

## 1. Introducción

El presente proyecto se enmarca dentro del campo de los convertidores de potencia. Concretamente, el proyecto consiste en un método para la modulación en convertidores cascada. El método ha sido probado con buenos resultados mediante simulaciones y ensayos en un equipo real. Este proyecto se presenta como trabajo de fin de master del alumno Luis Galván García-Pérez

### Topología en cascada

El método descrito está diseñado para convertidores modulares con topología en cascada. Los convertidores de este tipo se componen de varios módulos o celdas. Cada uno de estos módulos consta de uno o más semiconductores controlados y de un acumulador de energía (típicamente un condensador o un banco de condensadores) conectados de tal manera que, según qué semiconductores controlados estén abiertos o cerrados, el acumulador se conecta o no entre las bornas de salida del módulo. De esta manera es posible dar distintas tensiones a la salida del módulo. Ejemplos de estos módulos pueden verse en las figuras 1 y 2, correspondientes respectivamente a las topologías de semipunto y puente completo. En un módulo de semipunto (figura 1), el condensador puede conectarse a la salida o quedar en by-pass. En un módulo de puente completo (figura 2), además, cuando el condensador se conecta a la salida, puede hacerlo con cualquier polaridad.

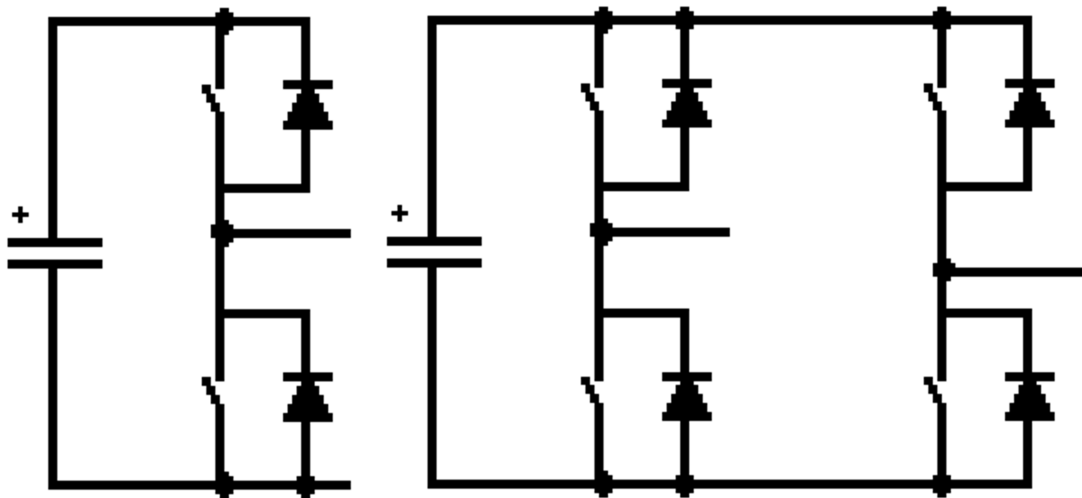


Figura 1

Figura 2

Los módulos del convertidor se disponen en hileras o ramas, las cuales consisten en 2 ó más módulos conectados en serie. La tensión modulada en cada rama es la suma de las tensiones moduladas en todos los módulos que la componen. Varias ramas se conectan a entre sí a través de uno de sus extremos formando una estrella. El extremo contrario se conecta a las fases de salida del convertidor. Atendiendo al caso, puede haber una o más estrellas de ramas formadas de esta manera. Por ejemplo, la figura 3 muestra la topología de un convertidor STATCOM (o compensador estático y síncrono) formado por 3 ramas de 2 módulos conectados en estrella. En el punto central de la estrella puede emplearse un módulo de topología de puente triple (o múltiple), como se muestra en la figura 4. Por su parte, la figura 5 muestra una topología más moderna, que consiste en 6

ramas conectadas en 2 estrella d 3 ramas cada una. Esta última topología ha sido diseñada para la transmisión en alta tensión y corriente continua (HVDC) y descrita en [1].

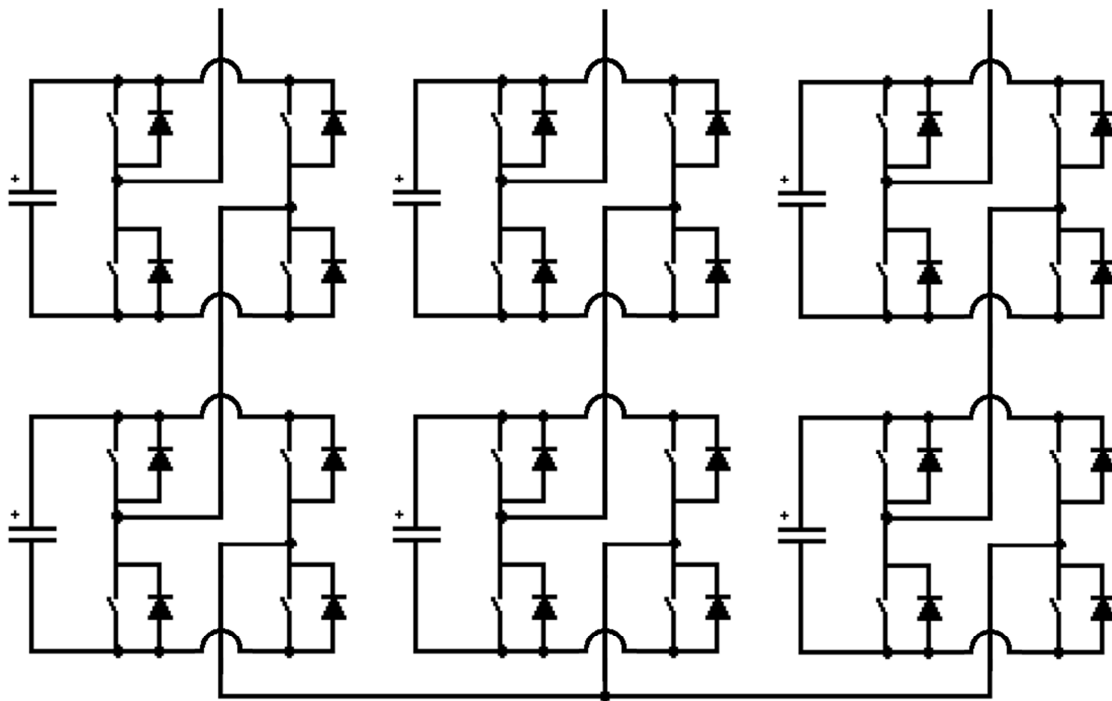


Figura 3

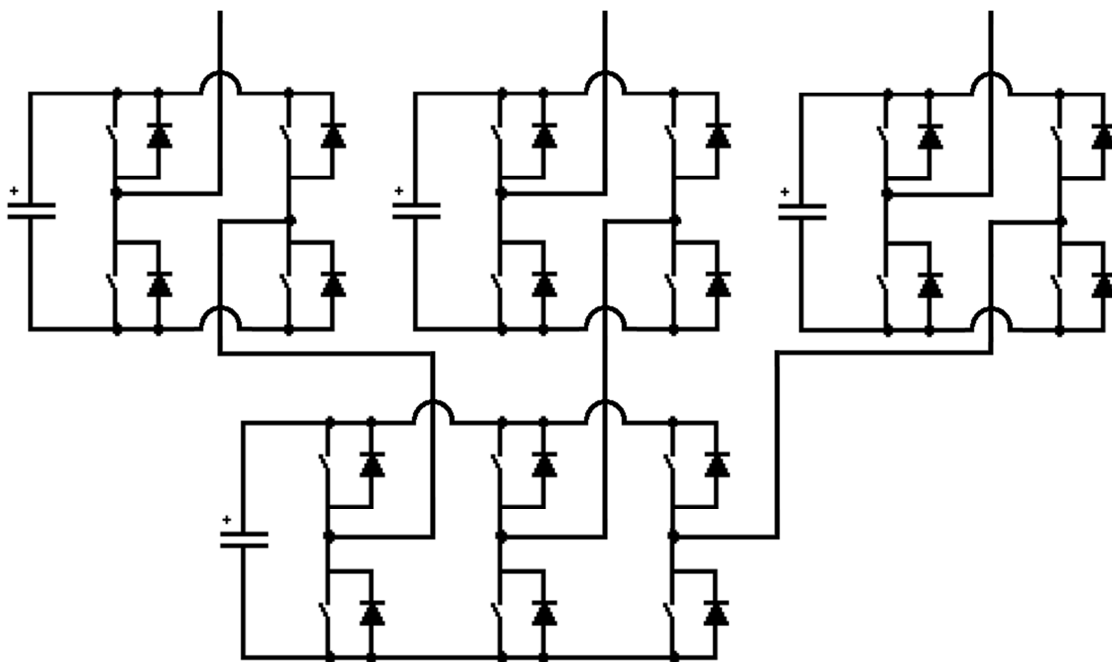


Figura 4

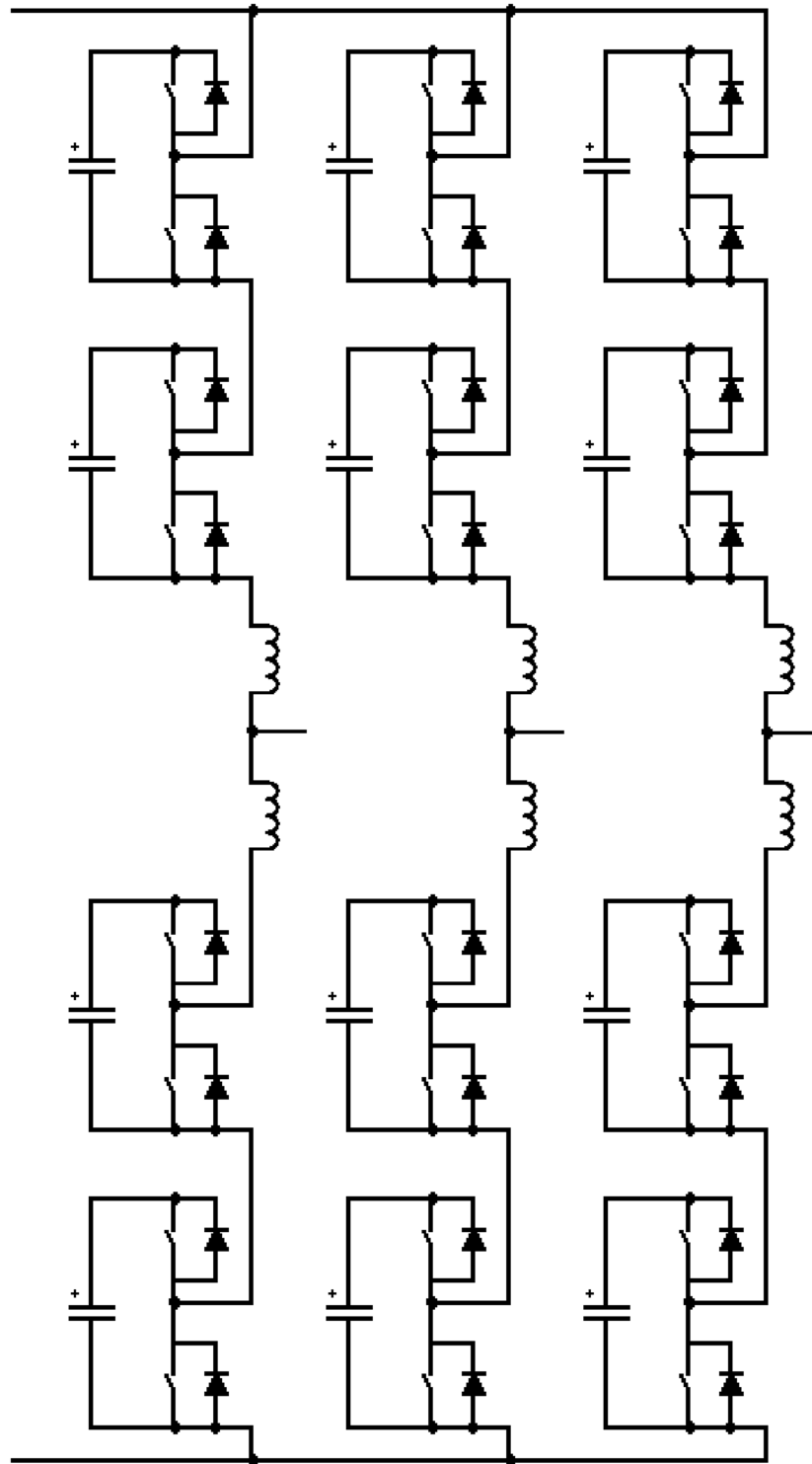


Figura 5

### Objetivo

Las topologías de módulos en cascada tienen la virtud de la redundancia en lo que respecta a la modulación. Una misma tensión de salida puede obtenerse modulando distintas combinaciones de tensión entre los módulos que componen el convertidor. El

objetivo de la modulación propuesta es utilizar esta redundancia para equilibrar la tensión de los condensadores usados como acumuladores de tensión de los módulos.

Se tienen en cuenta dos tipos de redundancia. El primero tipo es el de la redundancia rama a rama, basado en las distintas opciones para las tensiones de los módulos de una rama que producen la misma tensión en la rama. Este tipo de redundancia se da en cada rama por separado. El segundo tipo es el de la redundancia trifásica (o n-fásica) que se obtiene gracias a la tensión homopolar o de modo común. Esta redundancia es aplicable siempre que el punto central de la estrella no esté conectado a la red o a la carga a la que se conecta el convertidor. En convertidores con varias estrellas, puede haber más de un grado de libertad de cara a este tipo de redundancia.

## Resumen del estado del arte

El uso de la redundancia para el equilibrado de condensadores es una estrategia ya conocida. Sin ir más lejos, en [1] se presenta un convertidor modular DC/AC con varias 2 ramas por cada fase en el que se utiliza esta redundancia para equilibrar las tensiones de los módulos. La forma de hacerlo consiste en ordenar los módulos de cada rama desde el más cargado al más descargado y conectar sólo los condensadores de los más cargados o más descargados según el sentido de la corriente. Esta estrategia sólo utiliza la redundancia rama a rama.

En [2] se presenta una forma de equilibrar un convertidor distinto. Este convertidor no tiene una topología en cascada, sino que es semejante a un convertidor matricial. Al no tener ramas, la forma propuesta para equilibrar los condensadores de este convertidor se basa en la redundancia trifásica. Esta práctica es habitual en convertidores multinivel no modulares. Dado que el convertidor se conecta a través de 3 terminales a la red eléctrica, sólo la tensión entre estos terminales tiene alguna repercusión sobre la corriente de la red. En consecuencia, el modo común puede utilizarse para equilibrar los condensadores. La estrategia presentada incluye una tabla de gran magnitud que se utiliza para escoger la tensión que se modula en cada terminal de salida. Si bien el uso de la tensión homopolar como grado de libertad es una ventaja, la dimensión de la tabla crece demasiado con la cantidad de condensadores del equipo, y su adaptación a un convertidor en cascada no es evidente.

En [3] y [4] se presentan modulaciones de Space Vector en una o más dimensiones que tienen como finalidad equilibrar las tensiones de los condensadores en convertidores con topología cascada. En este caso se explora la opción de tener diferentes tensiones de referencia en cada módulo y de modular las tensiones de los módulos independientemente para reducir el rizado de corriente.

En [5] se presenta una forma de medir la potencia activa y reactiva que se intercambia con cada módulo de un convertidor monofásico en cascada. Se puede generalizar este método para varias fases. Gracias a este método, en [6] se utiliza una modulación similar a la propuesta en [3] en un convertidor monofásico que cuenta con un módulo conectado a batería y otro flotante. En base a los resultados se muestra la necesidad de mover potencia reactiva para mantener el convertidor equilibrado.

En resumen, la redundancia rama a rama está suficientemente estudiada en la actualidad en todo lo referente a convertidores en cascada y la redundancia trifásica (o n-fásica) ha

sido tenida en cuenta en convertidores con otras topologías multinivel. Sin embargo aún no se ha descrito una estrategia de modulación en que se combinen ambos tipos de redundancia. Además, la redundancia trifásica suele aplicarse mediante tablas, que requieren un gran espacio en la memoria del dispositivo de control que se utilice para controlar el equipo.

### Space Vector y redundancia n-fásica

La estrategia propuesta en este proyecto se basa en la combinación de ambos tipos de redundancia en un convertidor con topología en cascada. Mediante la redundancia rama a rama es posible escoger la mejor combinación de tensiones moduladas en los módulos para obtener la tensión de la rama. Mediante la redundancia trifásica es posible escoger la mejor combinación de tensiones de rama para que las tensiones de los condensadores del conjunto de módulos se equilibren entre sí.

Dado que se utiliza la redundancia trifásica, el resultado de la modulación propuesta es similar al que se obtiene en modulaciones de tipo Space Vector. Cuando el equipo es trifásico y todos los módulos tienen la misma tensión de referencia para sus condensadores, puede emplearse una modulación de tipo Space Vector para escoger los puntos o vectores entre los que se conmuta. A continuación, utilizando los distintos tipos de redundancia, se escoge un candidato para cada punto. Puede demostrarse que, si se escoge al candidato óptimo en cada punto, el número de conmutaciones al recorrer los tres puntos es el mínimo, tal como ocurre con la modulación Space Vector clásica.

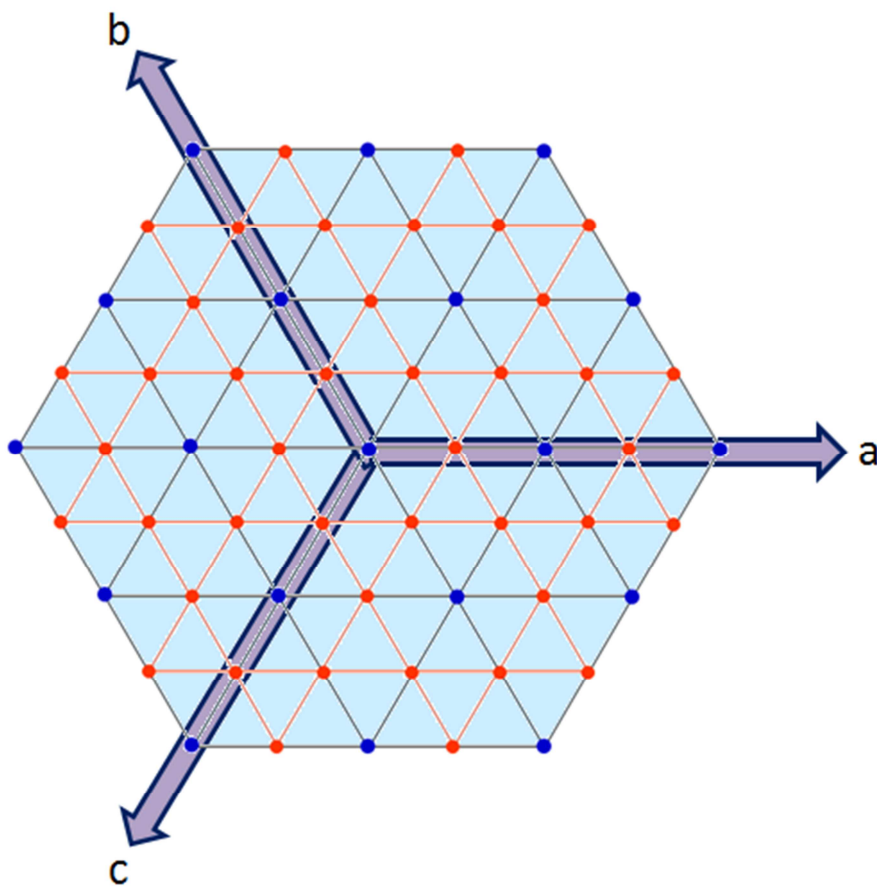


Figura 6

Cuando la topología tiene más de una estrella, el espacio de soluciones tiene más de 2 dimensiones. Por ejemplo, la topología mostrada en la figura 3 tiene 3 ramas y 2 restricciones de tensiones de rama (que corresponden a las tensiones de línea). El espacio de soluciones para esta topología es similar al que aparece en la figura 6. Por su parte, la topología de la figura 5, tiene 6 ramas y 4 restricciones de tensiones de rama (equivalentes a las 2 restricciones de tensiones de línea de cada estrella) pudiendo haber una 5ª restricción de tensión entre los puntos centrales de las dos estrellas. Si esta 5ª restricción no existe (por ejemplo porque el convertidor se emplee sólo como STATCOM), el espacio de soluciones es equivalente a 2 hexágonos independientes similares a los que se muestran en la figura 6, aunque de menor área. Si por el contrario sí existe esta restricción, el espacio de soluciones tiene 5 dimensiones y no se puede representar sobre el papel. En cualquier caso, el método propuesto puede ser aplicado a todas estas topologías.

## 2. El problema lineal

El problema de equilibrado se puede plantear como la búsqueda de la combinación óptima de estados de los módulos tal que el vector en espacio de estado (Space Vector) de la salida del convertidor sea uno determinado. Esto es, de entre todas las combinaciones de estados de módulos que tienen una misma representación en espacio de estado igual a la de una referencia, se busca la combinación que mejor equilibrará las tensiones de los acumuladores. Para describir matemáticamente este problema de optimización es necesario definir de forma precisa tanto lo que se considera "una misma representación en espacio de estado" como el criterio con el que se decide que una combinación es mejor que otra. La primera definición se plasma en una serie de restricciones, mientras que la segunda lo hace mediante una función objetivo. Puesto que las restricciones pueden definirse de forma lineal, se ha escogido una función objetivo igualmente lineal, así el problema de optimización será lineal y admitirá técnicas como el llamado "método Simplex".

### Restricciones

Las restricciones del problema lineal van encaminadas a asegurar que la tensión de salida del convertidor sea la adecuada. Hay dos formas de plantear esto.

### Restricciones de grupo (problema aproximado)

Una primera formulación se basa en utilizar la modulación clásica de vectores en espacio de estado (Space Vector) suponiendo que la desviación de las tensiones de los acumuladores con respecto a su referencia es despreciable. Este método se utiliza en [2] para una topología multinivel que no emplea módulos en cascada.

En este método se escoge primero entre qué puntos de la representación en espacio de estado se va a conmutar y cuánto tiempo se mantendrá cada uno de ellos. A continuación, para cada uno de estos puntos se busca entre todas las combinaciones de estados que tienen esta misma representación cuál es la que mejor equilibra los acumuladores de los módulos.

Esta formulación del problema se ilustra con un ejemplo para una topología trifásica con 2 puentes completos en cascada por fase como la mostrada en la figura 3. En la figura 7 puede verse la representación en espacio de estado correspondiente al caso en que los acumuladores tienen una tensión igual a la de su referencia. Se pretende modular una tensión de salida cuya representación en espacio de estado corresponde al punto  $V_{ref}$ . Se escogen los 3 puntos más cercanos a  $V_{ref}$ . Cada uno de estos tres puntos corresponde a varias combinaciones de estados de los módulos (en este caso puentes completos) que son (en teoría) redundantes entre sí. El objetivo es encontrar para cada uno de estos tres grupos de combinaciones la que mejor equilibra los acumuladores.

Esta formulación del problema es aproximada porque cuando las tensiones de los acumuladores no se corresponden con su referencia, las combinaciones de estados de los módulos pertenecientes a un mismo grupo no tienen exactamente la misma representación en espacio de estado. Los puntos entre los que conmutar se escogen antes de tener esto en cuenta, por lo que en realidad la tensión modulada será un poco distinta de la deseada.

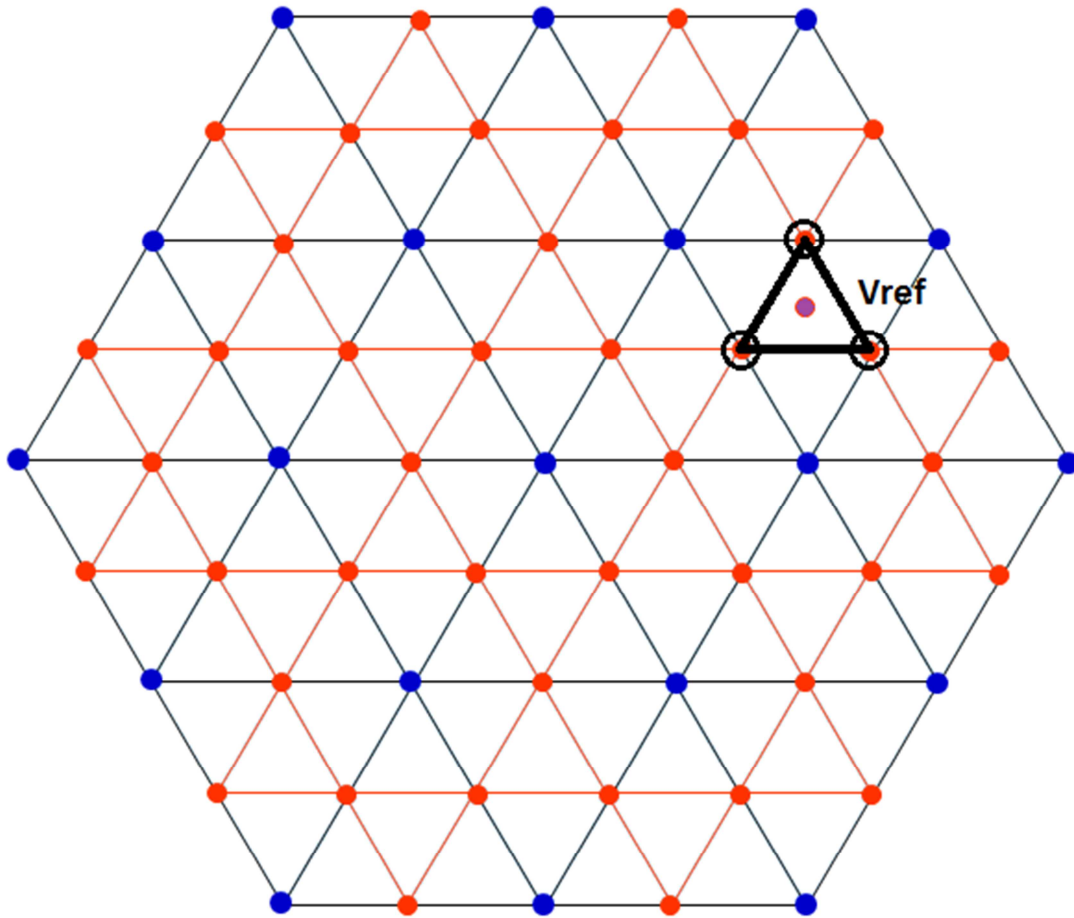


Figura 7

Para formular el problema de esta manera, las restricciones deben definir que una combinación de estados pertenezca o no un grupo concreto. Todas las combinaciones que pertenecen a este grupo tienen la misma representación en espacio de estado cuando sus acumuladores están equilibrados.

Para el caso de puentes completos, el estado de un puente puede ser 1, -1 ó 0, según si la tensión de salida del puente es la positiva, la negativa o la nula respectivamente. El estado del puente se representa como  $S_{kj}$  donde  $k$  es la rama en la que está conectado el puente y  $j$  es la posición que ocupa dentro de la rama.

$$S_{kj} \in \{-1, 0, 1\}$$

En el caso de que se tengan 3 ramas, la restricción puede ponerse en coordenadas  $\alpha\beta$ :

$$\begin{pmatrix} G_\alpha \\ G_\beta \end{pmatrix} = A \sum_{j=1}^N \begin{pmatrix} S_{1j} \\ S_{2j} \\ S_{3j} \end{pmatrix}$$



Donde  $A$  es la matriz de cambio de base de  $\alpha\beta$  a  $abc$  invariante en potencia,  $N$  es el número de puentes completos en cada rama y  $G_\alpha$  y  $G_\beta$  son las constantes que definen el grupo.

$$A = \sqrt{2/3} \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & -1/2 \\ 0 & 3/\sqrt{2} & -3/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

El resultado es equivalente a tener las siguientes  $M-1$  restricciones:

$$\sum_{j=1}^N S_{kj} - \sum_{j=1}^N S_{k+1j} = G_{kk+1} \quad \forall k \in \{1, 2 \dots M-1\}$$

En este caso el grupo lo definen las constantes  $G_{12}$  a  $G_{M-1M}$ .

Estas restricciones son igualmente válidas para módulos de semipuentes salvo porque en estos casos  $S_{kj}$  sólo puede tomar los valores 0 y 1 (o bien los valores -1 y 0 según cuáles sean los terminales del semipuerto). Es perfectamente posible combinar módulos de puente completo con módulos de semipuerto.

### Restricciones de tensión (problema exacto)

Un segundo método consiste en escoger como referencias las diferencias de tensión entre las ramas. En este caso no se utiliza la estrategia de Space Vector sino una más similar a la modulación conocida como "level-shifted". Este método es más parecido al utilizado en [1] y [3], donde se tiene en cuenta la tensión de los acumuladores desde un primer momento para así asegurar que las tensiones rama-rama moduladas coincidirán con sus referencias.

Puesto que, en general no habrá una combinación de estados de módulos que produzca una combinación de tensiones rama-rama determinada, se recurre a la modulación por ancho de pulsos. Para ello, se considera que el estado de un puente completo puede tomar cualquier valor desde -1 hasta 1, entendiendo que los valores no enteros se obtienen por modulación de ancho de pulsos entre los dos valores enteros más cercanos.

$$S_{kj} \in [-1, 1]$$

Las restricciones para el caso de 3 ramas pueden ponerse en coordenadas  $\alpha\beta$ :

$$\begin{pmatrix} U_\alpha \\ U_\beta \end{pmatrix} = A \sum_{j=1}^N \begin{pmatrix} S_{1j} \cdot V_{1j} \\ S_{2j} \cdot V_{2j} \\ S_{3j} \cdot V_{3j} \end{pmatrix}$$

Donde  $U_\alpha$  y  $U_\beta$  son las tensiones de referencia en  $\alpha\beta$  y  $V_{kj}$  es la tensión del acumulador que ocupa la  $j$ -ésima posición en la rama  $k$ . De la misma forma que con las restricciones de grupo, las restricciones de tensión para  $M$  ramas pueden ponerse rama a rama. En este caso, las tensiones de referencia se dan también de rama a rama ( $U_{12}, U_{23} \dots U_{M-1M}$ ):

$$\sum_{j=1}^N S_{kj} \cdot V_{kj} - \sum_{j=1}^N S_{k+1j} \cdot V_{k+1j} = U_{kk+1} \quad \forall k \in \{1, 2 \dots M - 1\}$$

Para simplificar, se define la tensión modulada por el módulo  $kj$  como:

$$X_{kj} = S_{kj} \cdot V_{kj}$$

$X_{kj}$  es un valor real y está acotado entre  $-V_{kj}$  y  $+V_{kj}$ . Las restricciones pueden ponerse en función de  $X_{kj}$  tanto en  $\alpha\beta$  como rama a rama.

$$\begin{pmatrix} U_{\alpha} \\ U_{\beta} \end{pmatrix} = A \sum_{j=1}^N \begin{pmatrix} X_{1j} \\ X_{2j} \\ X_{3j} \end{pmatrix}$$

$$\sum_{j=1}^N X_{kj} - \sum_{j=1}^N X_{k+1j} = U_{kk+1} \quad \forall k \in \{1, 2 \dots M - 1\}$$

Al igual que con el problema aproximado, estas restricciones son válidas para módulos de semipunte, salvo por que en este caso las tensiones moduladas  $X_{kj}$  por cada semipunte están acotadas entre 0 y  $+V_{kj}$  (o bien entre  $-V_{kj}$  y 0 según la cómo esté conectado el módulo). También es posible combinar puentes completos con semipuentes.

## **Función objetivo y su desarrollo**

La función objetivo tiene por misión puntuar las posibles combinaciones de estados o tensiones moduladas por los módulos definiendo qué combinaciones son mejores. Para este caso se ha considerado que los acumuladores de todos los módulos son condensadores con una misma capacidad  $C$  (si bien es posible adaptar el método para cuando las capacidades son distintas o incluso para cuando se usen baterías). El objetivo que se busca es que todas las tensiones tiendan a un mismo valor, por lo que se penaliza la desviación de las tensiones de cada condensador con respecto a una referencia  $V_{Ref}$ . Esta referencia es, en principio, igual para todos los módulos.

$$\min F = \sum_{k=1}^M \sum_{j=1}^N (V_{kj} - V_{Ref})^2$$

Esta función  $F$  no depende de los estados de los módulos ( $S_{kj}$ ) ni de las tensiones moduladas por éstos ( $X_{kj}$ ), por lo que no puede usarse directamente en el método. En lugar de eso, se considera que una solución es mejor cuanto más haga decrecer esta función  $F$  y peor cuanto más la haga crecer. Para evaluar la bondad de cada solución, se deriva la función  $F$  con respecto al tiempo y se minimiza esta derivada.

$$\min f_1 = \frac{dF}{dt} = \frac{2}{C} \sum_{k=1}^M \sum_{j=1}^N (V_{kj} - V_{Ref})(S_{kj} \cdot i_k)$$

Siendo  $i_k$  la corriente que recorre la rama  $k$  desde el nodo tomado como positivo hasta el negativo. Puesto que  $2$  y  $C$  son constantes positivas, pueden ser obviadas en el cálculo del mínimo. La función que debe minimizarse es por lo tanto  $f_2$ :

$$\min f_2 = \sum_{k=1}^M \sum_{j=1}^N V_{kj} \cdot S_{kj} \cdot i_k - V_{Ref} \cdot \sum_{k=1}^M \sum_{j=1}^N S_{kj} \cdot i_k$$

Como puede comprobarse,  $f_2$  consiste en dos términos. Atendiendo al juego de restricciones empleado  $f_2$  puede simplificarse. Paradójicamente, cada uno de los dos juegos de restricciones antes mencionados hace que sea constante (y por lo tanto irrelevante) uno de los dos términos, dando pese a ello resultados similares.

### Función objetivo para el problema aproximado

Con las restricciones rama a rama antes formuladas, el valor por el que se multiplica la referencia de tensión  $V_{Ref}$  en  $f_2$  puede desarrollarse de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^M \sum_{j=1}^N (S_{kj} \cdot i_k) = \sum_{k=1}^M i_k \cdot \sum_{j=1}^N S_{kj} = \\ & = i_1 \cdot \left( G_{12} + G_{23} + \dots + G_{M-1M} + \sum_{j=1}^N S_{Mj} \right) + i_2 \cdot \left( G_{23} + \dots + G_{M-1M} + \sum_{j=1}^N S_{Mj} \right) \\ & \quad + \dots + i_{M-1} \cdot \left( G_{M-1M} + \sum_{j=1}^N S_{Mj} \right) + i_M \cdot \sum_{j=1}^N S_{Mj} = \\ & = i_1 \cdot (G_{12} + G_{23} + \dots + G_{M-1M}) + i_2 \cdot (G_{23} + \dots + G_{M-1M}) + \\ & \quad + \dots + i_{M-1} \cdot (G_{M-1M}) + \sum_{k=1}^M i_k \cdot \sum_{j=1}^N S_{Mj} = \\ & = i_1 \cdot cte + i_2 \cdot cte + \dots + i_{M-1} \cdot cte + 0 \cdot \sum_{j=1}^N S_{Mj} = cte \end{aligned}$$

Puesto que  $V_{Ref}$  es constante, todo el segundo término de  $f_2$  es constante y no influye. Minimizar la función  $f_2$  es equivalente a maximizar la función  $f_{aprox}$ .

$$\max f_{aprox} = - \sum_{k=1}^M \sum_{j=1}^N V_{kj} \cdot S_{kj} \cdot i_k$$

Puesto que en el problema aproximado las variables que pueden usarse para optimizar son los estados de los módulos ( $S_{kj}$ ), se reordenan los términos de esta función de la siguiente manera:

$$\begin{cases} \max f_{aprox} = \sum_{k=1}^M \sum_{j=1}^N B_{k j} \cdot S_{k j} \\ B_{k j} = -V_{k j} \cdot i_k \end{cases}$$

$B_{k j}$  es una medida del beneficio que se obtiene por dar una tensión positiva con el módulo  $j$  de la rama  $k$ .  $B_{k j}$  es directamente proporcional a la tensión del módulo y a la corriente que recorre la rama del extremo negativo al positivo. En consecuencia,  $B_{k j}$  es mayor cuanto más potencia pueda salir del módulo cuando éste da una tensión positiva y entrar en él cuando da una tensión negativa. Además, como puede comprobarse la referencia de tensión para los condensadores es irrelevante.

