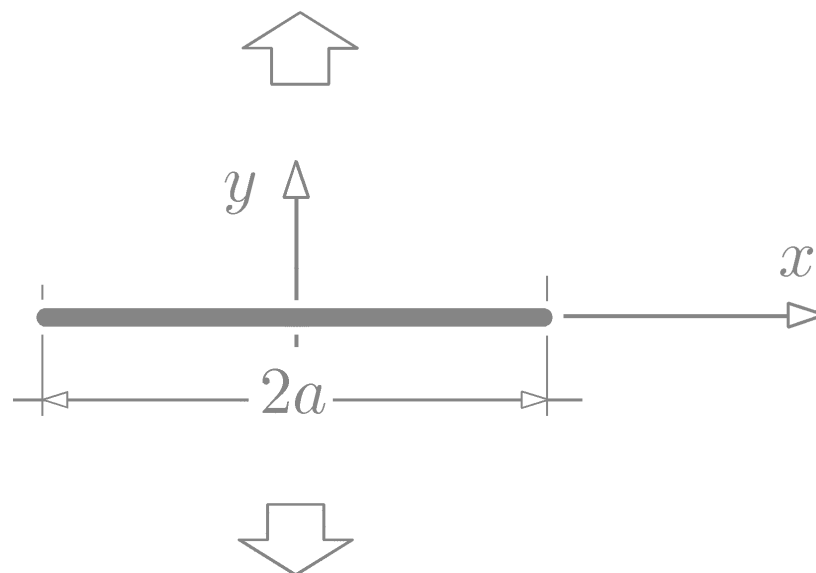


*estudio numérico de
problemas de fractura en
materiales anisótropos elásticos
y piezoeléctricos*

Presentada por Felipe García Sánchez
Ingeniero Industrial

Dirigida por Andrés Sáez Pérez
Dr. Ingeniero Industrial



A Visi, por Visi

Reconocimientos

Una vez terminado el trabajo de varios años que se recoge en este documento es un buen momento para echar un vistazo hacia atrás y tratar de saldar las deudas de gratitud que se han ido contrayendo por el camino.

Porque, de alguna manera, en un trabajo como éste... me refiero a lo que tiene de dilatado en el tiempo y casi de obsesión, se implica mucha gente, no de una forma activa, claro, sino “en derivada segunda” como diría uno de mis maestros.

Es esa gente que está siempre ahí, dispuesta a tratar de que cambies de cara cuando alguno de los resultados que íbamos a tener en un par de semanas... pues ya va para un par de meses y... nada.

Son, por ejemplo, los compañeros del área de mecánica de medios continuos y teoría de estructuras de la universidad de Málaga. Alberto, Consuelo, Miguel, Espejo; no tienen más remedio que soportarme diariamente, bueno Espejo un poco menos, pero lo hacen con un estoicismo elegante y están siempre dispuestos a apuntalarte el ánimo cuando amenaza ruina.

También en el grupo de estructuras de la universidad de Sevilla hay un buen puñado de esos amigos. A estos los veo menos (eso que ganan) pero son ratos de calidad en los que también llega “el calorcito”: Pedro, Mario, Miguel Ángel; gracias por los momentos de guasa... pero mucho más por los momentos serios, al menos yo siempre he salido fortalecido. Con Migel Ángel me une además, en este momento, la solidaridad del compañero en la trinchera: defiende su tesis doctoral en pocos días, suerte.

Entre los amigos no caben jerarquías, al menos no para mí, pero quiero destacar a alguien en este grupo, es el “culpable” de toda esta historia desde sus inicios, me estoy refiriendo a los inicios del grupo, me estoy refiriendo al profesor José Domínguez Abascal que, junto con su pupilo y director de mi tesis, Andrés Sáez Pérez, me han ganado para la causa de los elementos de contorno y al que agradezco, de un modo muy especial, la confianza con que me recibió en el grupo de investigación y el apoyo, el científico y más importante, el personal, que me ha ofrecido siempre generosamente.

Agradecer al director de la tesis el apoyo prestado, la disponibilidad y todas esas cosas es un clásico. Qué duda cabe que todo lo que yo pudiera decir en ese sentido sería válido. Pero si todo mi agradecimiento se limitara a la figura de “D. Andrés Sáez Pérez director de la tesis” sería terriblemente injusto. La amistad que me une con Andrés está muy por encima de esa relación. El simple hecho de que un día me propusiera que trabajásemos en esto ya fue una prueba de amistad y desde entonces, una tras otra. Sabíamos que una tesis a distancia tenía dificultades añadidas, dificultades que prácticamente ha soportado él, bueno él... y Carmen, que en numerosas ocasiones se ha tenido que quedar con “la tropa” para que Andrés y yo nos dedicásemos a alguna jornada maratónica sobre integración hipersingular, comportamiento piezoeléctrico o, en un terreno menos científico, a montones de asuntos, “de plumífero” como él los llama y que, en otras circunstancias, tendría que haber hecho yo. Por todo lo dicho y por lo que no he dicho... gracias Andrés, gracias Carmen.

Respecto de la familia, de toda la familia, sólo puedo decir que “tendría que estar en los altares” como dice el dicho. Ellos se llevan, probablemente, la peor parte... supongo que va en el cargo pero en cualquier caso debe resultar duro. Su apoyo, su preocupación y sus ánimos constantes han sido un acicate casi diario. Una aportación extra de estímulos de los que uno, a veces, anda un poco corto.

Al profesor Chuanzeng Zhang, de la Universidad de Ciencias Aplicadas de Zittau/Görlitz en el este de Alemania, con quien me encuentro trabajando en la actualidad, quisiera agradecer el apoyo y las facilidades que me ha dado para terminar de escribir esta tesis.

Me gustaría pensar que no olvido a nadie pero si no fuera así seguro que será alguien que me conozca lo suficiente como para saber que soy de natural despistado. A los que he citado y a los que involuntariamente no haya citado y crean que debería haberlo hecho... gracias por todo.

Felipe García Sánchez

Zittau, Alemania. Noviembre de 2004

Abreviaturas utilizadas

EI	Ecuación integral
EICD	Ecuación integral de contorno en desplazamientos
EICT	Ecuación integral de contorno en tracciones
EID	Ecuación integral en desplazamientos
EIT	Ecuación integral en tracciones
FI	Factor de intensidad
FIDE	Factor de intensidad de desplazamiento eléctrico
FIT	Factor de intensidad de tensiones
MEC	Método de elementos de contorno
MEF	Método de elementos finitos
SF	Solución fundamental

Notación

Una variable en negrita indica un tensor o vector.

La derivada temporal se indica por un punto sobre la variable que se ha derivado.

A lo largo de esta tesis se ha utilizado, en las expresiones matemáticas, notación de subíndices. Siguiendo las características propias de esta notación:

Índices repetidos en un mismo factor indican suma extendida a ese índice

$$a_i b_i \rightarrow a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

donde se ha considerado que el índice i toma los valores 1, 2 y 3.

Una coma seguida de un índice indica derivación espacial respecto a la coordenada indicada por el índice

$$a_{i,j} \rightarrow \frac{\partial a_i}{\partial x_j}$$

Relación de símbolos utilizados

Símbolos latinos:

a	Longitud característica de grieta. Usualmente semilongitud
a_{ij}	Tensor de comportamiento (flexibilidad), notación contraída
A_{ij}, A_{IJ}	Matriz involucrada en la solución en desplazamientos del problema bidimensional, casos anisótropo elástico y piezoeléctrico
b_i	Fuerzas de volumen
b_I	Fuerzas de volumen extendidas
B_{ij}	Matriz para la determinación de Q_{ij}
C_{ij}	Tensor de comportamiento (rigidez) en notación contraída
C_{ijkl}	Tensor de comportamiento elástico
C_{iJKl}	Tensor de comportamiento piezoeléctrico
c_m	Velocidad de fase
D_i	Desplazamiento o inducción eléctrica
E_i	Campo eléctrico
E_{ij}, E_{IJ}	Matriz para la solución fundamental de semiespacio y bimate- riales, casos anisótropo elástico y piezoeléctrico
e_{ij}	constantes piezoeléctricas
G	Densidad de energía liberada
\mathcal{K}	Matriz de rigidez
H_{ij}	Matriz para la determinación de los factores de intensidad en el caso piezoeléctrico
k_m	Número de onda
K_I, K_{II}, K_{III}	Factores de intensidad de tensión
K_{IV}	Factor de intensidad de desplazamiento eléctrico
L_{ij}, L_{IJ}	Matriz involucrada en la solución en tensiones del problema bi- dimensional, casos anisótropo elástico y piezoeléctrico
n_i	Normal exterior al contorno en el punto de observación
N_i	Normal exterior al contorno en el punto de colocación
p_i	Tracciones
q	carga eléctrica
Q_{ij}	Matriz de la solución fundamental en desplazamientos
t	Tiempo
u_i	Desplazamientos
u_I	Desplazamientos extendidos
U'	Energía de deformación por unidad de volumen
V_{im}	m -ésimo autovector de la matriz de Christoffel
\mathbf{x}	Punto de observación
x_1, x_2, x_3	Coordenadas rectangulares

Símbolos griegos:

β_{ij}	Constantes elásticas reducidas
$\delta(\mathbf{x})$	Delta de Dirac
δ_{ij}	Delta de Kronecker
Γ_{ij}	Matriz de Christoffel
ϵ_{ij}	Constantes dieléctricas
ϵ_{ij}	Tensor de deformaciones
ϵ_{iJ}	Tensor de deformaciones extendido
ϕ	Funciones de forma de cálculo
ϕ_G	Funciones de forma geométrica
Φ	Función de la solución fundamental en frecuencia casos anisótropo elástico y piezoeléctrico
φ	Potencial eléctrico
Γ	Contorno
η	Normal a la circunferencia de integración, solución fundamental en frecuencia
μ_i	Raíces de la ecuación característica
λ_m	m -ésimo autovalor de la matriz de Christoffel
Λ_{ij}	Matriz de Christoffel reducida
ω	Frecuencia angular
Ω	Dominio
ρ	Densidad del material
σ_{ij}	Tensor de tensión
σ_{iJ}	Tensor de tensión extendido
Υ	Función de la parte regular de las tracciones de la solución fundamental en frecuencia, casos anisótropo elástico y piezoeléctrico
χ_k, χ_K	Distancia entre los puntos de colocación y observación en el plano complejo, casos anisótropo elástico y piezoeléctrico
ξ	Punto de colocación

Índice General

1	Introducción	1
1.1	Generalidades. Justificación de la tesis	1
1.2	El estado del arte	3
1.2.1	El MEC en mecánica de fractura de materiales anisotropos elásticos	3
1.2.2	El MEC en mecánica de fractura de materiales piezoeléctricos . . .	6
1.3	Organización del documento	8
2	Análisis de medios anisótropos elásticos y piezoeléctricos en presencia de grietas: fundamentos	11
2.1	Introducción	11
2.2	Elastoestática bidimensional en medios anisótropos elásticos	12
2.2.1	Formulación del problema estático: ecuaciones básicas	12
2.2.2	Solución de los problemas plano y antiplano. Caso anisótropo elástico	16
2.3	Elastoestática bidimensional en medios piezoeléctricos	20
2.3.1	Formulación del problema estático: ecuaciones básicas	20
2.3.2	Solución del problema plano piezoeléctrico	24
2.4	Mecánica de fractura lineal elástica. Materiales anisótropos elásticos y piezoeléctricos	26
2.4.1	Introducción	26
2.4.2	Desplazamientos y tensiones en el vértice de grieta. Caso anisótropo elástico	27

2.4.3	Desplazamientos y tensiones en el vértice de grieta. Caso piezoeléctrico	30
2.4.4	Determinación de los factores de intensidad de tensiones	31
2.5	Dinámica de fractura lineal elástica. Materiales anisótropos elásticos y piezoeléctricos	34
2.5.1	Ecuaciones de campo en elastodinámica	34
2.5.2	El problema armónico	35
2.5.3	Difracción de ondas	36
3	Soluciones fundamentales	39
3.1	Introducción	39
3.2	El método de los elementos de contorno	40
3.3	Soluciones fundamentales estáticas	44
3.3.1	Caso anisótropo elástico	44
3.3.2	Caso piezoeléctrico	46
3.4	Soluciones fundamentales dinámicas. Dominio de la frecuencia	47
3.4.1	Caso anisótropo elástico	47
3.4.2	Caso piezoeléctrico	51
3.5	Otras soluciones fundamentales	53
4	Formulación hipersingular del MEC para materiales anisótropos elásticos y piezoeléctricos	57
4.1	Introducción	57
4.2	Formulación mixta del MEC para problemas de fractura.	59
4.2.1	Degeneración del sistema. Ecuación integral de tracciones. Caso estático.	59
4.2.2	Ecuaciones integrales en función de la apertura de grieta	61
4.2.3	Estrategia de discretización	63
4.2.4	Extensión al caso armónico	65

4.3	Evaluación numérica de las integrales. Caso estático	66
4.3.1	Integrandos de singularidad débil	66
4.3.2	Integrandos de singularidad fuerte	67
4.3.3	Integrandos hipersingulares	70
4.4	Evaluación numérica de las integrales. Caso dinámico	72
4.5	Evaluación de los factores de intensidad	74
5	Resultados numéricos	79
5.1	Introducción	79
5.2	Resultados estáticos. Solución fundamental anisótropa elástica de campo completo	80
5.2.1	Grieta recta, dominio infinito	80
5.2.2	Grieta inclinada sometida a tracción en dominio isótropo	81
5.2.3	Placa ortótropa con grieta horizontal centrada	81
5.2.4	Placa ortótropa con grietas en bordes opuestos	82
5.2.5	Grieta centrada oblicua en placa anisótropa	82
5.2.6	Grietas emanando desde un orificio central en una placa sometida a tracción	83
5.2.7	Grieta en forma de arco circular en dominio infinito	85
5.3	Resultados estáticos. Solución fundamental anisótropa elástica de semiespacio.	86
5.3.1	Grieta en semiespacio isótropo	87
5.3.2	Grieta en semiespacio anisótropo	88
5.4	Resultados estáticos. Solución fundamental piezoeléctrica de campo completo	91
5.4.1	Grieta recta, dominio infinito	91
5.4.2	Placa a tracción, grieta centrada oblicua	92
5.4.3	Grieta ramificada en dominio infinito	93

5.4.4	Grieta en forma de arco circular en dominio infinito	95
5.5	Resultados dinámicos. Solución fundamental anisótropa elástica	95
5.5.1	Generalidades	95
5.5.2	Condiciones de contorno para ondas P y SV en medios ortótropos elásticos	97
5.5.3	Grieta recta, dominio infinito isótropo. Dominio de la frecuencia y dominio del tiempo	98
5.5.4	Grietas colineales dominio ortótropo	101
5.5.5	Grietas paralelas dominio ortótropo	102
5.5.6	Grieta ramificada dominio ortótropo	105
5.5.7	Grieta circular dominio ortótropo	108
5.6	Resultados dinámicos. Solución fundamental piezoeléctrica	110
5.6.1	Grieta recta, dominio infinito piezoeléctrico. Dominio de la frecuencia y dominio del tiempo	112
5.6.2	Grietas colineales dominio piezoeléctrico	114
5.6.3	Grietas paralelas en dominio piezoeléctrico	115
5.6.4	Grieta ramificada dominio piezoeléctrico	118
5.6.5	Grieta circular dominio piezoeléctrico	122
6	Conclusiones y desarrollos futuros	125
6.1	Conclusiones	125
6.2	Desarrollos futuros	128
A	Formalismo integral de Barnett y Lothe	131
B	El problema anisótropo elástico antiplano. Resultados	135
C	Discretizaciones utilizadas	141
	Bibliografía	145

Índice de Figuras

2.1	Tensiones y sistemas de referencia en el entorno del vértice de grieta.	28
2.2	Modos de apertura de grieta.	28
2.3	Esquema del principio de superposición aplicado al problema de difracción de ondas por la presencia de grietas.	37
3.1	Dominio modificado para escribir la ecuación integral en el contorno.	41
3.2	Discretización del contorno de un dominio genérico.	42
3.3	Esquema para la obtención de la solución fundamental de semiespacio.	46
3.4	Circunferencia de integración para solución fundamental en frecuencia.	48
3.5	Función Φ de la solución fundamental en frecuencia (izda). Funciones coseno integral y seno integral (dcha).	49
3.6	Esquema de un bimaternal con indicación de sistema de referencia y puntos de colocación y observación.	53
4.1	Notación de los diferentes contornos en un dominio genérico con una grieta.	59
4.2	Discretización de los desplazamientos mediante elementos conformes (izda) y no conformes (dcha).	63
4.3	Funciones de forma geométricas (izda) y de cálculo (dcha).	64
4.4	Tipos de elementos que pueden considerarse en la discretización de un dominio genérico.	65
4.5	Elemento diferencial de contorno en torno al punto de observación y normal exterior en ese punto.	68
4.6	Puntos para determinación del factor de intensidad de tensiones.	75

4.7	Elemento a un cuarto discontinuo con $\zeta_1 = -3/4$, $\zeta_2 = 3/4$	75
5.1	Grieta recta sometida a tracción. Dominio infinito.	80
5.2	Grietas emanando simétricamente desde un orificio centrado en una placa a tracción. Resultado para material isótropo.	84
5.3	Grietas emanando simétricamente desde un orificio central en una placa a tracción. Resultados para casos ortótropo (arriba) y anisótropo para $r = 0.5w$ (abajo).	85
5.4	Grieta en forma de arco circular, material isótropo ($\nu=0.25$). Resultados en función del ángulo abarcado.	86
5.5	Grieta en forma de arco circular en grafito epoxy. Elementos curvos vs. elementos rectos para diferentes valores del ángulo abarcado.	86
5.6	Grieta vertical en semiespacio isótropo. Resultados en función de la profundidad de la grieta.	87
5.7	Grieta horizontal en semiespacio isótropo. Resultados en función de la profundidad de la grieta.	87
5.8	Grieta oblicua desde la superficie libre en semiespacio isótropo. Resultados en función del ángulo con la superficie libre.	88
5.9	Grieta vertical en semiespacio anisótropo. Esquema del problema y resultados para carga de tracción en función de la orientación de las direcciones principales.	89
5.10	Grieta vertical en semiespacio anisótropo. Resultado para tensiones tangenciales en función de la orientación de las direcciones principales. . . .	89
5.11	Grieta oblicua, $\beta = 30^\circ$, en semiespacio anisótropo e isótropo. Resultados frente a la profundidad de grieta en los vértices superior e inferior. . . .	90
5.12	Grieta oblicua, $\beta = 75^\circ$, en semiespacio anisótropo e isótropo. Resultados frente a la profundidad de grieta en los vértices superior e inferior. . . .	90
5.13	Grieta recta en medio piezoeléctrico infinito. Incrementos de desplazamientos extendidos. Carga mecánica: 1 Pa. Carga eléctrica: 1C/m ²	92
5.14	Grieta centrada a 45° en placa de material piezoeléctrico. Incrementos de desplazamientos extendidos. Carga mecánica: 1Pa. Carga eléctrica: 1 C/m ²	93

