

## Sobre la regularidad, unicidad y justificación asintótica del problema de Ecuaciones Primitivas del Océano

F. GUILLÉN-GONZÁLEZ<sup>1</sup> M.A. RODRÍGUEZ-BELLIDO<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Departamento de Ecuaciones Diferenciales y Análisis Numérico,  
Universidad de Sevilla,

<sup>2</sup> Departamento de Matemática Aplicada I,  
Universidad de Sevilla,

guillen@numer.us.es, angeles@us.es

### Resumen

En este trabajo exponemos, y comentamos brevemente, los resultados obtenidos en la Tesis Doctoral de M. A. Rodríguez Bellido, dirigida por F. Guillén González, [15], sobre existencia, unicidad, regularidad y comportamiento asintótico en tiempo para las Ecuaciones Primitivas del Océano con condición de Dirichlet homogénea en el fondo, así como la obtención (a partir de las ecuaciones de Navier-Stokes), regularidad y unicidad de un nuevo modelo de Ecuaciones Primitivas con nuevas condiciones de contorno. Previamente se expone el marco físico y matemático en el que se encuadran dichas ecuaciones, así como los resultados que con anterioridad se conocían sobre este tema, prestando especial interés en la mejora que suponen los nuevos resultados de [15] sobre los ya existentes.

**Palabras clave:** *Ecuaciones Primitivas, existencia, unicidad, regularidad, comportamiento asintótico, condiciones de contorno de tipo Dirichlet, condiciones de contorno de tipo Navier.*

**Clasificación por materias AMS:** *35Q30, 35B40, 76D05*

## 1 Introducción

Si observamos nuestro planeta, veremos que al menos dos terceras partes están cubiertas por océanos, y todo él rodeado de la atmósfera. No es, por tanto, extraño que desde principios del siglo XIX algunos científicos, como Pierre

---

Fecha de recepción: 8 de Mayo de 2002

Simon de Laplace, pensasen que las leyes físicas que gobiernan la atmósfera y el océano podrían servir para predecir el tiempo y clima futuros. Ya en el siglo XX se empezó a considerar ese intento de predicción como la resolución de un problema de valores iniciales en física matemática.

Actualmente, según J. L. Lions, R. Temam y S. Wang [12], para entender el comportamiento turbulento de la atmósfera y el océano, y poder predecir el clima, necesitamos:

- (a) establecer las ecuaciones y modelos matemáticos que gobiernan el movimiento y estados de la atmósfera y el océano, y las interacciones que aparecen entre ellos;
- (b) establecer los fundamentos matemáticos de dichas ecuaciones y modelos;
- (c) establecer y resolver aproximaciones numéricas de dichas ecuaciones.

La atmósfera es un fluido compresible, descrito matemáticamente por las ecuaciones de la Hidrodinámica y la Termodinámica, en donde actúan también las fuerzas centrípetas y de Coriolis. Dichas ecuaciones describen los movimientos a gran escala, en donde las pequeñas escalas son consideradas como “ruidos” en los cálculos numéricos. Sin embargo, debido a que la escala vertical es mucho menor que la escala horizontal, podemos usar la aproximación hidrostática (que veremos a continuación) que permite obtener las Ecuaciones Primitivas de la atmósfera y del océano.

Una de las principales fuerzas que “mueven” el océano es la fuerza del viento, lo que pone de manifiesto que el comportamiento del océano depende de la atmósfera. Por otra parte, también es importante la influencia del océano en el comportamiento de la atmósfera y del clima. Todas estas observaciones justifican el estudio del mecanismo de acoplamiento entre la atmósfera y el océano.

En este trabajo nos centraremos en el tratamiento matemático de las Ecuaciones Primitivas del océano, tanto en su obtención mediante un argumento asintótico a partir de las ecuaciones de Navier-Stokes, como en los resultados de existencia, unicidad y regularidad de solución, comportamiento asintótico en tiempo, etc. Prestaremos especial atención a los resultados recogidos en la Tesis Doctoral de la autora, exponiendo los resultados de otros autores que con anterioridad a su defensa se conocían sobre este tema.

## 2 Obtención del modelo.

El océano es considerado como un fluido ligeramente compresible, con fuerzas de Coriolis y centrípetas. El conjunto de ecuaciones que rigen lo que se conoce como “large scale ocean model” son: **las ecuaciones de momentos, la ecuación de continuidad, la ecuación termodinámica o de la temperatura  $\theta$ , la**

ecuación de difusión para la salinidad  $S$  y la ecuación de estado:

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho \frac{d\mathbf{V}}{dt} + 2\rho \mathbf{W} \times \mathbf{V} + \rho \mathbf{W} \times (\mathbf{W} \times \mathbf{r}) + \nabla p + \rho \mathbf{g} = D \\ \frac{d\rho}{dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{V} = 0 \\ \frac{d\theta}{dt} = Q_\theta \\ \frac{dS}{dt} = Q_S \\ \rho = f(\theta, S) \end{array} \right. \quad (1)$$

donde  $\rho$  es la densidad,  $\mathbf{V}$  la velocidad (3-dimensional) del flujo,  $p$  la presión,  $\mathbf{g} = (0, 0, g)$  es la gravedad,  $2\rho \mathbf{W} \times \mathbf{V}$  es el término de Coriolis y  $\rho \mathbf{W} \times (\mathbf{W} \times \mathbf{r})$  las fuerzas centrípetas ( $\mathbf{W} = f(0, \cos \lambda, \sin \lambda)$  es el vector de rotación de la Tierra,  $\mathbf{r}$  es el radio de la Tierra y  $\lambda = \lambda(y)$  es la latitud),  $D$  es la disipación (molecular),  $Q_\theta$  y  $Q_S$  las difusiones de temperatura y salinidad respectivamente.

Respecto a los operadores diferenciales utilizados,  $\nabla = (\partial_x, \partial_y, \partial_z)$  es el gradiente tridimensional, con  $\nabla \cdot$  el operador divergencia y  $\frac{d}{dt}$  es la “derivada material o total”, es decir,

$$\frac{d}{dt} = \partial_t + \mathbf{V} \cdot \nabla$$

Si hacemos la aproximación llamada del  $\beta$ -plano, el dominio ocupado por el océano  $\Omega$ , se describe en coordenadas cartesianas como:

$$\Omega = \{(x, y, z) = (\mathbf{x}, z) \in \mathbb{R}^3, \mathbf{x} \in S, -H(\mathbf{x}) < z < 0\}.$$

Su frontera  $\partial\Omega = \overline{\Gamma}_b \cup \Gamma_l \cup \Gamma_s$  donde el fondo  $\Gamma_b$ , las paredes laterales  $\Gamma_l$  y la superficie  $\Gamma_s$  están definidas por:

$$\Gamma_b = \{(\mathbf{x}, z) \in \mathbb{R}^3 : \mathbf{x} \in S, z = -H(\mathbf{x})\},$$

$$\Gamma_l = \{(\mathbf{x}, z) \in \mathbb{R}^3 : \mathbf{x} \in \partial S, -H(\mathbf{x}) < z < 0\},$$

$$\Gamma_s = \{(\mathbf{x}, 0) : \mathbf{x} \in S\},$$

donde  $S$  (sección horizontal) es un abierto acotado en  $\mathbb{R}^2$  y  $H$  (la profundidad) es una función continua no negativa sobre  $S$ . Las Figuras 1 y 2 ilustran las posibles configuraciones del dominio bidimensional (o las secciones verticales de un dominio tridimensional):

Las dificultades teóricas y computacionales que presenta el tratamiento del sistema (1) ha llevado a la consideración de dos simplificaciones importantes:

- a) **la aproximación de Boussinesq**, que consiste en despreciar las diferencias de densidad en todo el sistema salvo en el término de gravedad y la ecuación de estado. De ese modo, fijada una densidad media constante

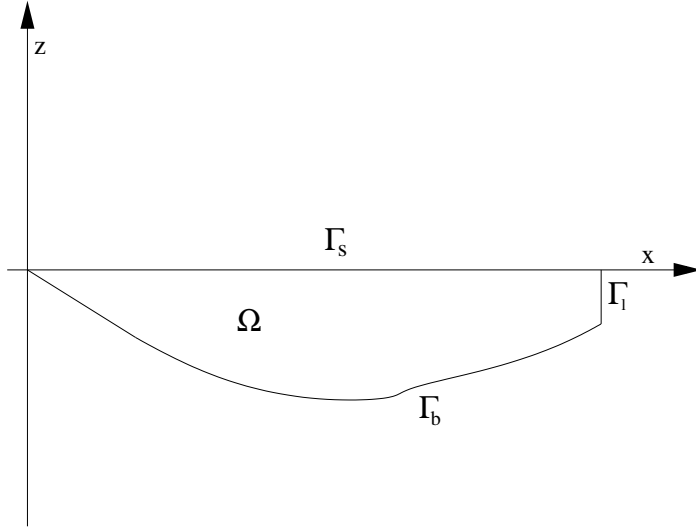


Figura 1: El dominio (2D) con paredes laterales.

$\rho_0$ ,  $\rho = \rho_0 + \rho'$  con  $\rho' \ll \rho_0$ . Dicha hipótesis hace que la ecuación de continuidad se transforme en la ecuación de incompresibilidad para la velocidad  $\mathbf{V}$ , que es una hipótesis físicamente válida debido a la lenta velocidad del agua respecto a la viscosidad en dicho medio. La inclusión de las fuerzas centrípetas en el gradiente de una función potencial  $P$  (junto con la presión), permiten reescribir (1) como:

$$(BEs) \left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt} \mathbf{v} - \mu \Delta_{\mathbf{x}} \mathbf{v} - \nu \partial_{zz}^2 \mathbf{v} + 2f(\sin(\lambda) \mathbf{v}^\perp + \cos(\lambda) w \mathbf{e}_1) + \nabla_{\mathbf{x}} P = \mathbf{0} \\ \frac{d}{dt} w - \mu \Delta_{\mathbf{x}} w - \nu \partial_{zz}^2 w - 2f \cos(\lambda) v_1 + \partial_z P + \frac{\rho'}{\rho_0} g = 0 \\ \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{v} + \partial_z w = 0 \\ \partial_t \theta + \mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} \theta + w \partial_z \theta - \mu_\theta \Delta_{\mathbf{x}} \theta - \nu_\theta \partial_{zz}^2 \theta = 0 \\ \partial_t S + \mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} S + w \partial_z S - \mu_S \Delta_{\mathbf{x}} S - \nu_S \partial_{zz}^2 S = 0 \\ \rho = f(\theta, S), \end{array} \right.$$

donde  $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$  y  $w$  son las velocidades horizontales y vertical respectivamente,  $\mathbf{v}^\perp = (-v_2, v_1)$ , y  $\mu$ ,  $\nu$ ,  $\mu_\theta$ ,  $\nu_\theta$ ,  $\mu_S$ ,  $\nu_S$  los coeficientes de difusión (turbulenta) anisótropos horizontal y vertical de  $(\mathbf{v}, w)$ ,  $\theta$  y  $S$  respectivamente.  $\nabla_{\mathbf{x}}$ ,  $\Delta_{\mathbf{x}}$  y  $\nabla_{\mathbf{x}} \cdot$  son los operadores gradiente, laplaciano y divergencia en las variables horizontales. Dicho sistema recibe el nombre de Ecuaciones de Boussinesq del océano.

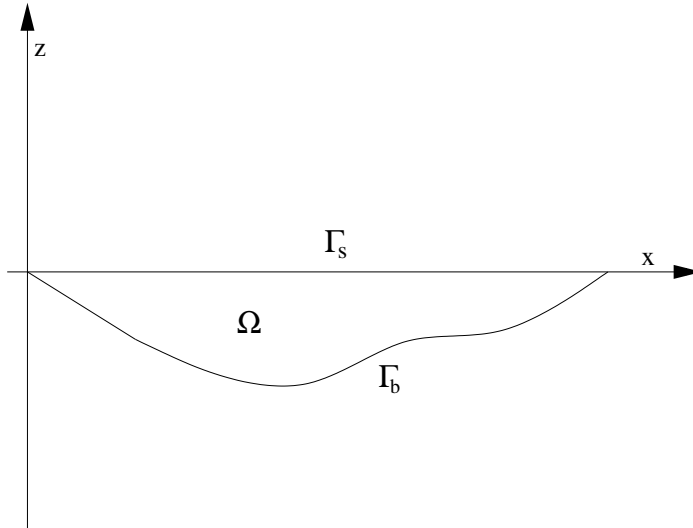


Figura 2: El dominio (2D) sin talud.

b) **la aproximación hidrostática.** Si queremos hacer un proceso de adimensionalización del sistema (*BES*) respecto a los valores de referencia de cada magnitud física, el análisis real de escalas nos dice que el cociente entre las longitudes vertical y horizontal es pequeño:

$$\delta = \frac{Z}{L} \approx 10^{-3},$$

siendo  $L$  el valor de referencia de las dimensiones horizontales, y  $Z$  de las verticales. Además, la velocidad vertical del agua es mucho menor que la velocidad horizontal, lo que se modela aproximando la tercera ecuación de momentos por la llamada **ecuación hidrostática**:

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g,$$

que relaciona la presión y la densidad del océano con la gravedad, y que se ha convertido en una ecuación fundamental en Oceanografía. El análisis de escalas nos dice además que para que las viscosidades de las dos primeras componentes de la ecuación de momentos sean del mismo orden (respecto a  $\delta$ ), necesitamos suponer que:

$$\nu = \delta^2 \nu_v, \quad \mu = \nu_h, \quad \text{con } \nu_v = O(1) \text{ y } \nu_h = O(1). \quad (2)$$

Por simplicidad, sólo prestaremos atención al sistema de ecuaciones (no lineal) para la velocidad y presión, ya que el sistema acoplado con la temperatura y salinidad introduce ecuaciones de convección-difusión

(lineales si la velocidad es conocida) que no añaden dificultades esenciales (de tipo matemático). En consecuencia, las Ecuaciones Primitivas del océano vienen descritas por el siguiente sistema:

$$(EP) \begin{cases} \partial_t \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{v} + w \partial_z \mathbf{v} - \nu_h \Delta_{\mathbf{x}} \mathbf{v} - \nu_v \partial_{zz}^2 \mathbf{v} + \alpha \mathbf{v}^\perp + \frac{1}{\rho_0} \nabla_{\mathbf{x}} p = \mathbf{0} \\ \partial_z p = -\rho g, \quad \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{v} + \partial_z w = 0, \end{cases}$$

donde  $\alpha = 2f \sin(\lambda)$ . La frontera superficie  $\Gamma_s$  no varía, siendo los nuevos  $\Omega$ ,  $\Gamma_l$  y  $\Gamma_b$  (donde  $h = \frac{H}{Z}$ ):

$$\begin{aligned} \Omega &= \{(\mathbf{x}, z) \in \mathbb{R}^3, \mathbf{x} \in S, -h(\mathbf{x}) < z < 0\}, \\ \Gamma_l &= \{(\mathbf{x}, z) \in \mathbb{R}^3 : \mathbf{x} \in \partial S, -h(\mathbf{x}) < z < 0\}, \\ \Gamma_b &= \{(\mathbf{x}, z) \in \mathbb{R}^3 : \mathbf{x} \in S, z = -h(\mathbf{x})\}. \end{aligned} \quad (3)$$

Las Ecuaciones Primitivas del océano (*EP*) se obtienen a partir de la hipótesis de aproximación hidrostática en los trabajos de J. L. Lions, R. Temam y S. Wang, [10, 11]. Dicha hipótesis se puede justificar como límite de la formulación variacional de las ecuaciones de Navier-Stokes o (*BES*) cuando  $\delta \rightarrow 0$  imponiendo (2), ver los resultados de O. Besson y M. R. Laydi, [2], para el caso estacionario y los de P. Azérad y F. Guillén-González, [1], para el caso de evolución.