El problema lineal aproximado completo es

$$\begin{cases} \max f_{aprox} = \sum_{k=1}^M \sum_{j=1}^N B_{k j} \cdot S_{k j} \\ \sum_{j=1}^N S_{k j} - \sum_{j=1}^N S_{k+1 j} = G_{k k+1} \\ S_{k j} \in \{-1, 0, 1\} \end{cases}$$

### **Función objetivo para el problema exacto**

Aplicando las restricciones de tensión de este problema, el primer término de  $f_2$  se puede desarrollar así:

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^M \sum_{j=1}^N X_{k j} \cdot i_k = \sum_{k=1}^M i_k \cdot \sum_{j=1}^N X_{k j} = \\ & = i_1 \cdot \left( U_{1 2} + U_{2 3} + \dots + U_{M-1 M} + \sum_{j=1}^N X_{M j} \right) + i_2 \cdot \left( U_{2 3} + \dots + U_{M-1 M} + \sum_{j=1}^N X_{M j} \right) \\ & \quad + \dots + i_{M-1} \cdot \left( U_{M-1 M} + \sum_{j=1}^N X_{M j} \right) + i_M \cdot \sum_{j=1}^N X_{M j} = \\ & = i_1 \cdot (U_{1 2} + U_{2 3} + \dots + U_{M-1 M}) + i_2 \cdot (U_{2 3} + \dots + U_{M-1 M}) + \\ & \quad + \dots + i_{M-1} \cdot (U_{M-1 M}) + \sum_{k=1}^M i_k \cdot \sum_{j=1}^N X_{M j} = \\ & = i_1 \cdot cte + i_2 \cdot cte + \dots + i_{M-1} \cdot cte + 0 \cdot \sum_{j=1}^N X_{M j} = cte \end{aligned}$$

Este término es constante y no influye. Minimizar la función  $f_2$  es equivalente a maximizar la función  $f_3$ .

$$\max f_3 = V_{Ref} \cdot \sum_{k=1}^M \sum_{j=1}^N S_{kj} \cdot i_k$$

En  $f_3$ , la tensión de referencia  $V_{Ref}$  es una constante positiva y por lo tanto tampoco influye. En consecuencia, se puede maximizar en su lugar la función  $f_{exacto}$ .

$$\max f_{exacto} = \sum_{k=1}^M \sum_{j=1}^N S_{kj} \cdot i_k$$

Puesto que en el problema exacto las variables que pueden usarse para optimizar son las tensiones moduladas por los módulos ( $X_{kj}$ ), se reordenan los términos de esta función de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \max f_{exacto} &= \sum_{k=1}^M \sum_{j=1}^N S_{kj} \cdot i_k = \sum_{k=1}^M \sum_{j=1}^N i_k \cdot S_{kj} \cdot \frac{V_{kj}}{V_{kj}} = \sum_{k=1}^M \sum_{j=1}^N \frac{i_k}{V_{kj}} \cdot X_{kj} \\ &\left\{ \begin{aligned} \max f_{exacto} &= \sum_{k=1}^M \sum_{j=1}^N B_{kj} \cdot X_{kj} \\ B_{kj} &= \frac{i_k}{V_{kj}} \end{aligned} \right. \end{aligned}$$

Como en el problema aproximado,  $B_{kj}$  es una medida del beneficio de modular una tensión positiva con el módulo  $j$  de la rama  $k$ . Al igual que con el problema aproximado, el beneficio es mayor si el condensador tiene más tensión cuando la corriente recorre la rama de negativo a positivo. Sin embargo en este caso la relación no es una proporción directa.

El problema lineal exacto completo es

$$\left\{ \begin{aligned} \max f_{exacto} &= \sum_{k=1}^M \sum_{j=1}^N B_{kj} \cdot X_{kj} \\ \sum_{j=1}^N X_{kj} - \sum_{j=1}^N X_{k+1j} &= U_{kk+1} \\ X_{kj} &\in [-V_{kj}, V_{kj}] \end{aligned} \right.$$

### 3. Métodos clásicos de optimización lineal

#### Uso del método Simplex

El problema que pretende resolverse es un problema de optimización lineal sujeto a restricciones. Para el modelo construido para el problema aproximado (con restricciones de grupo) las variables son los estados de los módulos  $S_{kj}$ . Salvo por el hecho de que estos estados son enteros, el problema puede ser resuelto mediante el conocido método Simplex. Este obstáculo se puede salvar con facilidad en el problema exacto (con restricciones de tensión) donde las variables son las tensiones de los módulos  $X_{kj}$ , las cuales son reales.

#### Adaptación del problema exacto

$$\left\{ \begin{array}{l} \max f_{exacto} = \sum_{k=1}^M \sum_{j=1}^N B_{kj} \cdot X_{kj} \\ \sum_{j=1}^N X_{kj} - \sum_{j=1}^N X_{k+1j} = U_{kk+1} \\ X_{kj} \in [-V_{kj}, V_{kj}] \end{array} \right.$$

El método Simplex está planteado para variables no negativas. Aunque se puede descomponer cada variable  $X$  en dos variables  $X_1 - X_2$ , para no aumentar el número de variables, se hace el siguiente cambio de variable:

$$Y_{kj} = X_{kj} + V_{kj}$$

Las variables  $Y_{kj}$  están comprendidas entre 0 y  $2 \cdot V_{kj}$ , con lo que permiten la aplicación del método Simplex. Si el número de módulos en cada rama ( $N$ ) es el mismo, entonces la función objetivo no varía.

$$\begin{aligned} f_{exacto} &= \sum_{k=1}^M \sum_{j=1}^N B_{kj} \cdot X_{kj} = \sum_{k=1}^M \sum_{j=1}^N B_{kj} \cdot Y_{kj} - \sum_{k=1}^M \sum_{j=1}^N B_{kj} \cdot V_{kj} = \\ &= \sum_{k=1}^M \sum_{j=1}^N B_{kj} \cdot Y_{kj} - \sum_{k=1}^M \sum_{j=1}^N \frac{i_k}{V_{kj}} \cdot V_{kj} = \sum_{k=1}^M \sum_{j=1}^N B_{kj} \cdot Y_{kj} - \sum_{k=1}^M i_k \cdot \sum_{j=1}^N 1 = \\ &= \sum_{k=1}^M \sum_{j=1}^N B_{kj} \cdot Y_{kj} - \sum_{k=1}^M i_k \cdot N = \sum_{k=1}^M \sum_{j=1}^N B_{kj} \cdot Y_{kj} - N \cdot \sum_{k=1}^M i_k = \\ &= \sum_{k=1}^M \sum_{j=1}^N B_{kj} \cdot Y_{kj} - N \cdot 0 = \sum_{k=1}^M \sum_{j=1}^N B_{kj} \cdot Y_{kj} \end{aligned}$$

Aunque no es deseable trabajar con un número de módulos ( $N_k$ ) distinto en cada rama, se puede contemplar este caso, el cual podría ocurrir, por ejemplo si se estropea un módulo en alguna rama y el convertidor tiene suficiente redundancia como para seguir

operando. En tal caso simplemente se le suma una constante a la función objetivo, lo cual es irrelevante:

$$\begin{aligned} f_{exacto} &= \sum_{k=1}^M \sum_{j=1}^{N_k} B_{kj} \cdot X_{kj} = [\dots] = \sum_{k=1}^M \sum_{j=1}^{N_k} B_{kj} \cdot Y_{kj} - \sum_{k=1}^M i_k \cdot \sum_{j=1}^{N_k} (1) = \\ &= \sum_{k=1}^M \sum_{j=1}^{N_k} B_{kj} \cdot Y_{kj} - \sum_{k=1}^M i_k \cdot N_k = \sum_{k=1}^M \sum_{j=1}^{N_k} B_{kj} \cdot Y_{kj} - cte \end{aligned}$$

En este caso se puede usar una función objetivo equivalente que es igual que en el caso en que el número de módulos en cada rama sea el mismo.

$$f_{exacto eq} = \sum_{k=1}^M \sum_{j=1}^{N_k} B_{kj} \cdot Y_{kj}$$

Es habitual usar el método Simplex en problemas de minimización en lugar de en problemas de maximización. Para pasar con sencillez de un tipo de problema al otro, basta cambiar el signo a la función objetivo:

$$\max \sum_{k=1}^M \sum_{j=1}^{N_k} B_{kj} \cdot Y_{kj} \quad \rightarrow \quad \min \sum_{k=1}^M \sum_{j=1}^{N_k} -B_{kj} \cdot Y_{kj}$$

Las restricciones de tensión se modifican así:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{N_k} X_{kj} - \sum_{j=1}^{N_{k+1}} X_{k+1j} &= \sum_{j=1}^{N_k} Y_{kj} - \sum_{j=1}^{N_{k+1}} Y_{k+1j} - \sum_{j=1}^{N_k} V_{kj} + \sum_{j=1}^{N_{k+1}} V_{k+1j} = U_{kk+1} \\ \sum_{j=1}^{N_k} Y_{kj} - \sum_{j=1}^{N_{k+1}} Y_{k+1j} &= U_{kk+1} + \sum_{j=1}^{N_k} V_{kj} - \sum_{j=1}^{N_{k+1}} V_{k+1j} \end{aligned}$$

Por último, para acotar las variables de optimización, se añaden las holguras:

$$Y_{kj} \leq 2 \cdot V_{kj}; \quad Y_{kj} + h_{kj} = 2 \cdot V_{kj}$$

El problema lineal queda ahora de la siguiente forma:

$$\left\{ \begin{array}{l} \min \sum_{k=1}^M \sum_{j=1}^{N_k} -B_{kj} \cdot Y_{kj} \\ \sum_{j=1}^{N_k} Y_{kj} - \sum_{j=1}^{N_{k+1}} Y_{k+1j} = U_{kk+1} + \sum_{j=1}^{N_k} V_{kj} - \sum_{j=1}^{N_{k+1}} V_{k+1j} \\ Y_{kj} + h_{kj} = 2 \cdot V_{kj} \\ Y_{kj}, h_{kj} \geq 0 \end{array} \right.$$

Este problema se encuentra ya en forma estándar y es susceptible de resolverse usando el método Simplex.

### Adaptación del problema aproximado

$$\left\{ \begin{array}{l} \max f_{aprox} = \sum_{k=1}^M \sum_{j=1}^N B_{kj} \cdot S_{kj} \\ \sum_{j=1}^N S_{kj} - \sum_{j=1}^N S_{k+1j} = G_{kk+1} \\ S_{kj} \in \{-1, 0, 1\} \end{array} \right.$$

La adaptación del problema aproximado es muy similar a la del problema exacto. En primer lugar se hace un cambio de variable para que  $S_{kj}$  sea no negativo:

$$S'_{kj} = S_{kj} + 1$$

Se hace la sustitución correspondiente en la función objetivo.

$$\begin{aligned} f_{aprox} &= \sum_{k=1}^M \sum_{j=1}^N B_{kj} \cdot S_{kj} = \sum_{k=1}^M \sum_{j=1}^N B_{kj} \cdot S'_{kj} - \sum_{k=1}^M \sum_{j=1}^N B_{kj} = \\ &= \sum_{k=1}^M \sum_{j=1}^N B_{kj} \cdot S'_{kj} - cte \end{aligned}$$

El resultado es equivalente a sumar una constante, lo cual es irrelevante.

$$f_{aprox eq} = \sum_{k=1}^M \sum_{j=1}^N B_{kj} \cdot S'_{kj}$$

Como es habitual plantear la optimización como la búsqueda de un mínimo en lugar de la de un máximo, se cambia el signo de la función objetivo:

$$\max \sum_{k=1}^M \sum_{j=1}^{N_k} B_{kj} \cdot S'_{kj} \quad \rightarrow \quad \min \sum_{k=1}^M \sum_{j=1}^{N_k} -B_{kj} \cdot S'_{kj}$$

La misma sustitución puede hacerse en las restricciones. Si el número de módulos en cada rama (N) es el mismo, no hay efecto:

$$\sum_{j=1}^N S_{kj} - \sum_{j=1}^N S_{k+1j} = \sum_{j=1}^N S'_{kj} - \sum_{j=1}^N S'_{k+1j} - \sum_{j=1}^N (1) + \sum_{j=1}^N (1) =$$



$$= \sum_{j=1}^N S'_{kj} - \sum_{j=1}^N S'_{k+1j} - N + N = \sum_{j=1}^N S'_{kj} - \sum_{j=1}^N S'_{k+1j} = G_{kk+1}$$

Si, por el contrario, hay un número distinto ( $N_k$ ) de módulos en cada rama (por ejemplo porque algún módulo haya quedado fuera de servicio), entonces, basta con corregir las constantes de grupo  $G_{kk+1}$ :

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{N_k} S_{kj} - \sum_{j=1}^{N_{k+1}} S_{k+1j} &= \sum_{j=1}^{N_k} S'_{kj} - \sum_{j=1}^{N_{k+1}} S'_{k+1j} - N_k + N_{k+1} = G_{kk+1} \\ \sum_{j=1}^{N_k} S'_{kj} - \sum_{j=1}^{N_{k+1}} S'_{k+1j} &= G_{kk+1} + N_k - N_{k+1} \end{aligned}$$

Se añaden también las variables de holgura  $h_{kj}$ :

$$S'_{kj} \leq 2; \quad S'_{kj} + h_{kj} = 2$$

El problema de optimización lineal en forma estándar queda como se indica:

$$\left\{ \begin{array}{l} \min \sum_{k=1}^M \sum_{j=1}^{N_k} -B_{kj} \cdot S'_{kj} \\ \sum_{j=1}^{N_k} S'_{kj} - \sum_{j=1}^{N_{k+1}} S'_{k+1j} = G_{kk+1} + N_k - N_{k+1} \\ S'_{kj} + h_{kj} = 2 \\ S'_{kj}, h_{kj} \geq 0 \end{array} \right.$$

Si bien, tal como está formulado, el problema no tiene en cuenta que  $S'_{kj}$  deba ser entero, la matriz de restricciones es tal que siempre saldrá entero. Esto es así porque el valor absoluto del determinante de cualquier menor  $MN+2$  por  $MN+2$  de la matriz de restricciones es unitario y además los términos independientes de las restricciones son enteros. De hecho, el problema lineal resultante puede expresarse como un problema de transportes (ver página siguiente), por lo que tiene las mismas propiedades.

### Dificultades del método Simplex

Sin embargo, tanto en el problema exacto como en el aproximado el número de variables cuyo valor debe ser encontrado por el método Simplex es el doble del número total de módulos del convertidor (una para la tensión modulada por el módulo y otra para la holgura). Teniendo en cuenta que este método es iterativo, la velocidad de convergencia es un parámetro fundamental, y dicha velocidad viene dada por el número de variables y restricciones que se tienen.

## Resolución como problema de transportes

El problema de transportes equivalente a este problema de optimización busca maximizar el beneficio  $B$  (es decir, minimizar el coste  $-B$ ) de mover un cierto flujo por una red de transportes. Esta red cuenta con  $M$  nodos que pueden ser dispuestos como los vértices de un polígono regular. Cada nodo hace referencia a una pareja de ramas consecutivas ( $k$  y  $k+1$ ). De cada nodo al siguiente hay  $N$  arcos (formando los lados del polígono regular). Cada uno de estos conjuntos de  $N$  arcos están asociados a una rama, estando cada arco asociado a un módulo. La capacidad de cada arco es 2 unidades de flujo para el problema aproximado, y del doble de la tensión del módulo asociado para el problema exacto. Si el nodo es un semipunto, la capacidad del arco es la mitad. La cantidad de flujo neto que entra o sale de un nodo viene dada por el término independiente de la restricción de grupo ( $G_{k \ k+1}$ ) o de tensión ( $U_{k \ k+1}$ ). La figura 8 muestra la red correspondiente a la aplicación del problema aproximado al convertidor de la figura 3.

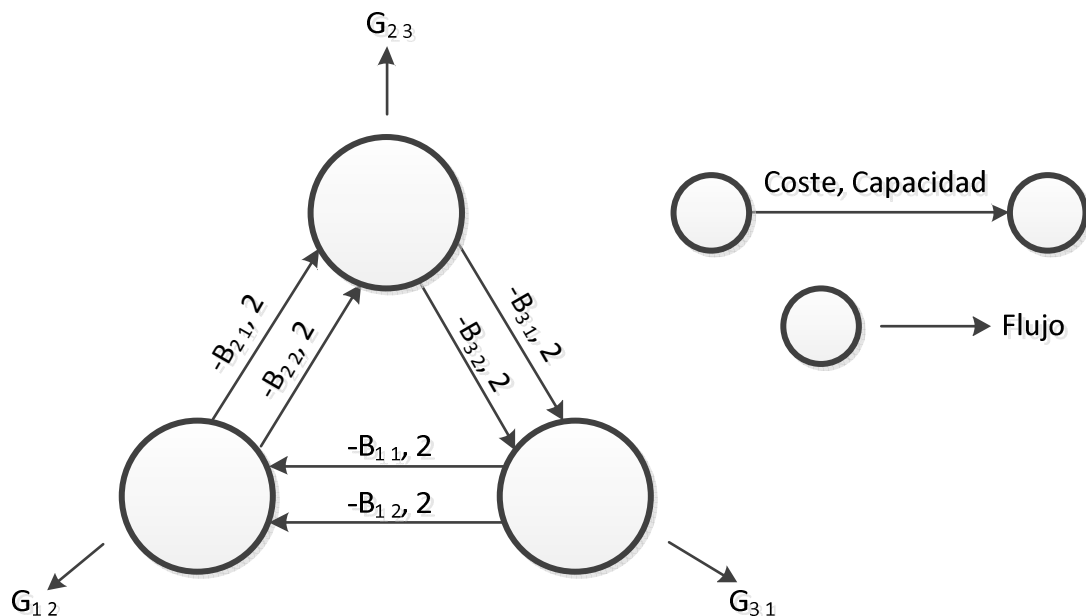


Figura 8

## Adaptación del problema para el método Primal-Dual

Uno de los métodos más potentes para resolver un problema de transportes es el llamado método Primal-Dual. Sin embargo, para obtener la solución inicial, este método no permite que haya ciclos con costes negativos. Por ello, se debe adaptar la formulación del problema para evitar esto.

Para asegurar que no puede haber bucles de coste negativo, debe asegurarse que todos los costes ( $-B_{k \ j}$ ) son positivos y, por lo tanto, que todos los beneficios ( $B_{k \ j}$ ) son negativos. Para ello, se deben hacer los cambios de variables precisos para que cada variable positiva provoque un beneficio negativo en la función objetivo. Dado que los beneficios son proporcionales a la corriente de la rama  $i_k$  y que para puentes completos las restantes variables de las que depende el beneficio son positivas, en el problema exacto se harán los cambios en las variables en cuyas ramas  $i_k$  sea positiva, y en el

problema aproximado, en las de  $i_k$  negativa. Por simplicidad, sólo se desarrolla el problema para el caso en que  $N$  es igual en todas las ramas, aunque es posible extender este razonamiento a un número de módulos distinto tal como se hizo para el método Simplex.

Para el problema exacto, en aquellas ramas cuya corriente sea positiva, los cambios de variables deben ser los siguientes:

$$Y_{kj} = -X_{kj} + V_{kj}; \quad Y_{kj} \in [-V_{kj}, +V_{kj}]$$

$$C_{kj} = B_{kj} = \frac{I_k}{V_{kj}} > 0$$

En las ramas cuya corriente sea negativa, los cambios serán los mismos que para el método Simplex:

$$Y_{kj} = X_{kj} + V_{kj}; \quad Y_{kj} \in [-V_{kj}, +V_{kj}]$$

$$C_{kj} = -B_{kj} = -\frac{I_k}{V_{kj}} > 0$$

Donde  $C_{kj}$  es el coste marginal de aumentar el valor de  $Y_{kj}$ . Por su parte, en el problema aproximado, para ramas con corriente positiva, se hacen los mismos cambios de variable que para adaptar el problema al método Simplex:

$$S'_{kj} = S_{kj} + 1; \quad S'_{kj} \in \{0, 1, 2\}$$

$$C_{kj} = -B_{kj} = I_k \cdot V_{kj} > 0$$

Mientras que para corrientes negativas, el cambio es el siguiente:

$$S'_{kj} = -S_{kj} + 1; \quad S'_{kj} \in \{0, 1, 2\}$$

$$C_{kj} = B_{kj} = -I_k \cdot V_{kj} > 0$$

A continuación, para poder usar estos cambios de variable se adaptan las restricciones de ambos problemas. Las restricciones del problema exacto se modifican así:

$$\sum_{j=1}^N X_{kj} - \sum_{j=1}^N X_{k+1j} = U_{kk+1}$$

$$-sign(i_k) \cdot \sum_{j=1}^N (Y_{kj} - V_{kj}) + sign(i_{k+1}) \cdot \sum_{j=1}^N (Y_{k+1j} - V_{k+1j}) = U_{kk+1}$$

$$-sign(i_k) \cdot \sum_{j=1}^N Y_{kj} + sign(i_{k+1}) \cdot \sum_{j=1}^N Y_{k+1j} = U'_{kk+1}$$

$$U'_{kk+1} = U_{kk+1} - sign(i_k) \cdot \sum_{j=1}^N V_{kj} + sign(i_{k+1}) \cdot \sum_{j=1}^N V_{k+1j}$$

Las restricciones del problema aproximado, suponiendo que el número de módulos  $N$  es el mismo en cada rama, quedan como sigue:

$$\sum_{j=1}^N S_{kj} - \sum_{j=1}^N S_{k+1j} = G_{kk+1}$$

$$\text{sign}(i_k) \cdot \sum_{j=1}^N (S'_{kj} - 1) - \text{sign}(i_{k+1}) \cdot \sum_{j=1}^N (S'_{k+1j} - 1) = G_{kk+1}$$

$$\text{sign}(i_k) \cdot \sum_{j=1}^N S'_{kj} - \text{sign}(i_{k+1}) \cdot \sum_{j=1}^N S'_{k+1j} = G_{kk+1} + N \cdot (\text{sign}(i_k) - \text{sign}(i_{k+1}))$$

Puesto que el signo de las corrientes es conocido, las restricciones siguen siendo lineales. Estas restricciones corresponden a los nodos de la red de transportes. Las variables  $Y_{kj}$  y  $S'_{kj}$  representan el flujo por los arcos. Como puede comprobarse, estas variables van multiplicadas por el signo de la corriente de una rama. El cambio de variable habrá provocado cambios de signo en las variables asociadas a algunas ramas. Los arcos correspondientes a estas variables estarán orientados en sentido contrario al original, provocando una red como la mostrada en la figura 9.

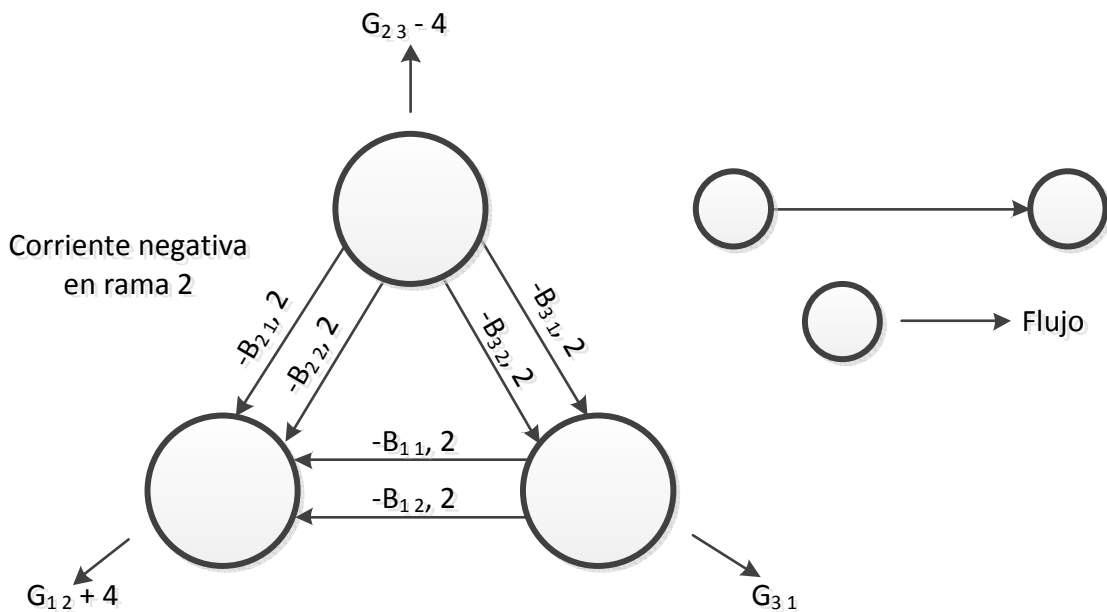


Figura 9

Incluso el método Primal-Dual (para el caso del problema aproximado) podría ser bastante lento por la necesidad de calcular los costes relativos una y otra vez. En cada iteración será necesario modificar el coste relativo de todas las variables no saturadas de dos ramas, ya que la cortadura que se produce en este método cruza a través del polígono que forma la red de transporte en todas las iteraciones salvo en la última. A pesar de ello, este método tiene ventajas con respecto al Simplex: no requiere las variables de holgura (lo que significa trabajar con la mitad de variables) y nunca calcula el coste relativo de más variables que las de 2 ramas en una misma iteración.

Todo este proceso podría resolverse con mayor simpleza y velocidad si las variables correspondientes a cada rama estuvieran ya ordenados en función de su beneficio/coste. Y por eso, el método que se propone parte de esta base.

## 4. Fundamentos del método propuesto

Ninguno de los dos métodos citados hace uso de una variable clave que es propio de estos convertidores de potencia: la tensión homopolar. Esta tensión es en realidad el único parámetro libre. Por ello, se propone un método para resolver tanto el problema aproximado como el exacto haciendo uso de este parámetro. Este método se basa en una serie de propiedades que se obtienen al combinar las propiedades de un problema de optimización lineal con el significado físico de las variables y restricciones del problema.

### Propiedades de la solución

En un problema de optimización en el que tanto la función objetivo como las restricciones son lineales, la solución tiene ciertas propiedades. Se sabe que, en ausencia de soluciones alternativas, la solución del problema en forma estándar puede llegar a tener hasta tantas variables no saturadas como restricciones tiene. En el caso de que haya menos variables no saturadas que restricciones, se habla de degeneración: se dice que hay una degeneración o un grado de degeneración por cada variable no saturada que falte. Si bien la degeneración es común en el problema aproximado, la presencia de soluciones alternativas es muy rara tanto en el problema aproximado como en el exacto, y además incluso cuando haya soluciones alternativas, éstas pueden ser ignoradas. Se puede concluir que en la solución del problema no habrá más variables no saturadas que el número de restricciones. Además, para la formulación en forma estándar, todas las variables serán no negativas. La forma estándar del problema ha sido descrita en la adaptación del problema al método Simplex.

El problema exacto en forma estándar tiene las siguientes restricciones:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{j=1}^{N_k} Y_{k j} - \sum_{j=1}^{N_{k+1}} Y_{k+1 j} = U_{k k+1} + \sum_{j=1}^{N_k} V_{k j} - \sum_{j=1}^{N_{k+1}} V_{k+1 j} \quad \forall k \in \{1, 2 \dots M - 1\} \\ Y_{k j} + h_{k j} = 2 \cdot V_{k j} \quad \forall k \in \{1, 2 \dots M\}, j \in \{1, 2 \dots N_k\} \end{array} \right.$$

Hay dos tipos de restricciones: de tensión y de holgura. Hay M-1 restricciones de tensión y tantas restricciones de holgura como módulos tenga el convertidor. Por cada módulo hay 2 variables: una de tensión  $Y_{k j}$  y otra de holgura  $h_{k j}$ . Entre todas estas variables, puede haber como máximo tantas variables no nulas como módulos más ramas menos una.

Se sabe que la tensión almacenada en cada módulo  $V_{k j}$  no puede ser negativa, pues los diodos del módulo no lo permiten. Esta tensión podría ser nula durante la precarga del equipo, pero en general no será nula salvo que ocurra un error grave, momento en el cuál, el método carecería de utilidad. Así pues podemos asumir que  $V_{k j}$  es un valor positivo.

De acuerdo con esto y con la restricción de holgura, entre la variable de tensión del módulo  $Y_{k j}$  y la de holgura  $h_{k j}$  deben sumar una cantidad positiva. Puesto que ninguna variable puede ser negativa, al menos una de las dos debe ser no nula. Esto nos da un mínimo de una variable no nula por módulo. Si el número variables no nulas es el máximo posible, de entre todas las parejas de variables habrá M-1 en las que tanto la de

tensión  $Y_{kj}$  como la de holgura  $h_{kj}$  sean no nulas. En las restantes parejas de variables, una de las dos será nula y la otra no.

En las parejas de variables en las que  $Y_{kj}$  es nula, de acuerdo con la definición de  $Y_{kj}$ , la tensión de salida del módulo será la mínima posible, es decir, el módulo dará toda su tensión en sentido negativo:

$$Y_{kj} = X_{kj} + V_{kj} \Rightarrow 0 = X_{kj} + V_{kj} \Rightarrow X_{kj} = -V_{kj}$$

En las parejas de variables en las que  $h_{kj}$  es nula, de acuerdo con las definiciones de  $Y_{kj}$  y  $h_{kj}$ , la tensión de salida del módulo será la máxima posible, es decir, el módulo dará toda su tensión en sentido positivo:

$$\begin{aligned} Y_{kj} + h_{kj} = 2 \cdot V_{kj} &\Rightarrow Y_{kj} + 0 = 2 \cdot V_{kj} \Rightarrow Y_{kj} = 2 \cdot V_{kj} \\ Y_{kj} = X_{kj} + V_{kj} &\Rightarrow 2 \cdot V_{kj} = X_{kj} + V_{kj} \Rightarrow X_{kj} = V_{kj} \end{aligned}$$

Tanto si la variable nula es la de tensión como si es la de holgura, si alguna de las dos es nula, el módulo estará saturado. Como sólo puede haber  $M-1$  parejas de estas variables en las que ninguna sea nula, sólo podrá haber  $M-1$  módulos no saturados. Se puede decir entonces que hay hasta  $M-1$  tensiones de salida  $X_{kj}$  básicas o no saturadas. Las restantes tensiones de salida serán saturadas. A los módulos de tensión de salida básica se les llama módulos básicos y viceversa.

Un razonamiento equivalente puede hacerse para el problema aproximado. Las restricciones del problema aproximado son:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{N_k} S'_{kj} - \sum_{j=1}^{N_{k+1}} S'_{k+1j} = G_{k,k+1} + N_k - N_{k+1} & \forall k \in \{1, 2 \dots M-1\} \\ S'_{kj} + h_{kj} = 2 & \forall k \in \{1, 2 \dots M\}, j \in \{1, 2 \dots N_k\} \end{cases}$$

El número de restricciones es el mismo que para el problema exacto. Para cada módulo hay una restricción en la que intervienen la variable de estado  $S'_{kj}$  y la de holgura  $h_{kj}$  correspondientes al mismo módulo. La suma de estas dos variables es una cantidad positiva: 2. Eso significa que al menos una de las dos no es nula. En consecuencia habrá  $M-1$  módulos en los que las dos variables podrán ser no nulas mientras que en todos los demás, una de ellas valdrá 0 y la otra 2.

Para los módulos en los que la variable nula es  $S'_{kj}$ , el estado del módulo es -1, es decir, el mínimo:

$$S'_{kj} = S_{kj} + 1 \Rightarrow 0 = S_{kj} + 1 \Rightarrow S_{kj} = -1$$

Para los módulos en los que la variable nula es  $h_{kj}$ , la variable  $S'_{kj}$  vale 2 y el estado del módulo es +1, es decir, el máximo:

$$\begin{aligned} S'_{kj} + h_{kj} = 2 &\Rightarrow S'_{kj} + 0 = 2 \Rightarrow S'_{kj} = 2 \\ S'_{kj} = S_{kj} + 1 &\Rightarrow 2 = S_{kj} + 1 \Rightarrow S_{kj} = 1 \end{aligned}$$

A diferencia de lo que ocurre en el problema exacto, en el aproximado las variables son enteras. El único valor que pueden tomar las variables  $S'_{kj}$  a parte de 0 y 2 es 1. Para este valor, el módulo queda en estado 0, es decir, su tensión de salida es nula:

$$S'_{kj} = S_{kj} + 1 \Rightarrow 1 = S_{kj} + 1 \Rightarrow S_{kj} = 0$$

Los estados nulos de los módulos son los estados básicos o no saturados. Como mucho habrá M-1 módulos básicos. Los restantes módulos (los saturados) estarán en estado +1 ó -1.

En las restantes restricciones tanto del problema aproximado como del problema exacto, no aparecen las variables de holgura. Además, todas las demás variables son tratadas en bloque. Todas las variables de tensión o de estado de los módulos de una misma rama aparecen siempre sumadas entre sí. Las restricciones no imponen valores a estas variables de forma independiente, sino a las sumas de las variables de tensión o estado de cada rama. En consecuencia, la rama puede tratarse en bloque como una única variable. Si se conociera el valor óptimo para la suma de tensiones de los módulos de cada rama (en el problema exacto) o para el estado de cada rama (en el problema aproximado), se podría optimizar cada rama por separado.

Suponiendo que la suma de estados o de las tensiones de los módulos de una rama es conocida, la forma de maximizar el beneficio es dar el estado más alto posible a los módulos con mayor beneficio, y el más bajo posible a los módulos con el menor beneficio. Por lo tanto, se deben ordenar los módulos de cada rama desde el de mayor beneficio hasta el de menor beneficio. No tiene sentido subir la tensión o el estado de un módulo mientras se pueda subir el estado o la tensión de algún módulo más beneficioso. De la misma manera, si se debe bajar la tensión o el estado de la rama, se reducirá la tensión o el estado del módulo con menor beneficio que no se encuentre saturado ya al mínimo. Si se representan los estados de los módulos de una rama en un vector ordenados desde el módulo de mayor beneficio de la rama hasta el de menor beneficio de una rama, en el óptimo del problema, este vector puede tener dos estructuras posibles:

$$S_k^{ord} = \begin{pmatrix} +1 \\ +1 \\ \vdots \\ +1 \\ B \\ -1 \\ \vdots \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{ó} \quad S_k^{ord} = \begin{pmatrix} +1 \\ +1 \\ \vdots \\ +1 \\ -1 \\ -1 \\ \vdots \\ -1 \end{pmatrix}$$

Se puede extraer la siguiente conclusión: los módulos de mayor beneficio están saturados al máximo; los módulos de menor beneficio están saturados al mínimo, y puede haber un módulo básico. En el problema aproximado este módulo básico tiene un estado nulo, mientras que en el exacto puede tener un estado no entero representando, por ejemplo, una modulación por ancho de pulsos. Como en el convertidor hay M ramas pero sólo M-1 módulos pueden ser no saturados, habrá al menos una rama en la que no haya un módulo básico.



## Mejora de las soluciones y criterio de optimalidad

Con la información dada en la sección anterior es posible dar una posible solución inicial. El siguiente paso es saber cómo mejorar esta solución. Para ello, recordemos que las restricciones de grupo o de tensión (según si se trata del problema aproximado o del exacto) fueron formuladas para permitir variar el modo común pero no las diferencias entre ramas. Consecuentemente, estas restricciones pueden también ser expresadas de la siguiente manera:

$$\sum_{j=1}^{N_k} S_{kj} = G_k + \Delta G \quad \forall k \in \{1, 2 \dots M\}$$

$$\sum_{j=1}^{N_k} X_{kj} = U_k + \Delta U \quad \forall k \in \{1, 2 \dots M\}$$

Donde  $\Delta G$  y  $\Delta U$  son variables libres y  $G_k$  y  $U_k$  son constantes. Si todas las variables  $S_{kj}$  del problema aproximado o las variables  $X_{kj}$  del problema exacto corresponden a una solución básica del problema, entonces se puede dar arbitrariamente un valor nulo a  $\Delta G$  o  $\Delta U$  según corresponda. Con esto, es posible calcular un juego de constantes  $G_k$  y  $U_k$ . Los sumatorios representan las sumas de estados o de tensiones de cada rama.

Como ya se ha comentado en las propiedades de la solución, las variables de grupo o tensión de una misma rama aumentan o disminuyen según un orden concreto: una vez dada una suma de tensión o una suma de estados para la rama, todas las variables de esta rama quedan determinadas. Así pues, en estos dos conjuntos de  $M$  ecuaciones cada uno hay  $M+1$  variables:  $M$  correspondientes a las sumas de estados o tensiones y una correspondiente al modo común ( $\Delta G$  o  $\Delta U$ ). Sólo puede tomarse una de estas variables como parámetro libre. Por ser el único que aparece en todas las ecuaciones, tomemos  $\Delta G$  o  $\Delta U$  como parámetro.

Si se aumenta o disminuye el valor de  $\Delta G$  o  $\Delta U$ , la suma de estados o de tensiones en cada rama aumenta o disminuye por igual (en términos de estados o de tensiones según corresponda). Cualquiera que sea el valor escogido para  $\Delta G$  o  $\Delta U$ , la nueva combinación de variables de estado o de tensión representará una nueva solución básica.

El beneficio que se obtiene por aumentar  $\Delta G$  o  $\Delta U$  viene dado por la suma de los beneficios marginales de las variables de estado o tensión que aumentan en cada rama, ya que todas las demás permanecerán constantes. De la misma manera, el coste que se tiene por disminuir este parámetro es la suma de los beneficios marginales de las variables que disminuyen. Como se sabe el orden en que las variables de estado o tensión pueden asignarse en cada rama, se sabe también cuáles serán las variables que aumenten o disminuyan, y podrán sumarse los beneficios asociados con facilidad.

En particular, si se decide aumentar la tensión de modo común, aumentará en cada rama la variable de mayor beneficio que no esté ya saturada al máximo. Esta variación será interesante si la suma de los beneficios de la variable no saturada al máximo de mayor beneficio de cada rama es mayor que 0. Si por el contrario esta suma es menor que 0, la variación será contraproducente. En el caso de que la suma sea exactamente cero, habrá soluciones alternativas y, puesto que el tiempo en que el método encuentra una solución

es relevante, lo ideal será no aumentar más la tensión de modo común. En caso de que aumente la tensión de modo común, la primera variable (en orden de beneficios) no saturada al máximo de cada rama aumentará una misma cantidad, la cuál será la necesaria para que una de estas  $M$  variables se sature al máximo. Esto es así porque en una solución básica siempre hay al menos una rama en la que no hay ninguna variable no saturada.