5.15	Grieta ramificada en medio piezoeléctrico infinito sometida a tracción.	94
5.16	Grieta ramificada en medio piezoeléctrico infinito sometida a desplazamiento eléctrico.	94
5.17	Grieta con forma de arco circular en medio piezoeléctrico infinito sometida a tracción.	96
5.18	Grieta con forma de arco circular en medio piezoeléctrico infinito sometida a desplazamiento eléctrico.	96
5.19	Onda P incidiendo con diferentes ángulos, α , sobre grieta recta. Dominio isótropo infinito. Resultados en función de la frecuencia.	99
5.20	Onda SV incidiendo con diferentes ángulos, α , sobre grieta recta. Dominio isótropo infinito. Resultados en función de la frecuencia.	99
5.21	FIT frente al tiempo para una grieta recta sometida a carga de impacto.	100
5.22	Onda SV sobre grietas colineales. Resultados para diferentes separaciones de grieta.	101
5.23	Onda P sobre grietas colineales. Resultados para diferentes separaciones de grieta.	102
5.24	Onda P sobre grietas paralelas en boro epoxy. Dos separaciones de grieta.	103
5.25	Onda P sobre grietas paralelas en grafito epoxy. Dos separaciones de grieta.	104
5.26	Onda P sobre grietas paralelas. Fibra de carbono en matriz plástica. Dos separaciones de grieta.	104
5.27	Onda P, grieta ramificada. Diferentes ángulos de ramificación. Modo I.	106
5.28	Onda P, grieta ramificada. Diferentes ángulos de ramificación. Modo II.	106
5.29	Onda SV, grieta ramificada. Diferentes ángulos de ramificación. Modo I.	107
5.30	Onda SV, grieta ramificada. Diferentes ángulos de ramificación. Modo II.	108
5.31	Onda P sobre grieta circular. Diferentes ángulos abarcados.	109
5.32	Onda SV sobre grieta circular. Diferentes ángulos abarcados.	109
5.33	Grieta recta en dominio piezoeléctrico, onda P. Diferentes materiales.	112
5.34	Grieta recta en dominio piezoeléctrico, carga de impacto. Diferentes materiales.	113

5.35	Grietas colineales en dominio piezoeléctrico. Onda P incidiendo perpendicularmente. Resultados, modo I, diferentes separaciones de grietas. . .	114
5.36	Grietas colineales en dominio piezoeléctrico. Onda P incidiendo perpendicularmente. Resultados, modo IV, diferentes separaciones de grieta. .	115
5.37	Grietas paralelas, dominio piezoeléctrico. Onda P incidiendo perpendicularmente. Resultados, modo I, en ambas grietas. Diferentes separaciones de grieta.	116
5.38	Grietas colineales en dominio piezoeléctrico. Onda P incidiendo perpendicularmente. Resultados modo II. Diferentes separaciones de grieta. . .	117
5.39	Grietas paralelas en dominio piezoeléctrico. Onda P incidiendo perpendicularmente. Resultados modo IV. Diferentes separaciones de grieta. . . .	117
5.40	Grieta ramificada en dominio piezoeléctrico. Onda P incidiendo perpendicularmente. Resultados modo I.	118
5.41	Grieta ramificada en dominio piezoeléctrico. Onda P incidiendo perpendicularmente. Resultados modo II.	119
5.42	Grieta ramificada en dominio piezoeléctrico. Onda P incidiendo perpendicularmente. Resultados modo IV	120
5.43	Grieta ramificada en dominio piezoeléctrico. Onda SV incidiendo perpendicularmente. Resultados modo I.	120
5.44	Grieta ramificada en dominio piezoeléctrico. Onda SV incidiendo perpendicularmente. Resultados modo II.	121
5.45	Grieta ramificada en dominio piezoeléctrico. Onda SV incidiendo perpendicularmente. Resultados modo IV.	122
5.46	Grieta circular en dominio piezoeléctrico. Onda P, resultados modos I, II y IV.	123
5.47	Grieta circular en dominio piezoeléctrico. Onda SV, resultados modos I, II y IV.	124
B.1	Grieta ramificada sometida a tensión antiplana, dominio infinito. Esquema y resultados en función de la relación de longitudes.	137
B.2	Grietas cercanas sometidas a tensión antiplana, dominio infinito. Esquema y resultado para $d = 20a/9$	137

B.3	Placas rectangulares con grietas, sometidas a tensión antiplana. Esquemas para diferentes condiciones de contorno.	137
B.4	Grieta vertical e semiespacio isótropo sometida a tensión antiplana. Esquema y resultados para $h=2a$	138
B.5	Placa cuadrada con grieta, carga antiplana. Resultados, para dos posiciones de grieta, en función de la posición de los ejes principales del material.	139
B.6	Placa cuadrada, grieta centrada, carga antiplana, bordes opuestos empotrados. Resultado en función de la posición de los ejes principales del material.	139

Capítulo 1

Introducción

1.1 Generalidades. Justificación de la tesis

El desarrollo de nuevas tecnologías y/o nuevos materiales suele ir, con frecuencia, por delante del conocimiento de los fenómenos a que su uso puede dar lugar e incluso, a veces, de la propia comprensión de las leyes que los gobiernan.

Así, por ejemplo, es suficiente indicar el gran número de investigadores que en la actualidad continua involucrado en caracterizar el comportamiento de materiales que como los materiales compuestos y los piezoeléctricos (objeto de esta tesis) vienen utilizándose desde hace muchas décadas.

No es menos cierto que esta dedicación continua de la comunidad científica suele venir condicionada por cambios en las exigencias sobre estos materiales. Exigencias acerca de su durabilidad, de sus costes de producción o explotación, de su relación peso/resistencia o cualesquiera otras. Exigencias crecientes que en definitiva se resumen en unos requerimientos de responsabilidad mayores que hacen imprescindible un conocimiento más y más profundo de su comportamiento y de los mecanismos que pueden provocar su fallo.

Una característica que acompaña al fallo de ambos tipos de materiales es su importante tendencia a desarrollar grietas en su seno. Es bien sabido que el desarrollo de grietas tiene muchos, variados y muy complejos mecanismos. No obstante, en primera aproximación, puede afirmarse que los materiales compuestos muestran esa tendencia, fundamentalmente, por la coexistencia de distintas fases de propiedades mecánicas muy diferentes.

En los materiales piezoeléctricos la tendencia a desarrollar grietas radica en la propia naturaleza frágil de este tipo de materiales a lo que hay que añadir el propio proceso al

que han de ser sometidos para que exhiban el fenómeno piezoeléctrico.

Se hace necesario explicar aquí que el fenómeno de la piezoelectricidad* está asociado a la disposición asimétrica de ciertos tipos de redes cristalinas. Aunque este fenómeno se encuentra en algunos materiales naturales, cuarzo por ejemplo, su magnitud no es suficiente para hacerlo viable. Esto llevó al desarrollo de materiales sintéticos con propiedades dieléctricas y piezoeléctricas unas 100 veces superiores a las de los materiales piezoeléctricos naturales.

Los materiales piezoeléctricos sintéticos pertenecen, fundamentalmente, a dos grandes familias: los titanatos de bario ($BaTiO_3$) y los plomo circonato titanato (PZT). En ambos casos se trata de materiales cerámicos y por tanto, de una elevada fragilidad. Además estas cerámicas son inicialmente isotropas. Para inducir en ellas las necesarias asimetrías de las estructuras cristalinas han de ser sometidas a un proceso denominado de polarización consistente en someterlas a un campo eléctrico continuo de aproximadamente 10^6 V/m. El propio proceso de polarización, con la reorganización que provoca en las estructuras internas del material, es la primera causa de la aparición de defectos en su seno.

Otros materiales piezoeléctricos, cuya proliferación va en aumento, son los materiales compuestos piezoeléctricos que pueden ser de dos tipos: *piezopolímeros*, en los que el material piezoeléctrico está inmerso en una matriz eléctricamente pasiva (por ejemplo PZT en matriz epoxy) y *piezocompuestos*: materiales compuestos a partir de dos piezocerámicas diferentes (por ejemplo fibras de $BaTiO_3$ reforzando una matriz de PZT). Estos materiales están proliferando ya que permiten crear materiales a medida para aplicaciones específicas.

Resulta evidente que en estos últimos materiales se unen todas las causas posibles para la proliferación de grietas: fragilidad inherente al material, proceso de polarización, coexistencia de fases.

A todo lo anterior se viene a unir que, en la gran mayoría de los casos, estos materiales (compuestos, piezoeléctricos y piezoeléctricos compuestos) van a estar sometidos a cargas que, en mayor o menor medida, varían en el tiempo.

Lo expuesto hasta aquí da sentido al estudio numérico de la mecánica de la fractura para estos materiales.

Si además se considera que este campo, la mecánica de la fractura, junto con el estudio de propagación de ondas (que también pueden estar presente en el problema para

*Fenómeno descubierto en 1880 por los hermanos Pierre y Jacques Curie que consiste en la capacidad de ciertos materiales para cargarse eléctricamente bajo acciones mecánicas y recíprocamente, deformarse bajo la acción de carga eléctrica.

solicitaciones dinámicas), son dos de los campos en los que el *método de los elementos de contorno* ha alcanzado un mayor grado de desarrollo y en los que presenta ventajas considerables frente a otros métodos numéricos, la justificación de esta tesis ha quedado establecida tanto en lo referente al objeto de su estudio como al método utilizado para su desarrollo.

A continuación se va a hacer una exposición del estado del arte en los temas que competen a esta tesis.

1.2 El estado del arte

En el terreno de la mecánica de la fractura es ingente el número de problemas abordados mediante el MEC. Una completa revisión de esos trabajos hasta 1997 puede encontrarse en un artículo de Aliabadi publicado ese año y puede ser complementada con sendas revisiones más específicas dedicadas a la formulación mixta del MEC: Tanaka, Sládek y Sládek (1994) dedicada fundamentalmente a los procesos de regularización de integrandos no regulares y Chen y Hong (1999) centrada en los métodos de tratamiento de integrales hipersingulares. Otra interesante revisión que añadir a las anteriores es la de Mukhopadhyay, Maiti y Kakodkar (2000) dedicada a los métodos de evaluación de factores de intensidad de tensiones.

Respecto del segundo campo de estudio referido, la propagación de ondas, dentro del cual la difracción de ondas como consecuencia de la presencia de discontinuidades de cualquier tipo ha recibido especial atención en la literatura, dos destacados artículos de Beskos (1987 y 1997) y el libro de Domínguez (1993) contienen una revisión de la mayoría de los trabajos en este área hasta 1996.

Una primera apreciación acerca de esas revisiones es que una significativa mayoría de trabajos están dedicados al comportamiento isótropo.

1.2.1 El método de los elementos de contorno aplicado a la mecánica de la fractura en materiales anisotrópicos elásticos

Acciones estáticas

Las primeras formulaciones del MEC para materiales anisotrópicos elásticos fueron presentadas por Rizzo y Shippy (1970), Cruse y Swedlow (1971), Tomlin y Butterfield (1974) y Snyder y Cruse (1975). En este último trabajo se presenta la formulación integral anisótropa combinada con una solución fundamental que incorporaba la existencia en el

dominio de una grieta libre de tracciones.

Más recientemente nuevas formulaciones del MEC, apropiadas para el estudio de problemas con grietas han sido extendidas al comportamiento anisótropo.

Inicialmente formulaciones basadas en la ecuación integral de desplazamientos y la técnica de subdominios (o de las subregiones) como la presentada por Doblaré, Espiga, Gracia y Alcantud (1990), Tan y Gao (1992) y por Sollero y Aliabadi (1993). Todas estas publicaciones se ocupaban del problema bidimensional, Sáez, Ariza y Domínguez presentan esta formulación en 1997 para problemas tridimensionales con comportamiento transversalmente isótropo.

Posteriormente han sido presentadas formulaciones hipersingulares basadas en la formulación mixta[†] del MEC, es decir en su formulación mediante las ecuaciones integrales en desplazamientos y en tracciones, que permiten resolver problemas con grietas discretizando sólo las grietas y los contornos externos sin la adición de contornos ficticios propia de la técnica de los subdominios.

Sollero (1994) y Sollero y Aliabadi (1995) son los primeros en presentar esta formulación del MEC para problemas de fractura en dominios bidimensionales anisótropos elásticos. Las integrales hipersingulares son evaluadas, en estos trabajos, según un proceso de regularización presentado por Portela, Aliabadi y Rooke en 1992 válida sólo para elementos rectos y el factor de intensidad de tensiones es evaluado mediante de la integral J (Rice, 1968) para modo mixto de apertura de grieta.

Una formulación similar pero extendida a elementos curvos y con una evaluación diferente del FIT fue presentada por Pan y Amadei (1996) y extendida por Pan (1997) y Pan, Chen y Amadei (1997) para el estudio de problemas bidimensionales de grietas en semiespacios anisótropos. Para generalizar el tratamiento a elementos curvos las integrales hipersingulares son evaluadas según el esquema de cuadraturas ponderadas publicado en 1990 por Tsamaphyros y Dimou. En estos trabajos, la evaluación del FIT se realiza mediante el método de los desplazamientos que consiste en llevar los resultados de desplazamientos, en puntos cercanos al vértice de la grieta, a las expresiones analíticas de los desplazamientos en las inmediaciones del vértice (Sih, Paris e Irwin, 1965) y despejar de ellas los valores de los FIT.

Ang y Park (1997) y Pan y Amadei (1999) presentan la formulación mixta para bimateriales anisótropos.

La formulación hipersingular del MEC ha sido extendida a problemas de grietas en dominios anisótropos tridimensionales en el año 2000 por Pan y Yuan. Estos autores

[†]Esta formulación será referida indistintamente como mixta o como hipersingular.

proponen una formulación basada en una solución fundamental cuyas derivadas son obtenidas mediante un esquema de diferencias finitas.

Para sólidos transversalmente isótropos la formulación mixta ha sido recientemente presentada por Ariza y Domínguez en 2004 utilizando la solución fundamental explícita de Pan y Chou (1976) y evaluando los FIT a partir de las aperturas de grietas en elementos un cuarto. Previamente Sáez, Ariza y Domínguez (1997) habían calculado los FIT utilizando la misma solución fundamental para dominios tridimensionales transversalmente isótropos utilizando elementos un cuarto, continuos y discontinuos mediante el método de subdominios.

Acciones dinámicas

El número de publicaciones dedicadas a la dinámica de la fractura mediante el MEC en medios anisótropos puede calificarse de discreto. La mayoría de las dificultades en esa formulación provienen de la complejidad de las soluciones fundamentales de que se dispone y que tienen, en todos los casos, forma integral con integrales definidas sobre dominios finitos Wang y Achenbach (1994, 1995) o infinitos Dravinski y Niu (2002).

Problemas dinámicos tridimensionales han sido analizados por Kögl y Gaul (2000) mediante el empleo de la SF estática y el método de reciprocidad dual y por Niu y Dravinski (2003) que estudiaron la difracción de ondas armónicas en sólidos anisótropos tridimensionales infinitos mediante una SF dinámica obtenida numéricamente.

Sáez y Domínguez (1999) estudiaron la difracción de ondas en medios transversalmente isótropos tridimensionales mediante la formulación en desplazamientos del MEC utilizando la SF de Wang y Achenbach (1994, 1995) y en relación con mecánica de la fractura, Sáez y Domínguez (2001) resolvieron el problema de grietas en sólidos tridimensionales transversalmente isótropos con la misma SF empleando el método de subregiones.

Con la misma SF, Ariza y Domínguez (2004) presentan una formulación para el análisis de problemas de grietas en sólidos tridimensionales transversalmente isótropos en el dominio de la frecuencia basadas en la EI en tracciones y el empleo de elementos un cuarto.

La formulación del MEC para el estudio de la difracción de ondas en sólidos anisótropos bidimensionales fue presentada por Kobayashi, Nishimura y Kishima (1986) y por Wang, Achenbach y Hirose (1996). Más recientemente Ahmad, Leyte y Rajapakse (2001) han utilizado una formulación del método, basada en funciones de Green expresadas como integrales sobre dominio infinito, al estudio de interacción dinámica suelo-estructura en el caso bidimensional anisótropo.

Denda, Wang y Yong (2001) proponen una formulación en el dominio de la frecuencia para sólidos bidimensionales anisótropos y la aplican a la determinación de frecuencias naturales y modos de vibración a sólidos de geometría sencilla.

Zhang (2002) presentó la formulación hipersingular del MEC al estudio dinámico de grietas en dominios bidimensionales infinitos ortótropos. Zhang utiliza una cuadratura de convolución en combinación con una función de Green en el dominio de Laplace.

Hirose, Zhang y Wang (2002) realizan un estudio comparativo entre este último método y la formulación en el dominio del tiempo que utiliza la SF de Wang y Achenbach (1995). En este estudio utilizan la formulación presentada por Wang, Achenbach y Hirose (1996) y una discretización de Galerkin. Estos autores obtienen el FIT dinámico para una grieta recta en un dominio infinito sujeto a carga de impacto.

Albuquerque, Sollero y Fedelinski (2003a) han presentado una formulación del método de reciprocidad dual para problemas bidimensionales anisótropos similar al método propuesto por Kögl y Gaul para tres dimensiones. Este enfoque ha sido aplicado por Albuquerque, Sollero y Aliabadi (2002) al estudio de problemas de grietas utilizando la formulación del MEC en desplazamientos, la técnica de los subdominios y elementos un cuarto singulares (Martínez y Domínguez, 1984).

Albuquerque, Sollero y Fedelinski (2003b) sustituyen el esquema de integración temporal del método de reciprocidad dual por la integración en el dominio de Laplace y recientemente Albuquerque, Sollero y Aliabadi (2004) han presentado la formulación mixta para problemas dinámicos de grietas anisótropos usando la SF estática y el método de reciprocidad dual.

1.2.2 El método de los elementos de contorno aplicado a la mecánica de la fractura en materiales piezoeléctricos

Acciones estáticas

Entre los trabajos más significativos sobre mecánica de la fractura en materiales piezoeléctricos pueden citarse los de Barnett y Lothe (1975), Deeg (1980), Pak (1992), Suo, Kuo, Barnett y Willis (1992), Sosa (1992), Park y Sun (1996) y Wu y Huang (2001).

En los últimos años se han publicado diferentes propuestas para el análisis de grietas en materiales piezoeléctricos mediante la aplicación del MEC.

En 1999 Pan presenta la formulación hipersingular del método. Aplica la solución fundamental de variable compleja obtenida por Barnett y Lothe (1975). En ese trabajo

Barnett y Lothe extienden al caso piezoeléctrico la solución bidimensional que Eshelby, Read y Shockley (1953) obtienen para el problema bidimensional anisótropo elástico. Para la integración hipersingular utiliza las cuadraturas de Tsamaphyros y Dimou que ya utilizara para el caso anisótropo.

Liu y Fan (2001) realizan un riguroso estudio de la formulación clásica del MEC y ponen de manifiesto el aspecto de la degeneración del problema cuando se aplica sobre problemas de grietas, haciéndose necesaria la EI en tracciones. Contraponen este caso al caso de la placa delgada piezoeléctrica en el que no se produce esta degeneración.

