QÜESTIIÓ, Vol 11, nº 2, pp. 117–133, 1987

METODO PRIMAL DUAL PARA MODELOS DE PLANIFICACION CON COSTES CONCAVOS Y LIMITACIONES DE CAPACIDAD

L. ONIEVA, S. LOZANO, J. LARRAÑETA y R. RUIZ USANO
Universidad de Sevilla

Este trabajo estudia el problema de planificación de la producción representado por un modelo de costes cóncavos sujeto a limitaciones de capacidad. La relajación lineal del modelo es analizada usando un enfoque primal-dual. Las soluciones del dual se obtienen resolviendo para cada producto modelos sin restricciones de capacidad asignando un precio a las mismas. El primal reducido supone un test de admisibilidad de dichas soluciones. El dual reducido permite calcular los nuevos precios recomendados asociados a las restricciones de capacidad. El trabajo concluye con un algoritmo propuesto para seleccionar los sucesivos precios de forma que se garantice una mejora hacia la solución óptima.

Primal–dual approach to the capacitated production planning problem whith concave costs

Keywords: Production Planing, concave costs, primal–dual.

1. INTRODUCCION

La determinación de los lotes de fabricación es un tema permanentemente presente en producción. Esta determinación supone fijar el tamaño de los lotes y el calendario en que se realizan los lanzamientos de las órdenes de fabricación. Desde el punto de vista de la planificación el problema está bastante bien resuelto si se acepta la representación de los costes que intervienen como lineales.

–L. Onieva, S. Lozano, J. Larrañeta y R. Ruiz - Universidad de Sevilla - E.T.S.I.I. Departamento de Organización - Reina Mercedes s/n. - Sevilla 41012.
–Article rebut el octubre de 1986.

Otra situación para la que existen métodos de resolución eficaces es cuando se posee exceso de capacidad de producción, por lo que estas limitaciones no actúan. Esto permite considerar los productos independientemente, sin ligaduras, reduciéndose la planificación al cálculo del lote económico con demanda variable, eficientemente resuelto mediante el algoritmo de Wagner y Whitin [7].

Cuando las limitaciones de capacidad actúan, la consideración expresa de los costes fijos y consumos discontínuos de los recursos disponibles debido a las puestas a punto de los equipos para el lanzamiento de las series transforman el problema en difícil. Manne [4], Dzelinski y Gomory [2], Lasdon y Terjung [3] han desarollado formulaciones lineales enteras empleando el criterio de secuencias de fabricación dominantes de forma que los problemas resultantes son aproximadamente resueltos mediante el estudio del correspondiente problema lineal relajado aplicándole reglas de descomposición (Dantzing y Van Slyke (1967). La integridad de las soluciones es casi completa cuando el número de artículos excede ampliamente a las limitaciones de capacidad consideradas. Newson [5] propone un método heurístico aproximado motivado por la representación de estos problemas como grafos con costes cóncavos en los que las limitaciones de capacidad se imponen através de inadmisibilidades de algunos arcos.

En este trabajo se realiza un análisis que proviene de la formulación primal–dual de la relajación lineal del problema entero. El estudio de los subproblemas conduce a un método iterativo de gravar sucesivamente las secuencias de fabricación que dan lugar a un excesivo consumo de la capacidad, aproximándose a una solución óptima.

2. TERMINOLOGIA, NOTACION Y MODELO

El supuesto que se analiza corresponde a la planificación determinista con demanda variable y limitaciones de capacidad.

Notación:

N - el número de artículos en la planificación.

i - el número correspondiente a cada artículo $i = 1, 2 \ldots, N)$

L - el número de períodos en el horizonte de planificación.

t - el número correspondiente a cada período $(t = 1, 2 \ldots, L)$

x_{it} - unidades producidas del artículo i en el período t

I_{it} - unidades de inventario del producto i al final del período t

D_{it} - unidades de demanda del producto i en el período t

s_{it} - coste fijo en ptas. en el que se incurre por iniciar un lote de fabricación del artículo i en el período t

p_{it} - coste variable en pts/unidad del artículo i producida en el período t.

h_{it} - coste variable en pts./unidad período por mantener una unidad en inventario del final del período t hasta e l período $t + 1$.

k_t - capacidad disponible en el período t en (por ejemplo) horas.

a_{it} - capacidad fija consumida, en horas, en que se incurre al iniciar un lote de fabricación del artículo i en el período t.

$b_i t$ - consumo marginal de capacidad, en horas/unidad del artículo i producido en el período t.