De igual forma, si se decide disminuir la tensión de modo común, disminuirá en cada rama la variable de menor beneficio que no esté ya saturada al mínimo. La variación será beneficiosa si la suma de los beneficios de la variable con menor beneficio de cada rama no saturadas al mínimo es menor que 0. Si la suma fuera mayor que 0, la variación sería perjudicial. Si la suma es nula hay soluciones alternativas y por velocidad será preferible no disminuir la tensión de modo común. En caso de que efectivamente disminuya esta tensión, la última variable (en orden de beneficios) no saturada al mínimo de cada rama aumentará una misma cantidad, la cuál será la mínima para que una de estas  $M$  variables se sature al mínimo.

Cuando la suma de los beneficios de la primera variable de cada rama no saturada al máximo sea menor o igual que 0, y además la suma de los beneficios de la última variable de cada rama no saturada al mínimo sea mayor o igual que 0, no será beneficioso subir ni bajar la tensión homopolar y se habrá encontrado el óptimo del problema.

Para que en cada rama siempre haya una variable no saturada al máximo y otra no saturada al mínimo, se añade a cada rama 2 módulos virtuales. Esto consiste en tratar la rama como si existieran 2 módulos más, uno con un beneficio infinitamente alto y otro con un beneficio infinitamente bajo (negativo). El primero de ellos siempre estará saturado al máximo, y el segundo siempre estará saturado al mínimo. De esta manera será imposible que en una misma rama se saturen todos los módulos al máximo ni al mínimo, permitiendo al método comprobar siempre si se ha alcanzado el óptimo.

## 5. Método para el problema aproximado

El método propuesto es una variante del Simplex en la que, en lugar de calcular los costes/beneficios relativos de cada variable, se decide entre subir o bajar la tensión del neutro en función del coste/beneficio de un número de variables menor que  $2M$ . Al igual que con el método Simplex, es necesario partir de una solución inicial. En este capítulo se describe el método tal como se aplica para resolver el problema aproximado.

### Estructura

El método propuesto consta de los siguientes pasos:

1. Obtener el beneficio  $B_{kj}$  de dar tensión positiva en cada módulo
2. Ordenar los módulos de cada rama en función de su beneficio
3. Escoger una solución inicial
4. Ajustar iterativamente la tensión homopolar hasta localizar el óptimo del primer grupo
  - a. Cada vez que un estado básico llegue se sature (a -1 ó 1) sustituirlo por otro de la misma rama siguiendo el orden de beneficios
  - b. Cuando el beneficio unitario por aumentar la tensión de neutro es negativo para una tensión de neutro mayor y positivo para una tensión de neutro menor, se ha alcanzado el óptimo del problema
5. Para obtener los restantes puntos de la modulación Space Vector, ajustar la solución encontrada (manteniendo las variables básicas) y usar esta solución como inicial para reducir el número de iteraciones
6. Ordenar las soluciones de los distintos puntos de la modulación Space Vector para minimizar el número de conmutaciones
7. Deshacer la ordenación llevada a cabo en el paso 2

A continuación se describen con más detalle cada uno de estos pasos.

### 1 Cálculo de beneficios

En primer lugar debe obtenerse el beneficio  $B_{kj}$  de dar tensión positiva con cada módulo. Este beneficio depende de la tensión acumulada en el condensador del módulo y de la corriente que circula por la rama. Para puentes completos con condensadores en el problema aproximado, la fórmula del beneficio es:

$$B_{kj} = -V_{kj} \cdot i_k$$

Esta fórmula depende de si se formula el problema aproximado o el exacto. La fórmula también es distinta en las variantes del método descritas en el capítulo “7. Variantes”.

Una vez obtenidos todos los beneficios, éstos pueden representarse en una tabla o matriz donde la columna representa la rama y la fila representa el módulo dentro de la rama:

$$B = \begin{pmatrix} B_{11} & \cdots & B_{M1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{1N} & \cdots & B_{MN} \end{pmatrix}$$

Puesto que cada rama puede tener un número  $N_k$  de módulos distinto, la tabla puede tener un número distinto de elementos en cada columna. En este caso, en lugar de una matriz, pueden usarse tantos vectores como ramas:

$$B_1 = \begin{pmatrix} B_{11} \\ \vdots \\ B_{1N_1} \end{pmatrix}, B_2 = \begin{pmatrix} B_{21} \\ \vdots \\ B_{2N_2} \end{pmatrix}, \dots B_M = \begin{pmatrix} B_{M1} \\ \vdots \\ B_{MN_M} \end{pmatrix}$$

Ejemplo: Supongamos que tenemos un convertidor de 1kVA de potencia nominal con 3 ramas y 2 módulos por rama, es decir, con la misma topología que el mostrado en la figura 3. En un ciclo de control concreto, se toman las medidas de corriente de las tres ramas, resultando estas:  $i_1 = -9.7A$ ,  $i_2 = +2.6A$  e  $i_3 = +7.1A$ . Se toma el signo positivo en las corrientes cuando estas circulan de positivo a negativo de la rama. Se miden así mismo las tensiones de los condensadores de los módulos de cada rama siendo las de la primera rama  $V_{11} = 410V$  y  $V_{12} = 360V$ . Los condensadores de los módulos de la segunda rama están cargados a  $V_{21} = 400V$  y  $V_{22} = 370V$ , y los de la tercera se encuentran cargados a  $V_{31} = 390V$  y  $V_{32} = 380V$ . Utilizando esta información, se calcula el beneficio (en vatios) de dar tensión positiva con cada módulo:

$$B_{kj} = -V_{kj} \cdot i_k$$

$$B_1 = -i_1 \cdot \begin{pmatrix} V_{11} \\ V_{12} \end{pmatrix} = 9.7 \cdot \begin{pmatrix} 410 \\ 360 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3977 \\ 3492 \end{pmatrix}$$

$$B_2 = -i_2 \cdot \begin{pmatrix} V_{21} \\ V_{22} \end{pmatrix} = -2.6 \cdot \begin{pmatrix} 400 \\ 370 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1040 \\ -962 \end{pmatrix}$$

$$B_3 = -i_3 \cdot \begin{pmatrix} V_{31} \\ V_{32} \end{pmatrix} = -7.1 \cdot \begin{pmatrix} 390 \\ 380 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2769 \\ -2698 \end{pmatrix}$$

$$B = (B_1 \ B_2 \ B_3) = \begin{pmatrix} 3977 & -1040 & -2769 \\ 3492 & -962 & -2698 \end{pmatrix}$$

## 2 Ordenación

Una vez que se tienen los beneficios de todos los módulos, se ordenan en cada rama de mayor a menor. Esto es muy similar a lo propuesto en [1], salvo porque en este caso el valor por el que se ordenan los módulos de cada rama no es simplemente su tensión. El uso de la corriente (más allá de en valor absoluto) permite tener en cuenta todas las ramas en conjunto en lugar de equilibrar cada rama por separado.

Si el número de módulos por rama es elevado, puede ser preferible que la ordenación la lleve a cabo algún elemento que pueda realizar varias tareas en paralelo (como por ejemplo una FPGA) en lugar de un microprocesador. Cuando se hace esto, para reducir el número de multiplicaciones, pueden ordenarse en función de las tensiones de los módulos y del signo de la corriente para. Más adelante, un microprocesador puede hacer las multiplicaciones pertinentes.

Para diferenciar las matrices y vectores ordenadas por módulo y por beneficio, las que se ordenen por beneficio llevarán el superíndice “ord”. Es importante señalar que más adelante será necesario deshacer la ordenación por módulos, por lo que en la implementación del método deben almacenarse los cambios de orden que se hagan. Esto puede llevarse a cabo con una matriz de permutaciones  $P_k$  o con un vector de índices  $Ind_k$  para cada rama. Para valores bajos del número de módulos por rama  $N$ , puede

usarse simplemente una variable para cada rama que pueda tomar N! valores, indicando cuál de todas las permutaciones es la apropiada. Esta última posibilidad se desaconseja para valores de N muy grandes ya que el tamaño del código en memoria puede ser excesivo.

A cada vector de beneficios ordenados se añaden 2 valores más (el primero y el último) correspondientes a  $+\infty$  y  $-\infty$ . Estos valores no están relacionados con ningún módulo real del convertidor, pero son necesarios (al menos conceptualmente) para las iteraciones del método. El valor de  $+\infty$  corresponde a un módulo virtual que siempre debe dar una tensión positiva, y el de  $-\infty$  a un módulo virtual que siempre debe dar una tensión negativa. De cara a la implementación, un valor muy grande puede hacer las veces de  $\infty$ .

Siguiendo el ejemplo anterior, se procede a ordenar los beneficios de cada rama:

$$\begin{aligned}
 B_1 = \begin{pmatrix} 397.7 \\ 349.2 \end{pmatrix} &\rightarrow B_1^{ord} = \begin{pmatrix} +\infty \\ 3977 \\ 3492 \\ -\infty \end{pmatrix}; \text{Ind}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}; P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
 B_2 = \begin{pmatrix} -104.0 \\ -96.2 \end{pmatrix} &\rightarrow B_2^{ord} = \begin{pmatrix} +\infty \\ -962 \\ -1040 \\ -\infty \end{pmatrix}; \text{Ind}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}; P_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\
 B_3 = \begin{pmatrix} -276.9 \\ -269.8 \end{pmatrix} &\rightarrow B_3^{ord} = \begin{pmatrix} +\infty \\ -2698 \\ -2769 \\ -\infty \end{pmatrix}; \text{Ind}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}; P_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\
 B^{ord} &= \begin{pmatrix} +\infty & +\infty & +\infty \\ 3977 & -1040 & -2769 \\ 3492 & -962 & -2698 \\ -\infty & -\infty & -\infty \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

El primer elemento de  $\text{Ind}_2$  (2) indica que el primer elemento de  $B_2^{ord}$  después del  $+\infty$  es el segundo elemento de  $B_2$  (-52). Lo mismo es aplicable a los demás elementos de  $\text{Ind}_2$ , así como a todos los de  $\text{Ind}_1$  e  $\text{Ind}_3$ . Una alternativa al uso de  $\text{Ind}_1$ ,  $\text{Ind}_2$  e  $\text{Ind}_3$  es usar  $P_1$ ,  $P_2$  y  $P_3$ , las cuales son matrices de permutaciones que permiten obtener  $B_1$ ,  $B_2$  y  $B_3$  a partir de  $B_1^{ord}$ ,  $B_2^{ord}$  y  $B_3^{ord}$  respectivamente:

$$B_2 = \begin{pmatrix} -1040 \\ -962 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -962 \\ -1040 \end{pmatrix} = P_2 \cdot B_2^{ord-\infty}$$

Donde  $B_2^{ord-\infty}$  es el vector  $B_2^{ord}$  sin su primer y último elemento, es decir, sin los valores  $+\infty$  y  $-\infty$ , que corresponden a los módulos virtuales.

Puesto que en este ejemplo sólo hay dos módulos por rama, en lugar de usar  $\text{Ind}_1$ ,  $\text{Ind}_2$  e  $\text{Ind}_3$  o  $P_1$ ,  $P_2$  y  $P_3$ , se pueden usar tres variables que valgan 0 si el orden de los elementos no infinitos de  $B_1^{ord}$ ,  $B_2^{ord}$  y  $B_3^{ord}$  coincide con el de  $B_1$ ,  $B_2$  y  $B_3$ , o 1 si el orden es el contrario. Para este ejemplo, estas variables valdrían 0, 1 y 1 respectivamente. Si en lugar de 2 módulos por rama hubiera 3, cada una de estas tres variables podría tomar 6 valores distintos (3!).

### 3 Solución inicial

Al igual que el método Simplex, el método propuesto parte de una solución inicial la cual va mejorando mediante sucesivas iteraciones. Esta solución inicial puede escogerse de varias formas a condición de que el resultado sea una solución básica. Los datos que definen una solución son (para el problema aproximado) los estados de los módulos de cada rama una vez ordenados por beneficios.

Estos estados  $S^{ord}$  pueden ordenarse en una tabla o en tres vectores con la misma estructura que  $B^{ord}$ . Cada elemento de la tabla  $S^{ord}$  corresponde al estado del mismo módulo al que corresponde el elemento de  $B^{ord}$  que ocupa la misma posición. Los estados asociados a los beneficios cuyo valor es  $+\infty$  son +1, y los estados asociados a los beneficios con valor de  $-\infty$  son -1. Los estados para valores intermedios de beneficios pueden ser +1, 0 ó -1 y cumplen siempre las siguientes condiciones:

- 1ª. El orden de estos estados es decreciente, es decir, el beneficios menores van asociados a estados menores o iguales.
- 2ª. En una misma rama, sólo un estado puede ser nulo, los demás deben ser +1 ó -1.
- 3ª. En el óptimo del problema, el número de estados nulos es estrictamente menor que el número de ramas.

$$S_k^{ord} = \begin{pmatrix} +1 \\ +1 \\ \vdots \\ +1 \\ 0 \\ -1 \\ \vdots \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{ó} \quad S_k^{ord} = \begin{pmatrix} +1 \\ +1 \\ \vdots \\ +1 \\ -1 \\ -1 \\ \vdots \\ -1 \end{pmatrix}$$

Estas condiciones vienen motivadas por la forma que tiene la solución del problema lineal que se pretende resolver. La primera condición indica el orden en que se asignan estados en la rama según el beneficio. Si una rama de 2 módulos debe tener (por ejemplo) 1 módulo en estado +1 y 1 en estado -1, el módulo que da tensión positiva (+1) debe ser el que da un mayor beneficio por dar tensión positiva. En este sentido, el método propuesto sigue la misma lógica que se sigue en [1] y [3]. Esta condición asegura que dentro de una misma rama los módulos se equilibran entre sí.

Por ejemplo, la solución siguiente no es válida porque los estados de los módulos de la 2ª rama no están ordenados según sus beneficios y, en consecuencia, no se equilibran correctamente. La solución podría mejorarse simplemente intercambiando el orden de estos estados.

$$S^{ord} = \begin{pmatrix} +1 & +1 & +1 \\ 0 & -1 & +1 \\ -1 & +1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad S^{ord} = \begin{pmatrix} +1 & +1 & +1 \\ 0 & +1 & +1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

La segunda condición indica cuántos módulos pueden tener un estado nulo en una misma rama. No puede haber más de uno, porque si lo hubiera la solución podría

mejorarse con facilidad sumando 1 al estado de mayor beneficio y restando 1 al de menor beneficio. De esta manera se obtendría un beneficio mayor en la rama. No seguir esta condición hará que algunos módulos no se equilibren entre sí pudiendo hacerlo. De acuerdo con esto, la siguiente solución tampoco es válida:

$$S^{ord} = \begin{pmatrix} +1 & +1 & +1 \\ \mathbf{0} & +1 & +1 \\ \mathbf{0} & +1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow S^{ord} = \begin{pmatrix} +1 & +1 & +1 \\ +\mathbf{1} & +1 & +1 \\ -\mathbf{1} & +1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

La tercera condición se debe al número de variables básicas no saturadas que un problema de optimización lineal puede tener. Esta condición indica que no puede haber un estado nulo en cada rama. Si lo hubiera, se podría mejorar la solución sumando o restando 1 a todos los estados nulos en función de la suma de sus respectivos beneficios. Si bien el método propuesto puede partir de una solución que no cumpla esta condición (ventaja que se explota más adelante) la solución final siempre la cumple. Por ello, se recomienda usar una solución que cumpla esta condición como solución inicial. De acuerdo con esto, la siguiente solución no es óptima, si bien puede usarse como solución inicial.

$$S^{ord} = \begin{pmatrix} +1 & +1 & +1 \\ \mathbf{0} & +1 & \mathbf{0} \\ -1 & \mathbf{0} & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow S^{ord} = \begin{pmatrix} +1 & +1 & +1 \\ +\mathbf{1} & +1 & +\mathbf{1} \\ -1 & +\mathbf{1} & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \text{ ó } \begin{pmatrix} +1 & +1 & +1 \\ -\mathbf{1} & +1 & -\mathbf{1} \\ -1 & -\mathbf{1} & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Una posible solución básica del problema (para unas restricciones de grupo dadas) tiene la siguiente forma:

$$S^{ord} = \begin{pmatrix} +1 & +1 & +1 \\ +1 & +1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Para escoger una solución inicial, no es necesario conocer los beneficios antes calculados. Se puede partir de cualquier solución ya conocida e ir mejorándola sucesivamente a partir de los beneficios antes calculados. Una forma de escoger una solución inicial es a partir de una tabla estática en la que se tenga guardada una solución inicial para cada vector en espacio de estado que se desee modular. Estos valores son simplemente candidatos a cada grupo de puntos de Space Vector. En el anexo 1 se incluye una solución inicial para grupo. Otra opción es valerse de una solución anterior para el mismo punto de Space Vector. También se puede partir de una solución reciente para un punto de Space Vector cercano y hacer las modificaciones necesarias.

Siguiendo el ejemplo anterior, digamos que para el ciclo de control en el que se han tomado las medidas de tensión y corriente antes indicadas, se pretende modular una tensión mediante modulación por Space Vector. Uno de los 3 vectores entre los que se pretende modular corresponde al grupo de puntos cuyas constantes de grupo  $G_{k, k+1}$  son las siguientes:  $G_{1, 2}=3$ ;  $G_{2, 3}=0$ . Es decir, la diferencia de tensión entre la 1ª y la 2ª rama es la que corresponde a la almacenada en 3 módulos, y la diferencia de tensión entre la 2ª y la 3ª rama es nula. Como ya se indicó antes, las diferencias de tensión entre los

módulos que se propuso para este ejemplo es exagerada para que esto tenga sentido, pero sólo es un ejemplo. De acuerdo con el anexo 1, estas constantes de grupo corresponden al grupo 3 de la figura A1, por lo que se puede usar como solución inicial la siguiente:

$$S^{ord} \begin{pmatrix} +1 & +1 & +1 \\ +1 & 0 & 0 \\ +1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

#### 4 Localización del primer punto

Partiendo de la solución básica inicial, el método propuesto consiste en modificar esta solución iterativamente hasta llegar al óptimo. Puesto que el único grado de libertad del que se dispone una vez ordenados los módulos de cada rama es la tensión de modo común (o la tensión homopolar), cada iteración irá subiendo o bajando la tensión de modo común.

En cada iteración se comprueba si la tensión homopolar debe subir, bajar o mantenerse igual que en la solución actual. Si debe mantenerse igual, entonces la solución básica es el óptimo del problema. Si debe subir, o bajar, entonces se suma o se resta respectivamente un mismo valor a un módulo de cada rama de modo que la nueva solución siga siendo básica. La tensión de modo común sólo puede modificarse en dos sentidos (subiendo o bajando), así que una vez descartado un sentido, no es necesario comprobarlo en las sucesivas iteraciones. Esto supone una ventaja, ya que en cada iteración a partir de la segunda sólo hay que hacer una comprobación.

Para saber si la tensión de modo común debe bajar, se comprueba en cada rama cuál es el último módulo (el de menor beneficio) de estado no negativo. Se suman los beneficios de estos módulos. Si el resultado es negativo, entonces, se puede mejorar la solución restando un mismo valor al estado de cada uno de estos módulos. Cuanto mayor sea este valor, más se mejora esta solución. En aras de maximizar esta mejora, el valor que se resta a los  $M$  módulos es el mayor posible hasta saturar al menos uno de estos módulos dándole un estado de  $-1$ . Se dice entonces que el estado de este módulo sale de la base, entrando en ella alguno de los otros  $M-1$  módulos.

Si por el contrario la suma de los  $M$  beneficios no fuera negativa, no interesaría reducir el estado de estos módulos, sino (suponiendo que la suma no fuera nula) aumentarlo. Sin embargo, puesto que en una solución básica nunca hay menos estados nulos que ramas, alguno de los  $M$  módulos tendrá ya un valor de  $+1$  no pudiendo incrementarse más. En tal caso, cuando esta suma es no negativa, se descarta la posibilidad de reducir la tensión de modo común, ya que cualquier otra combinación con un módulo de cada rama cuyos estados no sean ya  $-1$  tendrá una suma de beneficios mayor.

De forma similar, para saber si la tensión de modo común debe subir, se suman los beneficios de los primeros módulos (los de mayor beneficio) de estado no positivo de cada rama. Si el resultado es positivo, entonces cualquier valor que se sume al estado de estos  $M$  módulos mejorará la solución, y esta mejora será mayor cuanto mayor sea este valor. De nuevo, para maximizar la mejora, se escoge sumar el mayor valor posible



hasta que el estado de alguno de estos M módulos se sature a +1. El estado de este módulo saturado sale de la base, permitiendo entrar a alguno de los otros M-1.

Si la suma de los beneficios de estos M módulos no fuera positiva, no se conseguiría nada aumentando sus estados. De hecho, siempre que no sea negativa, lo que interesará será restar un valor a los estados de estos módulos. Sin embargo, al tratarse de una solución básica, siempre habrá un estado saturado a -1 que impedirá restar un valor a esta combinación de módulos. Además, dado que esta es la combinación de mayor beneficio de entre los módulos cuyo estado puede aumentarse y que es negativa, se puede concluir que no hay ninguna otra combinación de módulos cuyos estados puedan ser aumentados para mejorar la solución que ya se tiene. En consecuencia, se descarta la posibilidad de aumentar la tensión de modo común.

Dado que el problema aproximado da siempre resultados enteros para los estados de los módulos, y como estos estados están siempre entre -1 y +1, el valor que se le suma o resta a estos M estados es siempre 1 ó 2. Además, sólo se usa el valor 2 cuando no hay ningún estado nulo, ya que en otro caso, el estado nulo se saturaría a +1 ó a -1 al sumarle 1. Puesto que al no haber estados nulos, los valores pasan siempre de +1 a -1 y de -1 a +1, se sabe que el valor que se suma o resta seguirá siendo 2 para las restantes iteraciones. Por otro lado, en el caso de que haya algún estado nulo, como en una solución básica siempre hay menos estados nulos que ramas, al saturar el estado nulo (sumando o restando 1) el estado no nulo de entre los M que se están modificando pasará a nulo. En consecuencia, en todas las sucesivas iteraciones el valor que se suma o resta seguirá siendo 1.

Por lo tanto, en la primera iteración de este método debe escogerse si la tensión de modo común debe subir o bajar con respecto a la de la solución inicial y también cuánto se le debe sumar al estado de cada módulo implicado en esta variación de tensión homopolar. En las sucesivas iteraciones, sólo es necesario comprobar si se debe continuar variando esta tensión homopolar ya que, en caso afirmativo será en la misma dirección y la variación de los estados será la misma cantidad que en la primera iteración.

En el ejemplo anterior, la tabla de beneficios ya ordenados  $B^{ord}$  y la solución inicial  $S^{ord}$  son los siguientes:

$$S^{ord} = \begin{pmatrix} +1 & +1 & +1 \\ +1 & 0 & 0 \\ +1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}; \quad B^{ord} = \begin{pmatrix} +\infty & +\infty & +\infty \\ 3977 & -1040 & -2769 \\ 3492 & -962 & -2698 \\ -\infty & -\infty & -\infty \end{pmatrix}$$

La solución inicial contiene dos valores nulos (en la segunda y tercera rama), que son las variables básicas no saturadas. Estos dos valores son el último no positivo y primero no negativo de sus correspondientes ramas. Los beneficios de aumentar el estado de estos módulos son -104.0 y -276.9 para la segunda y tercera rama respectivamente. En la primera rama, sin embargo no hay un valor nulo. El último módulo con un estado no negativo tiene por beneficio 349.2, y el primero no positivo es  $-\infty$ . Para comprobar si esta solución puede mejorarse aumentando la tensión de modo común, se comprueba la suma de los beneficios correspondientes al primer valor no positivo de cada rama:

$$S^{ord} = \begin{pmatrix} +1 & +1 & +1 \\ +1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ +1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}; \quad B^{ord} = \begin{pmatrix} +\infty & +\infty & +\infty \\ 3977 & -1040 & -2769 \\ 3492 & -962 & -2698 \\ -\infty & -\infty & -\infty \end{pmatrix}$$

$$-\infty - 1040 - 2769 < 0$$

El beneficio por aumentar la tensión de modo común es negativo. Esto tiene sentido: los dos módulos de la primera rama ya están saturados a +1 y no hay otro módulo real en esta rama cuyo estado pueda aumentarse, de ahí que el beneficio de aumentar la tensión homopolar sea artificialmente negativa gracias al beneficio ( $-\infty$ ) del módulo virtual. Puesto que no tiene sentido aumentar la tensión de modo común, se descarta esta opción en esta iteración y en todas las siguientes. Se comprueba a continuación la suma de los beneficios correspondientes al último valor no negativo de cada rama para saber si se puede mejorar la solución bajando la tensión de modo común:

$$S^{ord} = \begin{pmatrix} +1 & +1 & +1 \\ +1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ +1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}; \quad B^{ord} = \begin{pmatrix} +\infty & +\infty & +\infty \\ 3977 & -1040 & -2769 \\ \mathbf{3492} & -962 & -2698 \\ -\infty & -\infty & -\infty \end{pmatrix}$$

$$3492 - 1040 - 2769 = -317 < 0$$

El beneficio por aumentar la tensión de modo común usando estos módulos es negativo, por lo que se puede aumentar el beneficio disminuyendo esta tensión. Para ello, se reduce el estado de estos tres módulos hasta que alguno de ellos sea -1. Como hay algún módulo en estado nulo, el decremento que se puede hacer en cada estado es unitario. Esto se mantendrá hasta alcanzar el óptimo. La nueva solución se obtiene así:

$$S^{ord} = \begin{pmatrix} +1 & +1 & +1 \\ +1 & -1 & -1 \\ \mathbf{0} & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Esta nueva solución tiene un único estado nulo. Esto significa que de entre las variables dos variables básicas no saturadas, una de ellas tiene el valor que corresponde a una variable saturada. Se dice en este caso que hay degeneración. Como se indicará más adelante, esto tiene relevancia para el número de conmutaciones por ciclo.

A continuación se vuelve a iterar. En esta segunda iteración no se comprueba si la tensión de modo común debe subir, ya que esta posibilidad fue descartada en la primera iteración. Se sabe también que si hubiera que reducir el estado de algún módulo, el decremento sería de nuevo unitario porque en la primera iteración lo fue. Se suman los beneficios del primer módulo no negativo de cada rama para comprobar si se debe seguir reduciendo la tensión de modo común:

$$S^{ord} = \begin{pmatrix} +1 & +1 & +1 \\ +1 & -1 & -1 \\ \mathbf{0} & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}; \quad B^{ord} = \begin{pmatrix} +\infty & +\infty & +\infty \\ 3977 & -1040 & -2769 \\ \mathbf{3492} & -962 & -2698 \\ -\infty & -\infty & -\infty \end{pmatrix}$$

$$3492 + \infty + \infty > 0$$

El beneficio por aumentar la tensión de los módulos es positivo, por lo que no tiene sentido disminuir esta tensión. Por lo tanto se descarta la posibilidad de reducir el estado de estos módulos. Puesto que se ha descartado la opción de variar los estados de los módulos tanto en un sentido como en el otro, la solución que se tiene es la óptima del problema:

$$S^{ord} = \begin{pmatrix} +1 & +1 & +1 \\ +1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

## 5 Modificación de la solución para obtener los otros puntos

Puesto que el problema aproximado parte de las constantes de grupo  $G_{k+1}$ , este método es apropiado para la modulación de tipo Space Vector. En esta modulación, se escogen varios grupos de combinaciones de estados y se mantiene al convertidor un tiempo determinado una combinación de cada grupo. Por ejemplo, para un convertidor trifásico, la modulación Space Vector busca 3 puntos cuya representación en espacio de estado forme un triángulo. La representación en espacio de estado de la tensión que se desea modular queda encerrada dentro de este triángulo. Manteniendo el equipo un tiempo concreto en un estado de cada grupo, la tensión modulada coincidirá con la deseada por término medio.

Dado que este método es interesante para la modulación de tipo Space Vector, sería interesante obtener la combinación de estados óptima de cada uno de los grupos de la modulación Space Vector. Es decir, se trata de encontrar el mejor punto para cada grupo. Los grupos escogidos por la modulación Space Vector suelen ser adyacentes para reducir la distorsión armónica, lo que también tiene ventajas en lo que respecta al número de conmutaciones. El método propuesto permite modificar una solución previamente encontrada para un grupo para obtener la de un grupo adyacente. Ventajosamente, este proceso no lleva más de una iteración por cada grupo más allá del primero. Para ello, para cada nuevo grupo primero debe modificarse la solución previamente obtenida y a continuación realizar (si es necesario) la iteración.

Para modificar la solución, se comprueba en qué dirección está el nuevo grupo con respecto al antiguo, esto es, cuál es la rama cuya tensión debe variar y en qué sentido. El cambio de un grupo a otro corresponde al aumento o a la disminución de tensión dada por una rama. Realizar este aumento o disminución de tensión corresponde a sumar o restar 1 al estado de un módulo de esta rama.

Si la tensión de la rama debe aumentar, se suma 1 al primer estado no positivo de esta rama. Si por el contrario la tensión de la rama debe disminuir, se resta 1 al último estado no negativo de la rama. Esto puede dar lugar temporalmente a una combinación de estados en la que hay  $M$  módulos con estados nulos, pero esto no es obstáculo para continuar. También es posible que el estado de alguno de los módulos virtuales deje de estar saturado temporalmente.

A continuación se realiza una iteración del método, en la cual se comprueba si la tensión de modo común debe variarse en el sentido contrario al que se varió la tensión de la rama. Así, si se ha sumado 1 al estado de algún módulo, se comprueba sólo si hay que

restar 1 a un módulo de cada rama. El motivo de esto está basado en que la solución que se ha modificado ya era óptima y en que la tabla de beneficios  $B^{ord}$  es la misma para todos los grupos.

Para demostrarlo, se supondrá que la variación se ha hecho en la primera rama, aunque es equivalente para cualquier otra rama. La variación se hace en el módulo  $j$  de esta rama. Existen cuatro casos posibles correspondientes a las cuatro variaciones posibles en el estado de un módulo: de 0 a +1, de 0 a -1, de -1 a 0 y de +1 a 0.

Para el primer caso, como la solución anterior era óptima, no era necesario aumentar ni disminuir la tensión de modo común, por lo que se sabe que se cumplen las siguientes desigualdades:

$$B_{1j}^{ord} + \sum_{k=2}^M B_{k+}^{ord} > 0$$

$$B_{1j}^{ord} + \sum_{k=2}^M B_{k-}^{ord} < 0$$

Donde  $B_{k-}^{ord}$  es el beneficio correspondiente al primer módulo de estado no positivo de la rama  $k$ , y  $B_{k+}^{ord}$  es el beneficio correspondiente al último módulo de estado no negativo de la rama  $k$ . Al haber pasado el estado  $S_{1j}^{ord}$  a +1, el primer estado no positivo de su rama es ahora  $S_{1j+1}^{ord}$ , cuyo beneficio asociado  $B_{1j+1}^{ord}$  es menor que el del módulo  $j$ . Por lo tanto se cumple la desigualdad correspondiente a no tener que aumentar más la tensión de modo común. Como el módulo  $j$  de la rama 1 sigue siendo el último módulo de estado no negativo, la desigualdad correspondiente a no tener que disminuir más la tensión de modo común se mantiene igual. En consecuencia, en este caso no hay que hacer ninguna iteración.

$$B_{1j}^{ord} + \sum_{k=2}^M B_{k+}^{ord} > 0$$

$$B_{1j+1}^{ord} + \sum_{k=2}^M B_{k-}^{ord} < B_{1j}^{ord} + \sum_{k=2}^M B_{k-}^{ord} < 0$$

Para el segundo caso se puede hacer el razonamiento equivalente. Al haber pasado el estado  $S_{1j}^{ord}$  a -1, el primer estado no negativo de su rama es ahora  $S_{1j-1}^{ord}$ , cuyo beneficio asociado es  $B_{1j-1}^{ord}$  mayor. Por lo que se cumple la desigualdad correspondiente a no disminuir la tensión de modo común. Por otro lado,  $S_{1j}^{ord}$  sigue siendo último el estado no negativo, con lo que la desigualdad correspondiente a aumentar la tensión de modo común no se ve modificada. Tampoco en este caso hay que hacer ninguna iteración.

$$B_{1j-1}^{ord} + \sum_{k=2}^M B_{k+}^{ord} > B_{1j}^{ord} + \sum_{k=2}^M B_{k+}^{ord} > 0$$

$$B_{1j}^{ord} + \sum_{k=2}^M B_{k-}^{ord} < 0$$

En el tercer caso, el estado que se ha modificado no era una variable básica no saturada, por lo que según las degeneraciones que hubiera antes del cambio puede ser necesario iterar o no. En este caso, las desigualdades que se cumplían en la solución óptima encontrada con anterioridad eran las siguientes:

$$B_{1j-1}^{ord} + \sum_{k=2}^M B_{k+}^{ord} > 0$$

$$B_{1j}^{ord} + \sum_{k=2}^M B_{k-}^{ord} < 0$$

Al pasar el estado del módulo j de la rama 1 de -1 a 0, sigue siendo el primer estado no positivo de la rama 1 y se convierte además en el último estado no negativo de dicha rama. Como consecuencia, la segunda desigualdad correspondiente a no aumentar la tensión de modo común se mantiene igual. Sin embargo, la desigualdad correspondiente a no disminuir esta tensión ya no puede asegurarse ya que  $B_{1j}^{ord}$  es menor que  $B_{1j-1}^{ord}$ , por lo que puede ser necesario iterar para reducir la tensión de modo común.

$$B_{1j}^{ord} + \sum_{k=2}^M B_{k+}^{ord} < B_{1j-1}^{ord} + \sum_{k=2}^M B_{k+}^{ord} > 0$$

$$B_{1j}^{ord} + \sum_{k=2}^M B_{k-}^{ord} < 0$$

Sí puede asegurarse sin embargo que el método convergerá en una iteración. Esto es así porque en caso de iterar, el estado  $S_{1j}^{ord}$  pasará de 0 a -1. Con ello, el beneficio del último módulo no negativo de la rama 1 volverá a ser  $B_{1j-1}^{ord}$ , y el de las otras ramas no habrá disminuido.

El razonamiento para el cuarto caso es equivalente al del tercero usando la desigualdad contraria. En este cuarto caso, las desigualdades que se cumplen en la solución óptima previamente calculada son:

$$B_{1j}^{ord} + \sum_{k=2}^M B_{k+}^{ord} > 0$$

$$B_{1j+1}^{ord} + \sum_{k=2}^M B_{k-}^{ord} < 0$$

Al pasar el estado  $S_{1j}^{ord}$  de +1 a 0, sigue siendo el último estado no negativo, pero se convierte también en el primero no positivo. La desigualdad correspondiente a que la tensión de modo común no disminuya se mantiene igual, pero no puede asegurarse que

se sigue cumpliendo la desigualdad que corresponde a que no aumente esta tensión, ya que  $B_{1j}^{ord}$  es mayor que  $B_{1j+1}^{ord}$ .

$$B_{1j}^{ord} + \sum_{k=2}^M B_{k+}^{ord} > 0$$

$$B_{1j}^{ord} + \sum_{k=2}^M B_{k-}^{ord} > B_{1j+1}^{ord} + \sum_{k=2}^M B_{k-}^{ord} < 0$$

Es posible que haya una iteración para aumentar la tensión de modo común, pero se puede asegurar que si esto ocurriera no se iteraría una segunda vez. Esto es así porque si se aumentara la tensión de modo común, el estado  $S_{1j}^{ord}$  volvería a ser +1, con lo que el beneficio del primer módulo con estado no positivo sería  $B_{1j+1}^{ord}$  y los beneficios del primer módulo de cada rama con un estado no negativo sólo podrán haber aumentado.

Tanto en el tercer caso como en el cuarto, la solución propuesta contiene un estado nulo, por lo que en caso de iterar, se sumará o restará 1 a los estados que se varíen.

Por otro lado, la modulación de tipo Space Vector clásica está configurada para escoger M grupos entre los que modular, los cuales pueden ordenarse de forma que para pasar de cada grupo al siguiente baste con avanzar en la dirección en que corresponde a aumentar la tensión en una rama. Para una modulación así, según el método, cada punto puede obtenerse a partir del anterior aumentando en 1 el estado del primer módulo de estado no positivo de la rama correspondiente e iterando cuando sea necesario. Como para cada nuevo punto se ha aumentado el estado de un módulo, esta iteración sólo puede ir en el sentido en que se reduce la tensión de modo común. Consecuentemente, tras recorrer los M grupos, al volver al grupo original se habrá aumentado el estado de un módulo de cada rama una vez y se habrá reducido el estado de un módulo de cada rama tantas veces como se haya iterado. Puesto que la solución óptima de este punto debe coincidir con la que se calculó la primera vez, el número de veces que en cada rama se ha aumentado el estado de algún módulo debe coincidir con el número de veces que éste ha disminuido como consecuencia de la iteración. Por lo tanto, se debe haber iterado exactamente 1 vez a lo largo de todo el ciclo. Lo mismo es aplicable cuando en lugar de sumar 1 al estado de un módulo en el paso al siguiente grupo se resta 1 a dicho estado, se itera una sola vez. Entonces, si en la búsqueda de la solución óptima para cada grupo se ha iterado ya una vez, se sabe que no será necesario seguir iterando más veces.