En sendos trabajos publicados en 2001, Rajapakse y Xu, aplicando la filosofía de la formulación de Lekhnitskii para el caso anisótropo elástico, en combinación con un modelo de distribución de dislocaciones, derivan soluciones fundamentales específicas para dominios piezoeléctricos conteniendo dislocaciones y aplican este enfoque a diferentes geometrías de grietas incluyendo grietas ramificadas.

Denda y Lua en 1999 desarrollan una formulación del MEC combinando la idea de la función de tensión, de la formulación de Lekhnitskii para el caso anisótropo elástico, con la función de desplazamiento de la formulación de Eshelby, Read y Shockley (1953). De esta forma obtienen un formalismo matricial similar al formalismo de Stroh[‡] desarrollando la solución fundamental.

Davì y Milazo (2001) presentan la aplicación del método de los subdominios aplicado a este problema.

Todos estos trabajos se ocupan del problema bidimensional, no son muy numerosos hasta la fecha los trabajos sobre el MEC pada dominios tridimensionales piezoeléctricos. Hill y Farris (1998) obtienen la solución fundamental utilizando la transformada de Radon como ya hiciera Deeg (1980) y obtienen mediante el MEC resultados de problemas tridimensionales sencillos emplando elementos cuadráticos.

Zhao, Chen, Liu y Liu presentan en 1997 una solución fundamental tridimensional que incorpora la discontinuidad en los desplazamientos y el campo eléctrico utilizándola para la resolución de una grieta circular en dominio infinito.

Acciones dinámicas

La mayoría de las publicaciones que estudian el problema de dinámica de fractura en materiales piezoeléctricos lo hacen para el problema antiplano. Shindo y Narita (1995)

[‡]La formulación de Eshelby, Read y Shockley es llamada por muchos autores formalismo de Stroh aunque otros refieren de esta forma a la notación matricial que Stroh utilizó en su trabajo de 1962 siguiendo el trabajo publicado por Guerney en 1958.

estudian, mediante la transformada de Fourier, la difracción de una onda antiplana por una grieta en un dominio ortótropo piezoeléctrico infinito. Utilizando el mismo método, Narita y Shindo (1997) resuelven el problema cuando la grieta está en un dominio piezoeléctrico en forma de banda y en 1999 cuando la grieta se encuentra en una banda piezoeléctrica entre dos semiespacios de material elástico. En 2002, Shindo, Minamida y Narita aplican el método de expansión de funciones de onda para resolver el problema de dos grietas alrededor de una fibra de material piezoeléctrico rodeada de una matriz epoxy. En todos estos casos los problemas son resueltos en el dominio de la frecuencia.

Para problema plano, Shindo y Ozawa (1990) obtienen, mediante la transformada de Fourier, los factores de intensidad en función de la frecuencia. En este caso estudian una onda longitudinal que incide perpendicularmente sobre una grieta en un dominio bidimensional piezoeléctrico. Shindo, Narita y Ozawa (1998) extienden este estudio al transitorio para una carga de impacto normal a la grieta. Utilizan en esta ocasión las transformadas de Fourier y Laplace.

Denda y Araki (2002) y Denda Araki y Yong (2004) desarrollan la formulación del MEC para problemas bidimensionales dinámicos en el dominio de la frecuencia y aplican esta formulación al cálculo de frecuencias y modos naturales de vibración de un domino cuadrado.

Kögl y Gaul (2000) estudian problemas tridimensionales dinámicos a partir de la solución fundamental estática obtenida por Deeg (1980) y el método de la reciporidad dual.

Daros y Antes (2000) obtienen la solución fundamental dinámica para dominios tridimensionales piezoeléctricos.

Hasta la fecha, el autor de esta tesis no tiene constancia de la publicación de trabajos en los que el MEC haya sido aplicado al estudio de problemas de fractura dinámica en dominios piezoeléctricos bidimensionales.

1.3 Organización del documento

Como ya se ha dicho el objetivo de esta tesis es la resolución del problema de fractura en dominios bidimensionales anisótropos elásticos y piezoeléctricos bajo la acción de cargas estáticas y dinámicas.

El documento se ha organizado en seis capítulos. Después de esta introducción, el segundo capítulo está dedicado a los fundamentos teóricos de los problemas estático y dinámico en los casos anisótropos elásticos y piezoeléctrico, se describe brevemente el

problema de la fractura en ambos casos y se muestran los diferentes medios que en la literatura se han empleado para calcular los factores de intensidad. Se dedican unos comentarios finales a describir, siquiera brevemente, el esquema según el que se trata el problema de la difracción de ondas por la presencia de una grieta.

El tercer capítulo se dedica a la descripción detallada de las soluciones fundamentales que han sido utilizadas. Previamente se ha realizado una explicación del método de los elementos de contorno en su formulación mediante la ecuación integral de desplazamientos. Este capítulo se cierra con otras soluciones fundamentales totalmente análogas a las utilizadas con el objetivo que indicar que admiten igual tratamiento que las soluciones programadas.

El capítulo cuatro se dedica a la formulación hipersingular del método de los elementos de contorno. En este capítulo se justifica el uso de esta formulación y se obtiene y reescribe en función de las variables que interesan para el cálculo posterior de los FI. Se muestra la idea clave de esta tesis, la idea que permite la evaluación numérica de las integrales hipersingulares de una forma genérica precisa y numéricamente robusta. También se indica como, mediante la misma idea, pueden ser tratadas la integrales singulares que aparecen en la formulación. Se describe la estrategia de discretización y se finaliza el capítulo describiendo la formulación utilizada en la determinación de los FI.

El capítulo cinco está dedicado a los resultados numéricos. Se ha tratado de establecer una sustanciosa comparación con resultados contrastados existentes en la literatura. En todos los casos se ha comprobado el caso isótropo, que esta formulación es capaz de resolver sin dificultad numérica alguna[§] y siempre que ha sido posible, con resultados anisótropos elásticos, o al menos ortótropos, en menor medida, debido a la escasez de resultados, en el caso piezoeléctrico. Como queda patente, la formulación desarrollada consigue un importante respaldo basado en el gran acuerdo obtenido en todos los problemas comparados. Para cerrar el capítulo, utilizando configuraciones resueltas en el casos anisótropo elástico o piezoeléctrico estáticos, se muestran resultados nuevos para el caso piezoeléctrico dinámico en el dominio de la frecuencia.

Finalmente el último capítulo muestra las conclusiones que su autor extrae de esta tesis y cuales son, en su opinión, las posibilidades de futuro que el trabajo desarrollado podría tener.

El documento se cierra con varios apéndices con información complementaria, incluso resultados complementarios, que se ha estimado que, por comodidad para el lector podía figurar fuera del cuerpo principal del documento.

[§]El caso isótropo es, desde el punto de vista matemático, una degeneración del caso elástico anisótropo.

Capítulo 2

Análisis de medios anisótropos elásticos y piezoeléctricos en presencia de grietas: fundamentos

2.1 Introducción

En este capítulo se revisan los fundamentos de la mecánica de la fractura elástica lineal en medios bidimensionales anisótropos elásticos y piezoeléctricos. Se consideran tanto los casos de acciones estáticas como dinámicas en el dominio de la frecuencia.

Después de describir el comportamiento anisótropo elástico se dedica una atención especial a la caracterización del problema bidimensional, estableciendo la diferencia entre problema plano generalizado y problema plano puro. La necesidad de esta distinción surge del acoplamiento existente entre acciones y efectos para este tipo de comportamiento. Este acoplamiento implica que para que se dé un problema bidimensional no sea suficiente con que geometría y cargas permanezcan invariables en una dirección, es necesario además, como se verá, exigir cierto grado de desacoplamiento en las ecuaciones que se traducirá en la anulación de algunos elementos del tensor de comportamiento.

Se muestran las dos concepciones de la solución al problema plano generalizado anisótropo elástico: el planteamiento de Eshelby, Read y Shockley (1953) y el de Lekhnitskii (1963). El primero se materializa en un formalismo matricial (Guerney, 1957; Stroh, 1958, 1962) de forma que ha pasado a la literatura como *formalismo de Stroh*. El formalismo de Stroh, desarrollado para comportamiento anisótropo elástico, tiene una gran potencia basada en su carácter matricial que ha facilitado su exitosa extensión al comportamiento piezoeléctrico (Barnett y Lothe, 1975).

A continuación, se describe el comportamiento piezoeléctrico y se presentan unas variables extendidas que permiten el tratamiento paralelo de los problemas piezoeléctrico y anisótropo elástico. Con estas variables, los conceptos y formulaciones mostrados para el caso anisótropo elástico se trasladan al problema piezoeléctrico de un modo natural.

Seguidamente se revisan los fundamentos de la mecánica de la fractura, mostrando los términos dominantes de la formulación que gobierna a las variables en el entorno del vértice de una grieta para los casos anisótropo elástico (Sih, Paris e Irwin 1965) y piezoeléctrico (Pak, 1992)

Se revisan, por último, las ecuaciones del problema dinámico que son aplicables a los dos comportamientos analizados y se particulariza la formulación para acciones dinámicas de tipo armónico. Finalmente se describe el problema de difracción de ondas, de gran interés en ingeniería, que está asociado, por ejemplo, a estudios sísmicos o de ensayos no destructivos.

2.2 Elastoestática bidimensional en medios anisótropos elásticos

2.2.1 Formulación del problema estático: ecuaciones básicas

Relaciones de comportamiento. Deformación plana y deformación plana generalizada

En un dominio elástico totalmente anisótropo, es decir, carente de planos de simetría elástica, la relación lineal elástica más general entre tensiones y deformaciones puede ser expresada en función de un tensor de comportamiento de cuarto orden con todos sus elementos no nulos:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}\epsilon_{kl} \quad (2.1)$$

Debido a consideraciones de simetría de los tensores de tensión (σ_{ij}) y deformación (ϵ_{kl}) y a consideraciones de conservación de la energía (p. ej. Lekhnitskii, 1963; Ting, 1996), la matriz de comportamiento C_{ijkl} cumple las siguientes relaciones de simetría

$$C_{ijkl} = C_{jikl} = C_{ijlk} = C_{klij} \quad (2.2)$$

En base a estas relaciones sólo 21 de las componentes de la matriz de comportamiento son diferentes.

Se verá a continuación que el hecho de que el tensor de comportamiento tenga todas sus componentes no nulas tiene importantes implicaciones a la hora de hablar de problema plano.

Como es sabido, el estado de *deformación plana* queda definido como aquél en el que los desplazamientos están contenidos en un plano y son independientes de la dirección perpendicular al mismo. Así, si en el dominio de estudio se define un sistema rectangular de referencia, $x_1 - x_2 - x_3$ y se toma el plano $x_1 - x_2$ como el plano que contiene a los desplazamientos, el estado de deformación plana estaría definido por el siguiente vector de desplazamientos

$$\mathbf{u} = (u_1(x_1, x_2), u_2(x_1, x_2), u_3) \quad (2.3)$$

siendo constante la componente u_3 , si existiese, pudiendo asumirse para ella valor 0 sin pérdida de generalidad.

En el caso isótropo, por ejemplo, si la geometría del dominio, las acciones y las condiciones de contorno (de las que se hablará más adelante) fueran independientes de x_3 y las acciones estuvieran contenidas en el plano $x_1 - x_2$ podríamos afirmar que el campo de desplazamientos es el indicado en (2.3). En el caso de que las acciones y condiciones de contorno estuvieran definidas únicamente en la dirección de x_3 tendríamos lo que se denomina un *estado antiplano de deformación* definido, en el caso más general, por un estado de desplazamientos

$$\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3(x_1, x_2)) \quad (2.4)$$

donde u_1 y u_2 serían constantes y se podrían considerar nulas sin pérdida de generalidad.

En el caso más general de anisotropía, las condiciones indicadas, independencia de geometría, acciones y condiciones de contorno con una coordenada, sólo permiten afirmar que los desplazamientos son independientes de esa coordenada pero no que estén en un plano, antes al contrario, el vector de desplazamientos tendrá la forma

$$\mathbf{u} = (u_1(x_1, x_2), u_2(x_1, x_2), u_3(x_1, x_2)) \quad (2.5)$$

y en general, existirá acoplamiento entre los desplazamientos en el plano (u_1, u_2) y los desplazamientos antiplanos (u_3). Este estado es el que se define como de *deformación plana generalizada*.

El estado de *tensión plana*, definido como el estado en que las componentes del tensor tensión están contenidas en un plano, es matemáticamente equivalente al caso de deformación plana con sólo realizar una modificación de las constantes elásticas en la forma que se indicará más adelante (Lekhnitskii, 1963). Teniendo en cuenta esta equivalencia, en adelante ambos casos serán referidos indistintamente como caso, problema o estado plano.

También puede definirse el *estado antiplano de tensión* como aquél en el que sólo las componentes σ_{13} y σ_{23} del tensor de tensiones son no nulas, e independientes de x_3 , se continúa asumiendo que las condiciones y geometría del problema no dependen de x_3 . Si bien en el caso isótropo los estados de deformación y tensión antiplana son equivalentes matemáticamente, no ocurre igual en el caso anisótropo, también como consecuencia de que las componentes del tensor de comportamiento son no nulas.

Para que se produzca el desacoplamiento que permita estudiar los problemas plano y antiplano independientemente es necesario que la matriz de comportamiento tenga algunos elementos nulos (Ting, 1996). Para poner de manifiesto cuáles son estos elementos se reescribirá la ecuación (2.1) utilizando, para el tensor de comportamiento, la notación contraída introducida por Voigt (1910), siguiendo la siguiente regla por cada pareja de índices:

$$ij \rightarrow \alpha \text{ donde } \begin{cases} \alpha = i & \text{si } i = j \\ \alpha = 9 - i - j & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

con esta regla la ecuación (2.1) queda:

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & \boxed{C_{14}} & \boxed{C_{15}} & C_{16} \\ & C_{22} & C_{23} & \boxed{C_{24}} & \boxed{C_{25}} & C_{26} \\ & & C_{33} & \boxed{C_{34}} & \boxed{C_{35}} & C_{36} \\ & & & C_{44} & C_{45} & \boxed{C_{46}} \\ & \text{sim} & & & C_{55} & \boxed{C_{56}} \\ & & & & & C_{66} \end{pmatrix}}_{C_{ij}} \begin{pmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{33} \\ 2\epsilon_{23} \\ 2\epsilon_{13} \\ 2\epsilon_{12} \end{pmatrix} \quad (2.6)$$

Si los elementos recuadrados en (2.6) son nulos, los problemas plano y antiplano se desacoplan. En rigor, mediante argumentos matemáticos, son menos los elementos que deben ser nulos, C_{34} y C_{35} quedarían fuera de esos argumentos, pero completando estos argumentos con otros de tipo físico sobre redes cristalinas (Voigt, 1910, Love, 1944; por ejemplo) se determinan los elementos indicados.

La nulidad de esos elementos indica que el plano x_1 - x_2 es de simetría elástica, se trataría pues de un *material monoclinico*. En tal caso, las relaciones de comportamiento para problemas plano y antiplano (ya desacopladas) quedan:

Problema plano

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{16} \\ & C_{22} & C_{26} \\ \text{sim} & & C_{66} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ 2\epsilon_{12} \end{pmatrix} \quad (2.7)$$

con

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_{33} &= 0 \\ \sigma_{33} &= C_{13}\epsilon_{11} + C_{23}\epsilon_{22} + 2C_{36}\epsilon_{12} \end{aligned} \right\} \text{para deformación plana}$$

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_{33} &= -\frac{C_{13}\epsilon_{11} + C_{23}\epsilon_{22} + 2C_{36}\epsilon_{12}}{\epsilon_{33}} \\ \sigma_{33} &= 0 \end{aligned} \right\} \text{para tensión plana}$$

Problema antiplano

$$\begin{pmatrix} \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{44} & C_{45} \\ C_{45} & C_{55} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2\epsilon_{23} \\ 2\epsilon_{13} \end{pmatrix} \quad (2.8)$$

El problema elástico se cerrará con las ecuaciones cinemáticas y las de equilibrio.

Relaciones cinemáticas

Son las que relacionan al tensor de pequeñas deformaciones con el vector de desplazamientos:

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (2.9)$$

Tomando en consideración la igualdad de las derivadas cruzadas de las componentes del vector de desplazamientos podemos asegurar la simetría de este tensor.

Ecuaciones de equilibrio

Las ecuaciones de equilibrio de fuerzas tienen la siguiente expresión

$$\sigma_{ij,j} + b_i = 0 \quad (2.10)$$

donde b_i son las fuerzas por unidad de volumen.

El equilibrio de momentos impone la simetría del tensor de tensión

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji} \quad (2.11)$$

Condiciones de contorno

Las ecuaciones (2.1), (2.9) y (2.10) constituyen un conjunto completo de ecuaciones diferenciales para resolver el problema elástico que necesitará de unas condiciones de contorno para tener una única solución.

Las condiciones de contorno pueden ser de dos tipos (el contorno del dominio es denotado por Γ):

- Condiciones de contorno *naturales*: tracciones impuestas.

$$p_i(\mathbf{x}_0) = \sigma_{ij} n_j \Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_0} = \bar{p}_i \text{ si } \mathbf{x}_0 \in \Gamma$$

siendo n_j la normal exterior al contorno Γ en el punto \mathbf{x}_0 .

- Condiciones de contorno *esenciales*: desplazamientos impuestos.

$$u_i(\mathbf{x}_0) = \bar{u}_i \text{ si } \mathbf{x}_0 \in \Gamma$$

Podemos encontrar estas condiciones de contorno simultáneamente sobre diferentes zonas del dominio: condiciones de contorno naturales sobre Γ_p y esenciales sobre Γ_u de manera que $\Gamma_p \cup \Gamma_u = \Gamma$ y $\Gamma_p \cap \Gamma_u = \emptyset$. Pero también podemos encontrar zonas del contorno con ambas condiciones en un mismo punto pero sobre diferentes componentes.

2.2.2 Solución de los problemas plano y antiplano. Caso anisótropo elástico

Eshelby, Read y Shockley (1953), mediante las ecuaciones de Navier y Lekhnitskii (1963), mediante funciones de tensión, establecen que los campos de desplazamiento y tensión para un problema de deformación plana generalizada han de tener la siguiente forma

$$u_i = 2 \operatorname{Re} \left(\sum_{j=1}^3 A_{ij} f_j(z_j) \right) \quad (2.12)$$

$$\sigma_{1i} = -2 \operatorname{Re} \left(\sum_{j=1}^3 L_{ij} \mu_j f_j'(z_j) \right) ; \sigma_{2i} = 2 \operatorname{Re} \left(\sum_{j=1}^3 L_{ij} f_j'(z_j) \right) \quad (2.13)$$

donde:

$$i = 1, 2, 3$$

μ_j, A_{ij}, L_{ij} son valores complejos que se obtienen a partir de las propiedades del material en la forma que se verá más adelante.

$z_j = x_1 + \mu_j x_2$ es la transformación al plano complejo del dominio real mediante el valor complejo μ_j .

f es una función analítica arbitraria (y f' su derivada) que habrá que determinar para cada problema.

Re indica parte real.

