley según la cual, dados dos números reales a y b, tales que $\neg(a=b)$, o bien $a>b$ o bien $b>a$ ya usamos el principio del tercero excluso sobre conjuntos infinitos actuales: o bien hay un racional r que está en a y no en b, de modo que $a>b$ o bien no, y entonces $b>a$ (Cfr. KLEENE, 1974, p. 56).

2.2. *Los elementos y proposiciones ideales*

Estas observaciones parecen conducir a una situación imposible de admitir, a ojos de Hilbert. En efecto, la actitud finitista, que atiende a los contenidos intuitivos para tener un criterio de validez, no tiene la capacidad de legitimar el uso de principios como el del tercero excluso sobre conjuntos infinitos actuales. Es decir, no hay base intuitiva para aplicar las leyes de la lógica común, sistematizada por Aristóteles, al análisis, que trata precisamente de esos conjuntos. Si tuviéramos que atenernos sólo a los métodos finitistas, o bien tendríamos que prescindir de los conjuntos transfinitos, y por tanto del análisis, o bien tendríamos que construir el análisis sin usar las leyes de la lógica aristotélica. Lo primero es inadmisible, pues el análisis y la teoría cantoriana de conjuntos en que se funda, constituyen un logro definitivo del espíritu humano, plenamente refrendado por la utilidad de sus aplicaciones, del cual no cabe en modo alguno prescindir. No menos inaceptable es lo segundo, pues

> «de hecho nadie, ni siquiera quien hablara el dialecto de los ángeles, puede impedir a los hombres negar una afirmación cualquiera, expresar afirmaciones parciales o aplicar el tercero excluso» (I 247).

El punto de partida de Hilbert, que da por segura la matemática actual en su totalidad, es lo que, en definitiva, le lleva a rechazar tanto la posibilidad de cercenar el análisis como la de reformar su lógica.

Sin embargo, esta situación no es tan imposible como aparenta. Queda una salida muy del gusto de los matemáticos que permite preservar la totalidad de la matemática junto a las leyes lógicas acostumbradas:

> «Recordemos que somos matemáticos y que ya nos ha ocurrido encontrarnos en situaciones tan desfavorables y que el genial método de los elementos ideales es lo que nos ha salvado» (I 247).

Este método se caracteriza por abandonar la exigencia de evidencia intuitiva para todos y cada uno de los elementos y proposiciones de la ciencia. En muchas ciencias aparecen elementos y proposiciones que no tienen un significado experimental ni intuitivo y que tienen como único fin dar perspicuidad y simplicidad a la ciencia. Así, en geometría, se aceptan puntos infinitamente lejanos, como aquél en que se unen dos paralelas, para simplificar el sistema de las relaciones de incidencia (I 224). Pues bien, también en matemáticas es necesario hacer uso de proposiciones y elementos que no tienen un significado finitista, es decir, que no pueden representarse intuitivamente.

> «De la misma manera que en la teoría elemental de números son indispensables los números negativos, y de la misma manera que sólo mediante los ideales de Kummer y Dedekind se hace posible la teoría de los números y el álgebra moderna, así la ciencia matemática es posible sólo mediante la introducción de los enunciados ideales» (FM 297).

El infinito actual que aparece ya cuando consideramos la totalidad de los números naturales como unidad acabada, y que se hace indispensable en los conjuntos infinitos no enumerables, como el de los reales, constituye el elemento ideal por antonomasia. En efecto, lo infinito es para Hilbert completamente ajeno a la intuición. El infinito carece por completo de realidad. En la física moderna no se admite ni lo infinitamente grande, ni lo infinitamente pequeño. El universo está compuesto de elementos discretos indivisibles y en su totalidad tiene un tamaño enorme, pero finito (CNL 380, FTN 317). Por ello dice Hilbert que el infinito es un producto de nuestra mente, al aplicar la negación a lo que la intuición nos ofrece. Y las proposiciones acerca de lo infinito, si no se refieren a un estado casual de conocimiento (como ocurre con las proposiciones existenciales en el sentido finitista) son proposiciones ideales de la ciencia matemática. Así, la aplicación del tercero excluso, sin las limitaciones del pensamiento finitista, constituye de nuevo un procedimiento ideal, falto de contenido intuitivo o real.

2.3. La metamatemática

Con la admisión de proposiciones ideales se evita la destrucción del análisis. Pero, a la par, desaparece la seguridad que toda rama de la matemática debe poseer. En la teoría elemental de números la seguridad surgía de la evidencia intuitiva, cuya falta es precisamente lo que caracteriza las proposiciones ideales. ¿Cómo devolver a la matemática superior la seguridad así perdida? Hilbert encontró la respuesta en el método axiomático, que involucra las demostraciones de no contradicción, cuyas virtualidades todavía no habían sido explotadas.

La axiomática se puede entender bien en un sentido amplio, bien en un sentido restringido. En el más amplio sentido un sistema axiomático es aquélla teoría donde los conceptos y las proposiciones básicas vienen expuestas al principio y el resto del contenido de la teoría se deriva lógicamente de aquéllos por medio de demostraciones (FM2 341). Con esto se logra que vastos ámbitos de conocimiento se vean reducidos a unas pocas proposiciones de las que todo lo demás se sigue deductivamente (CNL 302). Las axiomáticas en sentido amplio se caracterizan porque la validez y coherencia del sistema está unida a determinados contenidos que se conocen por la experiencia o por alguna evidencia intuitiva.

Dentro de estas axiomáticas de contenido caben grados de perfección, según queden mejor o peor explicitados al principio los elementos que luego se emplean. Fuera de los sistemas axiomáticos, en las presentaciones pedagógicas de los contenidos de una ciencia, suele emplearse el método genético. Por ejemplo, cuando se introducen los números negativos como una extensión necesaria para ejecutar de manera general la resta (CN 244-5). En las axiomáticas más rudimentarias permanece este método genético. Así ocurre en la geometría de Euclides, donde los conceptos básicos se presentan como postulados de construcción (por ejemplo cuando dice que, en torno a un punto, se puede trazar un círculo con un radio determinado) (FM2 365). Este es seguramente un procedimiento más perfecto que el anterior, porque los conceptos ya no aparecen según se van necesitando, sino que se establece un procedimiento común de construcción. Sin embargo estas axiomáticas todavía tienen que mejorarse mucho, primero porque en ellas no queda prefijado qué objetos existen para la teoría y además porque los conceptos tienen un contenido intuitivo no perfectamente definido. Estos dos fallos pueden obviarse por medio de sendos expedientes: establecer al principio el dominio delimitado de los objetos que existen (por ejemplo, para la geometría este dominio puede ser el conjunto de los puntos) y entender que los conceptos básicos de la teoría tienen el sentido que les dan los axiomas, haciendo abstracción de cualquier otro contenido intuitivo que dichos conceptos puedan tener (FM2 342). A estos expedientes recurrió Hilbert cuando, en *Los Fundamentos de la Geometría* y en los *Los Fundamentos de la Matemática* (de 1934) presentó un sistema axiomático de geometría.

En todo caso, se utilicen o no estos perfeccionamientos del método axiomático, la validez de todo el sistema se apoya sólo sobre la evidencia intuitiva de las proposiciones primeras (FM2 343 y 348). Por ello, las axiomáticas de contenido sólo pueden utilizarse allí donde se trata de hechos o de cualquier otra clase de contenidos intuitivos. Este es el caso de la geometría que, para Hilbert, es una parte de la física, como luego indicaremos (vid. infra § 4.1).

Muchos de los campos de la ciencia, sin embargo, emplean elementos ideales, que son designados por términos ayunos por completo de sentido intuitivo. Por ejemplo, los puntos infinitamente alejados donde se cruzan dos paralelas que utilizan la geometría, o los números complejos imaginarios del álgebra. En las teorías con elementos y proposiciones ideales no disponemos de la evidencia intuitiva o de la experiencia como garantía de que el sistema es verdadero. Ni siquiera estamos al abrigo de contradicciones como las que se han presentado en la teoría de conjuntos. De ahí la necesidad de ofrecer demostraciones de no contradicción de los sistemas axiomáticos que contienen los citados elementos ideales. Pues bien, los sistemas axiomáticos en sentido estricto son los que se definen precisamente porque necesitan demostraciones de no contradicción:

> «La forma fuerte de la axiomática que resulta de la abstracción del contenido fáctico y de las concepciones existenciales (a la cual llamaremos "axiomática formal") se caracteriza porque hace necesaria una demostración de no contradicción» (FM2 342).