En el ejemplo anterior se ha buscado la solución óptima para el grupo cuyas constantes son  $G_{12}=3$ ;  $G_{23}=0$ . Supongamos que la modulación que se está usando es de tipo Space Vector y que la tensión que realmente quiere modularse tiene una representación en espacio de estado que puede encerrarse en un triángulo. La modulación se lleva a cabo conmutando entre un punto cada uno de los tres grupos que forman este triángulo como se muestra en la figura 10.

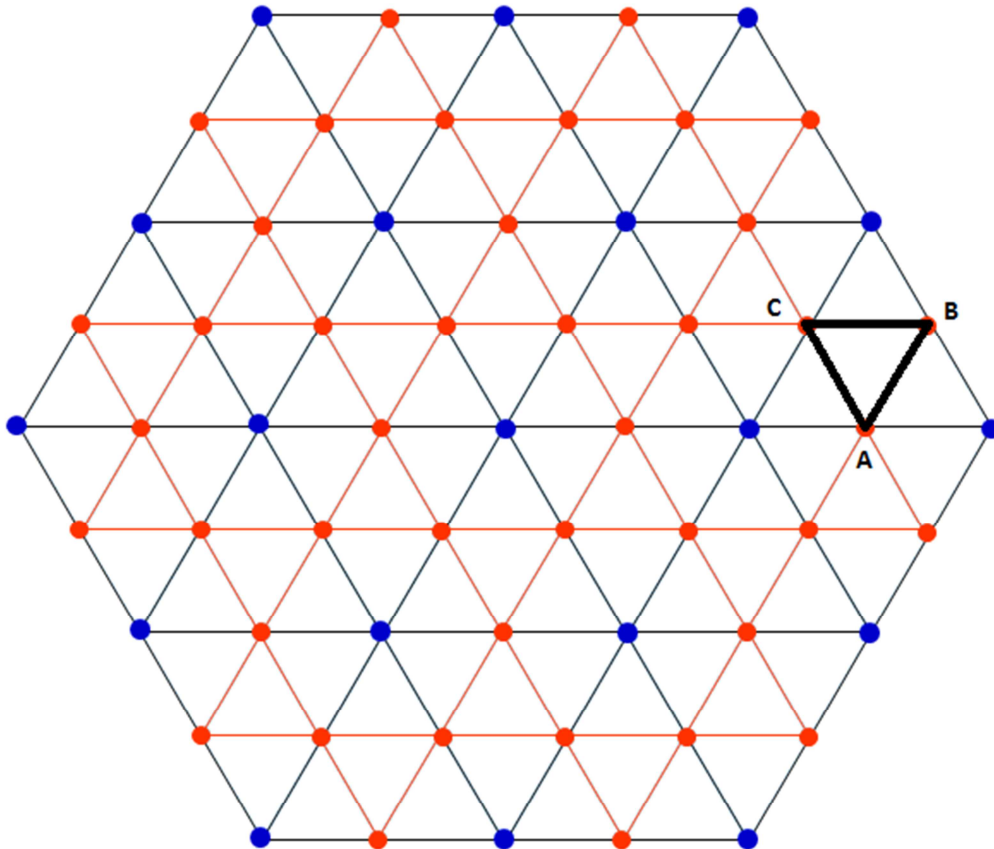


Figura 10

El punto cuya combinación de estados acabamos de calcular pertenece a uno de estos tres grupos (A). Un segundo grupo (B) tiene como constantes de grupo  $G_{1\ 2}=3$ ;  $G_{2\ 3}=1$ . Las constantes que definen al tercer grupo (C) son  $G_{1\ 2}=2$ ;  $G_{2\ 3}=1$ . La solución previamente calculada para el grupo A es:

$$S_A^{ord} = \begin{pmatrix} +1 & +1 & +1 \\ +1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}; \quad B^{ord} = \begin{pmatrix} +\infty & +\infty & +\infty \\ 3977 & -1040 & -2769 \\ 3492 & -962 & -2698 \\ -\infty & -\infty & -\infty \end{pmatrix}$$

Como puede verse en la figura 10 el paso del grupo A al grupo B puede hacerse reduciendo en 1 el estado de un módulo de la tercera rama. Para que la solución siga siendo básica, se resta 1 al último estado no negativo de esta rama, obteniendo la siguiente solución.

$$S_B^{ord} = \begin{pmatrix} +1 & +1 & 0 \\ +1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Puesto que se ha disminuido el estado de un módulo de -1 a 0, se sabe que la solución no mejorará por reducir aún más la tensión de modo común, sólo es necesario

comprobar si esta tensión de modo común debe aumentar para mejorar esta solución. Para ello se suman los beneficios correspondientes al primer módulo de estado no positivo de cada rama y se comprueba si el resultado es positivo.

$$S_B^{ord} = \begin{pmatrix} +1 & +1 & \mathbf{0} \\ +1 & -1 & -1 \\ \mathbf{0} & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}; \quad B^{ord} = \begin{pmatrix} +\infty & +\infty & +\infty \\ 3977 & -\mathbf{1040} & -2769 \\ \mathbf{3492} & -962 & -2698 \\ -\infty & -\infty & -\infty \end{pmatrix}$$

$$349.2 - 104.0 + \infty > 0$$

El resultado es positivo, por lo que hay que iterar reduciendo la tensión de modo común. Para ello se suma 1 al primer estado no positivo de cada rama. La solución resultante es óptima.

$$S_B^{ord} = \begin{pmatrix} +1 & +1 & +1 \\ +1 & 0 & -1 \\ +1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Como puede comprobarse en la figura 10, el paso de grupo B al grupo C es equivalente a reducir en 1 el estado de un módulo de la primera rama. Se reduce pues el último estado no negativo de la primera rama.

$$S_C^{ord} = \begin{pmatrix} +1 & +1 & +1 \\ +1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Como ya se ha iterado una vez en este proceso de modificación de la solución, se sabe que no será necesario iterar más veces. De igual manera, si desde esta solución se quisiera pasar a la del grupo A para completar el ciclo, tampoco sería necesario iterar. Las tres soluciones son por lo tanto:

$$S_A^{ord} = \begin{pmatrix} +1 & +1 & +1 \\ +1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}; \quad S_B^{ord} = \begin{pmatrix} +1 & +1 & +1 \\ +1 & 0 & -1 \\ +1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}; \quad S_C^{ord} = \begin{pmatrix} +1 & +1 & +1 \\ +1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Igual que se ha procedido a calcular el punto del grupo B a partir del punto del grupo A y el punto del grupo C a partir del punto del grupo B, se podría haber procedido al revés. Pasar del grupo A al grupo C, según la figura 10, es equivalente a sumar 1 al estado de un módulo de la rama 2. Sumando 1 al primer estado no positivo de dicha rama se obtiene la siguiente solución:

$$S_C^{ord} = \begin{pmatrix} +1 & +1 & +1 \\ +1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$



Como se ha aumentado un estado de -1 a 0, es necesario comprobar si debe bajarse la tensión de modo común. Esto se hace sumando los beneficios correspondientes al último módulo de estado no negativo de cada rama y comprobando si es menor que 0.

$$S_C^{ord} = \begin{pmatrix} +1 & +1 & +1 \\ +1 & \mathbf{0} & -1 \\ \mathbf{0} & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}; \quad B^{ord} = \begin{pmatrix} +\infty & +\infty & +\infty \\ 3977 & -\mathbf{1040} & -2769 \\ \mathbf{3492} & -962 & -2698 \\ -\infty & -\infty & -\infty \end{pmatrix}$$

$$3492 - 1040 + \infty > 0$$

En este caso el resultado es mayor que 0, por lo que no es necesario reducir la tensión de modo común. Para pasar del grupo C al grupo B, según la figura 10, debe sumarse 1 al estado de un módulo de la primera rama. Se suma pues 1 al primer estado no positivo de esta rama haciéndolo pasar de 0 a +1.

$$S_B^{ord} = \begin{pmatrix} +1 & +1 & +1 \\ +1 & 0 & -1 \\ +1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Como no se ha iterado aún en este ciclo, en principio, podría ser necesario iterar para comprobar si la tensión debe reducirse. Sin embargo, esta transición se ha hecho sumando 1 a un estado que previamente valía 0, con lo que se sabe que no será necesario iterar. Si desde esta solución se intentara obtener la solución para el grupo A para cerrar el ciclo sí sería necesario iterar, ya que en cada ciclo se itera exactamente una vez. Como puede comprobarse se ha llegado a las mismas tres soluciones:

$$S_A^{ord} = \begin{pmatrix} +1 & +1 & +1 \\ +1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}; \quad S_B^{ord} = \begin{pmatrix} +1 & +1 & +1 \\ +1 & 0 & -1 \\ +1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}; \quad S_C^{ord} = \begin{pmatrix} +1 & +1 & +1 \\ +1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

## 6 Orden de conmutación

En el caso de que se use una modulación de tipo Space Vector, si se conmuta siempre entre los grupos de estados más cercanos a la tensión de referencia, existe una forma de ordenar los puntos obtenidos para minimizar el número total de conmutaciones. De acuerdo con la propiedad utilizada en el paso anterior, en un ciclo completo entre los M puntos entre los que se conmuta en cada transición entre dos estados se suma o resta 1 al estado de un módulo de una fase distinta, y sólo en una de las transiciones se resta o suma 1 al estado de un módulo de todas las ramas. Para que la tensión modulada por el convertidor recorra el ciclo completo pasando por todos los puntos calculados, M-1 módulos tendrán que conmutar tanto para aumentar en uno su estado como para disminuirlo. Sin embargo, es posible pasar por todos los puntos previamente calculados haciendo que cada uno de estos M-1 módulos conmute una sola vez, bien para aumentar o bien para disminuir su estado. Esto se logra recorriendo todas las transiciones del ciclo menos una.

Como se ha comentado con anterioridad, cuando se obtienen las soluciones óptimas para grupos adyacentes, al recorrer todo el ciclo es necesario hacer exactamente una

iteración. Esta iteración se hace en la transición de una solución  $i$  a la siguiente  $i+1$  (o bien de la última a la primera). Esta transición es la que no debe realizarse para reducir las conmutaciones. Tanto a nivel de conmutaciones como a nivel de calidad de la señal, evitar esta transición es equivalente a reducir a la mitad la frecuencia de conmutación con respecto a recorrer el ciclo completo.

Para localizar y evitar esta transición, así como para automatizar las conmutaciones, según el método propuesto se asigna un tiempo ( $T_1, T_2, \dots, T_M$ ) a cada punto calculado tal como se hace en una modulación de tipo Space Vector. La suma de todos estos tiempos es la mitad del periodo de conmutación (porque cada uno de los módulos que conmutan lo hace sólo una vez). Se usa una señal triangular definida entre 0 y 1 cuyo periodo coincida con el de conmutación, de modo que cada ciclo de control corresponda sólo a la subida o sólo a la bajada de la triangular. Para cada módulo que conmuta, se crea una señal de referencia de modo que mientras esta señal de referencia esté por encima de la triangular, el módulo se encuentre en un primer estado, y mientras la referencia esté por debajo de la triangular, el módulo se encuentre en el segundo estado. Estas señales triangulares tienen por valor para cada módulo la suma de los tiempos correspondientes a los puntos en que debe encontrarse en el primer estado dividida entre el semiperiodo de la triangular. De esta manera una modulación de tipo Space Vector puede tratarse como una modulación por ancho de pulsos (PWM) manteniendo sus propiedades. A pesar de que la modulación se haga de esta manera, las combinaciones de estados correspondientes a los puntos calculados seguirán produciéndose, simplemente se ordenarán en función de su tensión homopolar.

Puesto que los módulos son de puente completo, modulación por ancho de pulsos puede ser del tipo “level-shifted”, es decir, emplear dos triangulares en fase estando una de ellas entre 0 y 1 y la otra entre -1 y 0. El estado del módulo será 1 cuando su referencia esté por encima de las dos triangulares, 0 cuando la referencia esté entre las dos triangulares y -1 cuando esté por debajo de las dos. En este caso la referencia para cada módulo que conmuta es la media de su estado en cada punto ponderada por el tiempo asignado a este punto.

Continuando con el ejemplo anterior, supongamos que el punto del grupo A debe mantenerse el 30% del tiempo, el del grupo B debe mantenerse un 25% y el del C un 45%.

$$S_A^{ord} = \begin{pmatrix} +1 & +1 & +1 \\ +1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}; \quad S_B^{ord} = \begin{pmatrix} +1 & +1 & +1 \\ +1 & 0 & -1 \\ +1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}; \quad S_C^{ord} = \begin{pmatrix} +1 & +1 & +1 \\ +1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\frac{T_A}{T} = 0.3; \quad \frac{T_B}{T} = 0.25; \quad \frac{T_C}{T} = 0.45$$

Los módulos que conmutan son el de menor beneficio de la primera rama y el de mayor beneficio de la segunda rama. La referencia del de la primera rama es:

$$Ref_{12}^{ord} = 0 \cdot \frac{T_A}{T} + 1 \cdot \frac{T_B}{T} + 0 \cdot \frac{T_C}{T} = 0.25$$

La referencia del módulo de la segunda rama es:

$$Ref_{21}^{ord} = -1 \cdot \frac{T_A}{T} + 0 \cdot \frac{T_B}{T} + 0 \cdot \frac{T_C}{T} = -0.3$$

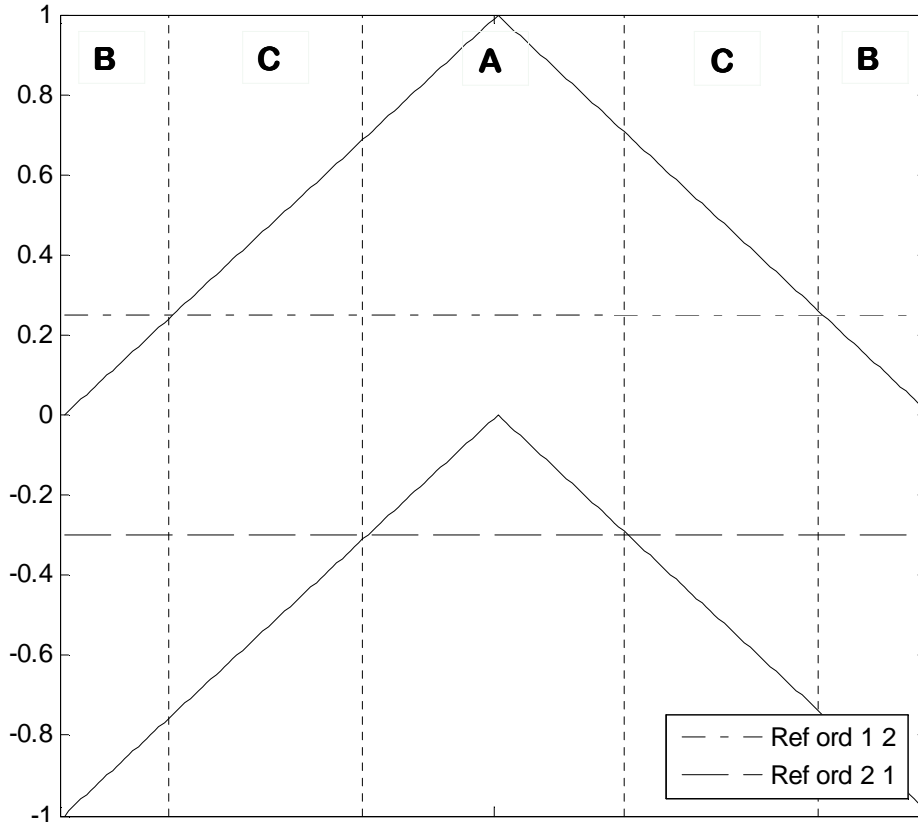


Figura 11

De esta forma, el convertidor pasa primero un 25% del tiempo en el punto calculado del grupo B. A continuación el módulo de menor beneficio de la primera rama conmuta y el convertidor pasa al punto calculado del grupo C, en el que se mantiene durante un 45% del tiempo. Después se produce la conmutación del módulo de mayor beneficio de la segunda rama y el convertidor pasa al punto del grupo A, donde se mantiene el 30% del tiempo restante. Si no hay cambios, durante la rampa de bajada de la triangular, se recorren estos mismos estados en orden inverso con las mismas proporciones de tiempo.

Las referencias pueden calcularse igualmente para todos los módulos, no sólo aquellos que conmutan. De esta manera, el método propuesto devolverá como salida las referencias de comparación de cada módulo. No es necesario calcular las referencias de los módulos virtuales (de beneficio infinito):

$$Ref^{ord} = \begin{pmatrix} +1 & -0.3 & -1 \\ +0.25 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

## 7 Reordenación

Una vez que ya se tienen los estados entre los que conmutar y las referencias calculados, es necesario reordenarlos según los módulos en los que van a aplicarse en lugar de por beneficios. Para ello, basta utilizar los vectores de índices o las matrices de permutación previamente obtenidas durante la ordenación.

En el ejemplo anterior, los índices y matrices eran:

$$\begin{aligned} \text{Ind}_1 &= \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}; & \text{Ind}_2 &= \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}; & \text{Ind}_3 &= \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \\ P_1 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; & P_2 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; & P_3 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Al haber sólo 2 módulos por rama, se pudo emplear una variable para cada rama indicando si se intercambiaron los módulos de orden. Estas variables valían 0, 1 y 1 respectivamente. Usando los vectores de índices, las matrices de permutación o bien las variables para indicar si había cambio, cualquiera de las tres, se puede reordenar la tabla de referencias:

$$\text{Ref} = \begin{pmatrix} +1 & -1 & -1 \\ +0.25 & -0.3 & -1 \end{pmatrix}$$

Esta tabla indica que el primer módulo de la rama 1 se mantendrá en el estado 1; el segundo módulo de la rama 1 estará en el estado 1 un 25% del ciclo de control y en el 0 el resto del ciclo; el módulo 2 de la rama 2 estará en el estado -1 un 30% del ciclo de control y en el 0 el resto del ciclo, y los restantes módulos se mantendrán en el estado -1 durante todo el ciclo de control.

Para comprobar la bondad del método se presenta una tabla con las tensiones acumuladas en los módulos y la corriente media que sale de cada uno (en el sentido de descarga) durante el ciclo de control. Como puede observarse módulos más cargados se descargan más:

Rama	Tensión del módulo (V)	Corriente media de descarga (A)
1	410	9.7
	360	2.4
2	400	2.6
	370	0.78
3	390	7.1
	380	7.1

## Ejemplo

A continuación, se presenta un ejemplo completo para un convertidor de 3 ramas y 3 módulos por rama.

Las tensiones de los módulos de la 1ª rama son (en orden) 1030V, 980V y 930V; la de los de la 2ª rama son 1020V, 1090V y 910V, y la de los de la 3ª rama son 970V, 930V y 1010V. Las corrientes que circula por las ramas de positivo a negativo son 20A, -70A y 50A.

Las tensiones de línea de referencia son  $U_{12}=900V$  y  $U_{23}=-2800V$ . Se pretende modular la tensión de salida haciendo pasar al equipo por 3 puntos. Los puntos pertenecen respectivamente a tres grupos (A, B y C). Estos grupos se obtienen suponiendo una tensión de trabajo de 1000V en cada módulo y escogiendo los 3 grupos de Space Vector más cercanos al punto que representa la tensión de referencia. Las constantes de grupo que definen estos grupos y las proporciones de tiempo para estos puntos vienen dadas en la siguiente tabla:

Estado	A	B	C
$G_{12}$	0	1	1
$G_{23}$	-2	-2	-3
Tiempo	10%	30%	60%

En primer lugar se calculan los beneficios correspondientes a dar tensión positiva en cada módulo.

$$B_1 = -20 \cdot \begin{pmatrix} 1030 \\ 980 \\ 930 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -20300 \\ -19600 \\ -18600 \end{pmatrix}$$

$$B_2 = 70 \cdot \begin{pmatrix} 1020 \\ 1090 \\ 910 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 71400 \\ 76300 \\ 63700 \end{pmatrix}$$

$$B_3 = -50 \cdot \begin{pmatrix} 970 \\ 930 \\ 1010 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -48500 \\ -46500 \\ -50500 \end{pmatrix}$$

Se ordenan estos beneficios y se almacena en un vector el orden original. Se añaden también los beneficios de los módulos virtuales:

$$B^{ord} = \begin{pmatrix} +\infty & +\infty & +\infty \\ -18600 & 76300 & -46500 \\ -19600 & 71400 & -48500 \\ -20300 & 63700 & -50500 \\ -\infty & -\infty & -\infty \end{pmatrix}; \quad ind_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad ind_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}; \quad ind_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Se escoge una solución inicial para el primer grupo.

$$S^{ord} = \begin{pmatrix} +1 & +1 & +1 \\ +1 & +1 & +1 \\ -1 & -1 & +1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Se comprueba si la tensión homopolar debe aumentarse:

$$S^{ord} = \begin{pmatrix} +1 & +1 & +1 \\ +1 & +1 & +1 \\ -1 & -1 & +1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}; \quad B^{ord} = \begin{pmatrix} +\infty & +\infty & +\infty \\ -18600 & 76300 & -46500 \\ -19600 & 71400 & -48500 \\ -20300 & 63700 & -50500 \\ -\infty & -\infty & -\infty \end{pmatrix}$$

$$-19600 + 71400 - 50500 = 1300 > 0$$

Sí que debe aumentarse esta tensión. Como no hay estados nulos, se aumenta el primer estado no negativo de cada rama en 2 y se comprueba si debe seguir aumentándose la tensión homopolar.

$$S^{ord} = \begin{pmatrix} +1 & +1 & +1 \\ +1 & +1 & +1 \\ +1 & +1 & +1 \\ -1 & -1 & +1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}; \quad B^{ord} = \begin{pmatrix} +\infty & +\infty & +\infty \\ -18600 & 76300 & -46500 \\ -19600 & 71400 & -48500 \\ -\mathbf{20300} & \mathbf{63700} & -50500 \\ -\infty & -\infty & -\infty \end{pmatrix}$$

$$-20300 + 63700 - \infty < 0$$

La tensión homopolar no debe aumentarse más. Se ha encontrado la solución óptima para el primer grupo.

$$S_A^{ord} = \begin{pmatrix} +1 & +1 & +1 \\ +1 & +1 & +1 \\ +1 & +1 & +1 \\ -1 & -1 & +1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Pasar del grupo A al grupo B es equivalente a aumentar la tensión de un módulo de la primera rama en una unidad. Se aumenta el primero no positivo, haciéndolo pasar de -1 a 0. Hay que comprobar si debe reducirse la tensión homopolar.

$$S^{ord} = \begin{pmatrix} +1 & +1 & +1 \\ +1 & +1 & +1 \\ +1 & +1 & +1 \\ \mathbf{0} & -1 & +1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}; \quad B^{ord} = \begin{pmatrix} +\infty & +\infty & +\infty \\ -18600 & 76300 & -46500 \\ -19600 & \mathbf{71400} & -48500 \\ -\mathbf{20300} & 63700 & -\mathbf{50500} \\ -\infty & -\infty & -\infty \end{pmatrix}$$

$$-20300 + 71400 - 50500 = 600 > 0$$

La tensión homopolar no debe reducirse. Se ha encontrado la solución óptima del grupo B.

$$S_B^{ord} = \begin{pmatrix} +1 & +1 & +1 \\ +1 & +1 & +1 \\ +1 & +1 & +1 \\ 0 & -1 & +1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Pasar del grupo B al grupo C es equivalente a aumentar la tensión de un módulo de la tercera rama en una unidad. Se aumenta el primero no positivo, haciéndolo pasar de -1 a 0. Como en la modificación de estados aún no se ha reducido la tensión homopolar, se comprueba si debe hacerse ahora.

$$S^{ord} = \begin{pmatrix} +1 & +1 & +1 \\ +1 & +1 & +1 \\ +1 & +1 & +1 \\ \mathbf{0} & -1 & +1 \\ -1 & -1 & \mathbf{0} \end{pmatrix}; \quad B^{ord} = \begin{pmatrix} +\infty & +\infty & +\infty \\ -18600 & 76300 & -46500 \\ -19600 & \mathbf{71400} & -48500 \\ -\mathbf{20300} & 63700 & -50500 \\ -\infty & -\infty & -\infty \end{pmatrix}$$

$-20300 + 71400 - \infty < 0$

Sí debe reducirse la tensión homopolar. Para ello, se suma 1 a último estado no negativo de cada rama. No es necesario iterar más después de esto, con lo que se ya ha encontrado la solución óptima para los tres grupos.

$$S_A^{ord} = \begin{pmatrix} +1 & +1 & +1 \\ +1 & +1 & +1 \\ +1 & +1 & +1 \\ -1 & -1 & +1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}; \quad S_B^{ord} = \begin{pmatrix} +1 & +1 & +1 \\ +1 & +1 & +1 \\ +1 & +1 & +1 \\ \mathbf{0} & -1 & +1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}; \quad S_C^{ord} = \begin{pmatrix} +1 & +1 & +1 \\ +1 & +1 & +1 \\ +1 & \mathbf{0} & +1 \\ -1 & -1 & +1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Se ha identificado la transición en la que conmutan varios módulos: la transición B-C. El orden óptimo para pasar por los estados es BAC o CAB. Se calculan las referencias para comparar con la doble triangular. No se tienen en cuenta los módulos virtuales:

$$Ref^{ord} = 0.1 \cdot S_A^{ord} + 0.3 \cdot S_B^{ord} + 0.6 \cdot S_C^{ord} = \begin{pmatrix} +1 & +1 & +1 \\ +1 & +0.4 & +1 \\ -0.7 & -1 & +1 \end{pmatrix}$$

Y por último se reordenan estas referencias de modo que estén en el orden original:

$$Ref = \begin{pmatrix} -0.7 & +0.4 & +1 \\ +1 & +1 & +1 \\ +1 & -1 & +1 \end{pmatrix}$$

Para comprobar hasta qué punto es útil el método, se presenta en una tabla la tensión de cada módulo y la corriente media que circula a través del mismo en el sentido en que se llena su condensador.

Rama	Tensión almacenada (V)	Corriente media que de carga (A)
1	1030	-14
	980	20
	930	20
2	1020	-28
	1090	-70
	910	+70
3	970	50
	930	50
	1010	50

### Interpretación de las degeneraciones a nivel de Space Vector

Como ha podido comprobarse en los ejemplos, aunque puede llegar a haber hasta N-1 variables básicas no saturadas (que para puentes completos corresponden a N-1 estados

nulos), no siempre es así. Para un convertidor formado sólo por puentes completos, puede haber cualquier número de variables básicas no saturadas desde 0 hasta  $N-1$ , y por cada variable básica que falte para llegar a las  $N-1$  se dice que hay un grado de degeneración. Considerando que el grado de degeneración que tengan las soluciones de dos grupos adyacentes en espacio de estado tiene un impacto en el número de conmutaciones mínimo para pasar de una a otra, resulta interesante estudiar la distribución del número de generaciones.

### **Estructura Space Vector según el grado de degeneración**

En esta sección se estudia la disposición de las degeneraciones que tiene la solución óptima en espacio de estado. Concretamente, puesto que los convertidores en los que es más abundante la práctica de Space Vector son los trifásicos, se ha hecho el estudio para convertidores de 3 ramas.

### **Posiciones fijas**

Puede comprobarse que determinadas posiciones en Space Vector siempre tienen el grado máximo de degeneración. El punto más evidente para comprobar esto es el central, donde las restricciones de grupo fuerzan a que en todas las ramas haya el mismo número de variables positivas, negativas y nulas. Puesto que no puede darse el caso en que todas las ramas tengan una variable básica saturada (nula), ninguna rama puede tenerla. Independientemente de las iteraciones, no aparecerán variables básicas no saturadas. En consecuencia el punto central siempre tiene el máximo grado de degeneración.

Si partiendo de un grupo en el que el grado de degeneración es el máximo se avanzan dos grupos en la dirección correspondiente a una rama cualquiera, el grupo al que se llega también tiene siempre el máximo grado de degeneración. En este caso, la rama en cuya dirección se ha avanzado debe tener un puente en estado positivo o negativo más con respecto a las otras que las que tenía en el grupo original, pero seguirá teniendo el mismo número de puentes a tensión nula. Usando este sistema es posible conocer todos los puntos en espacio de estado en los que el grado de degeneración es el máximo. Para un convertidor como el mostrado en la figura 3, los grupos con este nivel de degeneración corresponden a los marcados en la figura 12.

Para tres fases, el número de degeneraciones de los restantes puntos es 0 ó 1. Si partiendo de una solución inicial para cualquier punto que tenga 1 variable básica no saturada (degeneración de grado 1) se itera una vez, el resultado tiene 2 variables básicas no saturadas (sin degeneración). Estas dos variables básicas no saturadas aparecen en las ramas en las que no había variables básicas en la solución anterior. Si desde esta solución se itera una vez más, se vuelve a 1 variable básica no saturada en la rama original. Se mantiene así la alternancia entre una y dos variables básicas no saturadas. En la periferia de la representación de Space Vector, donde no todas las ramas gozan de redundancia, se sabe que la solución siempre es degenerada, es decir, siempre hay al menos una 1 variable básica no saturada, como puede verse en la figura 13. Los restantes grupos pueden tener 1 grado de degeneración o ninguno.



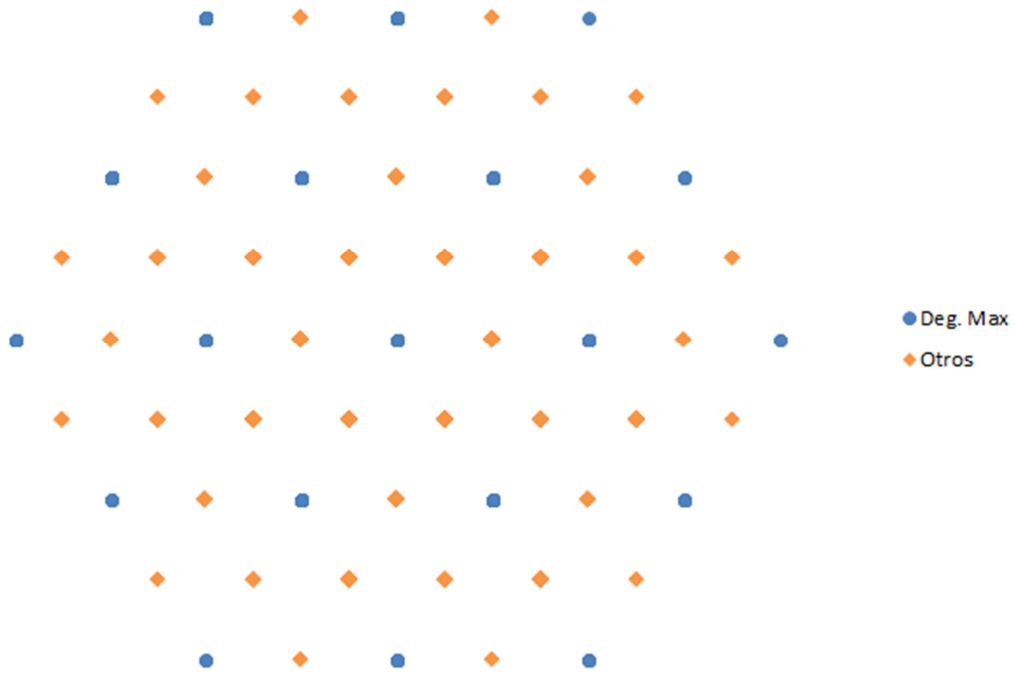


Figura 12

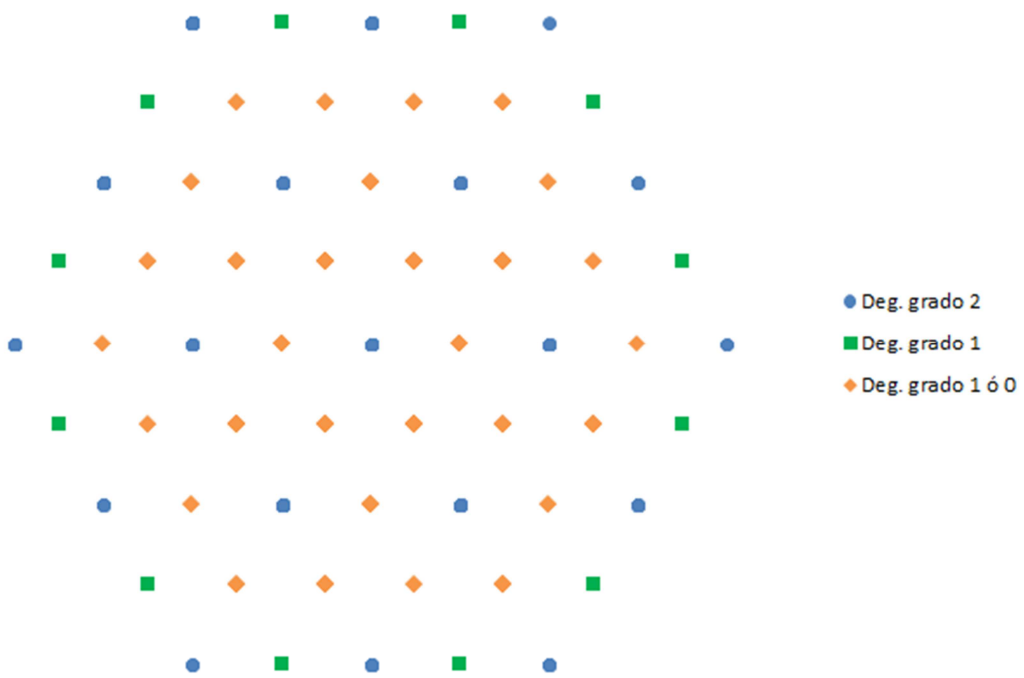


Figura 13

Si el equipo tuviera más ramas, existirían más posibilidades para cada grupo. Por ejemplo, para 4 ramas, existen posiciones fijas en las que siempre hay 2 variables básicas no saturadas (degeneración de grado 1) y posiciones fijas en las que nunca hay

variables no saturadas (degeneración de grado 3, el máximo). Los restantes grupos de la periferia tienen 1 variable básica no saturada (degeneración de grado 2) y el resto de los puntos pueden tener 1 ó 3 variables básicas no saturadas (degeneración de grado 2 ó sin degeneración respectivamente).

Para más ramas, aparecen más alternancias. Con 5 ramas hay más tipos de grupos. Para 5 ramas el espacio de estado es tetra dimensional y no puede representarse pero aún pueden considerarse las posibilidades. Las posiciones fijas tienen siempre el máximo grado de degeneración (4). Algunos grupos de la periferia (no contando los de máxima generación) tienen 1 variable básica y otros tienen 2, correspondiendo a degeneraciones de grado 3 ó 2 respectivamente. Entre los puntos interiores los hay que alternan entre 2 y 3 variables básicas (degeneración de grado 2 y 1 respectivamente) y que alternan entre 1 y 4 variables básicas (degeneración de grado 3 y sin degeneración).

Conforme aumenta el número de ramas, aumentan los grados de degeneración y las combinaciones entre ellos. La siguiente tabla indica los tipos de grupos que hay para distintos números de ramas. Los grupos en cuya posición siempre hay el mismo grado de degeneración aparecen como x-fijo siendo x el grado de degeneración. Si el tipo de grupo sólo aparece en la periferia, donde no hay redundancia, aparece como x-fij-p. Los grupos en los que se alternan dos grados de degeneración aparecen como x-y siendo x e y los grados de degeneración que se alternan.

6 ramas	7 ramas	8 ramas	9 ramas	10 ramas
0-4	0-5	0-6	0-7	0-8
1-3	1-4	1-5	1-6	1-7
2-fij	2-3	2-4	2-5	2-6
3-fij-p	3-fij-p	3-fij	3-4	3-5
4-fij-p	4-fij-p	4-fij-p	4-fij-p	4-fij
5-fij	5-fij-p	5-fij-p	5-fij-p	5-fij-p
	6-fij	6-fij-p	6-fij-p	6-fij-p
		7-fij	7-fij-p	7-fij-p
			8-fij	8-fij-p
				9-fij

### Posiciones adyacentes (para 3 ramas)

La disposición de los grupos con degeneración de grado 1, 2 ó sin degeneración no es arbitraria. En un convertidor de 3 ramas, un grupo cuya solución óptima no esté degenerada nunca está adyacente a otro grupo cuya solución óptima tampoco lo esté. La matriz de estados correspondiente a una solución óptima sin degeneración siempre tiene la siguiente forma:

$$S^{ord} = \begin{pmatrix} +1 & +1 & +1 \\ +1 & +1 & +1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ +1 & +1 & +1 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

En las columnas correspondientes a 2 ramas hay un cero, mientras que en la columna de la rama restante no hay ninguno. Para pasar a un grupo que esté adyacente al de esta solución se debe sumar 1 al primer estado no positivo o restar 1 al último estado no negativo de una rama. Si esta rama es una de las que tiene un cero, no habrá más iteraciones, sino que la que era una variable básica se saturará y se convertirá en una variable degenerada. La solución del grupo al que se llega tendrá una degeneración de grado 1. Se muestran a continuación los 4 casos posibles:

$$\begin{aligned}
 a) S^{ord} &= \begin{pmatrix} +1 & +1 & +1 \\ +1 & +1 & +1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ +1 & +1 & +1 \\ -1 & +1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}; & b) S^{ord} &= \begin{pmatrix} +1 & +1 & +1 \\ +1 & +1 & +1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ +1 & +1 & +1 \\ -1 & 0 & +1 \\ -1 & -1 & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \\
 c) S^{ord} &= \begin{pmatrix} +1 & +1 & +1 \\ +1 & +1 & +1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ +1 & +1 & +1 \\ -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}; & d) S^{ord} &= \begin{pmatrix} +1 & +1 & +1 \\ +1 & +1 & +1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ +1 & +1 & +1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Si la rama es la que no tiene ceros, se producirá uno como resultado de sumar o restar 1. Como consecuencia habrá tantos ceros como ramas, (lo cual no es óptimo), por lo que habrá una iteración en la que se sumará o restará 1 a todos los ceros. La solución resultante no contendrá estados nulos, por lo que tendrá el máximo grado de degeneración. Como se comentó con anterioridad, si cuando se cambia a un grupo adyacente sumando 1, la iteración sólo puede restar 1 a cada rama y viceversa. Por lo tanto, se puede saber cuáles son las posibles soluciones:

$$\begin{aligned}
 e) S^{ord} &= \begin{pmatrix} +1 & +1 & +1 \\ +1 & +1 & +1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ +1 & +1 & +1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}; & f) S^{ord} &= \begin{pmatrix} +1 & +1 & +1 \\ +1 & +1 & +1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ +1 & +1 & +1 \\ -1 & +1 & +1 \\ -1 & -1 & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Se pueden representar los candidatos óptimos del grupo sin degeneración y de los grupos adyacentes en espacio de estado como se hace en la figura 14. Recuérdese que se puede rotar la disposición mostrada.