## 2.1 Elección de condiciones de contorno.

La “fuente” de movimiento del océano es la atmósfera. No podemos olvidar pues la interacción atmósfera-océano a la hora de determinar cuáles son las condiciones de interfase, que se traducirán en condiciones de contorno sobre la superficie del océano. Una hipótesis simplificadora es considerar que dicha interfase está fija, hipótesis que se denomina de “techo rígido” (*rigid lid hypothesis*) y que está basada en dos hechos:

- (a) el agua es mucho más densa que el aire. De hecho, se observa que  $\rho^a / \rho^s \approx 10^{-3}$ , siendo  $\rho^a$  la densidad del aire y  $\rho^s$  la del agua oceánica, con lo que la interfase entre el aire y el agua es muy estable considerando grandes escalas espaciales, debido a la intensidad de la fuerza gravitacional.
- (b) a gran escala, el desplazamiento vertical de las ondas de mareas se puede despreciar, ya que aparecen como “ruidos en las altas frecuencias” no suelen ser tenidas en cuenta en la mayoría de modelos de Circulación Global.

Así pues, las condiciones de contorno que aparecen en la superficie son (denotando con el superíndice  $s$  las variables correspondientes al océano y con  $a$  las variables correspondientes a la atmósfera):

$$w|_{\Gamma_s} = 0, \quad \mathbf{v}^s|_{\Gamma_s} = \mathbf{v}^a|_{\Gamma_s}.$$

Sin embargo, debido a la diferencia de densidad entre ambos medios, aparece una capa límite fina en la atmósfera (de 1 km. de espesor) y muy fina en el océano (entre 10 y 100 m. de espesor) que no son tratables numéricamente, por el momento. Usando entonces unos fundamentos más prácticos, se considera que los esfuerzos de cizalla en la interfase son debidos a la fuerza horizontal del viento en superficie, lo que se traduce matemáticamente como:

$$-\rho_0^s \nu_v^s \partial_z \mathbf{v}^s = \rho^a C_D^a (\mathbf{v}^a - \mathbf{v}^s) |\mathbf{v}^a - \mathbf{v}^s|^\alpha \quad \text{sobre } \Gamma_s,$$

donde  $C_D^a$  es el coeficiente de transferencia de momento. Aquí vamos a considerar la siguiente simplificación:

$$w = 0, \quad \nu_v \partial_z \mathbf{v}^s = \tau \quad \text{sobre } \Gamma_s,$$

donde  $\tau$  es la tensión del viento sobre la superficie del océano, que se toma como dato. Con respecto al fondo, imponemos condiciones de adherencia, permitiendo deslizamiento vertical en las paredes laterales, que vienen dadas por:

$$w = 0 \quad \text{sobre } \Gamma_b, \quad \mathbf{v}^s = \mathbf{0} \quad \text{sobre } \Gamma_b \cup \Gamma_l. \quad (4)$$

Fijaremos estas condiciones de contorno en los resultados que expondremos en la siguiente sección.

## 2.2 El modelo reducido.

Las variables del sistema de Ecuaciones Primitivas  $\mathbf{v}$ ,  $w$  y  $p$  no son del mismo tipo: la velocidad horizontal  $\mathbf{v}$  verifica un problema de evolución y necesita por tanto datos iniciales para quedar determinado (*variable pronóstico*). La velocidad vertical  $w$  no verifica un problema de evolución pero se puede determinar a partir de la variable pronóstico  $\mathbf{v}$  (*variable diagnóstica*). Concretamente, integrando la ecuación de incompresibilidad en  $(z, 0)$ , como  $w(t; \mathbf{x}, 0) = 0$ , obtenemos:

$$w(t; \mathbf{x}, z) = \int_z^0 \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{v}(t; \mathbf{x}, s) ds. \quad (5)$$

Para la presión, integrando en  $(z, 0)$  la ecuación hidrostática, obtenemos:

$$p(t; \mathbf{x}, z) = p_s(t; \mathbf{x}) + \int_z^0 (\rho g)(t; \mathbf{x}, s) ds = p_s(t; \mathbf{x}) + g \int_z^0 f(\theta, S)(t; \mathbf{x}, s) ds,$$

donde  $p_s(t; \mathbf{x}) = p(t; \mathbf{x}, 0)$  es la presión en la superficie del océano. Se reescribe entonces el gradiente horizontal de presión como:

$$\frac{1}{\rho_0} \nabla_{\mathbf{x}} p = \frac{1}{\rho_0} \nabla_{\mathbf{x}} p_s + \mathbf{F}(\theta, S).$$

Imponiendo la condición de contorno (4) sobre  $w$  en la expresión de  $w$  (5), se llega a la restricción  $\nabla_{\mathbf{x}} \cdot \langle \mathbf{v} \rangle = 0$  en  $(0, T) \times S$ , donde  $\langle \mathbf{v} \rangle(t; \mathbf{x}) =$





**Definición 1 (Solución débil)** Sean  $\mathbf{u}_0 \in H$ ,  $\mathbf{F} \in L^2(0, T; H_{b,l}^{-1}(\Omega)^2)$  y  $\tau \in L^2(0, T; H^{-1/2}(\Gamma_s)^2)$ . Decimos que  $\mathbf{u} : (0, T) \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$  es una **solución débil de (EP) en  $(0, T)$**  si

$$\mathbf{u} \in L^\infty(0, T; H) \cap L^2(0, T; V),$$

verifica la formulación variacional:  $\forall \varphi \in C^1([0, T]; \mathcal{V})$  tal que  $\varphi(T) = \mathbf{0}$ ,

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_\Omega (-\mathbf{u} \cdot (\partial_t \varphi + (\mathbf{u}_H \cdot \nabla_{\mathbf{x}}) \varphi + u_3 \partial_z \varphi) + \alpha \mathbf{u}^\perp \cdot \varphi) d\Omega dt \\ & + \int_0^T \int_\Omega (\nu_h \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{u} : \nabla_{\mathbf{x}} \varphi + \nu_v \partial_z \mathbf{u} \cdot \partial_z \varphi) d\Omega dt \\ & = \int_\Omega \mathbf{u}_0 \cdot \varphi(0) d\Omega + \int_0^T \langle \mathbf{F}, \varphi \rangle_\Omega dt + \int_0^T \langle \tau, \varphi \rangle_{\Gamma_s} dt, \end{aligned}$$

y, además,  $\mathbf{u}$  satisface la desigualdad de energía:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \|\mathbf{u}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_0^t \left( \nu_h \|\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{u}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \nu_v \|\partial_z \mathbf{u}\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) ds \\ & \leq \frac{1}{2} \|\mathbf{u}_0\|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_0^t \langle \mathbf{F}, \mathbf{u} \rangle_\Omega ds + \int_0^t \langle \tau, \mathbf{u} \rangle_{\Gamma_s} ds \quad \text{c.p.d. } t \in (0, T). \end{aligned} \tag{6}$$

En el caso  $T = +\infty$ , decimos que  $\mathbf{u}$  es una solución débil de (EP) en  $(0, +\infty)$  si  $\mathbf{u}$  es una solución débil de (EP) en  $(0, T)$ ,  $\forall T < +\infty$ .

Aquí,  $\langle \cdot, \cdot \rangle_\Omega$  denota la dualidad entre  $H_{b,l}^{-1}(\Omega)$  y  $H_{b,l}^1(\Omega)$ , mientras que  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\Gamma_s}$  denota la dualidad entre  $H^{-1/2}(\Gamma_s)$  y  $H^{1/2}(\Gamma_s)$ . Denotamos en esta sección por  $u_3$  la velocidad vertical asociada a  $\mathbf{u}$ .

Finalmente, denotamos la norma en  $V$  por  $\|\varphi\|_V^2 = \nu_h \|\nabla_{\mathbf{x}} \varphi\|_{L^2(\Omega)}^2 + \nu_v \|\partial_z \varphi\|_{L^2(\Omega)}^2$ , y la norma en  $H_{b,l}^1(\Omega)$  por  $\|\varphi\|_{H^1(\Omega)}^2 = \|\nabla_{\mathbf{x}} \varphi\|_{L^2(\Omega)^N}^2 + \|\partial_z \varphi\|_{L^2(\Omega)}^2$ .

Cuando aumentamos básicamente en un orden la regularidad de la solución, llegamos a la siguiente:

**Definición 2 (Solución fuerte)** Sean  $\mathbf{u}_0 \in V$ ,  $\mathbf{F} \in L^2(0, T; L^2(\Omega)^2)$ ,  $\tau \in L^2(0, T; H^{1/2}(\Gamma_s)^2)$  y  $\partial_t \tau \in L^2(0, T; H^{-1/2}(\Gamma_s)^2)$ . Si  $\mathbf{u}$  una solución débil de (EP) en  $(0, T)$ , decimos que  $\mathbf{u}$  es una **solución fuerte** si verifica la siguiente regularidad adicional:

$$\mathbf{u} \in L^\infty(0, T; V) \cap L^2(0, T; H^2(\Omega)^2 \cap V), \quad \partial_t \mathbf{u} \in L^2(0, T; H).$$

La **existencia de solución débil de (EP)** es bien conocida, ver Lewandowski [9] y Lions-Teman-Wang [11], en dominios con profundidad acotada inferiormente (que también denominaremos **talud**, es decir,  $h \geq h_{min} > 0$  en  $\bar{S}$ ). En dichos trabajos, se usa un método de Galerkin para obtener la

velocidad  $\mathbf{u}$  en un espacio con la restricción  $\nabla \cdot \langle \mathbf{u} \rangle = 0$ . Más tarde, se recupera la presión a través de un lema de De Rham específico para los espacios de funciones definidas sobre la superficie. En dominios sin talud, la existencia de solución débil se obtiene como consecuencia de un proceso de paso al límite aplicado a las ecuaciones de Navier-Stokes con viscosidad anisótropa cuando el cociente entre la profundidad y el diámetro horizontal del dominio tiende a cero, ver Besson-Laydi [2] para el caso estacionario y Azerad-Guillén [1] para el caso de evolución. También pueden encontrarse otras demostraciones por argumentos de aproximación interna, ver [5] para el caso estacionario y [6] para el caso evolutivo.

Hasta donde sabemos, no había resultados de existencia de solución fuerte del problema (EP), excepto en el caso lineal estacionario [17]. Uno de los principales problemas para su estudio es el tratamiento de las condiciones de contorno; sobre la superficie tenemos una condición de Neumann no homogénea, mientras que en el fondo y paredes laterales tenemos condición de Dirichlet homogénea. Por otra parte, la unicidad de solución del problema (EP) es también un problema abierto, incluso suponiendo la existencia de soluciones fuertes.

### 3.1 Regularidad fuerte de (EP)

Como hemos dicho, los resultados de regularidad fuerte existentes para este tipo de problemas se conocían para el caso del sistema lineal estacionario ( $S_{st}$ ), cuyo problema evolutivo correspondiente es:

$$(S) \left\{ \begin{array}{l} \partial_t \mathbf{v} - \nu_h \Delta_{\mathbf{x}} \mathbf{v} - \nu_v \partial_{zz}^2 \mathbf{v} + \nabla_{\mathbf{x}} q_s = \mathbf{g} \quad \text{en } (0, T) \times \Omega, \\ \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \langle \mathbf{v} \rangle = 0 \quad \text{en } (0, T) \times S, \\ \mathbf{v}|_{t=0} = \mathbf{v}_0 \quad \text{en } \Omega, \\ \nu_v \partial_z \mathbf{v}|_{\Gamma_s} = \tau, \quad \mathbf{v}|_{\Gamma_b \cup \Gamma_l} = \mathbf{0} \quad \text{en } (0, T). \end{array} \right.$$

**Nota 1** *Notemos que el término de Coriolis se ha omitido en los cálculos, ya que para la demostración de los resultados que presentaremos no supone ninguna dificultad adicional.*

**Teorema 1 (Solución débil de ( $S_{st}$ ))** *Sea  $S \subseteq \mathbb{R}^d$  ( $d = 1$  o  $2$ ) y sea  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^{d+1}$ , definido como (3), un dominio Lipschitz-continuo. Si  $\mathbf{g} \in H_{b,l}^{-1}(\Omega)^d$  y  $\tau \in H^{-1/2}(\Gamma_s)^d$ , entonces el problema ( $S_{st}$ ) tiene una única solución  $\mathbf{v} \in H^1(\Omega)^d$ . Además, existe una constante  $C = C(\Omega) > 0$  tal que si  $\nu = \min\{\nu_h, \nu_v\}$ , obtenemos:*

$$\|\mathbf{v}\|_{H^1(\Omega)}^2 \leq \frac{C}{\nu^2} \left\{ \|\tau\|_{H^{-1/2}(\Gamma_s)}^2 + \|\mathbf{g}\|_{H_{b,l}^{-1}(\Omega)}^2 \right\}. \quad (7)$$

En [2], [5] y [9], hay diferentes demostraciones de este resultado.

