



UNIVERSIDAD  
de SEVILLA

## **TESIS**

# **ESTUDIO NUMÉRICO DE PROBLEMAS DINÁMICOS TRANSITORIOS. APLICACIÓN A LA MECÁNICA DE LA FRACTURA**

Presentada por: Madelyn Marrero Meléndez  
Ingeniero Mecánico  
Universidad de Puerto Rico

para la obtención del  
GRADO DE DOCTOR INGENIERO INDUSTRIAL

Dirigida por: José Domínguez Abascal  
Dr. Ingeniero Industrial

Departamento de Mecánica de Medios Continuos,  
Teoría de Estructuras e Ingeniería del Terreno

Noviembre 2001

*A mis padres*

*A Antonio*

*Y a Toñín*

Deseo agradecer al profesor José Domínguez Abascal, su acogida, buenos consejos, aliento y ánimo durante el desarrollo de esta tesis. Sin su paciencia y estímulo me habría sido imposible realizar este trabajo.

También quiero agradecer al Grupo de Estructuras su acogida y apoyo, profesores Ramón Abascal, Fernando Medina, y Andrés Sáez; y a los compañeros de tesis, José Ángel Pérez, José Manuel Galán y Miguel Ángel Millán.

De forma especial quiero agradecer a la compañera Pilar Ariza quien me ha permitido utilizar muchas de sus mallas de elementos de contorno durante el desarrollo de esta tesis, además de escuchar pacientemente mis problemas matemáticos y de programación, dándome siempre buenos consejos.

Deseo además agradecer al profesor Jan Achenbach, director del Center for Quality Engineering Failure Prevention en Northwestern University, Illinois, EEUU, por su apoyo durante mi estancia en sus laboratorios durante el verano de 1997; y el Dr. Brian Lawn, Fellow del National Institute of Standards and Technology, en Maryland, EEUU, en cuyo laboratorio realicé una estancia durante el verano de 2000.

También estoy profundamente agradecida a la Junta de Andalucía por otorgarme una beca de Formación de Personal Docente e Investigador.

Por último y no menos importante, deseo agradecer a mi esposo, el profesor Antonio Ramírez de Arellano López, por su apoyo no sólo en el ámbito personal sino también en el científico, ayudándome a repasar conceptos de matemáticas, física y programación.

# Índice

## 1. Introducción

1.1	Introducción .....	I-1
1.2	Mecánica de la Fractura Elástico-Lineal .....	I-2
1.3	Mecánica de la Fractura Elastodinámica Lineal .....	I-4
1.4	Aplicación del Método de los Elementos de Contorno a la Elastodinámica Lineal .....	I-5
1.4	Aplicación del Método de los Elementos de Contorno en la Mecánica de la Fractura Elastodinámica Lineal .....	I-7
1.6	Estabilidad del MEC en el dominio del tiempo .....	I-10
1.7	Objetivo de este trabajo .....	I-11

## 2. El Problema Escalar Transitorio Tridimensional

2.1	Introducción .....	II-1
2.2	Ecuaciones básicas de la propagación de ondas escalares .....	II-2
2.3	Método de los elementos de contorno en el problema escalar transitorio .....	II-5
2.4	Evaluación de las integrales en el tiempo .....	II-9
2.5	Integración espacial .....	II-11
	2.5.1 Descripción general .....	II-11
	2.5.2 Método de las subdivisiones .....	II-15
2.6	Término libre .....	II-23
2.7	Aplicaciones .....	II-26

## 3. Solución en el Dominio del Tiempo de Problemas Tridimensionales de Propagación de Ondas en Medios Elásticos

3.1	Introducción .....	III-1
3.2	Ecuaciones básicas de la elastodinámica lineal .....	III-2
3.3	Representación integral elastodinámica .....	III-4
3.4	Método de los Elementos de Contorno en Elastodinámica .....	III-7
	3.4.1 Discretización de la ecuación de contorno .....	III-9

3.4.2	Evaluación de las integrales en el tiempo .....	III-12
3.4.3	Integración espacial .....	III-13
3.4.4	Término libre .....	III-15
3.5	Aplicaciones .....	III-15
3.5.1	Cavidad esférica .....	III-15
3.5.2	Medio semi-infinito .....	III-17

#### **4. Métodos para Estabilizar la Solución**

4.1	Introducción .....	IV-1
4.2	Revisión de métodos existentes .....	IV-3
4.2.1	El método $\theta$ .....	IV-3
4.2.2	El método $\epsilon$ .....	IV-5
4.2.3	El método de la ponderación en el tiempo .....	IV-6
4.3	Propuesta de métodos de estabilización .....	IV-7
4.3.1	Método de la velocidad constante .....	IV-8
4.3.2	Método de la aceleración constante .....	IV-9
4.4	Aplicaciones .....	IV-12
4.4.1	Problema escalar .....	IV-12
4.4.2	Barra empotrada sometida a una tracción .....	IV-17
4.4.3	Barra empotrada sometida a un cortante .....	IV-21
4.4.4	Cavidad esférica .....	IV-23

#### **5. Mecánica de la Fractura Dinámica**

5.1	Introducción .....	V-1
5.2	Mecánica de la Fractura Elástico-Lineal .....	V-2
5.3	Elemento singular para Mecánica de la Fractura .....	V-3
5.3.1	Elemento a un cuarto .....	V-8
5.3.2	Elemento singular a un cuarto .....	V-11
5.3.3	Integración sobre el elemento a un cuarto .....	V-13
5.3.4	Transformaciones .....	V-15
5.4	Discretización del problema .....	V-22
5.5	Cálculo del Factor de Intensidad de Tensiones .....	V-24
5.5.1	Grietas en modos simples .....	V-24
5.5.2	Grietas en modo mixto .....	V-26
5.6	Aplicaciones .....	V-30
5.6.1	Barra con una grieta circular .....	V-31

5.6.2 Barra con una grieta rectangular en el borde .....	V-35
5.6.3 Barra con dos grietas rectangulares en los bordes .....	V-39
5.6.4 Barra con una grieta rectangular centrada .....	V-40
5.6.5 Grieta circular en un medio infinito .....	V-42
5.6.6 Grieta rectangular en un medio infinito sometida a una carga normal .....	V-45
5.6.7 Grieta rectangular en un medio infinito sometida a un cortante .....	V-48
5.6.8 Barra con una grieta rectangular en modo mixto .....	V-51

## **6. Conclusión y desarrollos futuros**

6.1 Conclusiones .....	VI-1
6.2 Desarrollos futuros .....	VI-3

## **Apéndice A:** Evaluación de las Integrales en el Tiempo

### **Bibliografía**

# **Capítulo 1**

## **Introducción**

### **1.1 Introducción**

El propósito de esta tesis es evaluar problemas tridimensionales de propagación de ondas mecánicas en medios que pueden contener fisuras. Para ello se ha empleado el Método de los Elementos de Contorno, en el cual el problema es reducido a un conjunto de ecuaciones integrales de contorno mediante la aplicación de una relación de reciprocidad entre el problema en estudio y la solución fundamental. La solución empleada será en el dominio del tiempo. El medio que se modelará será elástico-lineal, isótropo y homogéneo. Se han empleado las hipótesis de la Mecánica de la Fractura Elástico-Lineal, con la consecuente definición del Factor de Intensidad de Tensión Dinámico.

Para resolver éste complejo problema se comenzará por uno más sencillo: ondas propagándose en un medio tridimensional que se puede representar de forma escalar. Luego se pasará al problema elastodinámico. La resolución de estos problemas a través del Método de los Elementos de Contorno en el dominio del tiempo es inestable para algunas combinaciones de representación espacial y temporal, por ello ha sido necesario incorporar métodos que estabilizan la solución. Por último, para representar los fuertes gradientes de tensiones en el vértice de la

grieta, se ha empleado en la representación espacial el elemento singular a un cuarto.

## **1.2 Mecánica de la Fractura Elástico-Lineal**

Los materiales que se emplean en aplicaciones de ingeniería contienen normalmente defectos o grietas que pueden deberse a la fabricación o generarse durante el servicio. Muchas veces se debe tomar la decisión si es necesario o no eliminar dichas imperfecciones durante el proceso de manufactura, o si la aparición del defecto marca el fin de la vida útil del material. También se provoca la presencia de grietas al realizar pruebas en los materiales a través de indentaciones o impacto. Para dar respuesta a ésta necesidad se ha desarrollado la disciplina de la Mecánica de la Fractura.

La Mecánica de la Fractura hace una descripción del estado mecánico de un cuerpo deformable que contiene una o varias grietas para así caracterizar y medir la resistencia de los materiales al crecimiento de las mismas. El proceso de describir el estado mecánico de un sistema en particular se realiza mediante un modelo del que se derivan conclusiones a través de análisis matemáticos o numéricos. Los modelos matemáticos consisten en una descripción idealizada de la configuración geométrica del cuerpo deformable, junto con una relación empírica entre las tensiones y la deformación y las leyes físicas de equilibrio. Los modelos así constituidos, nos permitirán considerar la resistencia a la fractura de materiales reales y formular hipótesis a partir de la observación. Este proceso nos lleva a métodos, donde la Mecánica de la Fractura se utiliza para seleccionar materiales y diseñar en ingeniería.

Por otro lado, el campo de tensiones en las inmediaciones del vértice de una grieta, calculado mediante la Teoría de la Elasticidad, tiene una dependencia  $1/\sqrt{r}$  con la distancia al mismo, por lo que debiera ser infinito en el vértice de la grieta. En los materiales reales, por encima de una cierta tensión crítica, se dan fenómenos de plastificación, que relajan las tensiones existentes en el entorno de la grieta. El modelo de Irwin (1958) para un material elasto-plástico ideal, permite aprovechar la

solución elástica suponiendo la grieta es de longitud mayor que la verdadera. Entonces las tensiones cerca del vértice de la grieta varían con  $1/\sqrt{r}$  y se pueden calcular mediante la Teoría de la Elasticidad. Esta es la llamada Mecánica de la Fractura Elástico-Lineal (MFEL). Así que se puede utilizar este modelo cuando la deformación plástica ocurre en una zona pequeña y la solución con el modelo de Irwin es suficientemente aproximada. Lo anterior es válido en materiales frágiles o cuando se dan condiciones de carga que impiden que se desarrolle una extensa zona plástica.

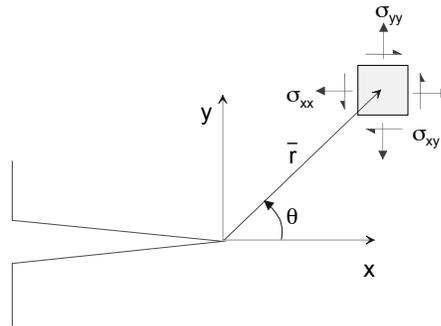


Figura 1.1 Grieta plana y sistema de coordenadas de referencia

El campo elástico de tensiones cerca de una grieta está caracterizado por el Factor de Intensidad de Tensiones (FIT). En general para las tensiones y desplazamientos se puede escribir,

$$\sigma = \frac{Kf(\theta)}{\sqrt{r}}$$

$$u = Kg(\theta)\sqrt{r}$$

donde  $\bar{r}$  y  $\theta$  son unas coordenadas polares colocadas sobre el vértice de la grieta, figura (1.1),  $f$  y  $g$  son dos funciones universales del ángulo  $\theta$ , y  $K$  es el parámetro que se ha denominado FIT, y que recoge todos los aspectos relativos a la longitud, forma y posición de la grieta, geometría y propiedades físicas del material, y las condiciones de carga del problema en estudio. Cada material queda caracterizado por una magnitud llamada Factor de Intensidad Crítico o tenacidad,  $K_c$ , que es el FIT máximo que puede haber en material antes de que se propague la grieta. La MFEL se basa en la hipótesis de que dos grietas distintas en dos dominios de

geometrías diferentes, de materiales con la misma tenacidad, sometidos a cargas distintas pero cuyos FIT son iguales, se encontrarán igualmente cerca de propagarse.

En la MFEL se parte de las siguientes hipótesis. Primero, en la ausencia de una carga aplicada, los labios de la grieta coinciden en el espacio y se definirá como una curva cerrada cuando está en el interior del medio o una curva abierta que corta el contorno exterior en dos puntos cuando es una grieta de borde. Segundo, los labios de la grieta no interaccionan durante la deformación. Tercero, el tamaño de la grieta se considera suficientemente grande comparado con la microestructura del material para permitir modelar este último como un medio continuo. Y por último, la zona plastificada que se genera en el vértice de la grieta es pequeña.

### **1.3 Mecánica de la Fractura Elastodinámica Lineal**

Un fenómeno de especial interés aparece cuando se aplica una carga dinámica a un medio que contiene una grieta. La sobrecarga dinámica o sea, la intensidad de los campos en el vértice de la grieta, como resultado de una carga aplicada súbitamente, alcanza niveles más altos que si la carga es aplicada lentamente. La influencia de la carga se transfiere a la grieta por medio de ondas mecánicas a través del material. En ésta situación, los efectos de la inercia deben ser tenidos en cuenta. No existe un criterio estándar para decidir si se deben o no considerar dichos efectos, normalmente se toma como criterio el tiempo que tarda la carga aplicada en pasar de cero a su valor final, y si éste es mucho menor que el tiempo que tarda la onda mecánica en propagarse una distancia característica del medio, por ejemplo el tamaño de la grieta, entonces los efectos de inercia son importantes (Achenbach, 1973).

La Mecánica de la Fractura Dinámica se dedica al estudio del fenómeno de fractura cuando las fuerzas de inercia son importantes. Para poder determinar si una grieta va a propagarse debido a las tensiones generadas por la onda, es necesario determinar el FIT que actúa en la grieta. En este trabajo utilizaremos las hipótesis clásicas de la mecánica de la fractura elástico-lineal, la variación espacial del término dominante de los campos

asintóticos del vértice de una grieta es universal, y es el valor del FIT el que refleja la influencia de la geometría del medio y los detalles de la carga en cada problema. En los problemas dinámicos se determinará el FIT en función del tiempo, y recibirá el nombre de Factor de Intensidad de Tensiones Dinámico.

#### **1.4 Aplicación del Método de los Elementos de Contorno a la Elastodinámica Lineal**

El estudio de problemas de propagación de ondas en materiales con geometrías complejas, en los que se pretende predecir la respuesta transitoria del sistema cuando éste está sujeto a cargas y condiciones de contorno que dependen del tiempo, requiere el uso de técnicas numéricas. El método más empleado es el Método de los Elementos Finitos (MEF). Éste permite representar geometrías complejas, medios no homogéneos, materiales no lineales y dinámica en el dominio de la frecuencia y el tiempo (Zienkiewicz, 1977). Pero el MEF tiene una gran desventaja a la hora de modelar medios infinitos o semi-infinitos con discretizaciones finitas, ya que viola la condición de radiación. Además, el uso de elementos tridimensionales incrementa extraordinariamente el tamaño del problema.

Una alternativa al MEF es el Método de los Elementos de Contorno (MEC) cuya formulación está basada en la reducción del problema elastodinámico lineal a un conjunto de ecuaciones integrales de contorno en términos de las variables de campo. Las ventajas del MEC se basan en: la reducción de la dimensión del problema ya que sólo los contornos del sólido deben ser representados; la satisfacción automática de la condición de radiación en el infinito, por lo que no es necesario definir contornos ficticios de cierre; y, por último, la representación adecuada de grandes gradientes de tensión con la sencilla y directa incorporación de elementos capaces de modelar los campos singulares de tensiones en la inmediaciones del borde de una grieta.

El primer trabajo en elastodinámica mediante el MEC se debe a Banaugh y Goldsmith (1963) para problemas planos en el dominio de la frecuencia.

Más adelante, Cruse y Rizzo (1968) resolvieron un problema de ondas en el semi-espacio infinito utilizando la transformada de Laplace. Niwa, Kobayashi y Azuma (1975) resolvieron diversos problemas elastodinámicos planos en el dominio de la frecuencia y calcularon la respuesta en el tiempo mediante la transformada de Fourier. Domínguez (1978) fue el primero en emplear esta técnica para el estudiar la respuesta dinámica en el dominio de la frecuencia de cimentaciones rígidas superficiales y enterradas. En le mismo campo son de destacar los trabajos posteriores de Apsel (1979), Abascal y Domínguez (1984) y Karabalis y Beskos (1984). Cole, Kosloff y Minster (1978) presentaron por primera vez, una formulación general del MEC en el domino del tiempo aunque la aplicaron únicamente a problemas elastodinámicos anti-planos. Las primeras aplicaciones de carácter general del MEC para problemas transitorios, en problemas bidimensionales se deben a Niwa, Fukio, Kato y Fujiki (1980) resolviendo el problema en el dominio de Fourier acompañado por la reconstrucción de la respuesta transitoria mediante la síntesis de Fourier, a Manolis (1983) que obtuvo la solución del problema en el dominio de la transformada de Laplace para luego invertir numéricamente y obtener la respuesta en el tiempo, y a Mansur y Brebbia (1982, 1985) formulando directamente en el domino del tiempo en combinación con el método paso a paso.

En el caso tridimensional el primer trabajo se debe a Karabalis y Beskos (1984) empleando el MEC directamente en el tiempo, aunque simplificando la formulación para el caso de cimentaciones rectangulares cargadas de forma transitoria. Una aplicación más general en el domino del tiempo en problemas tridimensionales fue hecha por Banerjee, Ahmad y Manolis (1986) empleando funciones de interpolación para las variables de campo, constantes en el tiempo y cuadráticas en el espacio. Luego, Ahmad y Banerjee (1988), y Karabalis y Beskos (1990) emplean funciones de interpolación para las variables de campo, lineales en el tiempo y cuadráticas en el espacio.

Nardini y Brebbia (1983, 1985) desarrollaron una formulación del MEC en elastodinámica basándose en la solución fundamental estática, el método

de la reciprocidad dual o el método de la matriz de masa equivalente, luego el trabajo fue extendido por Partridge, Brebbia y Wrobel (1992).

Muchos otros trabajos han sido escritos sobre la eficiencia y precisión cuando se aplica el MEC en el dominio del tiempo. Domínguez y Gallego (1991) emplearon la formulación directa en el tiempo en problemas bidimensionales, Wang y Banerjee (1990) investigaron la aplicación del MEC en problemas axisimétricos transitorios en el estudio de la expansión cavidades esféricas, y Cao, Zhu y Cheung (1990) en el semi-espacio. Rizos (1993), Coda y Venturini (1995) emplean el MEC en el dominio del tiempo en tres dimensiones con el método paso a paso. Mientras que Stamos y Beskos (1995) realizan el análisis tridimensional en el dominio de la frecuencia y la transformada de Laplace.

En resumen, la solución del problema transitorio se puede conseguir a través de tres acercamientos: la solución del problema en el dominio de la frecuencia con el MEC y luego se invierte numéricamente para obtener la respuesta en el tiempo, el método de la reciprocidad dual en elementos de contorno y la formulación directa en el dominio del tiempo. En esta tesis se empleará la formulación directa en el dominio del tiempo mediante el método paso a paso.

## **1.5 Aplicación del Método de los Elementos de Contorno a la Mecánica de la Fractura Elastodinámica Lineal**

Otro campo en el que se ha puesto de manifiesto que el MEC es eficaz es en la Mecánica de la Fractura Elastodinámica Lineal. Ello se debe a su gran capacidad para representar adecuadamente gradientes de tensión importantes como los que se producen en el vértice de una grieta. Los términos más significativos de los campos asintóticos pueden incorporarse al MEC en el dominio del tiempo mediante un elemento de contorno especial, lo que permite resolver una amplia gama de problemas de fractura elastodinámica, con muy buena precisión.

Existen dos formulaciones de la ecuación integral en el MEC en mecánica de la fractura. Una es la formulación convencional donde se discretiza la

representación integral de los desplazamientos en el contorno. La segunda es la formulación hipersingular donde son discretizadas las representaciones integrales de los desplazamientos y las tracciones (hipersingular).

La primera formulación ha sido empleada en combinación con distintas técnicas para vencer la dificultad que surge del hecho que las ecuaciones para puntos localizados en las superficies opuestas de la grieta son idénticas, para los puntos con las mismas coordenadas. Entre las técnicas se puede mencionar el trabajo de Snyder y Cruse (1975) que derivaron una función de Green para un dominio que contiene una grieta y la técnica de carácter más general, la formulación de los multi-dominios desarrollada por Blandford, Ingraffea y Liggett (1981). Estos últimos dividen el dominio en subregiones cortadas a partir del vértice de la grieta, dejando cada labio de la grieta en una subregión diferente. Este método se emplea normalmente junto con el elemento singular a un cuarto para modelar el borde de la grieta. El factor de intensidad de tensiones se evalúa de la apertura de la grieta Blandford, et al. (1981) o de las tracciones ficticias en el borde de la grieta, Martínez, et al (1984).

Chirino y Domínguez (1989) utilizaron el MEC en el dominio de la frecuencia en dos dimensiones, en conjunción con un elemento singular a un cuarto, para representar la evolución de las tensiones en las inmediaciones del vértice, a partir del cual se obtiene directamente el FIT dinámico con excelentes resultados. Mediante la anti-transformada de Fourier estos autores resolvieron una serie de problemas en el dominio del tiempo. Dichos elementos singulares han sido extendidos al problema tridimensional por Ariza, Sáez y Domínguez (1997) para problemas dinámicos en el dominio de la frecuencia. También en el dominio de la frecuencia están los trabajos por Balas, Sladek y Sladek (1989) en dos dimensiones, deformación plana, y en caso tridimensional por Zhang y Shi (1994) en el dominio de la transformada de Laplace y luego invirtiendo numéricamente con el algoritmo de Durbin. Estos últimos obtienen el FITD de los desplazamientos de apertura de la grieta.

Mediante el método de reciprocidad dual, Chirino, Gallego, Sáez y Domínguez (1994) resolvieron problemas de fractura bidimensionales. Wen, Aliabadi y Rooke, (1995) emplean el método dual de elementos de contorno en problemas tridimensionales, sus resultados son obtenidos en el dominio de la transformada de Laplace invirtiendo los mismos con el algoritmo de Durbin, y el FITD se determina de los desplazamientos de apertura de la grieta.

Domínguez y Gallego (1992), e Israil y Dargush (1991) emplearon el elemento singular en problemas bidimensionales directamente en el dominio del tiempo.

La formulación hipersingular, que da lugar a una única región, ha sido empleada en elastodinámica por Gallego y Domínguez (1997) en dos dimensiones en el dominio del tiempo, Mykhas'kiv (1996) en el problema tridimensional en el dominio del tiempo, Barra y Telles (1999) en el bidimensional con una función de Green en el dominio de la frecuencia e invirtiendo numéricamente; y, Ariza y Domínguez (2000) en el problema tridimensional en el dominio de la frecuencia. Por otro lado, Zhang y Gross (1993), de forma similar, pero utilizado una formulación que no es hipersingular, resuelven problemas tridimensionales de mecánica de la fractura en medios infinitos directamente en el tiempo.

El elemento singular propuesto por Ariza, Sáez y Domínguez (1997) para problemas dinámicos en el dominio de la frecuencia es el seguido en esta tesis en el estudio de problemas dinámicos en el dominio del tiempo, con un tratamiento especial durante la integración numérica, ya que es necesario representar correctamente la condición de causalidad de la ecuación de ondas.

## **1.6 Estabilidad del MEC en el dominio del tiempo**

El método de los elementos de contorno (MEC) en elastodinámica en el dominio del tiempo es inestable para algunos problemas. Esto se debe a que no se representa exactamente la propagación en el espacio de las perturbaciones originadas por la solución fundamental y,

consecuentemente, no se satisface con precisión la condición de causalidad, ya que la velocidad de propagación de las perturbaciones en el modelo numérico no es igual a la teórica. Esta condición no es fácil de conseguir con un modelo discreto, ya que con los modelos habituales al menos una parte atenuada de la perturbación se propaga instantáneamente dentro de cada elemento. Los errores se pueden controlar refinando la discretización espacial y temporal pero se debe tener cuidado con la relación espacio-tiempo de las discretizaciones, ya que para una misma discretización espacial, si refinamos demasiado la discretización temporal, aparecerán errores que desestabilizan la solución. Una forma de representar esa relación espacio-tiempo es el uso de un parámetro adecuado. Por ello, para establecer la fiabilidad del método, se ha establecido un parámetro que tiene en cuenta la relación entre la discretización espacial y la temporal, (Mansur, 1982),

$$\beta = \frac{\Delta t c}{\Delta L}$$

donde  $c$  es la velocidad de propagación de la onda, longitudinal o transversal,  $\Delta t$  es el tamaño del paso de tiempo y  $\Delta L$  es la distancia de nodo a nodo. Para valores de  $\beta < 0.6$ , el MEC se ha demostrado inestable, tanto en el problemas escalares (Mansur, 1982) como en elastodinámicos (Domínguez, 1993), Frangi y Novati (1999). Para  $\beta > 1.5$  se pierde precisión, porque se suaviza demasiado la respuesta.

Diversos autores han desarrollado varios métodos para estabilizar la solución. Frangi (1999) propone una nuevas funciones de forma para representar mejor el frente de las ondas en problemas bidimensionales. Peirce y Siebrits (1995,1997) proponen un nuevo algoritmo que modifica el método paso a paso.

De los métodos desarrollados por otros autores se han revisado en el presente trabajo los más relevantes: el método  $\epsilon$  (Birgisson, Siebrits y Peirce, 1999), el método  $\theta$  (Yu, Mansur, Carrer y Gong,1998); Carrer y Mansur, 1998) y la ponderación en el tiempo (Yu, Mansur, Carrer y Gong,1998). Se proponen dos procedimientos que pueden denominarse el

método de la velocidad constante y el método de la aceleración constante. Ambos se basan en una combinación lineal de las integrales de contorno discretizadas para tiempos anteriores y posteriores al evaluado. Para ello es necesario aproximar los valores de las variables para pasos de tiempo posteriores. Para obtener las relaciones entre los valores aproximados y los conocidos se emplean las definiciones por diferencias finitas de la segunda, tercera y cuarta derivadas de una función en un punto. Se establece la segunda derivada de las variables con respecto al tiempo igual a cero para el caso del método de la velocidad constante, y la tercera y cuarta derivadas iguales a cero para el de la aceleración constante. Los procedimientos propuestos resultan ventajosos en comparación con los ya existentes.

### **1.7 Objetivo de este trabajo**

Como se ha discutido en los apartados anteriores el MEC es una herramienta eficaz para representar problemas de propagación de ondas en los que el medio puede contener grietas. En esta tesis se pretende representar el problema tridimensional de un medio elástico-lineal, isótropo y homogéneo. La solución empleada será en el dominio del tiempo. Para representar los fuertes gradientes de tensiones en el vértice de la grieta emplearemos el elemento singular a un cuarto.

En el segundo capítulo de esta tesis discutiremos el problema de propagación de ondas mecánicas en medios que se pueden representar de forma escalar, sin amortiguamiento; es decir una partícula en este medio pasa la energía que recibe íntegramente a la siguiente. Se comenzará por discutir las ecuaciones básicas de la propagación de ondas y luego se discutirá la solución numérica del problema a través del método de los elementos de contorno. En la solución numérica del problema se describirá en detalle la integración numérica, ya que la representación del frente de la onda no es sencilla debido a la propiedad de causalidad de la ecuación de ondas que implica que sólo una parte del elemento estará excitada por la onda. Finalmente, se analizarán los resultados del MEC con el problema de un prisma sometido a un flujo en un extremo y

potencial nulo en el opuesto. Los resultados se utilizarán para establecer el efecto de las discretizaciones espaciales y temporales en el método.

En el tercer capítulo se discute el problema elastodinámico lineal, o sea la determinación de la deformación y la distribución de tensiones en función de las coordenadas espaciales y el tiempo cuando una onda se propaga en un medio elástico, lineal e isótropo. Comenzaremos por establecer las ecuaciones que rigen el problema: equilibrio, compatibilidad y comportamiento. Luego se discutirá la representación integral en elastodinámica en la que utilizaremos la solución fundamental que corresponde a un impulso unitario. Por último veremos el desarrollo y la aplicación del método de los elementos de contorno para resolver numéricamente el problema. Se resolverán algunos problemas de elastodinámica en los que se estudiará el efecto de la discretización espacial y temporal en la precisión y estabilidad de los resultados.

En el cuarto capítulo, se presentan métodos para estabilizar la solución. Se proponen dos procedimientos nuevos que pueden denominarse de velocidad constante y de aceleración constante, ya que implican una aproximación lineal de la velocidad o de la aceleración respectivamente. Los procedimientos propuestos resultan ventajosos en comparación con los anteriormente existentes. Se muestran algunos resultados que ponen de manifiesto la eficiencia y sencillez de los métodos propuestos.

En el último capítulo se discute la incorporación al MEC en el dominio del tiempo de un elemento singular que permite representar los términos más significativos de los campos asintóticos en el vértice de la grieta, lo cual va a permitirnos resolver una amplia gama de problemas de fractura elastodinámica, con muy buena precisión.

# **Capítulo 2**

## **El Problema Escalar Transitorio Tridimensional**

### **2.1 Introducción**

En este capítulo discutiremos el problema de propagación de ondas mecánicas en medios que se pueden representar de forma escalar, como por ejemplo ondas de presión propagándose en el aire o en el agua, y en el que no existe amortiguamiento. Primero discutiremos las ecuaciones básicas de la propagación de ondas y luego se discutirá la solución numérica del problema a través del método de los elementos de contorno. En la solución numérica del problema se describirá con detalle la integración numérica, ya que la representación del frente de la onda no es sencilla.

En la definición de los sistemas de ecuaciones se va a emplear la notación tensorial de Einstein: índice repetido indica sumatorio, una coma indica derivación con respecto a las variables que la siguen, y un punto sobre una variable indica derivación con respecto al tiempo. Para identificar a los vectores y tensores de segundo orden se usan caracteres en negrita. Una variable con subíndices identifica a las componentes de vectores o tensores.

## 2.2 Ecuaciones básicas de la propagación de ondas en medios escalares

A continuación se estudian las ecuaciones generales de la propagación de ondas en medios escalares. El comportamiento del dominio escalar  $\Omega$  con contorno  $\Gamma$  estará regido por la ecuación de propagación de ondas,

$$\nabla^2 u + \frac{1}{c^2} b = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

(2.1)

o

$$u_{,ii} + \frac{1}{c^2} b = \frac{1}{c^2} \ddot{u}$$

donde  $u$  representa el potencial en el campo escalar,  $c$  es la velocidad de propagación de la onda y  $b$  las fuentes internas.

En el contorno conoceremos el valor del potencial,

$$u(x, t) = \bar{u}(x, t) \text{ en } \Gamma_1$$

(2.2)

o el flujo,

$$q(x, t) = \frac{\partial u(x, t)}{\partial n(x, t)} = \bar{q}(x, t) \text{ en } \Gamma_2$$

donde  $n$  es la normal unitaria en el punto  $x$ ,  $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 = \Gamma$  y  $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset$ . Las condiciones iniciales son,

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= u_0(x) \\ v(x, 0) &= v_0(x) \end{aligned}$$

(2.3)

Para resolver la ecuación diferencial (2.1) se emplea una integral ponderada. Tomando una función escalar continua  $u^*(x, t)$  de otro problema de propagación de ondas en  $\Omega$  que satisface la ecuación de ondas escalar se puede establecer la siguiente integral ponderada,

$$\int_{\Omega} (u_{,ii} * u^*) d\Omega + \int_{\Omega} \frac{1}{c^2} (b * u^*) d\Omega = \int_{\Omega} \frac{1}{c^2} (\ddot{u} * u^*) d\Omega \quad (2.4)$$

De la ecuación anterior se obtiene la relación recíproca entre el problema real  $u(x,t)$  y el otro problema  $u^*(x,t)$ ,

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} \left( \frac{\partial u}{\partial n} * u^* \right) d\Gamma + \int_{\Omega} \frac{1}{c^2} (b * u^* + u_0 \dot{u}^* + v_0 u^*) d\Omega &= \int_{\Gamma} \left( \frac{\partial u^*}{\partial n} * u \right) d\Gamma \\ + \int_{\Omega} \frac{1}{c^2} (b^* * u + u_0^* \dot{u} + v_0^* u) d\Omega & \end{aligned} \quad (2.5)$$

Se puede ver el desarrollo de la ecuación (2.5) en (Domínguez, 1993).

En el presente trabajo se toma la solución de la ecuación de ondas escalar en un dominio infinito, que corresponde a un impulso unitario aplicado en  $x^i$  y  $t = 0$ ,

$$\frac{1}{c^2} b(x,t) = \delta(t) \delta(x - x^i) \quad (2.6)$$

la función  $\delta$  es una delta de Dirac. De la solución anterior se obtiene la solución fundamental para el caso de tres dimensiones (Eringen y Sohubi, 1975),

$$u^* = \frac{1}{4\pi r} \left[ \delta(t - \tau) - \left( \frac{r}{c} \right) \right] \quad (2.7)$$

y

$$q^* = \left\{ -\frac{1}{4\pi r^2} \left[ \delta(t - \tau) - \left( \frac{r}{c} \right) \right] + \frac{1}{4\pi r} \frac{\partial}{\partial r} \left[ \delta(t - \tau) - \left( \frac{r}{c} \right) \right] \right\} \frac{\partial r}{\partial n} \quad (2.8)$$

donde  $r = |x - x^i|$ .

De la relación recíproca entre el problema real  $u(x,t)$  y la solución fundamental,  $u^*(x,t)$ , se obtiene, escribiendo explícitamente la integración en el tiempo y los productos de convolución,

$$\begin{aligned}
 u^i(x^i, t) &= \int_0^{t^+} \int_{\Gamma} u^*(x, t - \tau; x^i) q(x, \tau) d\Gamma(x) d\tau \\
 &\quad - \int_0^{t^+} \int_{\Gamma} q^*(x, t - \tau; x^i) u(x, \tau) d\Gamma(x) d\tau \\
 &\quad + \int_0^{t^+} \int_{\Omega} u^*(x, t - \tau; x^i) b(x, \tau) d\Omega(x) d\tau \\
 &\quad + \int_{\Omega} \frac{1}{c^2} [u_0(x) \dot{u}^*(x, t; x^i) + v_0(x) u^*(x, t; x^i)] d\Omega(x)
 \end{aligned} \tag{2.9}$$

donde  $q = \partial u / \partial n$  y  $t^+ = t + \varepsilon$  con  $\varepsilon \rightarrow 0$  para evitar integrar exactamente en el punto singular de la delta de Dirac. Esta ecuación da el valor de  $u$  en un punto interno  $i$  en un tiempo  $t$  en términos de  $u$ ,  $q$  y  $\partial u / \partial \tau$  en el contorno  $\Gamma$  y  $\tau = t - \frac{r}{c}$ .

Para tener una ecuación integral de contorno, el punto  $i$  debe estar en el contorno. Cuando el punto de colocación  $i$  está en el contorno aparece una singularidad, cuando  $x = x^i$ . Para analizar esta singularidad se agranda el contorno con una semiesfera de radio  $\varepsilon$  cuyo centro es el punto  $i$ . La esfera se hace tender a cero de forma que el punto pase a formar parte del contorno  $\Gamma$ . Las integrales se dividen en dos, una sobre el dominio  $\Gamma_\varepsilon$  y otra sobre el contorno  $\Gamma - \Gamma_\varepsilon$ . Se obtiene finalmente un valor,  $c^i$ , que sólo depende la geometría del contorno en el punto  $i$ . El desarrollo detallado de este análisis puede verse en (Domínguez, 1993). Nos queda entonces la siguiente integral en el contorno,

$$\begin{aligned}
 c^i u^i(x^i, t) &= \int_0^{t^+} \int_{\Gamma} u^*(x, t - \tau; x^i) q(x, \tau) d\Gamma(x) d\tau \\
 &\quad - \int_0^{t^+} \int_{\Gamma} q^*(x, t - \tau; x^i) u(x, \tau) d\Gamma(x) d\tau \\
 &\quad + \int_0^{t^+} \int_{\Omega} u^*(x, t - \tau; x^i) b(x, \tau) d\Omega(x) d\tau \\
 &\quad + \int_{\Omega} \frac{1}{c^2} [u_0(x) \dot{u}^*(x, t; x^i) + v_0(x) u^*(x, t; x^i)] d\Omega(x)
 \end{aligned} \tag{2.10}$$

Se sustituye en la ecuación (2.10) la solución fundamental para el caso de tres dimensiones, ecuaciones (2.7) y (2.8), con valores iniciales  $v_0 = 0$  y  $u_0 = 0$  y sin fuentes internas,  $b=0$ , y se obtiene

$$\begin{aligned}
 c^i u^i(x^i, t) &= \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma} \frac{1}{r} \int_0^{t+} \delta\left[(t-\tau) - \frac{r}{c}\right] q(x, \tau) d\tau d\Gamma \\
 &+ \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma} \frac{\partial r}{\partial n} \frac{1}{r^2} \int_0^{t+} \delta\left[(t-\tau) - \frac{r}{c}\right] u(x, \tau) d\tau d\Gamma \\
 &- \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma} \frac{\partial r}{\partial n} \frac{1}{rc} \int_0^{t+} \frac{\partial}{\partial \tau} \left\{ \delta\left[(t-\tau) - \frac{r}{c}\right] \right\} u(x, \tau) d\tau d\Gamma
 \end{aligned} \tag{2.11}$$

### 2.3 Método de los Elementos de Contorno en el problema escalar transitorio

Resolveremos numéricamente la ecuación integral de contorno, ecuación (2.11). El primer paso para resolver el problema consiste en dividir el contorno en elementos superficiales cuyos potenciales y flujos se expresan en función de unos nodos que componen cada elemento, figura (2.1). Por otro lado para resolver las integrales en el tiempo, se divide éste en intervalos. O sea que el lapso de tiempo de interés,  $t$ , se divide en un número  $n$  de  $\Delta t$ .

El potencial escalar,  $u(x, \tau)$ , y su derivada normal,  $q(x, \tau)$ , se aproximan sobre el contorno del elemento y en el lapso de tiempo usando funciones de interpolación,

$$\begin{aligned}
 u &= \sum_j \sum_m \phi^j(r) \eta^m(\tau) u^{mj} \\
 q &= \sum_j \sum_m \psi^j(r) \mu^m(\tau) q^{mj}
 \end{aligned} \tag{2.12}$$

donde  $u^{mj}$  y  $q^{mj}$  son el potencial y el flujo respectivamente, del nodo  $j$  en el tiempo  $t_m = m\Delta t$ . Las funciones  $\phi^j(r)$  y  $\psi^j(r)$  son las funciones de interpolación espacial. Las funciones  $\eta^m(\tau)$  y  $\mu^m(\tau)$  son funciones de interpolación en el tiempo dentro de cada paso de tiempo.

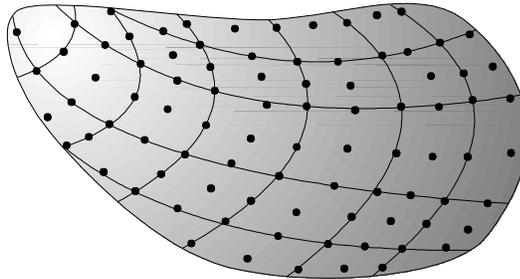


Figura 2.1 Cuerpo dividido en elementos de contorno.

La ecuación (2.11) se puede escribir como

$$\begin{aligned}
 c^i u^{ni} = & \sum_{m=1}^n \sum_{j=1}^Q \left\{ \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma_j} \frac{1}{r} \int_{\Delta t_m} \delta \left[ (t - \tau) - \frac{r}{c} \right] \mu^m d\tau \psi^j d\Gamma \right\} q^{mj} \\
 & + \left\{ \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma_j} \frac{\partial r}{\partial n} \frac{1}{r^2} \int_{\Delta t_m} \delta \left[ (t - \tau) - \frac{r}{c} \right] \eta^m d\tau \phi^j d\Gamma \right\} u^{mj} \\
 & - \left\{ \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma_j} \frac{\partial r}{\partial n} \frac{1}{rc} \int_{\Delta t_m} \frac{\partial}{\partial \tau} \delta \left[ (t - \tau) - \frac{r}{c} \right] \eta^m d\tau \phi^j d\Gamma \right\} u^{mj}
 \end{aligned} \tag{2.13}$$

donde  $\Gamma_j$  es la superficie del elemento que contiene el nodo  $j$ , y  $\Delta t_m$  es el lapso de tiempo en el que  $\eta^m(\tau)$  y  $\mu^m(\tau)$  son distintas de cero.

Si llamamos a las integrales en el tiempo,

$$U^{nm} = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{r} \int_{\Delta t_m} \delta \left[ (t_n - \tau) - \frac{r}{c} \right] \mu^m d\tau \tag{2.14}$$

$$\begin{aligned}
 Q^{nm} = & \frac{1}{4\pi} \frac{\partial r}{\partial n} \frac{1}{r^2} \int_{\Delta t_m} \frac{\partial}{\partial \tau} \delta \left[ (t_n - \tau) - \frac{r}{c} \right] \eta^m d\tau \\
 & - \frac{1}{4\pi} \frac{\partial r}{\partial n} \frac{1}{rc} \int_{\Delta t_m} \delta \left[ (t_n - \tau) - \frac{r}{c} \right] \eta^m d\tau
 \end{aligned} \tag{2.15}$$

entonces podremos escribir la ecuación (2.13),

$$c^i u^{ni} = \sum_{m=1}^n \sum_{j=1}^Q \left[ \left\{ \int_{\Gamma_j} U^{nm} \psi^j d\Gamma \right\} q^{mj} - \left\{ \int_{\Gamma_j} Q^{nm} \phi^j d\Gamma \right\} u^{mj} \right] \quad (2.16)$$

y en una forma más compacta,

$$c^i u^{ni} = \sum_{m=1}^n \sum_{j=1}^Q \left[ G^{nmij} q^{mj} - \hat{H}^{nmij} u^{mj} \right] \quad (2.17)$$

con

$$G^{nmij} = \int_{\Gamma_j} U^{nm} \psi^j d\Gamma; \quad \hat{H}^{nmij} = \int_{\Gamma_j} Q^{nm} \phi^j d\Gamma \quad (2.18)$$

Si ahora llamamos

$$H^{nmij} = \begin{cases} \hat{H}^{nmij} & \text{cuando } i \neq j \text{ o } n \neq m \\ \hat{H}^{nmij} + c^i & \text{cuando } i = j \text{ y } n = m \end{cases} \quad (2.19)$$

la ecuación para el punto  $i$  queda,

$$\sum_{m=1}^n \sum_{j=1}^Q H^{nmij} u^{mj} = \sum_{m=1}^n \sum_{j=1}^Q G^{nmij} q^{mj} \quad (2.20)$$

El sistema de ecuaciones para todos los elementos del contorno se puede expresar en forma matricial de la siguiente manera,

$$\sum_{m=1}^n H^{nm} u^m = \sum_{m=1}^n G^{nm} q^m \quad (2.21)$$

los elementos de las matrices,  $H^{nm}$  y  $G^{nm}$ , se han obtenido de la integración de los elementos de contorno en el intervalo de tiempo  $m$  cuando un impulso ha sido aplicado en un nodo con una diferencia en tiempo  $(n - m)\Delta t$ .

El sistema de ecuaciones (2.21) se resuelve paso a paso, una vez son conocidos  $u^m$  y  $q^m$  para  $m=1,2,\dots n-1$ , la solución para el paso de tiempo  $n$  es obtenida de

$$H^{nn}u^n = G^{nn}q^n + \sum_{m=1}^{n-1} [G^{nm}q^m - H^{nm}u^m] \quad (2.22)$$

Las columnas  $H^{nn}$  y  $G^{nn}$  son reorganizadas de acuerdo con las condiciones de contorno. Si dejamos todas las desconocidas para el paso de tiempo  $n$  al lado izquierdo,

$$A^n X^n = F^n \quad (2.23)$$

donde  $F^n$  contiene el último término de la ecuación (2.22), que corresponde a los pasos anteriores sumados al producto de la matriz reorganizada que contiene las condiciones de contorno conocidas en el paso de tiempo  $n$ .

Las matrices,  $H^{nm}$  y  $G^{nm}$ , dependen de la diferencia  $(n-m)$  y no en el valor de  $n$  ó  $m$ . En cada paso de tiempo sólo son calculadas las matrices  $H^{n1}$  y  $G^{n1}$ . Las restantes matrices  $H^{nm}$  y  $G^{nm}$  son conocidas de los pasos anteriores. Si el tipo de condiciones de contorno en cada nodo no cambian con el tiempo,  $H^{nn}$  y  $G^{nn}$  sólo se tienen que reorganizar una vez, obteniendo  $A^n = A$ . El vector de las incógnitas para cada paso de tiempo se calcula,

$$X^n = A^{-1} F^n \quad (2.24)$$

## 2.4 Evaluación de las integrales en el tiempo

Para determinar los valores de  $U^{nm}$  y  $Q^{nm}$  hemos escogido las funciones de interpolación temporal como,

$$\begin{aligned} \mu^m(\tau) &= 1 \text{ para } \tau_{m-1} \leq \tau \leq \tau_m \\ \mu^m(\tau) &= 0 \text{ para } \tau < \tau_{m-1} \text{ ó } \tau > \tau_m \end{aligned} \quad (2.25)$$

y  $\eta^m(\tau)$  de tal forma que en cada paso de tiempo,

$$u(\tau) = \frac{1}{\Delta t} [(\tau_{m+1} - \tau) \quad (\tau - \tau_m)] \begin{bmatrix} u_{m-1} \\ u_m \end{bmatrix} \quad (2.26)$$

la figura (2.2) muestra la función de forma.