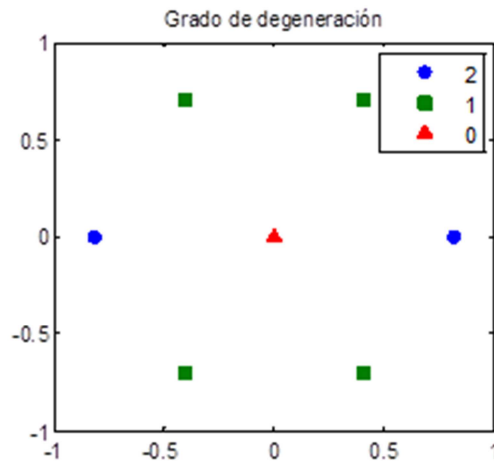


Figura 14

La transición desde el grupo sin degeneración a un grupo con degeneración de grado 1 conlleva 1 conmutación: la del estado nulo que pasa a no nulo. La transición desde el grupo sin degeneración un grupo con degeneración de grado 2 requiere 2 conmutaciones: los dos estados nulos que pasan a no nulos.

Los grupos cuya solución óptima tiene una degeneración de primer grado, también están siempre rodeados de los mismos tipos de grupos en lo que a degeneraciones se refiere. Concretamente, de los 6 grupos que rodean a uno con degeneración de primer grado, siempre hay 2 grupos cuya solución óptima no tiene degeneración, otros 2 que en los que hay degeneración de grado 1 y otros 2 en los que hay degeneración de grado 2. La disposición de estos grupos, sin embargo, no es siempre la misma. Para comprobarlo, se muestra la forma que tiene la matriz de estados de una solución con degeneración de primer grado:

$$S^{ord} = \begin{pmatrix} +1 & +1 & +1 \\ +1 & +1 & +1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ +1 & +1 & +1 \\ 0 & -1 & +1 \\ -1 & -1 & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

En una de las columnas hay un cero mientras que en las otras no lo hay. Por simplificar, supongamos que la columna que contiene un cero es la primera, las soluciones para otros casos pueden encontrarse permutando las columnas. Sean  $B_{1+}$ ,  $B_{2+}$  y  $B_{3+}$  los beneficios del último estado positivo de las ramas 1, 2 y 3 respectivamente. Sean así mismo  $B_{1-}$ ,  $B_{2-}$  y  $B_{3-}$  los beneficios del primer estado negativo de las ramas 1, 2 y 3. Puesto que hay un cero en la primera rama, sea  $B_{10}$  su beneficio.

Para pasar de un grupo a otro adyacente se debe sumar 1 al primer estado no positivo de una rama o restar 1 al primer estado no negativo de una rama. Si la rama es la primera, como hay un estado nulo, éste es el último no positivo y el primero no negativo, por lo que será al que se le sume o reste 1. Además, puesto que era una variable básica, se

saturará y pasará a ser una variable degenerada. No habrá más iteraciones por ello ya que el conjunto de variables básicas (incluyendo las degeneradas) no ha cambiado.

$$a) S^{ord} = \begin{pmatrix} +1 & +1 & +1 \\ +1 & +1 & +1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ +1 & +1 & +1 \\ +1 & -1 & +1 \\ -1 & -1 & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}; \quad b) S^{ord} = \begin{pmatrix} +1 & +1 & +1 \\ +1 & +1 & +1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ +1 & +1 & +1 \\ -1 & -1 & +1 \\ -1 & -1 & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Si en lugar de sumar o restar 1 a un estado de la primera rama, se suma o resta a un estado de las otras ramas, aparecerá un segundo estado nulo. A continuación, en función de los valores que tengan los beneficios, podrá ser necesario iterar una vez o no. Supongamos en primer lugar que se avanza en la dirección de la segunda rama sumando 1 al primer estado no positivo de su columna:

$$c_1) S^{ord} = \begin{pmatrix} +1 & +1 & +1 \\ +1 & +1 & +1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ +1 & +1 & +1 \\ 0 & 0 & +1 \\ -1 & -1 & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Para saber si debe iterarse restando 1 al último estado no negativo de cada columna, se comprueba si la suma de los beneficios de los módulos que corresponden a estos estados es menor que 0:

$$B_{10} + B_{2-} + B_{3+} > 0 \Rightarrow \text{No iterar} \Rightarrow \text{Sin degeneración}$$

$$B_{10} + B_{2-} + B_{3+} < 0 \Rightarrow \text{Iterar} \Rightarrow \text{Degeneración de grado 1}$$

En principio, ambas opciones son posibles. Si hubiera iteración, la solución óptima sería la siguiente:

$$c_2) S^{ord} = \begin{pmatrix} +1 & +1 & +1 \\ +1 & +1 & +1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ +1 & +1 & +1 \\ -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Comprobemos ahora qué ocurre si en lugar de sumar 1 en la segunda rama, se resta 1 en la tercera rama:

$$d_1) S^{ord} = \begin{pmatrix} +1 & +1 & +1 \\ +1 & +1 & +1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ +1 & +1 & +1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

De nuevo puede ser necesario iterar o no. Habrá una iteración sumando 1 al primer estado no positivo de cada columna si la suma de los beneficios correspondientes a estos módulos es positiva.

$$\begin{aligned} B_{10} + B_{2-} + B_{3+} > 0 &\Rightarrow \text{Iterar} \Rightarrow \text{Degeneración de grado 1} \\ B_{10} + B_{2-} + B_{3+} < 0 &\Rightarrow \text{No iterar} \Rightarrow \text{Sin degeneración} \end{aligned}$$

En caso de iterar, la solución óptima sería la siguiente:

$$d_2) S^{ord} = \begin{pmatrix} +1 & +1 & +1 \\ +1 & +1 & +1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ +1 & +1 & +1 \\ +1 & 0 & +1 \\ -1 & -1 & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

La suma de la que depende esta iteración es la misma que la del caso anterior (en el que se sumaba 1 en la segunda rama). Como puede comprobarse se debe iterar en uno de los casos y no en el otro. Por lo tanto, de entre los dos grupos propuestos, uno tendrá una degeneración de grado 1 y el otro no tendrá degeneración.

De la misma manera puede comprobarse que la misma relación existe entre los otros dos grupos. Supongamos que se resta 1 a en la segunda rama. En tal caso, la solución a la que se llega es:

$$e_1) S^{ord} = \begin{pmatrix} +1 & +1 & +1 \\ +1 & +1 & +1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ +1 & 0 & +1 \\ 0 & -1 & +1 \\ -1 & -1 & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Si la suma de los beneficios correspondientes al primer estado no positivo de cada rama es mayor que 0 habrá una iteración sumando 1 a estos estados, y se producirá una degeneración:

$$\begin{aligned} B_{10} + B_{2+} + B_{3-} > 0 &\Rightarrow \text{Iterar} \Rightarrow \text{Degeneración de grado 1} \\ B_{10} + B_{2+} + B_{3-} < 0 &\Rightarrow \text{No iterar} \Rightarrow \text{Sin degeneración} \end{aligned}$$

En caso de iterar, la solución óptima será la siguiente:

$$e_2) S^{ord} = \begin{pmatrix} +1 & +1 & +1 \\ +1 & +1 & +1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ +1 & +1 & +1 \\ +1 & -1 & +1 \\ -1 & -1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Por último, si desde el grupo original se suma 1 a la tercera rama para llegar al último grupo, la solución a la que se llega es la siguiente:

$$f_1) S^{ord} = \begin{pmatrix} +1 & +1 & +1 \\ +1 & +1 & +1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ +1 & +1 & +1 \\ 0 & -1 & +1 \\ -1 & -1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Se comprueba a continuación si debe iterarse restando 1 al último estado no negativo de cada rama. Esta iteración se da si la suma de los beneficios de estos módulos es negativa:

$$\begin{aligned} B_{10} + B_{2+} + B_{3-} > 0 &\Rightarrow \text{No iterar} \Rightarrow \text{Sin degeneración} \\ B_{10} + B_{2+} + B_{3-} < 0 &\Rightarrow \text{Iterar} \Rightarrow \text{Degeneración de grado 1} \end{aligned}$$

En caso de iterar, la solución óptima a la que se llega es la siguiente:

$$f_2) S^{ord} = \begin{pmatrix} +1 & +1 & +1 \\ +1 & +1 & +1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ +1 & 0 & +1 \\ -1 & -1 & +1 \\ -1 & -1 & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

También en este caso, la suma que se comprueba es la misma para los dos grupos, por lo que habrá iteración con uno y sólo uno de ellos. En consecuencia de entre estos dos grupos, uno no tendrá degeneración, y el otro tendrá una degeneración de grado 1. En las figuras 15a-15c se muestran las posibles disposiciones de grupos alrededor de un grupo cuya solución óptima tiene una degeneración de grado 1, a las que hay que añadir las rotaciones.

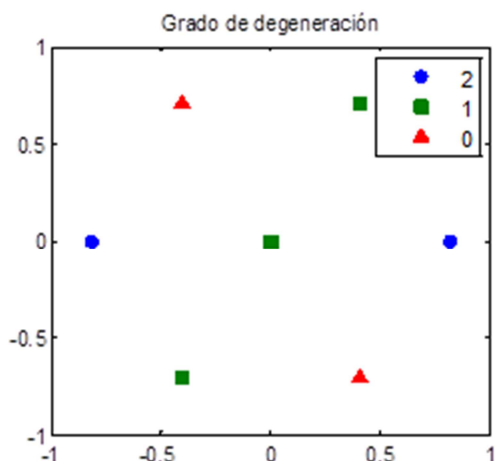


Figura 15a

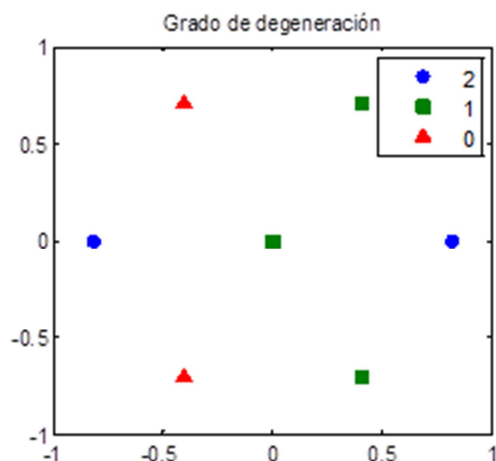


Figura 15b

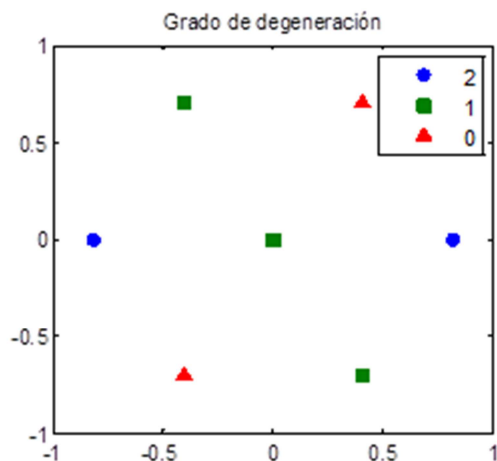


Figura 16c

Como puede comprobarse por comparación, el paso de un grupo con degeneración de grado 1 a otro grupo adyacente con sin degeneración requiere 1 conmutación: un estado no nulo pasa a nulo. De la misma manera, la transición de un grupo con degeneración de grado 1 a otro adyacente con degeneración de grado 2 requiere 1 conmutación: el estado nulo pasa a no nulo. Por último, la transición de un grupo con degeneración de grado 1 a otro adyacente con degeneración de grado 1, requiere 2 conmutaciones: un estado nulo pasa a no nulo y otro no nulo pasa a nulo.

Por último, los grupos con degeneración de grado 2 son los que más opciones dan para los puntos adyacentes. A su alrededor no puede haber más de 3 grupos sin degeneración ya que, como se ha comprobado con anterioridad, no puede haber dos grupos sin degeneración adyacentes. Tampoco puede haber ningún grupo con degeneración de grado 2 adyacente a otro grupo con degeneración de grado 2, porque las posiciones de estos grupos son fijas y siempre están distanciadas 2 grupos entre ellas como se mostraba en la figura 12. Eso deja las siguientes posibilidades alrededor de un grupo con degeneración de grado 2:



- 6 grupos con degeneración de grado 1
- 1 grupo sin degeneración y 5 con degeneración de grado 1
- 2 grupos sin degeneración alineados con el grupo con degeneración de grado 2 y otros 4 grupos con degeneración de grado 1
- 2 grupos sin degeneración no alineados con el grupo con degeneración de grado 2 (pero tampoco adyacentes entre sí) y otros 4 grupos con degeneración de grado 1
- 3 grupos sin degeneración formando un triángulo equilátero y otros 3 grupos con degeneración de grado 1 formando otro triángulo equilátero.

Las figuras 16a-16e muestran estas posibilidades.

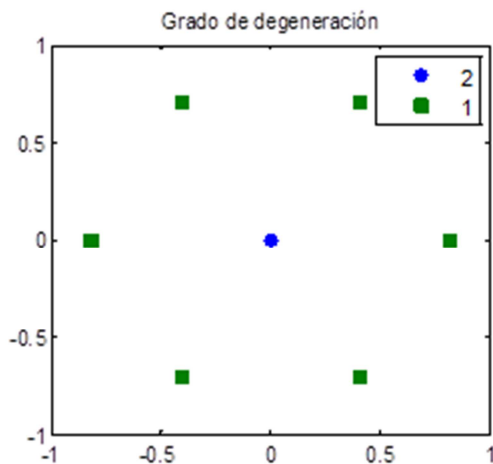


Figura 16a

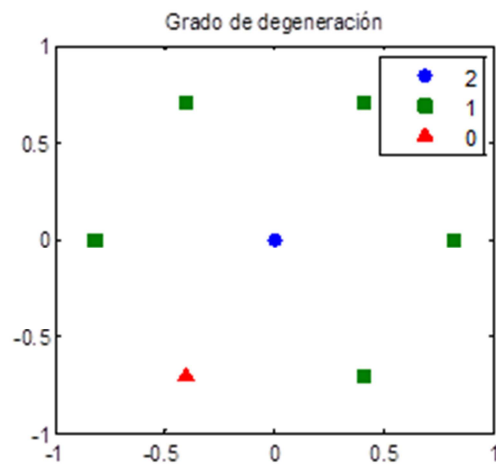


Figura 16b

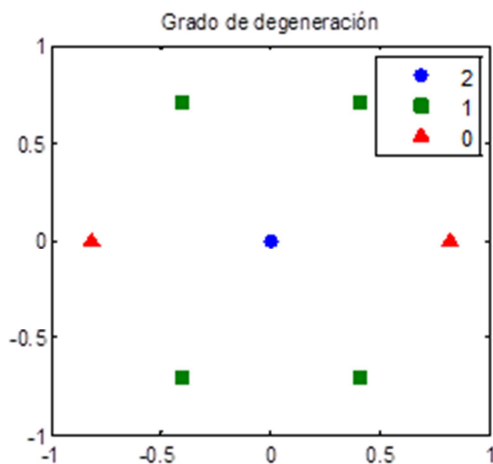


Figura 16c

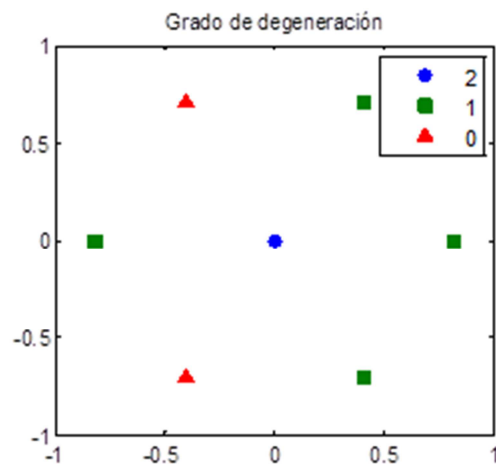


Figura 16d

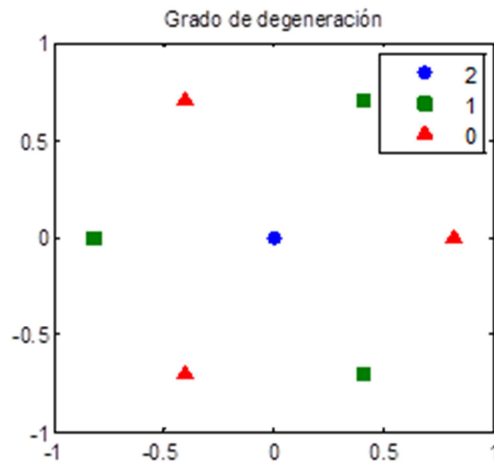


Figura 16e

Dado que las restantes posibilidades quedan descartadas, para comprobar que efectivamente todas estas combinaciones son posibles, se propone una visión general de lo que ocurre alrededor de un grupo con degeneración de grado 2 y un ejemplo numérico para cada posibilidad no descartada. La matriz de estados de una solución óptima con degeneración de grado máximo no tiene ceros, por lo que tiene la forma siguiente:

$$S^{ord} = \begin{pmatrix} +1 & +1 & +1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ +1 & +1 & +1 \\ -1 & -1 & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

En cada columna hay dos valores consecutivos que son uno positivo y uno negativo. Por simplicidad, se representarán sólo estos valores:

$$\begin{pmatrix} +1 & +1 & +1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Sean  $B_{1+}$ ,  $B_{1-}$ ,  $B_{2+}$ ,  $B_{2-}$ ,  $B_{3+}$  y  $B_{3-}$  los beneficios de los módulos a los que corresponden estos estados. Para pasar de esta solución a la de un grupo adyacente debe sumarse 1 al primer estado no positivo o restarse 1 al último estado no negativo de una rama. Esto hará que aparezca un estado nulo. Después, deberá comprobarse si es necesario iterar o no restando o sumando respectivamente 1 en todas las columnas. A continuación se muestran todas las posibilidades.

Se suma 1 en la primera rama:

$$B_{1-} + B_{2+} + B_{3+} > 0 \rightarrow \text{No iterar} \rightarrow \begin{pmatrix} +1 & +1 & +1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$B_{1-} + B_{2+} + B_{3+} < 0 \rightarrow \text{Iterar} \rightarrow \begin{pmatrix} +1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Se resta 1 en la primera rama:

$$B_{1+} + B_{2-} + B_{3-} < 0 \rightarrow \text{No iterar} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & +1 & +1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$B_{1+} + B_{2-} + B_{3-} > 0 \rightarrow \text{Iterar} \rightarrow \begin{pmatrix} +1 & +1 & +1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Se suma 1 en la segunda rama:

$$B_{1+} + B_{2-} + B_{3+} > 0 \rightarrow \text{No iterar} \rightarrow \begin{pmatrix} +1 & +1 & +1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$B_{1+} + B_{2-} + B_{3+} < 0 \rightarrow \text{Iterar} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & +1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Se resta 1 en la segunda rama:

$$B_{1+} + B_{2-} + B_{3+} < 0 \rightarrow \text{No iterar} \rightarrow \begin{pmatrix} +1 & 0 & +1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$B_{1+} + B_{2-} + B_{3+} > 0 \rightarrow \text{Iterar} \rightarrow \begin{pmatrix} +1 & +1 & +1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Se suma 1 en la tercera rama:

$$B_{1+} + B_{2+} + B_{3-} > 0 \rightarrow \text{No iterar} \rightarrow \begin{pmatrix} +1 & +1 & +1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B_{1+} + B_{2+} + B_{3-} < 0 \rightarrow \text{Iterar} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & +1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Se resta 1 en la tercera rama:

$$B_{1+} + B_{2+} + B_{3-} < 0 \rightarrow \text{No iterar} \rightarrow \begin{pmatrix} +1 & +1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$B_{1+} + B_{2+} + B_{3-} > 0 \rightarrow \text{Iterar} \rightarrow \begin{pmatrix} +1 & +1 & +1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Para cada dirección existen dos posibilidades. Sin embargo, como ya se ha indicado no puede darse cualquier combinación, sino sólo las 5 mostradas en las figuras 16a-16e y las rotaciones que se hagan de estas. Esto se debe a que los beneficios deben cumplir una serie de condiciones por la ordenación y por el criterio de optimalidad:

$$B_{1+} > B_{1-}$$

$$B_{2+} > B_{2-}$$

$$B_{3+} > B_{3-}$$

$$B_{1+} + B_{2+} + B_{3+} > 0$$

$$B_{1-} + B_{2-} + B_{3-} < 0$$

Se sabe además que, de acuerdo con la primera ley de Kirchhoff, debe haber al menos una rama por la que la corriente entre en el convertidor y al menos otra por la que salga. Puesto que los signos de los beneficios corresponden con los de las corrientes de sus ramas, los beneficios de una de las ramas deben ser positivos, los de otra deben ser negativos, y los de la tercera rama pueden ser positivos o negativos pero deben tener el mismo signo. Esto restringe el número de combinaciones posibles.

Se propone a continuación un ejemplo para cada una de las 5 combinaciones antes citadas. En estos ejemplos, se ha considerado que la corriente es positiva en la tercera rama y negativa en las dos primeras. Para cada ejemplo se muestran primero los valores de los 6 beneficios que influyen en la disposición de los grupos y a continuación los 6 estados que aparecen en el grupo con degeneración máxima y sus adyacentes.

- Ningún grupo sin degeneración:

$$\begin{pmatrix} B_{1+} & B_{2+} & B_{3+} \\ B_{1-} & B_{2-} & B_{3-} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 5 & -5 \\ 1 & 1 & -9 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} (+1 & +1 & +1) & (+1 & +1 & 0) \\ (-1 & 0 & -1) & (-1 & -1 & -1) \\ (0 & +1 & +1) & (+1 & +1 & +1) & (+1 & +1 & +1) \\ (-1 & -1 & -1) & (-1 & -1 & -1) & (0 & -1 & -1) \\ (+1 & +1 & +1) & (+1 & 0 & +1) \\ (-1 & -1 & 0) & (-1 & -1 & -1) \end{pmatrix}$$

- 1 grupo con sin degeneración:

$$\begin{pmatrix} B_{1+} & B_{2+} & B_{3+} \\ B_{1-} & B_{2-} & B_{3-} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 4 & -5 \\ 2 & 2 & -10 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} (+1 & +1 & +1) & (+1 & +1 & 0) \\ (-1 & 0 & -1) & (-1 & -1 & -1) \\ (0 & +1 & +1) & (+1 & +1 & +1) & (+1 & +1 & +1) \\ (-1 & -1 & -1) & (-1 & -1 & -1) & (0 & -1 & -1) \\ (0 & 0 & +1) & (+1 & 0 & +1) \\ (-1 & -1 & -1) & (-1 & -1 & -1) \end{pmatrix}$$

- 2 grupos sin degeneración alineados con el de máxima degeneración:

$$\begin{pmatrix} B_{1+} & B_{2+} & B_{3+} \\ B_{1-} & B_{2-} & B_{3-} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 2 & -4 \\ 1 & 1 & -5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} (+1 & +1 & +1) & (+1 & +1 & 0) \\ (-1 & 0 & -1) & (-1 & -1 & -1) \\ (+1 & +1 & +1) & (+1 & +1 & +1) & (+1 & 0 & 0) \\ (-1 & 0 & 0) & (-1 & -1 & -1) & (-1 & -1 & -1) \\ (+1 & +1 & +1) & (+1 & 0 & +1) \\ (-1 & -1 & 0) & (-1 & -1 & -1) \end{pmatrix}$$

- 2 grupos sin degeneración no alineados con el de máxima degeneración:

$$\begin{pmatrix} B_{1+} & B_{2+} & B_{3+} \\ B_{1-} & B_{2-} & B_{3-} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 5 & -6 \\ 2 & 1 & -10 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} (0 & +1 & 0) & (+1 & +1 & 0) \\ (-1 & -1 & -1) & (-1 & -1 & -1) \\ (0 & +1 & +1) & (+1 & +1 & +1) & (+1 & +1 & +1) \\ (-1 & -1 & -1) & (-1 & -1 & -1) & (0 & -1 & -1) \\ (0 & 0 & +1) & (+1 & 0 & +1) \\ (-1 & -1 & -1) & (-1 & -1 & -1) \end{pmatrix}$$

- 3 grupos sin degeneración:

$$\begin{pmatrix} B_{1+} & B_{2+} & B_{3+} \\ B_{1-} & B_{2-} & B_{3-} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 5 & -6 \\ 2 & 1 & -10 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} (0 & +1 & 0) & (+1 & +1 & 0) \\ (-1 & -1 & -1) & (-1 & -1 & -1) \\ (0 & +1 & +1) & (+1 & +1 & +1) & (+1 & 0 & 0) \\ (-1 & -1 & -1) & (-1 & -1 & -1) & (-1 & -1 & -1) \\ (0 & 0 & +1) & (+1 & 0 & +1) \\ (-1 & -1 & -1) & (-1 & -1 & -1) \end{pmatrix}$$

Como se pudo comprobar en los casos anteriores, pasar de un grupo con degeneración de grado 2 a otro adyacente con degeneración de grado 1 supone una conmutación, mientras que pasar a un grupo sin degeneración supone 2 conmutaciones. En ambos casos estas conmutaciones se deben a estados no nulos que pasan a nulos.

Con toda esta información se puede concluir que si se conmuta entre tres grupos adyacentes entre sí (formando un triángulo equilátero), sólo hay tres posibilidades:

1. Un grupo no tiene degeneración, otro tiene degeneración de grado 1 y el tercero tiene degeneración de grado 2.
2. Un grupo no tiene degeneración y los otros dos tienen degeneración de grado 1.
3. Un grupo tiene degeneración de grado 2 y los otros dos tienen degeneración de grado 1.

Si se pretende conmutar el menor número de veces posible, en el primer caso el grupo con degeneración de grado 1 debe ser el segundo de la secuencia; y en el segundo y tercer caso, los grupos con degeneración de grado 1 deben ser el primero y el último de la secuencia. En los tres casos habrá un total de 2 conmutaciones: una para pasar del primer grupo al segundo y otra para pasar del segundo al tercero. Una forma de llevar esto a cabo sin tener que plantearse la degeneración de cada grupo es la propuesta en el paso 6 del método propuesto (orden de conmutación).

## **Desviación en Space Vector de la tensión modulada**

Cuando se escoge al candidato óptimo de cada grupo, sólo se tiene en cuenta que sea el que maximiza la función objetivo. Sin embargo, es importante saber qué consecuencias tiene esta decisión de cara a la modulación.

Mediante una hoja Excel se han hecho pruebas para comprobar dónde se sitúa el punto óptimo de cada grupo. En estas pruebas se ha simulado un convertidor de tres ramas con 2 puentes completos por rama. Se escoge la desviación de la tensión en cada condensador y la corriente que circula por cada rama. La hoja representa la disposición en  $\alpha\beta$  de los puntos de cada grupo y resalta en un color distinto el óptimo de cada grupo. En la figura 17a se muestra la hoja Excel utilizada, y en la 17b se representa en mayor detalle la desviación. En estas figuras se ha dado como tensión a los módulos de la primera rama 183V y 200V; a los de la segunda, 220V y 240V, y a los de la tercera, 215V y 192V. Las corrientes que recorren la primera y tercera rama son iguales y van de negativo a positivo, siendo la corriente de la segunda rama el doble de estas y en sentido contrario. La solución escogida por el método es la del triángulo verde, correspondiendo el círculo rojo a la referencia del grupo. Los círculos azules indican la representación en espacio de estado de las otras combinaciones de cada grupo.

La propiedad más destacada que tiene el óptimo es la dirección en la que se desvía. De entre todos los puntos del grupo siempre se escoge el que se desvía más en la dirección contraria a la de la corriente. Esto tiene sentido cuando se tiene en cuenta que el beneficio de cada estado es proporcional a la tensión del módulo y a la corriente con el signo contrario. La dirección de maximización del beneficio debe ser la que desvíe más los módulos en la dirección contraria a la de la corriente.

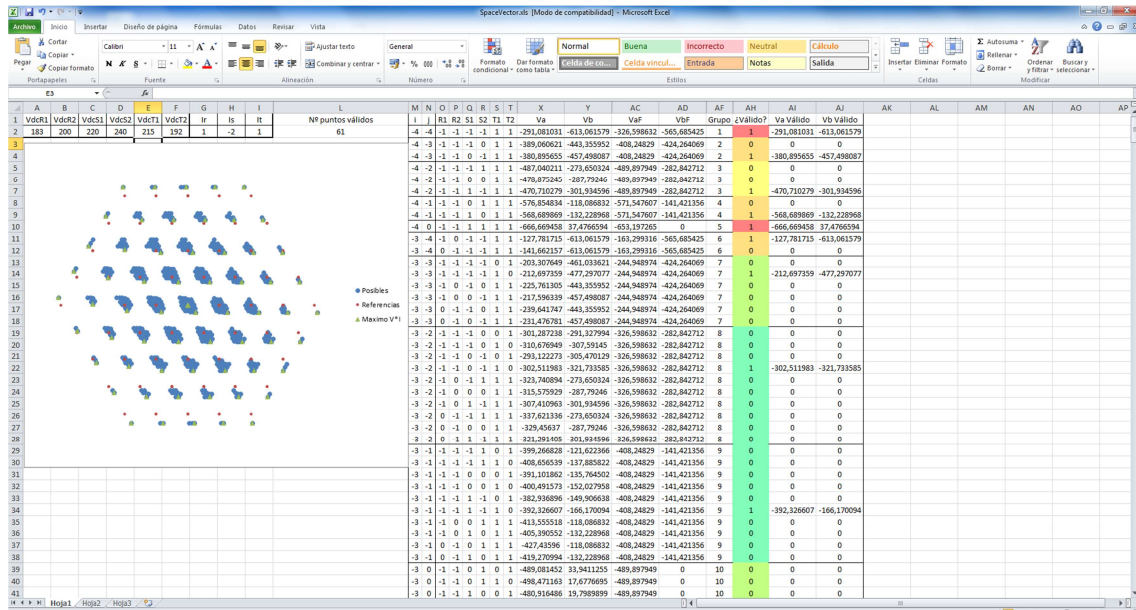


Figura 17a

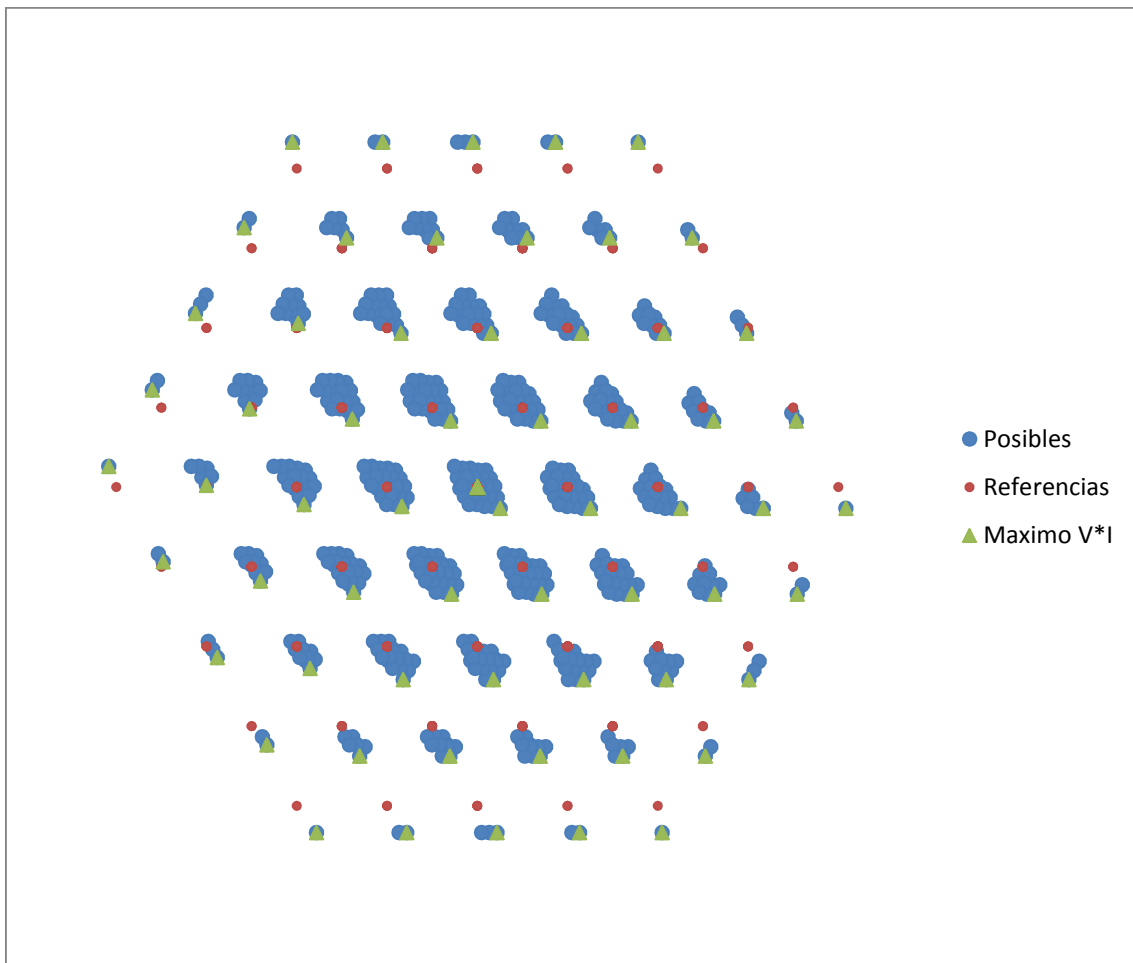


Figura 17b

Esta propiedad implica que de cada grupo siempre se escoge el punto que más potencia saca del convertidor. Esto puede demostrarse matemáticamente, para ello recordemos cuál es la formulación del problema de optimización aproximado:

$$\left\{ \begin{array}{l} \max f_{aprox} = \sum_{k=1}^M \sum_{j=1}^N -I_k \cdot V_{k j} \cdot S_{k j} \\ \sum_{j=1}^N S_{k j} - \sum_{j=1}^N S_{k+1 j} = G_{k k+1} \\ S_{k j} \in \{-1, 0, 1\} \end{array} \right.$$

Recordando que la tensión que cada módulo modula a su salida es  $V_{k j} \cdot S_{k j}$  y llamando  $X_{k j}$  a esta tensión, se obtiene:

$$\left\{ \begin{array}{l} \max f_{aprox} = \sum_{k=1}^M \sum_{j=1}^N -I_k \cdot X_{k j} \\ \sum_{j=1}^N S_{k j} - \sum_{j=1}^N S_{k+1 j} = G_{k k+1} \\ S_{k j} \in \{-1, 0, 1\} \end{array} \right.$$

Puesto que la corriente que circula por cada rama es la misma para todos los módulos de la rama, puede salir del primer sumatorio. La suma de todas las tensiones moduladas en una rama es la suma de la tensión dada por la rama. Llamando a esta tensión de rama  $U_k$ , se tiene:

$$\left\{ \begin{array}{l} \max f_{aprox} = \sum_{k=1}^M -I_k \cdot U_k \\ \sum_{j=1}^N S_{k j} - \sum_{j=1}^N S_{k+1 j} = G_{k k+1} \\ S_{k j} \in \{-1, 0, 1\} \end{array} \right.$$

Por último, recordando que la corriente por la tensión es la potencia, llamando  $P_k$  a la potencia que sale de la rama  $k$  y que el signo que se ha dado a la corriente es el que recorre la rama en sentido que carga la rama, se llega a:

$$\left\{ \begin{array}{l} \max f_{aprox} = \sum_{k=1}^M P_k \\ \sum_{j=1}^N S_{k j} - \sum_{j=1}^N S_{k+1 j} = G_{k k+1} \\ S_{k j} \in \{-1, 0, 1\} \end{array} \right.$$

Es decir, el problema busca el candidato de un grupo concreto que maximiza la suma de las potencias que salen de todas las ramas y, por lo tanto, de todo el equipo. En consecuencia, y puesto que siempre hay alguna desviación de tensión entre los condensadores de los módulos, la aplicación de este método dará lugar a que el equipo siempre emita hacia la red una potencia algo mayor de lo necesario. Este inconveniente puede subsanarse con facilidad mediante un control en P y Q, es decir, un control que regule independientemente la potencia activa y la reactiva que el equipo intercambia con la red. La regulación de la potencia activa requerirá un término integral o bien algún término que por medios heurísticos pueda compensar la desviación que el método de equilibrado provoca.