Con estos elementos, un modelo que recoge el problema de encontrar un plan óptimo de producción que minimice los costes de producción e inventario es,

$$\text{min.} \quad \sum_{i=1}^{N} \sum_{t=1}^{L} (s_{it}\delta(x_{it}) + p_{it}x_{it} + h_{it}I_{it})$$

$$\text{s.a.} \quad I_{i,t-1} + x_{it}I_{it} = D_{it} \quad i = 1, \ldots, N; \quad t = 1, 2, \ldots, L$$

$$\sum_{i=1}^{N} (a_{it}\delta(x_{it}) + b_{it}x_{it}) \leq k_t \qquad t = 1, \ldots, L$$

$$x_{it} \geq 0, I_{it} \geq 0, \qquad I_{io} = 0$$

representando

$$\delta(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x > 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$$

En el análisis del modelo se considera el subconjunto de las formas de producción compuestas por secuencias dominantes. Se definen éstas como las que satisfacen la propiedad $x_{it} \cdot I_{i,t-1=0}$ para cada t. Corresponden a planes de producción en que

$$x_{it} = \sum_{k=t}^{t+s} D_{ik} \quad s = 0, 1, 2...$$

cubriendo cada lote la demanda de un número completo de períodos. Además los lotes se fabrican en períodos que se inician con inventario nulo. Dado que existen L períodos, el número de secuencias dominantes para cada artículo es de $F = 2^{L-1}$. Cada secuencia define una forma de producción y un inventario resultante en todo el horizonte:

$$X_{ij} = (x_{ij1}, x_{ij2}, \ldots, x_{ijL}) = (x_{ijt})$$

indica la secuencia dominante de producción $j(= 1, \ldots, 2^{L-1})$ aplicada en el artículo i.

$$I_{ij} = (I_{ij1}, I_{ij2}, \ldots, I_{ijL}) = (I_{ijt})$$

indica el inventario en todos los períodos, que resulta de emplear la secuencia X_{ij}.

Reescribiendo el modelo anterior con estos elementos resulta,

$$\begin{aligned}
\text{min.} \quad & \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{F} c_{ij}\theta_{ij} \\
\text{s. a.} \quad & \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{F} m_{ijt}\theta_{ij} \leq K_t \quad t = 1, 2 \ldots, L \\
& \sum_{j=1}^{F} \theta_{ij} = 1 \qquad\qquad i = 1, 2, \ldots, N \\
& \theta_{ij} = 0, 1 \qquad \text{para cada } i, j.
\end{aligned}$$

donde

$$c_{ij} = \sum_{t=1}^{L} (s_{it}\delta(x_{ijt}) + p_{it}x_{ijt} + h_{it}I_{ijt})$$

coste de producción e inventario de la secuencia x_{ij} en todo el horizonte.

$$m_{ijt} = a_{it}\delta(x_{ijt}) + b_{it}x_{ijt}$$

consumo de capacidad de la secuencia x_{ij} en el período t.

θ_{ij} - variable de decisión binaria indicando si se emplea o no la secuencia X_{ij}

El modelo de variables enteras resulta de grandes dimensiones, constando de $N+L$ restricciones y $N \cdot 2^{L-1}$ variables binarias.

El modelo analizado es la relajación continua.

$$
(1) \qquad
\begin{array}{lll}
\text{min.} & \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{F} c_{ij}\theta_{ij} & \\
\text{s.a.} & \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{F} m_{ijt}\theta_{ij} \leq k_t & t = 1,2,\ldots,L \\
& \sum_{j=1}^{F} \theta_{ij} = 1 & i = 1,2,\ldots,N \\
& \theta_{ij} \geq 0 &
\end{array}
$$

El desarrollo de esta formulación procede de Manne [4] y se encuentra expuesto en la forma aquí presentada en Bitran y Hax [1].