**Teorema 2 (Solución fuerte de  $(S_{st})$ )** ([17]) *Sea  $S \subseteq \mathbb{R}^d$  ( $d = 1$  o  $2$ ) un dominio de clase  $C^3$  y  $h \in C^3(\bar{S})$  con  $h \geq h_{\min} > 0$  en  $\bar{S}$ . Si  $\mathbf{g} \in L^2(\Omega)^d$  y  $\tau \in H_0^{1/2+\varepsilon}(\Gamma_s)^d$  (para algún  $\varepsilon > 0$ ), entonces existe una (única) solución fuerte  $\mathbf{v}$  de  $(S_{st})$  (es decir,  $\mathbf{v} \in H^2(\Omega)^d \cap V$ ). Además, existe una constante  $C = C(\Omega) > 0$  tal que:*

$$\|\mathbf{v}\|_{H^2(\Omega)}^2 \leq \frac{C}{\nu^2} \left\{ \|\mathbf{g}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\tau\|_{H_0^{1/2+\varepsilon}(\Gamma_s)}^2 \right\}. \quad (8)$$

Aprovechando este resultado ([7]) (ver también [15]), extendemos el resultado de regularidad fuerte al caso del problema evolutivo lineal  $(S)$ . Para ello, definimos el operador  $B : \mathbf{a} \in H^{-1/2}(\Gamma_s)^d \rightarrow \mathbf{u} = B\mathbf{a} \in V$ , donde  $\mathbf{u}$  es la solución débil del problema de Stokes hidrostático  $(S_{st})$  con  $\mathbf{g} = \mathbf{0}$  y  $\tau = \mathbf{a}$ . Tomamos  $\mathbf{e}(t) = B(\tau(t))$  que posee regularidad fuerte, y demostramos que  $\partial_t \mathbf{e}(t)$  es igual a  $B(\partial_t \tau(t))$  que posee regularidad débil, de donde deducimos que  $\mathbf{e} \in C^0([0, T]; V)$ . Estudiamos entonces el problema con condiciones de contorno homogéneas verificado por  $\mathbf{y} = \mathbf{v} - \mathbf{e}$ . Las estimaciones de energía para  $\mathbf{e}$  y  $\partial_t \mathbf{e}$  que se deducen de los Teoremas 1 y 2 permitirán concluir el siguiente resultado:

**Teorema 3 (Solución fuerte de  $(S)$ )** *Sea  $S \subseteq \mathbb{R}^d$  ( $d = 1$  o  $2$ ) un dominio  $C^3$  y  $h \in C^3(\bar{S})$  con  $h \geq h_{\min} > 0$  en  $\bar{S}$ . Si  $\mathbf{g} \in L^2((0, T) \times \Omega)^d$ ,  $\mathbf{v}_0 \in V$ ,  $\tau \in L^2(0, T; H_0^{1/2+\varepsilon}(\Gamma_s)^d)$ , para algún  $\varepsilon > 0$ , con  $\partial_t \tau \in L^2(0, T; H^{-1/2}(\Gamma_s)^d)$ , entonces existe una única solución fuerte  $\mathbf{v}$  de  $(S)$  en  $(0, T)$ . Además, existe una constante  $C > 0$  tal que:*

$$\begin{aligned} \|\mathbf{v}\|_{L^\infty(V)}^2 + \|\mathbf{v}\|_{L^2(H^2(\Omega))}^2 + \|\partial_t \mathbf{v}\|_{L^2(H)}^2 &\leq C \left\{ \|\mathbf{v}_0\|_V^2 + \|\tau(0)\|_{H^{-1/2}(\Gamma_s)}^2 \right. \\ &\left. + \|\mathbf{g}\|_{L^2(L^2(\Omega))}^2 + \|\tau\|_{L^2(H_0^{1/2+\varepsilon}(\Gamma_s))}^2 + \|\partial_t \tau\|_{L^2(H^{-1/2}(\Gamma_s))}^2 \right\} \end{aligned} \quad (9)$$

Pasamos entonces a obtener resultados de regularidad fuerte para el problema no lineal  $(EP)$ . Usamos el Teorema anterior para levantar las condiciones de contorno, y así estudiar el problema homogéneo que verifica  $(\mathbf{w}, \pi_s)$ , donde  $\mathbf{w} = \mathbf{v} - \mathbf{e}$ ,  $\pi_s = p_s - q_s$ , para  $(\mathbf{e}, q_s)$  la solución de un problema de tipo  $(S)$  con  $\mathbf{F}$  y  $\tau$  como datos y  $\mathbf{v}_0$  como dato inicial:

$$(NL) \left\{ \begin{array}{l} \partial_t \mathbf{w} - \nu_h \Delta_{\mathbf{x}} \mathbf{w} - \nu_v \partial_{zz}^2 \mathbf{w} + (\mathbf{w} + \mathbf{e}) \partial_x (\mathbf{w} + \mathbf{e}) \\ \quad + (w_3 + e_3) \partial_z (\mathbf{w} + \mathbf{e}) + \partial_x \pi_s = \mathbf{0} \text{ en } (0, T) \times \Omega, \\ \quad \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \langle \mathbf{w} \rangle = 0 \text{ en } (0, T) \times S, \quad \mathbf{w}|_{t=0} = \mathbf{0} \text{ en } \Omega, \\ \quad \nu_v \partial_z \mathbf{w} = 0 \text{ sobre } (0, T) \times \Gamma_s, \quad \mathbf{w} = 0 \text{ sobre } (0, T) \times (\Gamma_b \cup \Gamma_l), \end{array} \right.$$

con  $w_3 = \int_z^0 \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{w} \, ds$  y de forma similar para  $e_3$ .

Aproximamos  $\mathbf{w}$  por  $\mathbf{w}_m$  las aproximaciones de Galerkin en los espacios  $m$ -dimensionales  $V_m$  formados por una base ortonormal (en  $V$ ) de autovalores del operador hidrostático  $A : V \rightarrow V'$  tal que:

$$\langle A\mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_{V', V} = \int_{\Omega} (\nu_h \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{u} : \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{v} + \nu_v \partial_z \mathbf{u} \cdot \partial_z \mathbf{v}) \, d\Omega \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V, \quad (10)$$

asociado a condiciones de contorno homogéneas (Neumann sobre la superficie y Dirichlet sobre el fondo y las paredes laterales). Para obtener estimaciones en norma  $H^2(\Omega)$ , tomamos  $A\mathbf{w}_m(t) \in V_m$  como funciones test, obteniendo:

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\mathbf{w}_m\|_V^2 + \|A\mathbf{w}_m\|_{L^2(\Omega)}^2 = G(\mathbf{w}_m, \mathbf{e}, \mathbf{f}), \quad (11)$$

para una cierta función  $G$ . Intentamos acotar los términos de  $G$  con las estimaciones en norma fuerte de  $\mathbf{e}$ , las cotas de  $\mathbf{f}$  y controlando los términos en  $\mathbf{w}_m$  con las normas que aparecen a la izquierda de (11). La dificultad mayor la presentan los términos:

$$I_1 = - \int_{\Omega} (\mathbf{w}_m \cdot \nabla_{\mathbf{x}}) \mathbf{w}_m \cdot A\mathbf{w}_m d\Omega \quad I_2 = - \int_{\Omega} (w_m)_3 \partial_z \mathbf{w}_m \cdot A\mathbf{w}_m d\Omega$$

correspondientes al término no lineal de (EP). Observar que  $I_2$  es menor regular que  $I_1$  debido a la anisotropía en la regularidad de la velocidad vertical. Para la acotación de  $I_2$  será fundamental el siguiente lema ([7]):

**Lema 4** *Sea  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$  ( $N = 2$  o  $3$ ) el dominio considerado anteriormente. Entonces, para toda función  $\mathbf{v} \in W^{1,p}(\Omega)^{N-1}$  ( $p > 1$ ), si se define  $v_3$  como  $v_3(\mathbf{x}, z) = - \int_{-h(\mathbf{x})}^z \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}, s) ds$ , tenemos:*

$$\|v_3\|_{L^p(\Omega)} \leq h_{max} \|\nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{v}\|_{L^p(\Omega)}$$

En el caso 2D, usando además la desigualdad de Gagliardo-Nirenberg:

$$\begin{aligned} I_2 &\leq \|(w_m)_3\|_{L^4(\Omega)} \|\partial_z \mathbf{w}_m\|_{L^4(\Omega)} \|A\mathbf{w}_m\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq Ch_{\max} \|\partial_x \mathbf{w}_m\|_{L^4(\Omega)} \|A\mathbf{w}_m\|_{L^2(\Omega)}^{3/2} \|\partial_z \mathbf{w}_m\|_{L^2(\Omega)}^{1/2} \\ &\leq Ch_{\max} \|\mathbf{w}_m\|_{H^1(\Omega)} \|A\mathbf{w}_m\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &\leq \frac{C}{\nu^{1/2}} h_{\max} \|\mathbf{w}_m\|_V \|A\mathbf{w}_m\|_{L^2(\Omega)}^2 \end{aligned}$$

Acotando de forma similar el resto de los términos llegamos a la desigualdad:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \|w_m\|_V^2 + \|Aw_m\|_{L^2(\Omega)}^2 &\left(1 - C_1 h_{max} \|w_m\|_V\right) \\ &\leq C_2 \|w_m\|_V^4 + a(t) \|w_m\|_V^2 + b(t), \end{aligned} \quad (12)$$

donde  $a = a(\tau, F)$ ,  $b = b(\tau, F)$  son determinadas funciones de  $L^1(0, T)$ , lo que, bajo hipótesis de pequeñez sobre los datos, nos permite aplicar el Lema de Gronwall y obtener el siguiente resultado ([7]):

**Teorema 5 (Solución global fuerte para datos pequeños en el caso 2D)**  
Sea  $S \subseteq \mathbb{R}$  un intervalo y  $h \in C^3(\bar{S})$  tal que  $h \geq h_{min} > 0$  en  $\bar{S}$ . Supongamos que

$u_0 \in V$ ,  $F \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$  y  $\tau \in L^2(0, T; H_0^{1/2+\varepsilon}(\Gamma_s))$ , para algún  $\varepsilon > 0$ , con  $\partial_t \tau \in L^2(0, T; H^{-1/2}(\Gamma_s))$ . Si se verifica la siguiente **condición de pequeñez**:  $\forall t \in [0, T]$ ,

$$(H)_{2D} \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{4K_2}t + \int_0^t a(s)ds\right) \left\{ 2\left(\|u_0\|_V^2 + K_1\|\tau(0)\|_{H^{-1/2}(\Gamma_s)}^2\right) \right. \\ \left. + \int_0^t \exp\left(\frac{1}{4K_2}s - \int_0^s a(\sigma)d\sigma\right) b(s)ds \right\} < M^2, \end{cases}$$

donde  $M$  es una constante positiva suficientemente pequeña,  $K_1$  y  $K_2$  son constantes, y  $a$  y  $b$  las funciones que aparecen en (12), entonces existe una única solución fuerte  $(u, p_s)$  de (EP) en  $(0, T)$  ( $p_s$  es única salvo una función aditiva de  $t$ ).

Además, en [7], se demuestra comportamiento asintótico en tiempo exponencialmente decreciente en norma  $H^1(\Omega)$  cuando  $t \uparrow +\infty$ , si se impone  $(H)_{2D} \forall t \in (0, +\infty)$  y una condición extra de pequeñez sobre los datos  $\tau$  y  $F$  cuando  $t \uparrow \infty$ . Por último, mediante un argumento de punto fijo, se llega a que existe solución fuerte local en tiempo si  $h_{\max}$  es suficientemente pequeño.

En el caso 3D, aplicando desigualdades de interpolación, se obtiene ([7]):

$$I_2 \leq C \frac{h_{\min}}{\nu^{1/4}} \|A\mathbf{w}_m\|_{L^2(\Omega)}^{5/2} \|\mathbf{w}_m\|_V^{1/2},$$

lo que no permite aplicar el argumento del caso bidimensional. En la búsqueda de un remedio a dicho problema, en [8] nos centramos en la anisotropía de la velocidad vertical. Como dijimos,  $\partial_z w_3 = -\nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{w} \in L^2(\Omega)$ , luego por una desigualdad de tipo Poincaré vertical  $w_3 \in L^2(\Omega)$ . Sin embargo,  $\nabla_{\mathbf{x}} w_3 \notin L^2(\Omega)$  en general. Esto nos lleva a separar la regularidad en las variables  $\mathbf{x}$  y  $z$ , ajustando las estimaciones en cada dirección. La novedad está en considerar espacios y estimaciones anisótropas del tipo (ver [8] para las demostraciones):

**Definición 3** Dados  $p, q \in [1, +\infty]$ , diremos que una función  $\mathbf{u}$  pertenece a  $L_z^q L_{\mathbf{x}}^p(\Omega)$  si:

$$\mathbf{u}(\cdot, z) \in L^q(S_z) \quad \text{y} \quad \|\mathbf{u}(\cdot, z)\|_{L^q(S_z)} \in L^p(-h_{\max}, 0),$$

y su norma viene dada por la expresión:

$$\|\|\mathbf{u}(\cdot, z)\|_{L^q(S_z)}\|_{L^p(-h_{\max}, 0)}$$

**Nota 2** Las normas que usaremos más frecuentemente en el caso 3D serán:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u}\|_{L_z^2 L_{\mathbf{x}}^4(\Omega)} &= \left( \int_{-h_{\max}}^0 \|\mathbf{u}(\cdot, z)\|_{L^4(S_z)}^2 dz \right)^{1/2} \\ \|\mathbf{u}\|_{L_z^\infty L_{\mathbf{x}}^4(\Omega)} &= \sup_{z \in (-h_{\max}, 0)} \|\mathbf{u}(\cdot, z)\|_{L^4(S_z)}, \end{aligned}$$

**Lema 6 (Desigualdades de interpolación)**

(a) Sea  $v \in L^2(\Omega)$  una función tal que  $\partial_z v \in L^2(\Omega)$  y  $(vn_z)|_{\Gamma_b} = 0$ . Entonces,  $v \in L_z^\infty L_x^2(\Omega)$  y satisface la estimación:

$$\|v\|_{L_z^\infty L_x^2}^2 \leq 2 \|v\|_{L^2(\Omega)} \|\partial_z v\|_{L^2(\Omega)}. \quad (13)$$