El uso del método axiomático formal consta de dos partes. La primera viene ya apuntada en el álgebra, que es la continuación natural de la teoría elemental de números. En ésta última se emplean para la comunicación letras que designan cifras, y las ecuaciones sirven para designar la igualdad de contenido de estas cifras. Por el contrario, en el álgebra las expresiones sirven, por un lado, para formalizar los contenidos de la teoría de números y, por otro, —esto es lo importante— se consideran como formas que son a la vez objeto de una captación intuitiva. Teoría de números y álgebra coinciden en partir de un conocimiento intuitivo, pero difieren en que, para la primera, este conocimiento es el de las agrupaciones de signos que Hilbert llama cifras, mientras que para el álgebra lo que es objeto de captación intuitiva son las fórmulas mismas. Por otra parte, mientras que en la teoría de números las demostraciones se hacen por experimentos mentales sobre el contenido intuitivo de las cifras, en el álgebra las demostraciones se hacen pasando de una fórmula a otra conforme a unas reglas (I 248). Basta, pues, a juicio de Hilbert, con generalizar este procedimiento iniciado en el álgebra, para ver toda la matemática, incluido el análisis, como un conjunto de fórmulas sin sentido, donde no se distinguen las proposiciones de contenido intuitivo de las proposiciones ideales (*ibid.*). En otras palabras, la matemática se convierte en un sistema formal axiomático con todas sus características.

Una vez alcanzado este «horizonte superior» (NF 165), sólo falta dar el segundo paso que consiste en asegurar el sistema contra la aparición de posibles contradicciones, lo cual sólo se puede alcanzar por medio de demostraciones de no contradicción que no presupongan la no contradicción de otros sistemas. Este es el fin de la teoría de la demostración o metamatemática que es, de nuevo, un saber intuitivamente fundado. En efecto, estas pruebas de no contradicción se refieren a las cadenas finitas de fórmulas que son las demostraciones matemáticas, y por ello los métodos que utilizarán serán de nuevo finitistas y por tanto completamente seguros en sí mismos.

Los procedimientos para demostrar la no contradicción son de varias clases. El más sencillo, que Hilbert llama método de la exhibición, consiste en hallar un modelo finito de objetos que satisfagan las fórmulas en que se expresan los axiomas. Una fórmula de la lógica de predicados es satisfacible si podemos mostrar que, para una determinación o interpretación de sus predicados, dicha fórmula es verdadera. Para determinar un predicado que afecta a unas variables, basta con establecer un curso de valores de las variables, tal que pueda afirmarse que el predicado es verdadero o falso. Si para ello basta con un dominio finito de objetos —que se designarán por medio de números— entonces podremos evaluar la fórmula utilizando un método combinatorio que permita examinar, uno por uno, todos los casos (FM2 350).

Sea un sistema axiomático donde aparecen predicados poliádicos. Por el método indicado, en ocasiones, se puede saber si tal sistema es satisfacible o no. Para ello procederemos de la forma siguiente: primero construiremos una sola fórmula con todos los axiomas unidos por conjunciones. Segundo, determinamos los predicados escogiendo un dominio finito de como curso de valores de las variables, de modo que pueda establecerse la verdad o falsedad de la fórmula para cada combinación de los objetos del dominio. Cuando esto último puede realizarse, entonces basta con examinar, caso por caso, para hallar —si la hay— una combinación de valores que hagan verdadera la fórmula. Si hay tal combinación, la fórmula es satisfacible y el sistema axiomático es consistente.

Este método de al exhibición no puede, sin embargo, emplearse siempre. No es difícil hallar fórmulas con predicados poliádicos, cuya verdad o falsedad no puede establecerse señalando un dominio finito de objetos como curso de valores de las variables (FM2 357-9). En tales casos hace falta recurrir a un dominio de objetos equivalente al de los números naturales y no podemos emplear un método combinatorio como el de la exhibición, pues no cabe examinar caso por caso un dominio infinito.

Para mostrar la no contradictoriedad de sistemas axiomáticos semejantes, podemos representar los objetos de tal sistema por medio de números o sistemas de números y sus relaciones fundamentales por medio de ecuaciones, de modo que el carácter satisfacible de los axiomas venga demostrado por teoremas aritméticos de existencia. Este procedimiento, que presupone la no contradictoriedad de la aritmética, se llama método de la aritmetización y ha sido empleado con éxito, por ejemplo, en teorías físicas y es el que emplea Hilbert para demostrar la no contradictoriedad de la geometría en *Los Fundamentos de la Geometría* (§9, Cfr. FM 299, FM2 243-4 y 261-4).

Ahora bien, si queremos demostrar la no contradictoriedad de los axiomas de la aritmética ya no podemos reducirlos a otra teoría anterior. Conocido es el fracaso de Frege al intentar fundar la aritmética sobre la lógica. Tampoco cabe, por tratar del infinito, recurrir a una multiplicidad de objetos que puedan conocerse con evidencia intuitiva, pues el infinito en una idealización carente de realidad. Por esto sólo queda, a juicio de Hilbert, una posibilidad: considerar los axiomas de la aritmética como un conjunto de fórmulas sin contenido y demostrar por procedimientos que no entrañen idealizaciones como el infinito, es decir, por procedimientos intuitivos, que de esos axiomas no pueden seguirse dos fórmulas, una de las cuales sea A y la otra $\neg A$[4] (FLM 179-80, NF 165, FM2 363-4). Las proposiciones ideales, introducidas para evitar las limitaciones de la matemática intuitiva, se ven así justificadas por medio de la evidencia intuitiva misma (I 253).

Volvamos ahora a la definición de axiomática formal como aquélla que necesita una demostración de no contradicción. Verdad es que también las axiomáticas de contenido como la geometría pueden ser objeto de tales demostraciones, sea por el método de la exhibición en la medida en que es posible (FM2 356), sea por la aritmetización (PM 300). Pero no necesita de ellas porque los axiomas hacen referencia a unos contenidos intuitivos cuya evidencia basta para mostrar la validez de ésos sistemas (FM2 342). En cambio, como hemos visto, los sistemas axiomáticos que contienen elementos ideales, al carecer de esta evidencia en su punto de partida, tienen que asegurarse por medio de demostraciones de no contradicción,

---

[4] Lo cual viene a ser lo mismo que demostrar la inderivabilidad de una fórmula como $\neg(0=0)$ (FM 298, FLM 184, I 286, FM2 409).

que evidentemente no podrán ser por exhibición. En otras palabras, caracterizar las axiomáticas formales como aquéllas que contienen elementos ideales o como aquéllas que necesitan demostraciones de no contradicción viene, a ojos de Hilbert, a ser lo mismo (FM2 343). De estos caracteres esenciales se siguen otros que no definen tan perfectamente la esencia de las axiomáticas formales. 1) Los axiomas de un sistema de este tipo siempre deben servir de definición de los conceptos básicos de la teoría de que se trate, y en modo alguno puede recurrirse a nada que no esté explícito en ellos. 2) Las axiomáticas formales deben expresarse por medio de fórmulas, pues la metamatemática trata sobre el sistema como conjunto de fórmulas. 3) En las axiomáticas formales no importa la evidencia intuitiva de las proposiciones para ser elegidas como axiomas o proposiciones primeras, puesto que su validez no se funda en la intuición, sino en las pruebas de no contradicción. Estos caracteres pueden darse también en las axiomáticas de contenido, en cuando se dé de ellas una demostración de no contradicción, pero, y esto es lo que las diferencia de aquéllas, no es necesario que sea así.

Arriesgada es, sin duda, la apuesta de Hilbert, pues toda su fundamentación de la matemática queda pendiente del resultado de un programa de demostraciones que estaba todavía en gran medida por intentar. Sin embargo, él estaba plenamente convencido del futuro éxito de su empresa, que pretendía hacer de la matemática una ciencia completamente segura y autosuficiente, independiente de cualquier hipótesis:

> «Para su fundamentación no tengo necesidad ni del buen Dios (como Kronecker), ni de una supuesta capacidad especial de nuestro intelecto sintonizada con el principio de inducción completa (como Poincaré), ni de la intuición originaria de Brouwer, ni finalmente (como Russell y Whitehead) de los axiomas del infinito, de reducibilidad o de completud, que son en realidad hipótesis de contenido que no son amparables con una demostración de no contradicción» (FM 308-9).