Es justamente en la determinación de μ_j, A_{ij}, L_{ij} donde las formulaciones de Lekhnitskii y la de Eshelby, Read y Shockley, difieren en mayor medida. Como se ha indicado, la formulación de Eshelby, Read y Shockley es conocida en la bibliografía como formalismo de Stroh desde la publicación de este autor en 1958, extendida en una posterior de 1962, y así será también referida en este trabajo.

Formulación de Lekhnitskii (1963)

Partiendo de la definición del tensor de tensión mediante sendas funciones de tensión bidimensionales, Lekhnitskii demuestra que la solución del problema de deformación plana generalizada sólo es posible si se satisface lo que denomina *ecuación característica*:

$$l_2(\mu) l_4(\mu) - l_3^2(\mu) = 0 \quad (2.14)$$

donde $l_i(\mu)$ es un polinomio de orden i en μ definido por:

$$\begin{aligned} l_2(\mu) &= \beta_{55}\mu^2 - 2\beta_{45}\mu + \beta_{44} \\ l_3(\mu) &= \beta_{15}\mu^3 - (\beta_{14} + \beta_{56})\mu^2 + (\beta_{25} + \beta_{46})\mu - \beta_{24} \\ l_4(\mu) &= \beta_{11}\mu^4 - 2\beta_{16}\mu^3 + (2\beta_{12} + \beta_{66})\mu^2 - 2\beta_{26}\mu + \beta_{22} \end{aligned} \quad (2.15)$$

β_{ij} son las constantes elásticas reducidas, definidas a partir de la inversa del tensor de comportamiento C_{ij} de la expresión (2.6) como

$$\beta_{ij} = a_{ij} - a_{i3}a_{3j}/a_{33} \quad (2.16)$$

siendo $a_{ij} = C_{ij}^{-1}$.

Como consecuencia de que la energía de deformación es positiva y dado que los coeficientes de la ecuación característica son reales se infiere que las raíces de (2.14) son complejas o imaginarias puras y aparecen como pares de complejos conjugados. De las seis raíces de (2.14) sólo aquellas que tienen la parte imaginaria positiva son las que se consideran en (2.13), es decir:

$$\mu_j = \alpha_j + i \beta_j \text{ con } \beta_j > 0 \quad ; \quad j = 1, 2, 3 \quad ; \quad i = \sqrt{-1} \quad (2.17)$$

La matriz \mathbf{A} de (2.12) viene dada, por columnas, por:

$$\mathbf{A}_i = \begin{pmatrix} a_{11}\mu_i^2 + a_{12} - a_{16}\mu_i - \frac{l_3(\mu_i)}{l_2(\mu_i)}(a_{15}\mu_i - a_{14}) \\ a_{21}\mu_i + a_{22}/\mu_i - a_{26} - \frac{l_3(\mu_i)}{l_2(\mu_i)}(a_{25} - a_{24}/\mu_i) \\ a_{41}\mu_i + a_{42}/\mu_i - a_{46} - \frac{l_3(\mu_i)}{l_2(\mu_i)}(a_{45} - a_{44}/\mu_i) \end{pmatrix} ; \quad i = 1, 2 \quad (2.18)$$

$$\mathbf{A}_3 = \begin{pmatrix} -\frac{l_3(\mu_3)}{l_4(\mu_3)}(a_{11}\mu_3^2 + a_{12} - a_{16}\mu_3) + a_{15}\mu_3 - a_{14} \\ -\frac{l_3(\mu_3)}{l_4(\mu_3)}(a_{21}\mu_3 + a_{22}/\mu_3 - a_{26}) + a_{25} - a_{24}/\mu_3 \\ -\frac{l_3(\mu_3)}{l_4(\mu_3)}(a_{41}\mu_3 + a_{42}/\mu_3 - a_{46}) + a_{45} - a_{44}/\mu_3 \end{pmatrix} \quad (2.19)$$

y la matriz \mathbf{L} de (2.13) es:

$$L = \begin{pmatrix} -\mu_1 & -\mu_2 & \frac{l_3(\mu_3)}{l_4(\mu_3)}\mu_3 \\ 1 & 1 & -\frac{l_3(\mu_3)}{l_4(\mu_3)} \\ \frac{l_3(\mu_3)}{l_2(\mu_3)} & \frac{l_3(\mu_3)}{l_2(\mu_3)} & -1 \end{pmatrix} \quad (2.20)$$

En el caso en que se produzca el desacoplamiento entre los problemas plano y antiplano, por ejemplo para material monoclinico, los coeficientes de $l_3(\mu)$ son nulos y la ecuación característica (2.14) se desdobra en dos:

$$l_4(\mu) = 0 ; \quad l_2(\mu) = 0 \quad (2.21)$$

la primera de las cuales es de aplicación para el caso plano y la segunda para el antiplano. Todo lo afirmado antes acerca de las raíces del polinomio característico es aplicable aquí para los polinomios $l_4(\mu)$ y $l_2(\mu)$.

En este caso, en los sumatorios de las expresiones (2.12) y (2.13) se utilizan los sumandos $j = 1, 2$; para el caso plano y el sumando $j = 3$ para el antiplano y las matrices \mathbf{A} y \mathbf{L} quedan en la forma

$$\mathbf{A} = \left(\begin{array}{cc|c} a_{11}\mu_1^2 + a_{12} - a_{16}\mu_1 & a_{11}\mu_2^2 + a_{12} - a_{16}\mu_2 & 0 \\ a_{21}\mu_1 + \frac{a_{22}}{\mu_1} - a_{26} & a_{21}\mu_2 + \frac{a_{22}}{\mu_2} - a_{26} & 0 \\ \hline 0 & 0 & a_{45} - \frac{a_{44}}{\mu_3} \end{array} \right) := \left(\begin{array}{c|c} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{array} \right) \quad (2.22)$$

$$L = \left(\begin{array}{cc|c} -\mu_1 & -\mu_2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -1 \end{array} \right) := \left(\begin{array}{c|c} \mathbf{L}_{11} & \mathbf{L}_{12} \\ \mathbf{L}_{21} & \mathbf{L}_{22} \end{array} \right) \quad (2.23)$$

de las cuales para el caso plano sólo son necesarias las submatrices \mathbf{A}_{11} y \mathbf{L}_{11} y para el antiplano las \mathbf{A}_{22} y \mathbf{L}_{22} .

En el caso plano los coeficientes β_{ij} de la ecuación característica $l_4(\mu) = 0$ serán:

$$\beta_{ij} = \begin{cases} a_{ij} & \text{para tensión plana} \\ a_{ij} - a_{i3}a_{3j}/a_{33} & \text{para deformación plana} \end{cases} \quad (2.24)$$

Formalismo de Stroh (formulación de Eshelby, Read y Shockley, 1953)

En la formulación de Eshelby, Read y Shockley (1953) para el problema de deformación plana generalizada, las relaciones cinemáticas (2.9) y de comportamiento (2.1) son introducidas en la ecuación de equilibrio (2.10) para, de esta forma, obtener las ecuaciones de

Navier aplicadas al caso bidimensional, que, si las fuerzas de volumen son nulas, pueden ser escritas, en notación de subíndices, como:

$$C_{\alpha ik\beta} u_{k,\alpha\beta} = 0 \quad (2.25)$$

donde los subíndices griegos varían de 1 a 2 y los latinos de 1 a 3 y como en el caso anterior, se está asumiendo que la geometría, las acciones y las condiciones de contorno no varían con x_3 .

La ecuación (2.25) es una ecuación diferencial homogénea de segundo orden en x_1 y x_2 . La solución más general de esta ecuación será una función analítica arbitraria (f) de la combinación lineal de las variables independientes y puede expresarse, sin pérdida de generalidad, como:

$$u_i = A_i f(x_1 + \mu_k x_2) \quad (2.26)$$

Introduciendo (2.26) en (2.25) es fácil llegar a que A_i y μ_i deben satisfacer el siguiente problema de autovalores y autovectores:

$$\sum_{j=1}^3 [C_{2ij2} \mu_k^2 + (C_{1ij2} + C_{2ij1}) \mu_k + C_{1ij1}] A_{jk} = 0 \quad (\text{sin suma en } k) \quad (2.27)$$

del que se obtienen seis autovalores y sus correspondientes autovectores que pueden ser normalizados arbitrariamente sin que la solución se vea afectada. La ecuación característica en esta formulación resulta de imponer

$$\det[C_{2ij2} \mu_k^2 + (C_{1ij2} + C_{2ij1}) \mu_k + C_{1ij1}] = 0 \quad (2.28)$$

que garantiza la existencia de solución no trivial de (2.27). Sobre las soluciones de esta ecuación característica pueden hacerse las mismas afirmaciones que sobre las de (2.14). Se seguirá para sus raíces la misma notación empleada en (2.17).

Sustituyendo (2.26) en (2.9) y éstas en la ecuación de comportamiento (2.1), se obtiene para la matriz \mathbf{L} (2.13) la siguiente expresión:

$$L_{ik} = \sum_{j=1}^3 (\mu_k C_{2ij2} + C_{2ij1}) A_{jk} \quad (2.29)$$

Como el caso anterior, para la resolución de problema plano se utilizarán sólo los sumandos correspondientes a $j = 1, 2$ y para el antiplano sólo el sumando $j = 3$. Para obtener la solución al problema plano en condiciones de deformación plana se utilizarán las expresiones (2.27), (2.28) y (2.29) junto con las (2.12) y (2.13) para la determinación de la función f que cumpla las condiciones de contorno. Si se quieren obtener resultados para condiciones de tensión plana se emplearán las mismas expresiones pero utilizando constantes modificadas en la forma (Suo, 1990):

$$C'_{ij} = C_{ij} - C_{i3}C_{3j}/C_{33} \quad (2.30)$$

donde los índices han sido contraídos según se indica en (2.6).

2.3 Elastoestática bidimensional en medios piezoeléctricos

El comportamiento piezoeléctrico consiste en un acoplamiento entre fenómenos mecánicos y eléctricos asociados a asimetrías de las estructuras cristalinas que presentan algunos materiales. Estos materiales adquieren polaridad eléctrica ante sollicitaciones de tipo mecánico y recíprocamente, son capaces de sufrir deformación ante sollicitaciones de tipo eléctrico.

Otra característica importante en estos materiales es su anisotropía, derivada de las mencionadas asimetrías en sus estructuras cristalinas.

Los materiales piezoeléctricos de utilidad práctica son materiales cuya piezoelectricidad ha sido inducida mediante un proceso de polarización. Esto es así porque los materiales que son piezoeléctricos de un modo natural (por ejemplo cuarzo, topacio, turmalina) lo son en escasa medida de modo que sus propiedades los hacen poco viables desde un punto de vista práctico.

Como se ha indicado, los materiales piezoeléctricos sintéticos más usuales son piezocerámicas de dos familias fundamentalmente: titanatos de bario y plomo circonato titanatos conocidos como PZT. Las propiedades dieléctricas y piezoeléctricas (responsables del acoplamiento entre ambos fenómenos) de estos materiales son, en general, dos órdenes de magnitud superiores a las propiedades de los materiales piezoeléctricos naturales.

2.3.1 Formulación del problema estático: ecuaciones básicas

Las nuevas variables que intervienen en el problema eléctrico son:

Potencial eléctrico: $\varphi(x_1, x_2)$

Carga eléctrica: $q(x_1, x_2)$

Campo eléctrico: $\mathbf{E}(x_1, x_2)$, es el gradiente del potencial.

Desplazamiento eléctrico o inducción eléctrica: $\mathbf{D}(x_1, x_2)$

Las relaciones entre estas variables son las siguientes:

$$D_{i,i} - q_v = 0 \quad (2.31)$$

$$E_i(x_1, x_2) = -\varphi_{,i}(x_1, x_2) \quad (2.32)$$

$$D_i(x_1, x_2) = \varepsilon_{ij} E_j(x_1, x_2) \quad (2.33)$$

siendo q_v la carga eléctrica por unidad de volumen y ε_{ij} un tensor simétrico (Deeg, 1980) cuyas componentes se denominan constantes de permitividad del medio.

Las expresiones (2.31), (2.32) y (2.33) son análogas, respectivamente, a las relaciones de equilibrio, cinemáticas y de comportamiento para el caso elástico.

Vectores y tensores extendidos.

Considerando las analogías indicadas, con la idea de escribir las ecuaciones que gobiernan el problema piezoeléctrico en un forma compacta, coherente con la formulación elástica, se introducen los vectores y tensores extendidos que agrupan a las variables análogas eléctricas y elásticas (Barnett y Lothe, 1975; Deeg, 1980).

vector desplazamientos extendido $u_I = \begin{cases} u_i & \text{si } I = 1, 2, 3 \\ \varphi & \text{si } I = 4 \end{cases}$	tensor deformación extendido $\epsilon_{Ij} = \begin{cases} \epsilon_{ij} & \text{si } I = 1, 2, 3 \\ -E_j & \text{si } I = 4 \end{cases}$	(2.34)
vector fuerzas de volumen extendido $b_I = \begin{cases} b_i & \text{si } I = 1, 2, 3 \\ -q_v & \text{si } I = 4 \end{cases}$	tensor tensión extendido $\sigma_{iJ} = \begin{cases} \sigma_{ij} & \text{si } J = 1, 2, 3 \\ D_i & \text{si } J = 4 \end{cases}$	

Nótese que se utilizan índices en mayúscula para denotar la dimensión que se ha extendido. Independientemente de que en problemas planos el índice 3 no sea necesario se mantendrá el índice 4 para denotar la componente eléctrica de los vectores y tensores extendidos.

Ecuaciones de equilibrio

Las ecuaciones de equilibrio (2.10) y sus equivalentes eléctricas (2.31) en función de las variables extendidas quedan:

$$\sigma_{iJ,i} + b_J = 0 \quad (2.35)$$

Relaciones cinemáticas y ecuaciones campo eléctrico-potencial

Estas ecuaciones no admiten una expresión compacta en función de las variables extendidas y aunque han sido ya presentadas por separado (2.9) y (2.32) se escriben nuevamente por mantener el orden de la exposición

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) ; E_i = -\varphi_{,i} \quad (2.36)$$

Relaciones de comportamiento

A las relaciones lineales de comportamiento elástico (2.1) y eléctrico (2.33) hay que añadir una relación lineal entre las variables elásticas y las eléctricas. Se introduce el *tensor de propiedades piezoeléctricas*, e_{lij} , reescribiendo las relaciones de comportamiento en la forma

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \epsilon_{kl} - e_{kij} E_k \quad (2.37a)$$

$$D_i = e_{ikl} \epsilon_{kl} + \epsilon_{ik} E_k \quad (2.37b)$$

El tensor de propiedades piezoeléctricas cumple las siguientes relaciones de simetría (Deeg, 1980):

$$e_{lij} = e_{lji} \quad (2.38)$$

Utilizando los tensores extendidos de tensión y deformación las relaciones de comportamiento piezoeléctrico (2.37a) y (2.37b) pueden ser reescritas de forma análoga a la ecuación de comportamiento elástico

$$\sigma_{iJ} = C_{iJKL} \epsilon_{KL} \quad (2.39)$$

donde C_{iJKL} , se define como (Barnett y Lothe, 1975):

$$C_{iJKL} = \begin{cases} C_{ijkl} & \text{si } J, K = 1, 2, 3 \\ e_{lij} & \text{si } J = 1, 2, 3; K = 4 \\ e_{ikl} & \text{si } J = 4; K = 1, 2, 3 \\ -\epsilon_{il} & \text{si } J = K = 4 \end{cases} \quad (2.40)$$

Las propiedades de simetría de los tensores C_{ijkl} (2.2), e_{ikl} (2.38) y ϵ_{ij} ; permiten establecer la siguiente propiedad de simetría para el tensor C_{iJKL}

$$C_{iJKL} = C_{lKJi} \quad (2.41)$$

Contrayendo índices las relaciones de comportamiento (2.39) pueden ser escritas:

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \\ D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} & e_{11} & e_{21} & e_{31} \\ & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} & e_{12} & e_{22} & e_{32} \\ & & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} & e_{13} & e_{23} & e_{33} \\ & & & C_{44} & C_{45} & C_{46} & e_{14} & e_{24} & e_{34} \\ & & & & C_{55} & C_{56} & e_{15} & e_{25} & e_{35} \\ & & & & & C_{66} & e_{16} & e_{26} & e_{36} \\ & & sim & & & & -\varepsilon_{11} & -\varepsilon_{12} & -\varepsilon_{13} \\ & & & & & & & -\varepsilon_{22} & -\varepsilon_{21} \\ & & & & & & & & -\varepsilon_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{33} \\ 2\epsilon_{23} \\ 2\epsilon_{13} \\ 2\epsilon_{12} \\ -E_1 \\ -E_2 \\ -E_3 \end{pmatrix} \quad (2.42)$$

Como se ha indicado, los materiales piezoeléctricos de utilidad práctica son materiales cuya piezoelectricidad ha sido inducida mediante un proceso de polarización. Estos materiales son isótropos antes de la polarización y después de ser polarizados muestran un comportamiento elástico transversalmente isótropo. Si asumimos que la dirección de polarización es la dirección x_3 , el plano $x_1 - x_2$ queda como plano de isotropía y la matriz de comportamiento, utilizando contracción de índices, adopta la forma

$$\begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e_{31} \\ & C_{11} & C_{13} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e_{31} \\ & & C_{33} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e_{33} \\ & & & C_{44} & 0 & 0 & 0 & e_{15} & 0 \\ & & & & C_{44} & 0 & e_{15} & 0 & 0 \\ & & & & & \frac{C_{11}-C_{12}}{2} & 0 & 0 & 0 \\ & & sim & & & & -\varepsilon_{11} & 0 & 0 \\ & & & & & & & -\varepsilon_{11} & 0 \\ & & & & & & & & -\varepsilon_{33} \end{pmatrix}$$

Condiciones de contorno.

El sistema de ecuaciones diferenciales definido por (2.35), (2.36) y (2.39) necesita de la aplicación de condiciones de contorno. Se denota nuevamente por Γ el contorno del dominio. Las condiciones de contorno que pueden encontrarse pueden ser:

- Condiciones de contorno *naturales*:

$$p_i(\mathbf{x}_0) = \sigma_{ij} n_j|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_0} = \bar{p}_i \text{ si } \mathbf{x}_0 \in \Gamma$$

$$q_s(\mathbf{x}_0) = -D_i n_i|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_0} = \bar{q}_s \text{ si } \mathbf{x}_0 \in \Gamma$$

donde

n_i es la normal exterior a Γ en x_0

q_s la carga por unidad de superficie

- Condiciones de contorno *esenciales*:

$$u_i(\mathbf{x}_0) = \bar{u}_i \text{ si } \mathbf{x}_0 \in \Gamma$$

$$\varphi(\mathbf{x}_0) = \bar{\varphi} \text{ si } \mathbf{x}_0 \in \Gamma$$

En general podrán existir zonas del contorno con uno u otro tipo de condiciones o zonas del contorno con condiciones mixtas, es decir condiciones naturales según unas componentes y esenciales según las otras.

Las condiciones de contorno en las caras de una grieta merecen consideración especial y serán desarrolladas en mayor detalle en el epígrafe 2.4.3.