Más generalmente, si  $v \in H^1(\Omega)$  entonces  $v \in L_z^\infty L_x^2(\Omega)$ , y existe una constante  $C = C(\Omega) > 0$  tal que:

$$\|v\|_{L_z^\infty L_x^2}^2 \leq C(\Omega) \|v\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)} \quad \forall v \in H^1(\Omega). \quad (14)$$

(b) Sea  $v \in L^2(\Omega)$  una función tal que  $\nabla_{\mathbf{x}} v \in L^2(\Omega)^2$  y  $(vn_{x_i})|_{\Gamma_b \cup \Gamma_t} = 0$  ( $i = 1, 2$ ). Entonces,  $v \in L_z^2 L_x^4(\Omega)$  y verifica la estimación:

$$\|v_i\|_{L_z^2 L_x^4}^2 \leq 4 \|v_i\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla_{\mathbf{x}} v_i\|_{L^2(\Omega)}. \quad (15)$$

Más generalmente, si  $v \in H^1(\Omega)$  entonces  $v \in L_z^2 L_x^4$ , y existe una constante  $C = C(\Omega) > 0$  tal que:

$$\|v\|_{L_z^2 L_x^4}^2 \leq C(\Omega) \|v\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)}. \quad (16)$$

**Lema 7 (Nuevas estimaciones para  $v_3$ )** Sea  $\mathbf{v} \in L^2(\Omega)^2$  una función tal que  $\nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{v} \in H^1(\Omega)$ . Entonces, si consideramos  $v_3$  definida en función de  $\nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{v}$  como en el Lema 4, tenemos que  $v_3 \in L_z^\infty L_x^4(\Omega)$  y verifica la estimación:

$$\|v_3\|_{L_z^\infty L_x^4} \leq C(\Omega) \|\nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{v}\|_{L^2(\Omega)}^{1/2} \|\nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{v}\|_{H^1(\Omega)}^{1/2}.$$

Usando dichas desigualdades, conseguimos acotar el término  $I_2$  de la forma:

$$\begin{aligned} I_2 &\leq \|(w_3)_m\|_{L_z^\infty L_x^4} \|\partial_z \mathbf{w}_m\|_{L_z^2 L_x^4} \|\mathbf{A} \mathbf{w}_m\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq \frac{C}{\nu^{3/2}} \|\mathbf{A} \mathbf{w}_m\|_{L^2(\Omega)}^2 \|\mathbf{w}_m\|_V \end{aligned}$$

para  $C = C(\Omega) > 0$  una constante. Siguiendo entonces un razonamiento similar al del Teorema 5, separando además por una parte la influencia de los datos de tipo  $L^2(0, T)$  y  $L^\infty(0, T)$ , y por otra la dependencia explícita respecto a la viscosidad (con constantes que ahora sólo dependen del dominio), se llega al siguiente resultado [8]:

**Teorema 8 (Solución global fuerte para datos pequeños en el caso 3D)** Sea  $S \subset \mathbb{R}^d$  ( $d = 1$  o  $2$ ) un dominio  $C^3$  y  $h \in C^3(\bar{S})$  tal que  $h \geq h_{\min} > 0$  en  $\bar{S}$ . Supongamos que  $\mathbf{u}_0 \in V$ ,  $\mathbf{F} = \mathbf{f}_1 + \mathbf{f}_2$  con  $\mathbf{f}_1 \in L^2(0, T; L^2(\Omega)^d)$  y  $\mathbf{f}_2 \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega)^d)$ ,  $\tau = \tau_1 + \tau_2$  con  $\tau_1 \in L^2(0, T; H_0^{1/2+\varepsilon}(\Gamma_s)^d)$  y  $\tau_2 \in L^\infty(0, T; H_0^{1/2+\varepsilon}(\Gamma_s)^d)$  para algún  $\varepsilon > 0$ , tal que  $\partial_t \tau_1 \in L^2(0, T; H^{-1/2}(\Gamma_s)^d)$  y  $\partial_t \tau_2 \in L^\infty(0, T; H^{-1/2}(\Gamma_s)^d)$ . Si, además los datos verifican las siguientes “condiciones de pequeñez”:

$$(H)_{3D} \left\{ \begin{array}{l} \|\mathbf{f}_1\|_{L_T^2(L^2)} + \|\tau_1\|_{L_T^2(H_0^{1/2+\varepsilon})} < c\nu^{3/2}, & \|\partial_t \tau_1\|_{L_T^2(H^{-1/2})} < c\nu^{5/2}, \\ \|\mathbf{f}_2\|_{L_T^\infty(L^2)} + \|\tau_2\|_{L_T^\infty(H_0^{1/2+\varepsilon})} < c\nu^2, & \|\partial_t \tau_2\|_{L_T^\infty(H^{-1/2})} < c\nu^3, \\ \|\mathbf{u}_0\|_{H^1} < c\nu\sqrt{\frac{\nu}{\bar{\nu}}}, & \|\tau_1(0)\|_{H^{-1/2}} + \|\tau_2(0)\|_{H^{-1/2}} < c\nu^2\sqrt{\frac{\nu}{\bar{\nu}}}, \end{array} \right.$$

donde  $\nu = \min\{\nu_h, \nu_v\}$ ,  $\bar{\nu} = \max\{\nu_h, \nu_v\}$  y  $c$  es una constante suficientemente pequeña (que sólo depende de  $\Omega$ ), entonces existe una (única) solución fuerte  $(\mathbf{u}, p_s)$  de (EP) en  $(0, T)$  ( $p_s$  es única salvo una función aditiva que sólo depende de  $t$ ).

**Nota 3** Hemos denotado  $L_T^q(L^p) = L^q(0, T; L^p(\Omega))$ ,  $H^{-1/2} = H^{-1/2}(\Gamma_s)$  y  $H_0^{1/2+\varepsilon} = H_0^{1/2+\varepsilon}(\Gamma_s)$ .

Tratamos ahora de evitar la hipótesis de pequeñez sobre los datos. Partimos entonces de la expresión relativa a (12) para el caso 3D:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \|\mathbf{w}\|_V^2 + \|A\mathbf{w}\|_{L^2(\Omega)}^2 &\leq \frac{C}{\nu^{3/2}} \|A\mathbf{w}\|_{L^2(\Omega)}^2 \|\mathbf{w}\|_V + \frac{C}{\nu^{11}} \|\mathbf{w}\|_V^{10} \\ &+ a(t) \|\mathbf{w}\|_V^2 + b(t), \end{aligned} \quad (17)$$

donde  $a(t)$  y  $b(t)$  son funciones de  $L^1(0, T)$ , dependientes de  $\nu$  y de los datos. Al contrario del argumento (de punto fijo) hecho en [7] donde había que imponer que  $h_{\max}$  fuese suficientemente pequeño, en [8] hacemos un nuevo razonamiento que nos permite eliminar esta hipótesis. En síntesis, consiste en lo siguiente: Como  $\mathbf{w}_m(0) = \mathbf{0}$  y  $\mathbf{w}_m$  es una función continua en tiempo con valores en  $H^1(\Omega)$ , podemos elegir un tiempo  $T_m^1$  tal que:

$$\|\mathbf{w}_m(t)\|_V \leq \frac{\nu^{3/2}}{2C}, \quad \forall t \in [0, T_m^1].$$

Entonces, lo que tenemos que demostrar es que podemos elegir  $T_m^1$  acotado inferiormente por un tiempo  $T_* \geq 0$  e independientemente de  $m$ . Integrando la expresión (17) entre 0 y  $t$ ,  $t \in [0, T_m^1]$ , y usando  $(H)_{3D}$  se obtiene [8]:

$$\|\mathbf{w}_m(t)\|_V^2 + \int_0^t \|A\mathbf{w}_m(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 ds \leq K(\nu, c) t + C\nu^2 \int_0^t \|\mathbf{e}(s)\|_{H^2(\Omega)}^2 ds.$$

Entonces, eligiendo  $T^2$  tal que:

$$K(\nu, c) T^2 + C\nu^2 \|\mathbf{e}\|_{L_{T^2}^2(H^2(\Omega))}^2 < \frac{\nu^3}{4C^2},$$

no es difícil verificar que se puede elegir  $T_m^1$  igual a  $T^2$  para cada  $m$ . La prueba de la existencia de solución fuerte en  $(0, T_2)$  a partir de aquí se puede concluir de forma estándar. ■

### 3.2 Comportamiento asintótico de las soluciones.

En [8] también se estudia el comportamiento en tiempo hacia un estado estacionario (generado por los datos segundo miembro  $\mathbf{f}_2$  y condición de contorno Neumann  $\tau_2$ , supuestos independientes del tiempo). El objetivo es obtener un resultado de convergencia en norma  $V$ , lo que en principio nos obliga a conocer bajo qué condiciones se obtiene la regularidad fuerte del problema estacionario:

$$(EP)_{st} \begin{cases} -\nu_h \Delta_{\mathbf{x}} \mathbf{v} - \nu_v \partial_{zz}^2 \mathbf{v} + (\mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{x}}) \mathbf{v} + v_3 \partial_z \mathbf{v} + \nabla_{\mathbf{x}} p_s = \mathbf{f}_2 & \text{en } \Omega, \\ \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \langle \mathbf{v} \rangle = 0 & \text{en } S, \\ \nu_v \partial_z \mathbf{v}|_{\Gamma_s} = \tau_2, \quad \mathbf{v}|_{\Gamma_b \cup \Gamma_t} = \mathbf{0}. \end{cases}$$

Centrándonos en el caso 3D, obtenemos el siguiente resultado [8]:

**Teorema 9** *Si los datos  $\mathbf{f}_2$  y  $\tau_2$  son suficientemente pequeños en las normas de  $L^2(\Omega)^2$  y  $H_0^{1/2+\varepsilon}(\Gamma_s)^2$  respectivamente, entonces existe una única solución (fuerte)  $\mathbf{v}$  para  $(EP)_{st}$  y se satisfacen las siguientes estimaciones de regularidad débil y fuerte para las soluciones: existe  $C = C(\Omega) > 0$  tal que*

$$\|\mathbf{v}\|_{H^1(\Omega)}^2 \leq \frac{C}{\nu^2} \left\{ \|\mathbf{f}_2\|_{H^{-1}(\Omega)}^2 + \|\tau_2\|_{H^{-1/2}(\Gamma_s)}^2 \right\}, \quad (18)$$

$$\|\mathbf{v}\|_{H^2(\Omega)}^2 \leq \frac{C}{\nu^2} \left\{ \|\mathbf{f}_2\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\tau_2\|_{H_0^{1/2+\varepsilon}(\Gamma_s)}^2 \right\}. \quad (19)$$

El resultado de comportamiento asintótico que obtenemos en [8] es:

**Teorema 10 (Convergencia de la solución 3D de evolución hacia la solución 3D estacionaria)** *Sea  $\mathbf{u}$  una solución fuerte de  $(EP)$  en  $(0, +\infty)$  con segundo miembro  $\mathbf{f} = \mathbf{f}_1 + \mathbf{f}_2$ , donde  $\mathbf{f}_1 \in L^2(0, +\infty; L^2(\Omega)^2)$  y  $\mathbf{f}_2 \in L^2(\Omega)^2$  (independiente de  $t$ ), y la condición de Newman  $\tau = \tau_1 + \tau_2$ , donde  $\tau_1 \in L^2(0, +\infty; H_0^{1/2+\varepsilon}(\Gamma_s)^2)$  para algún  $\varepsilon > 0$ , tal que  $\partial_t \tau_1 \in L^2(0, +\infty; H^{-1/2}(\Gamma_s)^2)$ , y  $\tau_2 \in H_0^{1/2+\varepsilon}(\Gamma_s)^2$  para algún  $\varepsilon > 0$  (también independiente de  $t$ ). Suponiendo condiciones de pequeñez  $(H)_{3D}$  con  $T = +\infty$ , si  $\mathbf{v}$  es la solución fuerte estacionaria de  $(EP)_{st}$  con segundo miembro  $\mathbf{f}_2$  y condición de contorno Neumann  $\tau_2$ , entonces  $\mathbf{u}(t) \rightarrow \mathbf{v}$  en la norma  $H^1(\Omega)$  cuando  $t \uparrow +\infty$ .*

La demostración sigue los siguientes pasos:

- 1) Se considera el problema verificado por  $\mathbf{w} = \mathbf{u} - \mathbf{v} - \mathbf{e}$  donde  $\mathbf{v}$  es la solución fuerte del problema estacionario (dada en el Teorema 9) y  $\mathbf{e}$  es la solución fuerte del problema lineal evolutivo  $(S)$  con datos  $\mathbf{g} = \mathbf{f}_1$ ,  $\mathbf{e}(0) = \mathbf{u}_0 - \mathbf{v}$  y  $\tau = \tau_1$  (dada en el Teorema 3). Consideramos su formulación variacional y estimamos con funciones test del tipo  $A\mathbf{w}$ , obteniendo:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \|\mathbf{w}\|_V^2 + \|A\mathbf{w}\|_{L^2(\Omega)}^2 &\leq \frac{C}{\nu^{3/2}} \|A\mathbf{w}\|_{L^2(\Omega)}^2 \|\mathbf{w}\|_V + \frac{C}{\nu^{11}} \|\mathbf{w}\|_V^{10} \\ &+ (a_1(t) + a_2(t)) \|\mathbf{w}\|_V^2 + b(t), \end{aligned} \quad (20)$$



donde  $a_1 \in L^\infty(0, \infty)$ ,  $a_2$  y  $b \in L^1(0, \infty)$ , son funciones dependientes de los datos.