3. MODELOS PRIMAL-DUAL

A partir de (1) considerado como primal, llamado $\lambda_t, t = 1,2,\ldots,L$ a las variables asociadas con las restricciones de capacidad y $\pi_i, i = 1,2,\ldots,N$ a las correspondientes a la imposición de que las variables del primal sumen la unidad para cada artículo, resulta el problema

DUAL

$$
(2) \qquad
\begin{array}{ll}
\text{max.} & \sum_{i=1}^{N} \pi_i - \sum_{t=1}^{L} k_t\lambda_t \\
\text{s.a.} & \pi_i - \sum_{t=1}^{L} m_{ijt}\lambda_t \leq c_{ij} \quad i = 1,\ldots,N \;\; j = 1,\ldots,F \\
& \lambda_t \geq 0, \; \pi_i \text{ libres}
\end{array}
$$

Una solución admisible del problema (2) (λ, π) define un conjunto de índices $w(i)$ para cada $i = 1,2,\ldots,N$

$$w(i) \equiv \{j : \pi_i - \sum_{t=1}^{L} m_{ijt}\lambda_t = c_{ij}\}$$

Se plantea el problema PRIMAL–REDUCIDO como

$$\text{(3)} \qquad \begin{array}{ll} \min. & \sum_{t=1}^{L} y_t \\ \text{s.a.} & \sum_{i=1}^{N} \pi_i - \sum_{j \in w(i)} m_{ijt}\theta_{ij} + z_t - y_t = k_t \quad t = 1, 2, \ldots, L \\ & \sum_{j \in w(i)} \theta_{ij} = 1 \qquad\qquad\qquad\qquad i = 1, 2, \ldots, N \end{array}$$

$$\theta_{ij} \geq 0 \; j \in w(i), y_t \geq 0, z_t \geq 0$$

siendo y_t variables artificiales que recogen la inadmisibilidad al considerar solo las variables θ_{ij} para $j \in w(i)$.

El problema dual de este problema lineal, que llamamos DUAL–REDUCIDO es,

$$\text{(4)} \qquad \begin{array}{ll} \max. & \sum_{i=1}^{N} \alpha_i - \sum_{t=1}^{L} k_t\beta_t \\ \text{s.a.} & \sum_{t=1}^{L} m_{ijt}\beta_t \geq \alpha_i \;\; \text{para} \quad i = 1, 2, \ldots N \; j \in w(i) \\ & 1 \geq \beta_t \geq 0, \alpha_i \;\; \text{libres} \end{array}$$

El método parte de una solución inicial admisible para (2), en base a la cual se define (3) a través de los conjuntos $w(i)$. Si el problema (3) tiene solución con las variables artificiales y_t nulas, la solución de (3) proporciona la solución óptima de (1). Si no es así, la solución de partida (2) junto con la solución óptima de (4) proporciona una nueva solución de (2) más cercana a su óptimo que la anterior. En las siguientes secciones se propone una implantación particular del método adecuada a este problema.

4. SOLUCIONES ADMISIBLES DEL PROBLEMA DUAL

La obtención de soluciones (λ, π) que satisfagan las restricciones

$$\pi_i - \sum_{t=1}^{L} m_{ijt}\lambda_t \leq c_{ij} \quad i = 1,2,\ldots,N, \;\; j = 1,2,\ldots,F$$

$$\lambda_t \geq 0, \pi_i \text{ libre}$$

sigue de analizar la expresión de éstas. Obsérvese que

$$\pi_i \leq c_{ij} + \sum_{t=1}^{L} m_{ijt}\lambda_t$$

$$= \sum_{t=1}^{L} (s_{it}\delta(x_{ijt}) + p_{it}x_{ijt} + h_{it}I_{ijt}) + \sum_{t=1}^{L} (a_{it}\delta(x_{ijt}) +$$

$$+ b_{it}x_{ijt})\lambda_t = \sum_{t=1}^{L} \{(s_{it} + a_{it}\lambda_t)\delta(x_{ijt}) + (p_{it} + b_{it}\lambda_t)x_{ijt} + h_{it}I_{ijt}\}$$

Obviamente, cualquier vector $(\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_L)$ de pesos positivos puede ser empleado como "precios" del consumo de la capacidad para definir unos costes de producción fijos $s_{it} + a_{it}\lambda_t$ y variables $p_{it} + b_{it}\lambda_t$ con los que evaluar planes de fabricación independientes para cada artículo i, sin limitaciones de capacidad. La aplicación del método de programación dinámica de Wagner–Whitin [7] da lugar a un coste mínimo de fabricación para cada artículo. Estos valores son asignados a las variables π_i. De esta forma (λ, π) es una solución admisible de (2). Es decir

$$(5) \qquad \pi_i = \min_j \sum_{t=1}^{L} \{(s_{it} + a_{it}\lambda_t)\delta(x_{ijt}) + (p_{it} + b_{it}\lambda_t)x_{ijt} + h_{it}I_{ijt}\}$$

para cualquier conjunto de valores $\lambda_t \geq 0$. La solución de N problemas (5), uno para cada artículo i, proporciona la solución.