2.3.2 Solución del problema plano piezoeléctrico

Las dos formulaciones indicadas en 2.2.2 para medios anisótropos elásticos han sido extendidas al caso piezoeléctrico. El formalismo de Stroh fue extendido por Barnett y Lothe en 1975 y desde entonces son muy numerosos los trabajos que han seguido esta formulación, por ejemplo: Pak (1990a, 1990b), Suo (1992), Pan (1999).

La formulación de Lekhnitskii extendida al problema piezoeléctrico puede encontrarse, entre otros, en los trabajos de Sosa (1991, 1992), Gao y Fan (1999), Xu y Rajapakse (1999, 2000, 2001).

Denda y Lua (1999) establecen una formulación híbrida partiendo de la función de tensión empleada en la formulación de Lekhnitskii pero con un desarrollo matricial siguiendo el esquema del formalismo de Stroh.

En este trabajo sólo se mostrará la extensión del formalismo de Stroh, por ser más inmediata que la de la formulación de Lekhnitskii que presenta una complicación algebraica considerable sin ventajas destacables.

Formalismo de Stroh

Mediante consideraciones análogas a las seguidas para comportamiento anisótropo, se puede afirmar (Suo, Kuo, Barnett y Willis, 1992) que si sobre un dominio piezoeléctrico cuya geometría no varía con x_3 , se establecen acciones y condiciones de contorno

igualmente independientes de x_3 , los desplazamientos y tensiones, en sentido extendido, obedecen a expresiones totalmente paralelas a las (2.12) y (2.13):

$$u_I = \{u_i, \varphi\} = 2 \operatorname{Re} \left(\sum_{J=1}^4 A_{IJ} f_J(z_J) \right) \quad (2.43)$$

$$\sigma_{II} = \{\sigma_{1j}, D_1\} = -2 \operatorname{Re} \left(\sum_{J=1}^4 L_{IJ} \mu_J f'_J(z_J) \right) \quad (2.44a)$$

$$\sigma_{2I} = \{\sigma_{2j}, D_2\} = 2 \operatorname{Re} \left(\sum_{J=1}^4 L_{IJ} f'_J(z_J) \right) \quad (2.45a)$$

donde los sumatorios se realizarían para $J= 1, 2, 3, 4$ para el caso de deformación plana generalizada, $J= 1, 2, 4$ en el caso de problema plano y para $J= 3, 4$ para el caso antiplano. Por razonamientos paralelos a los del caso anisótropo, las raíces μ_I y las matrices \mathbf{A} y \mathbf{L} , pueden ser determinados a partir de

$$\det[C_{2IJ2} \mu_K^2 + (C_{1IJ2} + C_{2IJ1}) \mu_K + C_{1IJ1}] = 0 \quad (2.46)$$

$$\sum_{J=1}^4 [C_{2IJ2} \mu_K^2 + (C_{1IJ2} + C_{2IJ1}) \mu_K + C_{1IJ1}] A_{JK} = 0 \quad (2.47)$$

$$L_{IK} = \sum_{i=1}^4 (\mu_K C_{2IJ2} + C_{2IJ1}) A_{JK} \quad (2.48)$$

En este caso, la ecuación característica (2.46) será de orden 8 (6 en el caso plano) con cuatro parejas de raíces complejas conjugadas de las cuales, nuevamente, aquellas que tienen la parte imaginaria positiva y sus respectivos autovectores, son las que se consideran en las expresiones (2.43) a (2.48).

Para el caso anisótropo elástico, Stroh (1962) siguiendo la línea abierta por Guerne (1957) reformula estas expresiones para la obtención de las matrices \mathbf{A} y \mathbf{L} en un único problema de autovectores. Para el caso piezoeléctrico esta reformulación es igualmente aplicable, ya que se basa en expresiones matriciales igualmente válidas en ambos contextos.

Pasando, por simplicidad, a notación matricial con el siguiente cambio de notación:

$$\mathbf{C}_{11} := C_{1IJ1} ; \mathbf{C}_{12} := C_{1IJ2} ; \mathbf{C}_{21} := C_{2IJ1} ; \mathbf{C}_{22} := C_{2IJ2} ; \mathbf{A}_K := A_{JK} ; \mathbf{L}_K := L_{IK} \quad (2.49)$$

las ecuaciones (2.47 y 2.48) pueden escribirse, respectivamente, como:

$$[\mathbf{C}_{22} \mu_K^2 + (\mathbf{C}_{12} + \mathbf{C}_{21}) \mu_K + \mathbf{C}_{11}] \mathbf{A}_K = 0 \quad (2.50)$$

$$\mathbf{L}_K = (\mathbf{C}_{22}\mu_K + \mathbf{C}_{21}) \mathbf{A}_K \quad (2.51)$$

donde no existe suma en K .

Combinando ambas expresiones se obtiene otra expresión para la matriz \mathbf{L} :

$$\mathbf{L}_K = -\frac{1}{\mu_K}(\mathbf{C}_{11} + \mu_K \mathbf{C}_{12}) \mathbf{A}_K \quad (2.52)$$

Las expresiones (2.51 y 2.52) pueden ser escritas en una sólo ecuación matricial en la forma

$$\left(\begin{array}{c|c} -\mathbf{C}_{22}^{-1}\mathbf{C}_{21} & -\mathbf{C}_{22}^{-1} \\ \hline -\mathbf{C}_{12}\mathbf{C}_{22}^{-1}\mathbf{C}_{21} + \mathbf{C}_{11} & -\mathbf{C}_{12}\mathbf{C}_{22}^{-1} \end{array} \right) \begin{pmatrix} \mathbf{A} \\ \mathbf{L} \end{pmatrix} = \mu \begin{pmatrix} \mathbf{A} \\ \mathbf{L} \end{pmatrix} \quad \text{ó} \quad \mathbf{N}\mathbf{v} = \mu\mathbf{v} \quad (2.53)$$

siendo

$$\mathbf{N} = \left(\begin{array}{c|c} -\mathbf{C}_{22}^{-1}\mathbf{C}_{21} & -\mathbf{C}_{22}^{-1} \\ \hline -\mathbf{C}_{12}\mathbf{C}_{22}^{-1}\mathbf{C}_{21} + \mathbf{C}_{11} & -\mathbf{C}_{12}\mathbf{C}_{22}^{-1} \end{array} \right); \quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} \mathbf{A} \\ \mathbf{L} \end{pmatrix} \quad (2.54)$$

El problema de la determinación de μ_K , \mathbf{A} y \mathbf{L} queda transformado en el cálculo de los autovalores y autovectores de la matriz \mathbf{N} . La existencia de la inversa de \mathbf{C}_{22} está garantizada por el carácter positivo de la energía de deformación (Stroh, 1962). Como se ha comentado, las expresiones (2.49) a (2.54) se pueden trasladar al caso anisótropo elástico sin más que utilizar subíndices en minúsculas.

2.4 Mecánica de fractura lineal elástica. Materiales anisótropos elásticos y piezoeléctricos

2.4.1 Introducción

La determinación de tensiones en la inmediación de defectos en el seno de los materiales ha sido, probablemente, uno de los aspectos más estudiados en ingeniería mecánica desde que se tuvo conciencia de cómo la presencia de defectos provocaba la proliferación de grietas en los materiales y esto a su vez acortaba la vida útil de los componentes mecánicos o las estructuras.

Los materiales compuestos están formados por dos o más fases de características mecánicas muy diferentes lo que les confiere una fuerte tendencia a desarrollar grietas. Esta tendencia es también muy acusada en los materiales piezoeléctricos que, como se ha comentado, son materiales cerámicos que están caracterizados por una sensible fragilidad.

Otra característica de estos materiales es que su comportamiento no es isótropo y han de ser estudiados incorporando una relación tensión deformación de tipo anisótropa o, cuando menos, ortótropa.

En esta sección se muestran los campos de desplazamiento y tensión en el entorno del vértice de una grieta en el seno de un material anisótropo elástico (Sih, Paris e Irwin, 1965; Sih y Liebowitz, 1968) y en el seno de un material piezoeléctrico (Pak, 1992)

En todas estas expresiones se pone de manifiesto que, como en el caso isótropo, el comportamiento de las tensiones alrededor del vértice de la grieta es del tipo $1/\sqrt{r}$ y el de los desplazamientos del tipo \sqrt{r} , siendo r la distancia medida desde el vértice de la grieta.

Igualmente puede verse como la caracterización de las tensiones y los desplazamientos en esta zona depende del factor de intensidad de tensiones que en el caso piezoeléctrico habrá que entender en sentido extendido, es decir, FI de tensiones y desplazamiento eléctrico.

Por este motivo en esta sección se hace una revisión de los métodos que pueden encontrarse en la literatura para la determinación de este parámetro, cuya determinación resulta esencial para la caracterización de problemas como la determinación de la vida a fatiga de los componentes mecánicos o el estudio del crecimiento de grietas.

2.4.2 Desplazamientos y tensiones en el vértice de grieta. Caso anisótropo elástico

Han sido muchos los trabajos que se han dedicado a la caracterización de los desplazamientos y tensiones en el entorno del vértice de grietas, entre otros: Williams (1952), Irwin (1957), para comportamiento isótropo; Williams (1959), para grietas en interfases de materiales isótropos; Sih, Paris e Irwin (1965) Sih y Liebowitz (1968), para comportamiento anisótropo; Ting (1986, 1990) para grietas en interfases de bimateriales anisótropos o Pak (1992) para grietas en materiales piezoeléctricos.

Adoptando, para describir los campos de desplazamientos y las tensiones, sendos sistemas de referencia, rectangular y polar, con origen en el vértice de la grieta (figura 2.1) y definiendo los tres modos de apertura de grieta como en el caso isótropo (figura 2.2), los términos predominantes de los campos de desplazamiento y tensión son (Sih, Paris e Irwin, 1965) los que aparecen en las expresiones (2.55a) a (2.60b).

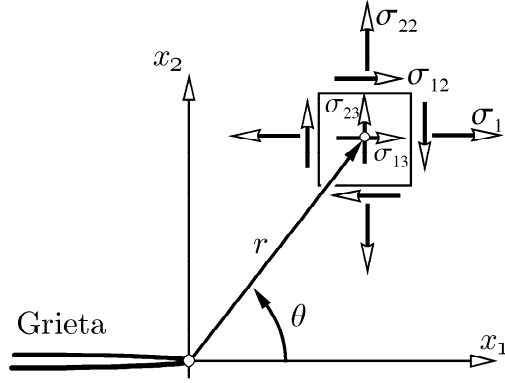


Figura 2.1: Tensiones y sistemas de referencia en el entorno del vértice de grieta.

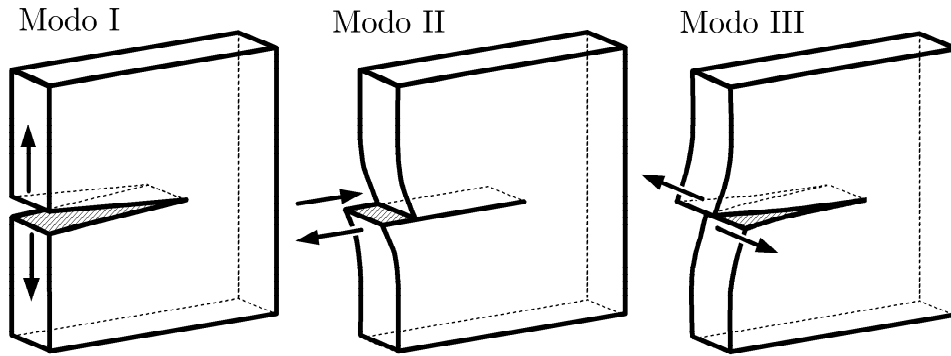


Figura 2.2: Modos de apertura de grieta.

Problema plano, carga simétrica respecto del plano de la grieta

Desplazamientos

$$u_1 = K_I \sqrt{\frac{2r}{\pi}} \operatorname{Re} \left[\frac{\mu_1 A_{12} \sqrt{\cos \theta + \mu_2 \operatorname{sen} \theta} - \mu_2 A_{11} \sqrt{\cos \theta + \mu_1 \operatorname{sen} \theta}}{\mu_1 - \mu_2} \right] \quad (2.55a)$$

$$u_2 = K_I \sqrt{\frac{2r}{\pi}} \operatorname{Re} \left[\frac{\mu_1 A_{22} \sqrt{\cos \theta + \mu_2 \operatorname{sen} \theta} - \mu_2 A_{21} \sqrt{\operatorname{sen} \theta + \mu_1 \operatorname{sen} \theta}}{\mu_1 - \mu_2} \right] \quad (2.55b)$$

Tensiones

$$\sigma_1 = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \operatorname{Re} \left[\frac{\mu_1 \mu_2}{\mu_1 - \mu_2} \left(\frac{\mu_2}{\sqrt{\cos \theta + \mu_2 \operatorname{sen} \theta}} - \frac{\mu_1}{\sqrt{\cos \theta + \mu_1 \operatorname{sen} \theta}} \right) \right] \quad (2.56a)$$

$$\sigma_2 = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \operatorname{Re} \left[\frac{1}{\mu_1 - \mu_2} \left(\frac{\mu_1}{\sqrt{\cos \theta + \mu_2 \operatorname{sen} \theta}} - \frac{\mu_2}{\sqrt{\cos \theta + \mu_1 \operatorname{sen} \theta}} \right) \right] \quad (2.56b)$$

$$\sigma_{12} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \operatorname{Re} \left[\frac{\mu_1 \mu_2}{\mu_1 - \mu_2} \left(\frac{1}{\sqrt{\cos \theta + \mu_1 \operatorname{sen} \theta}} - \frac{1}{\sqrt{\cos \theta + \mu_2 \operatorname{sen} \theta}} \right) \right] \quad (2.56c)$$

Problema plano, carga antisimétrica respecto del plano de la grieta

Desplazamientos

$$u_1 = K_{II} \sqrt{\frac{2r}{\pi}} \operatorname{Re} \left[\frac{A_{12} \sqrt{\cos \theta + \mu_2 \sin \theta} - A_{11} \sqrt{\cos \theta + \mu_1 \sin \theta}}{\mu_1 - \mu_2} \right] \quad (2.57a)$$

$$u_2 = K_{II} \sqrt{\frac{2r}{\pi}} \operatorname{Re} \left[\frac{A_{22} \sqrt{\cos \theta + \mu_2 \sin \theta} - A_{21} \sqrt{\cos \theta + \mu_1 \sin \theta}}{\mu_1 - \mu_2} \right] \quad (2.57b)$$

Tensiones

$$\sigma_1 = \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \operatorname{Re} \left[\frac{1}{\mu_1 - \mu_2} \left(\frac{\mu_2^2}{\sqrt{\cos \theta + \mu_2 \sin \theta}} - \frac{\mu_1^2}{\sqrt{\cos \theta + \mu_1 \sin \theta}} \right) \right] \quad (2.58a)$$

$$\sigma_2 = \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \operatorname{Re} \left[\frac{1}{\mu_1 - \mu_2} \left(\frac{1}{\sqrt{\cos \theta + \mu_2 \sin \theta}} - \frac{1}{\sqrt{\cos \theta + \mu_1 \sin \theta}} \right) \right] \quad (2.58b)$$

$$\sigma_{12} = \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \operatorname{Re} \left[\frac{1}{\mu_1 - \mu_2} \left(\frac{\mu_2}{\sqrt{\cos \theta + \mu_1 \sin \theta}} - \frac{\mu_1}{\sqrt{\cos \theta + \mu_2 \sin \theta}} \right) \right] \quad (2.58c)$$

Problema Antiplano

Desplazamientos

$$u_3 = K_{III} \sqrt{\frac{2r}{\pi}} \operatorname{Re} \left(\frac{\sqrt{\cos \theta + \mu_3 \sin \theta}}{C_{45} - \mu_3 C_{44}} \right) \quad (2.59)$$

Tensiones

$$\sigma_{13} = -\frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} \operatorname{Re} \left(\frac{\mu_3}{\sqrt{\cos \theta + \mu_3 \sin \theta}} \right) \quad (2.60a)$$

$$\sigma_{23} = -\frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} \operatorname{Re} \left(\frac{1}{\sqrt{\cos \theta + \mu_3 \sin \theta}} \right) \quad (2.60b)$$

donde

K_I , K_{II} y K_{III} son los factores de intensidad de tensión para los modos I, II y III de apertura de grieta

μ_1 , μ_2 y μ_3 son las raíces de la ecuación característica obtenidas según (2.14) o (2.28)

A_{ij} es la matriz definida por (2.22) o por (2.27)

C_{45} y C_{44} son constantes del material según la ecuación de comportamiento (2.6).

2.4.3 Desplazamientos y tensiones en el vértice de grieta. Caso piezoeléctrico

En el caso de una grieta en un medio piezoeléctrico se ha de considerar un nuevo “modo de apertura” de grieta. Así como los modos de apertura *I*, *II* y *III*, para problema elástico, se identifican con un salto en los desplazamientos según las direcciones del sistema de referencia: Δu_1 , Δu_2 y Δu_3 ; teniendo en cuenta la definición del vector extendido de desplazamientos para el caso piezoeléctrico, expresiones (2.34), se denota por *modo IV* al asociado con un salto en el potencial eléctrico a través de las superficies de la grieta, $\Delta\varphi$. El factor de intensidad asociado a este modo se denomina factor de intensidad de desplazamiento eléctrico.

Si la grieta está en el seno de un material piezoeléctrico, el comportamiento de las tensiones extendidas (σ_{iJ}) en la zona dominada por la singularidad muestra un comportamiento de tipo $1/\sqrt{r}$ igual que en el caso elástico (Kou y Barnett, 1990; Sosa, 1991, 1992; Pak, 1992) y lo mismo ocurre con el comportamiento de los desplazamientos extendidos (u_J), del tipo \sqrt{r} .

Las condiciones de contorno para las superficies de la grieta no es aún un tema cerrado (Ou y Chen, 2003). Suelen ser consideradas tres tipos de condiciones de contorno:

- Condiciones de *grieta permeable*.

Denotando por $+$ y $-$ las superficies superior e inferior de la grieta, la condición de contorno de grieta permeable supone que el potencial y la carga eléctrica normal a ambas caras, son iguales:

$$\varphi^+ = \varphi^- ; \quad D_n^+ = D_n^- \quad (2.61)$$

Con esta condición de contorno, adoptada por Parton (1976) puede afirmarse que la grieta no existe a efectos eléctricos. Esta situación es poco defendible desde un punto de vista físico dados los valores usuales de permitividad de los medios involucrados en el fenómeno. La permitividad de las cerámicas piezoeléctricas más usuales son, cuando menos, tres órdenes de magnitud superior a la permitividad del medio que podemos encontrar en la grieta, por ejemplo aire.

- Condiciones de *grieta impermeable*.

Más realista que la anterior, esta condición consiste en suponer que la inducción eléctrica en el medio que ocupa la grieta es despreciable y que no existe carga eléctrica normal a la superficie, es decir, se trataría de una superficie libre respecto de los

desplazamientos eléctricos:

$$D_n^+ = D_n^- = 0 \quad (2.62)$$

donde el subíndice n indica la normal a la superficie de grieta.