3. *Hilbert, el intuicionismo y el logicismo*

En el análisis, según hemos visto, se hace uso del infinito como totalidad actual. Así sucede, por ejemplo, al definir los números reales, por la cortadura de Dedekind, como conjuntos infinitos de fraccionarios. Estos procedimientos, ajenos, sin lugar a dudas, a cualquier intuición, eran rechazados ya por la vieja escuela intuicionista. Sólo podrían defenderse, como reconoce el propio Poincaré, por medio de una demostración de no contradicción. Mas Poincaré pensaba que semejante demostración era imposible porque, cualquiera que ella fuese, conllevaría un círculo vicioso. En efecto, para demostrar la no contradicción habría que emplear el principio de inducción matemática, que es a su vez uno de los postulados básicos de la aritmética, de modo que necesariamente se caería en la petición de principio.

Hilbert rechaza esta crítica distinguiendo dos principios de inducción matemática. El primero de ellos, intuitivo, es el que se emplea en la aritmética elemental. El otro es el que aparece en la matemática formalizada, que engloba el álgebra y el análisis, y es un principio puramente formal. Las demostraciones de no contradicción han de hacer uso de métodos finitistas o de contenido intuitivo, es decir, del primer principio, para demostrar la validez de la matemática formalizada, incluído el principio formal de inducción (FM 276; NF 164, FM2 370). La distinción entre una matemática intuitiva y otra formalizada es lo que permite obviar la crítica de Poincaré.

En la nueva escuela intuicionista, fundada por Brouwer, la principal objeción al análisis y a la teoría de conjuntos atañe a los enunciados existenciales y al principio del tercero excluso. Cuando se trata de una totalidad infinita actual, como la que aparece ya en los enunciados universales del álgebra, no se puede decir que o bien es verdadera la afirmación universal del predicado o bien existe un individuo del que es falso decir tal predicado. Porque la negación de cualquiera de las partes de esta disyunción conllevaría la afirmación de un enunciado que, al referirse a una totalidad infinita, carece de contenido intuitivo: no se puede recorrer el infinito para comprobar si todos sus elementos cumplen el predicado o si hay uno que no lo cumple. Los enunciados existenciales de este tipo son, a juicio de Brouwer, la fuente de las paradojas de la teoría de conjuntos. Hilbert se opone a semejante crítica señalando, conforme a lo que he llamado su punto de partida, que las exigencias de Brouwer no se corresponden con la situación real de la ciencia. No es, en primer lugar, necesario que todas las fórmulas de una ciencia tengan un contenido intuitivo por sí mismas. De hecho no es así en ciencias como la física donde sólo algunas consecuencias de las teorías pueden ser experimentadas (FM 283). Es, además, completamente falso que el principio del tercero excluso sea el culpable de las paradojas de la teoría de conjuntos (FM 303-4) El análisis es un campo de doctrina que, aún en sus partes más complicadas, goza de una completa unanimidad en sus resultados (NF 159). Y en el análisis, las demostraciones de existencia que hacen uso del principio del tercero excluso son un instrumento tan importante como el telescopio para el astrónomo o los guantes para el púgil. Es del todo arbitrario pretender quitarle al matemático este medio poderosísimo y cercenar así los más preciosos tesoros del análisis (FM 304, NF 160).

El intuicionismo en general le parece a Hilbert una excentricidad cuya influencia no deja de maravillarle (FM 304). Llama por ello a Kronecker, su fundador, un dictador que se deja llevar por sus propias intuiciones para eliminar cuanto, para él y su escuela, no es un número entero (NF 161).

Esto no obstante, Hilbert reconoce que el constructivismo debe ser admitido en lo que tiene de natural, pues, como hemos visto, Hilbert admite, igual que el intuicionismo, la existencia de una matemática intuitiva (NF 160).

La otra escuela a la que Hilbert se opone es el logicismo. Su error es un fallo de principio: La matemática, al igual que las demás ciencias, no se fundamenta sólo en la lógica, sino que necesita un tipo de representaciones a priori que, en modo alguno se reducen a las leyes de la lógica (FM 289). Estas representaciones constituyen la aritmética elemental que es un saber intuitivo. En esto se considera Hilbert seguidor de Kant:

> «Éste [Kant] ya mantenía la doctrina de que las matemáticas tienen un contenido independiente de la lógica y que no pueden fundamentarse sólo en la lógica: esto ya por adelantado condenaba al fracaso las tentativas de Frege y Dedekind» (I 243).

Pero la condenación definitiva del logicismo fue el descubrimiento de las paradojas en la obra de Frege que surgieron de la falta de «prudencia al aplicar conceptualizaciones de la lógica a la matemática», como ocurrió con el concepto de extensión usado sin limitaciones (NF 162). Como hemos visto del fracaso del logicismo también extrae Hilbert una lección importante para su propia fundamentación de la matemática: basar las matemáticas sobre proposiciones pretendidamente evidentes por su contenido, como ocurre con los axiomas de reducibilidad y del infinito, es un procedimiento inseguro y defectuoso (NF 162, FM 308-9, PFM 312). De aquí colige Hilbert que sólo queda una posibilidad de dar a la matemática la certeza que requiere. Atenerse rigurosamente a intuiciones completamente seguras conlleva la eliminación de partes tan esenciales para la matemática como el análisis clásico; manejar abstractos contenidos conceptuales puede conducir a paradojas. Sólo queda la demostración de no contradicción de la matemática, presentada como sistema axiomático, si se quiere conservar la seguridad y la integridad de esta ciencia. Tal es, como se ha indicado, el fin primordial del programa de Hilbert (NF 162).

4. Los problemas epistemológicos del programa hilbertiano

Una vez expuestas las líneas generales del programa de Hilbert junto a sus bases filosóficas, conviene examinar con algún detenimiento las principales dificultades de orden epistemológico que tal programa suscita, para que luego podamos ofrecer una visión de conjunto de toda su epistemología.

4.1. Los contenidos elementales de la aritmética

Arriba se indicó cómo en la teoría de números se realizan demostraciones de contenido, basadas en experimentos mentales sobre unos objetos captados intuitivamente. Sin embargo, a la hora de describir estos objetos, su naturaleza y la suerte de conocimiento por el que se alcanzan, Hilbert se muestra oscuro y vacilante.

En los textos de Hilbert se pueden distinguir tres clases de consideraciones encaminadas a exponer esta clase de objetos: 1) la presentación directa de los objetos, 2) la descripción de lo que tales objetos son y cómo deben entenderse y 3) Las aclaraciones de orden epistemológico con las cuales pretende exponer el modo en que conocemos tales objetos.

En la presentación de dichos objetos de la intuición ya hay marcadas diferencias entre unos textos y otros[5]. Pero las diferencias más importantes se hallan entre las descripciones de esos objetos y las aclaraciones epistemológicas que añade Hilbert; pues cada una de ellas permite, a nuestro juicio, una interpretación dispar de este tipo de conocimiento. Cabe en efecto entender que los contenidos elementales de la aritmética se obtienen a partir de unos objetos sensibles y, cabe también entender que se conocen por una intuición a priori.

A) Según la primera de estas interpretaciones, los contenidos elementales de la aritmética surgen de una abstracción a partir de los objetos sensibles que Hilbert presenta[6].

Esta interpretación se ve avalada, en primer lugar, por el carácter sensible que Hilbert parece, con bastante claridad, adjudicar a esos objetos. Así, en NF 163, dice que «los objetos de la teoría de números son propiamente los signos», y añade que esos signos carecen de significado. En I 244 y en FM 289 dice que esos objetos son «los signos concretos mismos, cuya forma... es inmediatamente clara y reconocible». Finalmente en FM2 366, afirma Hilbert que se trata de «objetos concretamente presentes» que pueden elegirse sin que importe la manera en que se haga la elección, con tal de que se mantenga la elección realizada.

---

[5] En 1904 aparecen, según vimos, como combinaciones y combinaciones de combinaciones de 1. Luego (NF 163) aparecen como composiciones de 1 y +, de la forma siguiente:

$$1$$
$$1+1$$
$$1+1+1$$

Más adelante, en la conferencia *Sobre el Infinito* (I 244), vuelve a las combinaciones de 1, aunque sin hablar de combinaciones de combinaciones. Finalmente en *Grundlagen der Mathematik* las describe como formadas por un objeto inicial 1 y un método de prosecución (FM2 366), de modo que de nuevo resultan las combinaciones

1, 11, 111

[6] Esta es la interpretación que admiten Kitcher (p. 109) y Detlefsen (pp. 33-4).