5. SOLUCIONES DEL PROBLEMA PRIMAL–REDUCIDO

El problema primal reducido correspondiente a una solución admisible al problema dual se concreta en la comprobación de si se cumplen o no las condiciones de complementariedad si sólo permitimos intervenir en el plan de producción a las secuencias j que dan lugar al coste mínimo en la planificación sin restricciones del artículo i con precios de la capacidad λ_t.

Las restricciones de capacidad para cada período t equivalen a

$$\sum_{i=1}^{N} \sum_{j \in w(i)} (a_{it}\delta(x_{ijt}) + b_{it}x_{ijt})\theta_{ij} + (z_t - y_t) = k_t$$

siendo las variables θ_{ij} indicadores en el problema lineal. Si sólo una secuencia alcanza el óptimo en la resolución del problema (5) correspondiente al artículo i, $w(i)$ consta de un único elemento, con lo que $\theta_{ij} = 1$ en el problema primal reducido para esa secuencia y cero para todas las demás. Si son varias las secuencias que resuelven el problema (5) de un artículo i, la restricción

$$\sum_{j \in w(i)} \theta_{ij} = 1$$

permite la consideración fraccionada de dos secuencias. En ese caso se requiere la resolución del problema primal reducido.

La variable y_t recoge el exceso de capacidad empleado en el período t al sólo considerar las secuencias en $w(i)$. Nótese que este valor es una subestimación sobre el valor real del exceso de capacidad solicitado ya que se consideran divisibles los consumos fijos de recurso a_{it}, caso de que varias variables θ_{ij} sean positivas para el mismo i.

Este problema tiene $N + L$ en la solución óptima. Además, al menos una secuencia por artículo forma parte de la solución, por lo que si el número de secuencias θ_{ij} en la solución es $M(> N)$ ha de haber $M - N$ períodos en que la capacidad se satura. ($z_t = y_t = 0$ en dichos períodos). Llamemos c^+ al conjunto de períodos en los que y_t es positiva, y c° al conjunto de aquellos otros en que se satura la capacidad.

La solución óptima del primal reducido es

$$\theta^*_{ij} > 0 \quad \text{para cada } i, j \in w^*(i) \subset w(i)$$

$$\begin{aligned} y^*_t = {} & \max \{\sum_{i=1}^{N} \sum_{j \in w^*(i)} (a_{it}\delta(x_{ijt}) + b_{it}x_{ijt})\theta^*_{ij} - k_{t'}0\} \\ = {} & \sum_{i=1}^{N} \sum_{j \in w^*(i)} m_{ijt}\theta^*_{ij} - k_t \quad \text{para} \quad t \in c^+ \\ z^*_t = {} & \max \{(k_t - \sum_{i=1}^{N} \sum_{j \in w^*(i)} (a_{it}\delta(x_{ijt}) + b_{it}x_{ijt})\theta^*_{ij}, 0\} = \end{aligned}$$

$$= k_t - \sum_{i=1}^{N} \sum_{j \in w^*(i)} m_{ijt}\theta_{ij}^* \quad \text{para} \quad t \notin c^+, c^\circ$$

6. SOLUCIONES DEL PROBLEMA DUAL–REDUCIDO

Conocida la solución del problema (3), la solución de su dual (4) es,

$$\beta_t^* \begin{cases} 1 & \text{para} \quad t \in c^* \\ 0 & \text{para} \quad t \notin c^+ U c^\circ \\ c_t & \text{para} \quad t \in c^\circ \end{cases}$$

$$\alpha_i^* = \sum_{t \in c^+ U c^\circ} m_{ijt}\beta_{t'}^*, \; j \in w^*(i)$$

siendo $1 > c_t > 0$ un peso asignado al consumo de capacidad en el período t de c° (en el que se consume exactamente la capacidad disponible) de forma que las secuencias del mismo artículo que intervienen en la solución consumen la misma capacidad en los períodos de interés: $c^+ U c^\circ$

Con estos valores, se observa que las restricciones del problema (4) se satisfacen ya que α_i^* refleja el consumo de capacidad de las secuencias básicas θ_{ij} en los períodos de interés: evaluando la capacidad consumida en c^+ y valorando según c_t la de los períodos c°.