Esta condición de contorno ha sido ampliamente utilizada (p. ej. Deeg, 1980; Pak 1990a, 1990b, 1992; Suo, Kuo, Barnett y Willis, 1992) y es la que se utilizará también en este trabajo.

Con estas condiciones de contorno las expresiones genéricas* para los desplazamientos y tensiones extendidos en el vértice de grieta, con los sistemas de referencia representados en la figura 2.1, son (Pak, 1992):

$$u_j = K_M \sqrt{\frac{2r}{\pi}} B_{SM}^{-1} \operatorname{Re} \left(A_{JR} L_{SR} \sqrt{\cos \theta + \mu_R \operatorname{sen} \theta} \right) \quad (2.63)$$

$$\sigma_{ij} = \frac{K_M}{\sqrt{2\pi r}} C_{iJKm} B_{SM}^{-1} \operatorname{Re} \left(A_{KR} L_{SR} \frac{\delta_{m1} + \delta_{m2} \mu_R}{\sqrt{\cos \theta + \mu_R \operatorname{sen} \theta}} \right) \quad (2.64)$$

donde:

C_{iJKm} , A_{KR} , L_{SR} y μ_R han sido definidos en el epígrafe 2.3.

δ_{ij} es la delta de Kronecker.

$B_{SP} = -\operatorname{Re}(L_{SR} L_{RP})$.

El subíndice M indica el modo de apertura: *I*, *II*, *III* y *IV*.

- Condiciones de contorno *grieta tipo PKHS*[†].

Denominadas así por las iniciales de los autores que las sugirieron Parton y Kudryavtsev (1988) y Hao y Shen (1994). Son las condiciones de contorno que habría que utilizar si se desea considerar la permitividad del medio que ocupa la grieta:

$$D_n^+ = D_n^- = cte ; \quad D_n^+(u_n^+ - u_n^-) = \varepsilon_v(\varphi^- - \varphi^+) \quad (2.65)$$

donde ε_v es la permitividad del medio y el subíndice n indica la normal a la superficie de la grieta.

2.4.4 Determinación de los factores de intensidad de tensiones

La determinación del FIT puede realizarse mediante métodos analíticos, numéricos o experimentales (véase por ejemplo Mukhopadhyay, Maiti y Kadodkar, 2000; Erdogan,

*Para una sollicitación general: carga mecánica (en el plano y antiplano) y carga eléctrica.

[†]Notación tomada de Ou y Chen (2003).

2000; Azhdari, Obata y Nemat-Nasser, 2000). Los métodos analíticos presentan fuertes limitaciones respecto del tipo de problema a que pueden ser aplicados. Los métodos numéricos, sin esta limitación, se han consolidado como la herramienta más potente para la determinación de este parámetro en problemas de interés ingenieril.

El tratamiento numérico del problema consiste en la aplicación de algún método numérico para la resolución de las ecuaciones de campo y en la determinación posterior del FIT a partir de las variables de campo determinadas. Los métodos numéricos más extendidos son el método de los elementos de contorno y el método de los elementos finitos.

Las diferentes técnicas empleadas en la determinación del FIT son las siguientes:

- Método energético o de la derivada de la rigidez (por ejemplo Parks, 1974; Maiti, 1990).

Se basa en la evaluación de la densidad de energía liberada G . Esta cantidad puede obtenerse mediante el cálculo de la variación de densidad de energía de deformación (U) respecto del tamaño de grieta (a) o, dada la relación entre la densidad de energía de deformación y la matriz de rigidez (\mathcal{K}) (Parks, 1974), calculando la variación de la matriz de rigidez respecto del tamaño de grieta:

$$G = \frac{\partial U}{\partial a} = \frac{1}{2} \mathbf{u}^t \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial a} \mathbf{u} \quad (2.66)$$

siendo \mathbf{u} es el vector de desplazamientos.

Obtenida G , para el modo de apertura de que se trate, el FIT puede determinarse mediante las siguientes expresiones:

Problema plano

$$\begin{aligned} G &= G_I + G_{II} = \\ &= -\frac{K_I}{2\pi} a_{22} \operatorname{Im} \left(\frac{K_I (\mu_1 + \mu_2) + K_{II}}{\mu_1 \mu_2} \right) + \frac{K_{II}}{2\pi} a_{11} \operatorname{Im} [K_{II} (\mu_1 + \mu_2) + K_I \mu_1 \mu_2] \end{aligned} \quad (2.67)$$

donde Im indica parte imaginaria.

Problema aintiplano

$$G_{III} = -\frac{K_{III}^2}{2\pi} \frac{\operatorname{Im} (C_{45} + \mu_3 C_{44})}{C_{44} C_{55}} \quad (2.68)$$

El autor no tiene constancia de que este método haya sido empleado, hasta el momento, junto con el MEC.

- Método de la integral de cierre de grieta.

Este método determina también la energía unitaria liberada pero mediante la evaluación del trabajo de cierre de grieta obtenido a partir del campo de desplazamientos. Esta técnica introducida por Irwin (1958), ha sido ampliamente utilizada tanto junto al MEF (Rybicki y Kanninen, 1977; Krishnamurthy, Ramamurthy, Vijayakumar y Duttaguru, 1985, Singh, Carter, Wawrzynek e Ingrassia, 1998; entre otros) como junto al MEC (por ejemplo Hucker y Farris, 1993; Farris y Liu, 1993; Mukhopadhyay, Maiti y Kadodkar, 1999; Rajapakse y Xu 2001)

- Integral J:

Uno de los métodos más utilizados (por ejemplo Portela, Aliabadi y Rooke, 1992, Prasad, Aliabadi y Rooke, 1994; Sollero y Aliabadi, 1995) en la determinación del FIT consiste en la determinación de la integral

$$J = \int_S \left(U' n_1 - p_i \frac{\partial u_i}{\partial x_1} \right) dS \quad (2.69)$$

introducida por Rice (1968). Donde S es cualquier línea que rodea al vértice de grieta (la integral es independiente de S), U' es la energía de deformación por unidad de volumen, la dirección 1 es la que está alineada con la grieta y u_i y p_i son los desplazamientos y las tracciones respectivamente. En el ámbito de la mecánica de la fractura lineal elástica, esta integral es igual a la energía unitaria liberada G y por tanto su evaluación se corresponde con la de los FIT.

- Método de tensiones o desplazamientos.

Es el método más directo ya que requiere un menor postprocesado de los resultados obtenidos para las variables de campo. Consiste en igualar estos resultados, para unas coordenadas concretas, con sus expresiones teóricas: (2.55a) a (2.60b) para el caso anisótropo elástico, (2.63) y (2.64) para el caso piezoeléctrico. De esta igualación se obtienen unas expresiones de las que es posible obtener los valores de los factores de intensidad.

Las variantes que puede presentar este método dependen de las variables usadas (desplazamientos o tensiones) y del número de puntos en los que estas variables son evaluadas. Martínez y Domínguez (1984) muestran un estudio comparativo de las diferentes variantes.

Es, junto con el anterior, el método más utilizado: Blandford, Ingrassia y Liggett (1981), Ishikawa (1990), Tan y Gao (1992), Sáez, Gallego y Domínguez (1995), entre otros.

2.5 Dinámica de fractura lineal elástica. Materiales anisótropos elásticos y piezoeléctricos

En aquellos casos en los que las variaciones en las condiciones de contorno del problema son fuertemente dependientes del tiempo, esta variable, así como los efectos de inercia, han de ser considerados en las ecuaciones. En el análisis de problemas con grietas bajo estas condiciones es determinante el conocimiento de la variación en el tiempo de los factores de intensidad.

2.5.1 Ecuaciones de campo en elastodinámica

Ecuaciones de comportamiento

Se considerarán las mismas relaciones de comportamiento empleadas en el caso estático, tanto para comportamiento anisótropo elástico

$$\sigma_{ij}(x_m, t) = C_{ijkl} \epsilon_{kl}(x_m, t) \quad (2.70)$$

como para piezoeléctrico

$$\sigma_{ij}(x_m, t) = C_{iJKl} \epsilon_{Kl}(x_m, t) \quad (2.71)$$

Todas las afirmaciones hechas sobre los tensores de comportamiento en el caso estático son aplicables al caso dinámico.

Ecuaciones cinemáticas

Comportamiento anisótropo

$$\epsilon_{ij}(x_m, t) = \frac{1}{2} [u_{i,j}(x_m, t) + u_{j,i}(x_m, t)] \quad (2.72)$$

Comportamiento piezoeléctrico

$$\epsilon_{ij}(x_m, t) = \frac{1}{2} [u_{i,j}(x_m, t) + u_{j,i}(x_m, t)] ; \quad E_i(x_m, t) = -\varphi_{,i}(x_m, t) \quad (2.73)$$

Ecuaciones de equilibrio dinámico

En el equilibrio de fuerzas hay que considerar las fuerzas de inercia. Para el caso anisótropo elástico estas ecuaciones pueden escribirse:

$$\sigma_{ij,j}(x_m, t) + b_i(x_m, t) = \rho \ddot{u}_i(x_m, t) \quad (2.74)$$

siendo b_i las fuerzas por unidad de volumen y ρ la densidad del medio.

Para el caso piezoeléctrico las ecuaciones de equilibrio, utilizando variables extendidas, quedarían:

$$\sigma_{iJ,i}(x_m, t) + b_J(x_m, t) = \rho \ddot{u}_i(x_m, t) \quad (2.75)$$

donde debe destacarse que no existe componente eléctrica de fuerzas inerciales.

2.5.2 El problema armónico

Los problemas armónicos son aquellos en los que las variables dependen del tiempo en la forma $e^{\pm i\omega t}$ siendo ω la frecuencia angular e $i = \sqrt{-1}$. Estos problemas tienen una gran importancia en elastodinámica por diferentes motivos.

Las ecuaciones se simplifican sensiblemente pudiendo obviar el factor $e^{\pm i\omega t}$ ya que aparece en todos los términos a ambos lados de las igualdades.

Las únicas derivadas que habrá que considerar serán nuevamente las espaciales por cuanto las temporales consistirán en el producto de $\pm i\omega$.

Pero lo más importante es que la gran mayoría de las excitaciones dinámicas admiten desarrollo en serie de Fourier, lo que se denomina desarrollo en armónicos. Mediante el desarrollo en armónicos de la excitación, la respuesta de un sistema lineal puede obtenerse como la superposición de las respuestas a cada uno de los armónicos.

Por todo lo anterior el análisis dinámico en esta tesis se ocupa del estudio de problemas armónicos. En este tipo de problemas las variables, en cada punto, se caracterizarán por su amplitud y su frecuencia. Así, siendo \mathbf{v} una variable genérica de campo, su valor, para un instante t , puede expresarse en la forma

$$\hat{\mathbf{v}}(x_m, t) = \mathbf{v}(x_m, \omega) e^{\pm i\omega t} \quad (2.76)$$

donde $\mathbf{v}(x_m, \omega)$ es la amplitud, que depende de la posición (x_m) y de la frecuencia (ω) y el circunflejo indica la magnitud total. Con esta notación las ecuaciones de equilibrio quedan

$$\sigma_{ij,i}(x_m, \omega) + b_j(x_m, \omega) = -\rho\omega^2 u_i(x_m, \omega) \quad (2.77)$$

para comportamiento anisótropo elástico y

$$\sigma_{iJ,i}(x_m, \omega) + b_J(x_m, \omega) = -\rho\omega^2 u_i(x_m, \omega) \quad (2.78)$$

para comportamiento piezoeléctrico.

En (2.77) y (2.78) se ha eliminado el factor $e^{\pm i\omega t}$ que aparecería en todos los términos.

El resto de expresiones, ecuaciones de comportamiento y cinemáticas, tienen expresiones absolutamente idénticas a (2.70), (2.71), (2.72) y (2.73) con sólo cambiar t por ω .

Condiciones de contorno

Denotando por Γ el contorno del dominio, las condiciones de contorno para comportamiento anisótropo pueden ser:

- *naturales:*

$$p_i(\mathbf{x}_0, \omega) = \sigma_{ij}(\mathbf{x}, \omega) n_j|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_0} = \bar{p}_i(\omega) \text{ si } \mathbf{x}_0 \in \Gamma$$

- *esenciales:*

$$u_i(\mathbf{x}_0, \omega) = \bar{u}_i(\omega) \text{ si } \mathbf{x}_0 \in \Gamma$$

A estas condiciones se añadirán, para comportamiento piezoeléctrico, las siguientes:

- *naturales:*

$$q_s(\mathbf{x}_0, \omega) = -D_i(\mathbf{x}, \omega) n_i|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_0} = \bar{q}_s(\omega) \text{ si } \mathbf{x}_0 \in \Gamma$$

siendo q_s la carga por unidad y n_i la normal exterior al contorno en \mathbf{x}_0 .

- *esenciales:*

$$\varphi(\mathbf{x}_0, \omega) = \bar{\varphi}(\omega) \text{ si } \mathbf{x}_0 \in \Gamma$$

Sobre las superficies de las grietas en dominios piezoeléctricos se pueden imponer las condiciones de contorno de grieta permeable, impermeable o tipo PKHS ya comentadas para el caso estático (epígrafe 2.4.3). Al igual que en el caso estático se ha optado aquí por las condiciones de grieta impermeable.

2.5.3 Difracción de ondas

La distorsión que sobre una onda que se propaga en un medio provoca un obstáculo es un fenómeno que ha sido estudiado y aplicado con éxito en diferentes campos, por ejemplo, sismología, medicina o ingeniería.

El obstáculo que distorsiona el campo puede ser una inclusión, un hueco, un contorno exterior o, como en este caso, una grieta.

El fenómeno de la difracción consiste en la superposición del campo que incide sobre el objeto (campo incidente, conocido) y el generado por la presencia de éste (campo difractado, desconocido).

En la difracción de ondas por la presencia de obstáculos en dominios infinitos el campo difractado debe cumplir las condiciones de radiación (Eringen y Suhubi, 1975), el MEC cuenta con la ventaja de no necesitar de la discretización de los contornos exteriores ya que la condición de radiación queda satisfecha automáticamente (Domínguez, 1993).

Para obtener el resultado en este tipo de problemas puede hacerse uso del principio de superposición. El problema original (problema 0, figura 2.3) es el problema de una onda que incide sobre la grieta libre de tensiones (e impermeable en el caso piezoeléctrico) provocando un campo difractado que se superpone al primero. Este problema puede ser descompuesto en la suma de dos problemas:

Problema 1: onda que se desplaza en el medio elástico (o piezoeléctrico) libre de grietas.

Problema 2: grieta sometida, en sus superficies, al campo incidente cambiado de signo.

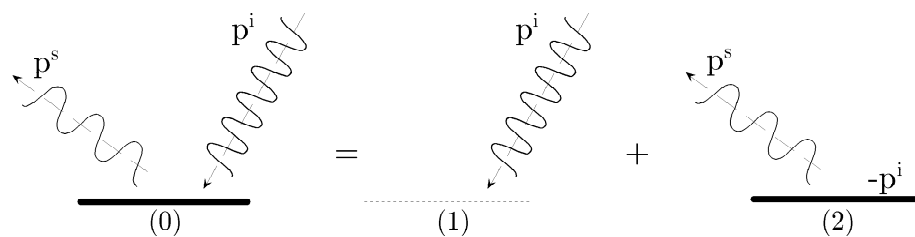


Figura 2.3: Esquema del principio de superposición aplicado al problema de difracción de ondas por la presencia de grietas.

Resulta evidente que la suma de los campos de los problemas 1 y 2 da lugar al campo del problema 0, así como, que las condiciones de contorno de grieta libre de tensiones son satisfechas cuando sobre las superficies de la grieta se suma y se resta el campo incidente.

En el problema 1 todo es conocido y dado que no hay grietas no tiene sentido hablar de factores de intensidad. Por lo tanto resolviendo el problema 2 se tendrá la solución del problema original.

En resumen, para resolver el problema de difracción de ondas mediante el MEC será suficiente con discretizar la grieta y resolver el problema que resulta de imponer sobre su superficie el campo incidente cambiado de signo.

Capítulo 3

Soluciones fundamentales

3.1 Introducción

Las ecuaciones diferenciales que gobiernan los problemas que han sido tratados en este trabajo han sido resueltas numéricamente mediante el método de los elementos de contorno tanto en el caso estático como en el dinámico armónico (Brebbia y Domínguez, 1992; Domínguez 1993; para el caso elástico).

En este capítulo se presenta, de un modo muy breve, la formulación de este método partiendo del teorema de reciprocidad, conocido en el caso estático como teorema de reciprocidad de Betti, que en el caso armónico, es una extensión del mismo.

Esta presentación servirá además para poner de manifiesto la importancia que, en el propio desarrollo del método, tienen lo que se denominan *soluciones fundamentales*.

Se denomina solución fundamental (o función de Green) a la solución en desplazamientos del problema de una carga puntual en un determinado dominio. La aplicación del teorema de reciprocidad entre este problema y el problema que se desee estudiar da lugar a unas ecuaciones integrales que, una vez resueltas, proporcionan la solución buscada.

El resto del capítulo se dedica a mostrar las diferentes soluciones fundamentales que han sido utilizadas para resolver los problemas bidimensionales anisótropo elástico y piezoeléctrico, bajo acciones estáticas y armónicas: Eshelby, Read y Shockley (1953), Suo (1990), Barnett y Lothe (1975), Wang y Achenbach (1994) y Denda y Araki (2002).

Finalmente, se recogen otras soluciones fundamentales que no han sido implementadas pero que, por su similitud formal con las que sí se han programado, son susceptibles de ser utilizadas siguiendo los mismos esquemas que se presentan.

3.2 El método de los elementos de contorno

Sea un dominio Ω , con contorno Γ en el que se define un sistema de referencia x_i . Sean en ese dominio dos estados diferentes de carga estática. Cada uno de estos estados se caracterizará por un conjunto de valores de desplazamientos (\mathbf{u}), tracciones (\mathbf{p}) y fuerzas por unidad de masa (\mathbf{b}). Denotando por \mathbf{u} , \mathbf{p} , \mathbf{b} uno de los estados y \mathbf{u}^* , \mathbf{p}^* , \mathbf{b}^* el otro, el teorema de reciprocidad entre ambos estados puede ser expresado en la forma

$$\int_{\Omega} \rho b_i^*(\mathbf{x}) u_i(\mathbf{x}) d\Omega + \int_{\Gamma} p_i^*(\mathbf{x}) u_i(\mathbf{x}) d\Gamma = \int_{\Omega} \rho b_i(\mathbf{x}) u_i^*(\mathbf{x}) d\Omega + \int_{\Gamma} p_i(\mathbf{x}) u_i^*(\mathbf{x}) d\Gamma \quad (3.1)$$

donde ρ es la densidad del medio.