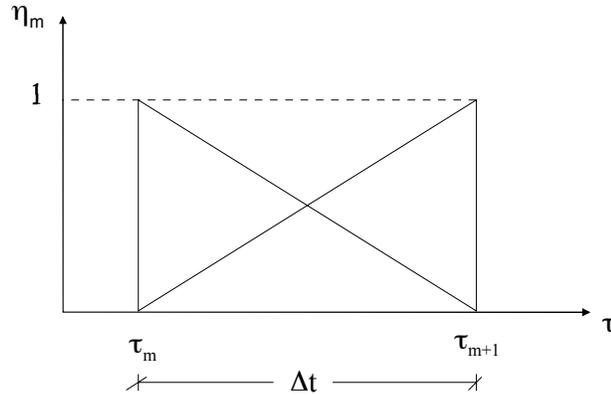


Figura 2. 2 Función de interpolación lineal

Para determinar las componentes  $U^{nm}$ , procedemos a integrar analíticamente la siguiente expresión para cada paso en el tiempo,

$$I_1 = \int_{\tau_m}^{\tau_{m+1}} \delta \left[ (t_n - \tau) - \frac{r}{c} \right] q^m d\tau \quad (2.27)$$

y para  $Q^{nm}$ ,

$$I_2 = \frac{1}{\Delta t} \int_{\tau_m}^{\tau_{m+1}} \delta \left[ (t_n - \tau) - \frac{r}{c} \right] [(\tau_{m+1} - \tau)u^{m-1} + (\tau - \tau_m)u^m] d\tau \quad (2.28)$$

$$I_3 = \frac{1}{\Delta t} \int_{\tau_m}^{\tau_{m+1}} \frac{\partial}{\partial \tau} \delta \left[ (t_n - \tau) - \frac{r}{c} \right] [(\tau_{m+1} - \tau)u^{m-1} + (\tau - \tau_m)u^m] d\tau \quad (2.29)$$

De la integración se obtienen,

$$I_1 = q^m \left\{ \text{H} \left[ (t_n - \tau_{m+1}) - \frac{r}{c} \right] - \text{H} \left[ (t_n - \tau_m) - \frac{r}{c} \right] \right\} \quad (2.30)$$

$$I_2 = \left\{ \frac{1}{\Delta t} \left[ \frac{r}{c} - (t_n - \tau_{m+1}) \right] u^{m-1} - \frac{1}{\Delta t} \left[ \frac{r}{c} - (t_n - \tau_m) \right] u^m \right\} \left\{ \text{H} \left[ (t_n - \tau_{m+1}) - \frac{r}{c} \right] - \text{H} \left[ (t_n - \tau_m) - \frac{r}{c} \right] \right\} \quad (2.31)$$

$$I_3 = \left\{ \frac{-1}{\Delta t} u^{m-1} + \frac{1}{\Delta t} u^m \right\} \left\{ \text{H} \left[ (t_n - \tau_{m+1}) - \frac{r}{c} \right] - \text{H} \left[ (t_n - \tau_m) - \frac{r}{c} \right] \right\} \quad (2.32)$$

Sustituyendo las integrales en el tiempo en la ecuación (2.13) obtenemos

$$\begin{aligned} c^i u^{ni} &= \sum_{m=1}^n \sum_{j=1}^Q \left\{ \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma_j} \frac{1}{r} \psi^j d\Gamma \right\} \Bigg|_{(t_n - \tau_{m+1}) \leq \frac{r}{c} \leq (t_n - \tau_m)} q^{mj} \\ &+ \left\{ \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma_j} \frac{\partial r}{\partial n} \frac{1}{r^2} (t_n - \tau_m) \phi^j d\Gamma \right\} \Bigg|_{(t_n - \tau_{m+1}) \leq \frac{r}{c} \leq (t_n - \tau_m)} u^{mj} \\ &- \left\{ \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma_j} \frac{\partial r}{\partial n} \frac{1}{r^2} (t_n - \tau_{m+1}) \phi^j d\Gamma \right\} \Bigg|_{(t_n - \tau_{m+1}) \leq \frac{r}{c} \leq (t_n - \tau_m)} u^{m-1j} \end{aligned} \quad (2.33)$$

Entonces podemos definir las componentes de las matrices,

$$U^{nm} = \frac{1}{r} \Bigg|_{(t_n - \tau_{m+1}) \leq \frac{r}{c} \leq (t_n - \tau_m)} \quad (2.34)$$

y aprovechando la propiedad de causalidad de la ecuación de ondas se puede definir,

$$Q^{nm} = \frac{\partial r}{\partial n} \frac{1}{r^2} (t_n - \tau_m) \Bigg|_{(t_n - \tau_{m+1}) \leq \frac{r}{c} \leq (t_n - \tau_m)} - \frac{\partial r}{\partial n} \frac{1}{r^2} [(t_n - \tau_{m+2})] \Bigg|_{(t_n - \tau_{m+2}) \leq \frac{r}{c} \leq (t_n - \tau_{m+1})} \quad (2.35)$$

Para conseguir los términos  $G^{nmij}$  y  $H^{nmij}$  de las matrices integraremos numéricamente en el espacio los términos anteriores.

## 2.5 Integración espacial

La integración numérica se lleva a cabo en cada elemento. Por ello, comenzaremos definiendo los tipos de elementos, sus funciones de forma y cómo se integran numéricamente. Por último, se discute el método de las subdivisiones que se ha desarrollado en el presente trabajo. Éste permite representar mejor el frente de la onda dentro de cada elemento, ya puede darse el caso de que sólo una parte del elemento en el que se integra esté excitada.

### 2.5.1 Descripción general

Dentro de un elemento, que llamaremos  $j$ , las funciones  $u$  y  $q$  se definen como

$$u = [\phi_1 \quad \phi_2 \quad \phi_3 \quad \dots \quad \phi_N] \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_N \end{Bmatrix}^j \tag{2.34}$$

$$q = [\phi_1 \quad \phi_2 \quad \phi_3 \quad \dots \quad \phi_N] \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_N \end{Bmatrix}^j$$

donde  $w^j$  y  $q^j$  son los potenciales y flujos nodales del elemento de  $N$  nodos, y  $\phi$  es la función de interpolación espacial.

La geometría del elemento también puede definirse con la posición de los nodos usando las mismas funciones de interpolación,

$$\mathbf{x} = \Phi \mathbf{x}^j \tag{2.35}$$

donde  $\Phi$  es,

$$\Phi = \begin{bmatrix} \phi_1 & 0 & 0 & \phi_2 & 0 & 0 & \dots & \phi_N & 0 & 0 \\ 0 & \phi_1 & 0 & 0 & \phi_2 & 0 & \dots & 0 & \phi_N & 0 \\ 0 & 0 & \phi_1 & 0 & 0 & \phi_2 & \dots & 0 & 0 & \phi_N \end{bmatrix} \quad (2.36)$$

Las funciones de interpolación  $\Phi$  se expresan en un sistema de coordenadas homogéneo, del tipo dibujado en la figura (2.3). Las coordenadas necesitan ser transformadas desde el sistema homogéneo,  $\xi_i$ , al sistema global  $x_i$ , y dicha transformación implica la introducción de un jacobiano.

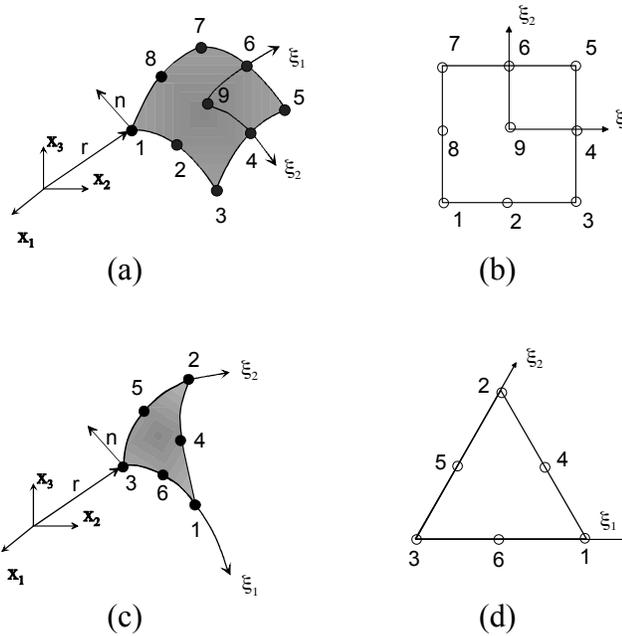


Figura 2.3. Transformación de coordenadas cartesianas a naturales para problemas tridimensionales: (a) elemento cuadrilátero en coordenadas cartesianas y (b) naturales; y (c) el elemento triangular en cartesianas y (d) naturales

Se necesita establecer en primer lugar como pasar desde el sistema de coordenadas global ( $x_1, x_2, x_3$ ), figura (2.3.a), al sistema ( $\xi_1, \xi_2$ ) definido sobre el elemento, donde  $\xi_1$  y  $\xi_2$  son coordenadas oblicuas, figura (2.3.b). El vector  $\mathbf{n}$  define la dirección normal.

Para el elemento cuadrilátero las funciones de forma cuadráticas en función de las coordenadas naturales son

$$\phi_1 = \frac{1}{4} \xi_1 (\xi_1 - 1) \xi_2 (\xi_2 - 1)$$

$$\begin{aligned}\phi_2 &= \frac{1}{2}(1 - \xi_1^2)\xi_2(\xi_2 - 1) \\ \phi_3 &= \frac{1}{4}\xi_1(\xi_1 + 1)\xi_2(\xi_2 - 1) \\ \phi_4 &= \frac{1}{2}\xi_1(\xi_1 + 1)(1 - \xi_2^2) \\ \phi_5 &= \frac{1}{4}\xi_1(\xi_1 + 1)\xi_2(\xi_2 + 1) \\ \phi_6 &= \frac{1}{2}(1 - \xi_1^2)\xi_2(\xi_2 + 1) \\ \phi_7 &= \frac{1}{4}\xi_1(\xi_1 - 1)\xi_2(\xi_2 + 1) \\ \phi_8 &= \frac{1}{2}\xi_1(\xi_1 - 1)(1 - \xi_2^2) \\ \phi_9 &= (1 - \xi_1^2)(1 - \xi_2^2)\end{aligned}$$

con

$$\begin{aligned}-1 &\leq \xi_1 \leq 1 \\ -1 &\leq \xi_2 \leq 1\end{aligned}\tag{2.37}$$

Análogamente para los elementos triangulares se tiene

$$\begin{aligned}\phi_1 &= \xi_1(2\xi_1 - 1) \\ \phi_2 &= \xi_2(2\xi_2 - 1)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\phi_3 &= \xi_3(2\xi_3 - 1) \\ \phi_4 &= 4\xi_1\xi_2 \\ \phi_5 &= 4\xi_2\xi_3 \\ \phi_6 &= 4\xi_3\xi_1\end{aligned}$$

siendo

$$\xi_3 = 1 - \xi_1 - \xi_2\tag{2.38}$$

Para evaluar las integrales usaremos la fórmula de Gauss estándar en términos de las coordenadas  $\xi_1$  y  $\xi_2$ . Se precisa pues un cambio de coordenadas para transformar el diferencial de superficie en el sistema cartesiano a un diferencial expresado en las coordenadas homogéneas.

$$d\Gamma = \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi_1} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi_2} \right| d\xi_1 d\xi_2 = |\mathbf{G}| d\xi_1 d\xi_2 \quad (2.39)$$

donde  $\mathbf{G}$  es el jacobiano reducido y  $|\mathbf{G}|$  es el módulo del vector normal  $\mathbf{n}$ ; esto es

$$\mathbf{n} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi_1} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi_2} = (g_1, g_2, g_3) = \left( \frac{\partial x_1}{\partial n}, \frac{\partial x_2}{\partial n}, \frac{\partial x_3}{\partial n} \right)$$

donde

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi_1} &= \left( \frac{\partial x_1}{\partial \xi_1}, \frac{\partial x_2}{\partial \xi_1}, \frac{\partial x_3}{\partial \xi_1} \right); \\ \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi_2} &= \left( \frac{\partial x_1}{\partial \xi_2}, \frac{\partial x_2}{\partial \xi_2}, \frac{\partial x_3}{\partial \xi_2} \right) \end{aligned} \quad (2.40)$$

entonces los valores de  $g_1$ ,  $g_2$  y  $g_3$  son

$$\begin{aligned} g_1 &= \left( \frac{\partial x_2}{\partial \xi_1} \frac{\partial x_3}{\partial \xi_2} - \frac{\partial x_2}{\partial \xi_2} \frac{\partial x_3}{\partial \xi_1} \right) \\ g_2 &= \left( \frac{\partial x_3}{\partial \xi_1} \frac{\partial x_1}{\partial \xi_2} - \frac{\partial x_1}{\partial \xi_1} \frac{\partial x_3}{\partial \xi_2} \right) \\ g_3 &= \left( \frac{\partial x_1}{\partial \xi_1} \frac{\partial x_2}{\partial \xi_2} - \frac{\partial x_2}{\partial \xi_1} \frac{\partial x_1}{\partial \xi_2} \right) \end{aligned} \quad (2.41)$$

y el módulo  $|\mathbf{G}|$  viene dado por

$$|\mathbf{G}| = \sqrt{(g_1^2 + g_2^2 + g_3^2)} \quad (2.42)$$

Estas relaciones son válidas para integrar cualquiera de los términos de las integrales de contorno.

### 2.5.2 Método de las subdivisiones

Debido a la condición causalidad de la ecuación de ondas, puede darse el caso en el que sólo una parte del elemento  $j$ , en el que vamos a integrar, esté excitada debido al punto de colocación  $i$ . Lo anterior se ilustra en la figura (2.4), donde el frente de la onda viene definido como dos esferas concéntricas de radios  $r_m = (t_n - \tau_m)c$  y  $r_{m+1} = (t_n - \tau_{m+1})c$ , teniendo que sólo parte del elemento  $j$  está excitada, zona de líneas entrecruzadas.

La integración espacial sólo se lleva a cabo en la parte del elemento  $j$  que queda entre las dos esferas concéntricas con centro en el punto de colocación  $i$ , y radios  $r_m$  y  $r_{m+1}$ . En esta tesis para representar mejor la zona del elemento que está excitada se divide el elemento en  $D$  subdivisiones. En la figura (2.5) se muestra el elemento, en coordenadas naturales, subdividido. Las subdivisiones cuyo centro está dentro del rango  $(t_n - \tau_{m+1}) < r/c < (t_n - \tau_m)$  son incluidas en la integración.

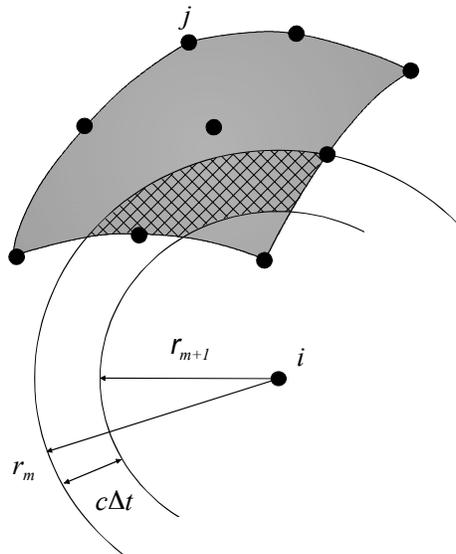


Figura 2.4. Zona del elemento  $j$  excitada debido al punto de colocación  $i$ , en un tiempo  $t_n - \tau_{m+1} < r/c < t_n - \tau_m$

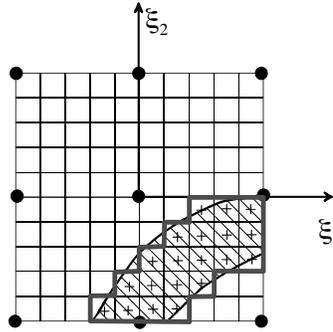


Figura 2.5 Elemento dividido en 100 subdivisiones, las subdivisiones cuyo centro esta en la zona excitada son integradas usando la cuadratura de Gauss.

Ahora bien, además de la transformación de coordenadas globales a naturales, figura (2.6.b), necesitaremos dos transformaciones adicionales para integrar el elemento. La primera transformación, figura (2.6.d), nos permite pasar a un sistema de coordenadas local en la subdivisión y la segunda, figura (2.6.e), utilizar la fórmula de Gauss estándar para integrar numéricamente.

La transformación a coordenadas locales, figura (2.6.d), es

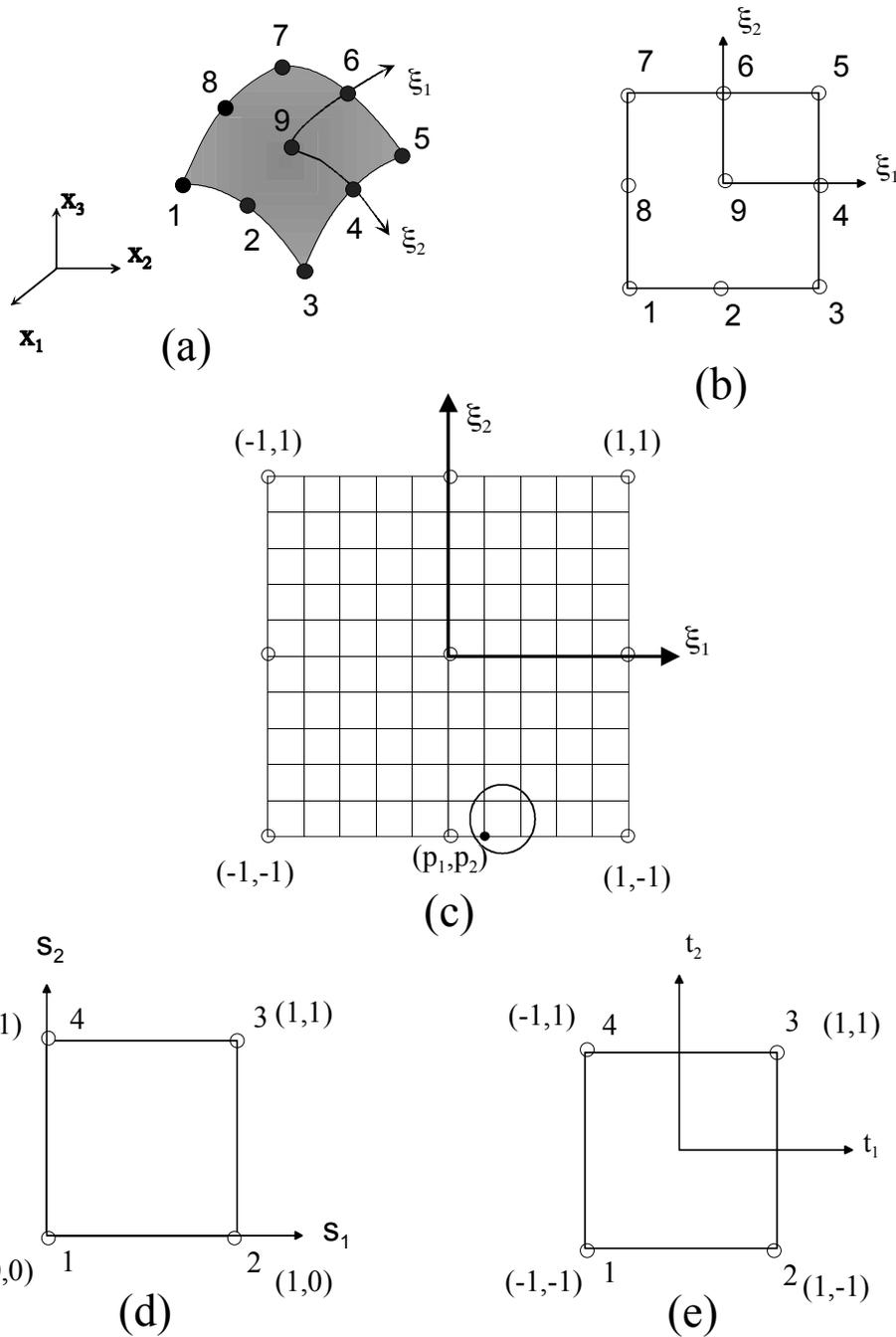


Figura 2.6 Transformaciones adicionales para integrar el elemento cuadrilátero. El elemento a) en coordenadas  $(x_1, x_2, x_3)$ , b) transformado a coordenadas naturales  $(\xi_1, \xi_2)$ , c) es dividido en  $D$  subdivisiones, d) coordenadas locales de la subdivisión  $(s_1, s_2)$ , e) coordenadas para integrar usando la fórmula de Gauss estándar  $(t_1, t_2)$

$$\xi_i = \frac{2s_i}{\sqrt{D}} + p_i \quad (2.43)$$

donde  $s_i$  es la coordenada local de la subdivisión y  $p_i$  es el valor de la coordenada  $\xi_i$  en la esquina inferior izquierda de la subdivisión, figura (2.6.c). La segunda transformación nos permite integrar numéricamente usando la fórmula de Gauss estándar figura (2.6.e),

$$s_i = \frac{t_i + 1}{2} \quad (2.44)$$

El jacobiano final de las dos transformaciones es

$$d\xi_1 d\xi_2 = \frac{1}{D} dt_1 dt_2 \quad (2.45)$$

Encontramos una situación especial cuando el punto de colocación  $i$  pertenece al elemento  $j$ , e integramos el instante  $m = n$  porque aparece una singularidad del tipo  $(1/r)$  en  $u^*$  y del tipo  $(1/r^2)$  en  $q^*$ . Primero discutiremos como tratar la singularidad,  $(1/r)$  y, en el apartado (2.6) la singularidad  $(1/r^2)$ .

Es importante destacar que al emplear las subdivisiones por elemento el punto singular está contenido por sólo alguna de éstas. Dicho de otro modo, las subdivisiones con el punto de colocación en una de sus esquinas son las únicas que poseen la singularidad, y sólo éstas necesitan ser tratadas de forma especial, como se muestra en la figura (2.7).

La primera transformación, figura (2.7.b), nos permite pasar a las coordenadas locales de la subdivisión

$$\xi_i = \frac{o_i + 1}{\sqrt{D}} + p_i \quad (2.46)$$

$p_i$  es el valor de la coordenada  $\xi_i$  de la esquina inferior izquierda de la subdivisión,  $o_i$  es el sistema de coordenadas locales de la subdivisión.

Para eliminar la singularidad la subdivisión es a su vez dividida en dos triángulos cuyas esquinas, identificadas con un (1), la contienen,

$$o_i = (1 - s_1)\xi_i^1 + s_1(1 - s_2)\xi_i^2 + s_1s_2\xi_i^3 \quad (2.47)$$

El superíndice identifica la esquina del triángulo. Los triángulos son transformado en cuadrados con coordenadas  $s_1$  y  $s_2$  cuyo jacobiano es nulo en el lado del cuadrado que representa al punto singular, figura (2.7.f).

Para poder usar la fórmula de Gauss estándar debemos trasladar los ejes, figura (2.7.g),

$$s_i = \frac{t_i + 1}{2} \quad (2.48)$$

y el jacobiano final es

$$d\xi_1 d\xi_2 = \frac{t_1 + 1}{2D} dt_1 dt_2 \quad (2.49)$$

Las transformaciones en el elemento triangular son similares a las del elemento cuadrilátero, figura (2.8). Primero se pasará de coordenadas cartesianas  $(x_1, x_2, x_3)$ , figura (2.8.a), a coordenadas naturales  $(\xi_1, \xi_2)$ , figura (2.8.b). Luego se subdivide el triángulo en  $D$  subdivisiones. Se dan dos tipos de triángulos, con coordenadas locales coincidentes con las generales y el caso invertido. Para el primer caso del subtriángulo, figura (2.8.d), la relación es,

$$\xi_i = \frac{s_i}{\sqrt{D}} + p_i \quad (2.50)$$

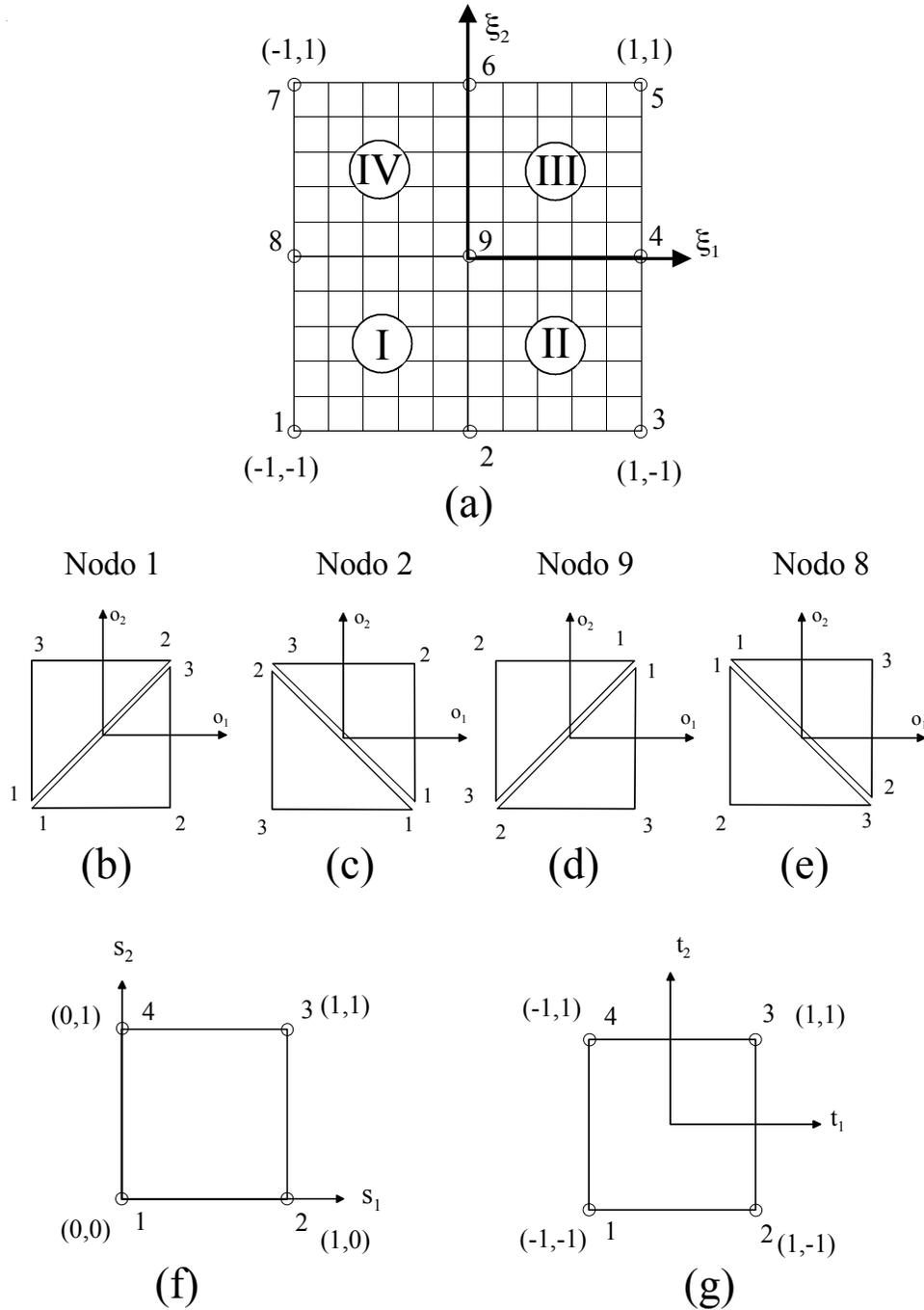


Figura 2.7 Transformaciones del elemento cuadrilátero cuando contiene el punto de colocación; a) El elemento es transformado a coordenadas naturales  $(\xi_1, \xi_2)$  y dividido en  $D$  subdivisiones; cuando la singularidad está en el cuadrante  $I$  y el punto de colocación en el nodo: b) 1, c) 2, d) 8, e) 9; f) coordenadas locales del triángulo transformado en cuadrilátero, g) coordenadas para integrar usando la fórmula de Gauss estándar  $(t_1, t_2)$

donde  $p_i$  es el valor de la coordenada  $\xi_i$  en la esquina izquierda de la subdivisión, figura (2.8.c). Para poder integrar haciendo uso de coordenadas de área se necesita una transformación adicional (ver Domínguez,1993),

$$\begin{aligned} s_1 &= t_1 \\ s_2 &= t_2(1 - t_1) \end{aligned} \tag{2.51}$$

por lo tanto tenemos que

$$\begin{aligned} \xi_1 &= \frac{t_1}{\sqrt{D}} + p_1 \\ \xi_2 &= \frac{t_2(1 - t_1)}{\sqrt{D}} + p_2 \end{aligned} \tag{2.52}$$

Y finalmente el jacobiano de la transformación es

$$d\xi_1 d\xi_2 = \frac{1 - t_1}{D} dt_1 dt_2 \tag{2.53}$$

Para el caso del triángulo invertido, figura (2.8.c),  $p_i$  es el valor de la coordenada  $\xi_i$  en la esquina derecha de la subdivisión, y la transformación es diferente,

$$\begin{aligned} \xi_1 &= p_1 - \frac{t_1}{\sqrt{D}} \\ \xi_2 &= p_2 - \frac{t_2(1 - t_1)}{\sqrt{D}} \end{aligned} \tag{2.54}$$

con su correspondiente jacobiano,

$$d\xi_1 d\xi_2 = \frac{1 - t_1}{D} dt_1 dt_2 \tag{2.55}$$

Cuando tenemos el punto de colocación en el elemento triangular realizaremos transformaciones similares a las del elemento cuadrilátero.

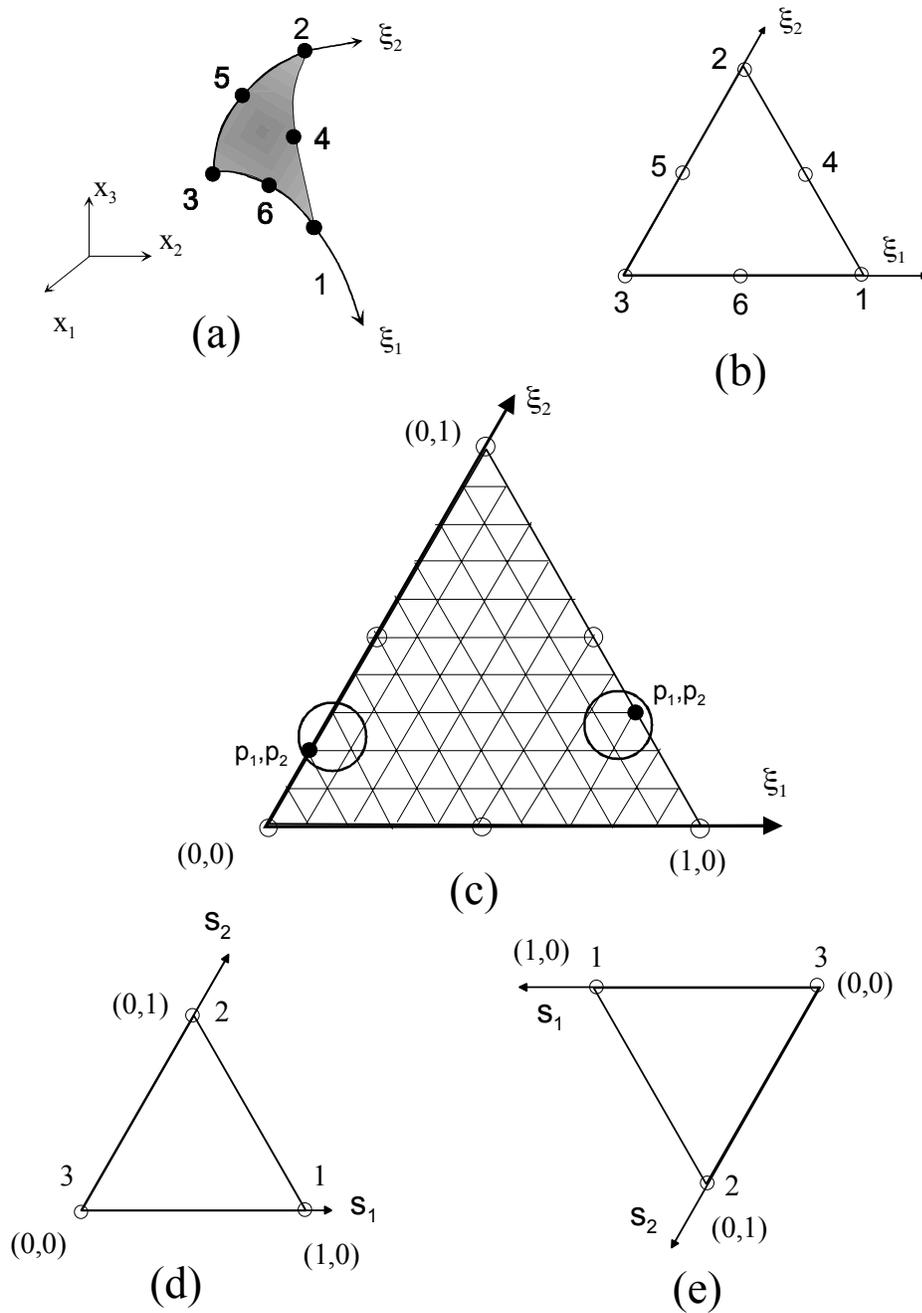


Figura 2.8 Transformación del elemento triangular a  $D$  subdivisiones triangulares. El elemento a) en coordenadas  $(x_1, x_2, x_3)$ , b) transformado a coordenadas naturales  $(\xi_1, \xi_2)$ , c) en coordenadas naturales es dividido en  $D$  subdivisiones, d) y e) coordenadas locales de la subdivisión  $(s_1, s_2)$ .

El subtriángulo que contiene el punto singular será transformado en un cuadrado con jacobiano nulo en el lado que corresponde al punto singular, figura (2.9).

Una vez más se comienza por pasar de coordenadas cartesianas a coordenadas naturales, figura (2.9.a). Entonces se definen unos nuevos ejes locales para cada subdivisión,  $o_1$  y  $o_2$ , figuras (2.9.b), (2.9.c) y (2.9.d),

$$\xi_i = \frac{o_i}{\sqrt{D}} + p_i \quad (2.56)$$

luego se procede a transformar el subtriángulo en un cuadrado con coordenadas  $s_1$  y  $s_2$ , (2.9.e),

$$o_i = (1 - s_1)\xi_i^1 + s_1(1 - s_2)\xi_i^2 + s_1s_2\xi_i^3 \quad (2.57)$$

el superíndice identifica la esquina del triángulo. La esquina (1) corresponde al punto singular en las figuras (2.9.b), (2.9.c) y (2.9.d).

Por último para poder integrar con coordenadas de área se necesita una transformación adicional figura (2.9.f), ecuación (2.51).

El Jacobiano final de las transformaciones es

$$d\xi_1 d\xi_2 = \frac{t_1 + 1}{8D} dt_1 dt_2 \quad (2.58)$$

## 2.6 Término libre

El término libre  $c^i$  sólo depende de la geometría en el punto  $i$ . Por ello podremos utilizar el valor de  $c^i$  obtenido a partir de otro problema, (Brebbia y Domínguez, 1989). Al resolver el problema estático de un medio con potencial constante se obtiene la condición de flujo nulo, o sea la perturbación se propaga instantáneamente a todo el medio,

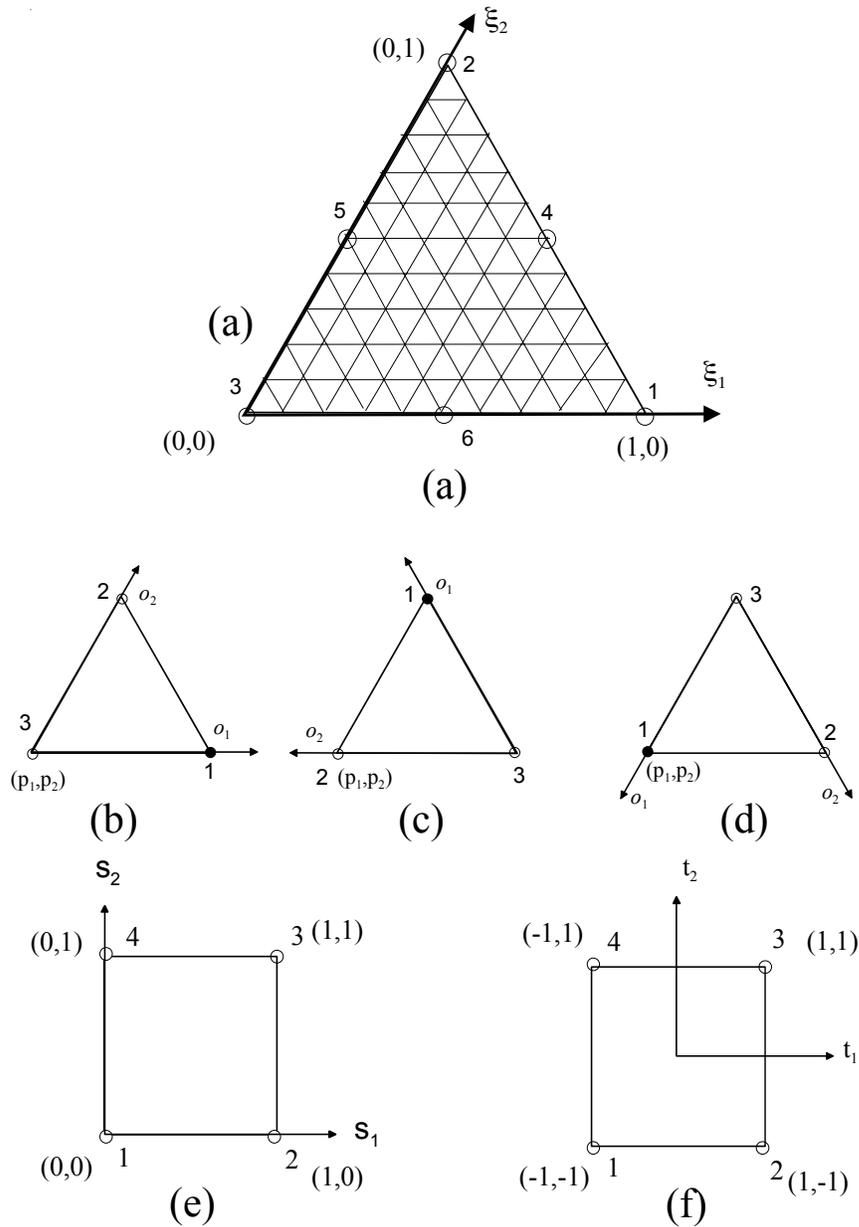


Figura 2.9 Transformaciones del elemento triangular dividido en  $D$  subdivisiones cuando contiene el punto singular; a) el elemento transformado a coordenadas naturales  $(\xi_1, \xi_2)$  y dividido en  $D$  subdivisiones; en coordenadas locales de la subdivisión  $(o_1, o_2)$ , cuando la singularidad está en el nodo: b) 1, c) 2, d) 3; e) coordenadas locales del triángulo transformado en cuadrilátero, f) coordenadas para integrar usando la fórmula de Gauss estándar  $(t_1, t_2)$

$$\mathbf{H}\mathbf{I}^q = 0 \quad (2.59)$$

donde  $\mathbf{I}^q$  es el vector que contiene el potencial de todos los nodos, y todas las componentes del vector son iguales. Así que podemos plantear las componentes de la ecuación anterior como

$$\begin{aligned} H_s^{ii} &= -\sum_{i \neq j} H_s^{ij} \\ \hat{H}_s^{ii} + c_s^i &= -\sum_{i \neq j} H_s^{ij} \end{aligned} \quad (2.60)$$

donde  $s$  se refiere al caso estático y nos permite generar la siguiente relación,

$$c^i = c_s^i = -\sum H_s^{ij} \quad (2.61)$$

Ahora la ecuación (2.19) cuando  $j=i$  y  $m=n$  se puede expresar como,

$$\begin{aligned} H^{nni} &= \hat{H}^{nni} - H_s^{ii} - \sum_{i \neq j} H_s^{ij} \\ (2.62) \\ H^{nni} &= \hat{H}_{dif} - \sum_{i \neq j} H_s^{ij} \end{aligned}$$

La relación anterior permite evitar el cálculo del punto singular en el término  $\hat{H}^{nni}$ , determinando en su lugar la diferencia entre el valor dinámico y el estático,  $\hat{H}_{dif}$ . Esta diferencia vale cero justo en la subdivisión que contiene el punto de colocación.

## 2.7 Aplicaciones

A continuación resolveremos un problema de geometría sencilla que es normalmente utilizado para verificar la validez de los métodos numéricos en la solución de problemas de propagación de ondas en un medio escalar para el que se conoce la solución analítica. Se trata del problema un prisma, figura (2.10.a), con potencial cero en uno de sus extremos y sometido en el extremo opuesto a un flujo aplicado en  $t = 0$  y sostenido, figura (2.10.b). Este problema aunque sencillo es muy sensible a inestabilidades numéricas ya que es difícil representar la respuesta en forma de escalón del flujo.

El prisma tiene las siguientes dimensiones: altura  $L = 4\text{m}$ , ancho y profundidad  $w_1 = w_2 = 2\text{m}$ , ver figura (2.10.a). El flujo aplicado vale  $q_0 = 2.0\text{ m}^{-1}$ . La velocidad de propagación de la onda en el medio es  $c = 200\text{m/s}$ . Se usaron en la discretización 40 elementos cuadrados, figura (2.11).

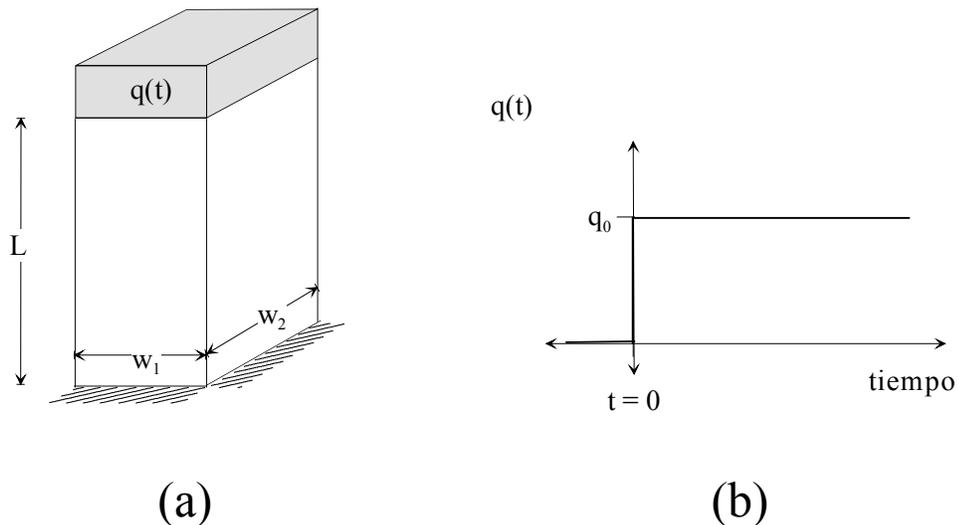


Figura 2.10 (a) Un prisma en un dominio escalar es sometido a (b) un flujo en forma de escalón.

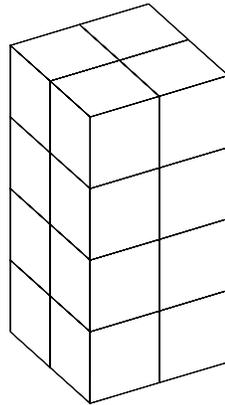


Figura 2.11 Malla de 40 elementos cuadrados

El problema fue resuelto con subdivisiones y sin éstas. Los resultados mejoraron considerablemente al usar subdivisiones en vez del elemento completo al definir el avance de la onda. En la figura (2.12) se muestran los resultados sin subdivisiones y con 100 subdivisiones por elemento. Por cada subdivisión se emplearon cuatro puntos de integración. En el problema resuelto sin subdividir los elementos, se verificó cada punto de integración, si el mismo estaba dentro del frente de la onda era considerado en la integración.

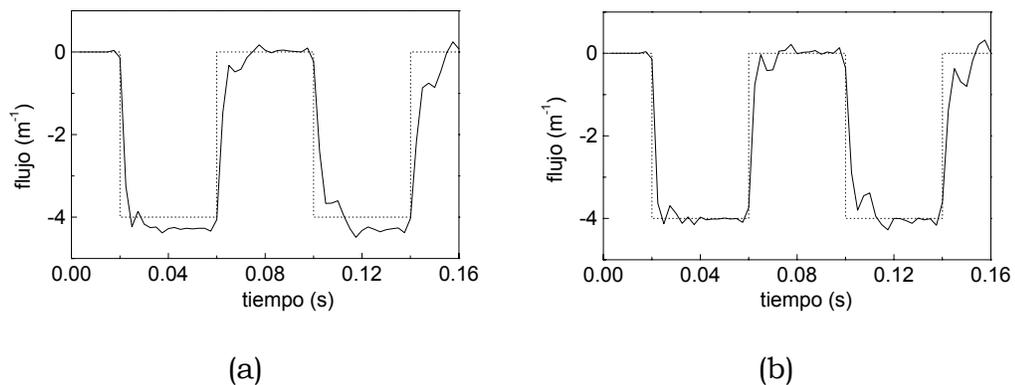


Figura 2.12 El flujo en la cara libre del prisma es calculado con  $\beta=1.0$  (a) sin subdivisiones y (b) con 100 subdivisiones por elemento

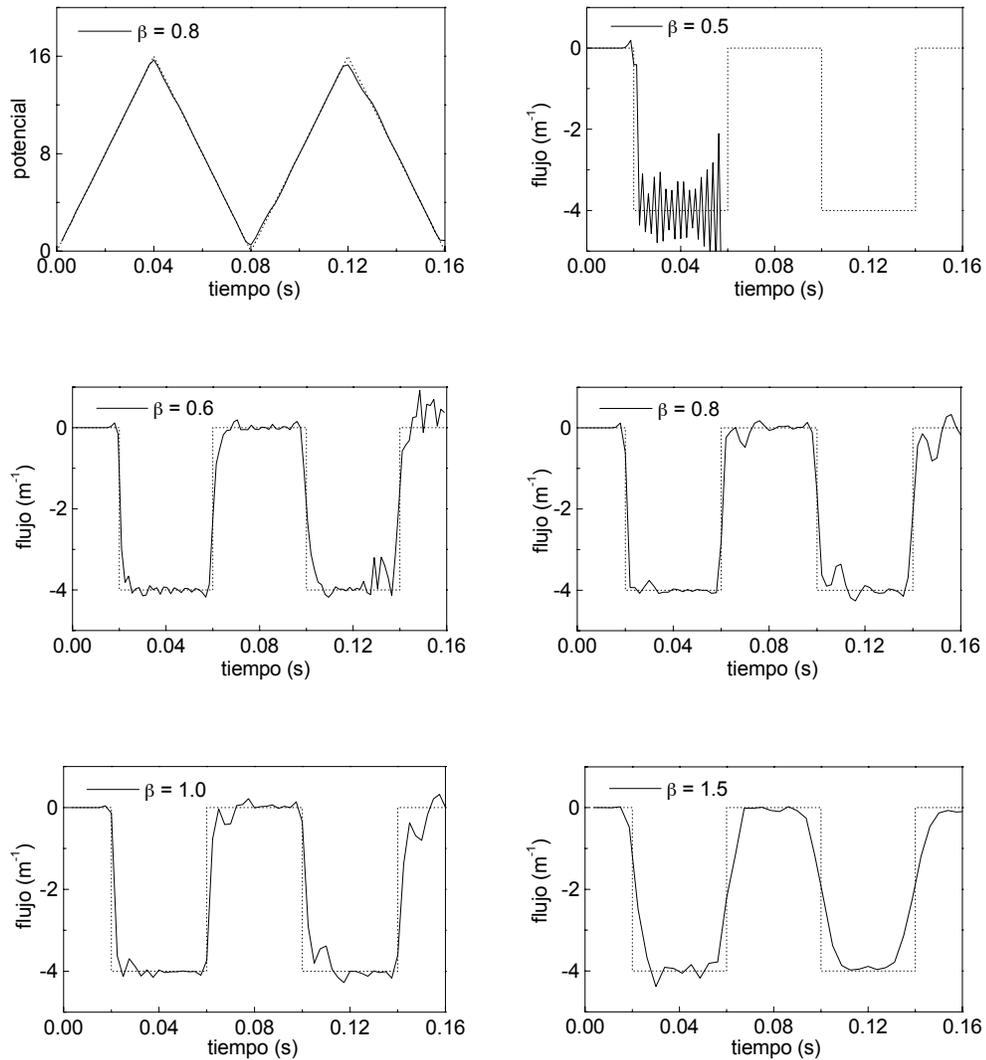


Figura 2.13 Respuesta en el tiempo de un prisma sometido a una carga en forma de escalón para distintos  $\beta$ , se han usado 100 subdivisiones por elemento

La precisión y exactitud del MEC en el dominio del tiempo es sensible a la discretización espacial y temporal, pero no de manera independiente sino a la combinación de ambas. Por ello, para establecer la fiabilidad del método, se ha establecido un parámetro que toma en cuenta la relación entre la discretización espacial y la temporal, (Mansur, 1982),

$$\beta = \frac{\Delta t c}{\Delta L} \quad (2.63)$$

donde  $c$  es la velocidad de propagación de la onda, longitudinal o transversal,  $\Delta t$  es el tamaño del paso de tiempo y  $\Delta L$  es la distancia de nodo a nodo. En nuestro problema utilizaremos el parámetro  $\beta$  para comparar los resultados obtenidos con distintas discretizaciones temporales para una misma malla, figura (2.13).