- 2) Gracias a la hipótesis de pequeñez sobre los datos, conseguimos que para un  $\gamma$  suficientemente pequeño:

$$\|\mathbf{w}(t)\|_V \leq \gamma \nu^{3/2}, \quad \forall t \in [0, +\infty).$$

Entonces, a partir de (20) se puede obtener:

$$\frac{d}{dt} \|\mathbf{w}\|_V^2 + \frac{\nu}{2C} \|\mathbf{w}\|_V^2 \leq C\nu^2 \|\mathbf{e}(t)\|_{H^2(\Omega)}^2.$$

Integrando la expresión anterior, obtenemos que:

$$\|\mathbf{w}(t)\|_V^2 \leq \int_0^t \exp\left(\frac{\nu}{2C}(s-t)\right) \|\mathbf{e}(s)\|_{H^2(\Omega)}^2 ds. \quad (21)$$

Como por hipótesis sobre los datos y la construcción de  $\mathbf{e}$ ,  $\|\mathbf{e}\|_{H^2(\Omega)}^2 \in L^1(0, +\infty)$ , entonces para todo  $\delta > 0$  existe un  $T_* \in [0, +\infty)$  tal que

$$\int_{T_*}^{+\infty} \|\mathbf{e}(t)\|_{H^2(\Omega)}^2 dt < \delta.$$

Así pues, descomponiendo la cota de (21) como:

$$\begin{aligned} & e^{-\frac{\nu}{2C}t} \int_0^t e^{\frac{\nu}{2C}s} \|\mathbf{e}(s)\|_{H^2(\Omega)}^2 ds \\ & \leq e^{-\frac{\nu}{2C}t} e^{\frac{\nu}{2C}T_*} \int_0^{T_*} \|\mathbf{e}(s)\|_{H^2(\Omega)}^2 ds + \int_{T_*}^{+\infty} \|\mathbf{e}(s)\|_{H^2(\Omega)}^2 ds, \end{aligned}$$

podemos concluir que  $\|\mathbf{w}(t)\|_V^2 = \|\mathbf{u}(t) - \mathbf{e}(t) - \mathbf{v}\|_V^2 \rightarrow 0$  cuando  $t \uparrow +\infty$ .

- 3) Razonando de manera análoga obtenemos que  $\|\mathbf{e}(t)\|_V \rightarrow 0$  cuando  $t \uparrow +\infty$ , lo que nos permite concluir el resultado de convergencia  $\|\mathbf{u}(t) - \mathbf{v}\|_{H^1(\Omega)}^2 \rightarrow 0$ . ■

### 3.3 Unicidad de solución débil/fuerte.

La menor regularidad del término no lineal (de convección vertical) en el sistema de Ecuaciones Primitivas hace que se necesite mayor regularidad para demostrar la unicidad de solución que en el caso del sistema de Navier-Stokes. Para comprobarlo, basta con intentar reproducir la demostración de unicidad que aparece, por ejemplo, en el libro de P. L. Lions [13]. El principal inconveniente es la acotación del término:

$$\int_{\Omega} u_3 \partial_z \psi \cdot \mathbf{u} \, d\Omega$$

Usando las estimaciones isotropas, conseguimos una estimación para:

$$\begin{cases} \mathbf{u} \in L^2(0, T; H^1(\Omega)) \cap L^\infty(0, T; L^2(\Omega)), & u_3 \in L^2(0, T; L^2(\Omega)) \\ \partial_z \psi \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega)) \cap L^2(0, T; L^\infty) \end{cases}$$

Sin embargo, el uso de las estimaciones anisótropas nos permite rebajar la regularidad a los siguientes espacios anisótropos:

$$\begin{cases} \mathbf{u} \in L^4(0, T; L_z^2 L_{\mathbf{x}}^4), & u_3 \in L^2(0, T; L_z^\infty L_{\mathbf{x}}^2), \\ \partial_z \psi \in L^4(0, T; L_z^2 L_{\mathbf{x}}^4), \end{cases}$$

de manera que podemos enunciar el siguiente resultado:

**Teorema 11** (*Unicidad de solución débil/fuerte*) Sea  $\mathbf{u}$  solución débil de (EP) en  $(0, T)$ . Si existe  $\underline{\mathbf{u}}$  una solución débil de (EP) en  $(0, T)$  tal que:

$$\nabla_{\mathbf{x}} \underline{\mathbf{u}} \in L^2(0, T; L_z^\infty L_{\mathbf{x}}^2) \quad y \quad \partial_z \underline{\mathbf{u}} \in L^4(0, T; L_z^2 L_{\mathbf{x}}^4), \quad (22)$$

entonces ambas soluciones coinciden en  $[0, T)$ .

**Nota 4** En 2D, la hipótesis (22) se rebaja sólo a  $\partial_z \underline{\mathbf{u}} \in L^4(0, T; L^2(\Omega))$ . En cualquier caso, dicha regularidad adicional no está asegurada en general para una solución débil.

## 4 El modelo de Ecuaciones Primitivas del océano con condiciones de contorno de tipo Navier.

Ya sabemos que las Ecuaciones Primitivas se obtienen a partir de las ecuaciones de Navier-Stokes anisótropas por un análisis asintótico cuando el cociente de aspecto  $\delta$  tiende a cero, completando dicho modelo con determinadas condiciones de contorno (ver [1, 2] para condiciones Dirichlet en el fondo). Desde un punto de vista físico, la elección de condiciones de contorno de tipo Dirichlet homogéneas para la velocidad sobre el fondo sólo está justificada cuando la viscosidad molecular del fluido sea importante. Sin embargo, en muchos modelos geofísicos la viscosidad que se considera es turbulenta, siendo la viscosidad molecular despreciable. Por otra parte, se sabe que el uso de la condición de contorno de fricción de tipo Navier en las ecuaciones de Navier-Stokes previene la aparición de capas límites.

El objetivo de esta sección es doble. Primero, obtener nuevas condiciones de contorno para las Ecuaciones Primitivas, partiendo de condiciones de contorno de tipo Navier en Navier-Stokes con viscosidad anisótropa y haciendo tender el cociente de aspecto a cero ([3]). Segundo, analizar una cierta regularidad adicional global en tiempo para cualquier solución débil del modelo en un dominio 2D que implica, en particular, la unicidad ([4]).

#### 4.1 Obtención del modelo con nuevas condiciones de contorno.

Consideramos un fluido gobernado por las ecuaciones de Navier-Stokes de evolución, con fuerza de Coriolis y viscosidad anisótropa (turbulenta). Supondremos que la densidad es constante (igual a 1). Suponemos que la viscosidad anisótropa  $\nu$  viene dada por  $(\nu_h, \nu_h, \nu_z)$ . Definimos el gradiente anisótropo como:

$$\nabla_\nu = (\nu_h \partial_{x_1}, \nu_h \partial_{x_2}, \nu_z \partial_z) = (\nu_h \nabla_{\mathbf{x}}, \nu_z \partial_z), \quad (23)$$

y el tensor de esfuerzos tangenciales debidos al campo de velocidades, viene dado por:

$$D_\nu(\mathbf{u}^\delta) = (\nabla_\nu \mathbf{u}^\delta + \nabla_\nu^t \mathbf{u}^\delta) / 2, \quad (24)$$

donde  $\mathbf{u}^\delta$  es la velocidad del fluido, dada por  $(\mathbf{v}^\delta, w^\delta)$ , donde  $\mathbf{v}^\delta = (v_1^\delta, v_2^\delta)$  es la componente horizontal y  $w^\delta$  es la componente vertical. Supongamos el fluido en un dominio  $\Omega_\delta = \{(\mathbf{x}, z) \in \mathbb{R}^3 / \mathbf{x} = (x_1, x_2) \in S, -\delta h(\mathbf{x}) < z < 0\}$ , y que el flujo satisface una condición de tracción sobre la superficie  $\Gamma_s$  debida al viento, una condición de contorno Dirichlet homogénea sobre las paredes laterales  $\Gamma_l^\delta$  (si existen) y una condición de contorno de tipo fricción sobre el fondo  $\Gamma_b^\delta$ . Más precisamente, suponemos que la velocidad y el potencial  $(\mathbf{u}^\delta, p^\delta)$  satisfacen el siguiente sistema:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \partial_t \mathbf{u}^\delta + \mathbf{u}^\delta \cdot \nabla \mathbf{u}^\delta - 2 \nabla \cdot D_\nu(\mathbf{u}^\delta) + 2\mathbf{W} \times \mathbf{u}^\delta + \nabla p^\delta = 0 & \text{en } (0, T) \times \Omega_\delta, \\ \nabla \cdot \mathbf{u}^\delta = 0 & \text{en } (0, T) \times \Omega_\delta, \\ \nu_z \partial_z \mathbf{v}^\delta = \alpha |\mathbf{v}_{air}| (\mathbf{v}_{air} - \mathbf{v}^\delta), \quad w^\delta = 0 & \text{sobre } (0, T) \times \Gamma_s^\delta, \\ (2 D_\nu(\mathbf{u}^\delta) \mathbf{n}_\delta + \gamma \mathbf{u}^\delta)_{tg} = 0 \quad \mathbf{u}^\delta \cdot \mathbf{n}_\delta = 0 & \text{sobre } (0, T) \times \Gamma_b^\delta, \\ \mathbf{u}^\delta = 0 & \text{sobre } (0, T) \times \Gamma_l^\delta, \\ \mathbf{u}^\delta|_{t=0} = \mathbf{u}_0^\delta & \text{en } \Omega_\delta, \end{array} \right. \quad (25)$$

con  $D_\nu(\mathbf{u}^\delta)$  definido en (24). La fuerza de Coriolis viene dada por  $2\mathbf{W} \times \mathbf{u}^\delta$  con  $\mathbf{W} = |\mathbf{W}|(0, \cos \theta, \sin \theta)$  el vector de rotación de la Tierra y  $\theta = \theta(y)$  es la latitud. Denotamos por  $\mathbf{v}_{air} : S \rightarrow \mathbb{R}^2$  la velocidad del aire sobre la superficie, y  $\alpha$  y  $\gamma$  dos funciones de  $\mathbf{x}$  no negativas y acotadas. Recordemos que  $D_\nu(\mathbf{u}^\delta) \mathbf{n}_\delta$  representa el producto matriz por vector definido por:

$$(D_\nu(\mathbf{u}^\delta) \mathbf{n}_\delta)_i = \sum_{j=1}^3 (D_\nu(\mathbf{u}^\delta))_{ij} n_\delta^j$$

y  $(D_\nu(\mathbf{u}^\delta) \mathbf{n}_\delta)_{tg}$  corresponde a su componente tangencial, dada por:

$$(D_\nu(\mathbf{u}^\delta) \mathbf{n}_\delta)_{tg} = D_\nu(\mathbf{u}^\delta) \mathbf{n}_\delta - [(D_\nu(\mathbf{u}^\delta) \mathbf{n}_\delta) \cdot \mathbf{n}_\delta] \mathbf{n}_\delta,$$

donde  $\mathbf{n}_\delta$  es el vector normal exterior a  $\Gamma_b^\delta$ , dado por:

$$\mathbf{n}_\delta = (n_\delta^1, n_\delta^2, n_\delta^3) = \frac{1}{\sqrt{1 + |\delta \nabla_{\mathbf{x}} h|^2}} (-\delta \nabla_{\mathbf{x}} h, -1). \quad (26)$$

**Nota 5** La condición (25)<sub>3</sub> representa el efecto (no lineal) que el aire ejerce sobre la velocidad horizontal del flujo de agua en el Océano. Por otra parte, en la condición (25)<sub>4</sub> el coeficiente  $\gamma = \gamma(\mathbf{x})$  depende de la rugosidad del fondo. Así pues, la condición (25)<sub>4</sub> completa viene a expresar los efectos que la fricción con el fondo ejercen sobre la componente tangencial de  $2D_\nu(\mathbf{u}^\delta)$ .

Introducimos los siguientes espacios funcionales para el dominio de partida  $\Omega_\delta$ :

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_\delta &= \{ \Phi = (\varphi, \psi) \in (C_l^\infty(\overline{\Omega}_\delta))^2 \times (C_l^\infty(\overline{\Omega}_\delta)) : \\ &\quad \nabla \cdot \Phi = 0 \text{ en } \Omega_\delta, \Phi \cdot \mathbf{n}_\delta = 0 \text{ sobre } \partial\Omega_\delta \} \end{aligned}$$

donde  $C_l^\infty(\overline{\Omega}_\delta) = \{ \chi \in C^\infty(\overline{\Omega}_\delta) : \chi = \mathbf{0} \text{ en un entorno de } \Gamma_l^\delta \}$ , y definimos  $H_\delta$  y  $V_\delta$  como la clausura de  $\mathcal{V}_\delta$  en  $(L^2(\Omega_\delta))^3$  y  $(H^1(\Omega_\delta))^3$ , respectivamente.

Notemos que el modelo que obtenemos es no estándar, ya que el término de segundo orden  $-2\nabla \cdot (D_\nu(\mathbf{u}^\delta))$  no es necesariamente difusivo pues, en general,  $-2\langle \nabla \cdot (D_\nu(\mathbf{u}^\delta)), \mathbf{u}^\delta \rangle \not\geq 0$ .