En segundo lugar Hilbert parece, casi inconscientemente, admitir que sobre esos objetos sensibles se realiza una operación de separación o abstracción, por la cual se prescinde de las diferencias en la ejecución, del espacio y del tiempo. Valgan de ejemplo estas frases que completan las de NF 163, que acabamos de citar:

> «para mí —en neta oposición a Frege y Dedekind— los objetos de la teoría de los números son propiamente los signos, cuya forma podemos reconocer universal y seguramente, *con independencia* del espacio y el tiempo y de las condiciones particulares de la constitución del signo, así como de las insignificantes diferencias que pueda haber en su ejecución» (las cursivas son nuestras; cf. FM 288-9 y FM2 367).

B) Conforme a la segunda interpretación, los contenidos elementales de la aritmética son el resultado de un conocimiento intuitivo, inmediato de objetos concretos, irreductibles tanto al pensamiento como a la experiencia, que es a priori, pero no involucra las nociones de espacio y tiempo como Kant pretendía.

Esta segunda interpretación se funda sobre las exposiciones epistemológicas más bien tardías en su obra, con las cuales trata de aclarar la naturaleza de este conocimiento. He aquí uno de los párrafos donde más claramente encuentra apoyo esta interpretación:

> «que el a priori no es ni más ni menos que el fundamento básico que yo deseo llamar finitista: algunas cosas, en efecto son dadas ya con anticipación en la representación, ciertos objetos concretos extra-lógicos, que existen intuitivamente como experiencias inmediatas antes de todo pensamiento... el seguirse el uno del otro o el estar uno junto a otro son dados de modo inmediatamente intuitivo, junto a los objetos como algo que no puede reducirse a otra cosa o que no tiene necesidad de tal reducción» (FTN 314)

El carácter completamente *sui generis* de este modo de conocimiento, diferente tanto de la experiencia como de la lógica, aparece con toda claridad en la conferencia que Hilbert pronunció en Königsberg, su ciudad natal, en 1930, con motivo de ser nombrado ciudadano honorario. En ella quiso rendir tributo a su conciudadano, Manuel Kant (Reid p. 192), tratando de mostrar cómo su programa era en parte deudor del ilustre filósofo. Más concretamente, afirma que el conocimiento básico de la aritmética brota de una intuición a priori, que es una fuente de conocimiento diversa del pensamiento y la percepción:

> «ciertos filósofos —y Kant es un representante clásico de este punto de vista— han afirmado que nosotros tenemos, además de la lógica y la experiencia, ciertos conocimientos a priori sobre la realidad... Yo creo, a fin de cuentas, que también el conocimiento matemático se basa sobre cierto tipo de tales datos intuitivos y que también para la construcción de la teoría de los números tenemos necesidad de cierta fundamentación intuitiva a priori» (CNL 383).

Sin embargo, encuentra que la teoría del a priori de Kant contiene «escorias antropomórficas de las que debe liberarse» (CNL 385). En efecto, el conocimiento a priori que funda la teoría de números no se identifica con las intuiciones del espacio y del tiempo, como pretendía Kant, pues estas cosas son, a juicio de Hilbert, objeto de la experiencia sensible. En tiempos de Kant podía pensarse que el conocimiento del espacio y del tiempo es anterior a cualquier conocimiento de la naturaleza. Pero las investigaciones posteriores de Riemann, Helmholtz y Gauss, entre otros, han mostrado, por una lado, que

> «la geometría no es mas que aquella parte del entramado conceptual de la física que representa las posibles relaciones de posición de los cuerpos rígidos en el mundo de las cosas reales... la geometría no es mas que una rama de la física y bajo ningún aspecto de principio se establecen o forman las verdades geométricas de una manera diferente a las de la física» (CNL 384-85).

y, por otro, que la doctrina del tiempo absoluto, como ha mostrado Einstein, sólo puede mantenerse en el entorno al que estamos acostumbrados, donde las distancias son breves y los movimientos lentos.

Ambas interpretaciones son, en principio, incompatibles, puesto que si los objetos en cuestión se conocen por abstracción desde la experiencia no son conocidos a priori ni son irreductibles a cualquier otro conocimiento; y si son a priori, no se conocen por abstracción. Si hay algún modo de encajarlas, Hilbert no fue capaz de expresarlo, ni quizás estuviese en condiciones de captarlo[7]. Como, por otra parte, ambas interpretaciones tienen base suficiente en los textos de Hilbert, hemos de admitir que su teoría sobre el conocimiento básico de la aritmética es incoherente.

En realidad, esta concepción híbrida del conocimiento de los conteni-

---

[7] Ambas interpretaciones quizás pudieran unirse si, por un lado, se admitiera que hay una captación completamente no empírica de la sucesión pura, sin contaminaciones espaciotemporales, y, por otro se defendiera que, en la experiencia de los signos 1 formando figuras, la mente reconoce esa sucesión al mismo tiempo que se actualiza en ella ese conocimiento puro. Esta interpretación platonizante es la que parece haber adoptado Tait (pp. 542-3).

dos básicos de la aritmética es, a nuestro juicio, el resultado del desarrollo de la doctrina epistemológica de Hilbert, cuyo examen resulta muy instructivo.

Ya vimos cómo Hilbert en 1922 se aparta de la tesis logicista, abrazada transitoriamente en 1917, alegando que la utilización imprudente de los conceptos lógicos produce resultados inseguros, como las paradojas de la teoría de conjuntos han puesto de manifiesto. Ello le inclina a creer que el razonamiento lógico presupone unos contenidos conocidos por una intuición anterior a todo pensamiento (NF 162-3). En 1925 Hilbert recurre a la autoridad de Kant, «que ha enseñado que la matemática dispone de un contenido dado con independencia de toda lógica» (I 243), para apoyar la misma tesis.

Hasta este momento, aunque Hilbert reclama la autoridad de Kant y llama «a priori» a la intuición fundamental, sólo la contrapone a la lógica o al pensamiento, pero no a la experiencia. Puede, por tanto admitirse que el conocimiento de estos objetos procede de la abstracción a partir de la percepción. Desde luego, con ello no se acataría la autoridad de Kant, para quien es a priori el conocimiento independiente de la experiencia; mas no por ello hay incoherencia.

Sin embargo, ya en 1904 Hilbert se había opuesto al empirismo matemático, pues «la posibilidad o existencia de un número arbitrariamente grande no puede derivarse de la experiencia» que siempre tiene por objeto cosas finitas (FL 251). Por ello, no resulta extraño que, en una de sus conferencias más filosóficas, a la que antes nos hemos referido, Hilbert considere que la intuición que nos ocupa es un conocimiento a priori diferente tanto de la lógica como de la experiencia (CNL 382-3, cf. FTN 313-4). Esto no le impide disentir de Kant sobre el contenido del conocimiento a priori, que para Hilbert es ajeno al espacio y al tiempo.

Según esto, la doctrina kantiana acaba, tras una evolución, por dominar en la gnoseología de Hilbert, de modo que el contenido fundamental de la teoría de números es conocido por una intuición a priori irreductible a cualquier otro conocimiento, ajena al espacio y al tiempo, pero también a la experiencia y a la lógica. En otras palabras, las observaciones epistemológicas de Hilbert terminan por dar razón a la interpretación B, arriba expuesta.

Pero, como hemos indicado, la concepción de los contenidos básicos de la teoría de números como conocidos a priori es incompatible con las descripciones que de ellos ofrece Hilbert. En efecto, cualquier interpretación que demos a las descripciones que Hilbert da de estos objetos o son inaceptables en sí mismas, o contradicen la doctrina epistemológica que Hilbert adopta. No podemos detenernos mucho en ello, pero sí hacer un apretado resumen.

Los objetos sensibles 1 que Hilbert emplea pueden entenderse de varias maneras: a) como las marcas físicas, por ejemplo, de tinta sobre papel; b) como tipos de marcas y c) como repetición de marcas de un mismo tipo. Si son marcas, las cifras o figuras como 111, no exhiben ningún número determinado por sí mismas: una colección de objetos sensibles pueden recibir innumerables números, según el aspecto que de ellos se considere (en la figura 111 hay nueve rectas, dos intervalos, infinitos puntos etc.). Si los signos 1 han de entenderse como tipos, es decir como el concepto abstracto del objeto físico o marca 1, entonces las figuras como 111 exhiben un solo tipo, y ello no permite distinguir entre sí unas figuras de otras.