Los resultados fueron estables a partir  $\beta = 0.6$ , figura (2.13). Estos resultados son similares a los obtenidos por otros autores al resolver el problema bidimensional con el método paso a paso, para  $\beta < 0.6$  el que MEC es inestable (Mansur, 1982) y (Gallego, 1990). Por otro lado para  $\beta > 1.5$  se pierde precisión, ya que se suaviza demasiado la respuesta, figura (2.13).

# **Capítulo 3**

## **Solución en el Dominio del Tiempo de Problemas Tridimensionales de Propagación de Ondas en Medios Elásticos**

### **3.1 Introducción**

En este capítulo discutiremos el problema elastodinámico lineal, o sea la determinación de los desplazamientos, la deformación y la distribución de tensiones en función de las coordenadas espaciales y el tiempo cuando existen ondas que se propagan en un medio elástico, lineal e isótropo. Comenzaremos por establecer las ecuaciones que rigen el problema: equilibrio, compatibilidad y ley de comportamiento. Luego se discutirá la representación integral en elastodinámica, en la que utilizaremos la solución fundamental que corresponde a un impulso unitario. Por último veremos el desarrollo y la implementación del método de los elementos de contorno para resolver numéricamente el problema. En este último apartado se describe en detalle la técnica paso a paso y la evaluación analítica de las integrales en el tiempo dentro de cada paso. En elastodinámica también se empleará el método de las subdivisiones en la

integración espacial, como en el problema de ondas escalares discutido en el capítulo anterior. Las subdivisiones permiten representar mejor el frente de la onda. El capítulo concluye con la aplicación del método a varios problemas de propagación de ondas.

En la definición de los sistemas de ecuaciones se va a emplear la habitual notación tensorial.

### 3.2 Ecuaciones básicas de la elastodinámica lineal

Para puntos que pertenecen a un cuerpo elástico tenemos la siguiente ecuación de equilibrio,

$$\sigma_{ij,j} + \rho b_i = \rho \ddot{u}_i \quad (3.1)$$

en  $\Omega$  con  $i, j = 1, 2, 3$

donde  $\sigma_{ij}$  es el tensor de tensiones,  $b_i$  representa las componentes del vector de fuerzas por unidad de masa en un punto del dominio  $\Omega$  según la dirección  $i$ ,  $\rho$  es la densidad y  $u_i$  es el vector de desplazamientos en un punto del dominio  $\Omega$  según la dirección  $i$ .

Las ecuaciones de compatibilidad para pequeñas deformaciones, en el punto  $x$  del cuerpo  $\Omega$ , y en un tiempo  $t$ , se define

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (3.2)$$

en  $\Omega$  con  $i, j = 1, 2, 3$  y por  $\varepsilon_{ij}$  se ha denotado el tensor de deformaciones.

Y por último, de la relación lineal entre las componentes del tensor de tensiones y las componentes del tensor de deformaciones para cuerpos isótropos y elásticos, o Ley de Hooke, obtenemos la ley de comportamiento,

$$\begin{aligned}\varepsilon_{ij} &= -\frac{\nu}{E} \sigma_{kk} \delta_{ij} + \frac{1+\nu}{E} \sigma_{ij} \\ \sigma_{ij} &= \frac{E}{(1+\nu)} \left[ \frac{\nu}{(1-2\nu)} \delta_{ij} \varepsilon_{kk} + \varepsilon_{ij} \right]\end{aligned}\quad (3.3)$$

$E$  es el módulo de elasticidad del material y  $\nu$  es el módulo de Poisson.

Sustituyendo las ecuaciones (3.2) y (3.3) en la (3.1) se obtienen las ecuaciones de movimiento o ecuaciones de Navier,

$$\frac{(1-\nu)E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \nabla \nabla \mathbf{u} - \frac{E}{2(1+\nu)} \nabla \times \nabla \times \mathbf{u} + \rho \mathbf{b} = \rho \ddot{\mathbf{u}} \quad (3.4)$$

o escribiendo las propiedades del material en términos de las velocidades de propagación de las ondas longitudinales,  $c_1$ , y transversales,  $c_2$ ,

$$\rho c_1^2 \nabla \nabla \mathbf{u} - \rho c_2^2 \nabla \times \nabla \times \mathbf{u} + \rho \mathbf{b} = \rho \ddot{\mathbf{u}} \quad (3.5)$$

La solución del problema debe satisfacer el sistema de ecuaciones anterior y las condiciones de contorno. Si el dominio  $\Omega$  en estudio está delimitado por un contorno  $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$ , de manera que para cada dirección  $i$ ,  $\Gamma_1$  es la zona del contorno en que los movimientos son dato y  $\Gamma_2$  es la zona en que las tracciones son conocidas, las condiciones de contorno pueden ser descritas como:

$$\begin{aligned}u_i &= \bar{u}_i \text{ en } \Gamma_1 \\ p_i &= \sigma_{ij} \cdot n_j = \bar{p}_i \text{ en } \Gamma_2\end{aligned}\quad (3.6)$$

y las condiciones iniciales del problema están definidas en  $\Omega$  en el tiempo  $t = 0$ , de tal manera que podemos llamar,

$$\begin{aligned}u_i(x,0) &= u_{0i}(x) \\ v_i(x,0) &= v_{0i}(x)\end{aligned}\quad (3.7)$$

para todo punto  $x$  del cuerpo  $\Omega$ .

### 3.3 Representación integral en elastodinámica

La representación integral del problema que se obtiene del teorema de reciprocidad en elastodinámica, parte de una función residual ponderada de la cual obtenemos la expresión matemática,

$$\int_{\Gamma} (p_k^* * u_k^*) d\Gamma + \int_{\Omega} \rho (b_k^* * u_k^* + u_{0k}^* \dot{u}_k^* + v_{0k}^* u_k^*) d\Omega = \int_{\Gamma} (p_k^* * u_k) d\Gamma + \int_{\Omega} \rho (b_k^* * u_k + u_{0k}^* \dot{u}_k + v_{0k}^* u_k) d\Omega \quad (3.8)$$

La expresión relaciona dos estados elastodinámicos,  $\mathbf{u}(x,t)$  y  $\mathbf{u}^*(x,t)$ , que cumplen las ecuaciones de equilibrio, compatibilidad y ley de comportamiento sobre un mismo dominio  $\Omega$  de contorno  $\Gamma$ .  $\mathbf{u}(x,t)$  es el estado real que se trata de resolver y  $\mathbf{u}^*(x,t)$  es un estado virtual, denominado solución fundamental. El desarrollo de la ecuación anterior está detallado en (Domínguez, 1993).

En el presente trabajo utilizaremos la solución fundamental que corresponde a un impulso unitario aplicado en un tiempo  $t = 0$  en el punto  $x^i$  en dirección del eje  $x_l$  en una región infinita,

$$\rho b_k^* = \delta(t) \delta(x - x_i) \delta_{lk} \quad (3.9)$$

cuyas condiciones iniciales son cero. La función  $\delta$  es la delta de Dirac y  $\delta_{lk}$  es la delta de Kronecker.

Los desplazamientos y las tensiones correspondientes a este segundo estado son

$$\begin{aligned} u_k^* &= u_{lk}^*(x, t; x_i) e_l \\ \sigma_{kj}^* &= \sigma_{lkj}^*(x, t; x_i) e_l \end{aligned} \quad (3.10)$$

donde  $e_l$  es un vector unitario que indica la dirección de aplicación de la carga,  $u_{lk}^*$  representa el desplazamiento en la dirección  $k$  debido a una carga unitaria en la dirección  $l$ , y  $\sigma_{lkj}^*$  representa la componente  $kj$  del tensor de tensiones cuando una carga unitaria se aplica en la dirección  $l$ .

$x$  es el punto para el que se describen los desplazamientos o las tensiones,  $t$  es el tiempo,  $x_i$  es el punto donde la carga se ha aplicado en un tiempo  $t = 0$ . Las componentes de la proyección del tensor de tensiones en un punto  $x$  de la superficie con una normal  $n$  son

$$p_k^* = \sigma_{lkj}^*(x, t; x_i) n_j e_l = p_{kl}^*(x, t; x_i) e_l \quad (3.11)$$

Al aplicar el Teorema de Reciprocidad entre el estado real y el correspondiente a un impulso unitario en una región infinita, obtenemos,

$$\begin{aligned} u_k^i(x^i, t) = & \int_0^{t^+} \int_{\Gamma} u_{lk}^*(x, t - \tau; x^i) p_k(x, \tau) d\Gamma(x) d\tau \\ & - \int_0^{t^+} \int_{\Gamma} p_{lk}^*(x, t - \tau; x^i) u_k(x, \tau) d\Gamma(x) d\tau \\ & + \int_0^{t^+} \int_{\Omega} \rho u_{lk}^*(x, t - \tau; x^i) b_k(x, \tau) d\Omega(x) d\tau \\ & + \int_0^{t^+} \int_{\Omega} \rho [u_{lk}^*(x, t - \tau; x^i) v_{0k}(x) + u_{lk}^*(x, t; x^i) u_{0k}(x)] d\Omega(x) d\tau \end{aligned} \quad (3.12)$$

donde  $t^+ = t + \varepsilon$  con  $\varepsilon \rightarrow 0$  para evitar integrar exactamente en la singularidad de la delta de Dirac. La expresión anterior proporciona una representación integral de los desplazamientos,  $u_k$ , en cualquier punto interno  $i$  de  $\Omega$  en un tiempo  $t$ , en función de la resultante de tensiones y desplazamientos en el contorno  $\Gamma$ , las fuerzas aplicadas en el dominio y la solución fundamental.

Para tener una ecuación integral en el contorno, el punto  $i$  debe estar sobre él. Al igual que en el caso escalar aparece una singularidad cuando  $(x-x_i) \rightarrow 0$  y  $t \rightarrow 0$ . Aquí también se resuelve el problema agrandando el contorno con una superficie esférica alrededor del punto de colocación  $i$  (Brebbia y Domínguez, 1989). La representación integral para el punto  $i$  es,

$$\begin{aligned}
 c_{lk}^i u_k^i(x^i, t) &= \int_0^{t^+} \int_{\Gamma} u_{lk}^*(x, t - \tau; x^i) p_k(x, \tau) d\Gamma(x) d\tau \\
 &\quad - \int_0^{t^+} \int_{\Gamma} p_{lk}^*(x, t - \tau; x^i) u_k(x, \tau) d\Gamma(x) d\tau \\
 &\quad + \int_0^{t^+} \int_{\Omega} \rho u_{lk}^*(x, t - \tau; x^i) b_k(x, \tau) d\Omega(x) d\tau \\
 &\quad + \int_0^{t^+} \int_{\Omega} \rho [u_{lk}^*(x, t - \tau; x^i) \nu_{0k}(x) + \dot{u}_{lk}^*(x, t; x^i) u_{0k}(x)] d\Omega(x) d\tau
 \end{aligned} \tag{3.13}$$

Las contribuciones de la parte singular son del mismo tipo que en el caso estático, por lo que se podrá obtener  $c_{lk}^i$  indirectamente de la solución del problema de movimiento de sólido rígido. Más adelante en la sección de elementos de contorno discutiremos la forma en que se ha calculado  $c_{lk}^i$  en el presente trabajo.

La solución fundamental corresponde al problema de Stokes,

$$f(t) = \delta(t) \tag{3.14}$$

con la que se obtiene el siguiente tensor de los desplazamientos,

$$\begin{aligned}
 u_{lk}^*(x, t; x^i) &= \frac{1}{4\pi\rho} \left\{ \frac{t}{r^2} \left( \frac{3r_{,l}r_{,k}}{r} - \frac{\delta_{lk}}{r} \right) \left[ H\left(t - \frac{r}{c_1}\right) - H\left(t - \frac{r}{c_2}\right) \right] \right\} \\
 &\quad + \frac{1}{4\pi\rho} \left\{ \frac{r_{,l}r_{,k}}{r} \left[ \frac{1}{c_1^2} \delta\left(t - \frac{r}{c_1}\right) - \frac{1}{c_2^2} \delta\left(t - \frac{r}{c_2}\right) \right] + \frac{\delta_{lk}}{rc_2^2} \delta\left(t - \frac{r}{c_2}\right) \right\}
 \end{aligned} \tag{3.15}$$

y el tensor de tracciones,

$$p_{lk}^*(x, t; x^i) = \frac{1}{4\pi} \left\{ \left( \frac{\partial r}{\partial n} \delta_{lk} + r_{,k}n_l \right) A + r_{,l}r_{,k} \frac{\partial r}{\partial n} B + r_{,l}n_k C \right\} \tag{3.16}$$

con

$$\begin{aligned}
 A &= \frac{6c_2^2}{r^4} t \left[ H\left(t - \frac{r}{c_1}\right) - H\left(t - \frac{r}{c_2}\right) \right] - \frac{2}{r^2} \left[ \delta\left(t - \frac{r}{c_2}\right) - \left(\frac{c_2}{c_1}\right)^2 \delta\left(t - \frac{r}{c_1}\right) \right] \\
 &\quad - \frac{1}{r^2} \left[ \dot{\delta}\left(t - \frac{r}{c_2}\right) - \frac{r}{c_2} \dot{\delta}\left(t - \frac{r}{c_2}\right) \right] \\
 B &= -\frac{30c_2^2}{r^4} t \left[ H\left(t - \frac{r}{c_1}\right) - H\left(t - \frac{r}{c_2}\right) \right] + \frac{12}{r^2} \left[ \delta\left(t - \frac{r}{c_2}\right) - \left(\frac{c_2}{c_1}\right)^2 \delta\left(t - \frac{r}{c_1}\right) \right] \\
 &\quad + \frac{2}{rc_2} \left[ \dot{\delta}\left(t - \frac{r}{c_2}\right) - \left(\frac{c_2}{c_1}\right)^3 \dot{\delta}\left(t - \frac{r}{c_1}\right) \right] \\
 C &= \frac{6c_2^2}{r^4} t \left[ H\left(t - \frac{r}{c_1}\right) - H\left(t - \frac{r}{c_2}\right) \right] - \frac{2}{r^2} \left[ \delta\left(t - \frac{r}{c_2}\right) - \left(\frac{c_2}{c_1}\right)^2 \delta\left(t - \frac{r}{c_1}\right) \right] \\
 &\quad - \frac{1}{r^2} \left[ 1 - 2\left(\frac{c_2}{c_1}\right)^2 \right] \left[ \delta\left(t - \frac{r}{c_1}\right) + \frac{r}{c_1} \dot{\delta}\left(t - \frac{r}{c_1}\right) \right] \tag{3.17}
 \end{aligned}$$

donde  $u_{ik}^*$  y  $p_{ik}^*$  representan el desplazamiento y la proyección del tensor de tensiones, respectivamente, en la dirección  $k$  debido a una carga unitaria en la dirección  $l$ .  $x$  es el punto para el que se describen los desplazamientos o las tensiones,  $t$  es el tiempo,  $x_i$  es el punto donde la carga se ha aplicado en un tiempo  $t = 0$  y  $r = (x - x_i)$ .

### 3.4 El Método de los Elementos de Contorno en Elastodinámica

La ecuación integral de contorno (3.13) sin fuerzas internas y condiciones iniciales iguales a cero se reduce a,

$$\begin{aligned}
 c_{ik}^i u_k^i(x^i, t) &= \int_0^{t^+} \int_{\Gamma} u_{ik}^*(x, t - \tau; x^i) p_k(x, \tau) d\Gamma(x) d\tau \\
 &\quad - \int_0^{t^+} \int_{\Gamma} p_{ik}^*(x, t - \tau; x^i) u_k(x, \tau) d\Gamma(x) d\tau \tag{3.18}
 \end{aligned}$$

en el dominio  $\Omega$  y contorno  $\Gamma$ , relaciona las componentes de los desplazamientos  $u_k^i$  en cualquier punto  $i$  del contorno con las componentes de los desplazamientos,  $u_k$ , y las tracciones,  $p_k$ , en todo el contorno  $\Gamma$  y las componentes de los desplazamientos,  $u_{lk}^*$ , y tracciones,  $p_{lk}^*$ , de la solución fundamental, una carga unitaria actuando en  $i$ . El coeficiente  $c_{lk}^i$  depende sólo de la geometría del contorno en el punto  $i$ .

Usando notación vectorial la ecuación (3.15) se puede escribir como

$$\mathbf{c}^i \mathbf{u}^i + \int_0^{t^+} \int_{\Gamma} \mathbf{p}^* \mathbf{u} d\Gamma d\tau = \int_0^{t^+} \int_{\Gamma} \mathbf{u}^* \mathbf{p} d\Gamma d\tau \quad (3.19)$$

donde

$$\mathbf{u}^* = \begin{bmatrix} u_{11}^* & u_{12}^* & u_{13}^* \\ u_{21}^* & u_{22}^* & u_{23}^* \\ u_{31}^* & u_{32}^* & u_{33}^* \end{bmatrix}; \quad \mathbf{p}^* = \begin{bmatrix} p_{11}^* & p_{12}^* & p_{13}^* \\ p_{21}^* & p_{22}^* & p_{23}^* \\ p_{31}^* & p_{32}^* & p_{33}^* \end{bmatrix} \quad (3.20)$$

matrices cuyos coeficientes,  $u_{lk}^*$  y  $p_{lk}^*$ , son los desplazamientos y las tracciones en la dirección  $k$  debidos a una carga unitaria actuando en  $i$  en la dirección  $l$ , y donde

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{p} = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix} \quad (3.21)$$

$$\mathbf{c}^i = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix}$$

$\mathbf{c}^i = \frac{1}{2} \mathbf{I}$  para puntos donde el contorno es suave y  $\mathbf{c}^i = \mathbf{I}$  para puntos internos,  $\mathbf{I}$  es la matriz identidad.

### 3.4.1 Discretización de la ecuación integral de contorno

El proceso de discretización en elastodinámica es similar al del problema escalar, la única diferencia radica en el carácter vectorial de las variables. El primer paso es dividir el contorno en elementos superficiales cuyos desplazamientos y tracciones se expresan en función de una serie de nodos definidos en cada elemento,

$$\begin{aligned} u_k &= \sum_j \sum_m \phi^j(r) \eta^m(\tau) u_k^{mj} \\ p_k &= \sum_j \sum_m \psi^j(r) \mu^m(\tau) p_k^{mj} \end{aligned} \quad (3.22)$$

donde  $u_k^{mj}$  y  $p_k^{mj}$  son el desplazamiento y la tracción  $k$  respectivamente, del nodo  $j$  en el tiempo  $t_m = m\Delta t$ . Las funciones  $\phi^j(r)$  y  $\psi^j(r)$  son las funciones de interpolación espacial que se toman normalmente  $\phi^j(r) = \psi^j(r)$ . Las funciones  $\eta^m(\tau)$  y  $\mu^m(\tau)$  son funciones de interpolación en el tiempo dentro de cada paso de tiempo.

Podemos escribir la ecuación (3.18) en términos de las variables nodales,

$$c_{lk}^i u_k^{ni} = \sum_{m=1}^n \sum_{j=1}^Q \left[ \left\{ \int_{\Gamma_j} \left[ \int_{\Delta t_m} u_{lk}^* \mu^m d\tau \right] \psi^j d\Gamma \right\} p_k^{mj} - \left\{ \int_{\Gamma_j} \left[ \int_{\Delta t_m} p_{lk}^* \eta^m d\tau \right] \phi^j d\Gamma \right\} u_k^{mj} \right] \quad (3.23)$$

donde  $\Gamma_j$  es el elemento al que pertenece en nodo  $j$ , y  $\Delta t_m$  es el lapso de tiempo en el que  $\eta^m(\tau)$  y  $\mu^m(\tau)$  no son cero.

Para simplificar, llamaremos a las integrales en el tiempo dentro de cada paso de tiempo,

$$\begin{aligned} U_{lk}^{nm} &= \int_{\Delta t_m} u_{lk}^* \mu^m d\tau \\ P_{lk}^{nm} &= \int_{\Delta t_m} p_{lk}^* \eta^m d\tau \end{aligned} \quad (3.24)$$

la ecuación (3.23) se puede escribir como

$$c_{lk}^i u_k^{ni} = \sum_{m=1}^n \sum_{j=1}^Q \left[ \left\{ \int_{\Gamma_j} U_{lk}^{nm} \psi^j d\Gamma \right\} p_k^{mj} - \left\{ \int_{\Gamma_j} P_{lk}^{nm} \phi^j d\Gamma \right\} u_k^{mj} \right] \quad (3.25)$$

y en una forma más compacta

$$c_{lk}^i u_k^{ni} = \sum_{m=1}^n \sum_{j=1}^Q \left[ G_{lk}^{nmij} p_k^{mj} - \hat{H}_{lk}^{nmij} u_k^{mj} \right] \quad (3.26)$$

donde

$$G_{lk}^{nmij} = \int_{\Gamma_j} U_{lk}^{nm} \psi^j d\Gamma; \quad \hat{H}_{lk}^{nmij} = \int_{\Gamma_j} P_{lk}^{nm} \phi^j d\Gamma \quad (3.27)$$

Si definimos,

$$H_{lk}^{nmij} = \begin{cases} \hat{H}_{lk}^{nmij} & \text{cuando } i \neq j \text{ y } n \neq m \\ \hat{H}_{lk}^{nmij} + c_{lk}^i & \text{cuando } i = j \text{ y } n = m \end{cases} \quad (3.28)$$

la ecuación para el punto  $i$  se puede escribir como

$$\sum_{m=1}^n \sum_{j=1}^Q H_{lk}^{nmij} u_k^{mj} = \sum_{m=1}^n \sum_{j=1}^Q G_{lk}^{nmij} p_k^{mj} \quad (3.29)$$

El sistema de ecuaciones para todos los nodos del contorno se puede expresar en forma matricial,

$$\sum_{m=1}^n \mathbf{H}^{nm} \mathbf{u}^m = \sum_{m=1}^n \mathbf{G}^{nm} \mathbf{p}^m \quad (3.30)$$

En esta ecuación  $\mathbf{u}^m$  y  $\mathbf{p}^m$  son vectores que contienen las tres componentes de los desplazamientos y las tracciones, respectivamente, de todos los nodos en el paso de tiempo  $m$ . Los elementos  $H_{lk}^{nmij}$  y  $G_{lk}^{nmij}$  de las

matrices  $\mathbf{H}^{nm}$  y  $\mathbf{G}^{nm}$  se han obtenido de la integración de los elementos de contorno que contienen el nodo  $j$  en el intervalo de tiempo  $m$ , debidos a la componente  $k$  de la solución fundamental cuando una carga unitaria es aplicada en el nodo  $i$  en dirección  $l$  con una diferencia de tiempo  $(n - m)\Delta t$ .

El sistema de ecuaciones (3.30) se resuelve paso a paso. Una vez son conocidos  $u^m$  y  $p^m$  para  $m = 1, 2, \dots, n-1$ , la solución para el paso de tiempo  $n$  es obtenida de

$$\mathbf{H}^{nn}u^n = \mathbf{G}^{nn}p^n + \sum_{m=1}^{n-1} (\mathbf{G}^{nm}p^m - \mathbf{H}^{nm}u^m) \quad (3.31)$$

Las columnas  $\mathbf{H}^{nn}$  y  $\mathbf{G}^{nn}$  son reorganizadas de acuerdo con las condiciones de contorno. Si dejamos todas las desconocidas para el paso de tiempo  $n$  al lado izquierdo,

$$\mathbf{A}^n \mathbf{X}^n = \mathbf{F}^n \quad (3.32)$$

donde  $\mathbf{F}^n$  contiene el último término de la ecuación (3.31) que corresponde a los pasos anteriores sumado a el producto de la matriz reorganizada que contiene las condiciones de contorno conocidas en el paso de tiempo  $n$ .

Las matrices  $\mathbf{H}^{nm}$  y  $\mathbf{G}^{nm}$  dependen de la diferencia  $(n - m)$  y no en el valor de  $n$  ó  $m$ . En cada paso de tiempo sólo las matrices  $\mathbf{H}^{n1}$  y  $\mathbf{G}^{n1}$  son calculadas. Las restantes matrices  $\mathbf{H}^{nm}$  y  $\mathbf{G}^{nm}$  son conocidas de los pasos anteriores. Si el tipo de condiciones de contorno en cada nodo no cambian con el tiempo las  $\mathbf{H}^{nn}$  y  $\mathbf{G}^{nn}$  sólo se tienen que reorganizar una vez, obteniendo  $\mathbf{A}^n = \mathbf{A}$ . El vector de las desconocidas para cada paso de tiempo se calcula,

$$\mathbf{X}^n = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{F}^n \quad (3.33)$$

### 3.4.2 Evaluación de las integrales en el tiempo

Para determinar los valores de  $U_{lk}^{nmij}$  y  $P_{lk}^{nmij}$  hemos escogido las funciones de interpolación temporal tal que,

$$\begin{aligned} \mu^m(\tau) &= 1 \text{ para } \tau_{m-1} \leq \tau \leq \tau_m \\ \mu^m(\tau) &= 0 \text{ para } \tau < \tau_{m-1} \text{ ó } \tau > \tau_m \end{aligned} \quad (3.34)$$

y  $\eta^m(\tau)$  tiene la forma, figura (3.1),

$$u_k(\tau) = \frac{1}{\Delta t} [(\tau_{m+1} - \tau) \begin{bmatrix} u_k^{m-1} \\ u_k^m \end{bmatrix}] \quad (3.35)$$

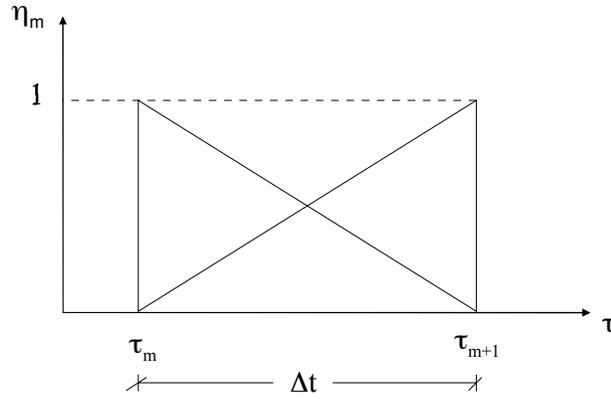


Figura 3. 1 Función de interpolación lineal

Es necesario resolver cinco tipos de integrales,

$$I_1 = \int_{\tau_m}^{\tau_{m+1}} (t_n - \tau) \left\{ H \left[ (t_n - \tau) - \frac{r}{c_1} \right] - H \left[ (t_n - \tau) - \frac{r}{c_2} \right] \right\} d\tau \quad (3.36)$$

$$I_2 = \int_{\tau_m}^{\tau_{m+1}} \delta \left[ (t_n - \tau) - \frac{r}{c_1} \right] d\tau \quad (3.37)$$

$$I_3 = \int_{\tau_m}^{\tau_{m+1}} (t_n - \tau)(\tau_{m+1} - \tau) \left\{ H \left[ (t_n - \tau) - \frac{r}{c_1} \right] - H \left[ (t_n - \tau) - \frac{r}{c_2} \right] \right\} d\tau \quad (3.38)$$

$$I_4 = \int_{\tau_m}^{\tau_{m+1}} (\tau_{m+1} - \tau) \delta \left[ (t_n - \tau) - \frac{r}{c_2} \right] d\tau \quad (3.39)$$

$$I_5 = \int_{\tau_m}^{\tau_{m+1}} (\tau_{m+1} - \tau) \dot{\delta} \left[ (t_n - \tau) - \frac{r}{c_1} \right] d\tau \quad (3.40)$$

La evaluación de las integrales está detallada en el Apéndice A.

### 3.4.3 Integración espacial

Para obtener los términos  $G^{nmij}$  y  $H^{nmij}$  de las matrices integraremos numéricamente en el espacio los resultados de la integración analítica dentro de cada paso de tiempo obtenida según se ha descrito en el apartado anterior. Usaremos dos tipos de elementos: triangulares y cuadriláteros. Las funciones  $\mathbf{u}$  y  $\mathbf{p}$  se definen sobre un elemento  $j$  como

$$\mathbf{u} = \Phi \mathbf{u}^j; \quad \mathbf{q} = \Psi \mathbf{q}^j \quad (3.41)$$

$u^j$  y  $p^j$  son los desplazamientos y tracciones nodales del elemento, de dimensiones  $3 \times q$ , siendo  $q$  el número de nodos del elemento,  $u$  y  $p$  son los desplazamientos y tracciones en cualquier punto del contorno  $\Gamma$ , esto es

$$\mathbf{p} = \begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{Bmatrix}; \quad \mathbf{u} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} \quad (3.42)$$

Usaremos  $\Phi = \Psi$  en nuestro análisis,

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} \phi_1 & 0 & 0 & \phi_2 & 0 & 0 & \dots & \phi_q & 0 & 0 \\ 0 & \phi_1 & 0 & 0 & \phi_2 & 0 & \dots & 0 & \phi_q & 0 \\ 0 & 0 & \phi_1 & 0 & 0 & \phi_2 & \dots & 0 & 0 & \phi_q \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1^1 \\ u_2^1 \\ u_3^1 \\ \vdots \\ u_1^q \\ u_2^q \\ u_3^q \end{Bmatrix}$$

$$p = \begin{bmatrix} \phi_1 & 0 & 0 & \phi_2 & 0 & 0 & \dots & \phi_q & 0 & 0 \\ 0 & \phi_1 & 0 & 0 & \phi_2 & 0 & \dots & 0 & \phi_q & 0 \\ 0 & 0 & \phi_1 & 0 & 0 & \phi_2 & \dots & 0 & 0 & \phi_q \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p_1^1 \\ p_2^1 \\ p_3^1 \\ \vdots \\ p_1^q \\ p_2^q \\ p_3^q \end{Bmatrix} \quad (3.43)$$

La geometría del elemento también se puede definir con las mismas funciones de interpolación,

$$\mathbf{x} = [\phi_1 \quad \phi_2 \quad \dots \quad \phi_q] \mathbf{x}^j = \Phi \mathbf{x}^j \quad (3.44)$$

Las funciones de interpolación  $\Phi$  se expresan en un sistema de coordenadas homogéneo, del tipo dibujado en figura (2.3). Las coordenadas necesitan ser transformadas desde el sistema  $\xi_i$  al sistema global  $x_i$ . En este caso es necesario transformar de un sistema al otro, y dicha transformación implica la introducción de un jacobiano, el procedimiento de integración espacial está desarrollado en el Capítulo 2.

En elastodinámica también haremos uso de las subdivisiones por elemento en la integración espacial, ya que, al igual que en el problema escalar, puede darse el caso de que sólo parte del elemento en el que vamos a integrar esté excitado debido a la condición de causalidad de la ecuación de ondas. La aplicación del método de las subdivisiones en elastodinámica es muy similar a la del problema escalar y está descrito en detalle en el capítulo anterior. La única diferencia radica en que ahora están presentes los cinco tipos de integrales descritos en el apartado anterior en la solución fundamental y deben ser evaluadas individualmente por subdivisión, con cuatro combinaciones posibles: no han llegado las ondas o ya han pasado, han llegado sólo las ondas longitudinales, están presentes las longitudinales y transversales, quedan las transversales.

### 3.4.4 Término Libre

El término libre  $c_{lk}^i$  sólo depende de la geometría en el punto  $i$ . Por ello podremos utilizar el valor de  $c_{lk}^i$  que se obtiene al resolver el problema de movimiento de un sólido rígido, (Brebbia y Domínguez, 1989) que genera la siguiente relación,

$$\left(c_{lk}^i\right)_s = \left(-\sum H_{lk}^{ij}\right)_s \quad (3.45)$$

donde  $s$  se refiere al caso estático. Ahora la ecuación (3.38) cuando  $j = i$  y  $m = n$  queda como

$$\begin{aligned} H_{lk}^{nni} &= -\sum \left(H_{lk}^{ij}\right)_s + \hat{H}_{lk}^{nni} \\ H_{lk}^{nni} &= \left(\hat{H}_{lk}\right)_{dif} - \sum_{i \neq j} \left(H_{lk}^{ij}\right)_s \end{aligned} \quad (3.46)$$

Cuando se calcula el punto singular no es necesario determinar  $\hat{H}^{nni}$  sino la diferencia entre el valor dinámico y el estático,  $\left(\hat{H}_{lk}\right)_{dif}$ . Esta diferencia vale cero justo en la subdivisión que contiene el punto de colocación, evitando tener que evaluar el punto singular.

### 3.5 Aplicaciones

#### 3.5.1 Cavidad esférica

Se ha resuelto numéricamente un problema sencillo de propagación de ondas en medios elásticos, se trata del problema de una cavidad esférica dentro de un medio elástico infinito que es sometida a una explosión repentina. Las ondas excitan los elementos casi por entero en  $m = n$  y luego desaparecen en los siguientes pasos de tiempo. Las propiedades del medio son: módulo de rigidez  $\mu = 40$  MPa, módulo de Poisson  $\nu = 0.25$ , y la densidad  $\rho = 1000$  kg/m<sup>3</sup>. El radio de la cavidad es  $a=6$  m. La presión radial tiene la forma que se muestra en la figura (3.2.b) con  $p_0=6$  kPa. La malla de la discretización espacial se muestra en la figura (3.2.a).

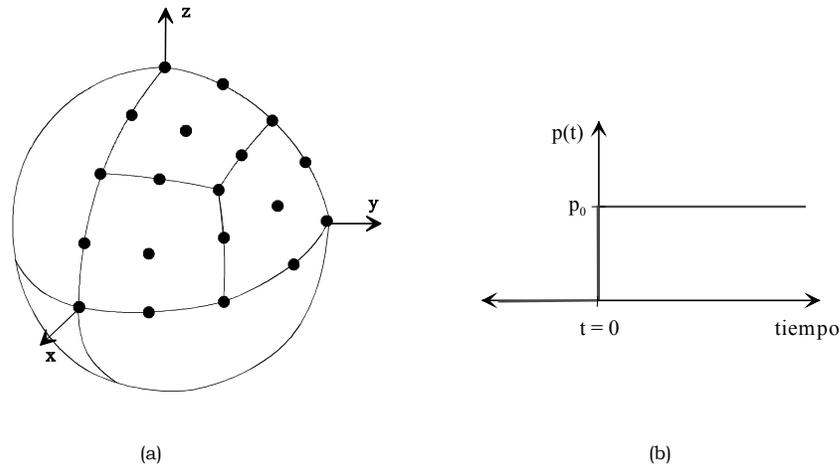


Figura 3.2. (a)Discretización de una esfera con 24 elementos cuadriláteros, (b) tracción en forma de escalón

Se ha determinado la variación en el tiempo del desplazamiento radial en la superficie de la cavidad. Los resultados obtenidos en el presente trabajo, para  $\beta_p = 0.9$  ( $\beta_s = 0.52$ ), guardan gran similitud con la solución analítica (Timoshenko y Goodier, 1934), figura (3.3). En la figura se muestran los desplazamientos dinámicos normalizados con la solución estática. En la solución del problema no se han empleado las subdivisiones por elemento ya que el elemento se excita casi por entero en el primer paso de tiempo.

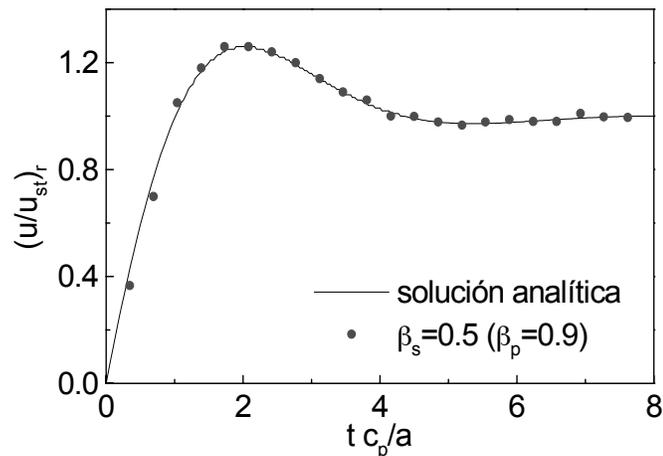


Figura 3.3 Respuesta en el tiempo del desplazamiento radial de una cavidad sometida a una presión interna

### 3.5.2 Medio semi-infinito

A continuación resolveremos otro problema de geometría sencilla que es normalmente utilizado para verificar la validez de los métodos numéricos en la solución de problemas elastodinámicos. Se trata un medio elástico semi-infinito, figura (3.4.a), sometido a una carga en forma de escalón, figura (3.4.c).

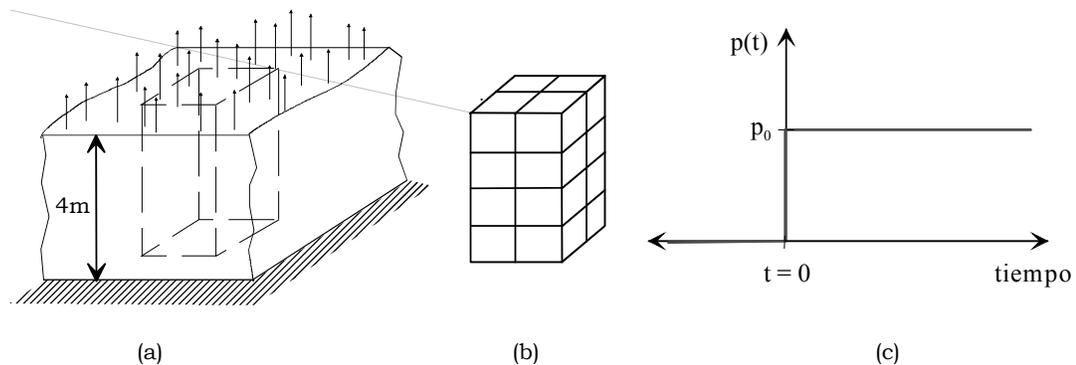


Figura 3.4 (a)Medio semi-infinito sometido a una tracción en forma de escalón, (b)malla de 40 elementos cuadrados, (c)tracción en forma de escalón

Este problema es muy sensible a inestabilidades numéricas ya que es difícil representar con un modelo numérico la respuesta en forma de escalón de las tensiones. En el presente trabajo el medio se modelará con un prisma formado por cuarenta elementos cuadrados, figura (3.4.b), que tiene restringidos los desplazamientos en dirección perpendicular a las caras. El prisma está empotrado en uno de sus extremos y es sometido a una tracción uniforme en el extremo opuesto, que corresponde a una función escalón en  $t=0$ , figura (3.4.c). La tracción aplicada,  $p_0=2$  kPa, es normal a la cara superior del prisma. Las propiedades del material son: densidad  $\rho=1000$  kg/m<sup>3</sup>, módulo de rigidez  $\mu=40$  MPa y módulo de Poisson  $\nu=0.25$ . La altura del medio es 4 m.

A igual que en el problema escalar comprobaremos el efecto que tienen las subdivisiones por elemento en la solución, o sea si mejoran la representación del frente de la onda. Se ha encontrado que a partir de 16

subdivisiones por elemento los resultados tienen buena precisión, figura (3.5).

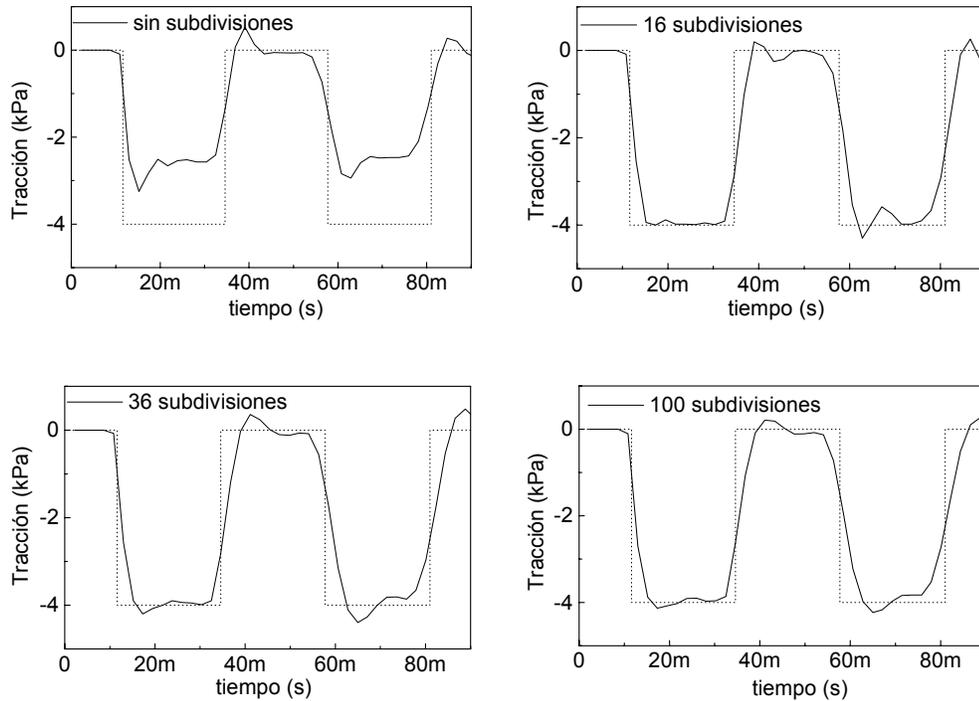


Figura 3.5 La tracción en la cara libre del prisma es calculada con  $\beta_p = 1.5$  ( $\beta_s = 0.87$ ).

En el problema resuelto sin subdividir los elementos, sólo se consideran en la integración numérica los puntos de integración que están dentro del frente de la onda. En este problema, a diferencia del problema anterior de la cavidad en el medio infinito, es imprescindible emplear las subdivisiones en los elementos. Aquí en cada paso de tiempo una porción pequeña de los elementos está excitada por las ondas transversales y longitudinales, lo cual hace necesaria una mejor representación del frente de la onda para poder obtener resultados aceptables.

También en elastodinámica, como en el problema escalar, hemos probado el efecto del parámetro  $\beta$  en la solución. Ahora están presentes dos ondas, las longitudinales y las transversales, así que cabe esperar que tanto  $\beta_p$  como  $\beta_s$  influyeran en los resultados. Se ha resuelto el problema del prisma con distintos módulos de Poisson,  $\nu=0.1$ ,  $\nu=0.25$  y  $\nu=0.4$ , y empleando distintos valores de  $\beta_p$ , y por tanto también de  $\beta_s$ . Se puede apreciar el efecto en las figuras (3.6), (3.7) y (3.8), usando 36 subdivisiones por elemento. Se aprecia que el  $\beta_s$  controla en gran medida la estabilidad,

no se pudieron obtener valores estables, en los tres módulos de Poisson estudiados, para aproximadamente  $\beta_s < 0.6$ . Pero además del valor de  $\beta_s$ , la diferencia entre  $\beta_p$  y  $\beta_s$  altera la estabilidad, o dicho de otro modo el método es sensible al valor del módulo de Poisson. A medida que se incrementa el valor de  $\nu$  también crece la diferencia entre  $\beta_p$  y  $\beta_s$  y es más difícil conseguir resultados aceptables, se afecta no sólo la estabilidad sino también la precisión. También se puede apreciar que para un  $\beta_p > 1.5$  se suaviza mucho la respuesta. De todas las pruebas realizadas se puede establecer que el método está limitado a  $\beta_s > 0.6$  y  $\beta_p < 1.5$ .

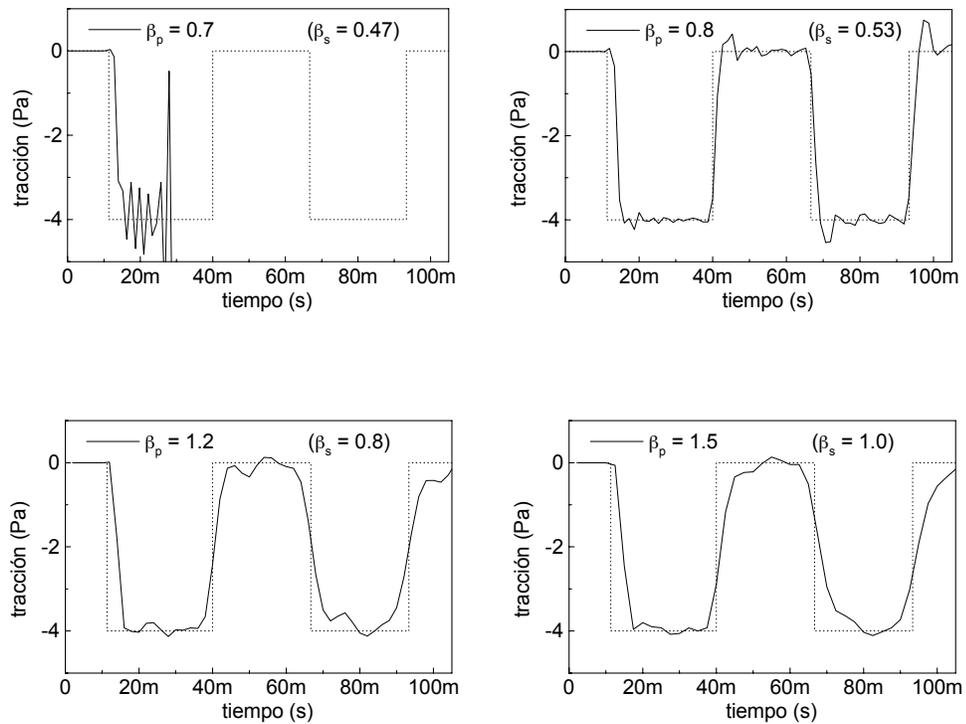


Figura 3.6 La tracción en la cara libre del prisma con  $\nu=0.1$ .