Sea W el valor de la función objetivo de (4) para esta solución. Entonces,

$$W = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i^* - \sum_{t=1}^{L} k_t\beta_t^* \quad \begin{pmatrix} \text{por definición de } \beta_t^*, \\ \text{para cualquier } j \text{ en } w^*(i)) \end{pmatrix}$$

$$= \sum_{i=1}^{N} \sum_{t=1}^{L} m_{ijt}\beta_t^* - \sum_{t=1}^{L} k_t\beta_t^* \quad [\beta_t^* = 0 \; \text{ para } \; t \notin c^+ U c^\circ]$$

$$= \sum_{i=1}^{N} \sum_{t \in c^+ U c^\circ} m_{ijt}\beta_t^* - \sum_{t \in c^+ U c^\circ} k_t\beta_t^* =$$

$$\begin{pmatrix} \text{cuando } |w^*(i)| > 1, \sum_t m_{ijt}\beta_t^* \text{ vale lo mismo} \\ \text{para cada } j \text{ de } w^*(i) \text{ y } \sum_{j \in w^*(i)} \theta_{ij} = 1 \end{pmatrix}$$

$$= \sum_{i=1}^{N} \sum_{j \in w^*(i)} \theta_{ij}^* \sum_{t \in c^+ U c^\circ} m_{ijt}\beta_t^* - \sum_{t \in c^+ U c^\circ} k_t\beta_t^*$$

$$= \sum_{t\in c^+} \left[\sum_{i=1} \sum_{j\in w^*(i)} \theta^*_{ij} m_{ijt} - k_t \right]$$

$$+ \sum_{t\in c^\circ} \beta^*_t \left[\sum_{i=1}^{N} \sum_{j\in w^*(i)} \theta^*_{ij} m_{ijt} - k_t \right] =$$

$$\left(\begin{array}{l} \text{siendo} \\ \sum_{i=1}^{N} \sum_{j\in w^*(i)} \theta^*_{ij} m_{ijt} = k_t \quad \text{para} \quad t \in c^\circ \end{array} \right)$$

$$= \sum_{t\in c^+} \left[\sum_{i=1}^{N} \sum_{j\in w^*(i)} \theta^*_{ij} m_{ijt} - k_t \right]$$

$$= \sum_{t\in c^+} y^*_t \qquad [y^*_t = 0 \ \text{ para } \ t \notin c^+] = \sum_{i=1}^{L} y^*_t$$

Nótese que los valores concretos de $(\beta^*_t; t \in c^\circ)$ no influyen en la igualdad de las funciones objetivo del PRIMAL REDUCIDO y del DUAL REDUCIDO. Dichos valores se calculan a posteriori con los valores fijados de $(\{\beta^*_t; t \in c^+\})$ resolviendo un sistema de $M - N$ ecuaciones lineales con $M - N$ variables (c_t).

7. GENERACION DE NUEVAS SOLUCIONES ADMISIBLES DEL DUAL

Todo el estudio realizado se ha basado en partir de una solución admisible del problema dual (λ, π). Construido y resuelto el problema primal reducido correspondiente, la optimalidad de (λ, π) es equivalente a que todas las variables y_t sean nulas. De no ser así, generamos una nueva solución admisible (λ^N, π^N) a través de la expresión

$$(\lambda^N, \pi^N) = (\lambda^A, \pi^A) + \varepsilon(\beta^*, \alpha^*),$$

donde (λ^A, π^A) representa la solución actual del dual.

La determinación de ε depende de las condiciones que se pretende satisfaga (λ^N, π^N). Llamando r_{ij} a las holguras de las restricciones del dual con la solución (λ^A, π^A) $r_{ij} \equiv c_{ij} + \sum_t \lambda^A_t m_{ijt} - \pi^A_i$, la condición de admisibilidad de (λ^N, π^N) en (2) equivale a

$$r_{ij} \geq \varepsilon(\alpha_i^* - \sum_{t=1}^{L} m_{ijt}\beta_t^*)$$

para todos los artículos i y sus secuencias j.