Si finalmente se entiende que Hilbert habla de marcas repetidas del mismo tipo, habrá de explicarse cómo se alcanza a conocer semejante multiplicidad de lo mismo. Pues para que haya multiplicidad, ha de haber diferencias: si los 1 fueran idénticos en todo no habría multiplicidad sino un solo 1. Tendría que haber diferencias. Pero tales diferencias habrían de ser o materiales o espaciales o temporales. Hilbert parece admitir que la diferencia es temporal o espacial cuando dice que las cifras se reconocen porque a 1 *le sigue* 1 o tiene un 1 *adjunto*. Pero esto contradice la afirmación de que el contenido elemental de la aritmética no se reduce a nada, ni a las diferencias materiales en la ejecución, ni al tiempo ni al espacio[8].

Hilbert, en principio, describió el dominio de objetos que constituyen la base del razonamiento finitista como si fueran captados por abstracción desde la percepción. Pero luego teorizó sobre su naturaleza, atendiendo a la autoridad de Kant, de lo cual nació una doctrina monstruosa e ininteligible.

Kitcher ha entendido que esta incoherente teoría hace insostenible desde el principio todo el programa de Hilbert:

> «La crítica hecha hasta aquí es más demoledora para el programa de Hilbert que la que se suele extraer de Gödel... He argüido que... Hilbert es incapaz de ofrecer una teoría de nuestro conocimiento de la aritmética finitista... La epistemología de Hilbert está sentenciada —incluso antes de llegar a la aritmética» (Kitcher, p. 114).

Esta conclusión nos parece exagerada. Hilbert hubiera podido conformarse con sus primeras descripciones, o sencillamente con la afirmación de que hay un conocimiento evidente por sí mismo de la sucesión numérica

[8] Estas objeciones contra la exposición hilbertiana del conocimiento de los números se inspiran sobre todo en las críticas de Frege a la teoría empirista de la naturaleza abstracta de los números (1972, § 22 y 33-39 principalmente). Muchas de las discusiones recientes sobre las marcas (tokens) y tipos (types) recurren, sin saberlo a estas argumentaciones de Frege (Cf. Tait pp. 538-9 y Kitcher p. 109).

finita, dejando a otros la tarea de dilucidar su naturaleza y fundamentos. Nada hubiera podido objetárse por ello a su programa, que hubiera quedado —eso sí— pendiente de una fundamentación metafísica y gnoseológica perfectamente posible. De ello hablaremos en la conclusión.

4.2. Los elementos y proposiciones ideales

Arriba vimos cómo Hilbert considera imprescindible aceptar los elementos y proposiciones ideales, so pena de verse obligado a abandonar, en buena medida, el análisis y la teoría de conjuntos. Estas proposiciones ideales se caracterizan porque carecen de significado intuitivo, a diferencia de los elementos y proposiciones reales, de los que trata la aritmética elemental, fundada sobre la intuición de contenidos.

Sin embargo, el método de los elementos ideales, al que Hilbert recurre por analogía con otras ciencias como la física teórica, es evidente que no está exento de dificultades. En 1927 Hermann Weyl, discípulo de Hilbert convertido al intuicionismo desde 1920, refiriéndose a dichos elementos ya señaló:

> «Qué "verdad" u objetividad puede adjudicarse a esta construcción teórica del mundo, que va mucho más allá de lo dado, es una cuestión filosófica profunda» (Weyl p. 484)

Para Hilbert la matemática formal, donde aparecen los elementos ideales, ha de estar inseparablemente unida al método axiomático a las demostraciones de no contradicción, para asegurarse contra las paradojas. Brouwer había dicho que una teoría incorrecta, aunque no sea contradictoria, no es por eso menos incorrecta (cfr. Kleene p. 60), y Weyl afirma que la consistencia es condición necesaria, pero no suficiente, para aceptar una construcción como la de Hilbert. Tampoco le parece suficiente a Weyl el argumento de Hilbert basado en el éxito práctico del método axiomático con elementos ideales: ninguna de estas razones puede suplir la evidencia fenomenológica que debiera tener la matemática, que es «la ciencia más elemental y más fácilmente abierta a la evidencia», ni evitar la sospecha de arbitrariedad que tienen las construcciones formales sin contenido (Weyl p.484).

Hilbert justifica el uso de elementos ideales, primero, como una observación acerca del método matemático, que señala cómo de hecho los matemáticos emplean dichos elementos; segundo, por su utilidad y éxito en diversos campos del saber y, finalmente, porque las demostraciones de no contradicción deben grantizar su inocuidad. Pero ¿cómo concebía la naturaleza de estos elementos ideales? A este respecto los estudiosos de la obra de Hilbert han ofrecido varias interpretaciones.

Detlefsen, siguiendo a Kitcher, defiende que la postura de Hilbert es la de un instrumentalismo matemático. Entiende que la adquisición de certeza por medio de razonamientos con proposiciones ideales podría, a juicio de Hilbert, lograrse por métodos reales, aunque resultarían tan complicados que serían humanamente inalcanzables. Los elementos y proposiciones ideales son, pues, instrumentos sin valor «epistémico» por sí mismos, que sirven para abreviar el razonamiento hecho con contenidos ciertos por sí mismos[9].

Otros interpretan la postura de Hilbert como una cierta clase de platonismo. Resaltan que no es enteramente cierto que la matemática transfinita carezca de contenido: los elementos ideales nacen al pasar de lo finito a lo infinito de manera que se alcanza un contenido imaginario, evidente de hecho para el matemático, que los considera como existentes con independencia del sujeto que los construye. Sin embargo, este procedimiento común en la práctica matemática, no puede emplearse sin restricciones, ya que puede dar lugar a paradojas. De ahí la necesidad de considerar la matemática transfinita como construcciones sin contenido, para demostrar luego su no contradictoriedad. Esto no quiere decir, sin embargo, que los elementos ideales carezcan de contenido[10].

Finalmente, algunos interpretan que los elementos ideales u objetos transfinitos son concebidos por Hilbert como las ideas kantianas de la razón pura[11]. Las ideas son para Kant conceptos necesarios de la razón para los cuales no puede darse en los sentidos ningún objeto congruente[12]. A ellas no responde ninguna experiencia posible, pues la experiencia siempre es particular y condicionada, mientras que las ideas de la razón son conceptos de lo incondicionado y absoluto por relación a las experiencias posibles. Por ello, el uso real de las ideas da necesariamente lugar a las antinomias de la razón. Sin embargo, las ideas no son arbitrarias o superfluas, sino que son efectos necesarios de la razón, cuyo papel no consiste en darnos un conocimiento de lo real, sino dirigir al entendimiento en el conocimiento de objetos y economizar sus esfuerzos.

Según esta última interpretación, Hilbert se inspira en Kant al caracterizar el infinito, y en general los elementos ideales, como nociones carentes de contenido intuitivo y real, producidas por las leyes lógicas al aplicarse sobre contenidos finitos, cuya finalidad radica en simplificar los razona-

---

[9] Detlefsen, pp. 3-8; Kitcher, pp. 104-5. Una visión similar es dada por Kreisel cuando dice: «si las verdades finitistas son las únicas absolutas, es al menos natural mirar las expresiones matemáticas que contienen símbolos transfinitos como elementos "ideales" cuya única finalidad es dar fluidez al contenido» (Kreisel p. 159; Cfr. Neumann p. 52 y Maddy p. 24).

[10] Abrusci V. M., en la introducción a Hilbert 1978, pp. 104-5; Bernays pp. 275-6 y 284.

[11] Tait p 525.

[12] *Crítica de la Razón Pura,* Dialéctica transcendental, L. I, cap. II.

mientos matemáticos.

Todas y ninguna de estas interpretaciones pueden sostenerse, si atendemos a lo que Hilbert dice. Ninguna porque, en ningún momento, ofrece una reflexión ontológica o epistemológica sobre los elementos y proposiciones ideales que favorezca de manera suficientemente clara alguna de estas interpretaciones. Todas, porque entre los escritos de Hilbert hay pasajes que parecen avalar cada una de ellas.

La noción de métodos ideales no es expuesta por Hilbert hasta 1925, en su conferencia *Sobre el Infinito*[13]. En sus primeros escritos sobre los fundamentos, Hilbert se conformaba con decir que la demostración de no contradicción de las propiedades de un concepto matemático, como la de número real, demuestra también la «existencia matemática» del concepto (PM 300-1, CN 248). Esta es una de las afirmaciones que favorecen la interpretación platonizante. Pero se limita a una época anterior a la maduración del programa hilbertiano[14].