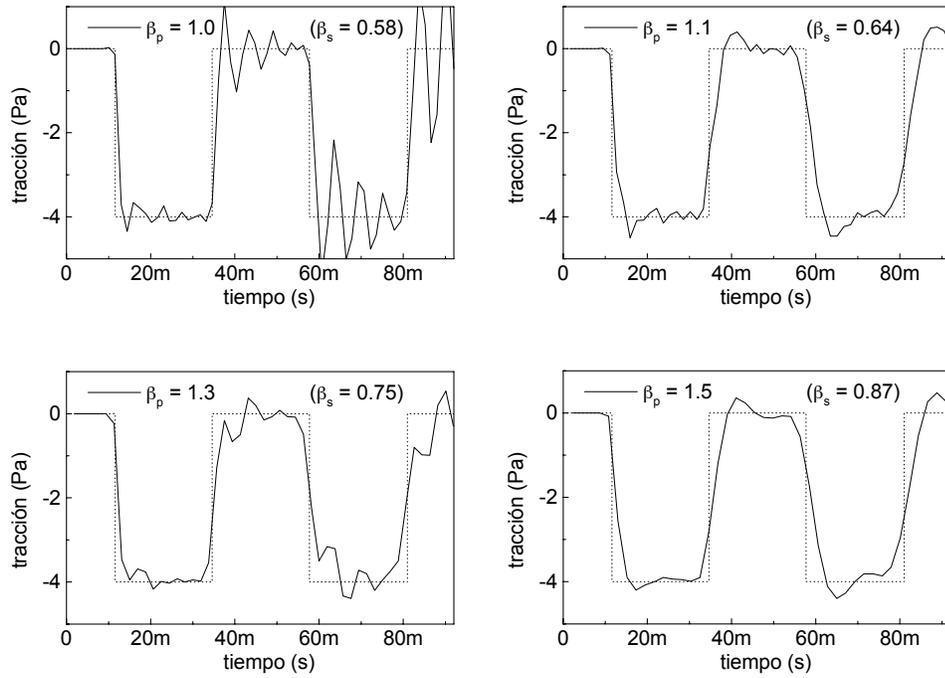


Figura 3.7 La tracción en la cara libre del prisma con  $\nu=0.25$ .

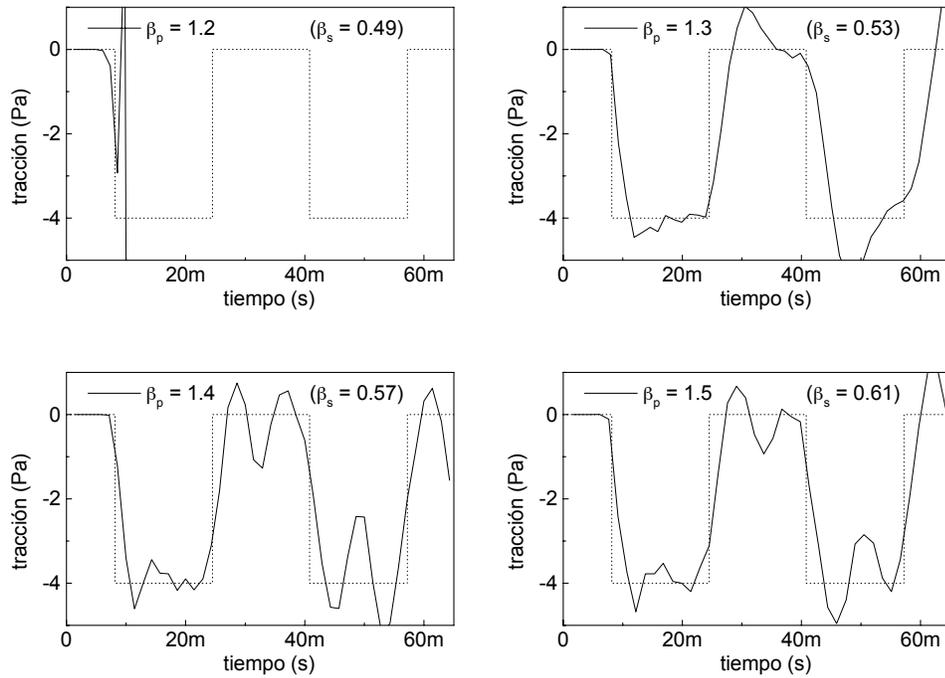


Figura 3.8 La tracción en la cara libre del prisma con  $\nu=0.4$ .

# **Capítulo 4**

## **Métodos para Estabilizar la Solución**

### **4.1 Introducción**

En los Capítulos 2 y 3, en los que se ha discutido sobre la propagación de ondas en medios escalares y elásticos, se ha puesto de manifiesto que el MEC en el dominio del tiempo es inestable para algunos problemas. Esto se debe a que con el modelo numérico no se representa exactamente la propagación en el espacio de las perturbaciones originadas por la solución fundamental y consecuentemente no se satisface con precisión la condición de causalidad. Esta condición no es fácil de conseguir con un modelo discreto, ya que al menos una parte atenuada de la perturbación se propaga instantáneamente dentro de cada elemento. Se pueden controlar los errores refinando la discretización espacial y temporal pero se debe tener cuidado con la relación espacio-tiempo de las discretizaciones, ya que para una misma discretización espacial, si refinamos demasiado la discretización temporal aparecerán errores que desestabilizan la solución. Por ello en el presente capítulo también se emplea el parámetro que representa dicha relación,  $\beta$ ,

$$\beta = \frac{\Delta t c}{\Delta L} \quad (4.1)$$

donde  $c$  es la velocidad de propagación de la onda, longitudinal o transversal,  $\Delta t$  es el tamaño del paso de tiempo y  $\Delta L$  es la distancia de nodo a nodo.

Se han desarrollado anteriormente por otros autores varios métodos para estabilizar la solución de los cuales se han revisado en el presente trabajo los más relevantes: el método  $\theta$  (Yu, Mansur, Carrer y Gong, 1998; Araújo, Mansur y Nishikava, 1999), el método  $\varepsilon$  (Birgisson, Siebrits y Peirce, 1999) y la ponderación en el tiempo (Yu, Mansur, Carrer y Gong, 1998). El método  $\theta$  se basa en aumentar el rango de integración del primer paso de tiempo, o sea éste ya no vale  $\Delta t$  sino  $\theta\Delta t$ , con  $\theta > 1$ , ya que esta integración controla en gran medida la estabilidad. También el método  $\varepsilon$  aumenta el rango de integración en el primer paso,  $(1+\varepsilon)\Delta t$  donde  $0 < \varepsilon < 1$ . Por otro lado el método de la ponderación en el tiempo realiza una integración adicional en esta variable de la ecuación integral de contorno. El método  $\varepsilon$  fue probado por sus autores en un problema elástico monodimensional, el método  $\theta$  en el problema escalar bidimensional y en el elástico tridimensional con módulo de Poisson  $\nu=0$ ; y por último, el método de la ponderación en el tiempo resolviendo el problema bidimensional escalar. En esta tesis se han probado los tres métodos en problemas tridimensionales en medios escalares y elásticos, y se comparan los resultados obtenidos.

Se proponen dos nuevos procedimientos que pueden denominarse el método de la velocidad constante y el método de la aceleración constante. Ambos se basan en una combinación lineal de las integrales de contorno discretizadas para tiempos anteriores y posteriores al evaluado. Para ello es necesario aproximar los valores de las variables para pasos de tiempo posteriores. Para obtener las relaciones entre los valores aproximados y los conocidos de pasos anteriores se emplean las definiciones por diferencias finitas de la segunda, tercera y cuarta derivadas de una función en un punto y se establecen éstas iguales a cero. Se establece la segunda derivada de las variables con respecto al tiempo igual a cero para

el caso del método de la velocidad constante, y la tercera y cuarta derivadas iguales a cero para el de la aceleración constante. Los procedimientos propuestos resultan ventajosos en comparación con los anteriormente existentes. Se muestran algunos resultados que ponen de manifiesto la eficiencia y sencillez de los métodos propuestos.

Todos los métodos que se discuten a continuación son válidos tanto en problemas de propagación de ondas en medios escalares o elásticos. Por lo tanto las variables  $u$  y  $q$  pueden identificar tanto los potenciales y los flujos en el caso escalar como los desplazamientos y las tracciones en elastodinámica. Y se llamará método estándar al método paso a paso sin modificaciones.

## 4.2 Revisión de métodos existentes

### 4.2.1 El método $\theta$

El método  $\theta$  se basa en mejorar la estabilidad mediante el aumento del rango de integración en el paso  $m = n$ . El rango de integración tiene un tamaño  $\theta\Delta t$  y  $\theta > 1$  en la primera integración en el tiempo. Para ello es necesario cambiar el valor de  $t_n$  a un valor  $t_\theta$ , o dicho de otro modo, en cada paso de tiempo se calculan las matrices  $\mathbf{G}$  y  $\mathbf{H}$  para un tiempo  $(n - m - 1 + \theta)\Delta t$  en vez de  $(n - m)\Delta t$ . Entonces la ecuación integral discretizada queda,

$$c^i u^{i\theta} = \sum_{j=1}^Q [G^{ij\theta\theta} q^{j\theta} - H^{ij\theta\theta} u^{j\theta}] + \sum_{m=1}^{n-1} \sum_{j=1}^Q [G^{ij\theta m} q^{jm} - H^{ij\theta m} u^{jm}] \quad (4.2)$$

donde,

$$\begin{aligned}
H^{j\theta m} &= \int_{\Gamma} \psi^j \int_0^{t_\theta} \eta^m(\tau) q^*(t_\theta - \tau) d\tau d\Gamma \\
G^{j\theta m} &= \int_{\Gamma} \psi^j \int_0^{t_\theta} \eta^m(\tau) u^*(t_\theta - \tau) d\tau d\Gamma \\
H^{j\theta\theta} &= \int_{\Gamma} \psi^j \int_0^{t_\theta} \eta^\theta(\tau) q^*(t_\theta - \tau) d\tau d\Gamma \\
G^{j\theta\theta} &= \int_{\Gamma} \psi^j \int_0^{t_\theta} \eta^\theta(\tau) u^*(t_\theta - \tau) d\tau d\Gamma
\end{aligned} \tag{4.3}$$

Las funciones de interpolación,  $\eta^m(\tau)$ , que se emplean son lineales tanto para los desplazamientos o potenciales como para las tracciones o flujos, ecuación (2.6). Las funciones  $\eta^\theta(\tau)$  son sólo distintas en el rango de validez, como se muestra en la figura (4.1), y se definen como,

$$\begin{aligned}
u(\tau) &= \frac{1}{\theta\Delta t} \begin{bmatrix} (\tau_\theta - \tau) & (\tau - \tau_{n-1}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{n-1} \\ u_\theta \end{bmatrix} \\
q(\tau) &= \frac{1}{\theta\Delta t} \begin{bmatrix} (\tau_\theta - \tau) & (\tau - \tau_{n-1}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_{n-1} \\ q_\theta \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{4.4}$$

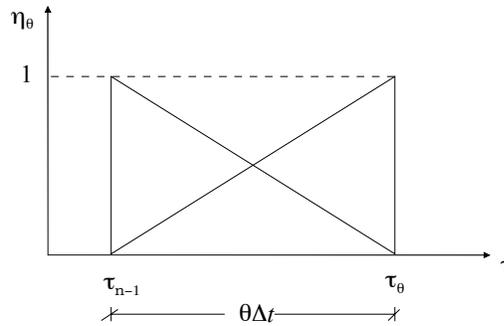


Figura 4.1. Funciones de interpolación en el tiempo

El método  $\theta$ , para poder emplear los valores de las matrices,  $\mathbf{G}$  y  $\mathbf{H}$ , y de las variables,  $u$  y  $q$ , conseguidos en pasos de tiempo anteriores, corrige los valores de las variables,  $u$  y  $q$ , suponiendo un comportamiento lineal de las mismas en el rango  $t_{n-1}$  hasta  $t_\theta$ , y se establecen las siguientes relaciones,

$$u_i^n = \frac{1}{\theta} u_i^\theta + \frac{\theta-1}{\theta} u_i^{n-1}$$

(4.5)

$$q_i^n = \frac{1}{\theta} q_i^\theta + \frac{\theta-1}{\theta} q_i^{n-1}$$

El método  $\theta$  es muy sencillo de incluir en un código estándar ya que sólo es necesario cambiar el valor de  $t_n$  a un valor  $t_\theta$ , o dicho de otro modo, en cada paso de tiempo se calculan las matrices  $\mathbf{G}$  y  $\mathbf{H}$  para un tiempo  $(n-m-1+\theta)\Delta t$  en vez de  $(n-m)\Delta t$ . El método no implica un coste computacional adicional, pero añade una variable al problema,  $\theta$ . El tamaño de  $\theta$  influye no sólo la estabilidad sino también en la exactitud de los resultados. A medida que  $\theta$  aumenta mejora la estabilidad pero se pierde exactitud. El error del método se debe a que al no emplear un paso de tiempo constante, se producen pequeñas violaciones de la causalidad en cada uno de los valores calculados.

#### 4.2.2 El método $\varepsilon$

El método  $\varepsilon$ , a igual que el método  $\theta$ , se basa en la amplificación de la primera integración en el tiempo de las componentes de las matrices,  $\mathbf{G}$  y  $\mathbf{H}$ ,  $\mathbf{G}^{11}$  y  $\mathbf{H}^{11}$  o  $\mathbf{G}^{nn}$  y  $\mathbf{H}^{nn}$ . Existen dos posibles interpretaciones del método  $\varepsilon$ : Birgisson, Siebrits y Peirce (1999); y Siebrits y Peirce (1997). La primera interpretación genera nuevamente el método  $\theta$  pero se define con el nombre  $\varepsilon$  el incremento en el tamaño del paso de tiempo. Se aumenta el rango de integración una cantidad  $\varepsilon$ , donde  $0 < \varepsilon < 1$ , figura (4.2). O dicho de otro modo, en cada paso de tiempo se calculan las matrices  $\mathbf{G}$  y  $\mathbf{H}$  para un tiempo  $(n+\varepsilon-m)\Delta t$  en vez de  $(n-m)\Delta t$ . No se muestran resultados para este caso ya que coinciden con los del método  $\theta$ .

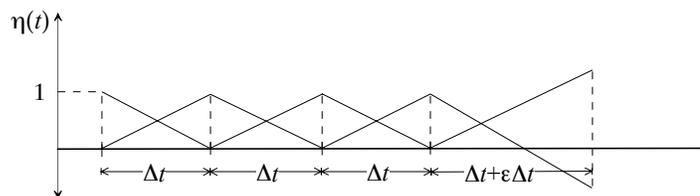


Figura 4.2. Funciones de interpolación en el método  $\varepsilon$

En la segunda interpretación del método, para la que si se muestran resultados en la última sección del Capítulo, sólo es necesario cambiar el valor de  $t_n$  a un valor  $t_{n+\varepsilon}$ . Se emplean los valores de las matrices,  $\mathbf{G}$  y  $\mathbf{H}$ , y

de las variables,  $u$  y  $q$  obtenidos en pasos anteriores,  $t_{n-m+\varepsilon}$ , sin ser corregidos para que se asemejen a los correctos,  $t_{n-m}$ , corrección que si se realiza en el método  $\theta$ , ecuación (4.5).

### 4.2.3 El método de ponderación en el tiempo

El método de ponderación en el tiempo emplea una ecuación del tipo:

$$\int_0^{t_n} W_n(t) \left\{ c^i u^{in} + \sum_{m=1}^n \sum_{j=1}^Q [H^{ijnm}(t) u^{jm} - G^{ijnm}(t) q^{jm}] \right\} dt = 0 \quad (4.6)$$

donde  $W_n(t)$  es la función de ponderación en el tiempo. Escogiendo,

$$W_n(t) = \begin{cases} 1 & t_{n-1} \leq t \leq t_{n+1} \\ 0 & t < t_{n-1}; \text{ ó } t > t_{n+1} \end{cases} \quad (4.7)$$

la ecuación (4.6) se convierte en

$$\int_{t_{n-1}}^{t_{n+1}} \left\{ c^i u^i + \sum_{m=1}^{n+1} \sum_{j=1}^Q [H^{ijnm}(t) u^{jm} - G^{ijnm}(t) q^{jm}] \right\} dt = 0 \quad (4.8)$$

Los valores de  $u^{n+1}$  y  $q^{n+1}$  se aproximan con una proyección lineal,

$$\begin{aligned} u^{n+1} &= 2u^n - u^{n-1} \\ q^{n+1} &= 2q^n - q^{n-1} \end{aligned} \quad (4.9)$$

lo que junto con la propiedad de causalidad de la ecuación de ondas,

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} [H^{ij(n+1)m}(t) u^{jm} - G^{ij(n+1)m}(t) q^{jm}] dt = \int_{t_{n-1}}^{t_n} [H^{ijn(m-1)}(t) u^{jm} - G^{ijn(m-1)}(t) q^{jm}] dt \quad (4.10)$$

para  $m = 2, 3, 4, \dots, n+1$

permite escribir la ecuación (4.8) como

$$\begin{aligned}
& 2\Delta t c^i u^{in} + \sum_{j=1}^Q \int_{t_{n-1}}^{t_n} \left\{ 3H^{ijn}(t) + H^{ijn(n-1)}(t) \right\} u^{jn} - \left\{ 3G^{ijn}(t) + G^{ijn(n-1)}(t) \right\} q^{jn} \Big\} dt \\
& + \sum_{j=1}^Q \int_{t_{n-1}}^{t_{n+1}} \left[ H^{ij(n+1)l}(t) u^{j1} - G^{ij(n+1)l}(t) q^{j1} \right] dt \\
& + \sum_{j=1}^Q \sum_{m=2}^{n-1} \int_{t_{n-1}}^{t_n} \left\{ H^{ijnm}(t) + H^{ijn(m-1)}(t) \right\} u^{jm} - \left\{ G^{ijnm}(t) + G^{ijn(m-1)}(t) \right\} q^{jm} \Big\} dt \\
& + \sum_{j=1}^Q \int_{t_{n-1}}^{t_n} \left[ H^{ijn}(t) u^{j(n-1)} - G^{ijn}(t) q^{j(n-1)} \right] dt = 0
\end{aligned} \tag{4.11}$$

El método de la ponderación en el tiempo estabiliza los resultados sin añadir ninguna variable como en los métodos  $\varepsilon$  y  $\theta$ , pero implica una integración adicional en el tiempo. El método no es fácil de incorporar en un código estándar ya que, además de modificar el algoritmo que suma las matrices  $\mathbf{G}$  y  $\mathbf{H}$  de pasos anteriores, añade una integración en el tiempo. Lo cual conlleva a un incremento en el coste computacional con respecto a un código estándar.

### 4.3 Propuesta de métodos de estabilización

Se han desarrollado dos métodos para estabilizar los resultados: el método de la velocidad constante y el de la aceleración constante. El método de la velocidad constante se basa en una combinación lineal de las ecuaciones integrales de contorno para los tiempos  $t_n$ ,  $t_{n+1}$  y  $t_{n-1}$ . Luego es necesario aproximar los valores de las desplazamientos y las tracciones, o los potenciales y flujos, para el tiempo  $t_{n+1}$ . Para ello se emplea la definición por diferencias finitas de la segunda derivada de una función y se establece ésta igual a cero. El método de la aceleración constante procede de manera similar. Éste último establece la tercera y cuarta derivada de las variables  $u$  y  $q$  respecto al tiempo iguales a cero, y de las definiciones de la segunda y tercera derivada de una función por diferencias finitas, se aproximan los valores de las variables en los tiempos  $t_{n+2}$  y  $t_{n+1}$ .

#### 4.3.1 El método de la velocidad constante

El método de la velocidad constante se basa en considerar, durante la obtención de las desconocidas para el instante de tiempo que se evalúa,  $t_n$ , los valores de las variables obtenidos de los instantes anterior,  $t_{n-1}$ , y posterior,  $t_{n+1}$ . Para ello se realiza una combinación lineal de las integrales de contorno discretizadas para los tiempos  $t_{n+1}$ ,  $t_n$  y  $t_{n-1}$ ,

$$c^i u^{in+1} = \sum_{m=1}^{n+1} \sum_{j=1}^Q [G^{ij(n+1)m}(t)q^{jm} - H^{ij(n+1)m}(t)u^{jm}] \quad (4.12)$$

$$c^i u^{in} = \sum_{m=1}^n \sum_{j=1}^Q [G^{ijnm}(t)q^{jm} - H^{ijnm}(t)u^{jm}] \quad (4.13)$$

$$c^i u^{in-1} = \sum_{m=1}^{n-1} \sum_{j=1}^Q [G^{ij(n-1)m}(t)q^{jm} - H^{ij(n-1)m}(t)u^{jm}] \quad (4.14)$$

Para poder combinar las ecuaciones anteriores es necesario aproximar los valores de las variables en el tiempo  $t_{n+1}$ . Así que partiendo de los valores obtenidos en pasos anteriores y las desconocidas en el paso de tiempo que se está evaluando se pueden aproximar  $u^{n+1}$  y  $q^{n+1}$ . Para predecir dichos valores el método emplea la definición por diferencias finitas de la segunda derivada de una función  $f(x)$ , figura (4.3), en el punto  $x=0$ ,

$$f''(0) = \frac{f(h) - 2f(0) + f(-h)}{h^2} \quad (4.15)$$

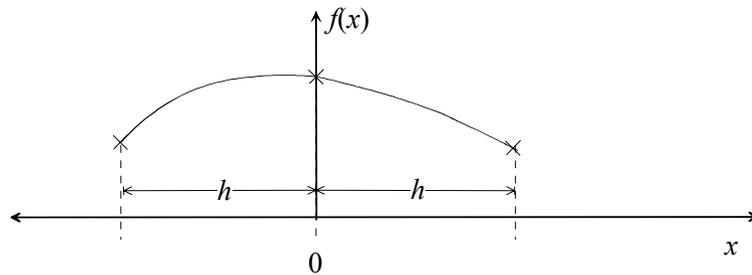


Figura 4.3. Función  $f(x)$

En este problema el valor de  $h$  representa el tamaño del paso de tiempo, y si se establece la segunda derivada de las variables,  $u$  y  $q$ , con respecto al

tiempo igual a cero en  $t_n$ ,  $f'(t_n) = 0$ , se pueden predecir los valores de las variables para el tiempo  $t_{n+1}$ , como

$$u^{n+1} = 2u^n - u^{n-1} \quad (4.16)$$

$$q^{n+1} = 2q^n - q^{n-1} \quad (4.17)$$

Se pueden combinar las ecuaciones (4.12) + 2×(4.13) + (4.14), figura (4.4.a), y haciendo uso de las definiciones en las ecuaciones (4.16) y (4.17) obtener,

$$\begin{aligned} & 4c^i u^{in} + \sum_{j=1}^Q \left\{ H^{ij(n+1)n}(t) + 4H^{ijnm}(t) \right\} u^{jn} - \left[ G^{ij(n+1)n}(t) + 4G^{ijnm}(t) \right] q^{jn} \} \\ & + \sum_{m=1}^{n-1} \sum_{j=1}^Q \left\{ H^{ij(n+1)m}(t) + 2H^{ijnm}(t) + H^{ij(n-1)m}(t) \right\} u^{jm} \\ & - \left[ G^{ij(n+1)m}(t) + 2G^{ijnm}(t) + G^{ij(n-1)m}(t) \right] q^{jm} \} \\ & - \sum_{j=1}^Q \left\{ H^{ijnm}(t) \right\} u^{j(n-1)} - \left[ G^{ijnm}(t) \right] q^{j(n-1)} \} = 0 \end{aligned} \quad (4.18)$$

La ecuación anterior también se puede obtener del método de ponderación en el tiempo. Si al evaluar la segunda integral en el tiempo de la ecuación de contorno ponderada se establece que las componentes de las matrices, **G** y **H**, varían linealmente en el tiempo dentro de cada paso, entonces la segunda integral se obtiene de los valores de **G** y **H** en los extremos del rango de integración,

$$\int_{t_{n-1}}^{t_n} H^{nm}(t) dt \approx \frac{\Delta t}{2} (H^{nm} + H^{n-1m}) \quad (4.19)$$

luego de sustituir y reagrupar la ecuación (4.11) pasa a ser la (4.18).

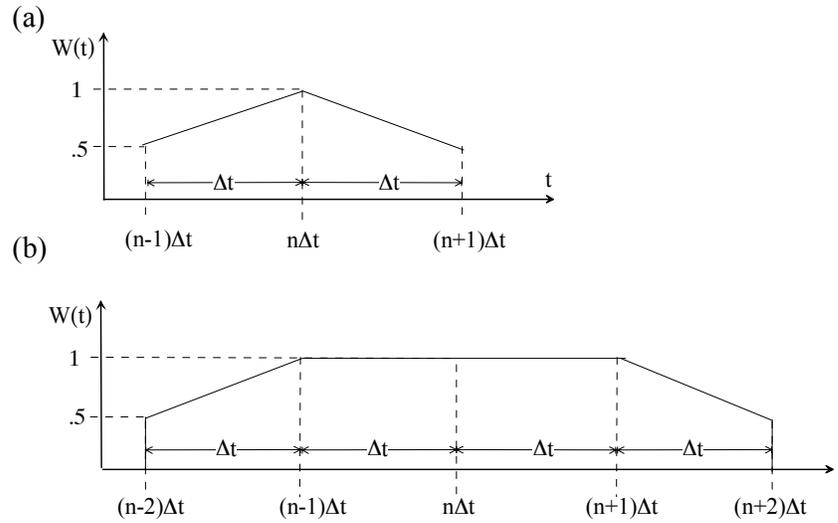


Figura 4.4. a)Función de ponderación para el método de velocidad constante, b)función de ponderación para el método de aceleración constante.

### 4.3.2 El método de la aceleración constante

El método de la aceleración constante procede de manera similar al anterior. Se basa en considerar, durante la obtención de las desconocidas para el instante de tiempo que se evalúa,  $t_n$ , los valores de los instantes anteriores,  $t_{n-2}$  y  $t_{n-1}$ , y posteriores,  $t_{n+1}$  y  $t_{n+2}$ . Para ello se realiza una combinación lineal de las integrales de contorno discretizadas para los tiempos  $t_{n+2}$ ,  $t_{n+1}$ ,  $t_n$ ,  $t_{n-1}$  y  $t_{n-2}$ .

Para poder combinar las ecuaciones integrales es necesario aproximar los valores de las variables en  $t_{n+2}$  y  $t_{n+1}$ . Para predecir dichos valores el método emplea la definición por diferencias finitas de la tercera y cuarta derivada de una función  $f(x)$ , figura (4.3), en el punto  $x=0$ ,

$$f'''(0) = \frac{f(2h) - 2f(h) + 2f(-h) - f(-2h)}{h^3}$$

$$f^{IV}(0) = \frac{f(2h) - 4f(h) + 6f(0) - 4f(-h) + f(-2h)}{h^4} \quad (4.20)$$

Se establece la tercera y cuarta derivada de las variables con respecto al tiempo iguales a cero en  $t_n$ ,  $f''(t_n) = 0$  y  $f^{IV}(t_n) = 0$ , y se aproximan las variables en  $t_{n+2}$  y  $t_{n+1}$ ,

$$\begin{aligned} u^{n+2} &= 6u^n - 8u^{n-1} + 3u^{n-2} \\ u^{n+1} &= 3u^n - 3u^{n-1} + u^{n-2} \end{aligned} \quad (4.21)$$

$$\begin{aligned} q^{n+2} &= 6q^n - 8q^{n-1} + 3q^{n-2} \\ q^{n+1} &= 3q^n - 3q^{n-1} + q^{n-2} \end{aligned} \quad (4.22)$$

Si combinamos las ecuaciones integrales, discretizadas para los tiempos  $t_{n+2}$ ,  $t_{n+1}$ ,  $t_n$ ,  $t_{n-1}$  y  $t_{n-2}$ , según la ponderación que se muestra en la figura (4.4.b), y se aproximan los valores de las variables para pasos siguientes con las ecuaciones (4.21) y (4.22) se obtiene la siguiente expresión,

$$\begin{aligned} &c^i(14u^n - 12u^{n-1} + 6u^{n-2}) + \\ &\sum_{j=1}^Q \left\{ H^{ij(n+2)n}(t) + 5H^{ijn(n+1)}(t) + 14H^{ijn}(t) \right\} u^{jn} \\ &- \left[ G^{ij(n+2)n}(t) + 5G^{ijn(n+1)}(t) + 14G^{ijn}(t) \right] q^{jn} \left\{ \right. \\ &+ \sum_{j=1}^Q \left\{ H^{ij(n+3)n}(t) + 2H^{ij(n+2)n}(t) - H^{ij(n+1)n}(t) - 12H^{ijn}(t) \right\} u^{j(n-1)} \\ &- \left[ G^{ij(n+3)n}(t) + 2G^{ij(n+2)n}(t) - G^{ij(n+1)n}(t) - 12G^{ijn}(t) \right] q^{j(n-1)} \left. \right\} \\ &+ \sum_{j=1}^Q \left\{ H^{ij(n+1)n}(t) + 5H^{ijn}(t) \right\} u^{j(n-2)} - \left[ G^{ij(n+1)n}(t) + 5G^{ijn}(t) \right] q^{j(n-2)} \left\{ \right. \\ &+ \sum_{m=1}^{n-2} \sum_{j=1}^Q \left\{ H^{ij(n+2)m}(t) + 2H^{ij(n+1)m}(t) + 2H^{ijn}(t) + 2H^{ij(n-1)m}(t) + H^{ij(n-2)m}(t) \right\} u^{jm} \\ &- \left[ G^{ij(n+2)m}(t) + 2G^{ij(n+1)m}(t) + 2G^{ijn}(t) + 2G^{ij(n-1)m}(t) + G^{ij(n-2)m}(t) \right] q^{jm} \left. \right\} = 0 \end{aligned} \quad (4.23)$$

El método de la velocidad constante y el de la aceleración constante estabilizan los resultados sin añadir ninguna variable adicional como es el caso de  $\varepsilon$  y  $\theta$ , tampoco añaden una integración adicional como es el caso de la ponderación en el tiempo. Los métodos son fáciles de probar ya que sólo modifican el algoritmo que suma las matrices  $\mathbf{G}$  y  $\mathbf{H}$  de pasos anteriores. De los dos métodos propuestos, el de la velocidad constante es

el más eficaz y eficiente, y no implica un gran coste adicional su incorporación a un código estándar.

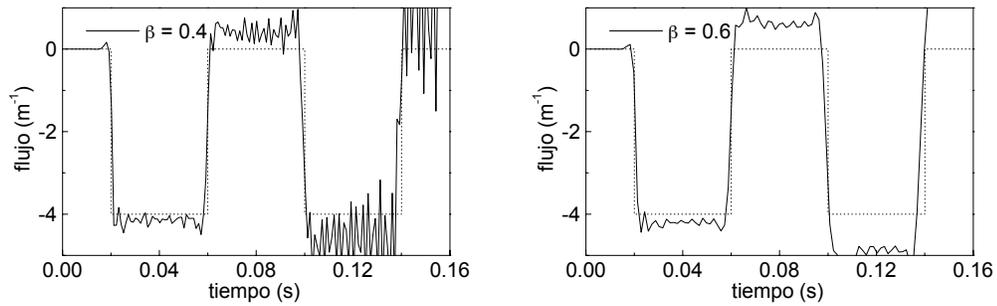
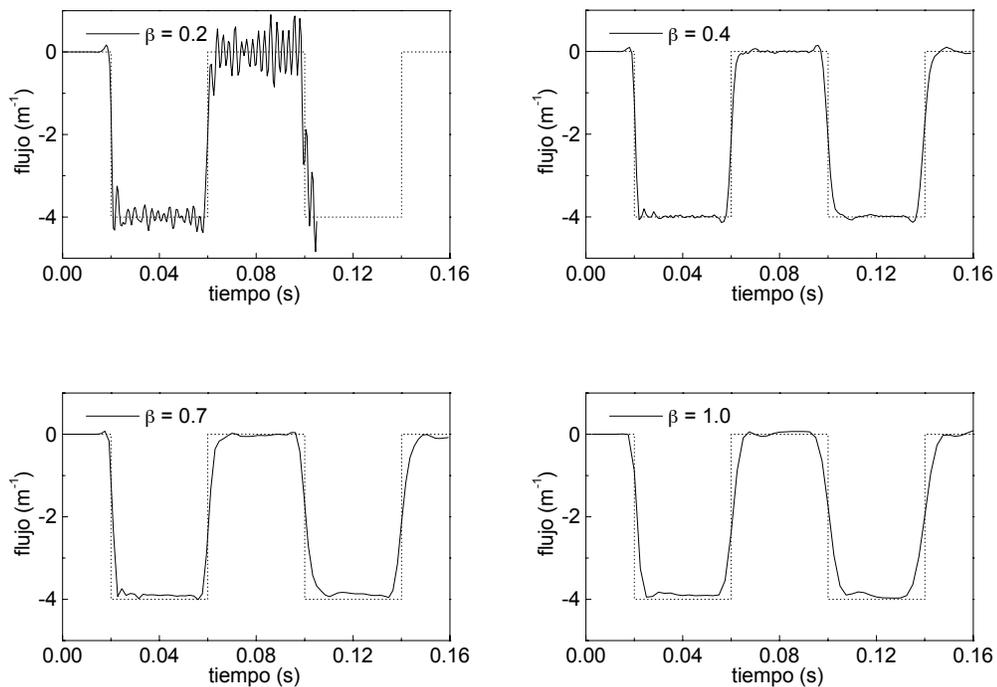
## 4.4 Aplicaciones

### 4.4.1 Problema escalar

Una vez más resolveremos el problema discutido en el Capítulo 2, un prisma, figura (2.10.a), con potencial cero en uno de sus extremos y sometido en el extremo opuesto a un flujo aplicado en  $t = 0$  y sostenido, figura (2.10.b). Este problema aunque sencillo es muy sensible a inestabilidades numéricas debido a la respuesta en forma de escalón del flujo, como ya se vio en el Capítulo 2 el método estándar es inestable para  $\beta < 0.6$ .

A continuación se verifica la validez de los métodos de estabilización discutidos en el presente capítulo, mediante pruebas con distintos valores del parámetro  $\beta$  y se discuten los resultados. En todos los métodos se emplearon 36 subdivisiones por elemento.

El primer método que se analiza, por ser el más sencillo, es el método  $\varepsilon$ . El método se ha probado empleando  $\varepsilon = 0.2$  y ha generado resultados estables a partir de  $\beta = 0.4$  pero los resultados son inexactos a partir de  $\beta = 0.6$  y el error aumenta con  $\beta$ , figura (4.5). Se realizaron pruebas con otros valores del parámetro  $\varepsilon$  y los resultados son siempre inexactos. El error se debe a que el paso de tiempo empleado no es constante, esta condición es imprescindible para poder aprovechar los valores previos de las matrices, **G** y **H**, y de las variables,  $u$  y  $q$ , de pasos anteriores. El método  $\varepsilon$  estabiliza la solución y no implica un coste adicional, pero añade una variable al problema,  $\varepsilon$ . El tamaño de  $\varepsilon$  influye no sólo la estabilidad sino también la exactitud de los resultados, a medida que  $\varepsilon$  aumenta mejora la estabilidad pero se pierde exactitud. El error del método también crece con  $\beta$ .

Figura 4.5. Método  $\varepsilon$ , con  $\varepsilon = 0.2$ .Figura 4.6. Método  $\theta$ , con  $\theta = 1.2$ .

El siguiente método que se estudia es el método  $\theta$ , que no es más que el método  $\varepsilon$  corregido. Éste estabiliza los resultados a partir de  $\beta = 0.3$ , pero también incurre en un error que altera la exactitud de los resultados y crece con  $\beta$ , figura (4.6). A partir de  $\beta = 0.7$  el flujo no alcanza el valor máximo de  $-4 \text{ m}^3$ . Este error se debe a que, al igual que en el método  $\varepsilon$ , no se emplea un tamaño de paso de tiempo constante, aunque intenta corregir los resultados en cada paso de tiempo mediante la ecuación (4.5). Se realizaron pruebas con varios valores de  $\theta$  y la inexactitud de los resultados, como se esperaba, crece con el tamaño de  $\theta$ . El método  $\theta$

estabiliza la solución sin añadir un coste computacional adicional, pero aparece una inexactitud en la respuesta que depende del tamaño de  $\theta$  y  $\beta$ . Lo cual hace necesario definir el tamaño adecuado de  $\theta$  para cada problema.

El método que se discute a continuación es el que presenta la mayor dificultad al incluirlo en un código estándar, el método de la ponderación en el tiempo. En esta tesis se ha resuelto analíticamente la primera integración en el tiempo, a igual que en el método estándar, y la segunda numéricamente con una función de interpolación constante. Se emplearon dos puntos de integración por  $\Delta t$ . Los resultados son estables a partir  $\beta_s = 0.4$ . Se genera una inexactitud en los resultados que crece con  $\beta$ , figura (4.7), pero no se realizaron pruebas con mayor número de puntos de integración porque el método incrementa considerablemente el tiempo de solución, con tan sólo dos puntos de integración el método es dos veces más lento que el estándar.

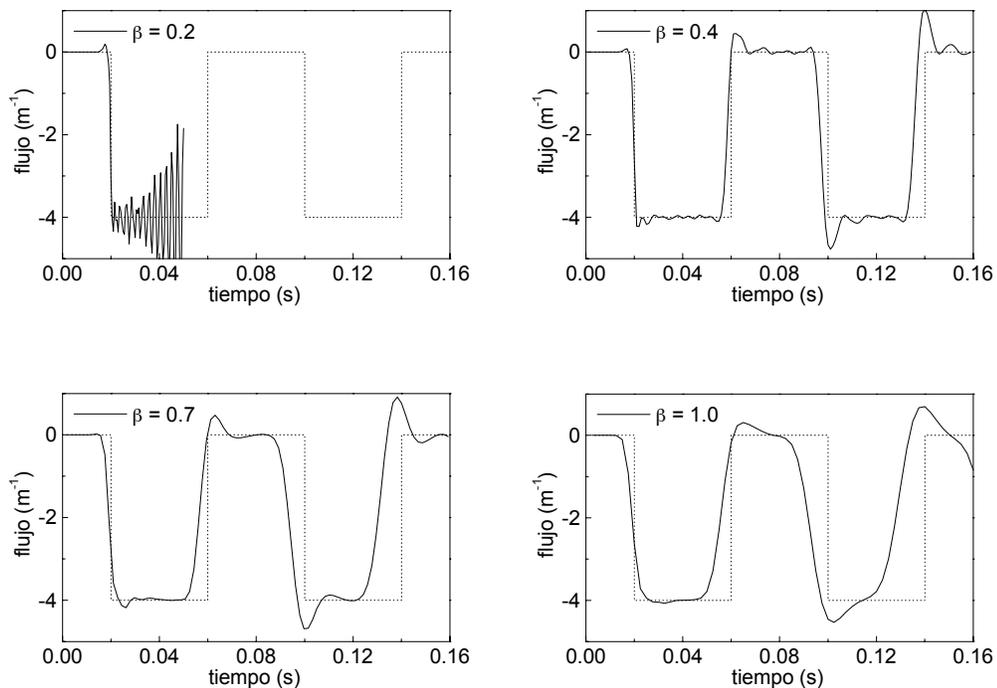


Figura 4.7. Ponderación en el tiempo.

Ahora se discuten los resultados obtenidos con los dos métodos desarrollados en esta tesis, el método de la velocidad constante y el de la aceleración constante. Comenzaremos por el más sencillo de los dos, el método de la velocidad constante. Primero discutiremos que ocurre si se simplifica el método combinando sólo las ecuaciones integrales para los tiempos  $t_n$  y  $t_{n+1}$  y se aproximan los valores de las variables en  $t_{n+1}$ . De esta forma, al determinar el valor de las variables en el tiempo  $t_n$  influyen los valores aproximados del tiempo siguiente,  $t_{n+1}$ . El método simplificado estabiliza los resultados a partir de  $\beta = 0.3$ , pero existe un leve desfase con respecto a la solución analítica que se muestran en la figura (4.8). Ahora bien, si se incluye en la combinación de ecuaciones también la ecuación integral para el tiempo  $t_{n-1}$  se elimina el problema de desfase del método anterior porque en la determinación de las variables en el tiempo  $t_n$  se consideran los valores obtenidos en un tiempo anterior y posterior al evaluado, éste es el método de la velocidad constante. Los resultados son estables a partir de  $\beta = 0.3$  y no se genera ninguna inexactitud. Pero para  $\beta > 1$  se suaviza la respuesta a una razón mayor que con el método estándar, figura (4.9). Por último, se discute la implementación del método de la aceleración constante. El cual estabiliza los resultados a partir de  $\beta = 0.2$ . Pero a medida que se incrementa el valor de  $\beta$  se suaviza la respuesta a una razón mayor que en el método de la velocidad constante, figura (4.10). . Esto se debe a que en este método se combinan las ecuaciones integrales para los tiempos  $t_{n-2}$ ,  $t_{n-1}$ ,  $t_{n+1}$  y  $t_{n+2}$ , por ello en la obtención del valor de las variables en el tiempo  $t_n$  influyen los valores conseguidos en dos pasos anteriores y los aproximados para dos pasos posteriores.

El método de la velocidad constante y el de la aceleración constante estabilizan los resultados sin añadir ninguna variable adicional como es el caso de  $\varepsilon$  y  $\theta$ , tampoco añaden una integración adicional como en la ponderación en el tiempo. Los métodos son fáciles de probar ya que sólo modifican el algoritmo que suma las matrices **G** y **H** de pasos anteriores. De los dos métodos, el de la velocidad constante es el más eficaz y eficiente, y no implica un gran coste su incorporación a un código estándar.

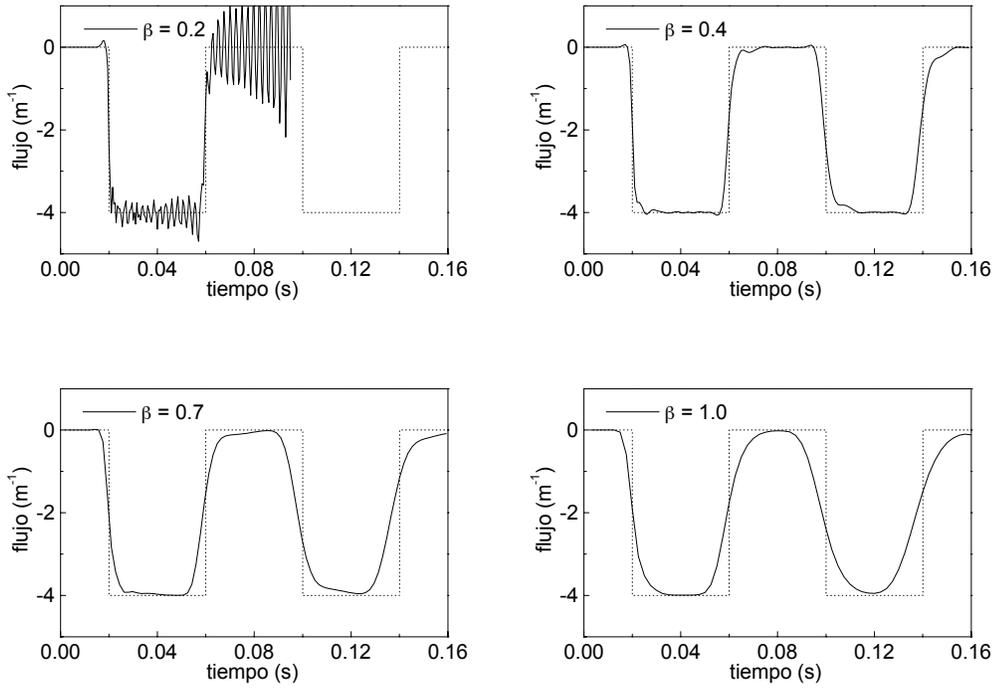


Figura 4.8. Método de la velocidad constante combinando ecuaciones en  $t_n$  y  $t_{n+1}$ .

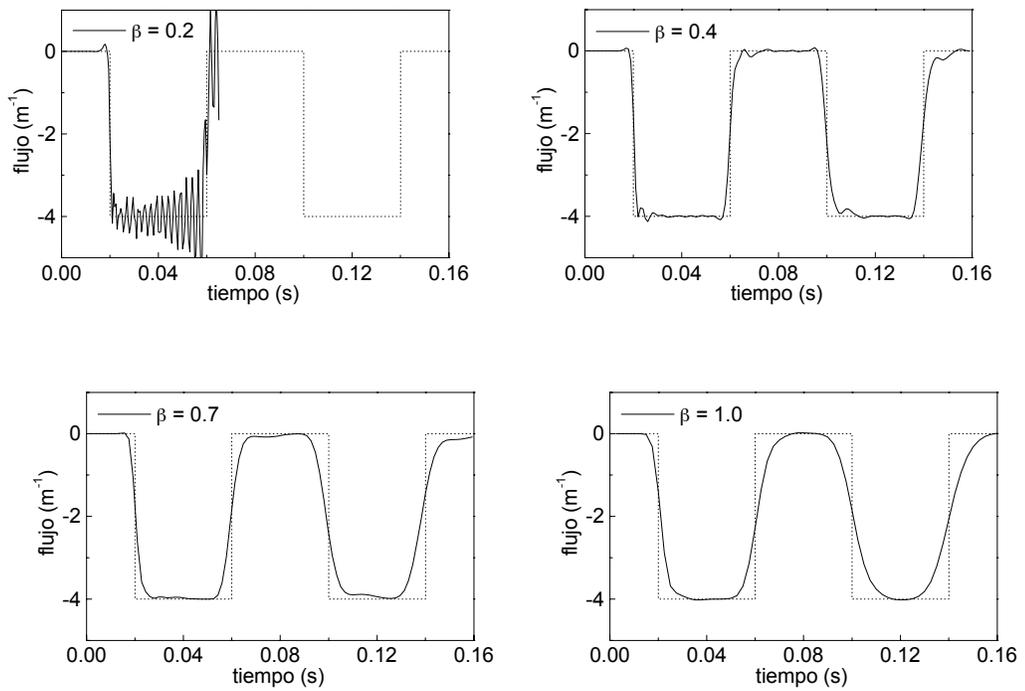


Figura 4.9. Método de la velocidad constante combinando ecuaciones en  $t_{n-1}$ ,  $t_n$  y  $t_{n+1}$ .