Obsérvese que

$$\alpha_i^* - \sum_{t=1}^{L} m_{ijt}\beta_t^* = \begin{cases} < 0 & \text{para cada } i,j \in w(i) - w^*(i) \\ 0 & \text{para cada } i,j \in w^*(i) \\ \lesseqgtr 0 & \text{para cada } i,j \notin w(i) \end{cases}$$

Las secuencias que no intervienen en el primal reducido (es decir: $j \notin w(i)$) pueden consumir más o menos recurso en los períodos de interés $(\sum_{t=1}^{L} m_{ijt}\beta^*)$ que las ya consideradas $(j \in w^*(i))$. Las primeras no son de interés, pero las que consumen menos sí. Entre las últimas hay que considerar aquellas en las que el incremento de coste en relación a la disminución de consumo de capacidad sea menor. Obsérvese que precisamente

$$\varepsilon \leq \left\{ \frac{(c_{ij} + \sum_t m_{ijt}\lambda_t^A) - \pi_i^A}{\alpha_i^* - \sum_t m^{ijt}\beta_t^*} : \alpha_i^* > \sum_t m_{ijt}\beta_t^* \right\}$$

$$= \left\{ \frac{\pi_{ij} - \pi_i^A}{\alpha_i^* - \alpha_{ij}} : \alpha_i^* > \alpha_{ij} \right\}$$

siendo $\pi_{ij} = c_{ij} + \sum_t m_{ijt}\lambda_t^A$, el coste de la secuencia j del artículo $i; \alpha_{ij} = \sum_t m_{ijt}\lambda_t^*$, el consumo de capacidad de esa secuencia en los períodos de interés.

Desde un punto de vista operativo, las condiciones que ha de satisfacer ε se pueden reescribir como

$$\pi_i^A + \varepsilon\alpha_i^* \leq c_{ij} + \sum_{t=1}^{L} m_{ijt}(\lambda_t^A + \varepsilon\beta_t^*)$$

para cada i, j.

Una forma de calcular un valor de ε elevado que satisfaga esto es por exploración:

– Fijar

$$\varepsilon = \min_i \left\{ \frac{c_{ij}^* + \sum\limits_i m_{ij^*t}\lambda_t^A - \pi_i^A}{\alpha_i^* - \alpha_{ij}^*} \right\}$$

donde la secuencia j^* se elige de forma que

$$\delta(x_{ij^*t}) = \begin{cases} 0 & \text{si } \ t \in c^+Uc^\circ - \{1\} \\ 1 & \text{si } \ t = 1 \\ 1 & \text{si } \ t \notin c^+Uc^\circ \end{cases}$$

y por tanto $\alpha_{ij}^* = \sum\limits_{t \in c^+Uc^\circ} m_{ij^*t}\beta_t^* = m_{ij^*1}\beta_1^*$.

– A continuación se resuelve para cada artículo, sucesivamente,

$$\min_j \{c_{ij} + \sum_{t=1}^{L} m_{ijt}(\lambda_t^A + \varepsilon\beta_t^*)\}$$

comparándolo con $\pi_i^A + \varepsilon\alpha_i^*$. Si lo satisface, repetir para el artículo siguiente. Si no, hacer $\varepsilon + \frac{\varepsilon}{2}$, reiniciando el proceso a partir del primer artículo para el que no se cumplía la condición. Si en todos ellos se satisface, incrementar ε en la mitad del intervalo al más pequeño anteriormente explorado para el que no se satisfacía. Permitiendo un cierto grado de tolerancia, se determina finalmente el valor deseado de ε. El diagrama de flujo refleja este algoritmo.

Obsérvese que los cálculos se reducen a la resolución sucesiva de problemas de un sólo artículo sin limitación de capacidad mediante el algoritmo de Wagner Whitin [7].

En las figuras 1 y 2 se presentan los diagramas de flujo correspondientes al algoritmo de resolución y al cálculo de ε respectivamernte. La figura 3 representa un diagrama de bloques que corresponde a una implementación del método en un microordenador.