**Teorema 12** Supongamos  $h \in W^{2,\infty}(S)$ ,  $h > 0$  en  $S$ ,  $|\nabla_{\mathbf{x}} h| > c > 0$  sobre  $\partial S \cap \{h = 0\}$ ,  $\mathbf{u}_0^\delta \in H_\delta$ ,  $\alpha^{1/3} \mathbf{v}_{air} \in L^3(0, T; L^3(\Omega)^2)$  y

$$\left\{ \begin{array}{l} C(\Omega) |\nu_h - \nu_z| \|\nabla_{\mathbf{x}} h\|_{W^{1/2,\infty}(S)} \leq \frac{\nu_h}{4}, \\ \delta^2 C(\Omega) |\nu_h - \nu_z| \left(1 + 2\|h\|_{W^{1,\infty}(S)}^2\right) \|\nabla_{\mathbf{x}} h\|_{W^{1/2,\infty}(S)} \leq \frac{\nu_z}{16}, \\ 2\delta |\nu_h - \nu_z| C(\Omega) \|\nabla_{\mathbf{x}} h\|_{W^{1/2,\infty}(S)} h(\mathbf{x}) + \delta \nu_h |\partial_{ij}^2 h(\mathbf{x})| \\ \leq \frac{\gamma(\mathbf{x})}{2} \sqrt{1 + \delta^2 |\nabla_{\mathbf{x}} h(\mathbf{x})|^2}, \quad \forall i, j = 1, 2, \text{ c.p.d. } \mathbf{x} \in S, \end{array} \right. \quad (27)$$

donde  $C(\Omega) = C(S)C'(\Omega)$  con  $C'(\Omega)$  depende de las inyecciones de Sobolev de  $H^1$  en  $H^{1/2}$ -frontera. Entonces, existe una solución débil del problema tal que:  $\forall \Phi = (\varphi, \psi) \in C^1([0, T]; \mathcal{V}_\delta)$  con  $\Phi(T) = 0$ ,

$$\left\{ \begin{array}{l} - \int_0^T \int_{\Omega_\delta} \mathbf{u}^\delta \cdot (\partial_t \Phi + \mathbf{u}^\delta \cdot \nabla \Phi) + 2 \int_0^T \int_{\Omega_\delta} D_\nu(\mathbf{u}^\delta) \cdot \nabla \Phi \\ + \int_0^T \int_{\Gamma_s} \alpha |\mathbf{v}_{air}| (\mathbf{v}^\delta - \mathbf{v}_{air}) \cdot \varphi + 2 \int_0^T \int_{\Omega_\delta} (\mathbf{W} \times \mathbf{u}^\delta) \cdot \Phi \\ + \int_0^T \int_{\Gamma_b^\delta} \gamma (\mathbf{u}^\delta \times \mathbf{n}_\delta) \cdot (\Phi \times \mathbf{n}_\delta) = \int_{\Omega_\delta} \mathbf{u}_0^\delta \cdot \Phi(0). \end{array} \right. \quad (28)$$

Además, dicha solución satisface la siguiente desigualdad de energía, para todo

$t \geq 0$ :

$$\begin{aligned} & \|\mathbf{u}^\delta(t)\|_{L^2(\Omega_\delta)}^2 + \nu_h \int_0^t \|\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{u}^\delta(s)\|_{L^2(\Omega_\delta)}^2 ds + \frac{\nu_z}{2} \int_0^t \|\partial_z \mathbf{u}^\delta(s)\|_{L^2(\Omega_\delta)}^2 ds \\ & + \int_0^t \int_{\Gamma_s} \alpha |\mathbf{v}_{air}| |\mathbf{v}^\delta|^2 + \int_0^t \int_{\Gamma_b^\delta} \gamma |\mathbf{u}^\delta|^2 \leq \|\mathbf{u}_0^\delta\|_{L^2(\Omega_\delta)}^2 + \int_0^t \int_S \alpha |\mathbf{v}_{air}|^3. \end{aligned} \quad (29)$$

**Nota 6** Las hipótesis (27) aseguran la disipación del problema, necesaria para que el modelo sea físicamente admisible.

**Esquema de la demostración:** Se sigue un procedimiento de tipo Galerkin. Al acotar los términos que aparecen en la formulación variacional al tomar como funciones test las soluciones de Galerkin aproximadas, aparece un término conflictivo que proviene del gradiente traspuesto de la velocidad, que ahora no se anula porque tenemos un gradiente anisótropo. Dicho término se puede reescribir como un término sobre la frontera de la forma:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_\delta} {}^t \nabla_{\nu} \mathbf{u}^\delta \cdot \nabla \mathbf{u}^\delta = \delta \nu_h \int_S \mathcal{H} \mathbf{v}^\delta|_{\Gamma_b^\delta} \cdot \mathbf{v}^\delta|_{\Gamma_b^\delta} d\mathbf{x} \\ & + \delta (\nu_h - \nu_z) \left\langle \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \left( \mathbf{v}^\delta|_{\Gamma_b^\delta} \right), \mathbf{v}^\delta|_{\Gamma_b^\delta} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} h \right\rangle_{H^{-1/2}(S), H^{1/2}(S)}, \end{aligned} \quad (30)$$

donde  $\mathcal{H}$  representa el hessiano de  $\mathbf{v}^\delta$ , es decir,  $\mathcal{H} = (\partial_{ij}^2 h)_{ij}$ . Para acotar este término se usan desigualdades de interpolación de espacios de Sobolev  $H^s$  en sus correspondientes espacios de trazas, imponiendo las hipótesis (27) para llegar a controlar este término con las normas  $L^2$  y  $H^1$  que aparecen a la izquierda de la desigualdad de energía que se pretende conseguir (ver [3, 15] para los detalles). ■

**Nota 7** [3]

- 1) Si  $\gamma \neq 0$  y  $|\Gamma_l^\delta| > 0$ , se pueden reescribir las hipótesis (27) de manera más fácil ya que la seminorma del gradiente en  $L^2(\Omega_\delta)$  es equivalente a la norma en  $H^1(\Omega_\delta)$ .
- 2) Si  $\gamma \neq 0$  y  $|\Gamma_l^\delta| = 0$ , se puede obtener existencia de solución débil sin la hipótesis (27)<sub>3</sub>, pero entonces no se garantiza la disipatividad del sistema.
- 3) Si  $\gamma = 0$  y  $|\Gamma_l^\delta| = 0$  (es decir, en el caso de deslizamiento sobre el fondo y sin paredes laterales), se puede garantizar la existencia de solución débil pero no la disipación del sistema.

Nos interesamos ahora por el comportamiento asintótico cuando  $\delta \rightarrow 0$  de las soluciones débiles  $\mathbf{u}^\delta$  (para cada dominio  $\Omega_\delta$ ) obtenidas en el Teorema 12. Supondremos que  $h \approx 1$  y:

$$\nu_h \approx 1, \quad \nu_z = \delta^2 \nu_v \quad (\nu_v \approx 1), \quad (31)$$

$$\alpha/\delta \rightarrow \bar{\alpha} \quad \text{y} \quad \gamma/\delta \rightarrow \bar{\gamma} \quad \text{en } L^\infty(S)\text{-débil*}, \quad (32)$$

e introducimos los siguientes cambios de variable:

$$Z = \frac{z}{\delta}, \quad \mathbf{V}^\delta(t; \mathbf{x}, Z) = \mathbf{v}^\delta(t; \mathbf{x}, z), \quad W^\delta(t; \mathbf{x}, Z) = \frac{w^\delta(t; \mathbf{x}, z)}{\delta}, \quad (33)$$

que nos llevan al dominio (adimensional)

$$\Omega = \{(\mathbf{x}, Z) \in \mathbb{R}^3 : \mathbf{x} \in S, -h(\mathbf{x}) < Z < 0\},$$

cuyas fronteras vienen dadas por  $\Gamma_s \equiv \bar{S} \times \{0\}$ ,  $\Gamma_l = \{(\mathbf{x}, Z) \in \mathbb{R}^3 : \mathbf{x} \in \partial S, -h(\mathbf{x}) < Z < 0\}$  y  $\Gamma_b = \partial\Omega \setminus (\bar{\Gamma}_s \cup \bar{\Gamma}_l)$ . Probamos entonces que cuando  $\delta$  tiende a 0, entonces la solución  $\mathbf{U}^\delta = (\mathbf{V}^\delta, W^\delta)$  reescalada según (33) a partir de una solución  $(\mathbf{v}^\delta, w^\delta)$  de las ecuaciones de Navier-Stokes (25), posee una subsucesión que converge a una solución  $\mathbf{U} = (\mathbf{V}, W)$  del modelo de Ecuaciones Primitivas:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \partial_t \mathbf{V} + (\mathbf{U} \cdot \nabla) \mathbf{V} - \Delta_\nu \mathbf{V} + k \mathbf{V}^\perp + \nabla_{\mathbf{x}} P & = 0 & \text{en } (0, T) \times \Omega, \\ \partial_Z P = 0, \quad \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{V} + \partial_Z W & = 0 & \text{en } (0, T) \times \Omega, \\ \nu_v \partial_Z \mathbf{V} = \bar{\alpha} |\mathbf{v}_{air}| (\mathbf{v}_{air} - \mathbf{V}), \quad W & = 0 & \text{sobre } (0, T) \times \Gamma_s, \\ \nu_v (1 + \nu_h |\nabla_{\mathbf{x}} h|^2 / \nu_v) \partial_Z \mathbf{V} n^Z & = \mathcal{A} \mathbf{V}|_{\Gamma_b}, & \text{sobre } (0, T) \times \Gamma_b, \\ (\mathbf{V}, W) \cdot \mathbf{n} & = 0 & \text{sobre } (0, T) \times \Gamma_b, \\ \mathbf{V} & = 0 & \text{sobre } (0, T) \times \Gamma_l, \\ \mathbf{V}|_{t=0} & = \mathbf{V}_0 & \text{en } \Omega, \end{array} \right. \quad (34)$$

donde  $\nabla_{\mathbf{x}} = (\partial_{x_1}, \partial_{x_2})$ ,  $\Delta_\nu = \nu_h \Delta_{\mathbf{x}} + \nu_v \partial_Z^2$ ,  $\Delta_{\mathbf{x}} = \partial_{x_1}^2 + \partial_{x_2}^2$ ,  $\mathbf{V}^\perp = (-V_2, V_1)$ ,  $k = |\mathbf{W}| \sin \theta$  y

$$\mathcal{A} \mathbf{V}|_{\Gamma_b} = \bar{\gamma} \mathbf{V}|_{\Gamma_b} n^Z + \nu_h \mathcal{H} \mathbf{V}|_{\Gamma_b} n^Z + \nu_h \nabla_{\mathbf{x}} \cdot (\mathbf{V}|_{\Gamma_b}) n^{\mathbf{x}} - \nu_h \nabla_{\mathbf{x}} (\mathbf{V}|_{\Gamma_b}) n^{\mathbf{x}}, \quad (35)$$

con  $\mathbf{n} = (\mathbf{n}^{\mathbf{x}}, n^Z)$  el vector normal exterior a  $\Gamma_b$ . La condición (35) tendrá un sentido “dual” a través de la formulación débil (38) de (34).

**Nota 8** En dimensión 2, la condición de contorno en el fondo se reduce a:

$$\nu_v \partial_Z \mathbf{V}|_{\Gamma_b} = \beta \mathbf{V}|_{\Gamma_b} \quad \text{con } \beta = \frac{(\bar{\gamma} + \nu_h h'')}{1 + \nu_h |h'|^2 / \nu_v}.$$

Considerando entonces los siguientes espacios funcionales en el límite:

$$\mathcal{V} = \{\tilde{\Phi} = (\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}) \in (C_l^\infty(\bar{\Omega}))^3 : \nabla \cdot \tilde{\Phi} = 0 \text{ en } \Omega, \tilde{\Phi} \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ sobre } \partial\Omega\},$$

donde  $C_l^\infty(\bar{\Omega}) = \{\chi \in C^\infty(\bar{\Omega}) : \chi = \mathbf{0} \text{ en un entorno de } \Gamma_l\}$ , y definiendo  $H^{prim}$ ,  $V^{prim}$  y  $Y^{prim}$  como las clausuras de  $\mathcal{V}$  para las normas  $\|\tilde{\Phi}\|_{H^{prim}} = \|\tilde{\varphi}\|_{(L^2(\Omega))^2}$ ,  $\|\tilde{\Phi}\|_{V^{prim}} = \|\tilde{\varphi}\|_{(H^1(\Omega))^2}$  y  $\|\tilde{\Phi}\|_{Y^{prim}} = \|\tilde{\varphi}\|_{(H^2(\Omega))^2}$  respectivamente, donde  $\tilde{\varphi} = (\tilde{\Phi}_1, \tilde{\Phi}_2)$ , obtenemos el siguiente resultado [3]:

**Teorema 13** *En las hipótesis del Teorema 12, si suponemos además que:*

$$\begin{aligned} \|\mathbf{V}_0^\delta\|_{(L^2(\Omega))^2}^2 + \|\delta W_0^\delta\|_{L^2(\Omega)}^2 &\leq C_{inic}, \\ \mathbf{V}_0^\delta &\rightharpoonup \mathbf{V}_0 \quad \text{en } L^2(\Omega)^2\text{-débil*}, \end{aligned} \quad (36)$$

entonces, existe una subsucesión de  $\mathbf{U}^\delta = (\mathbf{V}^\delta, W^\delta)$  (obtenida por el reescalamiento (33) de una solución  $\mathbf{u}^\delta$  de las ecuaciones de Navier-Stokes) que converge a  $\mathbf{U} = (\mathbf{V}, W)$  en el sentido siguiente:

$$\begin{aligned} (\mathbf{V}^\delta, W^\delta) &\rightarrow (\mathbf{V}, W) \quad \text{en } L^2(0, T; V^{Prim})\text{-débil} \\ \mathbf{V}^\delta &\rightarrow \mathbf{V} \quad \text{en } L^\infty(0, T; L^2(\Omega)^2)\text{-débil*}. \end{aligned} \quad (37)$$

Además,  $\mathbf{U} = (\mathbf{V}, W)$  es una solución débil del sistema (34); es decir,  $\forall \tilde{\Phi} = (\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}) \in C^1([0, T]; \mathcal{V})$  con  $\tilde{\Phi}(T) = 0$ ,

$$\left\{ \begin{aligned} & - \int_0^T \int_\Omega \mathbf{V} \cdot (\partial_t \tilde{\varphi} + \mathbf{U} \cdot \nabla \tilde{\varphi}) d\Omega dt + \int_0^T \int_\Omega k \mathbf{V}^\perp \cdot \tilde{\varphi} d\Omega dt \\ & + \int_0^T \int_\Omega (\nu_h \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{V} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} \tilde{\varphi} + \nu_v \partial_Z \mathbf{V} \cdot \partial_Z \tilde{\varphi}) d\Omega dt \\ & + \int_0^T \nu_h \langle \nabla_{\mathbf{x}} \cdot (\mathbf{V}|_{\Gamma_b}), \tilde{\varphi}|_{\Gamma_b} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} h \rangle_{H^{-1/2}(S), H^{1/2}(S)} + \nu_h \int_0^T \int_{\Gamma_b} \mathcal{H} \mathbf{V} \cdot \tilde{\varphi}(-n^Z) \\ & + \int_0^T \int_{\Gamma_s} \bar{\alpha} |\mathbf{v}_{air}| (\mathbf{V} - \mathbf{v}_{air}) \cdot \tilde{\varphi} + \int_0^T \int_{\Gamma_b} \bar{\gamma} \mathbf{V} \cdot \tilde{\varphi}(-n^Z) = \int_\Omega \mathbf{V}_0 \cdot \tilde{\varphi}(0) d\Omega \end{aligned} \right. \quad (38)$$

que verifica, además, la desigualdad de energía, para todo  $t \geq 0$ ,

$$\begin{aligned} \|\mathbf{V}(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_0^t \int_\Omega \left( \nu_h |\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{V}|^2 + \frac{\nu_v}{2} |\partial_Z \mathbf{V}|^2 \right) d\Omega ds \\ + \int_0^t \int_{\Gamma_s} \bar{\alpha} |\mathbf{v}_{air}| \|\mathbf{V}\|^2 + \int_0^t \int_{\Gamma_b} \bar{\gamma} |\mathbf{V}|^2 (-n^Z) \leq C_{inic} + \int_0^t \int_{\Gamma_s} \bar{\alpha} |\mathbf{v}_{air}|^3. \end{aligned} \quad (39)$$

**Nota 9** *El límite cuando  $\delta \rightarrow 0$  de las hipótesis (27) nos da las correspondientes hipótesis de disipación para el problema límite (34).*

**Esquema de la demostración:** Haciendo el cambio de variable (33) en la formulación variacional (28) y tomando funciones test adecuadas, podemos demostrar que la sucesión  $(\mathbf{V}^\delta, W^\delta)$  está acotada en  $L^2(0, T; V^{prim})$  y  $\mathbf{V}^\delta$  en  $L^\infty(0, T; L^2(\Omega)^3)$ . Entonces existe una subsucesión (que denotaremos de la misma forma) convergente como en (37). Esto nos permite concluir la convergencia de los términos lineales de la formulación variacional.