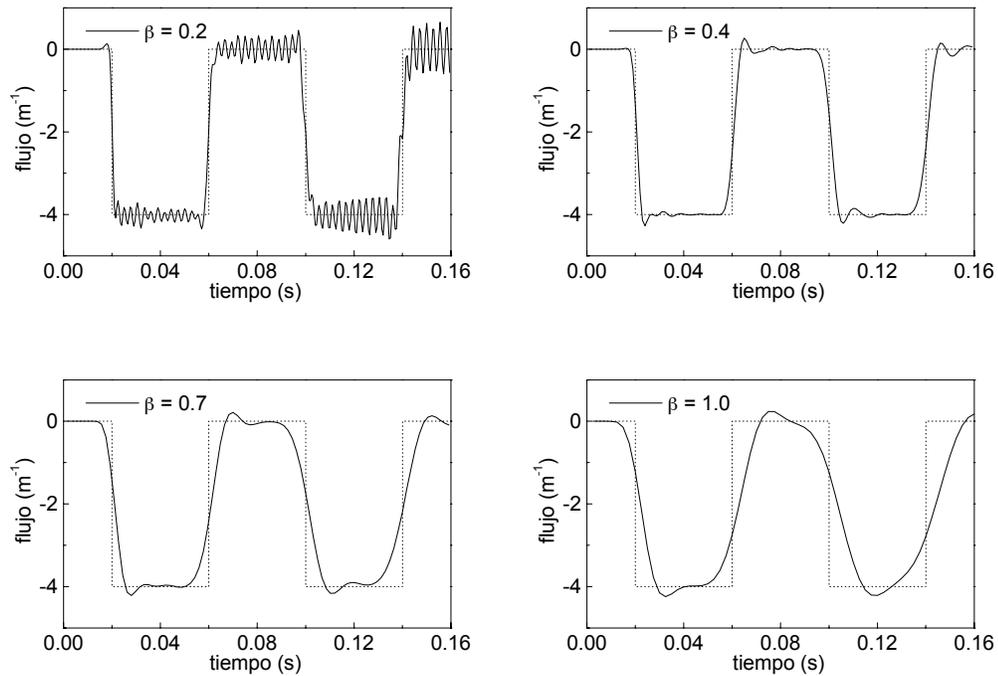


Figura 4.10. Método de la aceleración constante.

#### 4.4.2 Barra empotrada sometida a una tracción

El mismo problema discutido en el Capítulo 3, figura (3.3), será resuelto usando los distintos métodos para estabilizar la solución estudiados en esta tesis. El problema consiste en un prisma de altura  $h = 4 \text{ m}$ , ancho y profundidad,  $0.5 h$ , que está empotrado en uno de sus extremos y sometido a una tracción uniforme en el extremo opuesto que corresponde a una función escalón en  $t = 0$ , con  $f(t) = 2 \text{ kPa}$ . El módulo de Poisson del material es  $\nu = 0.25$ , el módulo de rigidez  $G = 40 \text{ MPa}$  y la densidad  $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$ . El prisma se ha representado con 40 elementos cuadrados, figura (2.11), empleando 100 subdivisiones por elemento.

El problema se ha abordado utilizando los métodos descritos en el presente capítulo. Es preciso recordar que el método estándar no genera buenos resultados cuando se emplea un valor de  $\beta_s$  inferior a 0.6, figura (4.11).

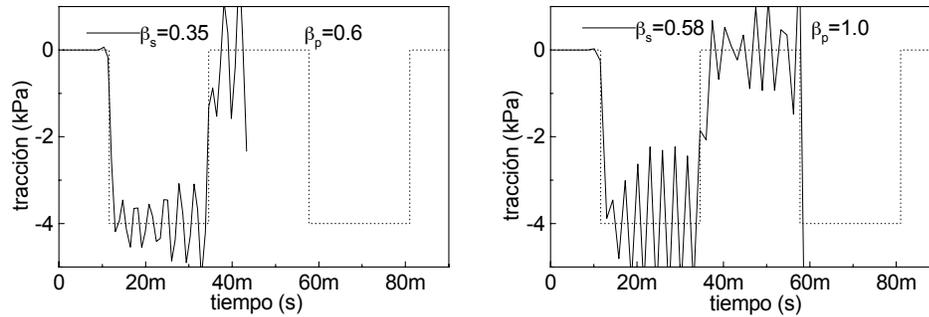


Figura 4.11. Método estándar con 100 subdivisiones por elemento

Comenzaremos con el método más sencillo, el método  $\varepsilon$ , que genera resultados estables a partir de  $\beta_s = 0.4$  pero los resultados son inexactos y el error aumenta con  $\beta_s$ , figura (4.12). Se realizaron pruebas con otros valores del parámetro  $\varepsilon$  y los resultados son siempre inexactos.

El siguiente método que se presenta es el método  $\theta$ , que también estabiliza los resultados, figura (4.13). Se probaron distintos valores de  $\theta$  y se encontró que  $\theta=1.2$  genera buenos resultados. Se hizo un barrido en  $\beta_s$ , los resultados fueron buenos para  $0.3 < \beta_s < 0.4$  y a partir  $\beta_s > 0.7$ . Se volvió a resolver el problema pero esta vez empleando 36 subdivisiones por elemento en vez de 100 como en todos los métodos que aquí se discuten, y se consiguieron buenos resultados para  $0.3 < \beta_s < 0.7$ , figura (4.14). A partir  $\beta_s > 0.7$  ( $\beta_p=1.2$ ) los resultados se vuelven inexactos.

El método  $\theta$ , al igual que el método anterior, estabiliza la solución sin añadir un coste adicional, pero aparece una inexactitud en la respuesta que no depende del tamaño de  $\theta$  o de  $\beta$ , y que es imposible predecir.

El método de la ponderación en el tiempo no se probó en el problema elastodinámico debido a su complicada incorporación al código y ya que no se consiguieron buenos resultados en el problema escalar.

El método de la velocidad constante estabiliza los resultados a partir de  $\beta_s = 0.3$  estándar, figura (4.15). No se genera ninguna inexactitud en los resultados. Para  $\beta_s > 1$  se suaviza la respuesta a una razón mayor que con el método.

El método de la aceleración constante estabiliza los resultados a partir de  $\beta_s = 0.2$ . Pero a medida que se incrementa el valor de  $\beta_s$  se suaviza mucho la respuesta, figura (4.16).

El método de la velocidad constante y el de la aceleración constante estabilizan los resultados sin añadir ninguna variable adicional como es el caso de  $\varepsilon$  y  $\theta$ , tampoco añaden una integración adicional como en la ponderación en el tiempo. Estos métodos tampoco generan errores aleatorios que dependan del número de subdivisiones empleado, se realizaron pruebas con 16, 36, 64 y 100 subdivisiones. Los métodos son fáciles de probar ya que sólo modifican el algoritmo que suma las matrices **G** y **H** de pasos anteriores. De los dos métodos, el de la velocidad constante es el más eficaz y eficiente, y no implica un gran coste su incorporación a un código estándar.

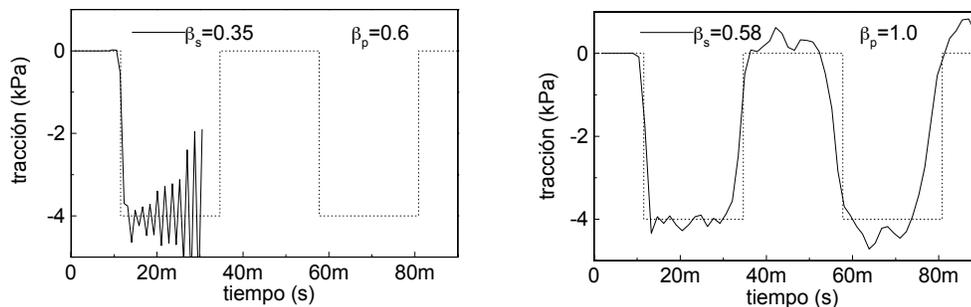


Figura 4.12. Método  $\varepsilon$ ,  $\varepsilon = 0.25$

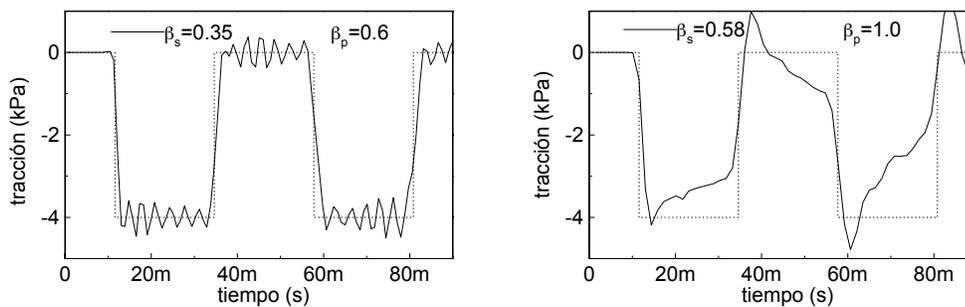


Figura 4.13. Método  $\theta$ ,  $\theta = 1.2$  con 100 subdivisiones por elemento

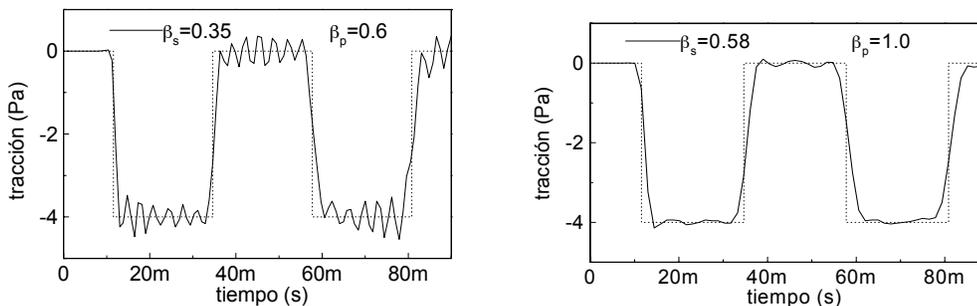


Figura 4.14. Método  $\theta$ ,  $\theta = 1.2$  con 36 subdivisiones por elemento

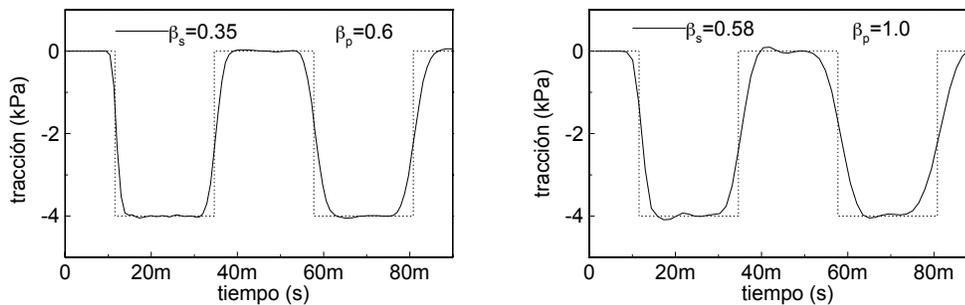


Figura 4.15. Método de la velocidad constante

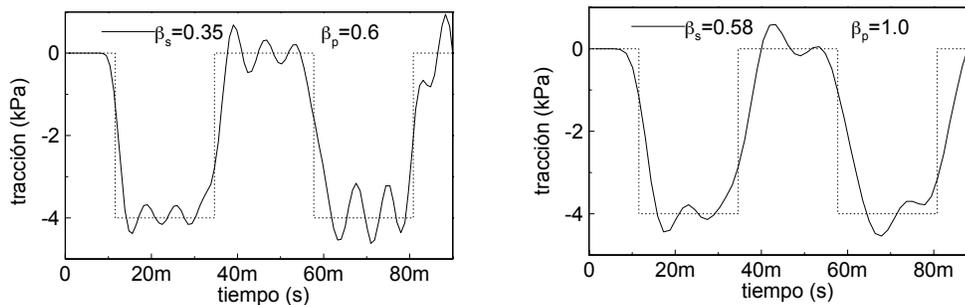


Figura 4.16. Método de la aceleración constante

Para verificar la efectividad del método de estabilización desarrollado en esta tesis, el método de la velocidad constante, se ha resuelto el problema del prisma empotrado con distintos materiales, el módulo de Poisson que será  $\nu = 0.1$  ó  $\nu = 0.4$ . Las otras propiedades del material serán las mismas que en el caso anterior. También se empleará la misma discretización espacial y 100 subdivisiones por elemento. En las figuras (4.17) y (4.18) se muestran los resultados. Se obtienen buenos resultados en ambos casos a partir de  $\beta_s = 0.3$ . Utilizando el método estándar no se pudieron obtener resultados fiables para  $\beta_s < 0.6$ .

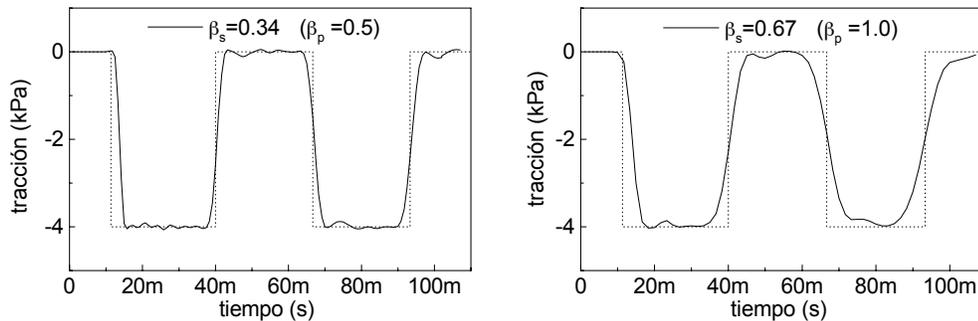


Figura 4.17. Método de la velocidad constante,  $\nu = 0.1$

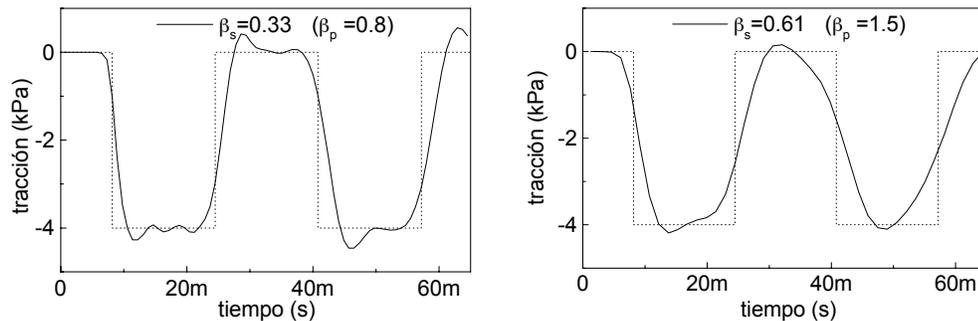


Figura 4.18. Método de la velocidad constante,  $\nu = 0.4$

#### 4.4.3 Barra empotrada sometida a un cortante

Otro problema con el que verificaremos la efectividad del método de la velocidad constante es el de un prisma empotrado sometido a un cortante. Emplearemos el mismo prisma del problema anterior pero esta vez sometido a un cortante, también descrito por una función escalón en

$t = 0$ , con  $f(t) = 2 \text{ kPa}$ . El cortante actúa paralelo a la cara superior del prisma. Las propiedades del material serán las mismas excepto por el módulo de Poisson que será  $\nu = 0.1$  ó  $\nu = 0.4$ . La discretización espacial es la misma que en el problema anterior pero se han empleado 36 subdivisiones por elemento. En las figuras (4.19) y (4.20) se muestran los resultados. Se obtienen buenos resultados en ambos casos a partir de  $\beta_s = 0.3$ . Utilizando el método estándar no se pudieron obtener resultados fiables para  $\beta_s < 0.6$ .

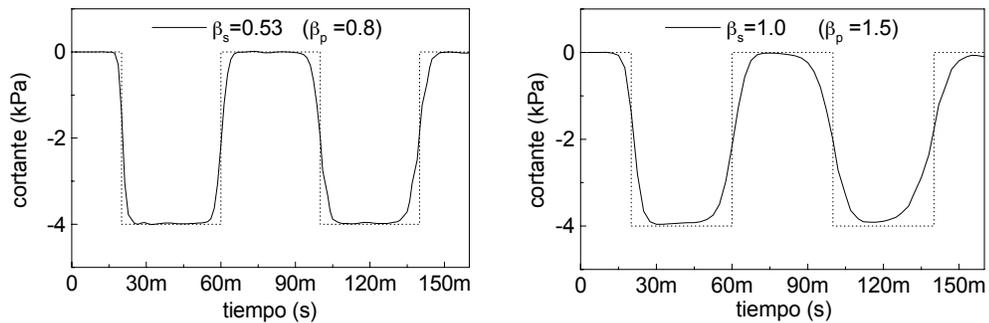


Figura 4.19. Método de la velocidad constante,  $\nu = 0.1$

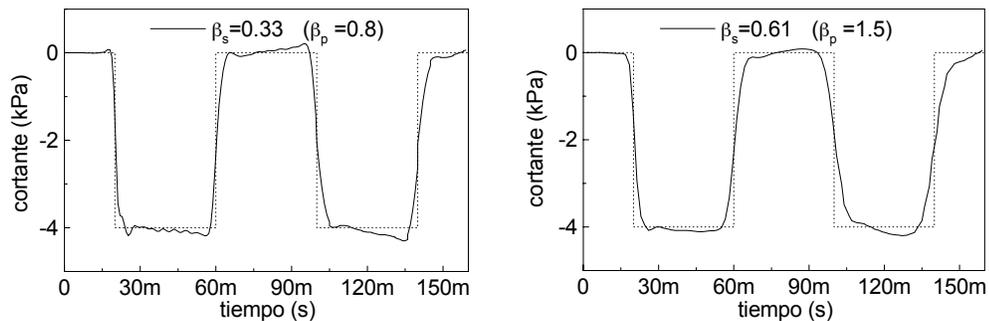


Figura 4.20. Método de la velocidad constante,  $\nu = 0.4$

#### 4.4.4 Cavidad esférica

El tercer problema que vamos a resolver se trata del también planteado en el Capítulo 3, una cavidad esférica dentro de un medio elástico infinito, la cavidad es sometida a una explosión repentina y sostenida. La malla de la discretización espacial se muestra en la figura (3.2). No se emplean las subdivisiones por elemento, como se observó en el Capítulo 3 las subdivisiones añaden ruido a los resultados ya que sólo actúa la onda longitudinal que excita los elementos casi por entero en  $m = n$  y luego desaparece en los siguientes pasos.

En la figura (4.21) vemos la variación en el tiempo del desplazamiento radial de la superficie de la cavidad para  $\beta_p = 0.9$ . También se muestran los resultados analíticos (Timoshenko, 1953). Los desplazamientos dinámicos están normalizados con la solución estática. Para comparar, se muestran nuevamente los resultados conseguidos con el método estándar, figura (4.21.a) y en la figura (4.21.b) cuando se aplica el método de la velocidad constante. Se puede apreciar una ligera mejoría en los resultados, hay menos fluctuaciones de punto a punto y en general, los valores obtenidos se acercan más a la solución analítica. No obstante, los resultados son bastante precisos en ambos casos dadas las características del problema.

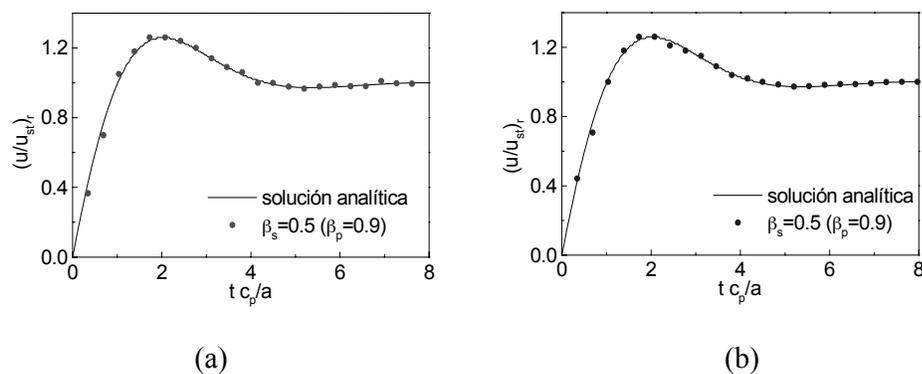


Figura 4.21. Desplazamiento radial normalizado de una esfera en un medio infinito sometida a una explosión, (a) sin estabilizar, (b) método de la velocidad constante.

# **Capítulo 5**

## **Mecánica de la Fractura Dinámica**

### **5.1 Introducción**

En este capítulo estudiaremos problemas relacionados con la propagación de ondas en un cuerpo elástico que contiene una grieta. El vértice de una grieta es un lugar potencial para la concentración de tensiones, si además la carga se aplica súbitamente, han de tenerse en cuenta los efectos de la inercia. Normalmente se toma como criterio, para decidir si se debe considerar la inercia en la definición del problema, el tiempo que tarda la carga aplicada en pasar de cero a su valor final. Si éste es mucho menor que el que tarda la onda elástica en propagarse una distancia característica del medio, por ejemplo el tamaño de la grieta, entonces los efectos de inercia son importantes.

Un fenómeno de especial interés aparece cuando una carga dinámica es aplicada a un medio que contiene una grieta, la sobrecarga dinámica. La intensidad de los campos en el vértice de la grieta, como resultado de una carga aplicada súbitamente, alcanza niveles más altos que si la carga es aplicada lentamente. Por ejemplo en el caso de una grieta pequeña comparada con el medio que la contiene, en la etapa temprana del proceso el nivel de sobrecarga es alto y luego decae en el tiempo hasta alcanzar el

valor estático. Por ello es de especial interés representar lo que ocurre en la etapa temprana.

En este trabajo se utilizan las hipótesis clásicas de la mecánica de la fractura elástico-lineal. En la cual la variación espacial del término dominante de los campos asintóticos del vértice de una grieta es universal y es el valor del factor de intensidad de tensiones (FIT) el que refleja la influencia de la geometría del medio y los detalles de la carga en cada problema. En los problemas dinámicos, donde el tiempo es una variable adicional que debemos considerar, se determinará el FIT en función del tiempo, y recibirá el nombre de factor de intensidad de tensiones dinámico.

Los términos más significativos de los campos asintóticos pueden incorporarse al MEC en el dominio del tiempo mediante un elemento de contorno singular, lo que va a permitirnos resolver con muy buena precisión una amplia gama de problemas de fractura elastodinámica.

En este trabajo se identifica con  $\bar{r}$ , la distancia al vértice de la grieta, para así distinguirla de la variable  $r$  de los elementos de contorno que representa la distancia del punto de colocación al de recepción.

## **5.2 Mecánica de la fractura elástico-lineal**

Las expresiones asintóticas de los campos de tensiones y desplazamientos en las inmediaciones del vértice de una grieta en un sólido isótropo pueden obtenerse superponiendo los tres modos de deformación planos Modo I o modo de apertura plano, Modo II o modo de deslizamiento y modo III o modo de deslizamiento antiplano (Irwin, 1957), que se muestran en la figura (5.1).

El comportamiento de los campos tridimensionales cerca del borde de una grieta, referidos a unos planos determinados, es idéntico a los comportamientos plano y antiplano, (Kassir y Sih, 1966) y (Hartranft y Sih, 1969). Por ello, comenzaremos presentando los problemas en dos dimensiones y luego pasaremos al problema tridimensional.

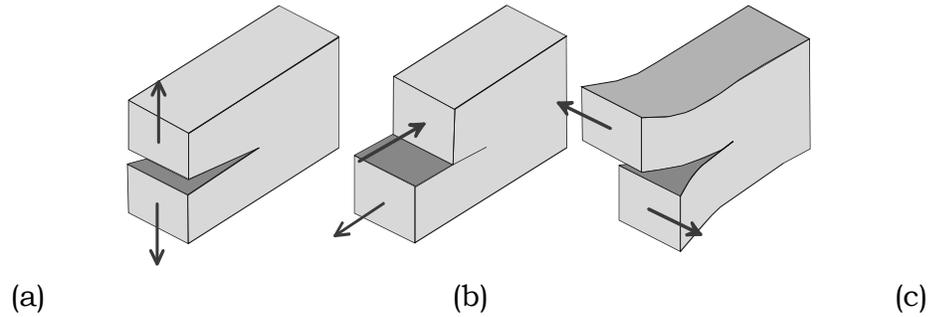


Figura 5.1 (a) Modo I o modo de apertura plano, (b) Modo II o modo de deslizamiento y (c) modo III o modo de deslizamiento antiplano.

Tan sólo los modos I y II estarán presentes en un problema plano. Las tensiones se obtienen de,

$$\begin{aligned}\sigma_{xx} &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[1 - \operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{3\theta}{2}\right)\right] - \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[2 + \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{3\theta}{2}\right)\right] \\ \sigma_{yy} &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[1 + \operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{3\theta}{2}\right)\right] + \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{3\theta}{2}\right) \\ \sigma_{xy} &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{3\theta}{2}\right) + \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[1 - \operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{3\theta}{2}\right)\right]\end{aligned}\tag{5.1}$$

y los desplazamientos,

$$\begin{aligned}u_x &= \frac{K_I}{\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[\frac{1}{2}(\kappa - 1) + \operatorname{sen}^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right] + \frac{K_{II}}{\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[\frac{1}{2}(\kappa + 1) + \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right] \\ u_y &= \frac{K_I}{\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[\frac{1}{2}(\kappa + 1) - \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right] - \frac{K_{II}}{\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[\frac{1}{2}(\kappa - 1) - \operatorname{sen}^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right]\end{aligned}\tag{5.2}$$

donde  $\kappa = 3-4\nu$  en deformación plana y  $\kappa = (3-\nu)/(1+\nu)$  para tensión plana,  $\nu$  y  $\mu$  son el módulo de Poisson y el módulo de rigidez respectivamente; las variables  $\bar{r}$  y  $\theta$ , y los ejes de coordenadas están definidos en la figura (5.2).

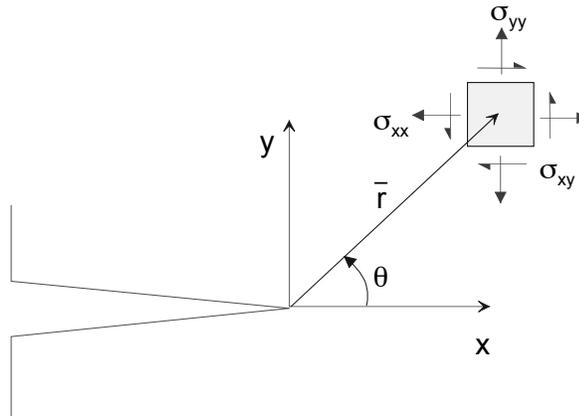


Figura 5.2 Grieta plana y sistema de coordenadas de referencia

En un problema antiplano, sólo actúa el modo III, así que las tensiones son

$$\sigma_{xz} = \frac{-K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} \operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) \quad (5.3)$$

$$\sigma_{yz} = \frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

y los desplazamientos

$$u_z = \frac{K_{III}}{\mu} \sqrt{\frac{\bar{r}}{2\pi}} \operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) \quad (5.4)$$

$K_I$ ,  $K_{II}$  y  $K_{III}$  son los FIT que se definen como

$$\begin{aligned}
 K_I &= \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{2\pi r} \sigma_{yy} \Big|_{\theta=0} \\
 K_{II} &= \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{2\pi r} \sigma_{xy} \Big|_{\theta=0} \\
 K_{III} &= \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{2\pi r} \sigma_{yz} \Big|_{\theta=0}
 \end{aligned} \tag{5.5}$$

En la mecánica de la fractura elástico-lineal, la variación espacial del término dominante en el campo asintótico del vértice de una grieta es universal, y es el valor del factor de intensidad de tensiones el que refleja la influencia de la geometría del medio y los detalles de la carga en cada problema.

Para definir el comportamiento de los campos tridimensionales de desplazamientos y tensiones en las inmediaciones de una grieta, se definen unos planos con la normal  $\mathbf{n}$ , la binormal  $\mathbf{z}$  y la tangente  $\mathbf{t}$ , figura (5.3), en cada punto con una posición  $\mathbf{s}$  en el vértice de la grieta se obtendrá un valor del FIT. Las tensiones vienen descritas como

$$\begin{aligned}
 \sigma_{nn} &= \frac{K_I(s)}{\sqrt{2\pi r}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[ 1 - \operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{3\theta}{2}\right) \right] - \frac{K_{II}(s)}{\sqrt{2\pi r}} \operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[ 2 + \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{3\theta}{2}\right) \right] \\
 \sigma_{zz} &= \frac{K_I(s)}{\sqrt{2\pi r}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[ 1 + \operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{3\theta}{2}\right) \right] + \frac{K_{II}(s)}{\sqrt{2\pi r}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{3\theta}{2}\right) \\
 \sigma_{tt} &= 2\nu \left[ \frac{K_I(s)}{\sqrt{2\pi r}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + \frac{K_{II}(s)}{\sqrt{2\pi r}} \operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) \right] \\
 \sigma_{nz} &= \frac{K_I(s)}{\sqrt{2\pi r}} \operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{3\theta}{2}\right) + \frac{K_{II}(s)}{\sqrt{2\pi r}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[ 1 - \operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{3\theta}{2}\right) \right] \\
 \sigma_{nt} &= \frac{-K_{III}(s)}{\sqrt{2\pi r}} \operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) \\
 \sigma_{zt} &= \frac{K_{III}(s)}{\sqrt{2\pi r}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)
 \end{aligned} \tag{5.6}$$

y los desplazamientos,

$$\begin{aligned}
 u_n &= \frac{1+\nu}{E} \sqrt{\frac{2\bar{r}}{\pi}} \left\{ K_I(s) \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[ (1-2\nu) + \text{sen}^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \right] \right. \\
 &\quad \left. + K_{II}(s) \text{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[ 2(1-\nu) + \text{cos}^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \right] \right\} \\
 u_z &= \frac{1+\nu}{E} \sqrt{\frac{2\bar{r}}{\pi}} \left\{ K_I(s) \text{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[ 2(1-\nu) - \text{cos}^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \right] \right. \\
 &\quad \left. - K_{II}(s) \text{cos}\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[ (1-2\nu) - \text{sen}^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \right] \right\} \\
 u_t &= 2 \frac{1+\nu}{E} \sqrt{\frac{2\bar{r}}{\pi}} K_{III}(s) \text{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)
 \end{aligned} \tag{5.7}$$

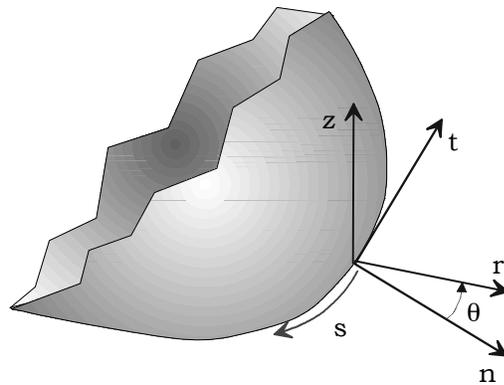


Figura 5.3 Grieta tridimensional y sistema de coordenadas de referencia

Las coordenadas  $\bar{r}$  y  $\theta$  se definen como se muestra en la figura (5.3). Las ecuaciones antes descritas son válidas en el vértice de la grieta alejado de los bordes libres, en otras palabras donde es válida la aproximación de deformación plana. En la vecindad de la intersección del vértice de la grieta con las superficies libres las tensiones no son del orden  $(1/\sqrt{\bar{r}})$  sino proporcionales a  $1/\bar{r}^{(\frac{1}{2}+2\nu)}$ , por lo que la definición anterior del FIT no se puede aplicar, (Folias, 1975).

### 5.3 Elemento singular para Mecánica de la Fractura

En el apartado anterior se ha descrito como los campos de tensiones y desplazamientos en el vértice de una grieta están caracterizados por el factor de intensidad de tensiones. De forma simplificada podemos reducir las ecuaciones (5.6) y (5.7) a,

$$\begin{aligned} u &= K(t)f(\theta, \nu, \mu)\sqrt{\bar{r}} \\ \sigma &= K(t)g(\theta, \nu, \mu)/\sqrt{\bar{r}} \end{aligned} \quad (5.8)$$

donde  $\bar{r}$  y  $\theta$  son coordenadas polares,  $\bar{r}$  identifica la distancia al vértice de la grieta y,  $f$  y  $g$ , son las funciones universales del ángulo  $\theta$  y de las constantes del material. Existen elementos que permiten representar este comportamiento correctamente y determinar el valor del FIT en el MEC para problemas tridimensionales. Como es el caso del elemento de ocho nodos con funciones de forma especiales para desplazamientos y tracciones en las inmediaciones de la grieta (Luchi y Rizzuti, 1997) o elementos a un cuarto para modelar problemas de fractura con geometría circular o elíptica (Gaugming y Yougyuan, 1988).

En este trabajo se utiliza el elemento a un cuarto de nueve nodos, que ha sido empleado con anterioridad para resolver problemas elastoestáticos y elastodinámicos en el dominio de la frecuencia con excelentes resultados (Ariza, Sáez y Domínguez, 1997). Este elemento representa los términos más significativos de los desarrollos que representan las tensiones y los desplazamientos en las inmediaciones de una grieta. El elemento permitirá resolver un gran número de problemas de mecánica de la fractura elastodinámica.

### 5.3.1 Elemento a un cuarto

En las inmediaciones de la grieta los desplazamientos varían con  $\sqrt{\bar{r}}$ , donde  $\bar{r}$  es la distancia al vértice de la grieta, y las tensiones con  $1/\sqrt{\bar{r}}$ . Para poder representar correctamente dichos comportamientos se utiliza el elemento a un cuarto y el singular a un cuarto respectivamente. Ambos elementos de nueve nodos tienen sus nodos centrales desplazados una distancia de un cuarto la longitud del elemento. A continuación discutiremos sus propiedades y sus características geométricas.

El elemento con nodo a un cuarto se define con nueve nodos. Los nodos 1, 2, y 3 están sobre el vértice de la grieta, figura (5.4).

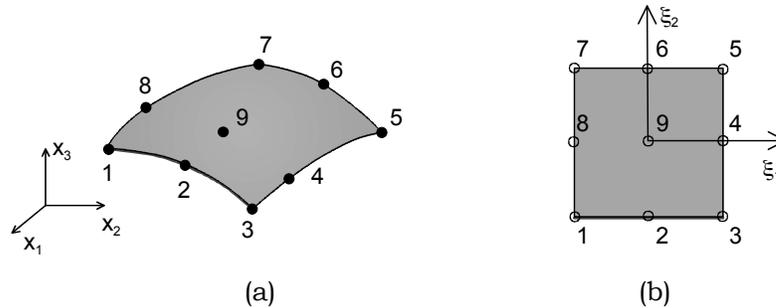


Figura 5.4. Transformación de (a) coordenadas cartesianas a (b) coordenadas naturales en el elemento a un cuarto.

Este elemento se transforma a coordenadas naturales,  $\xi_1$  y  $\xi_2$ , con funciones de forma bicuadráticas, en nada distintas a las empleadas hasta ahora,

$$\phi_1 = \frac{1}{4} \xi_1 (\xi_1 - 1) \xi_2 (\xi_2 - 1)$$

$$\phi_2 = \frac{1}{2} (1 - \xi_1^2) \xi_2 (\xi_2 - 1)$$

$$\phi_3 = \frac{1}{4} \xi_1 (\xi_1 + 1) \xi_2 (\xi_2 - 1)$$

$$\phi_4 = \frac{1}{2} \xi_1 (\xi_1 + 1) (1 - \xi_2^2)$$

$$\begin{aligned}
 \phi_5 &= \frac{1}{4} \xi_1 (\xi_1 + 1) \xi_2 (1 + \xi_2) \\
 \phi_6 &= \frac{1}{2} (1 - \xi_1^2) \xi_2 (1 + \xi_2) \\
 \phi_7 &= \frac{1}{4} \xi_1 (\xi_1 - 1) \xi_2 (1 + \xi_2) \\
 \phi_8 &= \frac{1}{2} \xi_1 (\xi_1 - 1) (1 - \xi_2^2) \\
 \phi_9 &= (1 - \xi_1^2) (1 - \xi_2^2) \\
 -1 &\leq \xi_1 \leq 1 \\
 -1 &\leq \xi_2 \leq 1
 \end{aligned} \tag{5.9}$$

El jacobiano de la transformación es

$$|G| = \sqrt{(g_1^2 + g_2^2 + g_3^2)} \tag{5.10}$$

con

$$\begin{aligned}
 g_1 &= \left( \frac{\partial x_2}{\partial \xi_1} \frac{\partial x_3}{\partial \xi_2} - \frac{\partial x_2}{\partial \xi_2} \frac{\partial x_3}{\partial \xi_1} \right) \\
 g_2 &= \left( \frac{\partial x_3}{\partial \xi_1} \frac{\partial x_1}{\partial \xi_2} - \frac{\partial x_1}{\partial \xi_1} \frac{\partial x_3}{\partial \xi_2} \right) \\
 g_3 &= \left( \frac{\partial x_1}{\partial \xi_1} \frac{\partial x_2}{\partial \xi_2} - \frac{\partial x_2}{\partial \xi_1} \frac{\partial x_1}{\partial \xi_2} \right)
 \end{aligned} \tag{5.11}$$

Las siguientes relaciones entre las coordenadas de los nodos, que hacen el jacobiano sea nulo en los nodos 1, 2 y 3, permiten eliminar la singularidad  $1/\sqrt{r}$ ,

$$\begin{aligned}
 x_4 &= \frac{x_5}{4} + \frac{3}{4} x_3, \quad y_4 = \frac{y_5}{4} + \frac{3}{4} y_3 \\
 x_8 &= \frac{x_7}{4} + \frac{3}{4} x_1, \quad y_8 = \frac{y_7}{4} + \frac{3}{4} y_1 \\
 x_9 &= \frac{x_6}{4} + \frac{3}{4} x_2, \quad y_9 = \frac{y_6}{4} + \frac{3}{4} y_2
 \end{aligned} \tag{5.12}$$

Todos los nodos del elemento deben estar en un mismo plano. El nodo 4 debe estar situado en línea y a distancia un cuarto de la longitud entre los nodos 3 y 5, lo mismo para el nodo 8 entre 1 y 7, y el nodo 9 entre 2 y 6. Y los lados 1-8-7 y 3-4-5 deben ser perpendiculares a la curva 1-2-3 que corresponde al vértice de la grieta, figura (5.5).

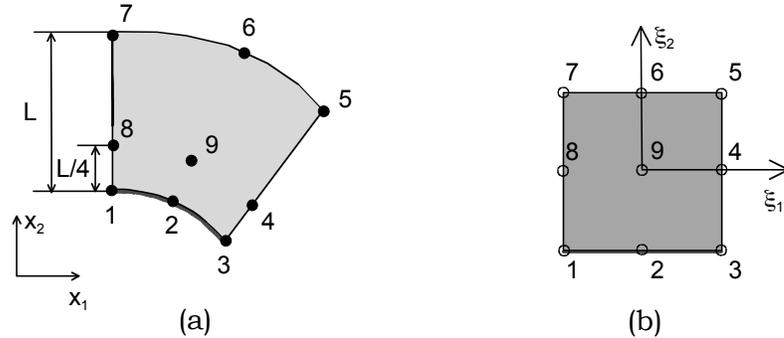


Figura 5.5. Elemento a un cuarto, (a) geometría válida para el elemento en coordenadas cartesianas, (b) en coordenadas naturales

Se puede establecer una relación entre la distancia al vértice de la grieta,  $\bar{r}$ , y las coordenadas naturales. Si se define  $\bar{r}$  como la línea 1, 8, 7, donde  $\xi_1 = -1$ ,

$$\begin{aligned} \bar{r} &= \bar{r}|_1 \cdot \phi_1 + \bar{r}|_8 \cdot \phi_8 + \bar{r}|_7 \cdot \phi_7 = \\ &= 0 \cdot \left( \frac{1}{4} \cdot 2 \cdot \xi_2 (\xi_2 - 1) \right) + \frac{L_{1-8-7}}{4} \cdot \left( \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot (1 - \xi_2^2) \right) + L_{1-8-7} \cdot \left( \frac{1}{4} \cdot 2 \cdot \xi_2 (\xi_2 + 1) \right) \end{aligned} \quad (5.13)$$

se obtiene la siguiente relación,

$$\bar{r} = \frac{L_{1-8-7}}{4} (\xi_2 + 1)^2 \quad (5.14)$$

Pueden conseguirse relaciones análogas para las longitudes de los lados 3-4-5 y 2-9-6, luego si las longitudes de las tres líneas son iguales,

$$L_{1-8-7} = L_{2-9-6} = L_{3-4-5} = L \quad (5.15)$$

Finalmente se obtiene una relación entre la coordenada natural  $\xi_2$ , perpendicular al borde de la grieta, y la distancia al borde de la grieta  $\bar{r}$ ,

$$\xi_2 = 2\sqrt{\bar{r}/L} - 1 \quad (5.16)$$

Al sustituir este valor de  $\xi_2$  en las funciones de forma bicuadráticas, podemos representar una función  $f$  como

$$\begin{aligned} f = & \frac{1}{4}\xi_1(\xi_1 - 1)\left(2\sqrt{\frac{\bar{r}}{L}} - 1\right)\left(2\sqrt{\frac{\bar{r}}{L}} - 2\right)f_1 + \frac{1}{2}(1 - \xi_1^2)\left(2\sqrt{\frac{\bar{r}}{L}} - 1\right)\left(2\sqrt{\frac{\bar{r}}{L}} - 2\right)f_2 + \\ & + \frac{1}{4}\xi_1(1 + \xi_1)\left(2\sqrt{\frac{\bar{r}}{L}} - 1\right)\left(2\sqrt{\frac{\bar{r}}{L}} - 2\right)f_3 + \frac{1}{2}\xi_1(1 + \xi_1)\left(1 - \left(2\sqrt{\frac{\bar{r}}{L}} - 1\right)^2\right)f_4 + \\ & + \frac{1}{4}\xi_1(1 + \xi_1)\left(2\sqrt{\frac{\bar{r}}{L}} - 1\right)\left(2\sqrt{\frac{\bar{r}}{L}}\right)f_5 + \frac{1}{2}(1 - \xi_1^2)\left(2\sqrt{\frac{\bar{r}}{L}} - 1\right)\left(2\sqrt{\frac{\bar{r}}{L}}\right)f_6 + \\ & + \frac{1}{4}\xi_1(\xi_1 - 1)\left(2\sqrt{\frac{\bar{r}}{L}} - 1\right)\left(2\sqrt{\frac{\bar{r}}{L}}\right)f_7 + \frac{1}{2}\xi_1(\xi_1 - 1)\left(1 - \left(2\sqrt{\frac{\bar{r}}{L}} - 1\right)^2\right)f_8 + \\ & + (1 - \xi_1^2)\left(1 - \left(2\sqrt{\frac{\bar{r}}{L}} - 1\right)^2\right)f_9 \end{aligned} \quad (5.17)$$

la expresión anterior es del orden de  $\sqrt{\bar{r}}$ , que permite representar correctamente el comportamiento de los desplazamientos cerca del vértice de la grieta.

### 5.3.2 Elemento singular a un cuarto

El elemento a un cuarto no representa el comportamiento  $1/\sqrt{\bar{r}}$  de las tensiones en las inmediaciones de la grieta. Para obtener el correcto comportamiento, las funciones de forma, ecuación (5.1), se multiplican por  $\sqrt{L/\bar{r}}$ , y reciben el nombre de funciones de forma singulares,  $\bar{\Phi}$ . Los elementos que usan estas funciones se denominan elementos singulares a un cuarto.

De la relación entre  $\xi_2$  y  $\bar{r}$ ,

$$\frac{2}{\xi_2 + 1} = \sqrt{\frac{L}{\bar{r}}} \quad (5.18)$$

obtenemos las funciones de forma singulares,

$$\begin{aligned} \bar{\phi}_1 &= \frac{1}{2} \xi_1 (\xi_1 - 1) \xi_2 (\xi_2 - 1) \frac{1}{\xi_2 + 1} \\ \bar{\phi}_2 &= (1 - \xi_1^2) \xi_2 (\xi_2 - 1) \frac{1}{\xi_2 + 1} \\ \bar{\phi}_3 &= \frac{1}{2} \xi_1 (\xi_1 + 1) \xi_2 (\xi_2 - 1) \frac{1}{\xi_2 + 1} \\ \bar{\phi}_4 &= \xi_1 (\xi_1 + 1) (1 - \xi_2) \\ \bar{\phi}_5 &= \frac{1}{2} \xi_1 (\xi_1 + 1) \xi_2 \\ \bar{\phi}_6 &= (1 - \xi_1^2) \xi_2 \\ \bar{\phi}_7 &= \frac{1}{2} \xi_1 (\xi_1 - 1) \xi_2 \\ \bar{\phi}_8 &= \xi_1 (\xi_1 - 1) (1 - \xi_2) \\ \bar{\phi}_9 &= 2(1 - \xi_1^2) (1 - \xi_2) \end{aligned} \quad (5.19)$$

Al conseguir la correcta representación de las tensiones se pierde el significado físico de las mismas, no representan los valores nodales de las tensiones. Por ejemplo en la línea 1-8-7,  $\xi_1 = -1$ , se tiene que

$$\begin{aligned} \bar{p}_1 &= \lim_{\bar{r} \rightarrow 0} p \sqrt{\frac{\bar{r}}{L}} \\ \bar{p}_8 &= \frac{p_8}{2} \\ \bar{p}_7 &= p_7 \end{aligned} \quad (5.20)$$

Pero al ser  $\bar{p}_7 = p_7$ , la tensión real, se puede colocar contiguamente un elemento singular a un elemento normal, sin necesidad de un elemento de transición.

### 5.3.3 Integración sobre el elemento a un cuarto

Los elementos a un cuarto y singulares a un cuarto se integran de igual manera que los elementos normales cuando no contienen el punto de colocación, empleando las subdivisiones por elemento, Capítulo 2. Estos elementos contienen una singularidad, del tipo  $1/\sqrt{r}$ , sobre la línea 1-2-3, pero está compensada por el jacobiano de la transformación de cartesianas a coordenadas naturales, que es del tipo  $\sqrt{r}$  cuando  $\bar{r} \rightarrow 0$ .