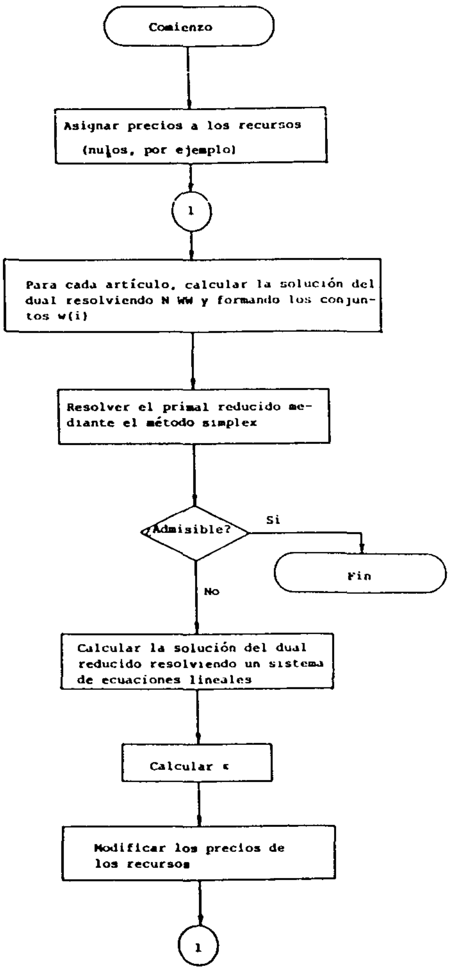

FIGURA 1. Diagrama del Algoritmo de Resolución

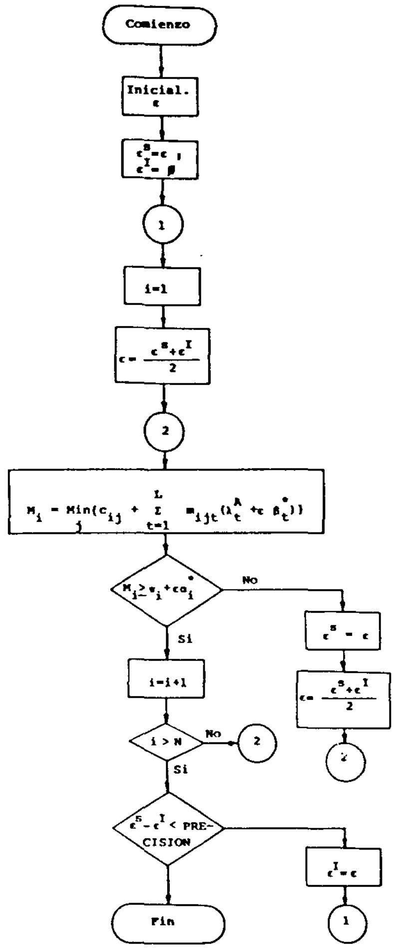

FIGURA 2. Diagrama del cálculo de ε

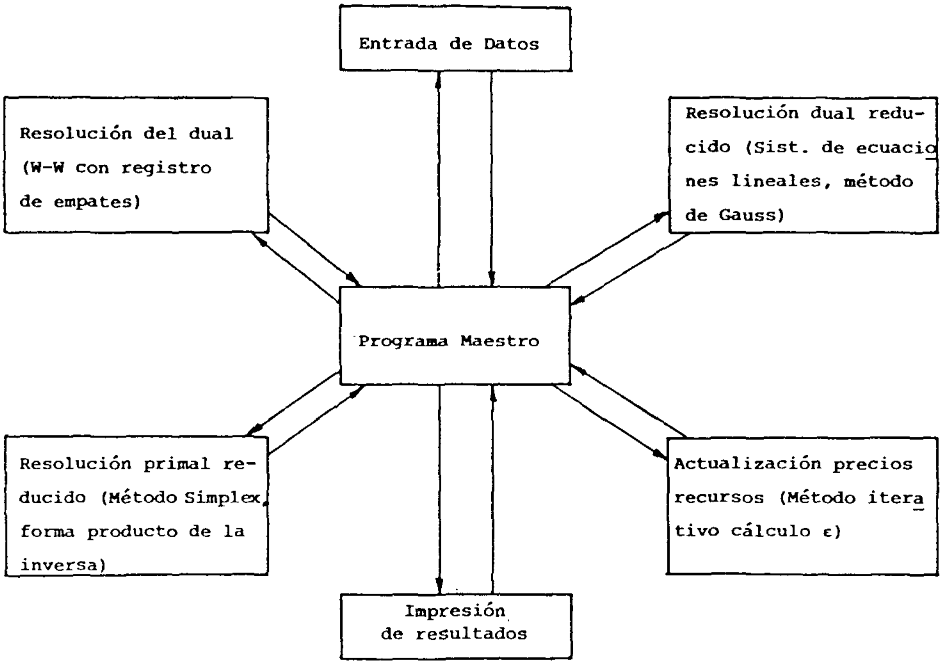

FIGURA 3. Esquema General de la Implementación en un Microordenador

8. EXPERIENCIAS COMPUTACIONALES

Como ilustración del método primal–dual se presentan los resultados para cuatro problemas de 8 productos y 8 períodos cuyos datos se han tomado de Thizy y Van Wassenhove [6].

Se ha comparado el método primal–dual propuesto con el método primal de Lasdon y Terjung [3]. Ambos resuelven la formulación de Manne [4] obteniendo la misma cota inferior.