También se puede demostrar que  $\mathbf{V}^\delta$  converge fuerte a  $\mathbf{V}$  en  $L^2(0, T; L^2(\Omega)^2)$ , usando una variante dada en [1], de la compacidad en espacios  $L^p$  con valores

en un Banach [16], lo que permite la convergencia de los términos no lineales. Asimismo, la hipótesis (36) sobre los datos iniciales garantiza la convergencia de los términos dependientes de los datos iniciales.

Por último, para obtener la convergencia de los términos de frontera, usamos la convergencia fuerte de  $\mathbf{V}^\delta$  y ciertas desigualdades de interpolación (ver [3] y [15] para los detalles). ■

**Nota 10** *Aplicando el Lema de De Rham ([16]) en las formulaciones variacionales asociadas al problema aproximado (25) y al problema límite (34), podemos recuperar los potenciales respectivos  $P^\delta$  y  $P$ , como distribuciones, tales que las ecuaciones de momentos relativas a (25) reescaladas con (33) y las ecuaciones de momentos relativas a (34) se satisfacen en  $H^{-1}(0, T; H^{-1}(\Omega)^3)$  (espacio dual de  $H_0^1(0, T; (H_0^1(\Omega))^3)$ ) y en  $H^{-1}(0, T; (W^{-1, r'}(\Omega))^3)$  (espacio dual de  $H_0^1(0, T; (W_0^{1, r}(\Omega))^3)$ ) respectivamente, siendo  $r > 2$  y  $r'$  su exponente conjugado. Además, considerando la convergencia del resto de términos en las ecuaciones de momentos, podemos probar:*

$$\begin{aligned} \nabla_{\mathbf{x}} P^\delta &\rightarrow \nabla_{\mathbf{x}} P \quad \text{en } H^{-1}(0, T; (W^{-1, r'}(\Omega))^2)\text{-débil} \\ \|\partial_Z P^\delta\|_{H^{-1}(0, T; H^{-1}(\Omega))} &\leq C\delta. \end{aligned}$$

En particular, obtenemos convergencia fuerte de  $\partial_Z P^\delta$  a  $\partial_Z P (= 0)$  en  $H^{-1}(0, T; H^{-1}(\Omega))$ .

Llegados a este punto, sólo nos queda identificar las condiciones de contorno verificadas por la solución variacional límite  $(\mathbf{V}, W)$  obtenida en el Teorema anterior. Llamando  $T$  al tensor de esfuerzos:

$$T = \begin{pmatrix} \nu_h \partial_{x_1} V_1 - P & \nu_h \partial_{x_2} V_1 & \nu_v \partial_Z V_1 \\ \nu_h \partial_{x_1} V_2 & \nu_h \partial_{x_2} V_2 - P & \nu_v \partial_Z V_2 \\ 0 & 0 & -P \end{pmatrix},$$

obtenemos que  $\nabla \cdot T \in H^{-1}(0, T; L^1(\Omega)^3)$ . Por otra parte, también se tiene que  $T \in H^{-1}(0, T; L^1(\Omega)^{3 \times 3})$ . Estas regularidades nos permiten definir la traza normal de  $T$  en  $(W^{1, \infty}(\partial\Omega)^3)'$ , donde  $W^{1, \infty}(\partial\Omega) = \{\phi|_{\partial\Omega} : \phi \in W^{1, \infty}(\Omega)\}$ , dotado de la norma:

$$\begin{aligned} \|\chi\|_{W^{1, \infty}(\partial\Omega)} &= \inf_{\phi \in W^{1, \infty}(\Omega)} \|\phi\|_{W^{1, \infty}(\Omega)}, \\ \phi|_{\partial\Omega} &= \chi, \end{aligned}$$

como

$$\begin{aligned} \langle T\mathbf{n}; (\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}) \rangle &= \int_{\Omega} T \cdot \nabla(\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}) + \int_{\Omega} (\nabla \cdot T) \cdot (\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}) \\ &= \int_{\Omega} (\nu_h \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{V} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} \tilde{\varphi} + \nu_v \partial_Z \mathbf{V} \cdot \partial_Z \tilde{\varphi}) \\ &\quad - \int_{\Omega} P \nabla \cdot (\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}) + \int_{\Omega} (\nabla \cdot T) \cdot (\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}), \end{aligned} \tag{40}$$



para todo  $(\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}) \in (W^{1,\infty}(\Omega))^3$ . Esta desigualdad se satisface en  $\mathcal{D}'(0, T)$ . Partiendo de la definición de traza normal para  $T$  en  $(W^{1,\infty}(\partial\Omega)^3)'$ , vamos a probar que la traza normal para el tensor

$$\mathcal{F} = \begin{pmatrix} \nu_h \partial_{x_1} V_1 & \nu_h \partial_{x_2} V_1 & \nu_v \partial_Z V_1 \\ \nu_h \partial_{x_1} V_2 & \nu_h \partial_{x_2} V_2 & \nu_v \partial_Z V_2 \end{pmatrix}$$

está definida en  $(W^{1,\infty}(\partial\Omega)^2)'$ . Con este objetivo, para cada  $\tilde{\varphi} \in (W^{1,\infty}(\Omega))^2$  consideramos  $\tilde{\psi}$  de tal forma que  $(\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}) \cdot \mathbf{n} = 0$  sobre  $\partial\Omega$ . Así, podemos definir  $\langle \mathcal{F}\mathbf{n}; \tilde{\varphi} \rangle_{(W^{1,\infty}(\partial\Omega)^2)' \times (W^{1,\infty}(\partial\Omega))^2}$  por la expresión:

$$\langle \mathcal{F}\mathbf{n}; \tilde{\varphi} \rangle = \langle T\mathbf{n}; (\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}) \rangle. \quad (41)$$

Las expresiones (40) y (41) nos permitirán encontrar las condiciones de contorno que aparecen en (34).

## 4.2 Resultados de regularidad y unicidad para el modelo 2D.

Nos centramos ahora en el modelo obtenido por paso al límite en la subsección anterior para el caso de un dominio 2D, definido como:

$$\Omega = \{(x, z) \in \mathbb{R}^2 / x \in S, -h(x) < z < 0\},$$

siendo  $S$  un intervalo abierto y  $h : \bar{S} \rightarrow \mathbb{R}_+$  una función continua no negativa que se anula sobre  $\partial S$ . La frontera del dominio es  $\partial\Omega = \bar{\Gamma}_b \cup \Gamma_s$  donde:

$$\Gamma_b = \{(x, z) \in \mathbb{R}^2 : x \in S, z = -h(x)\}, \quad \Gamma_s = \{(x, 0), x \in S\}.$$

El método que seguimos sigue siendo válido si consideramos paredes laterales.

Estudiamos entonces la velocidad del fluido  $(v, w)$  y la presión  $p$  que satisfacen el siguiente sistema:

$$(EP) \begin{cases} \partial_t v + v \partial_x v + w \partial_z v - \nu_h \partial_x^2 v - \nu_v \partial_z^2 v + \partial_x p = f & \text{en } (0, T) \times \Omega, \\ \partial_z p = 0 & \text{en } (0, T) \times \Omega, \quad \langle v \rangle = 0 & \text{en } (0, T) \times S, \\ \nu_v \partial_z v|_{\Gamma_s} = \alpha |v_{air}| (v_{air} - v), \quad \nu_v \partial_z v|_{\Gamma_b} = \beta(x) v & \text{en } (0, T), \\ v|_{t=0} = v_0 & \text{en } \Omega \end{cases}$$

donde

$$w(t, x, z) = \int_z^0 \partial_x v(t, x, \xi) d\xi \quad \text{y} \quad \langle v \rangle(t; x) = \int_{-h(x)}^0 v(t; x, z) dz.$$

**Nota 11** Denotamos por  $f : (0, T) \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  una fuerza externa,  $v_{air} : (0, T) \times S \rightarrow \mathbb{R}$  la velocidad horizontal del aire sobre la superficie y  $v_0 : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  la velocidad horizontal inicial. Finalmente,  $\alpha \in \mathbb{R}$  es una constante positiva y  $\beta = \beta(x)$  una función positiva definida en  $S$  (que depende de la rugosidad del fondo). Lógicamente, hemos considerado una viscosidad anisótropa  $(\nu_h, \nu_v)$ .

**Nota 12** *El modelo de Ecuaciones Primitivas con condiciones de Navier deducido anteriormente, estaba formado por  $(EP)_1$ ,  $\partial_z p = 0$  y  $\partial_x v + \partial_z w = 0$  en  $(0, T) \times \Omega$ , y las condiciones de contorno  $\nu_v \partial_z v = \alpha(v_{air} - v)$ ,  $w = 0$  sobre  $(0, T) \times \Gamma_s$ ,  $\nu_v \partial_z v = \beta v$  y  $(v, w) \cdot \mathbf{n} = 0$  sobre  $(0, T) \times \Gamma_b$ , y  $v|_{t=0} = v_0$  en  $\Omega$ . Así pues, la ecuación  $\partial_x v + \partial_z w = 0$  junto con las condiciones de contorno para  $w$  permite deducir que  $w(t; x, z) = \int_z^0 \partial_x v(t; x, s) ds$  y  $\partial_x \langle v \rangle = 0$ . Como  $\langle v \rangle$  es una función de una variable, la hipótesis  $\langle v \rangle = 0$  sobre  $(0, T) \times \partial S$  implica que  $\langle v \rangle = 0$  sobre  $(0, T) \times S$ .*

Introducimos los siguientes espacios funcionales:

$$\mathcal{V} = \{ \varphi \in C_s^\infty(\overline{\Omega}) : \langle \varphi \rangle = 0 \text{ en } S \},$$

donde  $C_s^\infty(\overline{\Omega})$  es el espacio de funciones regulares sobre  $\overline{\Omega}$  que se anulan en un entorno de  $\partial S$ ;  $H$  y  $V$  las clausuras de  $\mathcal{V}$  para las normas de  $L^2(\Omega)$  y  $H^1(\Omega)$ , respectivamente.

En esta subsección usaremos la regularidad débil, que ya ha sido demostrada por un procedimiento asintótico (a partir de las ecuaciones de Navier-Stokes con condición de Navier) en la subsección anterior, y demostraremos una regularidad intermedia entre la débil y la fuerte que nos permitirá concluir en particular la unicidad de solución débil. Éste ha sido el trabajo hecho en [4] y desarrollado en un capítulo de [15]. Concretamente las definiciones son las siguientes:

**Definición 4 (Solución débil)** *Decimos que  $v$  es una solución débil de  $(EP)$  en  $(0, T)$  si:*

$$v \in L^\infty(0, T; H) \cap L^2(0, T; V) \quad y \quad w(x, z) = \int_z^0 \partial_x v(x, s) ds$$

satisfacen la formulación variacional:  $\forall \varphi \in C^1([0, T]; \mathcal{V})$  con  $\varphi(T) = 0$ ,

$$\begin{aligned} & - \int_0^T \int_\Omega (\partial_t \varphi + v \partial_x \varphi + w \partial_z \varphi) v d\Omega dt + \int_0^T \int_\Omega (\nu_h \partial_x v \partial_x \varphi + \nu_v \partial_z v \partial_z \varphi) d\Omega dt \\ & + \int_0^T \int_S \beta(x) \left( 1 + \frac{\nu_h}{\nu_v} |h'(x)|^2 \right) v|_{\Gamma_b} \varphi|_{\Gamma_b} dx dt \\ & + \int_0^T \int_S \alpha |v_{air}| (v|_{\Gamma_s} - v_{air}) \varphi|_{\Gamma_s} dx dt \\ & = \int_\Omega v_0 \varphi(0) d\Omega + \int_0^T \int_\Omega f v d\Omega dt + \nu_h \int_0^T \int_S v|_{\Gamma_b} \partial_x [\varphi|_{\Gamma_b} h'(x)] dx dt, \end{aligned} \tag{42}$$

y la desigualdad de energía:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \|v(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \nu_h \int_0^t \|\partial_x v(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 ds + \nu_v \int_0^t \|\partial_z v(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 ds \\ & + \int_0^t \int_S \gamma(x) |v|_{\Gamma_b}|^2 dx ds + \frac{1}{2} \int_0^t \int_S \alpha |v_{air}| |v|_{\Gamma_s}|^2 dx ds \\ & \leq \frac{1}{2} \|v_0\|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_0^t \int_\Omega f v d\Omega ds + \frac{1}{2} \int_0^t \int_S \alpha |v_{air}|^3 dx ds \end{aligned} \quad (43)$$

con  $\gamma(x) = \left\{ \beta(x) \left( 1 + \frac{\nu_h}{\nu_v} |h'(x)|^2 \right) - \frac{\nu_h}{2} h''(x) \right\}$ . ■

**Nota 13** Para asegurar que el sistema es disipativo, necesitaremos imponer que  $\gamma(x) \geq 0$ . Dicha hipótesis resulta ser la hipótesis límite en el caso 2D de (27) cuando  $\delta \rightarrow 0$ .