Tenemos un caso diferente cuando el punto de colocación está en el propio elemento a un cuarto o singular a un cuarto. En esta situación están presentes las singularidades de la solución fundamental, del tipo

$$u^* \approx \left(\frac{1}{r}\right) \text{ y } p^* \approx \left(\frac{1}{r^2}\right)$$

siendo  $r$  la distancia al punto de colocación. Para eliminar dichas singularidades, igual que en el caso de elementos normales integrados empleando subdivisiones, descomponemos la subdivisión que posee el punto de colocación en triángulos que luego son transformados en cuadriláteros con jacobiano nulo en lado que contiene la singularidad. Esta transformación genera un jacobiano del orden  $O(r)$  que anula la singularidad,  $(1/r)$ . La singularidad del tipo  $(1/r^2)$  se evita haciendo uso de la condición de tensión nula ante un movimiento de sólido rígido, como en el caso de los elementos normales, apartado (3.4.4).

Al dividir en triángulos y transformar a cuadrados la relación lineal en  $\xi_2$  y  $\bar{r}$  se pierde y por lo tanto el jacobiano deja de ser proporcional a  $(\sqrt{r})$ . Las subdivisiones que se encuentran justo sobre el borde de la grieta todavía poseen la singularidad  $(1/\sqrt{r})$ . Para poder eliminar esta singularidad se emplean unas funciones de forma lineales, a diferencia del caso general donde son cuadráticas, en la dirección perpendicular al borde 1-2-3. Las nuevas funciones de forma se expresarán en las coordenadas naturales  $\eta_1$  y  $\eta_2$ , figura (5.6).

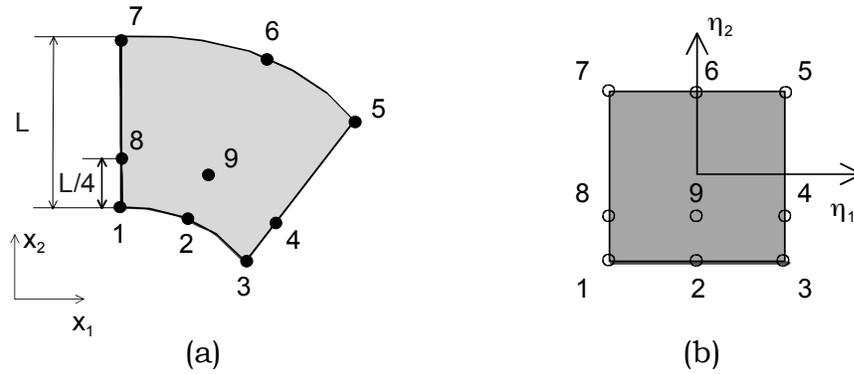


Figura 5.6. Transformación para el elemento a un cuarto con el punto de colocación en el propio elemento, (a) elemento en coordenadas cartesianas y (b) coordenadas naturales.

La geometría se representa en término de las siguientes funciones de forma

$$\begin{aligned}
 \phi_1 &= \frac{1}{4} \eta_1 (1 - \eta_1) (1 - \eta_2) \\
 \phi_2 &= \frac{1}{2} (1 - \eta_1^2) (1 - \eta_2) \\
 \phi_3 &= \frac{1}{4} \eta_1 (\eta_1 + 1) (1 - \eta_2) \\
 \phi_4 &= 0 \\
 \phi_5 &= \frac{1}{4} \eta_1 (\eta_1 - 1) (\eta_2 + 1) \\
 \phi_6 &= \frac{1}{2} (1 - \eta_1^2) (\eta_2 + 1) \\
 \phi_7 &= \frac{1}{4} \eta_1 (1 - \eta_1) (\eta_2 + 1) \\
 \phi_8 &= 0 \\
 \phi_9 &= 0
 \end{aligned} \tag{5.21}$$

Para obtener la relación entre  $\bar{r}$ , y la coordenada natural  $\eta_2$ , en dirección perpendicular a la grieta, usaremos la línea 2-9-6 ó  $\eta_1 = 0$ , y obtenemos

$$\bar{r} = \frac{L}{2}(\eta_2 + 1) \quad (5.22)$$

Esta misma expresión se puede obtener a partir de las líneas 1-8-7 ó 3-4-5, y nos permite relacionar la nueva coordenada natural,  $\eta_2$ , con la de las funciones de forma bicuadráticas,  $\xi_2$ .

$$\xi_2 = 2\sqrt{\frac{\eta_2 + 1}{2}} - 1 \quad (5.23)$$

Estas nuevas funciones de forma con una relación lineal en  $\eta_2$  permiten que la siguiente transformación, para eliminar la singularidad debida al punto de colocación, sea proporcional a  $\eta_2$  y a su vez a  $\bar{r}$ , además de su jacobiano proporcional a  $\sqrt{\bar{r}}$ .

### 5.3.4 Transformaciones

En los elementos a un cuarto también se emplearán las subdivisiones por elemento. Los elementos a un cuarto se representan con  $D$  subdivisiones para identificar mejor la zona del elemento a la que ha llegado la onda, figura (5.7.a). La transformación es la siguiente,

$$\eta_i = \frac{2s_i}{\sqrt{D}} + p_i \quad (5.24)$$

$p_i$  es el valor de la coordenada  $\eta_i$  de la esquina inferior izquierda de la subdivisión,  $s_i$  es el sistema de coordenadas locales de la subdivisión, figura (5.7.b). A continuación es necesario realizar una traslación de los ejes, con coordenadas  $t_1$  y  $t_2$ , para poder integrar numéricamente mediante la fórmula de Gauss estándar, figura (5.7.c).

Las subdivisiones que contienen el punto de colocación en una de sus esquinas necesitan de una transformación adicional para eliminar la singularidad ( $1/r$ ). La subdivisión se descompone en dos triángulos, figura (5.8.c), que se transforma cada uno en un cuadrado, figura (5.8.b) y

(5.8.d), con jacobiano nulo en el lado del cuadrado que corresponde al punto singular,

$$o_i = (1 - s_1)o_i^1 + s_1(1 - s_2)o_i^2 + s_1s_2o_i^3 \quad (5.25)$$

el superíndice identifica la esquina del triángulo. El superíndice (1) corresponde a la esquina del triángulo que contienen la singularidad, figura (5.8.c).

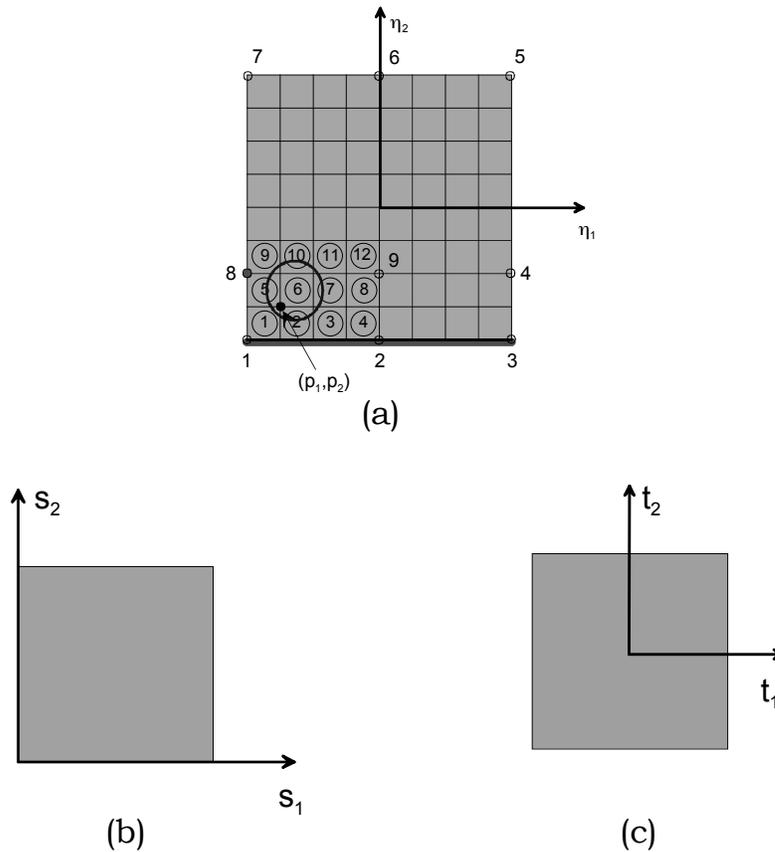


Figura 5.7. (a) Elemento a un cuarto representado con 64 subdivisiones que contiene el punto de colocación en el nodo 8; cuando se integra la subdivisión número 6, (b) coordenadas locales de la subdivisión y (c) coordenadas para integrar usando la fórmula de Gauss.

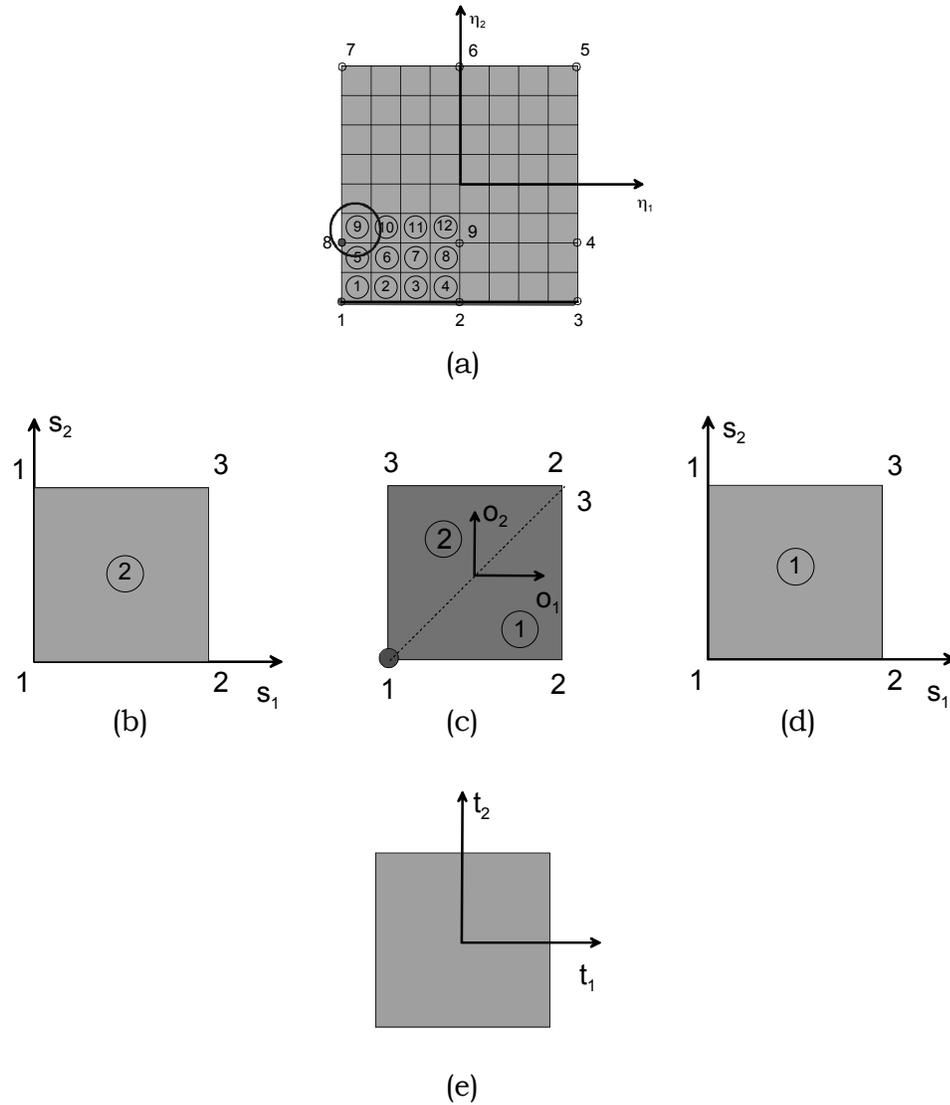


Figura 5.8. (a) Elemento a un cuarto que contiene el punto de colocación en el nodo 8, cuando se integra la subdivisión número 9, (c) subdivisión en triángulos para eliminar la singularidad  $1/r$ , (b) y(d) transformación que elimina la singularidad en los triángulos, y (e) coordenadas para integrar usando la fórmula de Gauss.

Todavía nos queda por definir otro tipo de transformación para las subdivisiones que contienen el borde de la grieta, o sea que se encuentran justo sobre la línea 1-2-3. Estas tienen una parte singular en los núcleos de las integrales, el término  $1/\sqrt{\bar{r}}$ . Tenemos tres tipos de situaciones en las que aparece la singularidad  $1/\sqrt{\bar{r}}$ ; primero la subdivisión a la derecha del punto de colocación, para el nodo 1 ó 2, segundo caso, la subdivisión a la izquierda del nodo 2 ó 3; y por último las subdivisiones que no contienen el punto de colocación pero coinciden con el borde de la grieta. Se realiza una transformación de coordenadas de  $(s_1, s_2)$  a  $(s_1^*, s_2^*)$ , cuyo jacobiano va a ser función de  $\sqrt{\bar{r}}$ .

De la relación entre  $\bar{r}$  y  $\eta_2$ , ecuación (5.14), entre  $\eta_2$  y  $o_2$ , ecuación (5.15), y  $o_2$  y las dos coordenadas  $s_1, s_2$ , se establece una expresión de  $\bar{r}$  en función de  $s_1$  y  $s_2$ .

En el primer caso, ver figura (5.9), el punto de colocación está en el nodo 1 ó 2 y se integra la subdivisión 1, las expresiones para la distancia al borde de la grieta,  $\bar{r}$ , las transformaciones de  $(s_1, s_2)$  a  $(s_1^*, s_2^*)$  y su respectivo jacobiano son para el triángulo 1,

$$\begin{aligned}\bar{r} &= \frac{Ls_1s_2}{\sqrt{D}} \\ s_1 &= (s_1^*)^2 \\ s_2 &= (s_2^*)^2 \\ |J| &= 4\sqrt{s_1s_2}\end{aligned}\tag{5.26}$$

y para el triángulo 2 tenemos,

$$\begin{aligned}\bar{r} &= \frac{Ls_1}{\sqrt{D}} \\ s_1 &= (s_1^*)^2 \\ s_2 &= s_2^* \\ |J| &= 2\sqrt{s_1}\end{aligned}\tag{5.27}$$

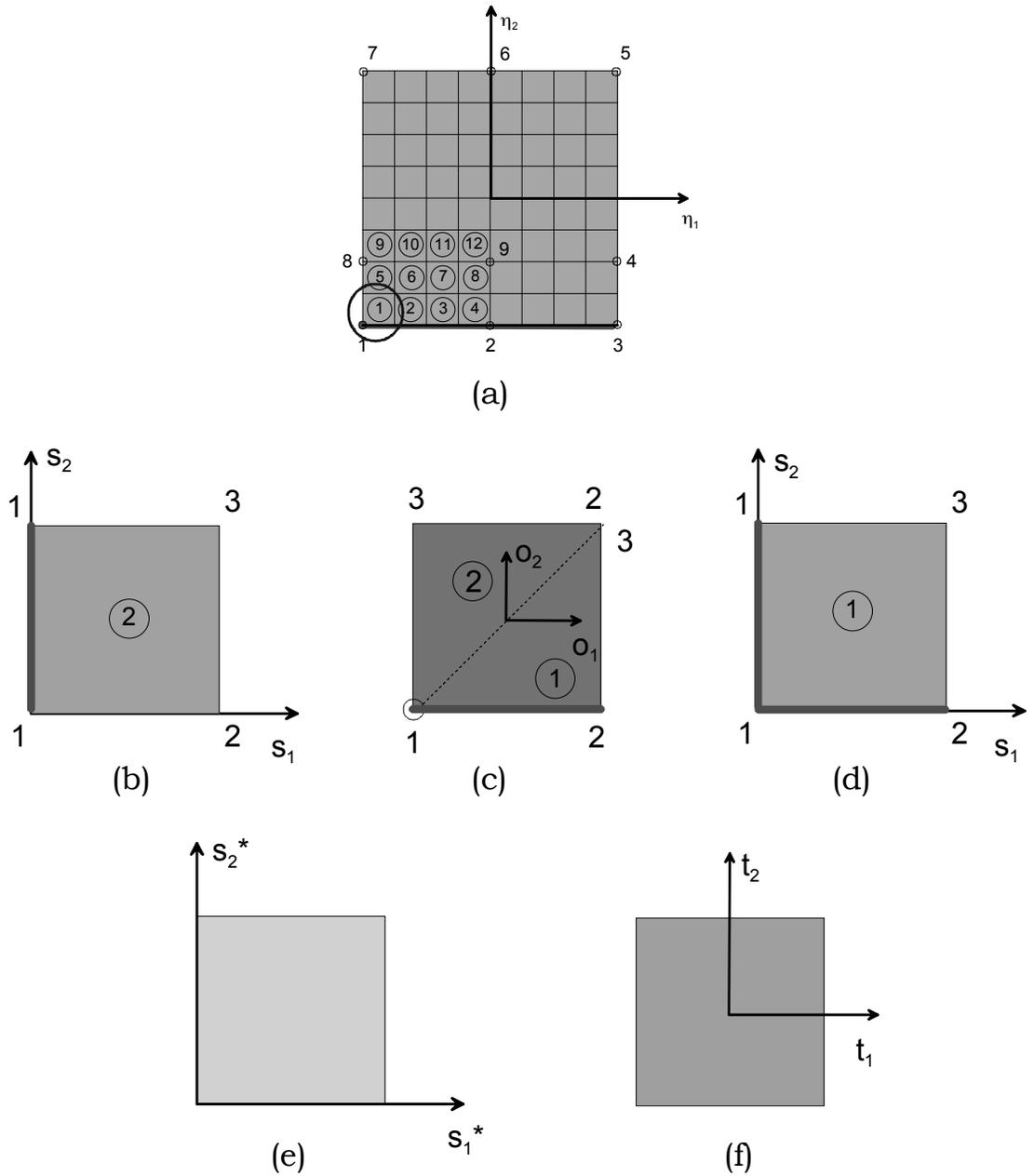


Figura 5.9. (a) Elemento a un cuarto que contiene el punto de colocación en el nodo 1, cuando se integra la subdivisión número 1, (c) subdivisión en triángulos para eliminar la singularidad  $1/r$ , (b)y(d) transformación que elimina la singularidad, (e) transformación para eliminar la singularidad del borde de la grieta y (f) coordenadas para integrar usando la fórmula de Gauss.

El segundo caso se trata de la subdivisión a la izquierda del nodo 2 ó 3, cuando el respectivo nodo es punto de colocación. Se resuelve de similar manera que en el caso anterior, figura (5.10). Para el triángulo 1,

$$\begin{aligned}\bar{r} &= \frac{Ls_1}{\sqrt{D}} \\ s_1 &= (s_1^*)^2 \\ s_2 &= s_2^* \\ |J| &= 2\sqrt{s_1}\end{aligned}\tag{5.28}$$

y en el triángulo 2,

$$\begin{aligned}\bar{r} &= \frac{Ls_1(1-s_2)}{\sqrt{D}} \\ s_1 &= (s_1^*)^2 \\ s_2 &= 1 - (1-s_2^*)^2 \\ |J| &= 4\sqrt{s_1(1-s_2)}\end{aligned}\tag{5.29}$$

El tercer caso es el de la subdivisión que está en el borde de la grieta pero no contiene el punto de colocación, ver figura (5.11),

$$\begin{aligned}\bar{r} &= \frac{Ls_2}{\sqrt{D}} \\ s_1 &= s_1^* \\ s_2 &= (s_2^*)^2 \\ |J| &= 2\sqrt{s_2}\end{aligned}\tag{5.30}$$

Por último, en todos los casos, para poder usar la fórmula de Gauss estándar se trasladan los ejes,

$$s_i^* = \frac{(t_i + 1)}{2}\tag{5.31}$$

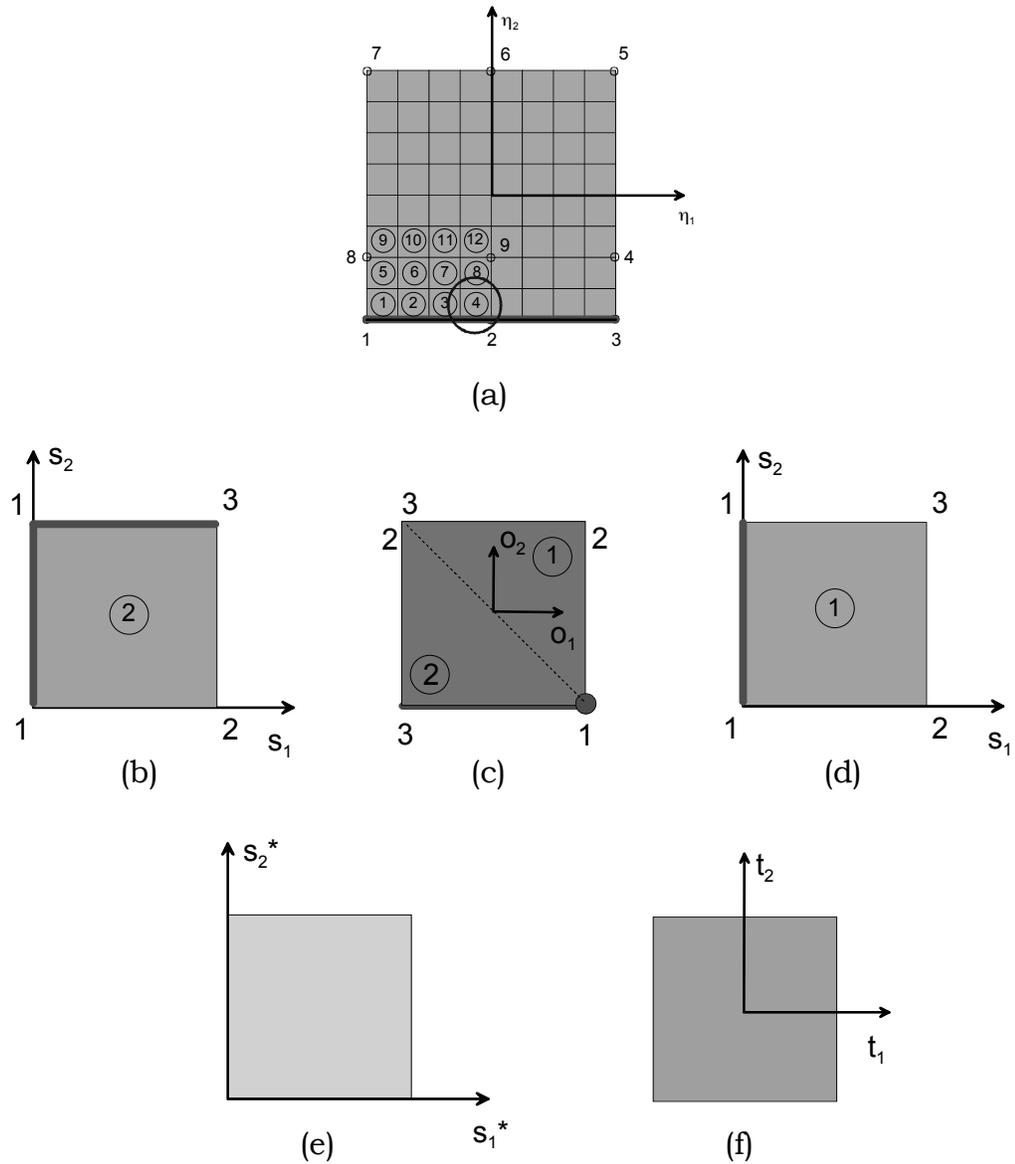


Figura 5.10. (a) Elemento a un cuarto que contiene el punto de colocación en el nodo 2, cuando se integra la subdivisión número 4, (c) subdivisión en triángulos para eliminar la singularidad  $1/r$ , (b) y (d) transformación que elimina la singularidad, (e) transformación para eliminar la singularidad del borde de la grieta y (f) coordenadas para integrar usando la fórmula de Gauss.

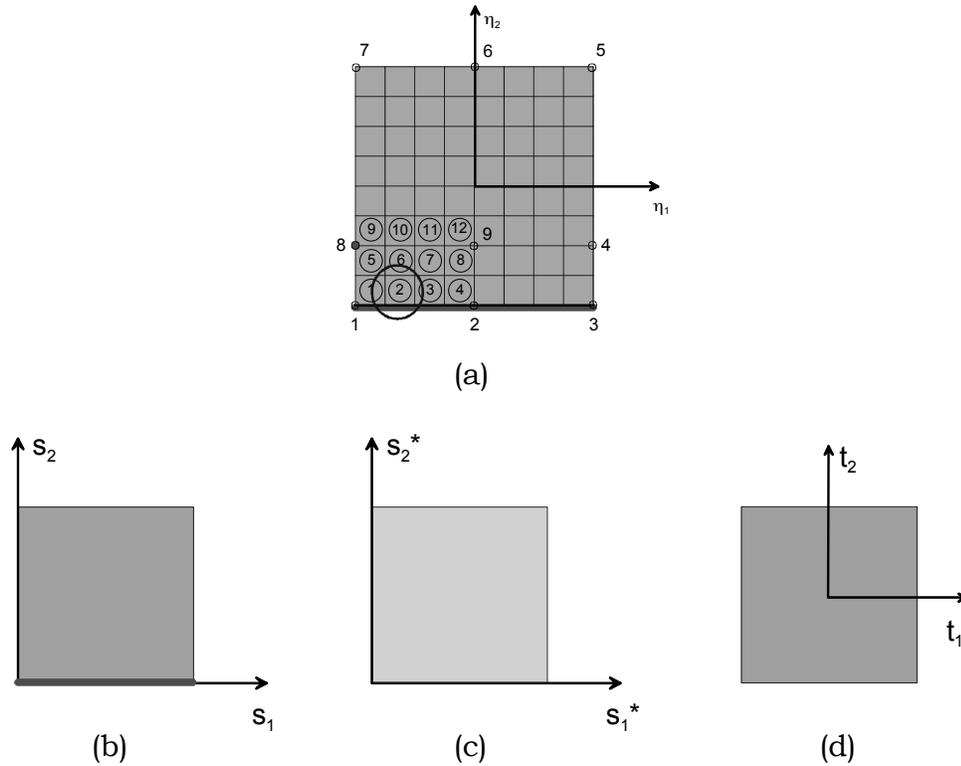


Figura 5.11. (a) Elemento a un cuarto que contiene el punto de colocación en el nodo 8, cuando se integra la subdivisión número 2, (b) coordenadas locales de la subdivisión (c) transformación para eliminar la singularidad del borde de la grieta y (d) coordenadas para integrar usando la fórmula de Gauss.

## 5.4 Discretización del problema

A continuación describiremos como se define el modelo discreto del problema haciendo uso del elemento singular y singular a un cuarto. Primero el dominio en estudio es dividido en regiones que parten del vértice de la grieta, y cada región es analizada mediante el MEC. Luego las regiones son acopladas mediante condiciones de equilibrio y compatibilidad, o simplemente se aplican condiciones de simetría. En la figura (5.12) se muestra un problema que posee planos de simetría, una barra sometida a una tracción en sus dos extremos. Sólo es necesario modelar una octava parte del problema y la grieta puede ser colocada en el contorno exterior de la discretización.

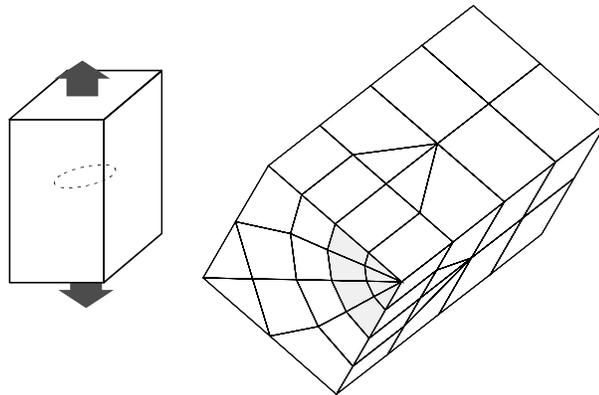


Figura 5.12. Problema con tres planos de simetría; se modela sólo 1/8 del problema

Por otro lado en el caso de un problema sin simetrías la grieta tiene que ser modelada en un contorno interior y se deberán evaluar dos regiones y luego ser acopladas, figura (5.13).

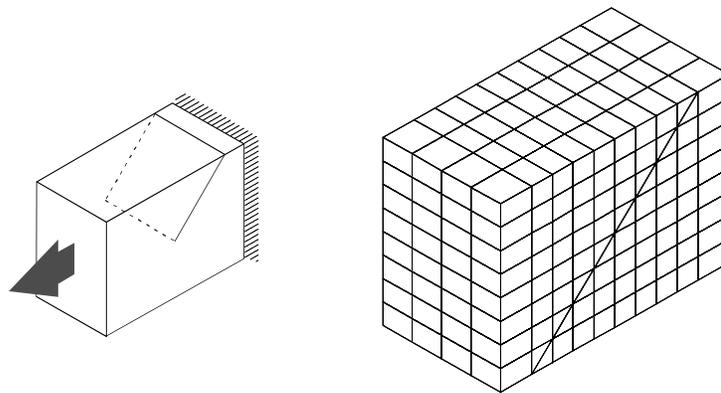


Figura 5.13. Grieta en modo mixto

Los elementos empleados en la discretización son todos de tipo cuadrático salvo los que se sitúan en contacto con el vértice de la grieta, figura (5.14). De estos elementos los que se encuentran sobre el labio de la grieta tienen simplemente la ubicación de los nodos a un cuarto: elementos a un cuarto. Al estar prescritas, las tracciones no requieren un tratamiento particular. Los elementos que contienen el borde de la grieta y se

extienden hacia el interior del material se modelan con el elemento a un cuarto singular, ya que son los que poseen la representación singular de las tracciones.

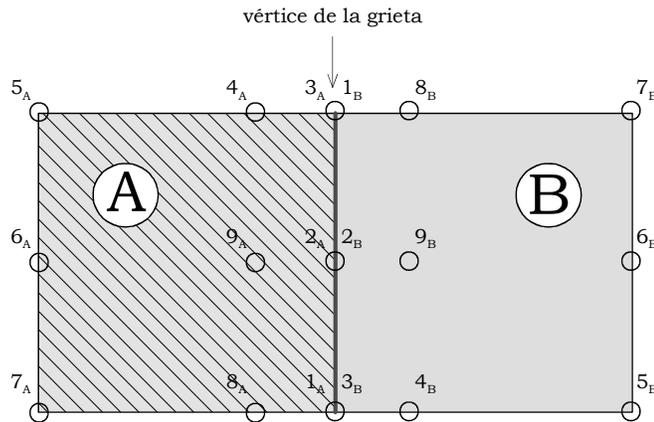


Figura 5.14. Elementos colocados a ambos lados del vértice de la grieta; el lado A se modela con elementos a un cuarto singulares y el lado B, labio de la grieta, con elementos a un cuarto

## 5.5 Cálculo de los factores de intensidad de tensión

### 5.5.1 Grietas en modos simples

En problemas de mecánica de la fractura con un plano de simetría que pasa por el vértice de la grieta, se puede colocar esta última en el contorno de la discretización del problema. En este caso se obtiene directamente el valor de  $K(t)$  del valor nodal de las tracciones en el elemento singular a un cuarto o de los desplazamientos de los nodos del elemento a un cuarto.

Así, en el caso de un problema simétrico donde el eje  $x_3$  es perpendicular al plano de la grieta y  $x_2$  es tangente al vértice, los valores de los  $K(t)$ 's que se obtienen a partir de un nodo  $k$  que está justo en el borde de la grieta son

$$\begin{aligned}
 K_I(t) &= \bar{p}_3^k \Big|_{n\Delta t} \sqrt{(2\pi L)} \\
 K_{II}(t) &= \bar{p}_1^k \Big|_{n\Delta t} \sqrt{(2\pi L)} \\
 K_{III}(t) &= \bar{p}_2^k \Big|_{n\Delta t} \sqrt{(2\pi L)}
 \end{aligned}
 \tag{5.31}$$

donde  $\bar{p}_i^k$  el valor nodal de la componente  $i$  de la tracción en el nodo  $k$  del elemento a un cuarto singular.  $k$  puede tomar los valores 1, 2 ó 3, como puede verse en la figura (5.14).

También se pueden calcular los valores de los  $K(t)$  haciendo uso de los desplazamientos de los labios de la grieta. Los desplazamientos evolucionan con  $\sqrt{r}$  en la representación del MEC de la misma forma que en el caso teórico, no hay más que particularizar la expresión teórica de las tres componentes de  $u$  para cada nodo a un cuarto del borde de la grieta e igualarlas a los valores numéricos obtenidos. De este modo se obtienen  $K_I(t)$ ,  $K_{II}(t)$  y  $K_{III}(t)$ ,

$$\begin{aligned}
 K_I(t) &= \frac{\mu}{1-\nu} \sqrt{\frac{2\pi}{L}} u_3^k \Big|_{n\Delta t} \\
 K_{II}(t) &= \frac{\mu}{1-\nu} \sqrt{\frac{2\pi}{L}} u_1^k \Big|_{n\Delta t} \\
 K_{III}(t) &= \mu \sqrt{\frac{2\pi}{L}} u_2^k \Big|_{n\Delta t}
 \end{aligned}
 \tag{5.32}$$

donde  $\mu$  es el módulo de elasticidad transversal del material,  $\nu$  el módulo de Poisson y  $u_i^k$  el desplazamiento del nodo a un cuarto del borde. Como puede verse en la figura (5.14)  $k$  puede tomar los valores 4, 9 u 8.

### 5.5.2 Grietas en modos mixtos

Existen muchos problemas en los que actúa más de un modo de fractura, el modo mixto. Las grietas están sometidas a tensiones de apertura y deslizamiento. En estos problemas no es posible aplicar simetrías y es necesario modelar ambos labios de la grieta. Los campos de tensiones y desplazamientos son el resultado de una combinación de Modo I, Modo II y Modo III de fractura, figura (5.13).

Al ser necesario modelar ambos labios de la grieta y tener ésta un espesor nulo, una grieta ideal, los elementos de ambos labios coinciden y por tanto también sus ecuaciones. Así que la solución de estos nodos no representa la diferencia de los desplazamientos que deben existir entre los labios de la grieta. Por otro lado, si se modela la grieta con un espesor pequeño, ya el problema no es el mismo, además se tendrán que realizar integrales cuasi-singulares cuando se coloca en un nodo muy cercano a un elemento al que no pertenece.

### Subregiones

Para evitar los problemas antes descritos, en el presente trabajo el problema se dividirá en subregiones. Se añadirá un contorno ficticio que parte del vértice de la grieta, figura (5.15).

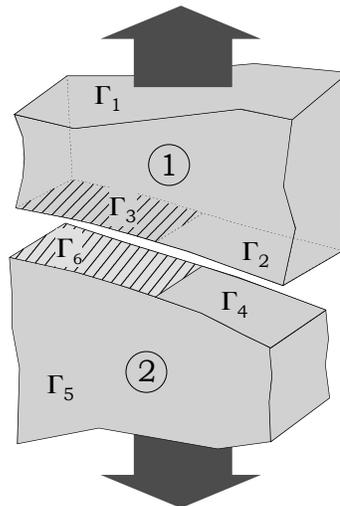


Figura 5.15. Problema dividido en subregiones.

En cualquier instante de tiempo, obviando los índices que identifican el paso en el tiempo tenemos para la región 1

$$\mathbf{H}_1 \mathbf{u}_1 + \mathbf{H}_2 \mathbf{u}_2 + \mathbf{H}_3 \mathbf{u}_3 = \mathbf{G}_1 \mathbf{p}_1 + \mathbf{G}_2 \mathbf{p}_2 + \mathbf{G}_3 \mathbf{p}_3 \quad (5.33)$$

Y para la región 2

$$\mathbf{H}_4 \mathbf{u}_4 + \mathbf{H}_5 \mathbf{u}_5 + \mathbf{H}_6 \mathbf{u}_6 = \mathbf{G}_4 \mathbf{p}_4 + \mathbf{G}_5 \mathbf{p}_5 + \mathbf{G}_6 \mathbf{p}_6 \quad (5.34)$$

Por compatibilidad y equilibrio podemos establecer

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_6 &= \mathbf{u}_3 \\ \mathbf{p}_3 &= -\mathbf{p}_6 \end{aligned} \quad (5.35)$$

El sistema en forma matricial es

$$\begin{bmatrix} \mathbf{H}_1 & \mathbf{H}_2 & \mathbf{H}_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{H}_6 & \mathbf{H}_4 & \mathbf{H}_5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_2 \\ \mathbf{u}_3 \\ \mathbf{u}_4 \\ \mathbf{u}_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_1 & \mathbf{G}_2 & \mathbf{G}_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\mathbf{G}_6 & \mathbf{G}_4 & \mathbf{G}_5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{p}_1 \\ \mathbf{p}_2 \\ \mathbf{p}_3 \\ \mathbf{p}_4 \\ \mathbf{p}_5 \end{bmatrix} \quad (5.36)$$

Al resolver el sistema de ecuaciones se obtendrá el valor de las tensiones en el contorno interno que parte de la grieta. Este contorno formará un ángulo,  $\theta$ , con los labios de la grieta. Así que sustituyendo  $\theta$  y el valor de  $\bar{\mathbf{p}}$  en las ecuaciones (5.6) se obtendrá el factor de intensidad de tensiones para  $K_I(t)$  y  $K_{II}(t)$  que también se pueden obtener a partir del resultado de los desplazamientos de los labios de la grieta obtenidos para cada subregión. En las ecuaciones (5.7) se deben emplear los valores con respecto a los ejes locales de la grieta, así que se podrán sumar las componentes que determinan  $K_I(t)$ , abren la grieta, y  $K_{II}(t)$ , deslizan los labios de la grieta.

Al dividir el problema en subregiones en una geometría tridimensional, aumenta el número de elementos a los que puede pertenecer un mismo

nodo, pudiendo ser diferentes las condiciones de contorno en cada elemento.

El montaje de las ecuaciones correspondientes a un nodo requiere evaluar el número y tipo de incógnitas, asignar una posición de fila y columna para cada una dentro del sistema y almacenar esta configuración para posibilitar solapes sucesivos en la matriz. Además, es necesario tener en cuenta que el movimiento es único por nodo y será dato desde que lo sea como perteneciente a uno de los elementos. Por otro lado las tracciones están asociadas a cada normal y serán datos o incógnitas dependiendo de la condición de contorno de cada elemento, independientemente de los demás elementos. Como consecuencia hace falta definir todas las combinaciones posibles y determinar para cada nodo a que caso corresponde, en función de las condiciones de contorno de los elementos involucrados y de las diferentes regiones.

En el presente trabajo hemos dividido el problema en áreas diferenciadas por sus condiciones de contorno (Maeso, 1992). En las fronteras entre cada área se asignarán nodos independientes a cada área aunque con las mismas coordenadas. De esta manera se desvinculan los grados de libertad de las distintas áreas y se montan sus respectivos valores para las matrices **G** y **H** de forma independiente, simplificamos en gran medida el procedimiento de montaje. Pero la duplicación de los nodos implica el desdoblamiento de la ecuación nodal, con un aumento en el número de ecuaciones que se debe resolver.

### **Problema de esquina**

A continuación se discute el caso más simple, dos áreas con una frontera común, figura (5.16). La duplicación de los nodos provoca el desdoblamiento de la ecuación nodal en dos filas y dos columnas. Para cada dirección coordenada se tienen:

$$\begin{aligned} a_{11}u_1 + a_{12}u_2 + bt_1 + ct_2 + \dots &= \bar{d} \\ a_{21}u_1 + a_{22}u_2 + bt_1 + ct_2 + \dots &= \bar{d} \end{aligned} \tag{5.37}$$

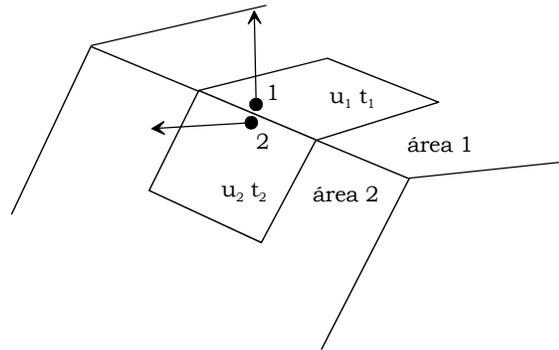


Figura 5.16. Problema de esquina.

Las posibles condiciones de contorno para este caso son:

- 1)  $t_1 = \bar{t}_1; t_2 = \bar{t}_2$
- 2)  $t_1 = \bar{t}_1; u_2 = \bar{u}_2$
- 3)  $u_1 = \bar{u}_1; t_2 = \bar{t}_2$
- 4)  $u_1 = \bar{u}_1; u_2 = \bar{u}_2$

En cualquiera de las tres primeras situaciones el sistema es suficiente para obtener las otras dos incógnitas nodales. En el cuarto caso, cuando los desplazamientos son datos en las áreas con nodos comunes, existe un situación especial, porque las ecuaciones nodales son idénticas y el sistema de ecuaciones es singular, este caso es conocido como el problema de esquina. Una posible solución se basa en la duplicación de la ecuación nodal para una posición ligeramente desplazada del punto de colocación, con lo que los coeficientes del sistema ya no serán iguales, y el sistema no será singular (Medina, 1987).

En esta tesis sólo resolveremos regiones que se deben a un contorno ficticio, las subregiones pertenecen al mismo cuerpo y por ello poseen las mismas propiedades. Es así posible establecer que las tracciones son iguales en ambas áreas para estos nodos coincidentes con desplazamientos conocidos, entonces será necesaria sólo una ecuación y el sistema no es singular.

## 5.6 Aplicaciones

Las grietas tridimensionales más investigadas probablemente son las grietas circulares y rectangulares debido a la simplicidad de la geometría. Estas formas idealizadas nos permiten obtener información sobre el comportamiento de las grietas en problemas tridimensionales que puede ser luego extrapolada a grietas reales. En el presente trabajo estudiaremos dichas grietas en medios finitos e infinitos, en modos simples o mixtos.

En todos los problemas de mecánica de la fractura dinámica que resolveremos a continuación actúa una carga,  $p(t)$ , en forma de escalón que es aplicada en el instante  $t=0$  y sostenida,

$$p(t) = \begin{cases} p_0 & \text{para } t \geq 0 \\ 0 & \text{para } t < 0 \end{cases}$$

Las propiedades del medio fisurado se definirán con la densidad,  $\rho$ , el módulo de Poisson,  $\nu$ , y el módulo de rigidez,  $\mu$ . Nos referiremos a la velocidad de las ondas longitudinales y transversales en el medio como  $c_p$  y  $c_s$ , respectivamente.

$\beta_s$  y  $\beta_p$  siempre se refieren a,

$$\beta_s = \frac{c_s \Delta t}{\Delta l}; \quad \beta_p = \frac{c_p \Delta t}{\Delta l} \quad (5.37)$$

donde  $\Delta l = L/2$ , y  $L$  es la longitud característica, figura (5.5), del elemento a un cuarto y a un cuarto singular ya que en cada una de las discretizaciones se han empleado elementos a un cuarto y a un cuarto singulares con igual  $L$ . En todos los problemas se empleará el método de la velocidad constante, discutido en el Capítulo 4, para estabilizar los resultados.

Los resultados se normalizarán, excepto donde se indique lo contrario, con

$$K_I^0 = p_0 \sqrt{\pi a} \quad (5.38)$$

donde  $p_0$  es la carga aplicada y  $a$  es la longitud característica de la grieta.

En el primer ejemplo que se discute a continuación se mostrará el efecto de las subdivisiones en los resultados, donde se podrá apreciar que a partir de 144 subdivisiones por elemento los resultados no varían significativamente. Así que se emplea siempre en la integración numérica 144 subdivisiones por elemento. Cada subdivisión se integrará a su vez con cuatro puntos de Gauss. También en el ejemplo se mostrará que el método desarrollado en ésta tesis genera resultados consistentes entre  $0.8 < \beta_s < 1.2$ . En dicho rango se puede apreciar que los resultados obtenidos a partir del elemento a un cuarto y del elemento singular a un cuarto guardan gran similitud. Por ello en la solución de todos los ejemplos se emplearán valores del parámetro  $\beta_s$  dentro de dicho rango y como criterio, para decidir si la combinación de discretización temporal y espacial es óptima, que los resultados obtenidos a partir elemento a un cuarto y del elemento singular a un cuarto sean muy similares.

### 5.6.1 Barra con una grieta circular

El primer problema resuelto se trata de una barra ( $2w_1 \times 2w_2 \times 2h$ ) que contiene una grieta circular en su centro, figura (5.17.a) es sometida a una carga en forma de escalón en sus dos extremos. El material tiene un módulo de Poisson,  $\nu=0.2$ . El radio de la grieta circular es  $a=0.5w_1$ ,  $w_1$  es el ancho de la barra y la profundidad  $w_2=w_1$ , con altura  $h=2w_1$ . Debido a las simetrías de la geometría y las cargas sólo es necesario modelar un octavo del problema. Los labios de la grieta se ha modelado con 8 elementos de los cuales cuatro son elementos a un cuarto, figura (5.17.b).

En este problema sólo actúa el modo I de fractura,  $K_I(t)$ . Así que los resultados que mostraremos a continuación se han normalizado con el valor de la solución estática para una grieta circular en un medio infinito,

$$K_I^0 = 2p_o \sqrt{\frac{a}{\pi}} \quad (5.39)$$

(Sneddon, 1946), y serán obtenidos para el punto A, figura (5.17.a).

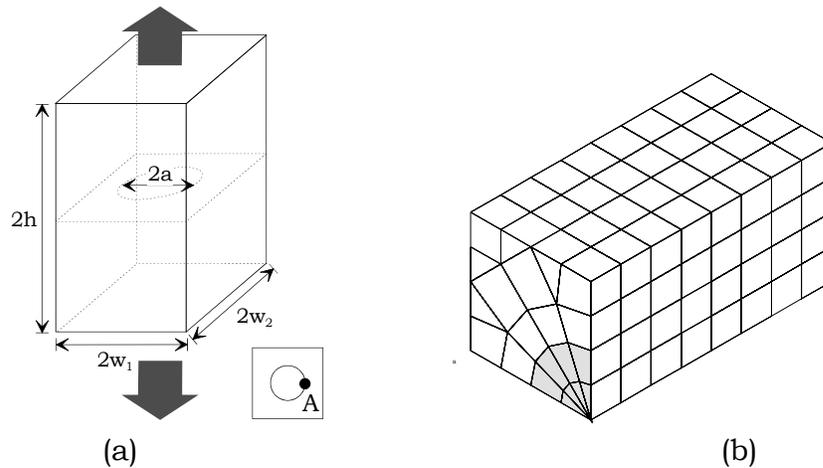


Figura 5.17 Barra con una grieta circular, (a) descripción del problema, (b) discretización, los elementos en gris representan los labios de la grieta

En la discusión de resultados se comienza por analizar la estabilidad y fiabilidad del método. Más adelante, se discute el significado físico de los mismos y se comparan los resultados con los obtenidos por otros autores. Se emplea en los análisis los valores del  $K_I(t)$  obtenidos a partir de las tracciones ficticias de los elementos singulares a un cuarto y de los desplazamientos en el labio de la grieta o sea de los elementos a un cuarto.