En 1925, la aceptación de elementos y proposiciones ideales no se justifica por ningún género de consideración filosófica previa, sino sólo como aplicación a los fundamentos de la matemática del método común a toda la matemática, que consiste en introducir proposiciones o elementos ideales para conservar las leyes de un dominio determinado de la matemática. Por la misma razón, si se quiere conservar las leyes simples de la lógica —como el principio del tercero excluso— sobre un dominio finito y, más aún, sobre dominios infinitos, han de admitirse conjuntos transfinitos (I 247-8). Con todo, en esta conferencia Hilbert, por un lado, declara, con expresión un tanto kantiana, que la teoría de los números transfinitos de Cantor es «una de las más sublimes realizaciones de la actividad intelectual pura» (I 239). Pero por otro lado afirma que las proposiciones ideales carecen de contenido (I 249-50) y tienen por finalidad mantener las leyes aritméticas en su simplicidad (I 247), lo cual parece dar razón a la concepción instrumentalista.

En los años siguientes Hilbert se ocupa con más detenimiento de la crítica del conocimiento matemático, y manifiesta una clara inclinación a favorecer la filosofía transcendental, como ya hemos visto arriba. Sin embargo, las concisas alusiones epistemológicas sobre los elementos ideales siguen permitiendo tanto la interpretación instrumentalista como la kantiana.

---

[13] En 1922 ya había comparado las fórmulas transfinitas con los elementos ideales que la geometría añade a los elementos reales «para simplificar y completar la teoría» (FLM 187).

[14] También podría considerarse en cierto modo platónica la famosa exclamación de 1925, según la cual «no se nos puede expulsar del paraíso que Cantor ha creado para nosotros» (I 242).

«La divisibilidad infinita de un continuo es sólo una operación presente en la mente, es sólo una idea que es refutada por nuestra observación de la naturaleza... No podemos, sin embargo, dejar de aplicar incondicionadamente el principio del *tertium non datur* y la negación [las fuentes del infinito actual] pues de otro modo sería imposible construir de manera compacta y unitaria nuestra ciencia» (FTN 317).

Aquí, Hilbert reconoce, por un lado, que el infinito tiene la utilidad instrumental de unificar los contenidos de la ciencia matemática, pero añade que este elemento ideal sólo tiene existencia en la mente y contradice la experiencia, lo cual parece un eco de las ideas kantianas de la razón.

En los *Grundlagen der Mathematik* se hallan párrafos donde se hace más clara la inspiración kantiana del método de los elementos ideales, sin detrimento del lado instrumental y utilitario de los mismos:

«no podemos, sin embargo, limitarnos a la axiomática de contenido, porque en la ciencia tenemos que vérnoslas... con teorías que no reproducen plenamente las situaciones reales de hecho, sino que representan una *idealización simplificadora,* y en esto está su importancia. Una teoría tal no puede conseguir su propia fundamentación recurriendo a la evidente verdad de sus axiomas o a la experiencia; al contrario, esta fundamentación sólo puede lograrse aceptando que la idealización efectuada en la teoría no es contradictoria, es decir, que es así [no contradictoria] la extrapolación a través de la cual las conceptualizaciones y los principios de la teoría sobrepasan el alcance de la evidencia intuitiva o los datos de la experiencia» (FM2 343; cfr. 360).

En este texto, la concepción de los elementos ideales como paso al límite o extrapolación desde la evidencia de los contenidos aritméticos o desde la experiencia, que son las fuentes de conocimiento ajenas a la razón, parece directamente tomada de la *Crítica de la Razón Pura.* Lo cual no impide reconocer el carácter simplificador de las teorías racionales.

Los textos de Hilbert no parecen, en suma, dar pie para resolver la cuestión de la naturaleza y objetividad de los elementos ideales. Tendemos, con todo, a pensar que él tenía una vaga concepción kantiana de estas entidades. Pero nótese que para el propio Kant las ideas puras de la razón, aún careciendo de la capacidad de ampliar nuestros conocimientos objetivos, tienen la función de unificar y simplificar el contenido intelectual objetivo. No veo, pues, que haya contradicción en aceptar a la vez la concepción kantiana y cierto instrumentalismo de los métodos ideales. La única objeción para esta solución intermedia y pacífica es que el instrumentalismo defiende que los elementos ideales son en última instancia eliminables, mientras que para el kantismo las ideas no parecen reducibles a los contenidos de la experiencia. Mas ¿cuándo dice Hilbert que las demostraciones por métodos ideales puedan reducirse siempre a demostraciones por métodos de contenido?[15].

Finalmente, también ha de reconocerse a la interpretación platonizante su parte de razón. No es cierto que la matemática transfinita carezca por completo de contenido y evidencia. A juicio de Hilbert, en el análisis y en la teoría de conjuntos reinaba el éxito y el acuerdo entre los matemáticos antes incluso de las demostraciones de no contradicción (I 241, NF 159), lo cual se explica por la evidencia de sus contenidos sacados por extrapolación desde contenidos intuitivos. Cuando Hilbert dice que los términos ideales carecen de contenido, se refiere al modo en que ha de considerarlos la metamatemática para darles completa seguridad por medio de demostraciones de consistencia. Esto, que es destacado por Abrusci y Cañón[16], es perfectamente asimilable a la interpretación kantiana de los elementos ideales que nos inclinamos a aceptar. La matemática transfinita tiene un contenido ideal que constituye un reino propio —platónico si se quiere— que no debe nunca entenderse de manera real, sino sólo como extrapolación ideal. De otro modo aparecerían contradicciones con la realidad siempre finita. Así ocurre cuando, en el análisis matemático del movimiento, se emplea la idea de sucesión infinita, que si se entiende como real da lugar a la paradojas de Zenón (FM2 360).

4.3. El problema de Frege

Relacionada con la cuestión precedente acerca del valor objetivo de los elementos y proposiciones ideales, se halla una objeción que Frege presentó a Hilbert en la correspodencia que ambos mantuvieron hacia 1899 y en una crítica de los *Grundlagen der Geometrie* que Frege publicó años más tarde.

Hilbert parece que en general concibe el método de los elementos

[15] Bien es verdad que Hilbert concedió gran importancia a una estrategia de reducción simbólica, para eliminar los cuantificadores existenciales, que se emplean en los axiomas del transfinito (el procedimiento de la epsilon-eliminación) ¿Quiere esto decir que toda demostración con proposiciones ideales, acerca de conjuntos transfinitos, se puede llevar a cabo sin tales proposiciones? Aunque nos caben serias dudas al respecto, más bien parece que esta estrategia tiene una utilidad sólo metamatemática. Su finalidad es demostrar la consistencia de los sistemas axiomáticos, donde se emplean los cuantificadores existenciales: dado un sistema S con dichos cuantificadores, se obtiene, por medio de la reducción simbólica, otro sistema S', sin esos cuantificadores, del cual puede probarse la consistencia, de modo tal que también es consistente el sistema S (FM2 399ss.).

[16] Cf. Hilbert 1978, introducción de Abrusci, pp. 104-5; Camino Cañón señala cómo la concepción de Hilbert es, a la par, pragmatista y kantiana, sin detrimento de que el matemático considere un universo autónomo de entidades matemáticas (pp. 237-239).

ideales como un procedimiento que parte de los datos intuitivos de una ciencia y los extrapola de modo que aparecen conceptos carentes de sentido intuitivo, con el fin de demostrar de manera simple proposiciones de esa ciencia. Así las magnitudes imaginarias, como $i=\sqrt{-1}$ (I 238 y 247), son introducidas en el álgebra con el fin de simplificar los teoremas sobre el número de raíces de una ecuación. El fin, pues, del método de los elementos ideales parece que es demostrar proposiciones de contenido real, sea éste puramente matemático, geométrico o de alguna ciencia experimental como la física.

Para Frege, la demostración de una proposición se logra cuando se parte de proposiciones evidentes y, por medio de reglas que transmiten la verdad, se concluye la verdad de otras proposiciones. ¿Cómo pueden —viene a preguntarse Frege— las proposiciones con elementos ideales, que deben considerarse como carentes de contenido evidente, utilizarse para probar la verdad de otras proposiciones? (Frege, 1984, p.318).