Obsérvese que las restricciones del problema de equilibrado sólo exigen que el punto seleccionado pertenezca a un grupo concreto. No se exige nada en lo referente a la tensión en  $\alpha\beta$  que el convertidor debe modular. Éste es el principal motivo de que la tensión de salida se desvíe con respecto a la de referencia al modular. El problema exacto no tiene este inconveniente, ya que en él las restricciones fuerzan a que la tensión modulada sea exactamente la de referencia.

### **Ventajas y desventajas del método para el problema aproximado**

El método propuesto es capaz de alcanzar la solución del problema aproximado en un número de iteraciones considerablemente menor que el método Simplex. Esencialmente, el método es equivalente a un Simplex en el que se eliminan cálculos (como los de las variables de holgura), se considera sólo 1 ó 2 direcciones para iterar, con lo que se reduce el cálculo de costes relativos y se da la opción de hacer una tabla de soluciones iniciales eliminando la fase 1 del Simplex. Para un método iterativo similar al Simplex, el método propuesto es considerablemente rápido, lo cual es muy conveniente para una situación en la que debe darse una respuesta rápida. Además, incluso si el método no fuera capaz de encontrar el óptimo del problema a tiempo, al menos, podría dar una solución que estaría más cercana al óptimo que la original, tanto más cuanto más tiempo haya tenido para iterar.

Por otro lado, el método propuesto tiene la ventaja de ser capaz de trabajar sólo con números enteros. Los beneficios se construyen como productos de tensiones y corrientes, las cuales podrían ser números no enteros, pero cuando estas medidas de tensión y corriente se transmiten al controlador, pasan por un proceso de conversión de analógico a digital. Los convertidores analógico-digital (ADC por Analog-Digital Converter) devuelven sus resultados cuantizados, por lo que la representación digital de la tensión y corriente medidas serán números enteros. Así pues los beneficios pueden tratarse como números enteros. Los estados de los módulos son siempre 1, 0 ó -1, que también son enteros. Todas las operaciones que se realizan en el método son sumas y restas, y las sumas y restas de números enteros son también números enteros. El hecho de trabajar sólo con números enteros reduce las prestaciones necesarias del microcontrolador que ejecute este método, además de mejorar su velocidad.

También relacionada con la implementación del método está la ventaja de la memoria necesaria. En realidad, no es necesario guardar en memoria el estado de cada módulo para la solución ordenada, ya que se sabe que ésta siempre tiene la misma estructura. En lugar de ello, basta guardar los índices del último estado no negativo y del primer estado



no positivo de cada rama. Cuando estos índices coinciden, el estado al que se refieren es nulo, los estados anteriores son 1 y los posteriores son -1. Cuando los índices no coinciden, entonces son consecutivos, todos los estados hasta el último no negativo son 1 y todos los estados posteriores son -1.

Como inconveniente principal está la necesidad de ordenar los módulos en función de sus beneficios marginales. Sin embargo, para tratar con convertidores grandes es común hacer uso de dispositivos capaces de llevar a cabo varias tareas en paralelo (como por ejemplo FPGAs) que se encarguen de controlar los módulos de cada rama. Estos módulos pueden usarse para ordenar los módulos por la tensión de sus condensadores comparándolos por parejas. Puesto que varias parejas pueden compararse simultáneamente, es posible tener todos los módulos ordenados por tensión de condensadores en  $N$  iteraciones. Una vez hecho esto, un dispositivo con mayor facilidad para hacer multiplicaciones que una FPGA puede hacer la multiplicación de la corriente por la tensión de los módulos para obtener los beneficios, los cuales vendrán ordenados. Además, durante las iteraciones del método no se usan todos los beneficios, por lo que sólo es necesario realizar estas multiplicaciones cuando se necesita operar con el beneficio en cuestión. De esta manera es posible reducir aún más el número de operaciones y ordenar los módulos rápidamente. Debe tenerse en cuenta que el signo de la corriente determinará si el orden de beneficios coincidirán con el orden de las tensiones o con el contrario.

La otra desventaja del método es la desviación de la tensión modulada con respecto a la referencia, ya que en cada grupo la desviación se produce sistemáticamente en la dirección de la corriente. Dado que la implicación de esto es una mayor tensión en fase con la corriente, si se utilizan controladores en fase y en cuadratura, basta con añadir un término integral al controlador que devuelva la tensión en fase para reducir lo más posible esta desviación.

Como se ha comentado antes, el método de resolución propuesto para el problema aproximado es ideal para modulaciones de tipo Space Vector en las que se escojan los  $M-1$  grupos más cercanos a la representación de la tensión de referencia para modular. El método propuesto es capaz de localizar al candidato óptimo para todos los grupos más allá del primero en no más de una iteración cada uno. Una vez localizados estos puntos, el método permite al mismo tiempo ordenarlos para recorrerlos con el menor número de conmutaciones posible ( $M-1$ ) y tratar la modulación como una de ancho de pulsos equivalente, la cual suele ser más sencilla de implementar.

Puede ser, sin embargo, que se prefiera usar una modulación por ancho de pulsos (PWM). En este caso, las restricciones de tensión tienen más sentido que las de grupo, ya que este juego de restricciones no tiene la desviación antes comentada. Por este motivo, el método puede ser modificado para resolver el problema exacto. Es importante indicar que pese a que el problema exacto no sufre esta desviación de tensión, los cálculos necesarios para llevarlo a cabo son más complejos y llevan más tiempo.

## 6. Método para el problema exacto

Para mejorar la precisión del problema aproximado y eliminar la desviación, se debe resolver el problema exacto. El método propuesto para este efecto es muy similar al empleado para resolver el problema aproximado, si bien algunas de las ventajas numéricas de este último método se pierden. En este capítulo se describe el método propuesto tal como se aplica para resolver el problema exacto.

### Estructura

La estructura es muy similar a la del método empleado para resolver el problema aproximado. La principal diferencia es que ya no son necesarios los pasos relativos a la modulación Space Vector, ya que no se usan las restricciones de grupo propias de Space Vector.

Los pasos son los siguientes:

1. Obtener el beneficio  $B_{kj}$  de dar tensión positiva en cada módulo
2. Ordenar los módulos de cada rama en función de su beneficio
3. Obtener una solución inicial
4. Ajustar iterativamente la tensión homopolar para localizar el óptimo
  - a. Cada vez que una tensión modulada básica se sature ( $-V_{kj}$  o a  $V_{kj}$ ) sustituirla por otra de la misma rama siguiendo el orden de beneficios
  - b. Cuando el beneficio unitario por aumentar la tensión de neutro es negativo para una tensión de neutro mayor y positivo para una tensión de neutro menor, se ha alcanzado el óptimo del problema
5. Obtener las referencias de modulación para cada módulo básico
6. Deshacer la ordenación llevada a cabo en el paso 2

A continuación se describen con más detalle cada uno de estos pasos.

### 1 Cálculo de beneficios

En primer lugar debe obtenerse el beneficio  $B_{kj}$  de dar tensión positiva con cada módulo. Como para el problema aproximado, este beneficio depende de la tensión acumulada en el condensador del módulo y de la corriente que circula por la rama. La fórmula, sin embargo es distinta:

$$B_{kj} = \frac{i_k}{V_{kj}}$$

Para casos en los que no se trate de puentes completos, se usen referencias de tensión distintas etc. la fórmula es distinta. Estas fórmulas están descritas en el capítulo “7. Variantes”.

Para comparar con el método utilizado para resolver el problema aproximado, se propone el mismo ejemplo que en la descripción de éste. Supongamos que tenemos un convertidor con la misma topología que el mostrado en la figura 3. En un ciclo de control concreto, las corrientes de las tres ramas son  $i_1 = -9.7A$ ,  $i_2 = +2.6A$  e  $i_3 = +7.1A$ , las tensiones de los condensadores de la primera rama son  $V_{11} = 410V$  y  $V_{12} = 360V$ , las tensiones de los condensadores de la segunda rama son  $V_{21} = 400V$  y  $V_{22} = 370V$ , y las

tensiones de los de la tercera son  $V_{3\ 1}= 390V$  y  $V_{3\ 2}= 380V$ . Los beneficios de los módulos son:

$$B_{kj} = \frac{i_k}{V_{kj}}$$

$$B_1 = i_1 \cdot \begin{pmatrix} 1/V_{1\ 1} \\ 1/V_{1\ 2} \end{pmatrix} = -9.7 \cdot \begin{pmatrix} 1/410 \\ 1/360 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.023659 \\ -0.026944 \end{pmatrix}$$

$$B_2 = i_2 \cdot \begin{pmatrix} 1/V_{2\ 1} \\ 1/V_{2\ 2} \end{pmatrix} = 2.6 \cdot \begin{pmatrix} 1/400 \\ 1/370 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.0065 \\ 0.007027 \end{pmatrix}$$

$$B_3 = i_3 \cdot \begin{pmatrix} 1/V_{3\ 1} \\ 1/V_{3\ 2} \end{pmatrix} = 7.1 \cdot \begin{pmatrix} 1/390 \\ 1/380 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.018205 \\ 0.018684 \end{pmatrix}$$

$$B = (B_1 \ B_2 \ B_3) = \begin{pmatrix} -0.023659 & 0.0065 & 0.018205 \\ -0.026944 & 0.007027 & 0.018684 \end{pmatrix}$$

## 2 Ordenación

Al igual que con el anterior método propuesto, el siguiente paso es ordenar los módulos de cada rama de mayor a menor beneficio. También en este caso debe guardarse la información necesaria para deshacer este cambio de orden más tarde. Obsérvese que si bien el signo de los beneficios es el contrario que con el método anterior, el orden de los módulos será el mismo. También en este caso deben añadirse los beneficios de los módulos virtuales:  $+\infty$  y  $-\infty$ .

Siguiendo el ejemplo anterior, se procede a ordenar los beneficios de cada rama:

$$B_1 = \begin{pmatrix} -0.023659 \\ -0.026944 \end{pmatrix} \rightarrow B_1^{ord} = \begin{pmatrix} +\infty \\ -0.023659 \\ -0.026944 \\ -\infty \end{pmatrix}; \text{Ind}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}; P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B_2 = \begin{pmatrix} 0.0065 \\ 0.007027 \end{pmatrix} \rightarrow B_2^{ord} = \begin{pmatrix} +\infty \\ 0.007027 \\ 0.006 \\ -\infty \end{pmatrix}; \text{Ind}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}; P_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B_3 = \begin{pmatrix} 0.018205 \\ 0.018684 \end{pmatrix} \rightarrow B_3^{ord} = \begin{pmatrix} +\infty \\ 0.018684 \\ 0.018205 \\ -\infty \end{pmatrix}; \text{Ind}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}; P_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B^{ord} = \begin{pmatrix} +\infty & +\infty & +\infty \\ -0.023659 & 0.007027 & 0.018684 \\ -0.026944 & 0.006 & 0.018205 \\ -\infty & -\infty & -\infty \end{pmatrix}$$

Como en este ejemplo sólo hay dos módulos por rama, se pueden usar tres variables indicando si el orden de los módulos de cada rama es el mismo (0) o el contrario (1) que el de sus beneficios. En este caso estas variables valen 0, 1 y 1 respectivamente, igual que si se hubiera usado el método para el problema aproximado.

### 3 Solución inicial

A diferencia del método utilizado para resolver el problema aproximado, no se puede hacer una tabla con la solución inicial de cada grupo, ya que la cantidad de valores que puede tomar la referencia para la tensión entre cada dos ramas es no numerable. Por ello, debe llevarse a cabo el equivalente a la fase 1 del método Simplex para encontrar una solución inicial.

Una forma de encontrar la solución inicial, empieza por suponer una tensión homopolar inicial, como por ejemplo 0V. Para reducir el número de iteraciones, puede ser recomendable escoger un valor de tensión homopolar inicial distinto de 0, por ejemplo, se puede escoger como valor de tensión homopolar inicial el que se aplicara en el ciclo de control anterior. También puede aplicarse un valor intermedio entre éste valor y 0.

Con este valor y las restricciones de tensión es posible obtener una tensión de referencia para cada rama mediante una transformación lineal. A continuación, se escoge para cada rama la tensión que debe modular cada módulo de la rama de modo que se cumplan las siguientes condiciones:

- Uno de los módulos es el básico.
- Todos los módulos reales con un beneficio mayor que el del básico tienen una referencia de tensión  $X_{kj}$  saturada a su tensión acumulada ( $V_{kj}$ ).
- Todos los módulos reales con un beneficio menor que el del básico tienen una referencia de tensión  $X_{kj}$  saturada a menos su tensión acumulada ( $-V_{kj}$ ).
- La tensión del módulo virtual con beneficio  $+\infty$  es negativa si es el módulo básico y 0 si no lo es.
- La tensión del módulo virtual con beneficio  $-\infty$  es positiva si es el módulo básico y 0 si no lo es.

Una posible forma de encontrar una tensión modulada para cada módulo de la rama es la siguiente:

- Obtener la suma  $V_{sum}$  de las tensiones acumuladas en todos los módulos (reales) de la rama.
- Sumar a esta suma de tensiones la tensión de referencia de la rama para obtener una tensión que resta por asignar  $V_{res}$ .
- Para el módulo virtual de beneficio  $+\infty$ 
  - Si la tensión que resta por asignar es negativa, dar este valor a la tensión modulada por este módulo virtual y dejar la tensión por asignar  $V_{res}$  a 0. Esto representa sobremodulación negativa.
  - Si no, dejar la tensión por asignar igual y asignar un valor nulo a la tensión modulada por este módulo virtual.
- Para los demás módulos, recorriéndolos de mayor a menor beneficio:
  - Si el módulo es el módulo virtual de beneficio  $-\infty$ , asignarle como tensión modulada la que resta por asignar  $X_{kj}=V_{res}$ . Un valor distinto de 0 representa sobremodulación positiva.
  - Si la tensión que falta por asignar es mayor que el doble de la tensión del módulo, saturar la tensión de salida de este módulo a su tensión acumulada  $X_{kj}=V_{kj}$  y sustraer de la tensión que resta por asignar el doble de la tensión acumulada en el módulo.

- Si la tensión que falta por asignar está entre 0 y el doble de la tensión del módulo, dar a este módulo como tensión de salida la que resta por asignar menos la tensión acumulada del módulo  $X_{kj} = V_{res} - V_{kj}$  y dar el valor 0 a la tensión que falta por asignar.
- Si la tensión que falta por asignar es 0, saturar la tensión de salida del módulo a menos la tensión acumulada del módulo:  $X_{kj} = -V_{kj}$ .

De esta manera se obtiene un valor para la tensión de salida de cada módulo y se conoce cuál es la tensión de salida básica de cada rama. Obsérvese que esta serie de operaciones contiene sólo sumas y restas y que puede ser llevada a cabo en todas las ramas en paralelo. En consecuencia, si se usan FPGAs para controlar las ramas, éstas pueden llevar a cabo esta asignación inicial e indicar a un dispositivo de control central cuál es la tensión de salida básica en cada rama para la solución inicial. Esto puede hacerse inmediatamente después de ordenar los módulos por beneficio.

Ahora bien, como se indicó en los fundamentos del método propuesto, la solución óptima nunca tiene tantas variables básicas como ramas. Por este motivo, habrá una iteración inicial en la que se incremente o decremente la tensión básica de todas las ramas para que una de las variables básicas se sature.

Además, las tensiones de salida de los módulos virtuales deben ser 0, ya que dichos módulos no existen realmente, con lo que no pueden dar ninguna tensión de salida. Si en la solución básica hay tensiones no nulas en alguno de los módulos virtuales, se partirá de una situación de sobremodulación. En general, aún es posible seguir en estas condiciones. Sin embargo, si hay al menos un módulo virtual de beneficio  $+\infty$  y al menos un módulo virtual de beneficio  $-\infty$  con tensiones de salida no nulas, el método no será capaz de seguir debido a la indeterminación resultante ( $\infty-\infty$ ). En general esto sólo ocurre si las tensiones de referencia que se dan entre ramas no pueden alcanzarse.

Continuando con el ejemplo anterior, supongamos que las tensiones de línea que se pretenden modular son  $U_{12}=981.75V$  y  $U_{23}=269.5V$ . A falta de más datos, partamos de una solución inicial en la que la tensión homopolar es nula.

$$\begin{cases} U_1 - U_2 = 981.75V \\ U_2 - U_3 = 269.50V \\ U_1 + U_2 + U_3 = 0V \end{cases} \rightarrow \begin{cases} U_1 = +744.333V \\ U_2 = -237.417V \\ U_3 = -506.917V \end{cases}$$

La suma de las tensiones de los módulos cada rama son (en este ejemplo las tres iguales)  $V_{sum 1} = V_{sum 2} = V_{sum 3} = 770V$ . Para la primera rama la tensión que resta por asignar empieza siendo:

$$V_{res 1} = V_{sum 1} + U_1 = 770V + 744.333V = 1514.333V$$

La tensión modulada para el primer módulo virtual se satura a su máximo, es decir a 0V. El siguiente módulo de la primera rama tiene por tensión 410V. El doble de esta tensión es 820V, que es menor que la tensión que resta por asignar, así que la tensión de salida para este módulo también se satura al máximo ( $X_{12}^{ord} = 410V$ ) y la tensión que resta por asignar se reduce en 820V:  $V_{res 1}=694.333V$ . El siguiente módulo por orden de beneficio tiene por tensión 360V. El doble de esta tensión es 720V, que ya es mayor que la tensión que resta por asignar. Así pues, la tensión de salida de este módulo se toma

como básica y su valor es la tensión que resta por asignar menos la tensión acumulada del módulo:

$$X_{12}^{ord} = V_{res\ 1} - V_{12}^{ord} = 694.333V - 360V = 334.333V$$

La tensión que resta por asignar se pone a 0V. El siguiente es el módulo virtual de beneficio  $-\infty$ . La tensión de salida que se le asigna es la que resta por asignar, es decir, 0V. Las tensiones de salida asignadas para esta rama quedan así:

$$X_1^{ord} = \begin{pmatrix} 0 \\ 410 \\ \mathbf{334.333} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Se procede de forma similar con las restantes dos ramas:

Rama 2:

- Se obtiene la tensión por asignar  $V_{res\ 2} = 770V - 237.417V = 532.583V$
- Para el primer módulo, el virtual de beneficio  $+\infty$ :
  - La tensión que resta por asignar es positiva.
  - Se satura la tensión de salida a 0:  $X_{21}^{ord} = 0V$ .
  - Se mantiene la tensión que resta por asignar igual.
- Para el siguiente módulo por orden de beneficios:
  - La tensión acumulada en el módulo es  $V_{22}^{ord} = 370V$ .
  - El doble de esta tensión es 740V.
  - La tensión que resta por asignar está entre 0V y este valor.
  - La tensión de salida es  $X_{22}^{ord} = 532.583V - 370V = 162.583V$
  - Esta tensión es básica
  - La tensión que resta por asignar se pone a 0.
- Para el siguiente módulo
  - La tensión del módulo es 400V.
  - La tensión que resta por asignar es 0.
  - Se satura al mínimo la tensión de salida del módulo  $X_{23}^{ord} = -400V$
  - Se mantiene la tensión que resta por asignar igual.
- El siguiente módulo es el virtual con beneficio  $-\infty$ 
  - La tensión de salida que se le asigna es  $X_{24}^{ord} = 0V$

Rama 3:

- Se obtiene la tensión por asignar  $V_{res\ 3} = 770V - 506.917V = 263.083V$
- Para el primer módulo, el virtual de beneficio  $+\infty$ :
  - La tensión que resta por asignar es positiva.
  - Se satura la tensión de salida a 0:  $X_{31}^{ord} = 0V$ .
  - Se mantiene la tensión que resta por asignar igual.
- Para el siguiente módulo por orden de beneficios:
  - La tensión acumulada en el módulo es  $V_{32}^{ord} = 380V$ .
  - El doble de esta tensión es 760V.
  - La tensión que resta por asignar está entre 0V y este valor.
  - La tensión de salida es  $X_{32}^{ord} = 263.083V - 380V = -116.917V$
  - Esta tensión es básica

- La tensión que resta por asignar se pone a 0.
- Para el siguiente módulo
  - La tensión del módulo es 390V.
  - La tensión que resta por asignar es 0.
  - Se satura al mínimo la tensión de salida del módulo  $X_{23}^{ord} = -390V$
- El siguiente módulo es el virtual con beneficio  $-\infty$ 
  - La tensión de salida que se le asigna es  $X_{24}^{ord} = 0V$

La solución inicial es la siguiente:

$$X^{ord} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 410 & \mathbf{162.583} & \mathbf{-116.917} \\ \mathbf{334.333} & -400 & -390 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Hay más variables básicas de las que debería, por lo que en la primera iteración, se eliminará una de ellas.

#### 4 Localización del óptimo

La forma de iterar es muy similar a la que se utiliza para el problema aproximado. Se localiza en cada rama el primer módulo cuya tensión de salida no está saturada al máximo. Se suman los beneficios asociados a estos módulos y, si la suma es positiva, se debe subir la tensión de modo común aumentando por igual las tensiones de estos módulos. De la misma forma se localiza en cada rama el último módulo cuya tensión de salida no está saturada al mínimo y se suman los beneficios asociados. Si esta suma es negativa, se debe bajar la tensión de modo común disminuyendo la tensión de modo común a todos de estos módulos. Una variable básica es siempre la primera no saturada al máximo y la última no saturada al mínimo.

A diferencia de lo que ocurría con el problema aproximado, ahora las cantidades que se suman o restan a las tensiones de salida no son siempre 1 ó 2. De hecho, ni siquiera tienen por qué ser enteras. La cantidad que debe sumarse o restarse a las tensiones en las iteraciones debe ser la justa para que una de ellas se sature. Se puede llevar la cuenta de cuánto se sube o baja la tensión de modo común y emplear esta información para obtener la solución inicial en el siguiente ciclo de control.

Como con el problema aproximado, una vez escogido el sentido en que debe modificarse la tensión homopolar (positivo o negativo), siempre se sigue en el mismo sentido hasta alcanzar el óptimo del problema. Si se ha empleado el método antes descrito para obtener la solución inicial, esta solución tendrá tantas variables básicas como ramas. El sentido en que debe iterarse vendrá dado por los beneficios de los módulos a los que corresponden estas variables básicas. Una vez hecha la primera iteración, se continúa en el mismo sentido hasta el óptimo. En el óptimo del problema, la suma de los beneficios de los módulos cuyas tensiones son las últimas de cada rama no saturadas al mínimo es positiva, y la suma de los beneficios de los módulos cuyas tensiones son las primeras de cada rama no saturadas al máximo es negativa.

Continuando con el ejemplo anterior, se comprueban los beneficios de las variables básicas ya que, al haber tantas como ramas, se sabe que es una de ellas la que debe saturarse.

$$X^{ord} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 410 & \mathbf{162.583} & \mathbf{-116.917} \\ \mathbf{334.333} & -400 & -390 \\ 0 & 0 & 0 \\ +\infty & +\infty & +\infty \end{pmatrix}$$

$$B^{ord} = \begin{pmatrix} -0.023659 & \mathbf{0.007027} & \mathbf{0.018684} \\ \mathbf{-0.026944} & 0.006 & 0.018205 \\ -\infty & -\infty & -\infty \end{pmatrix}$$

$$B_{13}^{ord} + B_{22}^{ord} + B_{32}^{ord} = -0.026944 + 0.007027 + 0.018684 = -0.001233 < 0$$

La suma de los beneficios de las variables básicas es menor que 0, por lo que debe reducirse la tensión de estos módulos. Para saber cuánto, debe comprobarse cuál de ellos alcanzará primer la mínima tensión que puede dar.

$$V^{ord} = \begin{pmatrix} - & - & - \\ 410 & \mathbf{370} & \mathbf{380} \\ \mathbf{360} & 400 & 390 \\ - & - & - \end{pmatrix}$$

La reducción que admite la tensión de la primera rama es  $334.333V + 360V = 694.333V$ . La reducción que admite la de la segunda rama es  $162.583V + 370V = 532.583V$ . La reducción que admite la de la tercera rama es  $-116.917V + 380V = 263.083V$ . La mínima es la de la tercera rama, con lo que ésta será la que deje de ser básica y se sature al mínimo. La homopolar puede reducirse en  $263.083V$ .

$$X_{13}^{ord} - 263.083V = 71.25V$$

$$X_{22}^{ord} - 263.083V = -100.5V$$

$$X_{32}^{ord} - 263.083V = -380V$$

$$V_{homopolar} = -263.083V$$

Puesto que la tensión de modo común se ha disminuido en la anterior iteración, se comprueba ahora si debe disminuirse más. Para ello, se suman los beneficios de la última variable no saturada al mínimo de cada rama.

$$X^{ord} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \mathbf{0} \\ 410 & \mathbf{-100.5} & -380 \\ \mathbf{71.25} & -400 & -390 \\ 0 & 0 & 0 \\ +\infty & +\infty & +\infty \end{pmatrix}$$

$$B^{ord} = \begin{pmatrix} -0.023659 & \mathbf{0.007027} & 0.018684 \\ \mathbf{-0.026944} & 0.006 & 0.018205 \\ -\infty & -\infty & -\infty \end{pmatrix}$$

$$B_{13}^{ord} + B_{22}^{ord} + B_{31}^{ord} = -0.026944 + 0.007027 + \infty > 0$$

La suma de los beneficios es mayor que 0, por lo que no debe disminuirse más la tensión de modo común. La solución encontrada es la óptima.



Obsérvese que en este ejemplo las tensiones de los módulos virtuales se han mantenido a 0 durante todo el proceso. Si en algún momento hubiera sido necesario variar sus valores debe tenerse en cuenta que las tensiones de salida de los módulos virtuales de beneficio  $+\infty$  se saturan al máximo a 0, pero no tienen un límite mínimo. De igual manera las tensiones de salida de los módulos virtuales de beneficio  $-\infty$  sólo se saturan al mínimo a 0, pero no tienen un límite máximo. Téngase en cuenta que si estas tensiones no están a 0, la solución corresponderá a una sobremodulación.

## 5 Referencias de modulación

Una vez que se ha alcanzado la solución óptima, deben escogerse las referencias de modulación. Si bien los módulos con tensiones de salida saturadas se mantendrán fijos y no conmutarán, los módulos básicos conmutarán entre dos valores. La modulación puede ser de tipo “level-shifted” como se proponía para el problema aproximado. Esta referencia estará entre -1 y 1, siendo -1 el valor que corresponde a mantener el módulo a la tensión mínima, 0 el que corresponde a cortocircuitarlo y 1 el que corresponde a la tensión máxima. Las referencias pueden obtenerse según la siguiente fórmula:

$$Ref_{kj} = \frac{X_{kj}}{V_{kj}}$$

Es irrelevante escoger las referencias de modulación antes o después de la reordenación.

Siguiendo el ejemplo anterior, se obtienen las referencias según la fórmula tanto para los módulos básicos como para los no básicos.

$$Ref_{exacto}^{ord} = \begin{pmatrix} +1 & -0.27162 & -1 \\ +0.19792 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Par comparar, las referencias que se obtuvieron al resolver el problema aproximado fueron estas otras.

$$Ref_{aproximado}^{ord} = \begin{pmatrix} +1 & -0.3 & -1 \\ +0.25 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Como puede comprobarse, si bien cualitativamente son similares, cuantitativamente hay cierta diferencia. Esta diferencia es la que provoca la desviación en la tensión de salida del convertidor.

## 6 Reordenación

El paso de reordenación es igual que para en el método para el problema aproximado. Simplemente se deshace el cambio de orden que se hizo en el paso 2 para asignar cada referencia al módulo que le corresponde.

En este ejemplo, las referencias en el orden de los módulos son:

$$Ref = \begin{pmatrix} +1 & -1 & -1 \\ +0.19792 & -0.27162 & -1 \end{pmatrix}$$

## Ejemplo

A continuación, se presenta un ejemplo completo para un convertidor de 3 ramas y 3 módulos por rama. Este ejemplo es el mismo que el que se utilizó para el problema aproximado de modo que puedan compararse los resultados.

Las tensiones de los módulos de la 1ª rama son (en orden) 1030V, 980V y 930V; la de los de la 2ª rama son 1020V, 1090V y 910V, y la de los de la 3ª rama son 970V, 930V y 1010V. Las corrientes que circula por las ramas de positivo a negativo son 20A, -70A y 50A.

Las tensiones de línea de referencia son  $U_{12}=900V$  y  $U_{23}=-2800V$ . Se sabe que la tensión homopolar utilizada en el anterior ciclo de control fue  $V_{\text{homopolar}}=-350V$ . Se escoge una tensión inicial para cada rama suponiendo la misma tensión homopolar:

$$\begin{cases} U_1 - U_2 = 900V \\ U_2 - U_3 = -2800V \\ U_1 + U_2 + U_3 = -350V \end{cases} \rightarrow \begin{cases} U_1 = -450V \\ U_2 = -1350V \\ U_3 = 1450V \end{cases}$$

Se calculan los beneficios correspondientes a dar tensión positiva en cada uno de los módulos de cada rama.

$$B_1 = 20 \cdot \begin{pmatrix} 1/1030 \\ 1/980 \\ 1/930 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.019417 \\ 0.020408 \\ 0.021505 \end{pmatrix}$$

$$B_2 = -70 \cdot \begin{pmatrix} 1/1020 \\ 1/1090 \\ 1/910 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.068627 \\ -0.064220 \\ -0.076923 \end{pmatrix}$$

$$B_3 = 50 \cdot \begin{pmatrix} 1/970 \\ 1/930 \\ 1/1010 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.051546 \\ 0.053763 \\ 0.049505 \end{pmatrix}$$

Para cada rama se ordenan los módulos según estos beneficios y se almacena en un vector el orden original. Se añaden también los beneficios de los módulos virtuales.

$$B^{ord} = \begin{pmatrix} +\infty & +\infty & +\infty \\ 0.021505 & -0.064220 & 0.053763 \\ 0.020408 & -0.068627 & 0.051546 \\ 0.019417 & -0.076923 & 0.049505 \\ -\infty & -\infty & -\infty \end{pmatrix}$$

$$ind_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad ind_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}; \quad ind_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Se ordenan también las tensiones de los módulos según los beneficios:

$$V^{ord} = \begin{pmatrix} - & - & - \\ 930 & 1090 & 930 \\ 980 & 1020 & 970 \\ 1030 & 910 & 1010 \\ - & - & - \end{pmatrix}$$

Se asignan las tensiones de salida iniciales a los módulos de cada rama. Para ello se obtienen las sumas de las tensiones de los módulos de cada rama y la tensión que falta por asignar en cada una de estas ramas:

$$\begin{aligned} V_{Sum\ 1} &= 2940V; & V_{res\ 1} &= U_1 + V_{Sum\ 1} = 2490V \\ V_{Sum\ 2} &= 3020V; & V_{res\ 2} &= U_2 + V_{Sum\ 2} = 1670V \\ V_{Sum\ 3} &= 2910V; & V_{res\ 3} &= U_3 + V_{Sum\ 3} = 4360V \end{aligned}$$

Primera rama:

- Módulo virtual de beneficio  $+\infty$ 
  - La tensión que resta por asignar es positiva
  - Se satura la tensión de salida al máximo  $X_{11}^{ord} = 0V$
  - Se mantiene igual la tensión que resta por asignar  $V_{res\ 1} = 2490V$
- Primer módulo real
  - La tensión por asignar aún es mayor que  $0V$
  - El doble de la tensión del módulo es  $1860V$
  - La tensión por asignar es mayor que este valor  $V_{res\ 1} > 2V_{12}^{ord}$
  - Se satura la tensión de salida al máximo  $X_{12}^{ord} = 930V$
  - Se resta el doble de la tensión acumulada a la que resta por asignar  $V_{res\ 1} = 630V$
- Segundo módulo real
  - La tensión por asignar aún es mayor que  $0V$
  - El doble de la tensión del módulo es  $1960V$
  - La tensión por asignar es menor que este valor  $0V < V_{res\ 1} < 2V_{13}^{ord}$
  - Se asigna la tensión del módulo como  $X_{13}^{ord} = V_{res\ 1} - V_{13}^{ord} = -350V$
  - Esta tensión es básica
  - Se anula la tensión que falta por asignar  $V_{res\ 1} = 0V$
- Tercer módulo real
  - La tensión por asignar ya es  $0V$
  - Se satura la tensión de salida al mínimo  $X_{14}^{ord} = -1030V$
  - Se mantiene nula la tensión que falta por asignar  $V_{res\ 1} = 0V$
- Módulo virtual de beneficio  $-\infty$ 
  - La tensión de salida se iguala a la que resta por asignar  $X_{15}^{ord} = 0V$

Segunda rama:

- Módulo virtual de beneficio  $+\infty$ 
  - La tensión que resta por asignar es positiva
  - Se satura la tensión de salida al máximo  $X_{21}^{ord} = 0V$
  - Se mantiene igual la tensión que resta por asignar  $V_{res\ 2} = 1670V$
- Primer módulo real
  - La tensión por asignar aún es mayor que  $0V$
  - El doble de la tensión del módulo es  $2180V$
  - La tensión por asignar es menor que este valor  $V_{res\ 2} < 2V_{22}^{ord}$

- Se asigna la tensión del módulo como  $X_{22}^{ord} = V_{res\ 2} - V_{22}^{ord} = 580V$
- Esta tensión es básica
- Se anula la tensión que falta por asignar  $V_{res\ 1} = 0V$
- Segundo módulo real
  - La tensión por asignar ya es  $0V$
  - Se satura la tensión de salida al mínimo  $X_{23}^{ord} = -1020$
  - Se mantiene nula la tensión que falta por asignar  $V_{res\ 1} = 0V$
- Tercer módulo real
  - La tensión por asignar ya es  $0V$
  - Se satura la tensión de salida al mínimo  $X_{24}^{ord} = -910V$
  - Se mantiene nula la tensión que falta por asignar  $V_{res\ 1} = 0V$
- Módulo virtual de beneficio  $-\infty$ 
  - La tensión de salida se iguala a la que resta por asignar  $X_{25}^{ord} = 0V$

Tercera rama:

- Módulo virtual de beneficio  $+\infty$ 
  - La tensión que resta por asignar es positiva
  - Se satura la tensión de salida al máximo  $X_{31}^{ord} = 0V$
  - Se mantiene igual la tensión que resta por asignar  $V_{res\ 3} = 4360V$
- Primer módulo real
  - La tensión por asignar aún es mayor que  $0V$
  - El doble de la tensión del módulo es  $1860V$
  - La tensión por asignar es mayor que este valor  $V_{res\ 3} > 2V_{32}^{ord}$
  - Se satura la tensión de salida al máximo  $X_{32}^{ord} = 930V$
  - Se resta el doble de la tensión acumulada a la que resta por asignar  $V_{res\ 3} = 2500V$
- Segundo módulo real
  - La tensión por asignar aún es mayor que  $0V$
  - El doble de la tensión del módulo es  $1940V$
  - La tensión por asignar es mayor que este valor  $V_{res\ 3} > 2V_{33}^{ord}$
  - Se satura la tensión de salida al máximo  $X_{37}^{ord} = 970V$
  - Se resta el doble de la tensión acumulada a la que resta por asignar  $V_{res\ 3} = 560V$
- Tercer módulo real
  - La tensión por asignar aún es mayor que  $0V$
  - El doble de la tensión del módulo es  $2020V$
  - La tensión por asignar es menor que este valor  $V_{res\ 3} < 2V_{34}^{ord}$
  - Se asigna la tensión del módulo como  $X_{34}^{ord} = V_{res\ 3} - V_{34}^{ord} = -450V$
  - Esta tensión es básica
  - Se anula la tensión que falta por asignar  $V_{res\ 3} = 0V$
- Módulo virtual de beneficio  $-\infty$ 
  - La tensión de salida se iguala a la que resta por asignar  $X_{35}^{ord} = 0V$

La solución inicial es:

$$X^{ord} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 930 & \mathbf{580} & 930 \\ -\mathbf{350} & -1020 & 970 \\ -1030 & -910 & -\mathbf{450} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Se comprueba si la tensión homopolar debe aumentarse:

$$B^{ord} = \begin{pmatrix} +\infty & +\infty & +\infty \\ 0.021505 & -\mathbf{0.064220} & 0.053763 \\ \mathbf{0.020408} & -0.068627 & 0.051546 \\ 0.019417 & -0.076923 & \mathbf{0.049505} \\ -\infty & -\infty & -\infty \end{pmatrix}$$

$$0.020408 - 0.064220 + 0.049505 = 0.005693 > 0$$

Sí que debe aumentarse esta tensión. Para saber cuánto debe aumentarse, se comprueba qué tensión de salida se saturará primero:

$$X^{ord} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 930 & \mathbf{580} & 930 \\ -\mathbf{350} & -1020 & 970 \\ -1030 & -910 & -\mathbf{450} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad V^{ord} = \begin{pmatrix} - & - & - \\ 930 & \mathbf{1090} & 930 \\ \mathbf{980} & 1020 & 970 \\ 1030 & 910 & \mathbf{1010} \\ - & - & - \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} V_{13}^{ord} - X_{13}^{ord} &= 1330V \\ V_{22}^{ord} - X_{22}^{ord} &= 440V \\ V_{34}^{ord} - X_{34}^{ord} &= 1460V \\ \Delta V_{homopolar} &= 440V \end{aligned}$$