Como se ha indicado en el apartado anterior, en este problema se realizaron pruebas con distinto número de subdivisiones por elemento y a partir de 144 subdivisiones por elemento no mejoran los resultados de forma importante para justificar el aumento en el coste computacional. En la figura (5.18) se muestra la variación de los resultados con el número de subdivisiones, el  $K_I(t)$  fue obtenido de las tracciones ficticias en el elemento singular a un cuarto en el punto A, con  $\beta_s=0.8$  ( $\beta_p=1.63$ ).

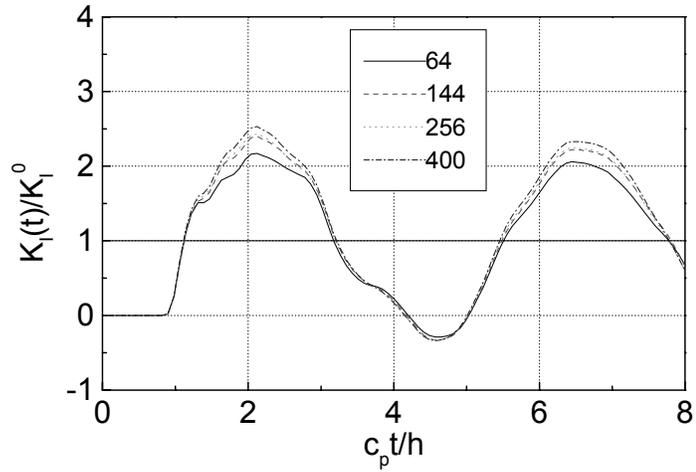


Figura 5.18 Barra con una grieta circular, resultados con distinto número de subdivisiones, con  $\beta_s=0.8$  ( $\beta_p=1.63$ )

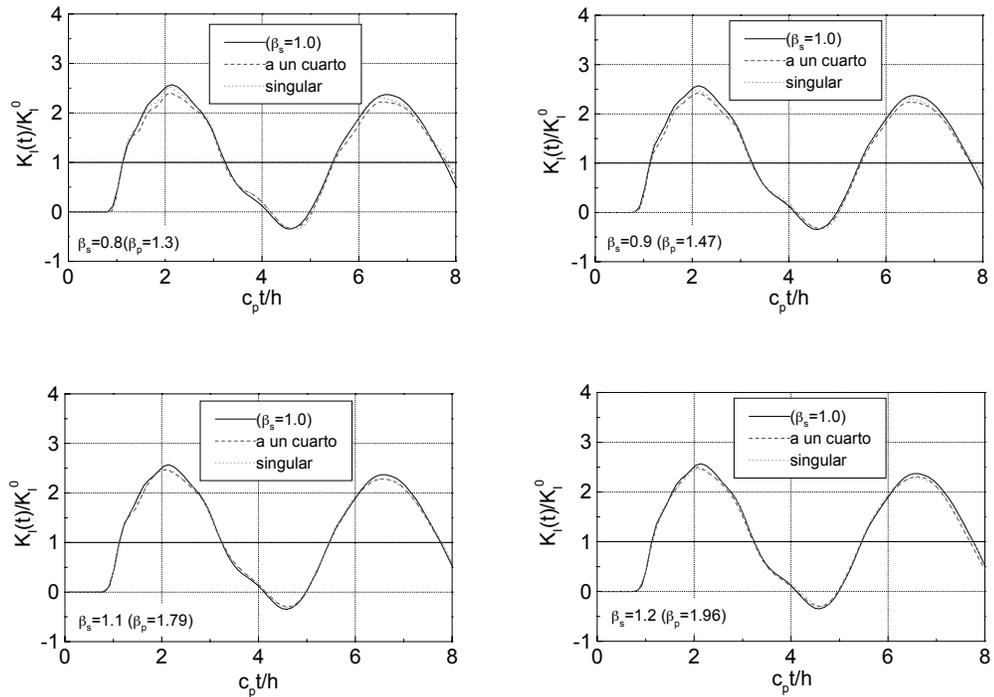


Figura 5.19 Barra con una grieta circular. Resultados con distintos tamaños del parámetro  $\beta_s$ .

Además del efecto del número de subdivisiones por elemento, se ha estudiado el efecto del tamaño del  $\beta_s$  en la determinación de  $K_I(t)$ . En la figura (5.19) se muestran los resultados obtenidos a partir de los desplazamientos en el labio de la grieta y de las tracciones ficticias, elemento a un cuarto y singular a un cuarto, respectivamente. Los resultados se comparan con los obtenidos del elemento singular a un cuarto con  $\beta_s=1$ . Se ha empleado la misma discretización espacial en todos los casos pero distintos tamaños de  $\Delta t$ . Los resultados son consistentes entre  $0.8 < \beta_s < 1.2$ . En dicho rango se puede apreciar que los resultados obtenidos a partir del elemento a un cuarto y del elemento singular a un cuarto guardan gran similitud. En los siguientes problemas se empleará lo anterior como criterio para decidir si la combinación de discretización temporal y espacial es correcta, o sea que los resultados obtenidos a partir elemento a un cuarto y del elemento singular a un cuarto de sean muy similares.

Los resultados obtenidos indican que el factor de intensidad de tensiones alcanza un máximo en  $c_p t/h \approx 2.0$ ,  $K_I(t)/K_I^0 = 2.5$ , y luego otro máximo local en  $c_p t/h \approx 6.6$ ,  $K_I(t)/K_I^0 = 2.3$ . El FIT dinámico alcanza valores de 2.5 veces el FIT estático de una grieta circular en un medio infinito, la llamada sobrecarga dinámica, y esto ocurre cuando llegan las ondas desde los extremos de la barra y de las caras laterales. Luego decrece y llega a tener valores negativos que carecen de significado físico, es un error matemático ya que no se impide en el método que los labios de la grieta se solapen.

Se compara el  $K_I(t)$  obtenido a partir de las tensiones ficticias en el vértice de la grieta, elemento a un cuarto singular, o de los desplazamientos en el labio de la grieta, elemento a un cuarto; con el obtenido por Wen, Aliabadi y Rooke (1998) , figura (5.20). Wen et al. emplean el método dual de elementos de contorno, sus resultados son obtenidos en el dominio de la transformada de Laplace invirtiendo los mismos con el algoritmo de Durbin, y el  $K_I(t)$  se determina de los desplazamientos de apertura de la grieta. Los resultados son muy similares entre sí, con una pequeña variación en los obtenidos a partir del elemento a un cuarto, que no alcanzan los valores máximos.

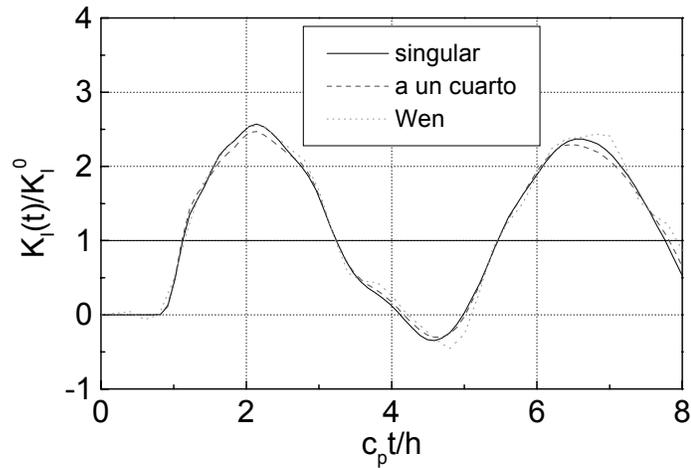


Figura 5.20 Barra con una grieta circular usando  $\beta_s=1.0$  ( $\beta_p=1.63$ )

### 5.6.2 Barra con una grieta rectangular en el borde

El siguiente problema consiste de una barra ( $w_1 \times 2w_2 \times 2h$ ) que contiene una grieta rectangular en el borde libre, figura (5.21.a). Primero se estudia el problema provocando una situación de deformación plana, impidiendo los desplazamientos normales a las caras laterales y luego con todas sus caras laterales libres. La geometría es:  $w_2=0.75w_1$ ,  $h=1.5w_1$  y el largo de la grieta,  $a=0.4w_1$ . El material tiene  $\nu=0.25$ . Debido a las simetrías que presenta en deformación plana, sólo es necesario modelar la mitad del problema y para el problema de la barra sólo un octavo, en ambos casos se ha usado la misma discretización, figura (5.21.b), con distintas condiciones de contorno.

El  $K_I(t)$  se ha normalizado con el valor estático,

$$K_I^0 = 2.104 p_0 \sqrt{\pi a} \tag{5.40}$$

(Brown y Srawley, 1966).

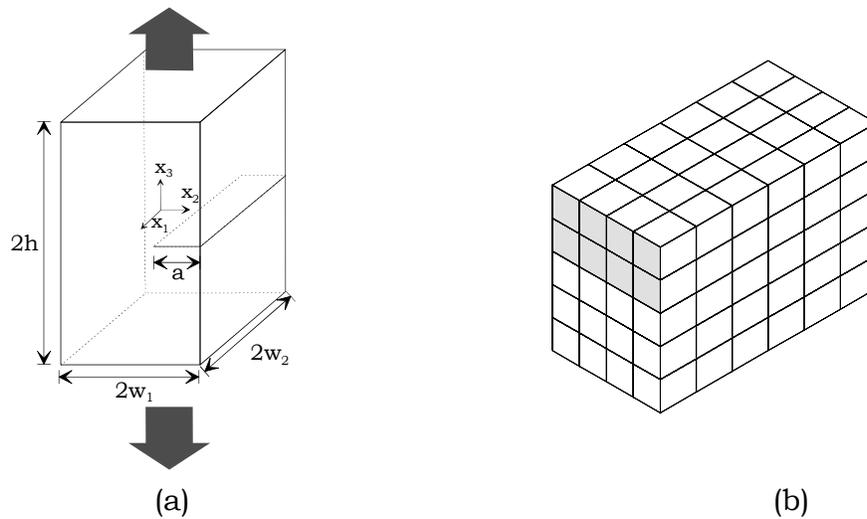


Figura 5.21 Barra con una grieta en el borde, (a) descripción del problema, (b) malla de 148 elementos, los elementos en gris representan los labios de la grieta

Se ha resuelto el problema provocando una situación de deformación plana y empleando  $\beta_s=0.7$  ( $\beta_p=1.2$ ), el  $K_I(t)$  obtenido a partir de los desplazamientos de los elementos a un cuarto, es comparado con el de los elementos a un cuarto singulares, figura (5.22). Ambos son muy similares, lo cual permite concluir que el valor de  $\beta_s$  elegido es apropiado. El factor de intensidad de tensiones alcanza valores máximos entre  $2.2 < c_p t/h < 3.5$  con  $K_I(t)/K_I^0 = 1.2$ , y luego otro máximo en  $c_p t/h \approx 7$ ,  $K_I(t)/K_I^0 = 1.8$ . El  $K_I(t)$  llega a ser 1.8 veces el valor estático cuando llegan por segunda vez las ondas desde los extremos de la barra y de las caras laterales que han sido antes refractadas por la grieta.

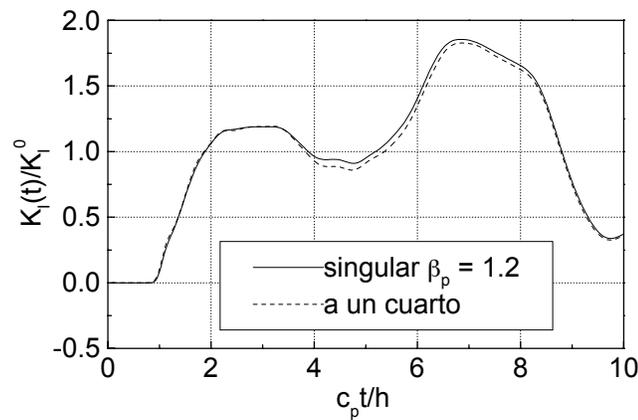


Figura 5.22 Barra con una grieta en el borde en deformación plana resultados a partir de los elementos a un cuarto y a un cuarto singulares con  $\beta_p=1.2$  ( $\beta_s=0.7$ )

Los resultados obtenidos en esta tesis al resolver el problema provocando una situación de deformación plana, figura (5.23), son comparados con los obtenidos por Balas, Sladek y Sladek (1989); y Wen, Aliabadi y Rooke (1998). Balas et al. resolvieron el problema en dos dimensiones, deformación plana, con el MEC en el dominio de la transformada de Laplace y luego invirtiendo numéricamente con el algoritmo de Durbin. Obtienen el  $K_I(t)$  de los desplazamientos de abertura de la grieta. Wen, et al. resolvieron el problema tridimensional con el método dual de elementos de contorno, sus resultados son obtenidos en el dominio de la transformada de Laplace y luego se invierten con el algoritmo de Durbin. El  $K_I(t)$  se determina de los desplazamientos de apertura de la grieta. En el problema de Wen et al. todas las caras de la barra tienen libres los desplazamientos y se toma un punto cercano al centro de la barra, donde el problema tridimensional asemeja al problema de deformación plana,  $x_1/w_2=0.125$ . Los resultados del presente trabajo obtenidos a partir de las tensiones ficticias en el elemento singular a un cuarto utilizado  $\beta_s = 0.7$  ( $\beta_p = 1.2$ ) son similares a los de Balas et al., para  $c_p t/h < 4$ , a partir de éste valor son más parecidos a los conseguidos por Wen et al.

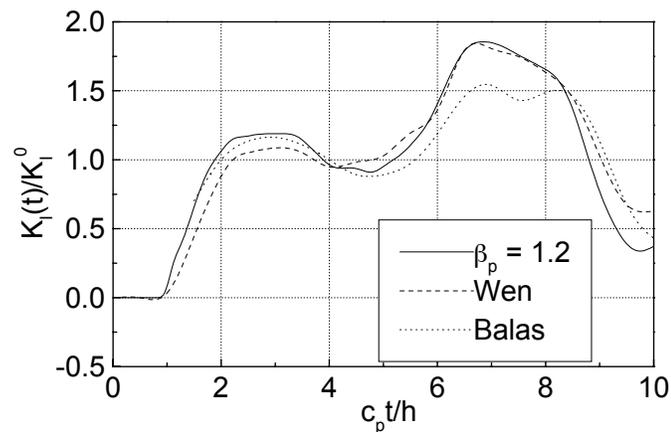
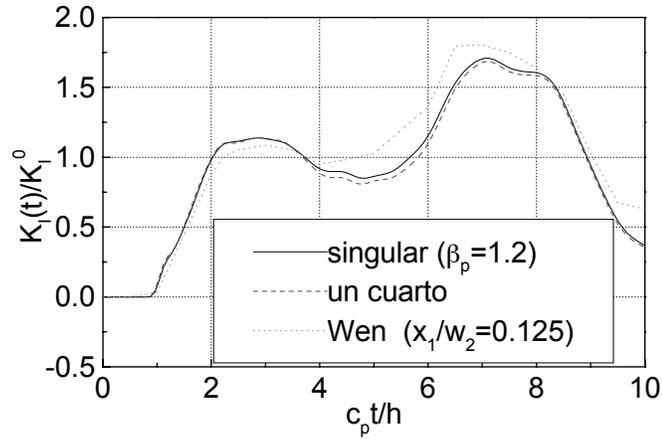


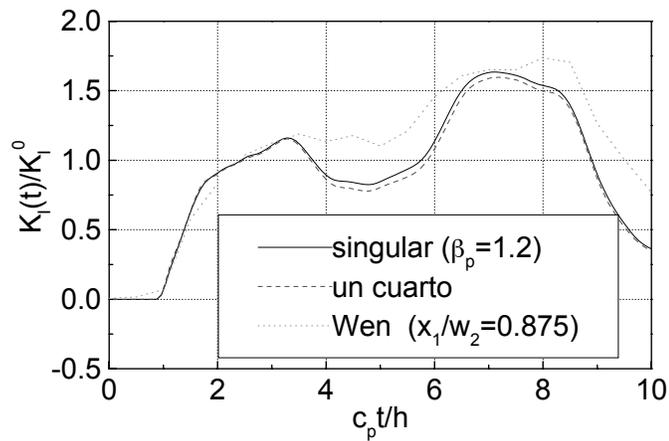
Figura 5.23 Barra con una grieta en el borde en deformación plana, comparación del elemento singular con resultados de otros autores, con  $\beta_p=1.2$  ( $\beta_s=0.7$ )

El otro problema resuelto con la misma geometría es el de la barra con todas sus caras libres, con  $\beta_p=1.2$  ( $\beta_s=0.64$ ), el material tiene  $\nu=0.3$ . Aquí se compara con el mismo problema resuelto por Wen et al., el problema

tridimensional. Se muestra el FIT de un punto cercano al centro de la barra,  $x_1/w_2=0.125$ , y otro punto cercano al borde libre,  $x_1/w_2=0.875$ , figura (5.24). Los resultados son parecidos hasta  $c_p t/h=3$ . A partir de dicho instante los métodos generan comportamientos similares del FIT en el tiempo aunque no alcanzan los mismos valores máximos y mínimos.



(a)



(b)

Figura 5.24 Barra con una grieta en el borde,  $\beta_s=0.63$  ( $\beta_p=1.2$ ) (a) en el interior de la barra, (b) cerca del borde libre

### 5.6.3 Barra con dos grietas rectangulares en el borde

Aprovechando la discretización del problema anterior se resuelve una barra ( $2w_1 \times 2w_2 \times 2h$ ), provocando una situación de deformación plana, que contiene dos grietas rectangulares en los bordes libres,  $a=0.5w_1$ , figura (5.25). Debido a la simetría del problema podremos utilizar la discretización anterior pero con distintas condiciones de contorno, figura (5.21.b). El material tiene  $\nu=0.25$ .

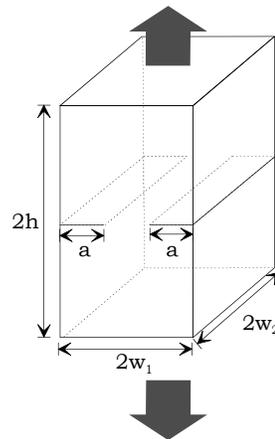


Figura 5.25 Barra con dos grietas de borde

Los resultados se han normalizado con la solución estática,

$$K_I^0 = 1.124 p_0 \sqrt{\pi a} \quad (5.41)$$

(Brown y Srawley, 1966).

Se ha utilizado  $\beta_s=0.7$  ( $\beta_p=1.2$ ) y se determina el  $K_I(t)$  a partir de los desplazamientos o las tensiones, elementos a un cuarto o a un cuarto singulares respectivamente, figura (5.26). Ambos métodos generan resultados muy parecidos por lo que se puede concluir que el  $\beta_s$  escogido es correcto. El factor de intensidad de tensiones alcanza un máximo local en  $c_p t/h \cong 2.2$ ,  $K_I(t)/K_I^0 = 2.1$ , y luego otro máximo en  $c_p t/h \cong 7.75$ ,  $K_I(t)/K_I^0 = 2.3$ . El  $K_I(t)$  llega a ser 2.3 veces el valor estático y esto ocurre cuando llegan las ondas desde los extremos de la barra y las caras laterales. El

FIT dinámico normalizado muestra un comportamiento similar al de la barra con la grieta circular.

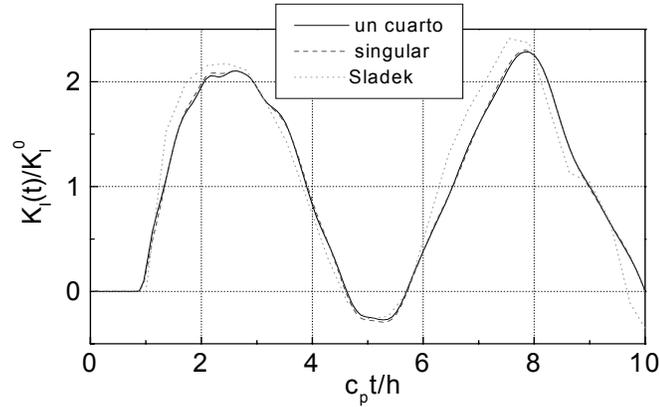


Figura 5.26 Barra con dos grietas de borde en deformación plana,  $\beta_s=0.7$  ( $\beta_p=1.2$ )

Los resultados son comparados con los obtenidos por Balas, Sladek y Sladek (1989), usando el MEC en dos dimensiones en deformación plana. El problema es resuelto en el dominio de la transformada de Laplace, invirtiendo con el algoritmo de Durbin, y el  $K_I(t)$  obtenido a partir de los desplazamientos de apertura de la grieta, figura (5.26). Los resultados guardan gran similitud, los valores máximos alcanzados por  $K_I(t)$  son similares y se consiguen en aproximadamente los mismos instantes de tiempo.

#### 5.6.4 Barra con una grieta centrada

Resolveremos el problema de una barra ( $2w_1 \times 2w_2 \times 2h$ ), que contiene una grieta rectangular centrada, figura (5.27.a), provocando una situación de deformación plana. La geometría del problema es:  $w_1=10\text{mm}$ ,  $w_2=10\text{mm}$ ,  $h=20\text{mm}$  y el largo de la grieta,  $a=2.4\text{mm}$ . Las propiedades del material son  $\nu=0.3$ ,  $\rho=5000\text{ kg/m}^3$  y  $\mu=76923\text{ MPa}$ . Debido a las simetrías de la geometría y las cargas sólo es necesario modelar una cuarta parte del problema, figura (5.27.b). Los labios de la grieta se ha modelado con 4 elementos a un cuarto y 4 elementos normales.

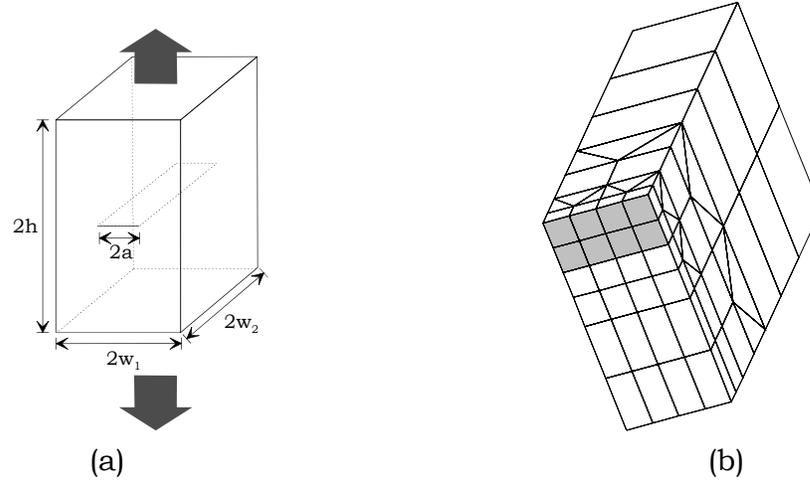


Figura 5.27 Barra con una grieta centrada, (a) descripción del problema, (b) discretización, los elementos en gris representan los labios de la grieta

Los resultados son obtenidos con  $\beta_p=2$  ( $\beta_s=1.1$ ) y se determina el  $K_I(t)$  a partir de los desplazamientos o las tracciones ficticias, elementos a un cuarto o a un cuarto singulares respectivamente, figura (5.28). Ambos métodos generan resultados muy parecidos por lo que se puede concluir que el  $\beta_s$  escogido es correcto. El factor de intensidad de tensiones alcanza un máximo en  $c_p t/h \approx 2.5$ ,  $K_I(t)/K_I^0 = 2.5$ . Esto ocurre cuando llegan las ondas desde los extremos de la barra y las caras laterales. Los resultados son muy parecidos a los obtenidos en el caso de la barra con la grieta circular centrada.

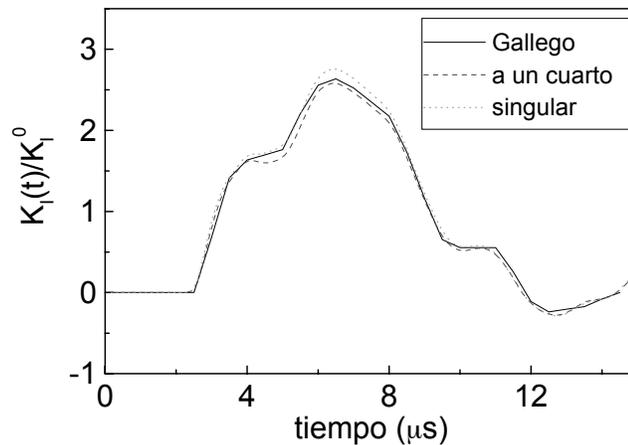


Figura 5.28 Barra con una grieta centrada en deformación plana  $\beta_p=2$  ( $\beta_s=1.1$ ), FIT dinámico a partir de las tracciones ficticias en el elemento a un cuarto singular y los desplazamientos en el elemento a un cuarto.

El FIT dinámico obtenido de los desplazamientos y de las tracciones ficticias se comparan con el obtenido por Gallego y Domínguez (1989) utilizando el mismo método del presente trabajo, el MEC en el dominio del tiempo y el elemento singular a un cuarto, pero en dos dimensiones, figura (5.28). También se compara con el obtenido por Chen (1975), empleando el Método de las Diferencias Finitas con una malla de 5000 puntos, y resolviendo el problema con un modelo bidimensional en deformación plana, figura (5.29)

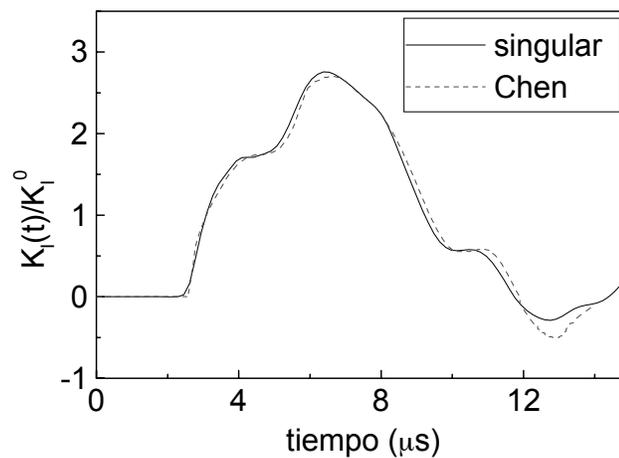


Figura 5.29 Barra con una grieta centrada en deformación plana  $\beta_p=2$  ( $\beta_s=1.1$ ), FIT dinámico a partir de las tracciones ficticias en el elemento a un cuarto singular

### 5.6.5 Grieta circular en un medio infinito

Otro tipo de problemas de especial interés es el de grietas muy pequeñas con respecto al medio, el cual se pueden considerar infinito. Se resolverán dos problemas de geometría sencilla, la grieta circular y la rectangular. Comenzaremos por la más simple, el problema de una grieta circular en un medio infinito, figura (5.30). La discretización del medio infinito se representada de forma finita, el medio es lo suficientemente grande para que la ondas longitudinales de los extremos no lleguen a la grieta durante el lapso de tiempo de interés. El radio de la grieta es  $a=3\text{mm}$ . Las propiedades del material son  $\nu=0.25$ ,  $\rho=1000\text{ kg/m}^3$  y  $\mu=40\text{ MPa}$ . Los labios de la grieta se ha modelado con un total de 48 elementos de los cuales 16 son elementos a un cuarto.

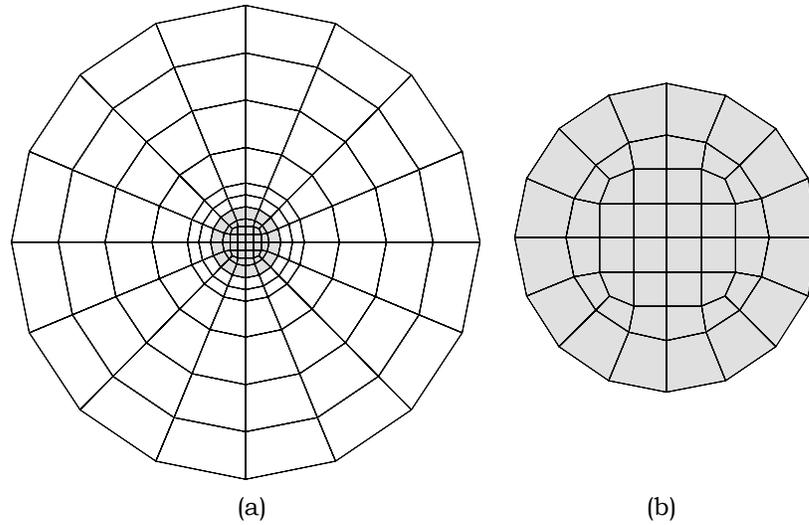


Figura 5.30 Medio infinito con una grieta circular, (a) discretización, (b) detalle de los labios de la grieta

Se ha utilizado  $\beta_s=0.7$  ( $\beta_p=1.2$ ) y se determina el  $K_I(t)$  a partir de los desplazamientos o las tracciones ficticias, elementos a un cuarto o a un cuarto singulares respectivamente, figura (5.31). Ambos métodos generan resultados parecidos por lo que se puede concluir que la combinación de discretización espacial y temporal es correcta.

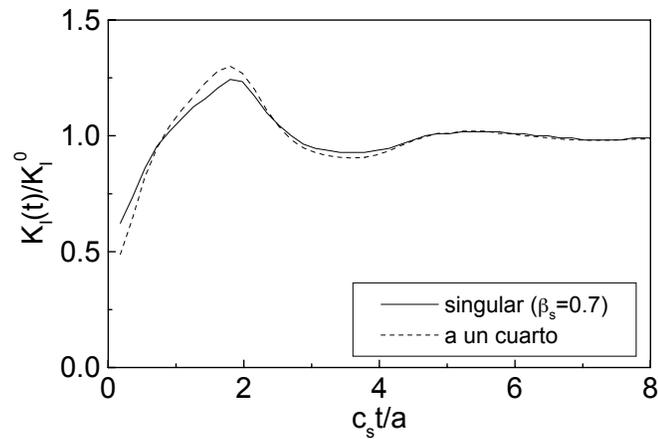


Figura 5.31 Medio infinito con una grieta circular, FIT dinámico calculado a partir de las tracciones ficticias en el elemento a un cuarto singular y los desplazamientos en el elemento a un cuarto.

Los resultados obtenidos con  $\beta_s=0.7$  ( $\beta_p=1.2$ ), son comparados con los de Hirose y Achenbach (1989), figura (5.32). Éstos utilizan el Método de Integrales de Contorno en el dominio del tiempo con una solución particular para el problema, donde se discretiza en el espacio con elementos de contorno y en el tiempo con el método paso a paso. También se compara con los resultados de Zhang y Gross(1998) utilizado también el Método de Integrales de Contorno en el dominio del tiempo. Las integrales de contorno se obtienen de la conservación de la integral elastodinámica, similar a la integral J en elastoestática. Éstos definen para dos estados, el primer estado es el campo refractado de la grieta, desconocido, y el segundo estado la solución fundamental debida a un impulso unitario. De lo anterior se obtienen una ecuación integral de contorno para que no es hipersingular. Las variables desconocidas son el desplazamiento de apertura de la grieta,  $\Delta u$ , y su segunda derivada con respecto al tiempo,  $\Delta \ddot{u}$ . Éstos emplean elementos constantes para los elementos alejados del borde de la grieta, y elementos con funciones de forma  $(r)^{1/2}$  para el borde de la grieta. El  $K_I(t)$  es obtenido directamente de la variable  $\Delta u$ . En el presente trabajo el  $K_I(t)$  calculado a partir de los desplazamientos, elementos a un cuarto, muestra gran concordancia con los obtenidos por los otros autores, figura (5.32). En cambio el  $K_I(t)$  calculado a partir de las tracciones en los primeros pasos calculados difiere de los resultados obtenidos por otros métodos, pero rápidamente tiende a la misma solución.

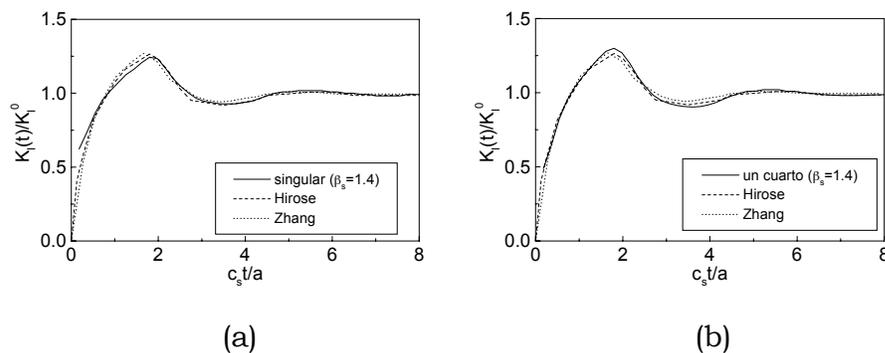


Figura 5.32 Medio infinito con una grieta circular, FIT dinámico calculado a partir de (a) las tracciones ficticias en el elemento a un cuarto singular, (b) los desplazamientos en el elemento a un cuarto.

### 5.6.6 Grieta rectangular en un medio infinito sometida a una carga normal

El siguiente problema es el de una grieta rectangular ( $2a \times 2b$ ) en un medio infinito, figura (5.33.a). Los labios de la grieta se someten a una tracción normal al plano de la grieta. El medio tiene impedidos los desplazamientos en la dirección de la carga. Las propiedades del material son  $\nu=0.2$ ,  $\rho=1000 \text{ kg/m}^3$  y  $\mu=40 \text{ MPa}$ .

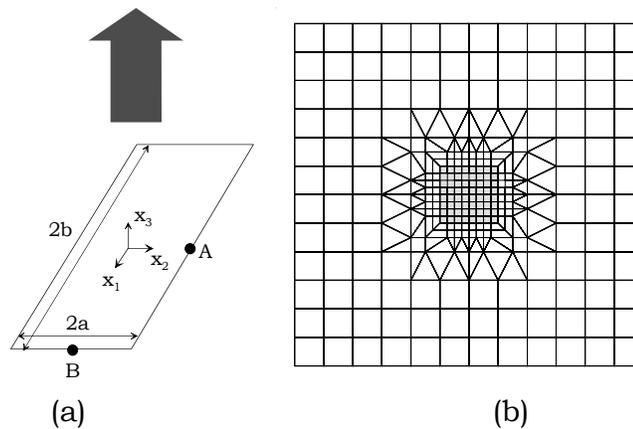
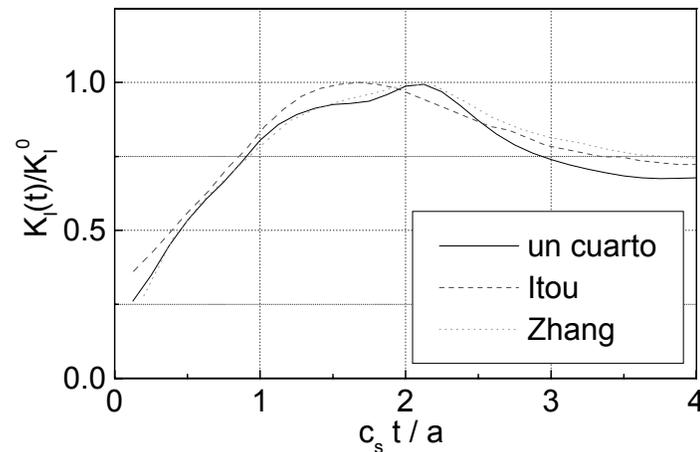


Figura 5.33 Medio infinito con una grieta rectangular, (a) descripción del problema, (b) discretización para la grieta cuadrada ( $a=b$ ), los elementos en gris representan los labios de la grieta.

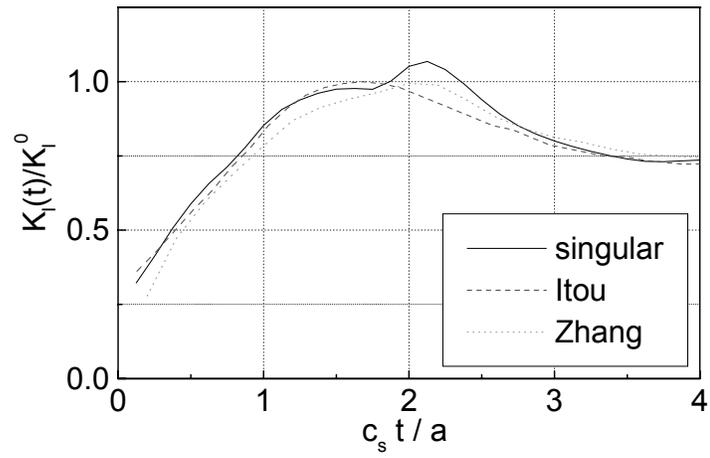
Primero se discuten los resultados obtenidos para una grieta cuadrada ( $a=b$ ). La discretización utilizada se muestra en la figura (5.33.b). Los elementos de las esquinas de la grieta no modelan la singularidad ( $1/\sqrt{r}$ ) ya que no cumplen con la descripción geométrica del elemento singular a un cuarto, los lados del elemento no son perpendiculares al vértice de la grieta. Así que es posible que la singularidad de las esquinas no haya sido eliminada. Este error no es de gran importancia porque la grieta tiene los valores máximos del  $K_I(t)$  en el centro de los bordes, puntos A y B, que están modelados correctamente. Se han usado  $\beta_s=0.8$  ( $\beta_p=1.3$ ). Los FIT son comparados con los obtenidos por Itou (1981) resolviendo ecuaciones integrales duales en el dominio la transformada de Laplace. Las ecuaciones se resuelven mediante el método de expansión en serie donde los desplazamientos de la grieta en el dominio de Laplace se expanden en dos series que resultan del producto de funciones trigonométricas con el

polinomio de Jacobi. El método Schmidt genera los coeficientes de dichas series y se integra numéricamente. El FIT se define en el dominio de Laplace y se invierte numéricamente para obtener el  $K_I(t)$ , figura (5.34). En la figura también se muestran los resultados obtenidos por Zhang y Gross (1998). Éstos extraen el  $K_I(t)$  de la apertura de los labios de la grieta usando el Método Integrales de Contorno, descrito en el problema anterior, en el dominio del tiempo, con elementos en el vértice de la grieta cuyas funciones de forma son particulares para el problema. Los resultados obtenidos en esta tesis presentan una discrepancia con el  $K_I(t)$  conseguido por Itou. Itou no representa el máximo debido a las ondas que llegan del otro extremo de la grieta, las ondas de Rayleigh. La velocidad de las ondas de Rayleigh en este problema es  $c_r=0.9c_s$ , así que llegan en el tiempo normalizado  $tc_s/a=2.22$ . Los resultados obtenidos a partir de los elementos a un cuarto se asemejan a los conseguidos por Zhang et al., cuyos resultados tienen su máximo en el mismo punto.

De forma ilustrativa, también hemos resuelto el problema de una grieta rectangular sometida a una tracción perpendicular al plano de la grieta. La geometría de la grieta es  $b=2a$ . La discretización utilizada se muestra en la figura (5.35).



(a)



(b)

Figura 5.34 Medio infinito con una grieta cuadrada ( $a=b$ ) (a) factor de intensidad de tensiones dinámico a partir de los desplazamientos en el elemento a un cuarto, (b) de las tracciones en el elemento singular a un cuarto, con  $\beta_s=1.0$  ( $\beta_p=1.3$ )

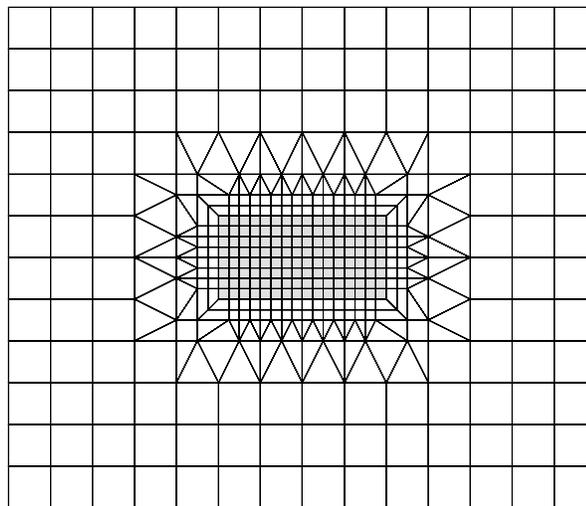


Figura 5.35 Discretización para la grieta rectangular ( $b=2a$ )

Hemos utilizado  $\beta_s=0.8$  ( $\beta_p=1.3$ ). Los resultados se comparan con los obtenidos por Tau y Lu (1971) al resolver el problema bidimensional de una grieta en un medio infinito aplicando la transformada de Laplace en el tiempo y la de Fourier en el espacio, ésta conduce a un par de ecuaciones integrales acopladas que se resuelven de forma iterativa, figura (5.36). Los resultados obtenidos en el problema bidimensional guardan una gran similitud con los obtenidos en el presente trabajo. En el caso bidimensional, en el instante  $tc_s/a=2.2$  existe un pico debido a que se comienzan a recibir las ondas del otro extremo de la grieta, mientras que en el tridimensional comienzan a llegar las ondas del lado opuesto paulatinamente alrededor de mismo instante.

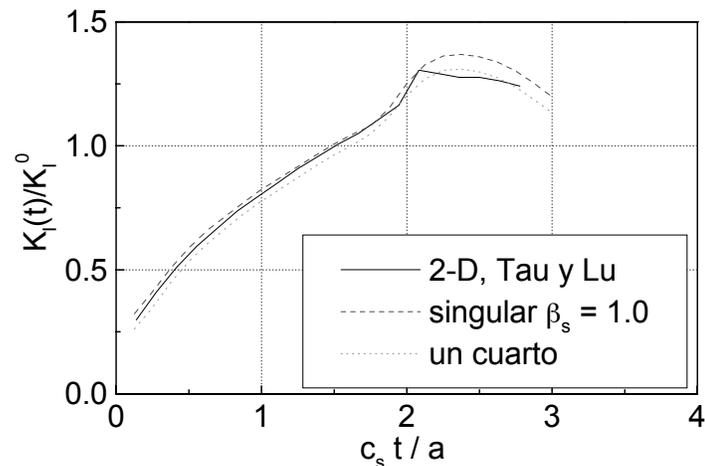


Figura 5.36 Medio infinito con una grieta rectangular ( $b=2a$ ), factor de intensidad de tensiones para el punto A obtenido a partir de los elementos a un cuarto y a un cuarto singulares

### 5.6.7 Grieta rectangular en un medio infinito sometida a un cortante

Otro problema de especial interés es el de una grieta rectangular ( $2a \times 2b$ ) en un medio infinito, con los labios de la grieta sometidos a un cortante paralelo al plano de la grieta, figura (5.37). El medio tiene impedidos los desplazamientos en la dirección de la carga. Las propiedades del material

son las mismas del problema anterior. Aquí estarán presentes el modo II y III de fractura y los resultados estarán normalizados con

$$\begin{aligned} K_{II}^0 &= p_0 \sqrt{\pi b} \\ K_{III}^0 &= p_0 \sqrt{\pi a} \end{aligned} \quad (5.41)$$

El  $K_{II}(t)$  se obtendrá para el punto  $B$  y el  $K_{III}(t)$  en el  $A$ , figura (5.37). Se emplearán las discretizaciones de las figuras (5.33.b) y (5.35) y  $\beta_s=0.8$  ( $\beta_p=1.3$ ).

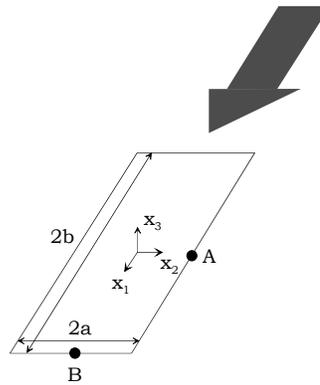


Figura 5.37 Medio infinito con una grieta rectangular sometida a un cortante

Primero se representan los FIT dinámicos, modos I y II, obtenidos para la grieta cuadrada,  $a/b=1$ , figura (5.38). Estos son comparados con los de Itou (1991) y los de Zhang y Gross (1998). Itou resuelve ecuaciones integrales duales en el dominio la transformada de Laplace, los desplazamientos de la grieta en el dominio de Laplace se expanden en dos series que se integran numéricamente. El FIT se define en el dominio de Laplace y se invierte numéricamente para obtener el  $K_I(t)$ . Zhang et al. extraen el  $K_I(t)$  de la apertura de los labios de la grieta usando el Método Integrales de Contorno, descrito en el problema anterior, en el dominio del tiempo, con elementos en el vértice de la grieta cuyas funciones de forma son particulares para el problema. Los valores, cuando se toman los obtenidos de las tracciones ficticias o elemento singular a un cuarto, son iguales a los de Zhang et al. hasta  $tc_s/\alpha=1.1$  para  $K_{II}(t)$ . En todos los métodos los valores de  $K_{II}(t)$  ascienden hasta un máximo aproximadamente  $K_{II}(t)/K_{II}^0=1$ . Los valores de  $K_{III}(t)$  conseguidos en este trabajo son muy similares a los obtenidos por los otros autores.