Considérese como estado “*” la solución al problema de dominio infinito con un carga unitaria colocada en un punto $\boldsymbol{\xi}$. La expresión de un carga como esa es

$$\rho b_i^* = \delta(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}) \delta_{ij} \quad (3.2)$$

donde δ es la delta de Dirac y δ_{ij} la delta de Kronecker. Denótese la solución a este problema, en desplazamientos y tracciones respectivamente, por

$$u_{ij}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}) ; p_{ij}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}) \quad (3.3)$$

donde el primer índice indica la dirección en que se aplica la carga y el segundo la componente de la solución. Con estas definiciones, la expresión (3.1) puede ser escrita, en ausencia de fuerzas de volumen y considerando las propiedades de la delta de Dirac, en la forma

$$u_i(\boldsymbol{\xi}) + \int_{\Gamma} p_{ij}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}) u_j(\mathbf{x}) d\Gamma = \int_{\Gamma} u_{ij}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}) p_j(\mathbf{x}) d\Gamma \quad (3.4)$$

donde $u_{ij}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x})$ y $p_{ij}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x})$, son conocidos en todo el dominio y por lo tanto, sobre el contorno Γ .

La expresión (3.4) indica que sería suficiente conocer la solución al problema, $u_j(\mathbf{x})$ y $p_j(\mathbf{x})$, en todo el contorno para conocerla en cualquier punto $\boldsymbol{\xi}$ del dominio.

Con el objetivo de determinar esas funciones sobre el contorno se procede de la siguiente forma: se toma $\boldsymbol{\xi}$ situado en el contorno. Para que la expresión (3.4) continúe siendo válida, se modifica ligeramente el dominio de integración añadiendo un volumen semicircular en torno al punto $\boldsymbol{\xi}$ (ver figura 3.1).

Una vez aplicada la expresión (3.4) se hace tender el volumen añadido a 0 obteniendo, de esta manera, la ecuación de los desplazamientos para un punto genérico del contorno.

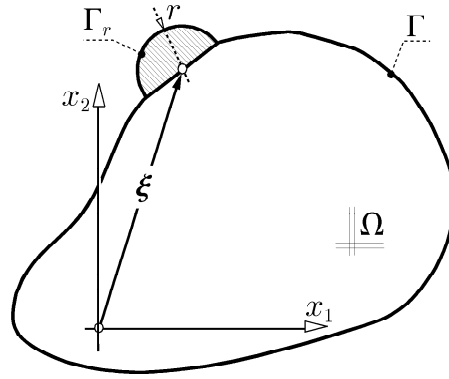


Figura 3.1: Dominio modificado para escribir la ecuación integral en el contorno.

Sobre el dominio modificado, las integrales de (3.4) pueden descomponerse en dos sumandos, uno sobre el contorno añadido (Γ_r) y otro sobre el resto del contorno ($\Gamma - \Gamma_r$):

$$\int_{\Gamma} p_{ij}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}) u_j(\mathbf{x}) d\Gamma = \int_{\Gamma_r} p_{ij}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}) u_j(\mathbf{x}) d\Gamma + \int_{\Gamma - \Gamma_r} p_{ij}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}) u_j(\mathbf{x}) d\Gamma \quad (3.5)$$

$$\int_{\Gamma} u_{ij}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}) p_j(\mathbf{x}) d\Gamma = \int_{\Gamma_r} u_{ij}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}) p_j(\mathbf{x}) d\Gamma + \int_{\Gamma - \Gamma_r} u_{ij}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}) p_j(\mathbf{x}) d\Gamma \quad (3.6)$$

Tomando límites cuando $r \rightarrow 0$ en (3.5) obtenemos

$$\lim_{r \rightarrow 0} \int_{\Gamma_r} p_{ij}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}) u_j(\mathbf{x}) d\Gamma = u_j(\boldsymbol{\xi}) \lim_{r \rightarrow 0} \int_{\Gamma_r} p_{ij}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}) d\Gamma \Rightarrow c_{ij} u_j(\boldsymbol{\xi}) \quad (3.7)$$

$$\lim_{r \rightarrow 0} \int_{\Gamma - \Gamma_r} p_{ij}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}) u_j(\mathbf{x}) d\Gamma = \int_{\Gamma} p_{ij}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}) u_j(\mathbf{x}) d\Gamma \quad (3.8)$$

En (3.7) se ha tenido en cuenta que las tracciones de todas las soluciones fundamentales utilizadas en este trabajo tienen un comportamiento, cuando la distancia medida desde el punto de colocación de la carga (r) tiende a 0, del tipo $O[1/r]$, es decir $p_{ij}^* \sim O[1/r]$ cuando $r \rightarrow 0$. Como $d\Gamma \sim O[r]$, la integral en (3.7) no se anula cuando $r \rightarrow 0$, generando lo que se denomina término libre, c_{ij} :

$$c_{ij} = 1 + \lim_{r \rightarrow 0} \int_{\Gamma_r} p_{ij}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}) d\Gamma \quad (3.9)$$

El símbolo \int indica integral en el sentido de *valor principal de Cauchy*.

Tomando límites cuando $r \rightarrow 0$ en (3.6) obtenemos

$$\lim_{r \rightarrow 0} \int_{\Gamma_r} u_{ij}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}) p_j(\mathbf{x}) d\Gamma = p_j(\boldsymbol{\xi}) \lim_{r \rightarrow 0} \int_{\Gamma_r} u_{ij}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}) d\Gamma = 0 \quad (3.10)$$

$$\lim_{r \rightarrow 0} \int_{\Gamma - \Gamma_r} u_{ij}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}) p_j(\mathbf{x}) d\Gamma = \int_{\Gamma} u_{ij}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}) p_j(\mathbf{x}) d\Gamma \quad (3.11)$$

En este caso la primera integral si se anula dado que el comportamiento de los desplazamientos cuando la distancia r tiende a cero es del tipo $O[\ln r]$ mientras que $d\Gamma \sim O[r]$ con lo que el integrando tiende a cero cuando $r \rightarrow 0$.

En definitiva (3.4) puede ser escrita para los puntos del contorno (*ecuación integral de desplazamientos en el contorno*) como

$$c_{ij} u_j(\boldsymbol{\xi}) + \int_{\Gamma} p_{ij}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}) u_j(\mathbf{x}) d\Gamma = \int_{\Gamma} u_{ij}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}) p_j(\mathbf{x}) d\Gamma \quad (3.12)$$

Con el objetivo de obtener la solución para todo el contorno, éste es discretizado en E elementos Γ_e (figura 3.2), de modo que

$$\Gamma = \sum_{e=1}^{e=E} \Gamma_e \quad (3.13)$$

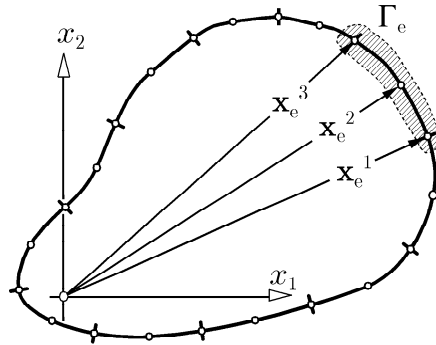


Figura 3.2: Discretización del contorno de un dominio genérico.

Tomando en consideración el contorno discretizado, la expresión (3.12) puede escribirse como

$$c_{ij}(\boldsymbol{\xi}) u_j(\boldsymbol{\xi}) + \sum_{e=1}^{e=E} \int_{\Gamma_e} p_{ij}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}) u_j(\mathbf{x}) d\Gamma = \sum_{e=1}^{e=E} \int_{\Gamma_e} u_{ij}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}) p_j(\mathbf{x}) d\Gamma \quad (3.14)$$

donde las integrales sólo serán tomadas en el sentido de valor principal de Cauchy si el elemento sobre el que se está integrando contiene al punto $\boldsymbol{\xi}$ donde está colocada la carga.

Si en cada elemento Γ_e se definen las funciones $u_j(\mathbf{x})$ y $p_j(\mathbf{x})$ por interpolación a partir de sus valores en un número, n , de puntos (nodos), con funciones de interpolación

$\phi_q(\mathbf{x})$ conocidas, en la forma

$$u_j(\mathbf{x}) = \sum_{q=1}^{q=n} \phi_q(\mathbf{x}) u_j(\mathbf{x}^q) = \sum_{q=1}^{q=n} \phi_q(\mathbf{x}) u_j^q \quad (3.15a)$$

$$p_j(\mathbf{x}) = \sum_{q=1}^{q=n} \phi_q(\mathbf{x}) p_j(\mathbf{x}^q) = \sum_{q=1}^{q=n} \phi_q(\mathbf{x}) p_j^q \quad (3.15b)$$

se ha pasado de un problema en el que las incógnitas eran funciones continuas $u_j(\mathbf{x})$ y $p_j(\mathbf{x})$, o al menos parte de estas funciones, a otro en el que las incógnitas son los valores de estas funciones (u_j^q o p_j^q) en un conjunto de N puntos con $N = n \times E$.

La expresión (3.14) se puede escribir ahora en la forma

$$c_{ij}(\xi) u_j(\xi) + \sum_{e=1}^{e=E} \sum_{q=1}^{q=n} \int_{\Gamma_e} p_{ij}^*(\xi, \mathbf{x}) \phi_q(\mathbf{x}) u_j^q d\Gamma = \sum_{e=1}^{e=E} \sum_{q=1}^{q=n} \int_{\Gamma_e} u_{ij}^*(\xi, \mathbf{x}) \phi_q(\mathbf{x}) p_j^q d\Gamma \quad (3.16)$$

Escribiendo esta ecuación para tantos nodos como se hayan establecido en el contorno se obtiene una ecuación matricial que puede escribirse como

$$H_{ij} u_j = G_{ij} p_j \quad (3.17)$$

Cuando sobre esta ecuación matricial se impongan las condiciones de contorno resultará un sistema algebraico de ecuaciones lineales para determinar las componentes desconocidas de desplazamientos y tracciones. Resuelto este sistema se conocerán los desplazamientos y tracciones en todos los nodos del contorno y mediante las expresiones (3.15a) y (3.15b), en todo el contorno.

Finalmente podrán determinarse los desplazamientos para cualquier punto del dominio a partir de (3.4).

Para obtener las tracciones en los puntos del dominio puede procederse aplicando las relaciones cinemáticas al campo de desplazamientos obtenido y posteriormente, las ecuaciones de comportamiento o proceder de la misma forma sobre las expresiones (3.4) para obtener la ecuación integral de tracciones que se verá en el capítulo siguiente y que permite determinar las tracciones, de una manera más precisa, a partir de las variables nodales en el contorno.

La extensión de la formulación anterior al caso armónico es inmediata a partir del teorema de reciprocidad en elastodinámica obtenido por Graffi (1946) y extendido a dominios infinitos por Wheeler y Sternberg (1968). La expresión de este teorema es totalmente análoga a la expresión (3.1) pero considerando que las variables dependen también de la frecuencia.

La solución fundamental armónica, es la solución al problema de una carga puntual armónica aplicada en un punto $\boldsymbol{\xi}$ perteneciente a un dominio infinito. La expresión de una carga como esa es:

$$\rho b_i^* = \delta(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}) \delta_{ij} e^{-i\omega t} \quad (3.18)$$

siendo t el tiempo, ω la frecuencia angular de la excitación y el resto de parámetros como en (3.2). En este caso la solución fundamental, en desplazamientos y tracciones, se denota por

$$u_{ij}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}, \omega) e^{-i\omega t} ; p_{ij}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}, \omega) e^{-i\omega t} \quad (3.19)$$

y el resto de los desarrollos son totalmente análogos a los ya realizados con la salvedad de que ahora todas las variables dependen de ω .

A continuación se muestran las soluciones fundamentales que han sido utilizadas en este trabajo para resolver los problemas bidimensionales de fractura estático y armónico, para materiales anisótropos elásticos y piezoeléctricos.

3.3 Soluciones fundamentales estáticas

3.3.1 Caso anisótropo elástico

Solución de campo completo

La solución al problema bidimensional de una distribución lineal de carga en un dominio anisótropo elástico fue publicada por Eshelby, Read y Shockley (1953) y revisada por Cruse (1988). Sea que el plano de estudio es el plano x_1, x_2 y la distribución unitaria de carga sigue la dirección x_3 . Siguiendo la formulación descrita en el capítulo anterior (pág. 18), la solución en desplazamientos para este problema tiene la expresión

$$u_{ij}^*(z_k, z_k^0) = -\frac{1}{\pi} \operatorname{Re} (A_{jm} Q_{mi} \ln(z_m - z_m^0)) \quad (3.20)$$

donde:

z_k es la transformación al plano complejo de un punto genérico del plano físico (x_1, x_2) en el que se evalúa la solución fundamental. Este punto se denomina *punto de observación* y la transformación al plano complejo se realiza mediante

$$z_k = x_1 + \mu_k x_2 \quad (3.21)$$

μ_k pueden ser determinado como las raíces complejas con parte imaginaria positiva de la ecuación

$$\det[C_{2ij2} \mu_k^2 + (C_{1ij2} + C_{2ij1}) \mu_k + C_{1ij1}] = 0 \quad (3.22)$$

La matriz A_{jk} está formada, por columnas, por los autovectores resultantes de resolver el siguiente problema:

$$[C_{2ij2} \mu_k^2 + (C_{1ij2} + C_{2ij1}) \mu_k + C_{1ij1}] A_{jk} = 0 \quad (\text{sin suma en } k) \quad (3.23)$$

donde las matrices $C_{\alpha ij\beta}$ ($\alpha, \beta = 1, 2$) son submatrices del tensor de comportamiento definidas en el capítulo anterior, expresiones (2.49).

z_k^0 es el punto de aplicación de la carga en el plano complejo. Se obtiene transformando el punto de aplicación de la carga en el plano físico (ξ_1, ξ_2) , denominado *punto de colocación*, mediante μ_k de la misma forma que se realizaba la transformación en el punto de observación:

$$z_k^0 = \xi_1 + \mu_k \xi \quad (3.24)$$

La matriz Q_{ki} se determina mediante

$$\mathbf{Q} = \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{B}^{-1} + \overline{\mathbf{B}}^{-1})^{-1}; \quad \mathbf{B} = i\mathbf{A}\mathbf{L}^{-1} \quad (3.25)$$

con

$$L_{ik} = (\mu_k C_{2ij2} + C_{2ij1}) A_{jk} = -\frac{1}{\mu_k} (C_{1ij1} + \mu_k C_{1ij2}) A_{jk} \quad (\text{sin suma en } k) \quad (3.26)$$

Mediante la aplicación de las relaciones cinemáticas (2.9) y las de comportamiento (2.1) pueden obtenerse las expresiones de las tracciones para la solución fundamental:

$$\begin{aligned} p_{il}^*(z_k, z_k^0) &= \sigma_{ilr}^*(z_k, z_k^0) n_r(z_k) = C_{l r j n} u_{i j, n}^*(z_k, z_k^0) n_r(z_k) = \\ &= -\frac{1}{\pi} \operatorname{Re} \left(C_{l r j n} A_{j m} Q_{m i} \frac{z_{m, n}}{z_m - z_m^0} n_r \right) \end{aligned} \quad (3.27)$$

siendo n_r la normal exterior en el punto de observación

Haciendo uso de las expresiones (3.26), las tracciones pueden ser reescritas de forma más compacta:

$$p_{ij}^*(z_k, z_k^0) = \frac{1}{\pi} \operatorname{Re} \left(L_{j m} Q_{m i} \frac{\mu_m n_1 - n_2}{z_m - z_m^0} \right) \quad (3.28)$$

Como ya se ha indicado, alternativamente, μ_m , \mathbf{A} y \mathbf{L} pueden ser determinados, del siguiente problema de autovalores y autovectores

$$\left(\begin{array}{c|c} -\mathbf{C}_{22}^{-1} \mathbf{C}_{21} & -\mathbf{C}_{22}^{-1} \\ \hline -\mathbf{C}_{12} \mathbf{C}_{22}^{-1} \mathbf{C}_{21} + \mathbf{C}_{11} & -\mathbf{C}_{12} \mathbf{C}_{22}^{-1} \end{array} \right) \begin{pmatrix} \mathbf{A} \\ \mathbf{L} \end{pmatrix} = \mu \begin{pmatrix} \mathbf{A} \\ \mathbf{L} \end{pmatrix} \quad (3.29)$$

Solución de semiespacio

Especialmente útil para resolver ciertos problemas, por ejemplo problemas en los que el dominio de estudio es el suelo, puede resultar obtener la solución fundamental para una carga puntual aplicada en un semiespacio en el que la superficie está libre de tracciones (figura 3.3).

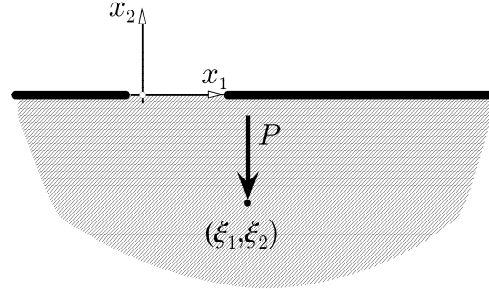


Figura 3.3: Esquema para la obtención de la solución fundamental de semiespacio.

En particular, para distribución lineal unitaria de carga en un semiplano con condiciones de superficie libre de tracciones, con un sistema de referencia como el representado en la figura 3.3 (es decir la superficie libre es el plano $x_2 = 0$), la solución fundamental es (Suo, 1990; Pan, Chen y Amadei, 1997):

$$u_{ij}^*(z_k, z_k^0) = -\frac{1}{\pi} \operatorname{Re} [A_{jm} (Q_{mi} \ln(z_m - z_m^0) - E_{ms} \bar{Q}_{si} \ln(z_m - \bar{z}_s^0))] \quad (3.30)$$

$$p_{ij}^*(z_k, z_k^0) = \frac{1}{\pi} \operatorname{Re} \left[L_{jm} \left(Q_{mi} \frac{\mu_m n_1 - n_2}{z_m - z_m^0} - E_{ms} \bar{Q}_{si} \frac{\mu_m n_1 - n_2}{z_m - \bar{z}_s^0} \right) \right] \quad (3.31)$$

donde

$$\mathbf{E} = \mathbf{L}^{-1} \bar{\mathbf{L}} \quad (3.32)$$

una barra sobre una variable indica su conjugada y el resto de parámetros son los mismos que para espacio completo.

3.3.2 Caso piezoeléctrico

El formalismo (hexadimensional) de Stroh para el caso anisótropo elástico fue extendido al comportamiento piezoeléctrico (octodimensional) por Barnett y Lothe (1975). En esa misma publicación se presenta la extensión de la solución fundamental a este caso. Se trata de la solución para una distribución lineal unitaria de carga más la componente extendida: una distribución lineal unitaria de carga eléctrica, todo ello en un dominio bidimensional.

La expresión de la solución fundamental es formalmente idéntica a las expresiones (3.20) y (3.28) pero utilizando la notación extendida presentada en el capítulo anterior:

$$u_{IJ}^*(z_K, z_K^0) = -\frac{1}{\pi} \operatorname{Re} (A_{JM} Q_{MI} \ln(z_M - z_M^0)) \quad (3.33)$$

$$p_{LJ}^*(z_K, z_K^0) = \frac{1}{\pi} \operatorname{Re} \left(L_{JM} Q_{MI} \frac{\mu_M n_1 - n_2}{z_M - z_M^0} \right) \quad (3.34)$$

los índices toman los valores 1, 2 y 4; $\mathbf{n} = (n_1, n_2)$ es la normal exterior en el punto de observación y la determinación de μ_M , \mathbf{A} , \mathbf{L} y \mathbf{Q} puede realizarse mediante las expresiones (3.25) y (3.29).