La variable que se satura primero es  $X_{22}^{ord}$ , el incremento de tensión homopolar es 440V. Se lleva también la cuenta de la tensión homopolar, ya que puede utilizarse en el siguiente ciclo de control.

$$\begin{aligned} X_{13}^{ord} &= -350V + 440V = 90V \\ X_{22}^{ord} &= 580V + 440V = 1020V \\ X_{34}^{ord} &= -450V + 440V = -10V \\ V_{homopolar} &= -350V + 440V = 90V \end{aligned}$$

La nueva solución es:

$$X^{ord} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 930 & 1020 & 930 \\ \mathbf{90} & -1020 & 970 \\ -1030 & -910 & -\mathbf{10} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Puede que la tensión homopolar deba aumentarse más. Para comprobarlo, se suman los beneficios de la primera variable no saturada al máximo en cada rama y se comprueba si esta suma es positiva.

$$B^{ord} = \begin{pmatrix} +\infty & +\infty & +\infty \\ 0.021505 & -0.064220 & 0.053763 \\ \mathbf{0.020408} & \mathbf{-0.068627} & 0.051546 \\ 0.019417 & -0.076923 & \mathbf{0.049505} \\ -\infty & -\infty & -\infty \end{pmatrix}$$

$$0.020408 - 0.068627 + 0.049505 = 0.001286 > 0$$

Sí, aún debe aumentarse más la tensión de modo común. Se comprueba qué tensión se saturará primero:

$$X^{ord} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 930 & 1020 & 930 \\ \mathbf{90} & \mathbf{-1020} & 970 \\ -1030 & -910 & \mathbf{-10} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad V^{ord} = \begin{pmatrix} - & - & - \\ 930 & 1090 & 930 \\ \mathbf{980} & \mathbf{1020} & 970 \\ 1030 & 910 & \mathbf{1010} \\ - & - & - \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} V_{13}^{ord} - X_{13}^{ord} &= 890V \\ V_{23}^{ord} - X_{23}^{ord} &= 2040V \\ V_{34}^{ord} - X_{34}^{ord} &= 1020V \\ \Delta V_{homopolar} &= 890V \end{aligned}$$

Esta vez, la variable que se satura antes es  $X_{13}^{ord}$  y el incremento de tensión homopolar es 890V.

$$\begin{aligned} X_{13}^{ord} &= 90V + 890V = 980V \\ X_{22}^{ord} &= -1020V + 890V = -130V \\ X_{34}^{ord} &= -10V + 890V = 880V \\ V_{homopolar} &= 90V + 890V = 980V \end{aligned}$$

La nueva solución es:

$$X^{ord} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 930 & 1020 & 930 \\ 980 & \mathbf{-130} & 970 \\ -1030 & -910 & \mathbf{880} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Se vuelve a comprobar si debe subirse más aún la tensión homopolar:

$$B^{ord} = \begin{pmatrix} +\infty & +\infty & +\infty \\ 0.021505 & -0.064220 & 0.053763 \\ 0.020408 & \mathbf{-0.068627} & 0.051546 \\ \mathbf{0.019417} & -0.076923 & \mathbf{0.049505} \\ -\infty & -\infty & -\infty \end{pmatrix}$$

$$0.019417 - 0.068627 + 0.049505 = 0.000295 > 0$$

Sí, aún debe subirse más la tensión homopolar. Se comprueba qué variable saturará primero:

$$X^{ord} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 930 & 1020 & 930 \\ 980 & -\mathbf{130} & 970 \\ -\mathbf{1030} & -910 & \mathbf{880} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad V^{ord} = \begin{pmatrix} - & - & - \\ 930 & 1090 & 930 \\ 980 & \mathbf{1020} & 970 \\ \mathbf{1030} & 910 & \mathbf{1010} \\ - & - & - \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} V_{14}^{ord} - X_{14}^{ord} &= 2060V \\ V_{23}^{ord} - X_{23}^{ord} &= 1150V \\ V_{34}^{ord} - X_{34}^{ord} &= 130V \\ \Delta V_{homopolar} &= 130V \end{aligned}$$

La primera en saturar es  $X_{34}^{ord}$  y el incremento de tensión homopolar es 130V.

$$\begin{aligned} X_{14}^{ord} &= -1030V + 130V = -900V \\ X_{22}^{ord} &= -130V + 130V = 0V \\ X_{34}^{ord} &= 880V + 130V = 1010V \\ V_{homopolar} &= 980V + 130V = 1110V \end{aligned}$$

La nueva solución es:

$$X^{ord} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 930 & 1020 & 930 \\ 980 & \mathbf{0} & 970 \\ -\mathbf{900} & -910 & 1010 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Se comprueba una vez más si debe subirse la tensión homopolar:

$$B^{ord} = \begin{pmatrix} +\infty & +\infty & +\infty \\ 0.021505 & -0.064220 & 0.053763 \\ 0.020408 & -\mathbf{0.068627} & 0.051546 \\ \mathbf{0.019417} & -0.076923 & 0.049505 \\ -\infty & -\infty & -\infty \end{pmatrix}$$

$$0.019417 - 0.068627 - \infty < 0$$

No debe subirse más la tensión homopolar, se ha alcanzado la solución óptima del problema. Las referencias para la modulación son:

$$Ref^{ord} = \begin{pmatrix} +1 & +1 & +1 \\ +1 & 0/1020 & +1 \\ -900/1030 & -1 & +1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} +1 & +1 & +1 \\ +1 & 0 & +1 \\ -0.87379 & -1 & +1 \end{pmatrix}$$

Por último se reordenan estas referencias de modo que estén en el orden original:

$$Ref = \begin{pmatrix} -0.87379 & 0 & +1 \\ +1 & +1 & +1 \\ +1 & -1 & +1 \end{pmatrix}$$

Pueden compararse estas referencias con las que se obtuvieron para el problema aproximado.

$$Ref_{aprox} = \begin{pmatrix} -0.7 & +0.4 & +1 \\ +1 & +1 & +1 \\ +1 & -1 & +1 \end{pmatrix}$$

El siguiente ciclo de control podría empezar con la tensión homopolar con la que ha terminado éste, ya que esta tensión se conoce:  $V_{homopolar} = 1110V$ .

Para comprobar hasta qué punto es útil el método, se presenta en una tabla la tensión de cada módulo y la corriente media que circula a través del mismo en el sentido en que se llena su condensador. Esta tabla contiene los resultados tanto para el problema aproximado como para el exacto.

Rama	Tensión almacenada (V)	Corriente media que de carga (A)	
		Problema aproximado	Problema exacto
1	1030	-14	-17.14753
	980	20	20
	930	20	20
2	1020	-28	0
	1090	-70	-70
	910	+70	70
3	970	50	50
	930	50	50
	1010	50	50

### Cómo agilizar el método para el problema exacto

Como se ha mostrado el método propuesto para resolver el problema exacto tiene operaciones más complejas que el método para el problema aproximado. Si el método va a ser ejecutado por un sistema de control que disponga de un microprocesador central y uno o más dispositivos lógicos capaces de operar en paralelo (por ejemplo FPGAs) destinados a controlar los módulos, la distribución entre estos de las operaciones puede agilizar o ralentizar el método.

En primer lugar, como se ha podido comprobar el orden de los módulos en cada rama en función del beneficio es el mismo tanto si se resuelve el problema aproximado como si se trata del exacto. Una FPGA tendrá más facilidad que un microprocesador para ordenar un conjunto de números, ya que podrá comparar varias parejas de números entre sí en lugar de hacer las comparaciones una a una. Por ello, la ordenación debe hacerse en los dispositivos lógicos capaces de actuar en paralelo. El cálculo de los beneficios del problema exacto requiere divisiones, mientras que el del aproximado sólo requiere multiplicaciones. No es recomendable hacer estas operaciones en las FPGAs ya que suponen una mayor carga para las mismas y requieren más celdas lógicas. Para evitar estas operaciones, se recomienda ordenar los módulos según sus tensiones acumuladas en lugar de según sus beneficios, ya que el orden coincide. El orden debe ser de tensiones más altas a más bajas cuando la corriente de la rama va de negativo a positivo de la rama, y de más bajas a más altas cuando la corriente recorre la rama de positivo a negativo.



La búsqueda de una tensión inicial para cada rama debe hacerse en el controlador central, ya que éste es el dispositivo que dispondrá de las referencias de tensión de línea. Una vez que este dispositivo tenga estas referencias calculadas, se las enviará a las FPGAs para que éstas escojan la solución inicial para cada rama.

Las operaciones necesarias para escoger la solución inicial para una rama sólo requieren sumas, restas y multiplicaciones por 2, lo que equivale a desplazamientos de bits. Por ello, es preferible escoger la solución inicial en las FPGAs, ya que la implementación para ello no será más compleja que la de un CORDIC. Obsérvese que, con tal de que la ordenación de los módulos sea correcta, es posible obtener la solución inicial sin haber obtenido los beneficios de los módulos. Una vez que la solución inicial es conocida, el controlador central sólo necesita ser informado de cuál es la variable básica de cada rama y cuál es su valor, ya que se sabe que las tensiones de los módulos anteriores estarán saturadas al máximo y las de los módulos posteriores estarán saturadas al mínimo.

Durante las operaciones el microprocesador central puede ir calculando los beneficios conforme sean utilizados ya que, como se ha visto en los ejemplos, determinados beneficios no se utilizan nunca. Para ello, el microprocesador central necesitará conocer las tensiones de los módulos. También necesitará conocer estas tensiones cuando compruebe si los módulos se saturan o no, lo cual ocurrirá siempre después de haber comprobado los beneficios asociados a estos módulos.

Tras encontrar la solución óptima, el microprocesador central deberá informar a las FPGAs de las referencias de modulación para cada módulo. Para ello, bastará con indicar a cada FPGA cuál es la referencia del módulo básico en cada rama y cuál es este módulo, ya que la referencia de todos los módulos anteriores será +1 y la de los posteriores será -1.

Por último, el microprocesador central no necesita conocer el orden de los módulos. Las FPGAs serán las encargadas de reordenar las referencias para que correspondan con el orden original de los módulos.

Así pues, una forma más eficiente de implementar el método consta de los siguientes pasos (en orden).

1. Al comienzo del ciclo de control, el microprocesador central comienza su rutina de control para escoger las tensiones de línea que deben modularse e indica a las FPGAs que empiecen a ordenar los módulos según la tensión de cada uno y la corriente de las ramas.
2. Las FPGAs comprueban el sentido de la corriente y ordenan los módulos en función de sus tensiones.
3. El microprocesador central obtiene la tensión inicial para cada rama y envía esta información a las FPGAs.
4. Las FPGAs distribuyen esta tensión inicial entre los módulos de cada rama. Al terminar envían al microprocesador central la siguiente información para cada rama:

- a. Cuál es el módulo base
  - b. Cuál es su tensión
5. El microprocesador central empieza a iterar según el método propuesto. Cada vez que el microprocesador central necesite comprobar el beneficio correspondiente a un módulo solicitará a la FPGA correspondiente la tensión del módulo en cuestión. Con esta tensión y la corriente de rama, el microprocesador central calculará el beneficio del módulo. La tensión del módulo se usará así mismo en la iteración para saber la nueva tensión de modo común. Además, si para minimizar los accesos de memoria entre el microprocesador y la FPGA, así como las divisiones, cada vez que un nuevo beneficio sea calculado el microprocesador central guardará en memoria para futuras referencias.
6. Cuando el microprocesador central alcance el óptimo del problema, enviará a las FPGAs la siguiente información para cada rama:
- a. Cuál es el nuevo módulo base
  - b. Cuál es su referencia
7. Con esta información, las FPGAs obtendrán las restantes referencias de modulación, reordenarán los módulos y asignarán a cada uno su referencia.

### **Diferencias con el problema aproximado**

La principal ventaja con respecto al problema aproximado es la exactitud de la tensión modulada. No sólo no se produce la desviación de tensión en Space Vector que reduce la energía del equipo, sino que tampoco es necesario hacer suposiciones sobre la tensión de los módulos. Esto es, la tensión que se modula corresponderá con la de referencia a pesar de que los módulos no estén cargados a su tensión nominal.

Otra gran diferencia es que ya no es necesario calcular varios puntos para conmutar entre ellos. En lugar de trabajar con los estados de los puentes se trabaja directamente con la tensión modulada por éstos. De esta forma todos los puntos entre los que se conmutará se obtienen de forma directa sin necesidad de usar métodos de modulación en espacio de estado.

Puede observarse también que la degeneración ya no es algo que ocurra con normalidad. Si bien para el problema aproximado era habitual encontrar variables degeneradas en la solución para distintos grupos de Space Vector, la solución del problema exacto no suele contar con variables degeneradas. Puede comprobarse que el número de conmutaciones para modular según el problema exacto es el mismo que el mínimo número de conmutaciones dado por el problema aproximado. Concretamente, cada variable básica produce una conmutación, y el número de variables básicas es siempre  $M-1$ . Como se comentó con anterioridad, éste era el mínimo número de conmutaciones que se obtenía en el método para el problema aproximado cuando se escogían para modular los grupos de Space Vector más cercanos a la referencia. Como ventaja adicional, no es necesario reordenar los estados entre los que se conmuta. Los grupos de Space Vector que se obtienen vendrán ya ordenados para que se minimicen las conmutaciones.

La principal desventaja del problema exacto es la cantidad de operaciones que deben realizarse. En particular, las divisiones necesarias para el cálculo de los beneficios y las sumas y restas cada vez que se comprueba cuál variable se satura primero en una iteración. Esta desventaja hace que la resolución del problema exacto pierda interés en equipos grandes en los que haya muchos módulos por rama.

Otra desventaja del problema exacto es que no se puede preparar off-line una solución inicial para cada punto para agilizar los cálculos. Esto también hace que el método sea más lento (especialmente para ramas de muchos módulos). La forma de obtener una solución inicial a partir de la tensión homopolar de una solución óptima anterior puede no ser la más acertada (como se ha mostrado en el anterior ejemplo). Esto se hace especialmente relevante cuando se trabaja cerca del límite de tensión que el equipo puede modular, pues en estos puntos el rango entre el que puede variarse la tensión homopolar es menor y puede aparecer sobremodulación.

## 7. Variantes

En este capítulo se describen posibles variaciones que se pueden hacer al método propuesto. Principalmente este capítulo se centra en los cambios necesarios que deben llevarse a cabo cuando los módulos no son todos de puentes completos o, simplemente, no son iguales entre sí. También se proponen formas de actuar cuando el método no tiene tiempo suficiente como para converger.

### Convergencia

En ocasiones, especialmente al resolver el problema exacto en convertidores grandes, es posible que el método no tenga suficiente tiempo como para converger. Lo que se propone para estos casos es aplicar la solución a la que se ha llegado a pesar de que no sea la óptima. Incluso cuando exista una solución mejor, una solución en la que se haya iterado varias veces será mejor que una solución escogida sin iterar. Si se está resolviendo el problema exacto, se puede escoger la misma tensión homopolar por la que el método iba para iniciar el cálculo en el siguiente ciclo de control.

Si el convertidor es especialmente grande, otra opción es agrupar varios módulos como si fueran uno solo. Esto favorecerá el equilibrado global del mismo aunque dentro de estos grupos de módulos el equilibrado sea más lento.

### Uso de módulos de semipunte

No todos los convertidores modulares usan puentes completos. Algunos usan módulos de semipunte como el mostrado en la figura 1. El método es capaz de trabajar con semipuentes en lugar de puentes completos e incluso de combinar ambos tipos de módulo. Sin embargo hay que hacer algunos cambios en estos casos.

Un semipunte no modula tensiones negativas sino sólo positivas. Por este motivo su estado nunca es -1. De cara al problema aproximado, los módulos de semipunte no toman el estado -1. Su estado 0 debe considerarse como el estado -1, es decir, saturado al mínimo. Los módulos de semipunte no tienen estados básicos en el problema aproximado, aunque sí pueden modular tensiones de salida básicas en el problema exacto. Cuando se usan sólo semipuentes, el método para resolver el problema aproximado hace todas las iteraciones sumando o restando 1 al estado de todas las ramas. Si se combinan semipuentes con puentes completos, la cantidad que se suma o resta a los estados de cada rama puede cambiar entre 1 y 2 de una iteración a la siguiente, por lo que hay que comprobar cuánto debe aumentarse o disminuirse el estado de los puentes/semipuentes en cada iteración.

De cara al problema exacto, los semipuentes se saturan al mínimo en 0. La forma de obtener la solución inicial (en el paso 3) antes propuesta no es válida tal como se ha descrito si hay semipuentes porque aumenta la casuística. Una posible forma de obtener la solución inicial es la siguiente:

- Obtener la tensión que resta por asignar como la de referencia inicial de la rama más la suma de las tensiones acumuladas de todos los puentes completos (sólo).
- Para el módulo virtual de beneficio  $+\infty$

- Si la tensión que resta por asignar es negativa, dar este valor a la tensión modulada por este módulo virtual y dejar la tensión por asignar  $V_{res}$  a 0. Esto representa sobremodulación negativa.
- Si no, dejar la tensión por asignar igual y asignar un valor nulo a la tensión modulada por este módulo virtual.
- Para los demás módulos, recorriéndolos de mayor a menor beneficio:
  - Si el módulo es el módulo virtual de beneficio  $-\infty$ , asignarle como tensión modulada la que resta por asignar  $X_{k j}=V_{res}$ . Un valor distinto de 0 representa sobremodulación positiva.
  - Si el módulo es un puente completo y la tensión que falta por asignar es mayor que el doble de la tensión del módulo, saturar la tensión de salida de este módulo a su tensión acumulada  $X_{k j}=V_{k j}$  y sustraer de la tensión que resta por asignar el doble de la tensión acumulada en el módulo.
  - Si el módulo es un puente completo y la tensión que falta por asignar está entre 0 y el doble de la tensión del módulo, dar a este módulo como tensión de salida la que resta por asignar menos la tensión acumulada del módulo  $X_{k j}= V_{res} - V_{k j}$  y dar el valor 0 a la tensión que falta por asignar.
  - Si el módulo es un puente completo y la tensión que falta por asignar es 0, saturar la tensión de salida del módulo a menos la tensión acumulada del módulo:  $X_{k j}= - V_{k j}$ .
  - Si el módulo es un semipuerto y la tensión que falta por asignar es mayor la tensión acumulada del módulo, saturar la tensión de salida de este módulo a su tensión acumulada  $X_{k j}=V_{k j}$  y sustraer de la tensión que resta por asignar la tensión acumulada en el módulo.
  - Si el módulo es un semipuerto y la tensión que falta por asignar está entre 0 y la tensión del módulo, dar a este módulo como tensión de salida la que resta por asignar  $X_{k j}= V_{res}$  y dar el valor 0 a la tensión que falta por asignar.
  - Si el módulo es un puente completo y la tensión que falta por asignar es 0, saturar la tensión de salida del módulo 0.

Por lo demás, el método funciona igual con semipuentes.

## Puente múltiple en el centro de la estrella

Si la topología del convertidor es como la mostrada en la figura 4, es decir, si el convertidor cuenta con un puente múltiple del que parten todas las ramas, este puente se trata como un semipuerto en cada rama.

Para comprobarlo se deduce de nuevo la expresión de la función objetivo. Sea  $V_0$  la tensión acumulada en el condensador de este puente múltiple y sean  $S_{10}, S_{20} \dots S_{M0}$  los estados de sus ramas.  $S_{k0}$  vale 1 cuando la rama  $k$  se conecta al positivo del condensador, y 0 cuando se conecta al negativo. Si este puente se pondera como todos los demás, la función que se pretende minimizar es:

$$F = (V_0 - V_{Ref}) + \sum_{k=1}^M \sum_{j=1}^N (V_{k j} - V_{Ref})^2$$

Para minimizar esta función, puesto que no depende directamente de ningún estado, se minimiza su derivada  $f_1$ :

$$\min f_1 = \frac{dF}{dt} = \frac{2}{C} (V_0 - V_{Ref}) \sum_{k=1}^M (S_{0j} \cdot i_k) + \frac{2}{C} \sum_{k=1}^M \sum_{j=1}^N (V_{kj} - V_{Ref}) (S_{kj} \cdot i_k)$$

$$\min f_1 = \frac{dF}{dt} = \frac{2}{C} \sum_{k=1}^M \left( (V_0 - V_{Ref}) \cdot (S_{k0} \cdot i_k) + \sum_{j=1}^N (V_{kj} - V_{Ref}) (S_{kj} \cdot i_k) \right)$$

2 y C son factores comunes positivos que pueden eliminarse. Minimizar la función  $f_2$  es equivalente.

$$\min f_2 = \sum_{k=1}^M i_k \cdot \left( V_{k0} \cdot S_{k0} + \sum_{j=1}^N V_{kj} \cdot S_{kj} \right) - V_{Ref} \cdot \sum_{k=1}^M i_k \cdot \left( S_{k0} + \sum_{j=1}^N S_{kj} \right)$$

Por los mismos motivos que se dieron en el capítulo “2. El problema lineal”, para el problema aproximado sólo el primer término de esta función es relevante mientras que para el problema exacto, sólo lo es el segundo. Se separa  $f_2$  en sus dos componentes.

$$f_2 = -f_{aprox} - f_3$$

$$f_{aprox} = - \sum_{k=1}^M i_k \cdot \left( V_{k0} \cdot S_{k0} + \sum_{j=1}^N V_{kj} \cdot S_{kj} \right)$$

$$f_3 = V_{Ref} \cdot \sum_{k=1}^M i_k \cdot \left( S_{k0} + \sum_{j=1}^N S_{kj} \right)$$

Donde la función  $f_{aprox}$  es la que debe maximizarse para resolver el problema aproximado, y la función  $f_3$  la que corresponde al problema exacto. Como las tensiones de referencia son iguales para todos los módulos, esta tensión es irrelevante, por lo que la función que debe maximizarse para resolver el problema exacto es  $f_{exacto}$ .

$$f_3 = V_{Ref} \cdot f_{exacto}$$

$$f_{exacto} = \sum_{k=1}^M i_k \cdot \left( S_{k0} + \sum_{j=1}^N S_{kj} \right) = \sum_{k=1}^M i_k \cdot \left( \frac{X_{k0}}{V_{k0}} + \sum_{j=1}^N \frac{X_{kj}}{V_{kj}} \right)$$

Los coeficientes de cada estado son los beneficios asociados a dichos estados para el problema aproximado. Como puede comprobarse, los beneficios asociados a los estados  $S_{k0}$  (correspondientes a las ramas del puente múltiple) son los mismos que tendría un semipunto cuyo condensador estuviera cargado a la tensión  $V_0$ :

$$B_{k0} = -V_0 \cdot i_k$$

Para el problema exacto, los beneficios son los coeficientes que acompañan a las tensiones de salida de los módulos  $X_{kj}$ . Como puede verse, el beneficio asociado a la

tensión que debe modular cada rama del puente múltiple es el que corresponde a un semipuente con un condensador cargado a la tensión  $V_0$ :

$$B_{k0} = \frac{i_k}{V_0}$$

Con esto queda demostrado que los puentes múltiples se tratan como un semipuente en cada rama a la que está conectado.

## Referencias de tensiones distintas según los módulos

Otra variante de la topología se da cuando las referencias de tensión acumulada para cada módulo son diferentes. En un caso así no tiene sentido utilizar el método del problema aproximado ya que (salvo que las proporciones entre las tensiones de referencia sean enteras) los puntos de un mismo grupo no tendrán representaciones cercanas en espacio de estado. Así pues sólo se plantea el desarrollo para el problema exacto.

La función objetivo inicial  $F$  que se desea minimizar es:

$$F = \sum_{k=1}^M \sum_{j=1}^N (V_{kj} - V_{Ref\ kj})^2$$

Como en los anteriores casos, se deriva esta función y se minimiza la derivada.

$$\min f_1 = \frac{dF}{dt} = \frac{2}{C} \sum_{k=1}^M \sum_{j=1}^N (V_{kj} - V_{Ref\ kj})(S_{kj} \cdot i_k)$$

Se elimina el factor común  $2/C$ :

$$\min f_2 = \sum_{k=1}^M \sum_{j=1}^N V_{kj} \cdot S_{kj} \cdot i_k - \sum_{k=1}^M \sum_{j=1}^N V_{Ref\ kj} \cdot S_{kj} \cdot i_k$$

Como en los casos anteriores, el primer término (que no depende de las tensiones de referencia) es constante y puede eliminarse. El objetivo ahora es maximizar la función  $f_3$ :

$$\max f_3 = \sum_{k=1}^M \sum_{j=1}^N V_{Ref\ kj} \cdot S_{kj} \cdot i_k = \sum_{k=1}^M \sum_{j=1}^N V_{Ref\ kj} \cdot \frac{X_{kj}}{V_{kj}} \cdot i_k$$

La función  $f_3$  no puede simplificarse más. El coeficiente que acompaña ahora a las tensiones moduladas a la salida de los módulos es el beneficio asociado a dichos módulos:

$$B_{kj} = i_k \cdot \frac{V_{Ref\ kj}}{V_{kj}}$$

Esta es la única diferencia con respecto al problema exacto. La fórmula para los beneficios depende de las tensiones de referencia. A pesar de no ser una gran diferencia, supone que los módulos de una misma rama no puedan ordenarse sólo en función de su tensión, sino que hay que aplicar unas proporciones debido a las referencias. Esto puede aún implementarse en las FPGAs midiendo las tensiones en proporción a sus referencias. Esta práctica es habitual, ya que normalmente se procura adaptar las medidas tomadas para aprovechar al máximo los rangos de valores entre los que estas medidas pueden estar.

## Capacidades diferentes

La última variante que se propone es el caso en que las capacidades de los módulos no sean iguales entre sí. Generalmente, esto viene ligado a una tensión de referencia distinta, ya que normalmente los módulos con distintas capacidades tienen también funciones distintas y, con ello, referencias diferentes.

Por otro lado, debido a la formulación de la función objetivo, algunas de las ventajas del problema aproximado sobre el exacto se pierden. Por ello, se presenta aquí sólo el caso en que se use el método para el problema exacto. No obstante, es posible formular el problema aproximado, simplemente no es tan ventajoso resolverlo.

La función objetivo inicial F que se desea minimizar es:

$$F = \sum_{k=1}^M \sum_{j=1}^N (V_{kj} - V_{Ref\ kj})^2$$

Se deriva esta función y se minimiza la derivada.

$$\min f_1 = \frac{dF}{dt} = 2 \sum_{k=1}^M \sum_{j=1}^N \frac{(V_{kj} - V_{Ref\ kj})(S_{kj} \cdot i_k)}{C_{kj}}$$

Se elimina el factor común 2:

$$\min f_2 = \sum_{k=1}^M i_k \cdot \sum_{j=1}^N \frac{V_{kj} \cdot S_{kj}}{C_{kj}} - \frac{V_{Ref\ kj} \cdot S_{kj}}{C_{kj}}$$

Se simplifica  $f_2$ :

$$\begin{aligned} f_2 &= \sum_{k=1}^M i_k \cdot \sum_{j=1}^N \frac{X_{kj}}{C_{kj}} - \frac{V_{Ref\ kj} \cdot X_{kj}}{C_{kj} \cdot V_{kj}} = \sum_{k=1}^M \sum_{j=1}^N i_k \cdot \left( \frac{X_{kj} \cdot V_{kj}}{C_{kj} \cdot V_{kj}} - \frac{V_{Ref\ kj} \cdot X_{kj}}{C_{kj} \cdot V_{kj}} \right) = \\ &= \sum_{k=1}^M \sum_{j=1}^N i_k \cdot \left( \frac{V_{kj} - V_{Ref\ kj}}{C_{kj} \cdot V_{kj}} \right) \cdot X_{kj} \end{aligned}$$



Puesto que el método estaba pensado para una función objetivo que se busca maximizar, se cambia el signo a  $f_2$ .

$$f_{exacto} = -f_2 = \sum_{k=1}^M \sum_{j=1}^N i_k \cdot \left( \frac{V_{Ref\ k\ j} - V_{k\ j}}{C_{k\ j} \cdot V_{k\ j}} \right) \cdot X_{k\ j}$$

Los beneficios de los módulos son:

$$B_{k\ j} = i_k \cdot \left( \frac{V_{Ref\ k\ j} - V_{k\ j}}{C_{k\ j} \cdot V_{k\ j}} \right)$$

Como puede comprobarse, tener capacidades distintas en los módulos supone un gran inconveniente, ya que para ordenar los módulos de una rama en función de sus beneficios, no basta con ordenarlos en función de alguna otra medida ya tomada. En lugar de eso, es necesario llevar a cabo dos multiplicaciones, una resta y una división por cada módulo. Esto representa una dificultad ya que si bien un microprocesador puede tener capacidad para llevar estos cálculos a cabo con relativa velocidad, la ordenación de estos valores le llevará bastante tiempo. De la misma manera, dispositivos lógicos como las FPGAs, que pueden ordenar los beneficios con facilidad, tendrán dificultades en llevar a cabo todos estos cálculos. La combinación de ambos tipos de dispositivos requiere el paso de información entre ellos, lo que también lleva tiempo.

A pesar de todo esto, hay un caso particular en el que esta expresión se simplifica considerablemente. Este caso es en el que se combinan módulos con baterías o con supercondensadores y módulos sólo con condensadores. La capacidad de las baterías y de los supercondensadores es tan grande con respecto a la de los condensadores que puede considerarse infinita. Al hacerlo, los beneficios de los módulos con baterías o supercondensadores es despreciable en comparación con el de los otros módulos:

$$B_{Bat} = 0$$

La función objetivo entonces queda como sigue:

$$f_{exacto} = \sum_{k=1}^M \sum_{\substack{j=1 \\ C_{k\ j} \neq \infty}}^N i_k \cdot \left( \frac{V_{Ref\ k\ j} - V_{k\ j}}{C_{k\ j} \cdot V_{k\ j}} \right) \cdot X_{k\ j}$$

Si los condensadores todos los módulos sin baterías ni supercondensadores tienen la misma capacidad, entonces se puede simplificar aún más:

$$f_{exacto} = \frac{1}{C} \sum_{k=1}^M \sum_{\substack{j=1 \\ C_{k\ j} \neq \infty}}^N i_k \cdot \left( \frac{V_{Ref\ k\ j} - V_{k\ j}}{V_{k\ j}} \right) \cdot X_{k\ j}$$

Se elimina  $1/C$  por ser un factor común positivo. El beneficio para los módulos con condensadores es:

$$B_{kj} = i_k \cdot \left( \frac{V_{Ref\ kj} - V_{kj}}{V_{kj}} \right) = i_k \cdot \left( \frac{V_{Ref\ kj}}{V_{kj}} - 1 \right) \quad \forall C_{kj} \neq \infty$$

Si además las referencias de tensión son las mismas para todos los módulos con condensadores, entonces la ordenación puede hacerse igual que con el método para resolver el problema exacto (ordenando en función de la tensión almacenada) y tratando los módulos con batería como módulos con condensadores cuya tensión es la de referencia. Si las referencias no son iguales pero las tensiones se almacenan en proporción a sus referencias, entonces también pueden ordenarse en las FPGAs de esta misma manera.

## 8. Resultados

El método propuesto ha sido simulado en PSIM y en PSCAD con buenos resultados. También ha sido implementado en un convertidor AC/DC modular en el que se combinaban baterías y condensadores permitiendo estabilizar las tensiones de estos últimos.

### Simulaciones en PSIM

Inicialmente, el método ha sido simulado en PSIM para un convertidor STATCOM como el mostrado en las figuras 3 y 18. La figura 19 muestra el esquema completo en PSIM.

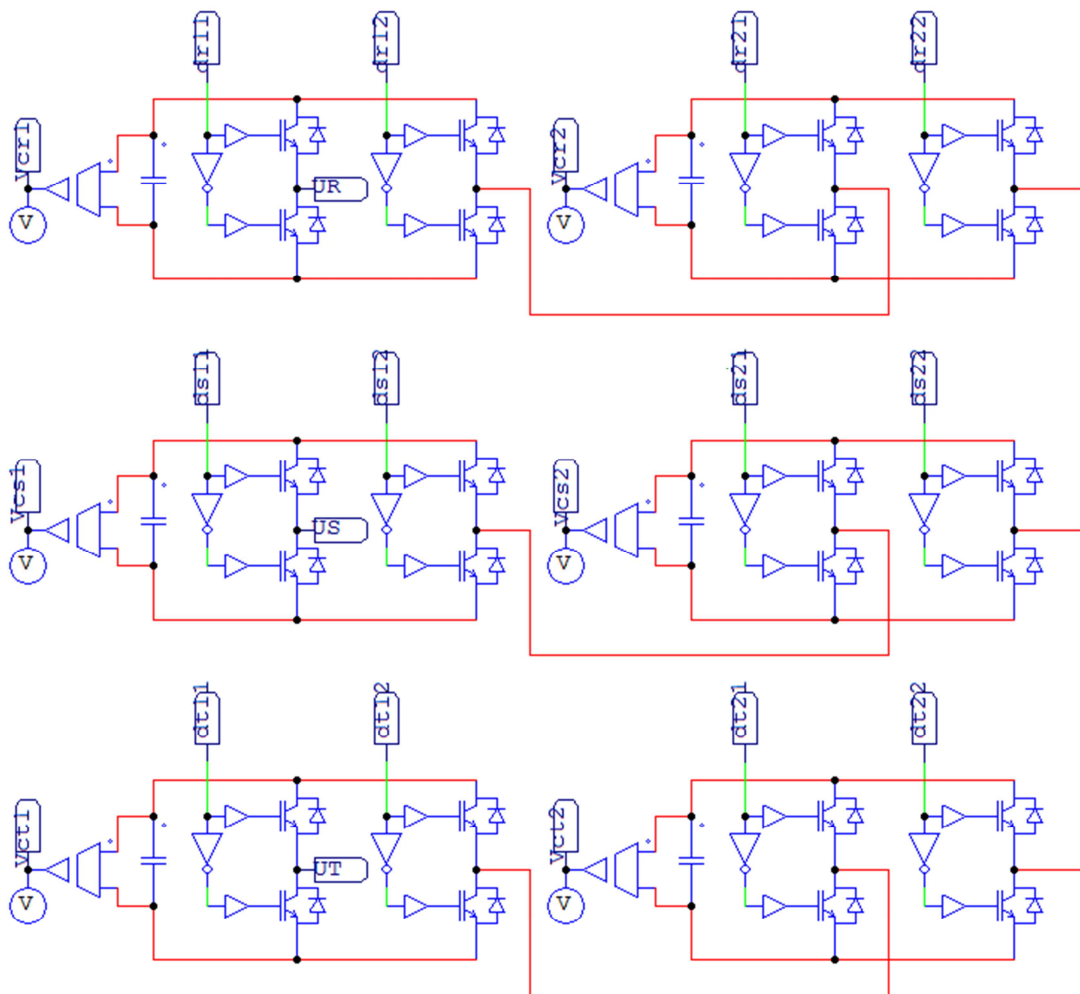


Figura 18

El convertidor consta de tres ramas conectadas en estrella, cada rama compuesta por dos módulos de puente completo con condensadores de 2.2mF de 200V de tensión nominal. El convertidor se conecta a una red trifásica de 400V de tensión efectiva de línea y 50Hz de frecuencia a través de una bobina de 1mH por rama.

De entre todas las pruebas llevadas a cabo para validar el método, se ha considerado que la más representativa es en la que se dan tensiones iniciales distintas a cada

condensador. En la que se muestra en la figura 20, los condensadores de la primera rama empiezan cargados a 190V y 175V respectivamente; los de la segunda, a 180V y 210V, y los de la tercera, a 230V y 250V. Obsérvese que los módulos de la tercera rama están más cargados que los de la segunda, que a su vez están más cargados que los de la primera. Un método de equilibrado en que sólo se ordenen los módulos de cada rama pero no se tenga en cuenta la redundancia trifásica no podría equilibrar los módulos de una rama con los de otra, sino que el equilibrado entre ramas se produciría debido a los efectos parásitos como las resistencias, que harían descargarse más a los más cargados.