Este problema, destacado por Detlefsen, es resuelto por Hilbert, según la interpretación del propio Detlefsen, por medio de la estrategia metamatemática de la evaluación: las demostraciones con proposiciones ideales han de ser valoradas por medio de demostraciones metamatemáticas de contenido evidente para que puedan servir como pruebas de la verdad de proposiciones reales. A diferencia de la estrategia de Frege, que consiste en dar una interpretación semántica a las fórmulas, de modo que su verdad sea evidente, y en interpretar las reglas de modo que transmitan la verdad, la solución de Hilbert no se apoya en la interpretación de las fórmulas, sino en su evaluación por medio de una prueba metamatemática evidente. La utilidad en orden a alcanzar la certeza sobre proposiciones reales, haciendo uso de proposiciones ideales, no es resultado de la actividad formal efectuada al realizar una prueba ideal. Más bien ha de decirse que tal prueba adquiere valor epistemológico gracias a la demostración de contenido realizada en el terreno de la metamatemática (Detlefsen pp. 10-14).

4.4. La matemática aplicada

El último problema filosófico que vamos a tratar acerca del programa de Hilbert es el de la capacidad que la matemática tiene de aplicarse a las ciencias sobre el mundo real y, en especial, a la física. Esta dificultad se resuelve rápidamente si entendemos, como hace Detlefsen, que la intuición primera de la matemática real es una abstracción a partir de la experiencia: el origen común del conocimiento matemático y físico explican sin dificultad que pueda haber una matemática aplicada. Sin embargo, dicha interpretación, como ya señalamos, aunque concuerda con las descripciones que Hilbert hace de la intuición fundamental, parece contradecir sus disquisiciones epistemológicas al respecto.

Al menos en los aledaños de 1930, Hilbert entiende que dicha intuición es a priori y constituye por sí sola una tercera fuente de conocimiento, diferente tanto del pensamiento regido por las leyes lógicas como de la experiencia sensible del mundo (CNL 382-3; FTN 313-4)). La matemática se alimenta de la intuición a priori de la sucesión numérica y del pensamiento, y no busca para nada su validez en la experiencia. Y, sin embargo, como el propio Hilbert destaca:

> «Sin la matemática, la astronomía y la física de hoy son imposibles; estas ciencias, en sus partes teóricas, se resuelven directamente en la matemática. La matemática debe a éstas y a sus muchas otras aplicaciones toda la reputación de que goza por parte del gran público» (CNL 385).

Si experiencia y matemática proceden de fuentes de conocimiento diverso ¿cómo se explica entonces la enorme utilidad que la matemática tiene para la física y otros saberes basados en la experiencia?

Hilbert se plantea esta cuestión explícitamente en la conferencia de 1930, titulada *Conocimiento de la Naturaleza y Lógica*, a la cual pertence el párrafo recién citado.

Hilbert para resolverla parte de dos observaciones: 1) igual que el pensamiento tiende a la unidad, las leyes de la realidad tienden a unificarse bajo leyes comunes; igual que en la realidad el infinito carece de existencia, así el pensamiento no puede utilizarlo sin especiales precauciones. De ello colige que la naturaleza se une a la investigación «como si estuviera dispuesta voluntariamente a manifestar sus secretos». A este fenómeno lo denomina «paralelismo» entre naturaleza y pensamiento. 2) Entre pensamiento y realidad hay también una «armonía preestablecida», de modo que cuando la experiencia hace un descubrimiento, el pensamiento ya había hallado el sistema conceptual que, para entender dicho fenómeno, se necesita (CNL 381).

Paralelismo y armonía preestablecida, de la cual ya había hablado mucho tiempo atrás (PM 293), son dos observaciones que, según Hilbert, pueden hacerse en innumerables casos. Pero con ellas no pretende sólo mostrar unas leyes de la historia de la ciencia. Trata también de justificar su profundo e ingenuo racionalismo que constituye, a la postre, su única respuesta a la cuestión de la aplicación de la matemática:

> «El instrumento que produce la mediación entre teoría y praxis, entre pensamiento y observación, es la matemática, ella construye y refuerza cada vez más el puente de unión... nosotros no conseguimos dominar

una teoría científica sobre la naturaleza hasta que no hemos extraído y descubierto totalmente su núcleo matemático» (CNL 385).

5. *Conclusión*

Hilbert, hacia 1899, cuando empieza a preocuparse por los fundamentos de la matemática, parte de unos presupuestos filosóficos, íntimamente unidos al método matemático. Se pueden sintetizar en los puntos siguientes, ya esbozados al principio:

1) Las fuentes del conocimiento son dos: la experiencia, que aporta datos, y el pensamiento, que es concebido como la facultad de razonar, pero también como una facultad combinatoria dotada de cierta autonomía respecto de los datos sensibles (PM 293).

2) La razón ha resuelto todos los problemas que la experiencia le ha presentado y los que ella misma se ha planteado a partir de aquélla, de forma progresivamente rigurosa y simple. La ciencia y, en especial, la matemática constituyen adquisiciones incontrovertibles del espíritu humano[17].

3) Todo problema que se plantee de manera clara, o se ha resuelto o puede resolverse definitivamente, sin que para ello tenga límites la razón (PM 297). El método por el cual cabe esperar la solución rigurosa de todo problema matemático es el de la axiomática formal, íntimamente unido a las demostraciones de no contradicción, de independencia y de completud (PM 295 y 299-300).

Hilbert se hallaba, pues, instalado en un confiado y optimista racionalismo matemático, que se siente obligado a defender: 1) el análisis contra las objeciones de Kronecker, 2) la capacidad humana de progreso racional indefinido contra las limitaciones impuestas por Du Bois-Reymond[18] y 3) el método axiomático formal contra las objeciones de Frege.

Tras un periodo provocado por el descubrimiento de las paradojas y la impresión que le causaran los *Principia Mathematica*, Hilbert emprendió la reconstrucción de su programa con el fin de devolver a la matemática la seguridad perdida. Todo su trabajo sigue, sin embargo, gobernado por la plena confianza en los resultados hasta entonces obtenidos por la matemá-

---

[17] La confianza en la ciencia y en la seguridad que ha alcanzado se lee entre líneas en sus primeros escritos. Se opone, por ejemplo, a las dudas de los antiguos intuicionistas abrigan acerca de los conjuntos infinitos en el análisis (CN 248).

[18] Desde le comienzo de sus escritos sobre los fundamentos, Hilbert se enfrenta al irracionalismo de Emilio du Bois-Reymond, que sostenía la imposibilidad de resolver problemas como el de la naturaleza de la materia y de la fuerza (Reid, p. 13). Su sentencia más conocida «ignoramus et ignorabimus» es, repetida y constantemente, rechazada por Hilbert como una insensatez. Contra ella afirma categóricamente su convencido racionalismo: «debemos saber, sabremos» (CNL 387, cf. PM 298, I 254).

tica, y en su capacidad de resolver cualquier problema claramente planteado.

A partir de 1922 introduce, pues, unas reformas y precisiones, que a mi juicio tienen una doble inspiración, matemática la una, epistemológica la otra. Por una lado, Hilbert, como gran matemático y conocedor de la historia de su ciencia que era, observa los métodos que sus predecesores y él mismo han seguido al resolver las dificultades y problemas que se le han presentado, para buscar cuáles son y pueden ser las fuentes de su seguridad y establecer el valor de sus métodos. Por otro lado, Hilbert recurre a sus precarios conocimientos de gnoseología, con el fin de exponer en la jerga filosófica sus hallazgos y situar su propio programa en el panorama de la filosofía contemporánea, manteniendo en lo posible sus convicciones primeras. Estas dos fuentes de inspiración que se manifiestan a menudo conjuntamente, dan resultados encontrados y de valor muy dispar.

La primera de estas inspiraciones, que le hace enfrentarse a otras corrientes que intentaban fundamentar la matemática, da lugar principalmente a las siguientes novedades en su programa:

1) la descripción de la intuición básica que es fuente de toda evidencia absoluta en matemáticas, y que no se puede confundir con la lógica, en contra de lo que pensaban los logicistas y, en cierto modo, de acuerdo con las tesis intuicionistas. Si sólo a esas descripciones nos atenemos, la evidencia en cuestión nace de una abstracción a partir del conocimiento sensible.

2) El reconocimiento de que en muchos campos de la matemática se trata de elementos ideales, aceptados con el fin de completar y unificar las leyes de esos campos. Con ello se enfrenta al intuicionismo.