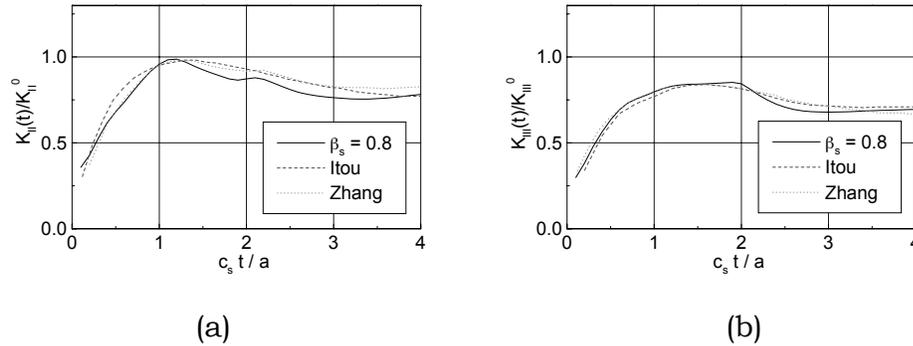


Figura 5.38 Medio infinito con una grieta rectangular sometida a un cortante, FIT dinámico en (a) Modo I y (b) Modo II

El FIT dinámico obtenido para la grieta rectangular, con  $a/b=2$  ó  $a/b=0.5$ , figura (5.39) muestra gran concordancia con el comportamiento conseguido con la grieta cuadrada. El  $K_{II}(t)$ , en el caso  $a/b=2$ , alcanza un máximo en  $tc_s/a=2.2$  que corresponde al instante en el que llegan, casi a la vez, las ondas del extremo opuesto de la grieta. En el caso  $a/b=0.5$  no se puede distinguir este instante ya que se está recibiendo la influencia de las caras laterales de la grieta desde el comienzo. En todos los métodos los valores de  $K_{II}(t)$  ascienden hasta un máximo para luego descender hacia el valor estático. El  $K_{III}(t)$ , en el caso  $b/a=2$ , también alcanza un máximo en  $tc_s/a=2.2$  que corresponde al instante en el que llegan, casi a la vez, las ondas del extremo opuesto de la grieta y en  $a/b=0.5$  no se puede distinguir este instante. En todas las figuras se muestran los resultados de Itou (1991) como referencia aunque los resultados muestran concordancia con los obtenidos en esta tesis sólo hasta  $c_s t/a=2$  para  $K_{III}(t)$  y  $c_s t/b=1$  para  $K_{II}(t)$ . Itou resuelve una vez más el problema mediante ecuaciones integrales duales en el dominio la transformada de Laplace, donde los desplazamientos de la grieta en el dominio de Laplace se expanden en dos series que se integran numéricamente. El FIT se define en el domino de Laplace y se invierte numéricamente para obtener el  $K_I(t)$ .

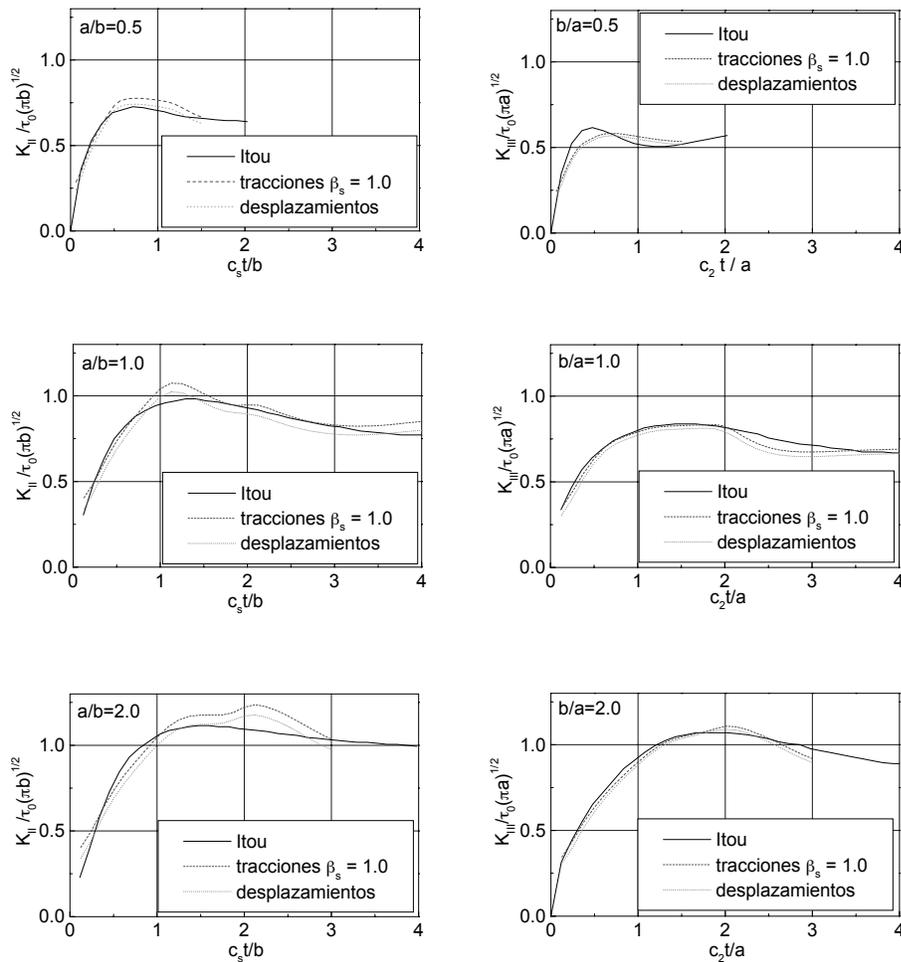


Figura 5.39 Medio infinito con una grieta rectangular sometida a un cortante

### 5.6.8 Barra que contiene una grieta rectangular en modo mixto

Un prisma ( $h \times w_1 \times w_2$ ) que contiene una grieta rectangular inclinada está sometido a una carga normal en uno de sus extremos y empotrado en el opuesto, figura (5.40.a). Todas las caras laterales tienen restringidos los desplazamientos normales. La geometría del problema es  $h=44\text{mm}$ ,  $h_a=6\text{mm}$ ,  $w_1=32\text{mm}$ ,  $w_2=32\text{mm}$ . El largo de la grieta es  $a=16\sqrt{2}\text{mm}$ , y hace un ángulo de  $45^\circ$  con el borde. Las propiedades del material son  $\nu=0.286$ ,  $\mu=2.94\text{ GPa}$  y  $\rho=2450\text{ kg/m}^3$ . Aquí no existen simetrías y es necesario modelar todo el problema, figura (5.40.b). Están presentes los modos I y II de fractura.

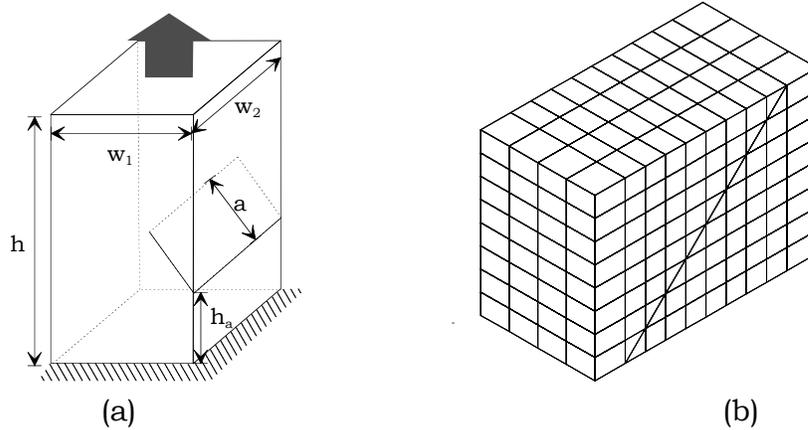


Figura 5.40 Grieta en modo mixto, (a) descripción del problema, (b) discretización

Los  $K_I(t)$  y  $K_{II}(t)$  normalizados, figura (5.41), tienen comportamientos similares a los de ejemplos anteriores. Se normalizaron los FIT con la ecuación (5.38) y se empleó  $\beta_s=0.8$  ( $\beta_p=1.5$ ). Los valores crecen hasta alcanzar un máximo en  $c_p t/h \approx 3.3$ , luego decrecen hasta hacerse iguales a cero en  $c_p t/h \approx 6.4$  y el comportamiento se repite. Los FIT en modo I y II que se muestran fueron determinados de los desplazamientos en el elemento a un cuarto.

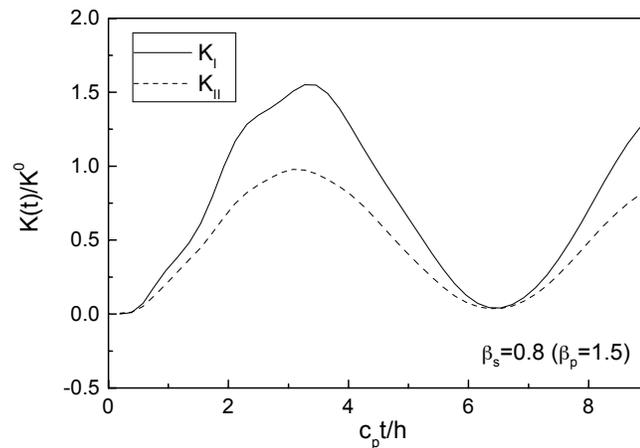
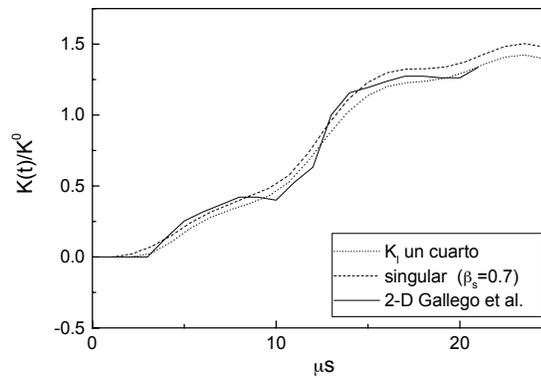


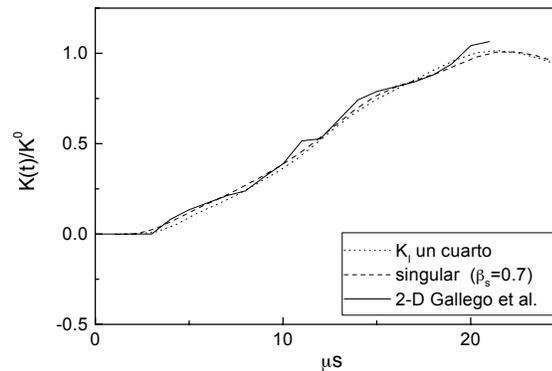
Figura 5.41 Grieta en modo mixto

En las siguientes figuras se muestran los  $K_I(t)$  y  $K_{II}(t)$  obtenidos a partir de las tracciones en el elemento singular y de los desplazamientos en el elemento a un cuarto, empleando  $\beta_s=0.7$  ( $\beta_p=1.2$ ). Los valores corresponden a un lapso de tiempo  $0 < c_p t/h < 3.6$ . Se representan en función del tiempo a objeto de comparar con los resultados de otros autores. Ambos métodos

generan prácticamente los mismos valores, indicando que la combinación de discretización temporal y espacial es correcta. Los valores del  $K_I(t)$  y  $K_{II}(t)$  se comparan con los determinados por Gallego y Domínguez (1991) al resolver mediante el MEC el problema bidimensional directamente en el dominio del tiempo, éstos también dividen el problema en subregiones como en esta tesis, figura (5.42). Los  $K_I(t)$  y  $K_{II}(t)$  que se muestran son los obtenidos por Gallego et al. de las tracciones en el elemento singular. Los resultados del presente trabajo son más suaves en parte debido a que se utiliza el método de la velocidad constante para estabilizar los resultados (Capítulo 4).



(a)



(b)

Figura 5.42 Grieta en modo mixto, (a) modo I, (b) modo II

# **Capítulo 6**

## **Conclusiones y Desarrollos Futuros**

### **6.1 Conclusiones**

En esta tesis se ha empleado por primera vez con éxito el Método de los Elementos de Contorno en el dominio del tiempo para resolver problemas tridimensionales de propagación de ondas en medios que pueden contener fisuras. El método ha demostrado su efectividad en representar grandes concentraciones de tensiones, como es el caso de las grietas. En el desarrollo de la tesis fue necesario establecer un nuevo método para estabilizar de forma eficiente los resultados, ya que en el problema elástico tridimensional surgen inestabilidades para ciertas combinaciones de discretización temporal y espacial.

Aportaciones principales:

- Se ha desarrollado e implementado un método para definir mejor el frente de la onda durante la integración numérica, en el que se representan los elementos tanto cuadriláteros como triangulares mediante subdivisiones. Éstas últimas mejoran la precisión y

exactitud de los resultados significativamente frente a emplear el elemento sin subdividir.

- A partir de las subdivisiones, ha sido posible eliminar la singularidad ( $1/r^2$ ) que aparece en  $\hat{H}^{ii}$  cuando  $r \rightarrow 0$ , en el instante  $t=0$ . En esta tesis el término libre de la ecuación de contorno,  $c_{ik}^i$ , se determina resolviendo el problema de desplazamiento de sólido rígido y calculando la diferencia entre el valor estático y el que se está evaluando,  $\hat{H}_{dif}$  (Brebbia y Domínguez, 1989). La singularidad en el problema estático es idéntica a la del dinámico justo en la subdivisión que contiene el punto de colocación. En dicha subdivisión, siempre y cuando el frente de la onda no corte la subdivisión, la solución del problema dinámico equivale a la que se obtiene para un  $\Delta t$  infinitamente grande, o sea la solución del problema estático. Por lo tanto la aportación a  $\hat{H}_{dif}$  de dicha subdivisión vale cero.
- Se han desarrollado dos métodos para estabilizar la solución, el método de la velocidad constante y el de la aceleración constante, que permiten obtener resultados precisos y estables para valores de  $\beta$  inferiores a 0.6. Se han conseguido buenos resultados a partir de  $\beta=0.3$  en el problema escalar y  $\beta_s=0.3$  en el problema elástico.
- Se ha demostrado la precisión y efectividad del MEC junto al elemento de contorno singular a un cuarto (Ariza, Sáez y Domínguez, 1997) para resolver problemas de Fractura Dinámica en el dominio del tiempo. Dichos elementos deben ser subdivididos a igual que los elementos normales para representar correctamente el frente de la onda. Se ha encontrado que el valor óptimo del parámetro  $\beta$  en los elementos a un cuarto y singulares a un cuarto está entre  $0.8 \leq \beta_s \leq 1.2$ .

Respecto al análisis con el MEC de problemas de Fractura Dinámica se ha demostrado la adecuación y versatilidad del método para este tipo de aplicaciones resolviendo una serie de problemas muy diversos, de dominios finitos e infinitos, en modos puros o mixtos, y bajo diversas condiciones de contorno. Para el cálculo del FIT dinámico se ha

comprobado que el procedimiento basado en la tensión ficticia del nodo del elemento singular a un cuarto y el obtenido a partir de los desplazamientos de los labios de la grieta generan prácticamente los mismos resultados cuando se emplea una buena combinación de la discretización temporal y espacial. El hecho de emplear dos procedimientos para el cálculo de los FIT en cada problema ha permitido emplear la congruencia entre ambos como factor de evaluación de la fiabilidad de los resultados.

## **6.2 Desarrollos futuros**

Con la herramienta desarrollada en la presente tesis doctoral pueden abordarse problemas de interés que aún no están resueltos en medios finitos e infinitos fisurados. Es posible la inmediata aplicación a problemas en los que el dominio está compuesto por materiales con distintas propiedades mecánicas, por ejemplo materiales multicapa. También es posible resolver problemas en los que la carga aplicada tiene distintos tipos de variaciones en el tiempo.

Entre los futuros desarrollos podemos citar algunos de los más relevantes. Uno es poder analizar grietas con geometrías complicadas en las cuales el elemento singular a un cuarto cuadrilátero no es suficiente para modelar el borde de la grieta. Para ello es necesario desarrollar elementos triangulares con funciones de forma singulares que en conjunto con los elementos cuadriláteros a un cuarto singulares permitan representar diversas geometrías.

Otro posible desarrollo es estudiar la propagación de grietas en problemas tridimensionales en el dominio del tiempo, extendiendo así el trabajo realizado en dos dimensiones en la tesis doctoral de Gallego (1990). Para ello es preciso desarrollar simultáneamente un método de remallado automático en tres dimensiones.

Un problema interesante, aún sin resolver directamente en el tiempo, es el de ondas propagándose en sistemas tridimensionales compuestos por subregiones de diversos tipos: medios elásticos, escalares, porosos, etc.

Es interesante el estudio y desarrollo de formulaciones del MEC para representar ondas propagándose en medios anisótropos que puedan contener fisuras, extendiendo al dominio del tiempo el trabajo de la tesis doctoral de Sáez (1997) en el dominio de la frecuencia.

# Apéndice A

## Evaluación de las Integrales en el Tiempo

En este apéndice discutiremos la evaluación de las integrales en el tiempo dentro de cada paso de tiempo,

$$U_{lk}^{nm} = \int_{\Delta t_m} u_{lk}^* \mu^m d\tau$$

$$P_{lk}^{nm} = \int_{\Delta t_m} p_{lk}^* \eta^m d\tau$$

Para determinar los valores de  $U_{lk}^{nm}$  y  $P_{lk}^{nm}$  hemos escogido las funciones de interpolación temporal de tal manera que,

$$\begin{aligned} \mu^m(\tau) &= 1 \text{ para } \tau_{m-1} \leq \tau \leq \tau_m \\ \mu^m(\tau) &= 0 \text{ para } \tau < \tau_{m-1} \text{ ó } \tau > \tau_m \end{aligned} \tag{A.1}$$

y  $\eta^m(\tau)$  tiene la forma,

$$u_k(\tau) = \frac{1}{\Delta t} [(\tau_{m+1} - \tau) \begin{matrix} u_k^{m-1} \\ u_k^m \end{matrix}] \tag{A.2}$$

Tendremos que resolver los cinco tipos de integrales, el primer tipo es

$$\begin{aligned}
 I_1 &= \int_{\tau_m}^{\tau_{m+1}} (t_n - \tau) \left\{ H \left[ (t_n - \tau) - \frac{r}{c_1} \right] - H \left[ (t_n - \tau) - \frac{r}{c_2} \right] \right\} d\tau \\
 &= \int_{t_n - \tau_{m+1}}^{t_n - \tau_m} k \left\{ H \left[ k - \frac{r}{c_1} \right] - H \left[ k - \frac{r}{c_2} \right] \right\} dk
 \end{aligned} \tag{A.3}$$

donde  $k = t_n - \tau$

$$I_1 = \frac{1}{2} k^2 H \left[ (t_n - \tau_m) - \frac{r}{c_1} \right] \Bigg|_{\frac{r}{c_1}}^{t_n - \tau_m} - \frac{1}{2} k^2 H \left[ (t_n - \tau_m) - \frac{r}{c_2} \right] \Bigg|_{\frac{r}{c_2}}^{t_n - \tau_m} \tag{A.4}$$

Se pueden obtener cuatro resultados dependiendo del instante de tiempo que se esté evaluando,

1) si  $(t_n - \tau_{m+1}) \leq r/c_1 \leq (t_n - \tau_m)$  y  $(t_n - \tau_m) < r/c_2$ , figura (3.1.a),

$$I_1 = \frac{1}{2} (t_n - \tau_m)^2 - \frac{1}{2} \left( \frac{r}{c_1} \right)^2 \tag{A.5}$$

2) si  $(t_n - \tau_{m+1}) \leq r/c_1 \leq (t_n - \tau_m)$  y  $(t_n - \tau_{m+1}) \leq r/c_2 \leq (t_n - \tau_m)$ , figura (3.1.b),

$$I_1 = \frac{1}{2} \left( \frac{r}{c_2} \right)^2 - \frac{1}{2} \left( \frac{r}{c_1} \right)^2 \tag{A.6}$$

3) si  $r/c_1 < (t_n - \tau_{m+1})$  y  $(t_n - \tau_{m+1}) \leq r/c_2 \leq (t_n - \tau_m)$ , figura (3.1.c),

$$I_1 = \frac{1}{2} \left( \frac{r}{c_2} \right)^2 - \frac{1}{2} (t_n - \tau_{m+1})^2 \tag{A.7}$$

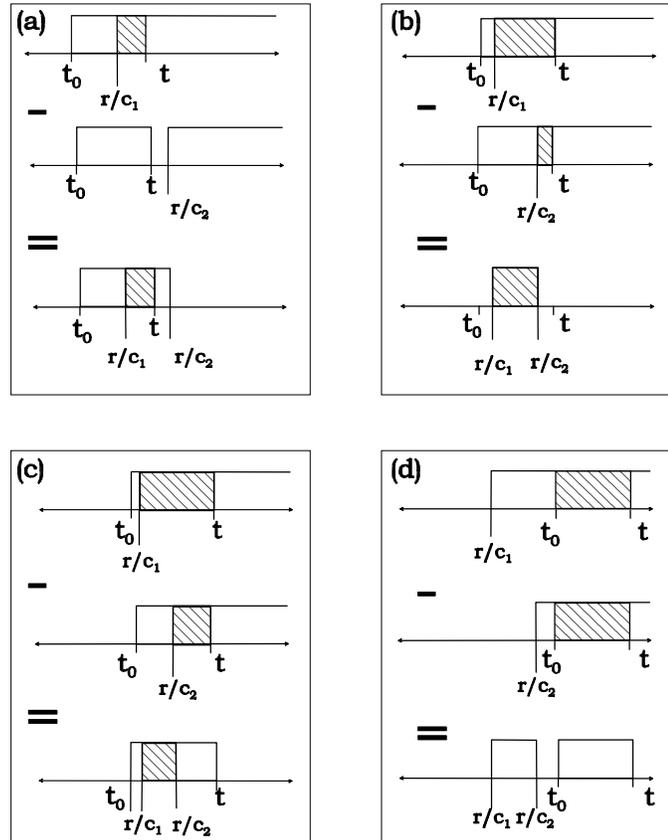


Figura 3.1. Los límites de integración cuando: a) ha llegado la onda longitudinal, b) han llegado las ondas longitudinal y transversal, c) queda la onda transversal, d) han pasado ambas ondas,  $t_0 = t_n - \tau_{m+1}$  y  $t_n = t - \tau_m$

4) si  $r/c_2 < (t_n - \tau_{m+1})$  ó  $r/c_1 > (t_n - \tau_m)$ , figura (3.1.d),

$$I_1 = 0 \quad (\text{A.8})$$

El segundo tipo de integral es

$$I_2 = \int_{\tau_m}^{\tau_{m+1}} \delta \left[ (t_n - \tau) - \frac{r}{c_1} \right] d\tau = \int_{t_n - \tau_{m+1}}^{t_n - \tau_m} \delta \left[ k - \frac{r}{c_1} \right] dk \quad (\text{A.9})$$

y para esta integral se pueden obtener dos resultados,

1) si  $(t_n - \tau_{m+1}) \leq r/c_1 \leq (t_n - \tau_m)$

$$I_2 = 1 \quad (\text{A.10})$$

2) si  $r/c_1 > (t_n - \tau_m)$  ó  $r/c_1 < (t_n - \tau_{m+1})$

$$I_2 = 0 \quad (\text{A.11})$$

El tercer tipo de integral es

$$\begin{aligned} I_3 &= \int_{\tau_m}^{\tau_{m+1}} (t_n - \tau)(\tau_{m+1} - \tau) \left\{ \text{H} \left[ (t_n - \tau) - \frac{r}{c_1} \right] - \text{H} \left[ (t_n - \tau) - \frac{r}{c_2} \right] \right\} d\tau \\ &= \int_{t_n - \tau_{m+1}}^{t_n - \tau_m} \left[ k^2 - k(\tau_{m+1} - \tau) \right] \left\{ \text{H} \left[ k - \frac{r}{c_1} \right] - \text{H} \left[ k - \frac{r}{c_2} \right] \right\} dk \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

$$\begin{aligned} I_3 &= \left[ \frac{1}{3} k^3 - \frac{1}{2} k^2 (t_n - \tau_{m+1}) \right] \text{H} \left[ (t_n - \tau_m) - \frac{r}{c_1} \right] \Bigg|_{\frac{r}{c_1}}^{t_n - \tau_m} \\ &\quad - \left[ \frac{1}{3} k^3 - \frac{1}{2} k^2 (t_n - \tau_{m+1}) \right] \text{H} \left[ (t_n - \tau_m) - \frac{r}{c_2} \right] \Bigg|_{\frac{r}{c_2}}^{t_n - \tau_m} \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

y se pueden obtener cuatro resultados,

1) si  $(t_n - \tau_{m+1}) \leq r/c_1 \leq (t_n - \tau_m)$  y  $(t_n - \tau_m) < r/c_2$ , figura (3.1.a),

$$\begin{aligned} I_3 &= \left[ \frac{1}{3} (t_n - \tau_m)^3 - \frac{1}{2} (t_n - \tau_m)^2 (t_n - \tau_{m+1}) \right] \\ &\quad - \left[ \frac{1}{3} \left( \frac{r}{c_1} \right)^3 - \frac{1}{2} \left( \frac{r}{c_1} \right)^2 (t_n - \tau_{m+1}) \right] \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

2) si  $(t_n - \tau_{m+1}) \leq r/c_1 \leq (t_n - \tau_m)$  y  $(t_n - \tau_{m+1}) \leq r/c_2 \leq (t_n - \tau_m)$ , figura (3.1.b),

$$I_3 = \left[ \frac{1}{3} \left( \frac{r}{c_2} \right)^3 - \frac{1}{2} \left( \frac{r}{c_2} \right)^2 (t_n - \tau_{m+1}) \right] - \left[ \frac{1}{3} \left( \frac{r}{c_1} \right)^3 - \frac{1}{2} \left( \frac{r}{c_1} \right)^2 (t_n - \tau_{m+1}) \right] \quad (\text{A.15})$$

3) si  $r/c_1 < (t_n - \tau_{m+1})$  y  $(t_n - \tau_{m+1}) \leq r/c_2 \leq (t_n - \tau_m)$ , figura (3.1.c),

$$I_3 = \frac{1}{3} \left( \frac{r}{c_2} \right)^3 - \frac{1}{2} \left( \frac{r}{c_2} \right)^2 (t_n - \tau_{m+1}) + \frac{1}{6} (t_n - \tau_{m+1})^3 \quad (\text{A.16})$$

4) si  $r/c_2 < (t_n - \tau_{m+1})$  ó  $r/c_1 > (t_n - \tau_m)$ , figura (3.1.d),

$$I_3 = 0 \quad (\text{A.17})$$

El cuarto tipo de integral es

$$I_4 = \int_{\tau_m}^{\tau_{m+1}} (\tau_{m+1} - \tau) \delta \left[ (t_n - \tau) - \frac{r}{c_2} \right] d\tau = \int_{t_n - \tau_{m+1}}^{t_n - \tau_m} [k - (t_n - \tau_{m+1})] \delta \left[ k - \frac{r}{c_2} \right] dk \quad (\text{A.18})$$

y se pueden obtener dos resultados,

1) si  $(t_n - \tau_{m+1}) \leq r/c_2 \leq (t_n - \tau_m)$

$$I_4 = \frac{r}{c_2} - (t_n - \tau_{m+1}) \quad (\text{A.19})$$

2) si  $r/c_1 > (t_n - \tau_m)$  ó  $r/c_1 < (t_n - \tau_{m+1})$

$$I_4 = 0 \quad (\text{A.20})$$

Y por último el quinto tipo de integral es,

$$I_5 = \int_{\tau_m}^{\tau_{m+1}} (\tau_{m+1} - \tau) \delta \left[ (t_n - \tau) - \frac{r}{c_1} \right] d\tau = \int_{t_n - \tau_{m+1}}^{t_n - \tau_m} [k - (t_n - \tau_{m+1})] \delta \left[ k - \frac{r}{c_1} \right] dk \quad (\text{A.21})$$

en este caso haciendo uso de la propiedad de la delta de Dirac,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^k \delta(x-a)}{\partial x} f(x) dx = (-1)^k \left[ \frac{\partial^k f(x)}{\partial x} \right]_{x=a} \quad (\text{A.22})$$

se obtendrán,

1) si  $(t_n - \tau_{m+1}) \leq r/c_1 \leq (t_n - \tau_m)$

$$I_5 = -1 \quad (\text{A.23})$$

2) si  $r/c_1 > (t_n - \tau_m)$  ó  $r/c_1 < (t_n - \tau_{m+1})$

$$I_5 = 0 \quad (\text{A.24})$$

## Bibliografía

- (1) Abascal R., Estudio de Problemas Dinámicos en Interacción Suelo-Estructura por el Método de los Elementos de Contorno, *Tesis Doctoral, Universidad de Sevilla*, 1984.
- (2) Abascal R. y Domínguez J., Dynamic behavior of strip footings on non-homogeneous viscoelastic soils, *Dynamic Soil-Structure Interaction*, D.E. Beskos, T. Krauthammer, I. Vardoulakis, eds. A.A.Balkema, Rotterdam, 1984, 25-35.
- (3) Achenbach, J. D., Wave Propagation in Elastic Solids, *Nort-Holland, Amsterdam*, 1973.
- (4) Antes H., A Boundary element procedure for transient wave propagation in two-dimensional isotropic elastic media, *Finite Elem. Anal. Des.*, 1985, Vol. 1, 313-322 .
- (5) Apsel, R. J., Dynamic Green's Function for Layered Media and Applications to Boundary-Value Problems, *PhD. Thesis, University of California*, 1979.
- (6) Ahmad, S. y Banerjee, P. K., Time-domain transient elastodynamic analysis of 3-D Solids by BEM, *Int. J. Num. Meth. Eng.*, 1988, Vol. 26, 1709-1728.
- (7) Aliabadi, M. H., Brebbia, C. A. y Parton, V. Z., Static and Dynamic Fracture Mechanics, *Computational Mechanics Publications, Southampton*, 1994.
- (8) Aliabadi, M. H. y Rooke, D. P., Numerical Fracture Mechanics, *Computational Mechanics Publications, Southampton y Kluwer Academic Press, Dordrecht*, 1991.

- 
- (9) Araújo F. C., Mansur W. J. y Nishikava, L. K., A linear  $\theta$  time-marching algorithm in 3D BEM formulation for elastodynamics, *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 1999, Vol. 23, 825-833.
  - (10) Ariza, M. P., Sáez, A. y Domínguez, J., A Singular element for three dimensional fracture mechanics analysis, *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 1997, Vol. 20, 275-285.
  - (11) Ariza, M. P. y Domínguez J., A single region BE formulation for 3-D dynamic fracture mechanics, *14<sup>th</sup> ASCE Engineering Mechanics Conference*, 2000.
  - (12) Balas, J., Sladek, J. y Sladek, V., Stress Analysis by Boundary Element Methods, *Studies in Applied Mechanics 23*, Elsevier, Amsterdam, 1989.
  - (13) Banaugh R. P. y Goldsmith, W., Diffraction of steady acoustic waves by surfaces of arbitrary shape, *J.Acoustics Soc. Am.*, Vol. 35, 1590-1601.
  - (14) Banerjee, P. K., Ahmad, S. y Manolis, G. D., Transient elastodynamic analysis of three-dimensional problems by boundary element method, *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 1986, Vol. 14, 933-949.
  - (15) Barra L. P. S. y Telles, J. C. F., A hyper-singular numerical Green's function generation for BEM applied to dynamic SIF problems, *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 1999, Vol. 23, 77-87.
  - (16) Beskos, D. E., Numerical method in dynamic fracture mechanics, *EUR 11300 EN, Commission of the European Communities*, Joint Research Centre, Ispra Establishment, 1987.
  - (17) Birgisson, B., Siebrits, E. y Peirce, A.P., Elastodynamic direct boundary element methods with enhanced numerical stability properties, *Int. J.Num. Meth. Eng.*, 1999, Vol. 46, 871-888.

- 
- (18) Blandford, G. E. Ingrassia, A. R., y Liggett, J. A., Two dimensional stress intensity factor computations using the boundary element method, *Int. J. Num. Meth. Eng.*, 1981, Vol. 17, 387-404.
- (19) Brebbia, C. A. y Domínguez, J., Boundary Elements: An Introductory Course, *CPM McGraw-Hill*, 1989.
- (20) Brown, W. F., y Srawley, J. E., ASTM STP 410, 1966.
- (21) Coda, H. B. y Venturini, W. S., Three dimensional transient BEM analysis, *Computers and Structures*, 1995, Vol. 56, 751-768.
- (22) Cole, D. M., Kosloff, D. D. y Minster, J. B., A numerical boundary integral equation method for elastodynamics I, *Bulletin Seismology Soc. Am.*, 1978, vol. 68, 1331-1357.
- (23) Cruse, T. A. y Rizzo, F. J., A direct formulation and numerical solution of the general transient elastodynamic problem, *J. Math. Anal. Appl.*, 1968, Vol. 22, 244-259.
- (24) Chen, B., Gross, D. y Zhang, C., Axisymmetric dynamic response of a penny-shaped crack to a pair of transient concentrated forces, *Int. J. Fract.*, 1996, Vol. 81, 77-88.
- (25) Chen, E.P. y Sih, G. C., Transient response of cracks to impact loads, *Mechanics of Fracture 4, Elastodynamic Crack Problems*, Ed. GG Sih, *Noordhoff International Publishing*, 1977, Leyden, The Netherlands, 1-58.
- (26) Chen, Y. M., Numerical computation of dynamic stress intensity factors by a Lagrangian finite-difference method (the HEMP code), *Eng. Fract. Mech.*, 1975, Vol. 7, 653-660.
- (27) Chen, Y. M. y Wilkins, M. L., Fracture analysis with a three dimensional, time dependent computer program, *Int. J. Fract.*, 1976, Vol. 12, 607-617.
- (28) Chirino, F. y Domínguez, J., Dynamic analysis of cracks using boundary element method, *Eng. Fract. Mech.*, 1989, Vol. 34, 1051-1061.

- 
- (29) Chirino, F., Gallego, R., Sáez, A. y Domínguez, J., A Comparative study of the three boundary element approaches to transient dynamic crack problems, *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 1994, Vol. 13, 11-19.
- (30) Domínguez, J., *Dynamic Stiffness of Rectangular Foundations*, Report No. R78-20, 1978, Department of Civil Engineering, MIT, Cambridge MA.
- (31) Domínguez, J., *Response of Embedded Foundations to Traveling Waves*, Report No. R78-24, 1978, Department of Civil Engineering, MIT, Cambridge MA.
- (32) Domínguez, J., Elastostatics, Boundary Element Methods in Structural Analysis, 1989, D. E. Beskos, ed. *American Society of Civil Engineers*.
- (33) Domínguez, J., Boundary Elements in Dynamics, *Computational Mechanics Publications, Southampton y Elsevier Applied Science, London*, 1993.
- (34) Domínguez, J. y Gallego, R., The time domain boundary element method for elastodynamic problems, *Math. Comp. Modelling*, 1991, Vol. 15, 119-129.
- (35) Domínguez, J. y Gallego, R., Time boundary element: a comparative study, *Proc. 11<sup>th</sup> Int. Conf. on Boundary Element Method*, Advances in Boundary Element, C. A. Brebbia, J. J. Connor, eds., CMP and Springer-Verlag, Southampton-Berlin, 1989, Vol. 3, 319-329.
- (36) Domínguez, J. y Gallego, R., Time domain boundary element method for dynamic stress intensity factor computations, *Int. J. Num. Meth. Eng.*, 1992, Vol. 33, 635-647.
- (37) Eringen, A. C. y Suhubi, E. S., Elastodynamics, Volume II, Linear Theory, *Academic Press, New York*, 1975.
- (38) Folias, E. S., On the three-dimensional theory of cracked plates, *J. Appl. Mech.*, 1975, Vol. 42, 663-674.

- 
- (39) Freund, L. B., Dynamic Fracture Mechanics, *Cambridge Monographs on Mechanics and Applied Mathematics*, Cambridge University Press, Cambridge, 1990.
- (40) Frangi A., Elastodynamics by BEM: a new direct formulation, *Int. J. Num. Meth. Eng.*, 1999, Vol. 45, 721-740.
- (41) Frangi, A. y Novati, G., On the numerical stability of time-domain elastodynamic analyses by BEM, *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 1999, Vol. 173, 403-417.
- (42) Fredholm, I., Sur une Classe d'Equations Fonctionnelles, *Acta Mathematica* (Suecia), 1903, Vol. 27, 365-390.
- (43) Gallego, R., Estudios Numéricos de Problemas de Fractura Elastodinámica, *Tesis Doctoral, Universidad de Sevilla*, 1990.
- (44) Gallego, R. y Domínguez, J., Dynamic crack propagation analysis by moving singular boundary elements, *J. Appl. Mech.*, 1992, Vol. 114.
- (45) Gallego, R. y Domínguez, J., Solving transient dynamic crack problems by the hypersingular boundary element method, *Fatigue and Fracture of Engineering Materials and Structures*, 1997, Vol. 20, 799-812.
- (46) Gaugming, L. y Youngyuan, Z., Application of boundary element method with singular and isoparametric elements in three dimensional crack problems, *Eng. Fract. Mech.*, 1988, Vol. 29, 97-106.
- (47) Hartranft, R. J. y Sih, G. C., The use of eigenfunction expansions in the general solution of three-dimensional crack problems, *J. Math. Mech.*, 1980, Vol. 15, 1427-1445.
- (48) Hirose, S. y Achenbach, J. D., Time-domain boundary element analysis of elastic wave interaction with a crack, *Int. J. Num. Meth. Eng.*, 1989, Vol. 28, 629-644.
- (49) Israil, A. S. y Dargush, G.F., Dynamic fracture mechanics studies by time-domain BEM, *Eng. Frac. Mech.*, 1991, Vol. 39, 315-328.

- 
- (50) Itou, S., Transient analysis of stress waves around two rectangular cracks under impact load, *Eng. Fract. Mech.*, 1981, Vol. 14, 685-695.
- (51) Itou, S., Dynamic stress intensity factors, *Eng. Fract. Mech.*, 1982, Vol. 14, 685-695.
- (52) Itou, S., Dynamic stress intensity factors around four rectangular cracks in an infinite elastic medium under impact load, *Eng. Fract. Mech.*, 1982, Vol. 16, 247-256.
- (53) Itou, S., Transient dynamic stresses around a rectangular crack under an impact shear load, *Eng. Fract. Mech.*, 1991, Vol. 39, 487-492.
- (54) Irwin, G. R., Analysis of stresses and strains near the end of a crack traversing a plate, *J. Appl. Mech.*, 1957, Vol. 24, 361-364.
- (55) Kassir, M. K. y Sih, G. C., Three dimensional crack problems, *Mechanics of Fracture 2*, Noordhoff, The Netherlands, 1975.
- (56) Karabalis, D. L. y Beskos, D. E., Earthquake response of 3-D foundations by the boundary element method, *Proc. of the 8<sup>th</sup> World Conf. on Earthquake Eng.*, 1984, San Francisco CA.
- (57) Karabalis, D. L. y Beskos, D. E., Time-domain transient elastodynamic analysis of 3-D solids by BEM, *Int. J. Num. Methods in Eng.*, 1990, Vol. 29, 211-215.
- (58) Lamb, H., On the propagation of tremors over the surface of an elastic solid, *Philosophical Transactions of the Royal Society of London A*, 1904, Vol. 203, 1-42.
- (59) Love, A. E., *A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity*, Dover, New York, 1944.
- (60) Luchi, M. L. y Rizzuti, S., Boundary elements for three-dimensional elastic crack analysis, *Int. J. Num. Meth. Eng.*, 1987, Vol. 24, 2253-2271.

- 
- (61) Maeso, O., Modelo para el Análisis Sísmico de Presas Bóveda Incluyendo los Efectos de Interacción Suelo-Agua-Estructura, *Tesis Doctoral, Universidad de Sevilla*, 1992.
- (62) Manolis, G. D., A comparative study of three boundary element method approaches to problems in elastodynamics, *Int. J. Num. Meth. Eng.*, 1983, Vol. 19, 73-91.
- (63) Mansur, W. J., A Time-Stepping Technique to Solve Wave Propagation Problems Using the Boundary Element Method, *Ph. D Thesis, University of Southampton, U.K.*, 1983.
- (64) Mansur, W. J. y Brebbia, C. A., Transient elastodynamics using a time-spteping technique, *Boundary Elements*, 1983, C. A. Brebbia, ed., Springer-Verlag, Berlin, 667-698.
- (65) Mansur, W. J., Carrer, J. A. M., y Siqueira, F. N., Time discontinuous linear traction approximation in time-domain BEM scalar wave propagation analysis, *Int. J. Num. Meth. Eng.*, 1998, Vol. 42, 667-683.
- (66) Martínez, J. y Domínguez, J., On the use of quarter-point boundary elements for stress intensity factor computations, *Int. J. Num. Meth. Eng.*, 1984, Vol. 20, 1941-1950.
- (67) Medina, F., Análisis de la Respuesta Sísmica de Presas Incluyendo Efectos de Interacción Suelo-Fluido-Estructura, *Tesis Doctoral, Universidad de Sevilla, Sevilla*, 1987.
- (68) Mykhas'kiv V., Time domain boundary element analysis in 3-D dynamic fracture mechanics, *Boundary Elements Communications* 7, 1996, 253-256.
- (69) Nardini, D. y Brebbia, C. A., Transient dynamic analysis by the boundary element method, *Boundary Elements*, 1983, C. A. Brebbia, ed., Springer-Verlag, Berlin, 719-730.

- 
- (70) Nardini, D. y Brebbia, C. A., A new approach to free vibration analysis using boundary elements, *Appl. Math. Modelling*, 1983, Vol. 7, 157-162.
- (71) Nardini, D. y Brebbia, C. A., Boundary integral formulation of mass matrices for dynamic analysis, *Topics in Boundary Element Research* 2, 1985, C. A. Brebbia, ed., Springer-Verlag, Berlin, 191-208.
- (72) Niwa, Y., Fukui, T., Kato, S., y Fujiki, K., An application of the integral equation method to two-dimensional elastodynamics, *Theor. Appl. Mech.*, 1980, Vol. 28, University of Tokyo Press, Tokyo, 281-290.
- (73) Niwa, Y., Kobayashi, S., y Azuma, N., An analysis of transient stress produced around cavities of arbitrary shape during the passage of traveling waves, *Memoirs Fac. Eng. Kyoto University*, 1975, Vo. 37, 28-46.
- (74) Partridge, P. W., Brebbia, C. A. y Wrobel, L. C., *The Dual Reciprocity Boundary Element Method*, Computational Mechanics Publications and Elsevier Applied Science, Southampton, 1992.
- (75) Peirce A. y Siebrits E., Stability analysis and design of time-stepping schemes for general elastodynamic boundary element models, *Int. J. Num. Meth. Eng.*, 1997, Vol. 40, 319-342.
- (76) Rizzo, F. J. y Shippy, D. J., A formulation and solution procedure for the general non-homogeneous elastic inclusion problem, *Int. J. Solids Struct.*, 1968, Vol. 4, 1161-1179.
- (77) Rizos, D. C., Advance Time Domain Boundary Element Method for General 3-D Elastodynamic Problems, *PhD Thesis, University of South Carolina*, 1993.
- (78) Sáez, A., Análisis Numérico de Problemas Elastodinámicos en Materiales Transversalmente Isótropos, *Tesis Doctoral, Universidad de Sevilla*, 1997.

- 
- (79) Seibrits, E. y Peirce, A. P., The stability properties of time domain elastodynamic boundary element methods, *Boundary Element Methods 17*, 1995, Computational Mechanics Publications, Southampton.
- (80) Siebrits, E. y Peirce, A. P., Implementation and application of elastodynamic boundary element discretizations with improved stability properties, *Engineering Computations*, 1997, Vo.14, 669-695.
- (81) Sladek, J. y Sladek, V., Dynamic stress intensity factors studied by boundary integro-differential equations, *Int. J. Num. Meth. Eng.*, 1986, Vol. 23, 919-928.
- (82) Sneddon, I. N., The distribution of stress in the neighborhood of a crack in an elastic solid, *Proceedings of the Royal Society of London A*, 1946, Vol. 187, 229-260.
- (83) Snyder, M. D. y Cruse, T. A., Boundary integral equation analysis of cracked anisotropic plates, *Int. J. Fract.*, 1975, Vol. 11, 315-328.
- (84) Stamos, A. A. y Beskos, D. E., Dynamic analysis of large 3-D underground structures by the BEM, *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 1995, Vol. 24, 917-934.
- (85) Stokes, G. G., On the dynamical theory of diffraction, *Transcript Cambridge Philosophical Society*, 1849, Vol 9, 793-797.
- (86) Tau, S. A. y Lu, T. H., Transient stress intensity factors for a finite crack in an elastic solid caused by a dilatational wave, *Int. J. Solids Struct.*, 1971, Vol. 7, 731-750.
- (87) Timoshenko, S. P. y Goodier, J. N., *Theory of Elasticity*, 3<sup>rd</sup> edition, McGraw-Hill, New York, 1969.
- (88) Wen, P. H., Aliabadi, M. H. y Rooke, D. P., An indirect boundary element method for three-dimensional dynamic fracture mechanics, *Eng. Anal. Boundary Elements*, 1995, Vol. 16, 351-362.

- 
- (89) Wen, P.H., Aliabadi, M. H. y Rooke, D. P., Cracks in three dimensions: A dynamic dual boundary element analysis, *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 1998, vol 167, 139-151.
- (90) Wen, P.H., Aliabadi, M. H. y Rooke, D. P., A variational technique for boundary element analysis of 3D fracture mechanics, weight functions: dynamic, *Int. J. Num. Meth. Eng.*, 1998, Vol. 42, 1425-1439.
- (91) Wen, P.H., Aliabadi, M. H. y Rooke, D. P., Mixed-mode weight functions in three-dimensional fracture mechanics: dynamic, *Eng. Fract. Mech.*, 1998, Vol. 59, 577-587.
- (92) Wen, P.H., Aliabadi, M. H. y Rooke, D. P., Three dimensional dynamic fracture analysis with the dual reciprocity method in Lapalce domain, *Eng. Anal. Boundary Elements*, 1999, Vol. 23, 51-58.
- (93) Wen, P.H., Aliabadi, M. H. y Rooke, D. P., A mass-matrix formulation for three-dimensional dynamic fracture mechanics, *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 1999, Vol. 173, 365-374.
- (94) Wheeler, L. T. y Sternberg, E., Some theorems in classical elastodynamics, *Arch. Rational Mech. Anal.*, 1968, Vol. 31, 51-90.
- (95) Yu, G., Mansur, W. J., Carrer, J. A. M. y Gong L., A linear  $\theta$  method applied to 2D time-domain BEM, *Communications in Numerical Methods in Engineering*, 1998, Vol. 14, 1171-1179.
- (96) Yu, G., Mansur, W. J., Carrer, J. A. M. y Gong, L., Time weighting in time domain BEM, *Eng. Anal. Boundary Elements*, 1998, Vol. 22, 175-181.
- (97) Zhang, C. y Gross, D., A non-hypersingular time-domain BIEM for 3.D transient elastodynamic crack analysis, *Int. J. Num. Meth. Eng.*, 1993, Vol. 36, 2997-3017.
- (98) Zhang, C. y Gross, D., On Wave Propagation in Elastic Solids with Cracks, *Computational Mechanics Publications*, 1998.

- (99) Zhang, Y. Y. y Shi, W., Transient analysis of three-dimensional crack problems by the Laplace transformed boundary element method, *Eng. Fract. Mech.*, 1994, Vol. 47, 715-722.
- (100) Zienkiewics, O. C., The Finite Element Method, *McGraw-Hill*, UK, 1977.