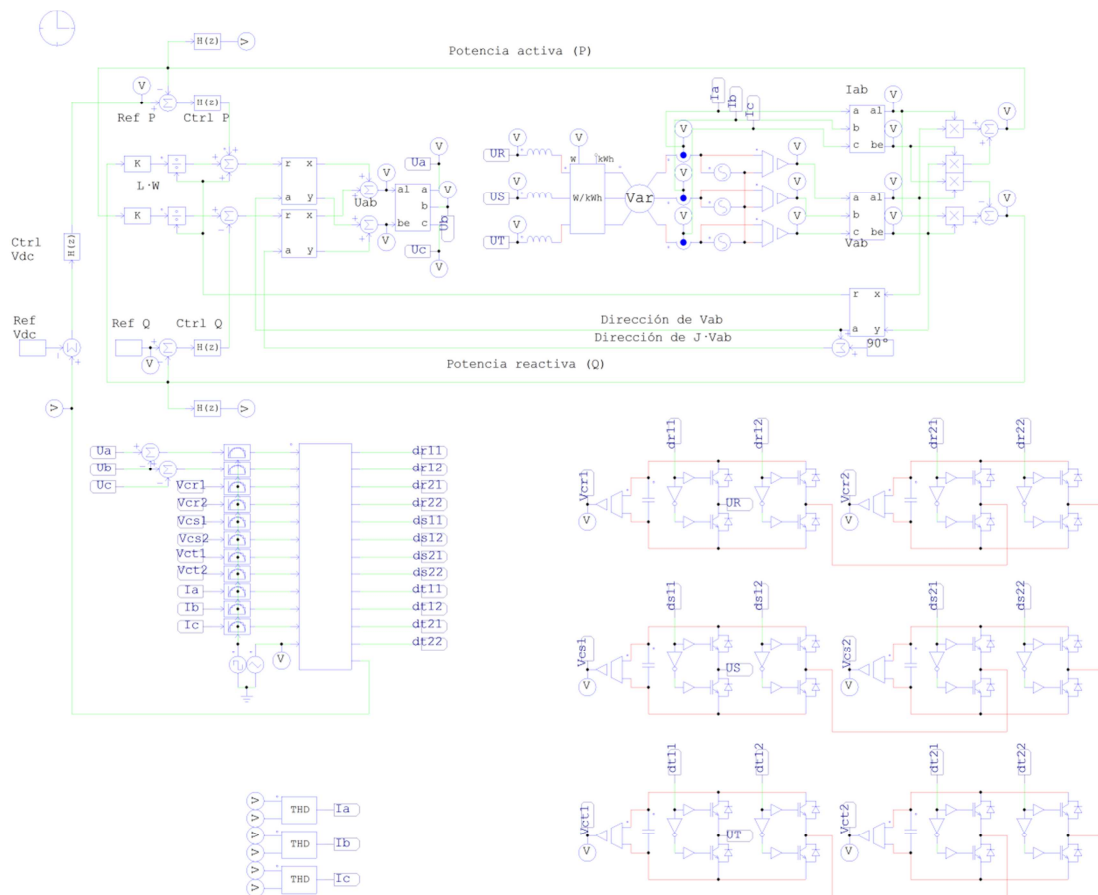


Figura 20

En esta simulación, se da una referencia de potencia reactiva de 20kVA (hacia la red) y se controla la potencia activa para que la tensión media de los condensadores tienda a 200V. Este control de tensión media es global, no se tienen en cuenta las ramas por separado para dar más o menos potencia activa en cada caso. Para esta prueba se usa el algoritmo propuesto para resolver el problema de equilibrado aproximado.

Como puede verse en la figura 20, las tensiones de los condensadores de los módulos de una misma rama se equiparan muy rápidamente. Además, en menos de 0.01 segundos las sumas de las tensiones de los tres módulos oscilan en torno al mismo valor: 200V. Estas oscilaciones son un rizado que se producen al doble de la frecuencia de la red, y que es normal en todos los convertidores de potencia cuando se intercambia potencia reactiva con la red.

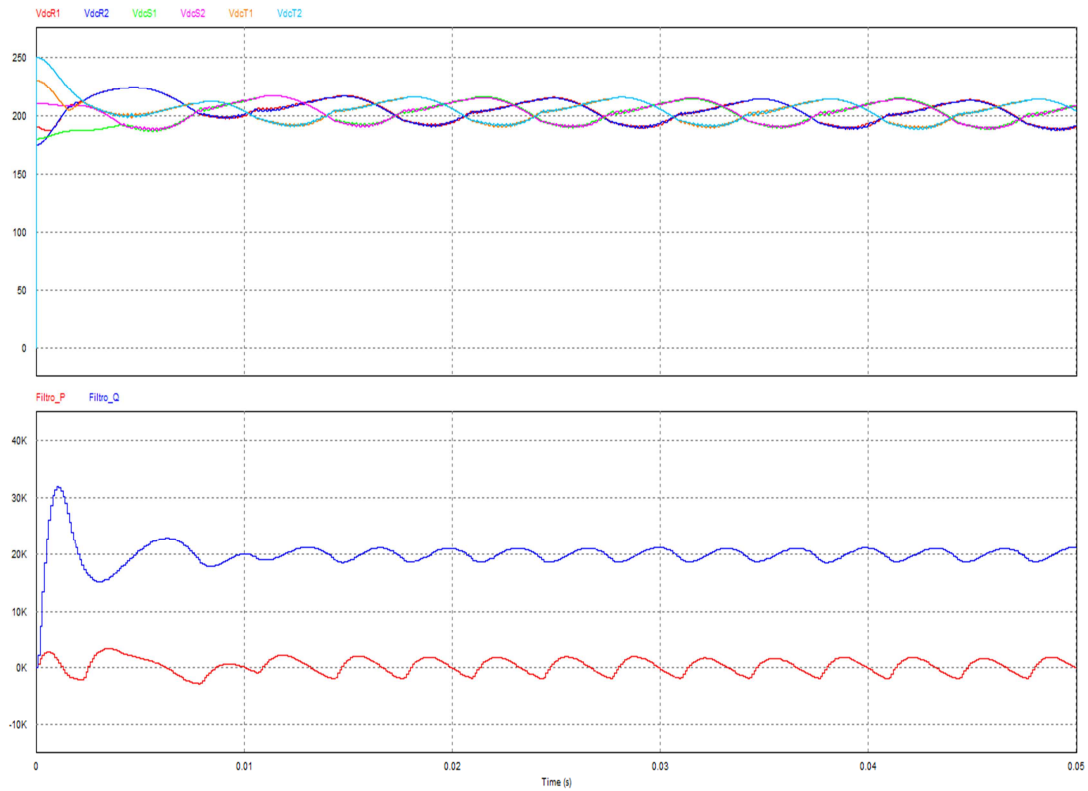


Figura 20

La misma prueba se lleva a cabo con el método para resolver el problema exacto, con los resultados mostrados en la figura 21:

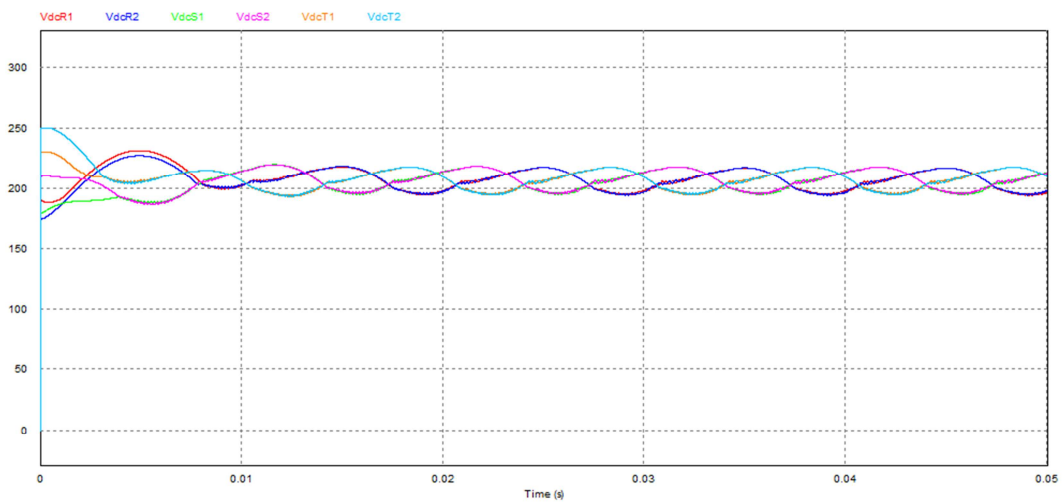


Figura 21

Como puede comprobarse el resultado es muy similar, si bien en este caso el equilibrado entre ramas se produce un poco antes a costa de que el equilibrado entre los módulos de la primera rama tarde un poco más. Si se invierte el sentido de la potencia

reactiva, es decir, si se extrae potencia reactiva de la red, el resultado para el problema exacto es el mostrado en la figura 22:

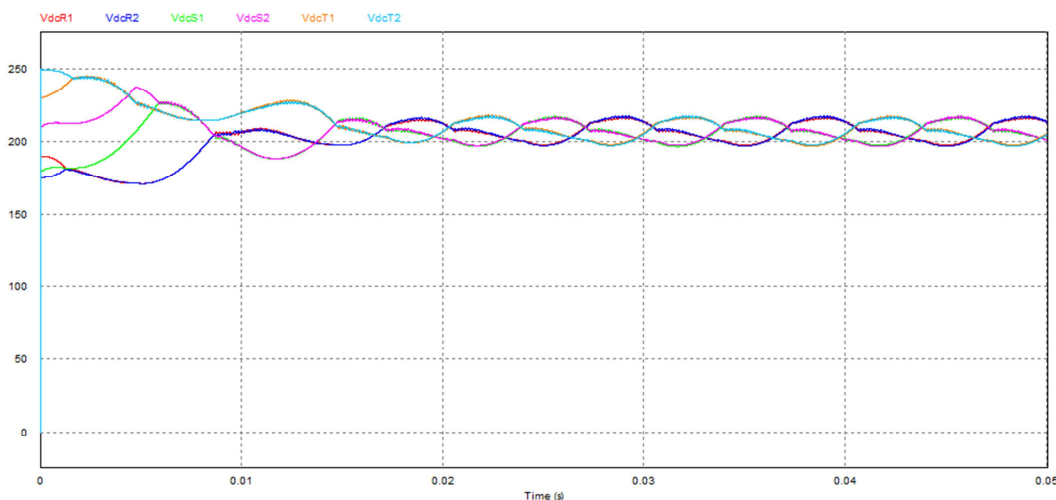


Figura 22

Con este sentido de la potencia reactiva se tarda más en equilibrar los condensadores. Esto se debe a que la bobina a la salida consume parte de la reactiva, de modo que los módulos mueven menos potencia reactiva. De forma similar, cuando la potencia reactiva se envía a la red, los módulos deben proporcionar la reactiva que va a la red más la que consume la bobina, por lo que mueven más potencia reactiva. Cuanta más potencia (total) se mueva en los módulos, más facilidad tendrán éstos para equilibrarse.

## Simulaciones en PSCAD y resultados experimentales

El método propuesto para resolver el problema exacto se ha sido simulado y posteriormente probado como parte del proyecto europeo “Zinc-Air Flow Batteries for Electrical Power Distribution Networks” (o Powair). El convertidor al que se ha aplicado tiene una topología como la mostrada en la figura 23: dos “estrellas” de 3 ramas cada una. Las tres conexiones de salida tienen una tensión comprendida entre la del punto central de una estrella y el de la otra estrella. Todos los módulos son de medio puente. El último módulo de cada rama de la estrella negativa está conectado a una única batería, lo que asemeja este conjunto a un módulo de puente triple conectado a una batería.

Durante el desarrollo del proyecto se probó a equilibrar los módulos de cada rama por separado ordenándolos en función de las tensiones de sus condensadores y usando los más cargados o los más descargados según correspondiera para modular la tensión de la rama. El equilibrado entre ramas se llevaba a cabo mediante otro algoritmo que no es relevante para el presente proyecto. Si bien este sistema dio buenos resultados cuando el convertidor se utilizaba exclusivamente para intercambiar reactiva con la red a la que se conectaba, su uso para intercambiar potencia activa entre la red y la batería no fue satisfactorio. De forma natural, cuando la batería debía inyectar potencia en la red, los condensadores de los módulos de la estrella a la que se conectaba la batería tendían a dar a la red parte de esta potencia. Aun cuando se utilizaba potencia reactiva para dar a

los módulos con condensadores la posibilidad de recuperar esta potencia, las oscilaciones de tensión de estos módulos eran demasiado altas, lo que llevaba a la inestabilidad del convertidor. Aumentar la cantidad de potencia reactiva necesaria para que los condensadores no se descargaran aumentaba también sus oscilaciones, haciendo que la rama no siempre fuera capaz de modular la tensión de salida necesaria.

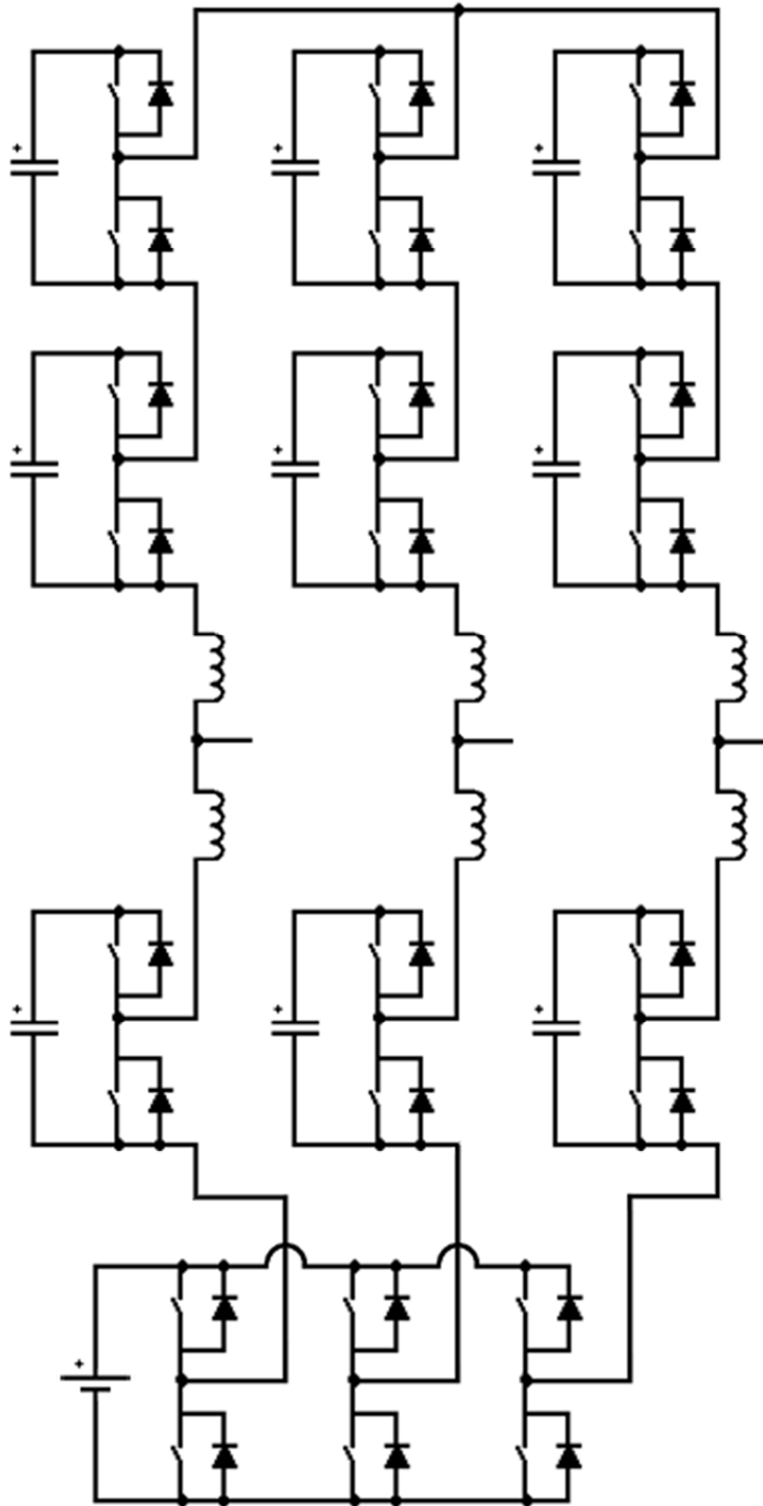


Figura 23

Se decidió por ello sustituir este sistema por el método descrito en el presente proyecto para equilibrar las tensiones de los condensadores. Este método equilibraba independientemente las estrellas, pero utilizaba la tensión homopolar de cada conjunto de tres ramas para equilibrar las tensiones de sus módulos entre sí. Para este caso se utilizaron las variantes descritas para módulos de semipunto, puente múltiple y condensadores de capacidad distinta combinadas. Se dieron también referencias de potencia reactiva a intercambiar entre la mitad positiva y la mitad negativa del convertidor de modo que esta potencia reactiva fuera proporcional a la desviación de las tensiones con respecto a su referencia. De esta manera, no se usaba una cantidad excesivamente grande de potencia reactiva y además ésta no se intercambiaba con la red, pudiendo así dar el convertidor a la red una potencia reactiva bajo demanda. Esta opción fue simulada en PSCAD con el esquema mostrado en la figura 24.

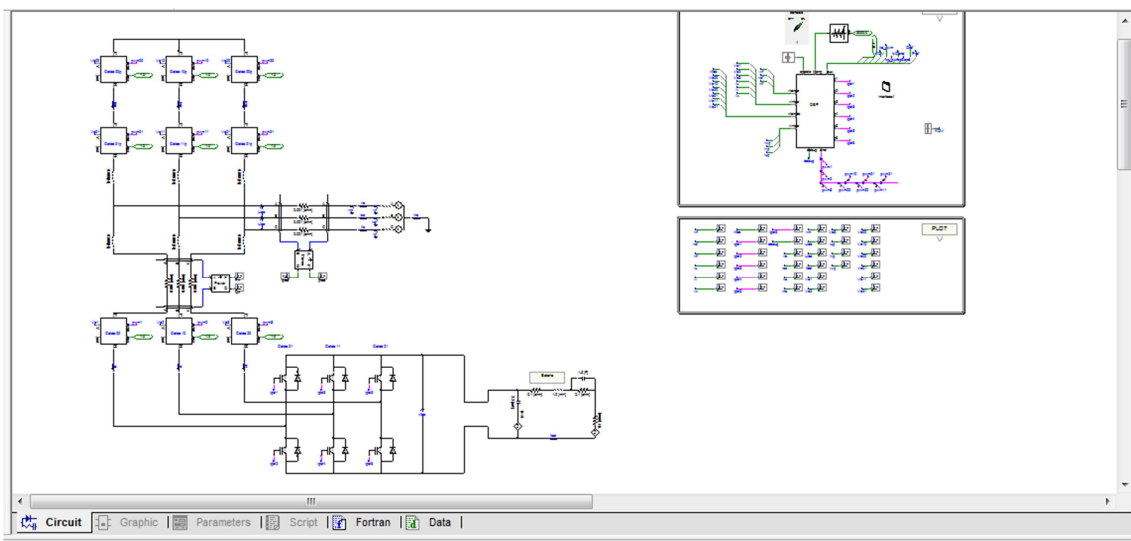


Figura 24

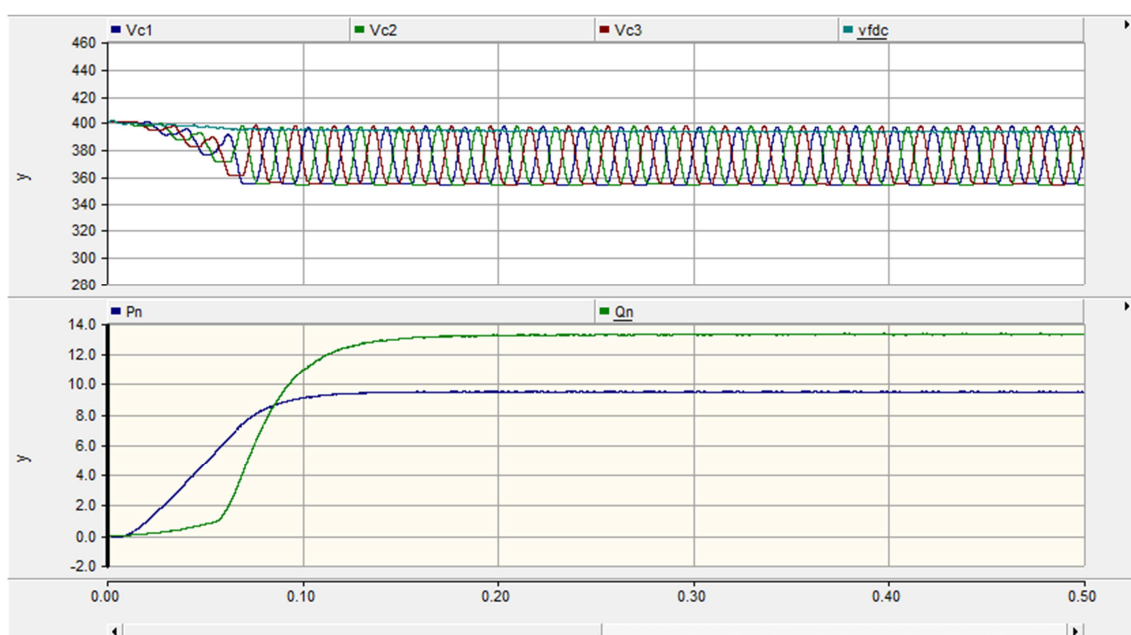


Figura 25



En la figura 25 se muestran las gráficas correspondientes a la mitad inferior del convertidor. En la gráfica superior puede verse la evolución de las tensiones de los condensadores de los tres módulos sin batería en azul, verde y rojo, y la de la batería en cian. En la gráfica inferior se representa en azul la potencia activa y en verde la potencia reactiva que sale de los módulos (excluidas las bobinas). Como puede observarse, para una tensión nunca superior a 400V se obtiene una proporción de 1.4kVAR de potencia reactiva por cada 1kW de potencia activa.

De acuerdo con [6], para una topología monofásica con dos módulos en la que uno de ellos está conectado a una batería y el otro está flotante, la proporción de potencia activa y reactiva está limitada para mantener el condensador flotante a su tensión de referencia. Esto se debe a que el módulo con el condensador flotante sólo puede dar potencia reactiva. Así pues, si la tensión que debe modular la rama es mayor que la del módulo con batería, el módulo con el condensador flotante debe dar una componente de la tensión modulada, la cual debe tener un fasor que esté a 90° con respecto a la corriente. Esto hace que según las tensiones de los módulos y la tensión que debe dar la rama, existe un valor mínimo de potencia reactiva para cada potencia activa. Si esto se aplica al convertidor antes citado, con módulos de semipunto de 400V (que pueden tratarse como equivalentes a puentes completos de 200V) y tensión de fase de 230V efectivos, la proporción mínima es de 1.4kVAR/1kW. Sin embargo, esto es sin tener en cuenta la bobina (que exigirá subir la tensión modulada y con ella la proporción reactiva/activa). Además, como ya se ha visto en la simulación, 400V no es una tensión a la que los condensadores se mantengan constantes, sino más bien el límite superior al que llegan. La proporción que debería alcanzarse como mínimo en un convertidor monofásico de acuerdo con [6] sería mayor que 1.4kVAR/1kW. El uso del método propuesto permite rebajar un poco esta proporción, dándole al convertidor un rango ligeramente mayor de factor de potencia.

El convertidor simulado ha sido puesto en marcha posteriormente con buenos resultados. Por tratarse de un equipo con tan pocos módulos, no se han empleado FPGAs, sino sólo un DSP. El tiempo necesario para llegar a la solución es suficientemente corto en este caso.

En la puesta en marcha la proporción 1.4kVAR/1kW no ha sido alcanzable debido a cuestiones técnicas externas al convertidor (como calidad de señal, armónicos y efectos similares). La proporción a la que se ha llegado ha sido 1.8kVAR/1kW. No obstante y como ya se ha comentado, para las tensiones manejadas, el equilibrado sin tener en cuenta la tensión homopolar no ha sido estable ni siquiera en las simulaciones.

## 9. Conclusiones y Bibliografía

### Conclusiones

El problema de equilibrado de condensadores en convertidores en cascada ha sido tratado en múltiples ocasiones. En este proyecto se ha desarrollado un método que busca la forma óptima de modular tanto para Space Vector como para PWM tensiones para equipos de 3 ó más fases haciendo uso de la redundancia tanto a nivel de rama como dada por la tensión homopolar.

Este método de equilibrado está basado en la resolución de un problema de optimización lineal con restricciones. El método es similar en ciertos aspectos al Simplex si bien converge mucho más rápido que éste último. Para modulaciones de tipo Space Vector el problema puede formularse de forma aproximada, lo cual hace incluso más rápida su resolución al poder llevarse a cabo usando sólo números enteros. De forma más general puede formularse el problema exacto en el que la resolución es algo más lenta.

Los pasos del método pueden ser llevados a cabo por conjuntos DSP-FPGAs u otros conjuntos de controladores en que exista un dispositivo capaz de realizar operaciones con números flotantes y trabajar con estructuras propias de diagramas de flujo (el DSP) y uno o más dispositivos capaces de llevar a cabo operaciones sencillas con números enteros (sumas, restas, comparaciones y desplazamientos principalmente) y trabajar con varias tareas en paralelo (las FPGAs). Los pasos del método están preparados para poder ser llevados a cabo por este conjunto de dispositivos de forma que cada uno de ellos lleve a cabo los pasos que tiene más facilidad para realizar. Es común utilizar DSPs y FPGAs para trabajar con convertidores de potencia, de modo que el método propuesto se adapta muy bien a los sistemas de control actuales.

El método admite variantes en las topologías de los convertidores y en los parámetros de diseño de los mismos. Así pues permite combinar módulos de semipunto con módulos de puente completo y con módulos de puente triple o múltiple. También permite combinar módulos con batería o fuentes de tensión con módulos con sólo condensadores. Por último, es posible usar referencias de tensión diferentes para cada módulo. Pese a la complicación matemática que esto supone, sigue siendo posible evitar cálculos excesivamente complejos en las FPGAs.

El método propuesto ha sido probado tanto a nivel de simulación como en un equipo real, obteniendo buenos resultados en ambos campos. Se ha comprobado que el uso de este método mejora ligeramente el factor de potencia alcanzable en equipos en que se combinen módulos con y sin batería de acuerdo con lo expuesto en [6].

Entre las posibles líneas de investigación posteriores se pueden mencionar:

- el cálculo de la potencia reactiva necesaria para el equilibrado de condensadores,
- la aplicación a convertidores más complejos en los que existan restricciones de tensión entre ramas más allá de las tensiones de línea y

## 9. Conclusiones y Bibliografía

### Conclusiones

El problema de equilibrado de condensadores en convertidores en cascada ha sido tratado en múltiples ocasiones. En este proyecto se ha desarrollado un método que busca la forma óptima de modular tanto para Space Vector como para PWM tensiones para equipos de 3 ó más fases haciendo uso de la redundancia tanto a nivel de rama como dada por la tensión homopolar.

Este método de equilibrado está basado en la resolución de un problema de optimización lineal con restricciones. El método es similar en ciertos aspectos al Simplex si bien converge mucho más rápido que éste último. Para modulaciones de tipo Space Vector el problema puede formularse de forma aproximada, lo cual hace incluso más rápida su resolución al poder llevarse a cabo usando sólo números enteros. De forma más general puede formularse el problema exacto en el que la resolución es algo más lenta.

Los pasos del método pueden ser llevados a cabo por conjuntos DSP-FPGAs u otros conjuntos de controladores en que exista un dispositivo capaz de realizar operaciones con números flotantes y trabajar con estructuras propias de diagramas de flujo (el DSP) y uno o más dispositivos capaces de llevar a cabo operaciones sencillas con números enteros (sumas, restas, comparaciones y desplazamientos principalmente) y trabajar con varias tareas en paralelo (las FPGAs). Los pasos del método están preparados para poder ser llevados a cabo por este conjunto de dispositivos de forma que cada uno de ellos lleve a cabo los pasos que tiene más facilidad para realizar. Es común utilizar DSPs y FPGAs para trabajar con convertidores de potencia, de modo que el método propuesto se adapta muy bien a los sistemas de control actuales.

El método admite variantes en las topologías de los convertidores y en los parámetros de diseño de los mismos. Así pues permite combinar módulos de semipunto con módulos de puente completo y con módulos de puente triple o múltiple. También permite combinar módulos con batería o fuentes de tensión con módulos con sólo condensadores. Por último, es posible usar referencias de tensión diferentes para cada módulo. Pese a la complicación matemática que esto supone, sigue siendo posible evitar cálculos excesivamente complejos en las FPGAs.

El método propuesto ha sido probado tanto a nivel de simulación como en un equipo real, obteniendo buenos resultados en ambos campos. Se ha comprobado que el uso de este método mejora ligeramente el factor de potencia alcanzable en equipos en que se combinen módulos con y sin batería de acuerdo con lo expuesto en [6].

Entre las posibles líneas de investigación posteriores se pueden mencionar:

- el cálculo de la potencia reactiva necesaria para el equilibrado de condensadores,
- la aplicación a convertidores más complejos en los que existan restricciones de tensión entre ramas más allá de las tensiones de línea y

- la simplificación del método cuando éste se aplica a convertidores con un número de módulos por rama muy elevado (más de 100) para facilitar su convergencia a tiempo.

## Referencias

- [1] An Innovative Modular Multilevel Converter Topology Suitable for a Wide Power Range (A. Lesnicar, and R. Marquardt) IEEE BOLOGNA POWERTECH CONFERENCE, JUNE 2003
- [2] DC Link Capacitor Voltage Balancing in a Three-Phase Diode Clamped Inverter Controlled by a Direct Space Vector of Line-to-Line Voltages (O. Bouhali, B. Francois E. M. Berkouk, and C. Saudemont) IEEE TRANSACTIONS ON POWER ELECTRONICS, VOL. 22, NO. 5, SEPTEMBER 2007
- [3] Unidimensional Modulation Technique for Cascaded Multilevel Converters (Jose I. Leon, Sergio Vazquez, Samir Kouro, Leopoldo G. Franquelo, Juan M. Carrasco, and Jose Rodriguez) IEEE TRANSACTIONS ON INDUSTRIAL ELECTRONICS, VOL. 56, NO. 8, AUGUST 2009
- [4] Multidimensional Modulation Technique for Cascaded Multilevel Converters (Jose Ignacio Leon, Samir Kouro, Sergio Vazquez, Ramon Portillo, Leopoldo Garcia Franquelo, Juan Manuel Carrasc, and Jose Rodriguez) IEEE TRANSACTIONS ON INDUSTRIAL ELECTRONICS, VOL. 58, NO. 2, FEBRUARY 2011
- [5] Analysis of the Power Balance in the Cells of a Multilevel Cascaded H-Bridge Converter (Sergio Vazquez, Jose I. Leon, Juan M. Carrasco, Leopoldo G. Franquelo, Eduardo Galvan, Manuel Reyes, Member, IEEE, Juan A. Sanchez and Eugenio Dominguez) IEEE TRANSACTIONS ON INDUSTRIAL ELECTRONICS, VOL. 57, NO. 7, JULY 2010
- [6] DC-Voltage-Ratio Control Strategy for Multilevel Cascaded Converters Fed With a Single DC Source (Sergio Vazquez, Jose I. Leon, Leopoldo G. Franquelo, Jose J. Padilla, and Juan M. Carrasco) IEEE TRANSACTIONS ON INDUSTRIAL ELECTRONICS, VOL. 56, NO. 7, JULY 2009



## Anexo 1: Tabla de soluciones iniciales

En este anexo se da una posible solución inicial para la resolución del problema aproximado con el método propuesto. Estas soluciones están pensadas para un convertidor como el mostrado en la figura 3, con 3 ramas y 2 módulos por rama.

La figura 26 indica qué solución inicial se corresponde con cada uno de los 61 grupos de Space Vector que el convertidor puede dar.

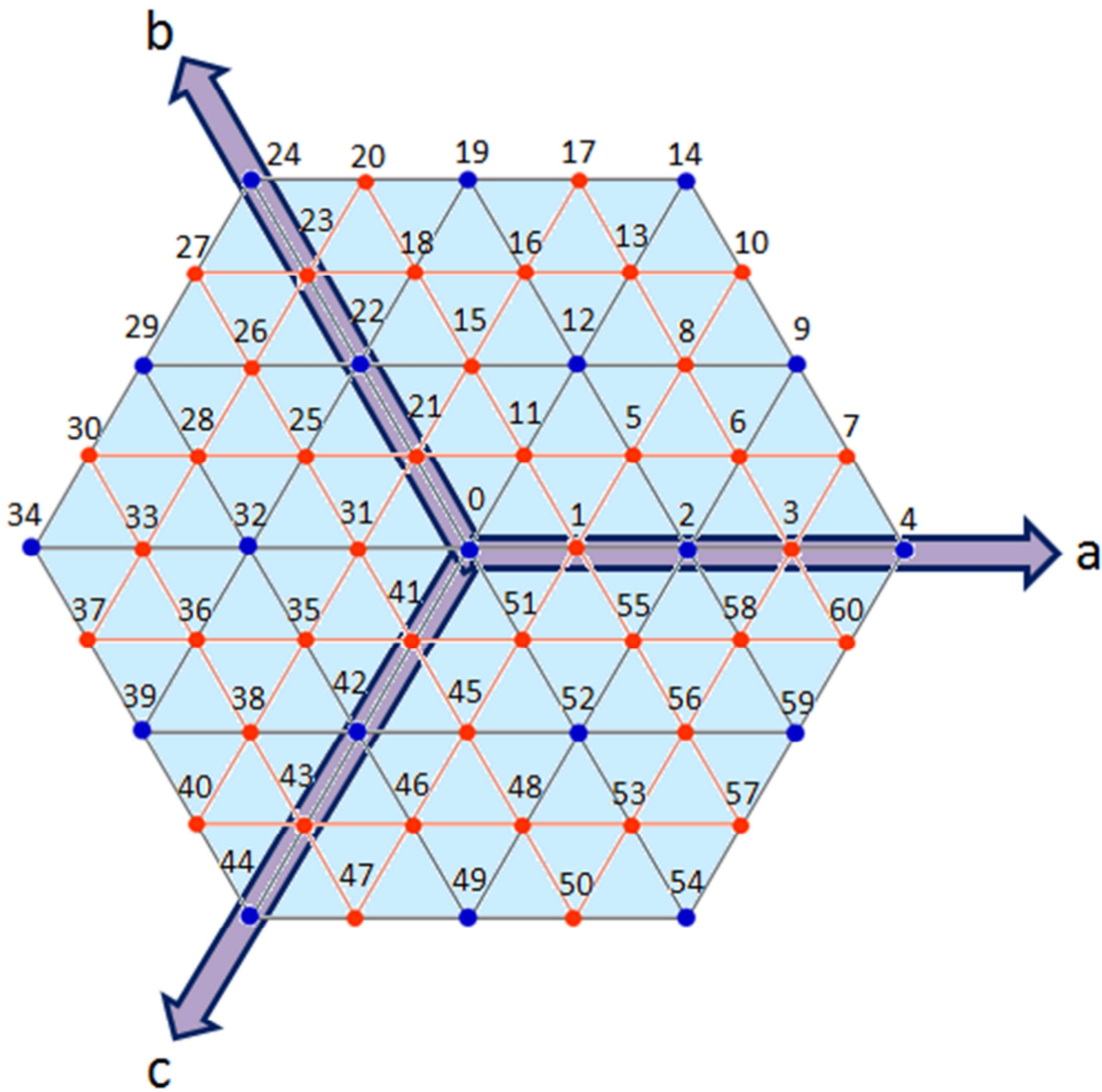


Figura 26

$$0: \begin{pmatrix} +1 & +1 & +1 \\ +1 & +1 & +1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$



$$46: \begin{pmatrix} +1 & +1 & +1 \\ +1 & 0 & +1 \\ -1 & -1 & +1 \end{pmatrix}$$

$$47: \begin{pmatrix} +1 & +1 & +1 \\ 0 & -1 & +1 \\ -1 & -1 & +1 \end{pmatrix}$$

$$48: \begin{pmatrix} +1 & +1 & +1 \\ +1 & -1 & +1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$49: \begin{pmatrix} +1 & +1 & +1 \\ +1 & +1 & -1 \\ -1 & +1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$50: \begin{pmatrix} +1 & +1 & +1 \\ +1 & -1 & +1 \\ 0 & -1 & +1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$51: \begin{pmatrix} +1 & +1 & +1 \\ +1 & 0 & +1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$52: \begin{pmatrix} +1 & +1 & +1 \\ +1 & -1 & +1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$53: \begin{pmatrix} +1 & +1 & +1 \\ +1 & -1 & +1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$54: \begin{pmatrix} +1 & +1 & +1 \\ +1 & -1 & +1 \\ +1 & -1 & +1 \end{pmatrix}$$

$$55: \begin{pmatrix} +1 & +1 & +1 \\ +1 & 0 & +1 \\ 0 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$56: \begin{pmatrix} +1 & +1 & +1 \\ +1 & -1 & +1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$57: \begin{pmatrix} +1 & +1 & +1 \\ +1 & -1 & +1 \\ +1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$58: \begin{pmatrix} +1 & +1 & +1 \\ +1 & 0 & +1 \\ +1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$59: \begin{pmatrix} +1 & +1 & +1 \\ +1 & -1 & +1 \\ +1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$60: \begin{pmatrix} +1 & +1 & +1 \\ +1 & -1 & 0 \\ +1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Los grupos del hexágono más cercano al origen (1, 11, 21, 31, 41 y 51) convergen en un máximo de 2 iteraciones. Los grupos de la periferia (4, 7, 9, 10, 14, 17, 19, 20, 24, 27, 29, 30, 34, 37, 39, 40, 44, 47, 49, 50, 54, 57, 59 y 60) no requieren ninguna iteración ya que no tienen puntos redundantes. Los restantes puntos convergen en un máximo de una iteración.