**Definición 5 (Solución débil-vorticidad)** Diremos que  $v$  es una solución débil-vorticidad de (EP) en  $(0, T)$  si es una solución débil, que satisface además la regularidad adicional:

$$\partial_z v \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega)) \cap L^2(0, T; H^1(\Omega)).$$

**Nota 14** Esta regularidad adicional para  $\partial_z v$  implica que  $v$  verifica las condiciones de contorno en el fondo y en la superficie en el sentido de las trazas. Además,  $\partial_z v$  se puede identificar con la vorticidad de las Ecuaciones Primitivas, ya que es el límite de la vorticidad del sistema de ecuaciones de Navier-Stokes 2D, de ahí su denominación.

Enunciamos entonces el resultado principal:

**Teorema 14** Sea  $h \in H^2(S)$  con  $|h'| > 0$  sobre  $\partial S$ ,  $\beta \in H_0^1(S)$ ,  $f \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$ ,  $\partial_z f \in L^2(0, T; H^{-1}(\Omega))$ ,  $v_{air} \in L^\infty(0, T; H_0^1(S))$ ,  $\partial_t v_{air} \in L^2(0, T; L^1(S))$ ,  $v_0 \in H$ ,  $\partial_z v_0 \in L^2(\Omega)$ . Si además  $\gamma(x) \geq 0$  en  $S$ , y la función profundidad  $h$  satisface  $|h'(x)|/h(x) \leq c/\text{dist}(x, \partial S)$  en  $S$ , entonces existe una única solución débil para (EP) en todo  $(0, T)$ . Dicha solución es, además, una solución débil-vorticidad.

**Esquema de la demostración:** La búsqueda de soluciones débil-vorticidad responde al objetivo de obtener unicidad del modelo de (EP). En efecto, aplicando el argumento de unicidad hecho por ejemplo en P. L. Lions [13] al caso de (EP), observamos que una condición necesaria de unicidad es que una de las soluciones débiles verifique que  $\partial_z v \in L^4(0, T; L^4(\Omega))$ , ver Nota 4. Para conseguir dicho objetivo, buscamos de qué problema es solución  $\partial_z v$ . Derivando formalmente (EP)<sub>1</sub> respecto de  $z$ , obtenemos que  $\partial_z v$  satisface en  $\mathcal{D}'((0, T) \times \Omega)$ :

$$\partial_t(\partial_z v) + v \partial_x(\partial_z v) + w \partial_z(\partial_z v) - \nu_h \partial_x^2(\partial_z v) - \nu_v \partial_z^2(\partial_z v) = \partial_z f.$$

Conocidas  $v$  y  $w$ , la ecuación anterior es lineal y parabólica para  $\partial_z v$ , y además la presión ha desaparecido al no depender de  $z$ . Por tanto, podemos esperar

regularidad débil para  $\partial_z v$ . Lo que ocurre es que como las condiciones de contorno para  $\partial_z v$  sobre  $\Gamma_s$  y  $\Gamma_b$  dependen de  $v$  (y  $v$  y  $p$  están acopladas en el problema (EP)), en realidad el problema que verifica  $\partial_z v$  también depende de la presión. Levantando las condiciones de contorno no homogéneas del sistema verificado por  $\partial_z v$ , con la función auxiliar:

$$\psi = \nu_v \partial_z v - \phi v - e$$

donde

$$\begin{cases} \phi(t; x, z) = -\alpha \left(1 + \frac{z}{h(x)}\right) |v_{air}(t; x)| - \frac{z}{h(x)} \beta(x) \\ e(t; x, z) = \alpha |v_{air}(t; x)| v_{air}(t; x) \left(1 + \frac{z}{h(x)}\right) \end{cases}$$

son funciones que garantizan que  $\psi|_{\partial\Omega} = 0$ , llegamos a que  $\psi$  verifica el problema:

$$(P) \begin{cases} \partial_t \psi + v \partial_x \psi + w \partial_z \psi - \nu_v \partial_{xx}^2 \psi - \nu_v \partial_{zz}^2 \psi = F & \text{en } (0, T) \times \Omega, \\ \psi = 0 & \text{sobre } (0, T) \times \partial\Omega, \\ \psi|_{t=0} = \nu_v \partial_z v_0 - \phi|_{t=0} v_0 - e|_{t=0} & \text{en } \Omega, \end{cases}$$

donde  $F = G(\phi, v, w, e, f) + \phi \partial_x p$ , para una cierta función  $G$ .

Los problemas a resolver llegados a este punto son dos: por una parte, necesitamos para la presión mayor regularidad de la habitual para obtener una solución débil de (P). En segundo lugar, y una vez obtenida  $\psi$ , necesitamos identificar  $\psi + \phi v + e$  con  $\nu_v \partial_z v$ , donde la dificultad está en que  $\nu_v \partial_z v$  en principio sólo tiene regularidad  $L^2(0, T; L^2(\Omega))$ .

El siguiente lema garantiza una cierta regularidad con peso para la presión que a posteriori será suficiente para obtener una solución débil del problema (P).

**Lema 15** *En las hipótesis del Teorema 14, si  $(v, w)$  es una solución débil de (EP), entonces se verifica:*

$$\sqrt{h} \partial_x p \in L^2(0, T; H^{-1}(S)).$$

**Nota 15** *Aquí estamos identificando la presión  $p$  como una distribución dependiente sólo de  $x$ , usando que  $\partial_z p = 0$  (ver [4] y [15], para más detalles sobre esta identificación).*

**Esquema de la demostración:** En el marco de Navier-Stokes, la regularidad de la presión se obtiene a partir de la regularidad del resto de los términos de la ecuación de momentos, en el que el término de evolución  $\partial_t v$  implica sólo una regularidad dual de tipo  $H^{-1}$  en tiempo. En este caso, aprovechando que  $\langle v \rangle = 0$ , tenemos que  $\partial_t \langle v \rangle = 0$ , lo que permite vislumbrar mejoras en la regularidad de la presión si integramos previamente la ecuación en altura.

Para considerar el término de presión, usaremos una formulación variacional mixta, para funciones test  $\varphi \in C^1([0, T]; C_s^\infty(\bar{\Omega}))$  con  $\varphi(T) = 0$ , tales que existe una función  $\psi$  suficientemente regular verificando  $(\varphi, \psi) \cdot \mathbf{n}|_{\partial\Omega} = 0$ , de la forma:

$$\begin{aligned} & - \int_0^T \int_{\Omega} (\partial_t \varphi + v \partial_x \varphi + w \partial_z \varphi) v + \int_0^T \int_{\Omega} (\nu_h \partial_x v \partial_x \varphi + \nu_v \partial_z v \partial_z \varphi) \\ & + \int_0^T \int_S \delta(x) v|_{\Gamma_b} \varphi|_{\Gamma_b} + \int_0^T \int_S \alpha |v_{air}| (v|_{\Gamma_s} - v_{air}) \varphi|_{\Gamma_s} \\ & = \int_{\Omega} v_0 \varphi(0) + \int_0^T \int_{\Omega} f \varphi + \nu_h \int_0^T \int_S v|_{\Gamma_s} \partial_x (\varphi|_{\Gamma_b} h') + \int_0^T \int_{\Omega} p \nabla \cdot (\varphi, \psi). \end{aligned} \tag{44}$$

Centrándonos en la integral en presión, y como  $p$  es independiente de  $z$ ,  $\int_{\Omega} p \nabla \cdot (\varphi, \psi) d\Omega = \int_S p \partial_x \langle \varphi \rangle dx$ . En consecuencia, al tomar funciones test  $\varphi$  independientes de  $z$  se genera un factor  $h(x)$ . En particular, eligiendo  $\varphi = \zeta/\sqrt{h}$  con  $\zeta \in C_0^1([0, T]; C_0^\infty(S))$  como funciones test (que son densas en  $L^2(0, T; H_0^1(S))$ ), obtenemos para el término en presión:

$$\int_0^T \int_S p \partial_x (\sqrt{h} \zeta) dx dt.$$

Usando desigualdades de tipo Hardy (vertical) y las hipótesis sobre la función profundidad  $h$ , conseguimos (en [4]) acotar el resto de los términos de la formulación variacional mixta por  $C \|\zeta\|_{L^2(0, T; H_0^1(S))}$ , y concluimos la regularidad del enunciado. ■

Con la regularidad adicional para  $\partial_x p$  del Lema anterior, no resulta difícil obtener la existencia (y unicidad, dado que es un problema lineal) de solución débil  $\psi$  de  $(P)$ .

Nos queda entonces identificar  $\psi + \phi v + e$  con  $\nu_v \partial_z v$ . Como ya dijimos, la dificultad principal es que  $\partial_z v$  sólo tiene la regularidad  $L^2(0, T; L^2(\Omega))$ ; aunque se puede demostrar que  $\nu_v \partial_z v$  verifica  $(P)$  pero en el sentido de solución por trasposición. Si intentamos demostrar unicidad entre una solución débil y otra por trasposición del problema  $(P)$ , tendríamos que demostrar mayor regularidad de dicho sistema (lo cual no parece fácil dada la regularidad de la velocidad de convección  $v$ ). Lo que hacemos entonces es comparar  $v$  con una función adecuada  $\tilde{v}$  tal que  $\nu_v \partial_z \tilde{v} = \psi + \phi v + e$ . Para ello, llamamos  $a = \psi + \phi v + e$  y definimos la función:

$$\tilde{v}(x, z) = -\frac{1}{\nu_v} \int_z^0 a(x, s) ds + \frac{1}{\nu_v} \frac{1}{h(x)} \left( \int_{-h(x)}^0 \left( \int_z^0 a(x, s) ds \right) dz \right),$$

que se puede ver que verifica  $\tilde{v} \in L^2(0, T; H^1(\Omega)) \cap L^\infty(0, T; L^2(\Omega))$ ,  $\nu_v \partial_z \tilde{v} = a$  en  $\Omega$ ,  $\langle \tilde{v} \rangle = 0$  sobre  $S$ , y las mismas condiciones de contorno que  $v$ . Concretamente,  $\tilde{v}$  es solución de la e. d. p. :

$$\partial_t \tilde{v} + v \partial_x \tilde{v} + w \partial_z \tilde{v} - \nu_h \partial_{xx}^2 \tilde{v} - \nu_v \partial_{zz}^2 \tilde{v} + \partial_x \tilde{p}_s = G, \tag{45}$$

donde  $G = v \partial_x \tilde{v} + \int_z^0 \partial_x (v \partial_z \tilde{v})(x, s) ds + f$ . Es importante señalar que si  $\tilde{v} = v$ , entonces  $G = f$ . Aplicando ahora un razonamiento de unicidad y gracias a la regularidad adicional para  $\partial_z \tilde{v}$  (por ser solución débil-vorticidad), se puede concluir (ver [4, 15]) que  $v = \tilde{v}$ . ■

## Referencias

- [1] P. Azérad & F. Guillén, *Mathematical justification of the hydrostatic approximation in the Primitive Equations of Geophysical fluid dynamics*. Siam J. Math. Anal. ,Vol. 33, No. 4, 847-859.
- [2] O. Besson & M. R. Laydi, *Some Estimates for the Anisotropic Navier-Stokes Equations and for the Hydrostatic Approximation*, M<sup>2</sup>AN-Mod. Math. Ana.Nume., Vol. 7, 1992, pp. 855-865.
- [3] D. Bresch, F. Guillén-González, N. Masmoudi & M. A. Rodríguez-Bellido, *Asymptotic derivation of a Navier condition for the Primitive Equations*. Sometido a la revista *Asymptotic Anal.*
- [4] D. Bresch, F. Guillén-González, N. Masmoudi and M. A. Rodríguez-Bellido, *On the uniqueness of weak solutions of the two-dimensional Primitive Equations*. Aceptado en la revista *Diff. and Int. Eq.*
- [5] T. Chacón & F. Guillén, *An intrinsic analysis of existence of solutions for the hydrostatic approximation of the Navier-Stokes equations*, C. R. Acad. Sci. Paris, t. 330, Série I, pp. 841-846, 2000.
- [6] F. Guillén & M. V. Redondo, *Convergencia de algunos esquemas numéricos hacia el modelo evolutivo de Ecuaciones Primitivas*, Actas XVI CEDYA, VI CMA, University of Las Palmas de Gran Canaria 1999, pp. 1165-1172.
- [7] F. Guillén-González & M. A. Rodríguez-Bellido, *On the strong solutions of the 2D Primitive Equations problem*. Aparecerá en la revista *Journal of Nonlinear Analysis: Serie A Theory and Methods*, Vo. 50, 5 (2002), 621-646.
- [8] F. Guillén-González, N. Masmoudi & M. A. Rodríguez-Bellido, *Anisotropic estimates and strong solutions of the Primitive Equations*. *Diff. and Int. Eq.* , 14 (2001), no. 11, 1381-1408.
- [9] R. Lewandowski, *Analyse Mathématique et Océanographie*, Masson, 1997.
- [10] J. L. Lions, R. Teman, S. Wang, *New formulation of the primitive equations of the atmosphere and applications*. Nonlinearity, 5, 1992, pp. 237-288.
- [11] J. L. Lions, R. Teman, S. Wang, *On the equations of the large scale Ocean*. Nonlinearity, 5, 1992, pp. 1007-1053.
- [12] J.-L. Lions, R. Temam & S. Wang *Models of the Coupled Atmosphere and Ocean*, Computational Mechanics Advances, 1,(1993), pp. 5-54 and 55-119.

- [13] P.L. Lions, *Mathematical Topics in Fluids Mechanics*, Vol.1, Incompressible Models, Univ. Paris-Dauphine & École Polytechnique, Oxford Univ. Press. Inc., NY, 1996.
- [14] J. Pedlosky, *Geophysical fluid dynamics*, Springer-Verlag, (1987).
- [15] M. A. Rodríguez Bellido, *Análisis Matemático de Algunos Sistemas de Tipo Navier-Stokes: Fluidos Quasi-Newtonianos y Ecuaciones Primitivas del Océano*, Tesis Doctoral, Facultad de Matemáticas, Univ. Sevilla, Septiembre 2001.
- [16] J. Simon *Compact sets in the space  $L^p(0, T; B)$* , Annali di Matematica Pure ed Applicata (IV), Vol. CXLVI (1987), pp. 65-96.
- [17] M. Ziane, *Regularity Results for Stokes Type Systems*. Applicable Analysis, Vol. 58, 1995, pp. 263-292.