En la tabla 1 se muestra para cada uno de los problemas el coste de la solución óptima, así como la máxima cota inferior y la diferencia porcentual entre ambos valores (duality gap). También se representa el número de iteraciones y el tiempo de CPU (en segundos de de un microVAX II) que requieren ambos métodos para converger.

TABLA 1

Resultados del método primal–dual frente al de Lasdon y Terjung.

PROBLEMA	COSTE OPTIMO	COTA INFERIOR	GAP (%)	LASDON		PRIMAL-DUAL	
				Nº ITERAC.	CPU	Nº ITERAC.	CPU
CAP1	8.430	7.996	5,42	94	2,89	23	2,78
CAP2	7.910	7.722	2,43	68	2,07	7	0,67
CAP3	7.610	7.534	1,00	56	1,63	5	0,42
CAP4	7.520	7.464	0,75	55	1,55	3	0,26

En la figura 4 se representa gráficamente, para el problema denominado CAP1, la evolución de la función objetivo del dual frente al número de iteraciones, la cual, como se observa, crece monótonamente.

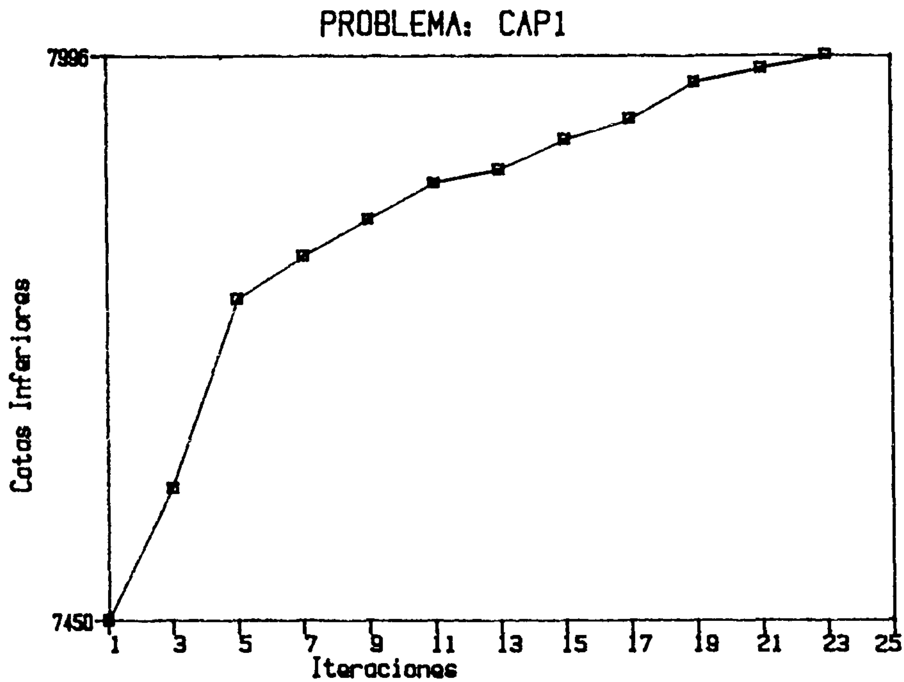

FIGURA 4. Evolución del dual

9. REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS

[1] BRITAN, G. R. Y HAX, A. C. "The Role of Mathematical Programming in Production Planning and Scheduling". Editado por K. D. Lawrence and S. K. Zanakis. Industrial Engineering and Management Press. Atlanta U.S.A. (1984).

[2] DZIELINSKI, B. Y GOMORY, R. "Optimal Programming of Lot Sizes Inventories, and Labor Allocations". Management Sci., Vol. 9. (1965), 874-890.

[3] LASDON, L. S. Y TERJUNG, R. C. "An Efficient Algorithm for Multi-item Scheduling". Operatios. Res., Vol. 19, (1971), 946-969.

[4] MANNE, A. S. "Programming of Economical Lot Sizes", Management Sci., Vol. 4, (1958) 115-135.

[5] NEWSON, E. F. P. "Multi–item Lot Size Scheduling by Heuristic". Management Sci., Vol. 21, (1975), 1186-1203.

[6] THIZY, J. M. Y VAN WASSENHOVE, L. "Lagrangean Relaxation for the Multi–Item Capacited Lot–Sizing Problem: A Heuristic Implementation", IIE Transactions, Vol. 17, (1985), 308-313.

[7] WAGNER, H. M. Y WHITIN, T.M . "Dynamic Version of the Economic Lot Size Model". Management Sci., Vol. 5, (1958), 89-96.