3) La exigencia de que los métodos de demostración metamatemáticos tengan la misma evidencia que la parte más elemental de la matemática. Con esta exigencia de las demostraciones de no contradicción sigue manteniendo el enfrentamiento, que ya tuvo en la época anterior a las paradojas con el logicismo y el intuicionismo.

Por su parte, el recurso a la gnoseología le hace llegar a las conclusiones siguientes:

1) Identifica la intuición primaria de la teoría de números con un nuevo tipo de conocimiento que califica de a priori y que se diferencia de la experiencia y del pensamiento. Esta afirmación, que es presentada como una reforma de la teoría del a priori de Kant, entra en colisión con la descripción de dicha intuición como abstracción desde la experiencia.

2) Trata tímidamente de aclarar el carácter de los elementos y proposiciones ideales como ideas de la razón, que carecen de contenido real y tienen la utilidad de conferir unidad y simplicidad a la ciencia.

3) Renueva su ilimitada confianza en la capacidad de la razón para

resolver cualquier problema, lo cual se plasma en la convicción de que pueden demostrarse la consistencia y las demás propiedades metamatemáticas por procedimientos finitistas.

Del desarrollo de su programa y de sus resultados se pueden, a nuestro juicio, extraer dos conclusiones de índole muy diferente:

1) El proceso por el que Hilbert llega a determinar definitivamente su programa puede compararse con el desarrollo intelectual de Kant. Como le ocurrió a Kant, sus primeros pasos son netamente racionalistas. Pero las dificultades con que se topa la matemática, obligan a Hilbert a hacer una crítica en busca de sus fundamentos. Para ello da por supuesto que la matemática ha alcanzado el seguro camino de la ciencia y despierta del sueño racionalista que supone el logicismo[19], gracias a la influencia del intuicionismo, cuyo finitismo acepta en lo que de natural tiene[20]. El propio Hilbert se veía, hasta cierto punto, siguiendo la misma senda que Kant hubiera seguido, de haberse presentado, en su tiempo, dudas acerca de la seguridad de la matemática.

> «Aunque no podamos concordar con Kant en los detalles particulares, sigue siendo importante la idea básica de la gnoseología kantiana: establecer los presupuestos intuitivos a priori e indagar, por tanto, las condiciones de posibilidad de todo conocimiento. Yo creo que esto, en substancia, se ha logrado con mis investigaciones acerca de los principios de la matemática» (FTN 314).

2) Sin embargo, si atendemos a lo que he llamado la inspiración matemática de Hilbert, y no a las preconcepciones racionalistas y a las influencias de Kant, hallamos unos resultados que no tienen por qué interpretarse conforme a la filosofía transcendental o racionalista.

Eliminemos, pues, momentáneamente los presupuestos gnoseológicos y metafísicos de Hilbert. El resultado es que las críticas que su programa ha recibido se desvanecen en buena medida. El teorema de incompletud afecta de hecho sólo a las esperanzas de índole racionalista que había puesto en su programa: con él pretendía dar completa seguridad a la matemática, ofreciendo demostraciones que permitieran resolver definitivamente sus dificultades, lo cual no es más que una aplicación del principio racionalista de resolubilidad de todo problema. Pero nada impide que,

---

[19] «En aritmética nos ocupamos de objetos que no nos son conocidos a través de los sentidos como algo ajeno, sino que son dados inmediatamente a la razón, la cual puede penetrarlos plenamente como lo que le es más propio» (Frege, *Los Fundamentos de la Aritmética*, § 105).

[20] «Creo no obstante que la vía emprendida, siguiendo la axiomática, rinde plena justicia a las tendencias constructivistas en la medida en que son naturales» (NF p. 160, cf. FM2 394, FTN 315).

aceptando el carácter imperfecto de toda ciencia y de la matemática en particular, se haga un estudio de los sistemas matemáticos por medio de las técnicas rigurosas de la metamatemática (Kleene p. 62). Las incongruencias de Hilbert al explicar las naturaleza de la intuición primera dejan de ser una dificultad insoslayable, en contra de lo que Kitcher piensa, cuando se considera la descripción de Hilbert sin las explicaciones deudoras del idealismo kantiano. Porque en tal caso sólo queda que hay un contenido propio y evidente en la teoría de números, que se apoya en la captación de la sucesión numérica extraídà del conocimiento sensible, lo cual puede aceptarse sin dificultades fuera de la filosofía hilbertiana.

Se ha entendido a veces que, si queda algo del programa de Hilbert, son sólo sus subproductos (Largeault, p. 218 y Kreisel p. 162). Sin embargo la práctica matemática de una parte y los repetidos intentos de reformar el programa de Hilbert, muestran más bien que lo que ha muerto son las ideas epistemológicas que perturban las soluciones matemáticas que Hilbert propone, dándoles un alcance del que carecen.

Y así, algunos hilbertianos han adoptado su programa, pero no su teoría del conocimiento que han substituido por otra, sea platónica, sea instrumentalista. ¿No tendría mucho más sentido hacer esta misma operación pero a partir de la concepción aristotélica de la matemática? ¿No concuerdan mucho más las observaciones de Hilbert sobre el método de los matemáticos con esa filosofía? Nos parece, cuando menos, defendible, puesto que para Aristóteles los números son conocidos por abstracción a partir de las cosas sensibles, considerándolas en cuanto indivisibles o unas, y prescindiendo de cualquier otro aspecto. Y también porque Aristóteles entiende que el objeto de la matemática es independiente de lo realmente existente, puesto que versa sobre cosas que se pueden definir sin la materia pero no pueden existir sin ella. ¿No sería esto base suficiente para acoger en el seno de la filosofía aristotélica los elementos ideales de Hilbert? Esta propuesta topa, sobre todo, con el rechazo aristotélico del infinito actual. Pero ¿no coincide este rechazo con la afirmación de Hilbert según la cual el infinito actual carece por completo de realidad? El asunto es difícil, pero no descabellado.

BIBLIOGRAFÍA

—Paul Benacerraf and Hilary Putnam (eds.), *Philosophy of Mathematics*, Oxford, B. Blackwell 1964.

—Paul Bernays, «On Platonism in Mathematics» (1935), en Benacerraf & Putnam 1964, pp. 274-286.

—Luitzen Egbertus Jan Brouwer, «Intuitionistics Reflections on Formalism» (1927), en Jean van Heijenoorth 1981, pp. 490-492.

—Camino Cañón Loyes, *La Matemática, Creación y Descubrimiento*, Madrid, UPCO 1993.

—Michael Detlefsen, *Hilbert's Program*, Dordrecht, Reidel P. C., 1986.

—Gottlob Frege, *Conceptografía, Los Fundamentos de la Aritmética y otros Estudios Filosóficos*, H. Padilla (trad.), México, Universidad Nacional Autónoma de México, 1972.
—Gottlob Frege, *Collected Papers on Mathematics, Logic and Philosophy*, B. Mcguinness (ed.) Oxford, Blackwell 1984.
—Jean van Heijenoort (ed.), *From Frege to Gödel*, Cambridge, Harvard University Press 1981.
—David Hilbert, *Gesammelte Abhandlungen*, t. III, Bronx, Chelsea P. C. 1965.
—David Hilbert, *Richerche sui Fondamenti della Matematica*, V. M. Abrusci (ed.), Napoles, Bibliopolis 1978.
—David Hilbert, *Fundamentos de Geometría*, J. M. Sánchez Ron (trd.), F. Cebrián (trad.), Madrid, CSIC, 1991.
—Philip Kitcher, «Hilbert's Epistemology», *Philosophy of Science* 43 (1976) pp. 99-115.
—Stephen C. Kleene, *Introducción a la metamatemática*, M. Garrido (trad.), Madrid, Tecnos 1974.
—Georg Kreisel, «Hilbert's Programme», en Benacerraf & Putnam 1964, pp. 157-180.
—Jean Largeault, *Logique Mathématique. Textes*, Paris, A. Colin 1972.
—Penelope Maddy, *Realism in Mathematics*, Oxford, Clarendon Press 1990.
—Johan von Neumann, «The Formalist Foundations of Mathematics», en Benacerraf & Putnam 1964, pp. 50-54.
—W. W. Tait, «Finitism», *The Journal of Philosophy* 78 (1981) pp. 525-547.
—Hermann Weyl, «Comments on Hilbert´s second Lecture on the Foundations of Mathematics» (1927), en Jean van Heijenoorth 1981, pp. 480-484.

* * *

José Miguel Gambra
Departamento de Lógica y Filosofía
de la Ciencia
Universidad Complutense
28040 Madrid