En un trabajo previo, Barnett y Lothe (1973) proponen lo que denominaron *formalismo integral*. El objetivo de este formalismo es resolver este problema, evitando la determinación de autovalores y autovectores complejos de una matriz que, en el mejor de los casos, es de 6×6 y sustituir este problema por la determinación numérica de varias integrales regulares reales. Este formalismo se muestra en el apéndice A.

En este trabajo, dado lo desarrollado de los algoritmos para la determinación de autovalores y autovectores complejos, se ha optado por esta vía, más directa que el formalismo integral.

3.4 Soluciones fundamentales dinámicas. Dominio de la frecuencia

La aplicación del método de los elementos de contorno para resolver problemas en el dominio de la frecuencia precisa de soluciones fundamentales para cargas armónicas. En dos dimensiones necesitamos conocer la solución al problema para una distribución lineal de carga, por ejemplo según x_3 , que varía con el tiempo en la forma $e^{\pm i\omega t}$.

3.4.1 Caso anisótropo elástico

La solución fundamental bidimensional en el dominio de la frecuencia fué publicada por Wang y Achenbach (1994) en un trabajo que resume y complementa otros trabajos de los mismos autores: Wang y Achenbach (1992, 1993, 1995 y 1996).

Para la síntesis de esta solución se empleó la transformada de Radon (Ludwig, 1966; Deans 1983). Esta transformada tiene la particularidad de reducir ecuaciones diferenciales en derivadas parciales de dos o tres dimensiones a ecuaciones del mismo tipo pero de una sola dimensión.

La transformación inversa, que hay que aplicar a la solución de la ecuación transformada para obtener la solución del problema original, precisa de una integral de superficie sobre una esfera de radio unidad. En el caso bidimensional, que es el que se trata, esta integral es de línea sobre una circunferencia de radio unidad.

Los desplazamientos de la solución fundamental obtenida por este procedimiento tienen la expresión

$$u_{ij}^*(x_m, \xi_m, \omega) = \frac{1}{8\pi^2} \int_{|\boldsymbol{\eta}|=1} \frac{V_{im}(\boldsymbol{\eta})V_{jm}(\boldsymbol{\eta})}{\rho c_m^2(\boldsymbol{\eta})} \Phi(k_m(\boldsymbol{\eta}, \omega)|\boldsymbol{\eta}_r(x_r - \xi_r)|) dl(\boldsymbol{\eta}) \quad (3.35)$$

donde $\boldsymbol{\eta}$ es la normal exterior a la circunferencia unitaria de integración (figura 3.4).

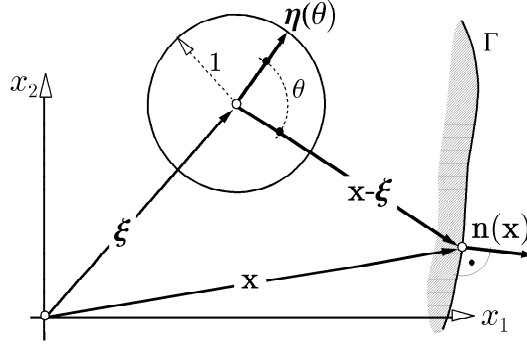


Figura 3.4: Circunferencia de integración para solución fundamental en frecuencia.

La expresión (3.35) puede ser escrita en función del ángulo θ que forman los vectores $\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}$ y $\boldsymbol{\eta}$ (figura 3.4):

$$u_{ij}^*(x_m, \xi_m, \omega) = \frac{1}{8\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{V_{im}(\theta)V_{jm}(\theta)}{\rho c_m^2(\theta)} \Phi(k_m(\theta, \omega)|\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}||\cos(\theta)|) d\theta \quad (3.36)$$

Los términos que aparecen en el integrando son los siguientes:

ρ densidad del material.

$V_{im}(\theta)$ autovectores de la matriz de Christoffel que se define a partir del tensor de comportamiento y de la normal $\boldsymbol{\eta}$ como

$$\Gamma_{ij}(\theta) = C_{lijm}\eta_l\eta_m \quad (3.37)$$

es decir

$$\Gamma_{ij}(\theta)V_{jm}(\theta) = \lambda_m(\theta)V_{im}(\theta) \quad (\text{sin suma en } m) \quad (3.38)$$

$c_m(\theta)$ son las velocidades de fase según las direcciones principales de la matriz de Christoffel y que se relacionan con sus autovalores ($\lambda_m(\theta)$) mediante

$$c_m(\theta) = \sqrt{\lambda_m(\theta)/\rho} \quad (3.39)$$

$k_m(\theta, \omega)$ son los números de onda según esas mismas direcciones definidos por

$$k_m(\theta, \omega) = \omega/c_m(\theta) \quad (3.40)$$

la función Φ (figura 3.5 izquierda) tiene la forma

$$\Phi(s) = i\pi \exp(is) - 2[\cos(s) \text{ci}(s) + \sin(s) \text{si}(s)] \quad (3.41)$$

siendo $i = \sqrt{-1}$ y ci , si las funciones coseno integral y seno integral, respectivamente (figura 3.5 derecha). Estas funciones se definen de la siguiente forma

$$\text{ci}(s) = - \int_s^{\infty} \frac{\cos(t)}{t} dt = \gamma + \int_0^s \frac{\cos(t) - 1}{t} dt + \ln(s) \quad (3.42)$$

$$\text{si}(s) = - \int_s^{\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt \quad (3.43)$$

siendo γ la constante de Euler.

En la figura 3.5 puede apreciarse que las funciones coseno integral y Φ son singulares en 0. Atendiendo a la segunda de las expresiones que se indica para el coseno integral y teniendo en cuenta que la integral que aparece en esta expresión da lugar a un término regular, se deduce que la singularidad indicada es de tipo logarítmico.

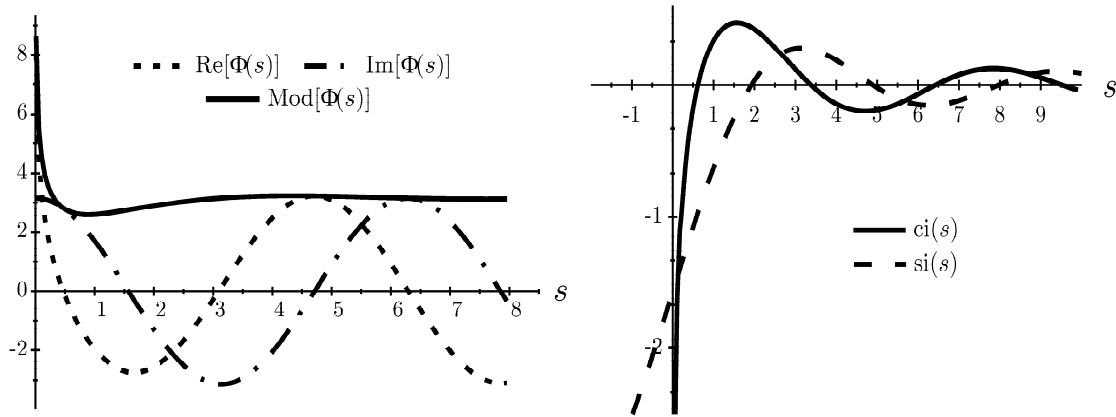


Figura 3.5: Función Φ de la solución fundamental en frecuencia (izda). Funciones coseno integral y seno integral (dcha).

La singularidad logarítmica de la función Φ puede ser aislada mediante la adición y sustracción del término $2 \ln(|\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}| |\cos(\theta)|)$. Esto permite descomponer la solución fundamental en una parte regular y otra singular (Wang y Achenbach, 1994):

$$\Phi(k_m |\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}| |\cos(\theta)|) = \Phi^R(k_m, |\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}| |\cos(\theta)|) - 2 \ln(|\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}| |\cos(\theta)|) \quad (3.44)$$

siendo

$$\Phi^R(k_m, |\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}| |\cos(\theta)|) = \Phi(k_m |\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}| |\cos(\theta)|) + 2 \ln(|\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}| |\cos(\theta)|) \quad (3.45)$$

con esta descomposición los desplazamientos de la solución fundamental pueden escribirse en la forma

$$u_{ij}^*(x_m, \xi_m, \omega) = \frac{1}{8\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{V_{im}(\theta)V_{jm}(\theta)}{\rho c_m^2(\theta)} \Phi^R(k_m, |\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}| |\cos(\theta)|) d\theta -$$

$$-\frac{1}{4\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{V_{im}(\theta)V_{jm}(\theta)}{\rho c_m^2(\theta)} \ln(|\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}| |\cos(\theta)|) d\theta := u_{ij}^{R*}(x_m, \xi_m, \omega) + u_{ij}^{S*}(x_m, \xi_m) \quad (3.46)$$

La importancia de esta descomposición radica en que la parte singular es independiente de la frecuencia. Como la solución en frecuencia ha de tender a la solución estática cuando $\omega \rightarrow 0$ la parte singular de (3.46) debe coincidir, salvo constantes a lo sumo, con la solución fundamental estática cuya expresión explícita ya ha sido presentada (3.20).

Esta constante es innecesaria para la resolución de problemas de fractura en dominios infinitos o en dominios finitos autoequilibrados pero es necesaria en los casos restantes. Puede ser expresada como (Denda, Wang y Yong, 2003):

$$K_{ij} = \frac{1}{\pi} \operatorname{Re} [A_{jr} Q_{ri} \ln(i + \mu_r)] \quad (3.47)$$

siendo $i = \sqrt{-1}$ y dónde las matrices A_{ij} y Q_{ij} y los términos μ_r pueden determinarse de las expresiones (3.25) y (3.29).

Con esta constante, la parte singular de la solución fundamental en frecuencia puede ser expresada como

$$u_{ij}^{S*}(x_m, \xi_m) = u_{ij}^*(x_m, \xi_m) + K_{ij} \quad (3.48)$$

siendo $u_{ij}^*(x_m, \xi_m)$ los desplazamientos que aparecen en (3.20).

Para su evaluación numérica, esta expresión de la parte singular de la solución fundamental en frecuencia (3.48), por ser una expresión explícita, es más cómoda y precisa que su expresión integral (en (3.46)) y es la que ha sido utilizada en este trabajo.

La parte regular queda

$$u_{ij}^{R*}(x_m, \xi_m, \omega) = \frac{1}{8\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{V_{im}(\theta)V_{jm}(\theta)}{\rho c_m^2(\theta)} \Phi^R(k_m, |\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}| |\cos(\theta)|) d\theta \quad (3.49)$$

Las tracciones pueden ser igualmente descompuestas en parte regular y parte singular. Obviamente la parte singular ha de coincidir con las tracciones de la solución fundamental estática (3.27). La parte regular tiene la expresión:

$$p_{ij}^{R*} = n_r C_{rjkl} u_{ik,l}^{R*} =$$

$$= \frac{1}{8\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} k_m \bar{\Gamma}_{jk} \frac{V_{im}(\theta)V_{km}(\theta)}{\rho c_m^2(\theta)} \Upsilon(k_m |\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}| |\cos(\theta)|) \operatorname{sig}(\cos(\theta)) d\theta \quad (3.50)$$

siendo

$\bar{\Gamma}_{jk} = C_{rjkl}n_r\eta_l$ con n_r y η_l las normales en el punto de observación y de la circunferencia unitaria de integración respectivamente.

$$\Upsilon(s) = -\pi \exp(is) - 2[\cos(s) \text{si}(s) - \sin(s) \text{ci}(s)]$$

y sig la función signo.

3.4.2 Caso piezoeléctrico

La solución fundamental para el problema bidimensional piezoeléctrico sometido a sollicitación armónica fue obtenida por Denda y Araki (2002) utilizando también la transformada de Radon. Las expresiones de los desplazamientos y las tracciones de la solución fundamental son, utilizando la notación extendida introducida en el capítulo anterior, las siguientes:

$$u_{\text{IJ}}^*(x_m, \xi_m, \omega) = \frac{1}{8\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\mathcal{E}_{\text{IJ}}^m}{\rho c_m^2 E_{qq}^m} \Phi(k_m |\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}| |\cos(\theta)|) d\theta \quad (3.51)$$

$$p_{\text{IJ}}^*(x_m, \xi_m, \omega) = \frac{1}{8\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} k_m \bar{\Gamma}_{\text{JL}} \frac{\mathcal{E}_{\text{IL}}^m}{\rho c_m^2 E_{qq}^m} k_m \Phi'(k_m |\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}| |\cos(\theta)|) \text{sig}(\cos(\theta)) d\theta \quad (3.52)$$

donde

ρ , Φ y c_m son los mismos que en el caso anisótropo elástico.

Las matrices $\mathcal{E}_{\text{IJ}}^m(\theta)$ tienen la siguiente expresión

$$\mathcal{E}_{\text{IJ}}^m(\theta) = \begin{cases} E_{ij}^m(\theta) & \text{si } \text{I, J} = 1, 2, 3 \\ -\frac{E_{iq}^m(\theta)\Gamma_{q4}(\theta)}{\Gamma_{44}(\theta)} & \text{si } \text{I} = 1, 2, 3; \text{ J} = 4 \\ \frac{E_{pq}^m(\theta)\Gamma_{4p}(\theta)\Gamma_{q4}(\theta)}{\Gamma_{44}^2(\theta)} & \text{si } \text{I} = \text{J} = 4 \end{cases} \quad (3.53)$$

siendo

$$E_{jk}^m(\theta) = \text{adj}(\Lambda_{jk}(\theta) - \delta_{jk}\lambda_m(\theta)) \quad (3.54)$$

donde Λ_{ij} es la matriz de Christoffel reducida, obtenida a partir de la matriz de Christoffel $\Gamma_{\text{IJ}}(\theta) = C_{r\text{IJs}}\eta_r\eta_s$ mediante

$$\Lambda_{ij}(\theta) = \Gamma_{ij}(\theta) - \frac{\Gamma_{i4}(\theta)\Gamma_{4j}(\theta)}{\Gamma_{44}(\theta)} \quad (3.55)$$

$\lambda(\theta)$ y $\mathbf{V}(\theta)$ son los autovalores y autovectores la matriz anterior.

$$\Lambda_{ij}(\theta)V_{jm}(\theta) = \lambda_m(\theta)V_{im}(\theta) \quad (\text{sin suma en } m) \quad (3.56)$$

$\bar{\Gamma}_{JL} = C_{rJLn}\eta_n n_r$ con n_r y η_l las normales en el punto de observación y de la circunferencia unitaria de integración respectivamente.

Las descomposición en parte singular y regular, de la solución fundamental anisótropa elástica es trasladable al caso piezoeléctrico ya que esta descomposición proviene de la descomposición de la función Φ y ésta es la misma en ambos casos.

$$u_{IJ}^*(x_m, \xi_m, \omega) = \frac{1}{8\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\mathcal{E}_{IJ}^m}{\rho c_m^2 E_{qq}^m} \Phi^R(k_m, |\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}| |\cos(\theta)|) d\theta -$$

$$- \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\mathcal{E}_{IJ}^m}{\rho c_m^2 E_{qq}^m} \ln(|\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}| |\cos(\theta)|) d\theta := u_{IJ}^{R*}(x_m, \xi_m, \omega) + u_{IJ}^{S*}(x_m, \xi_m) \quad (3.57)$$

donde Φ^R tiene la expresión que aparece en (3.45).

La parte singular coincide, salvo constantes, con la solución fundamental estática, de modo que puede escribirse

$$u_{IJ}^{S*}(x_m, \xi_m) = u_{IJ}^*(x_m, \xi_m) + K_{IJ} \quad (3.58)$$

siendo $u_{IJ}^*(x_m, \xi_m)$ la solución fundamental estática piezoeléctrica, expresión (3.33) y

$$K_{IJ} = \frac{1}{\pi} \text{Re} (A_{JR} Q_{RI} \ln(i + \mu_R)) \quad (3.59)$$

siendo $i = \sqrt{-1}$ y dónde las matrices A_{IJ} y Q_{IJ} y los términos μ_R pueden determinarse, como en el caso anterior, de las expresiones (3.25) y (3.29).

La parte regular de los desplazamientos de la solución fundamental armónica piezoeléctrica queda

$$u_{IJ}^{R*}(x_m, \xi_m, \omega) = \frac{1}{8\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\mathcal{E}_{IJ}^m}{\rho c_m^2 E_{qq}^m} \Phi^R(k_m, |\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}| |\cos(\theta)|) d\theta \quad (3.60)$$

y la parte regular de las tracciones

$$p_{IJ}^{R*} = n_r C_{rJKl} u_{IK,l}^{R*} =$$

$$= \frac{1}{8\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \bar{\Gamma}_{JK} \frac{\mathcal{E}_{IK}^m}{\rho c_m^2 E_{qq}^m} k_m \Upsilon(k_m |\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}| |\cos(\theta)|) \text{sig}(\cos(\theta)) d\theta \quad (3.61)$$

siendo

$\bar{\Gamma}_{JK} = C_{rJKl} n_r \eta_l$ con n_r y η_l las normales en el punto de observación y de la circunferencia unitaria de integración respectivamente.

$$\Upsilon(s) = -\pi \exp(is) - 2[\cos(s) \text{si}(s) - \sin(s) \text{ci}(s)]$$

y sig la función signo.

La parte singular de las tracciones coincide con las tracciones estáticas, expresión (3.34).

3.5 Otras soluciones fundamentales

En la literatura pueden encontrarse otras soluciones fundamentales que guardan una estrecha semejanza formal con las soluciones fundamentales presentadas hasta ahora, lo que permite aplicarles el mismo tratamiento numérico. Por ese motivo resulta interesante recogerlas aquí. Esas soluciones fundamentales son las de bimateriales anisótropos elásticos y piezoeléctricos y las de semiespacios piezoeléctricos.

Solución fundamental bidimensional estática para bimateriales anisótropos elásticos

Sea un dominio bidimensional infinito constituido por dos materiales anisótropos elásticos diferentes en el que se define un sistema de referencia con la coordenada x_1 según la interfase (figura 3.6). Al material que ocupa el semiespacio superior ($x_2 > 0$) se le denota por 1 y al que ocupa el semiespacio inferior ($x_2 < 0$) por 2.

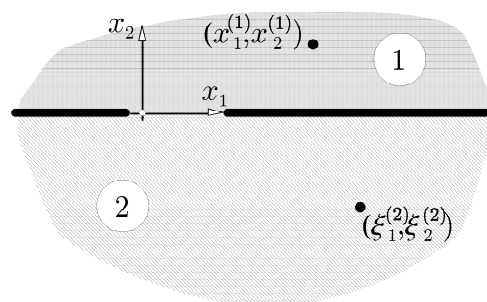


Figura 3.6: Esquema de un bimaterial con indicación de sistema de referencia y puntos de colocación y observación.

La solución fundamental para este problema (Suo, 1990; Pan y Amadei, 1999) depende del semiespacio en el que consideremos el punto de colocación y del semiespacio en el que consideremos el punto de observación. Por lo tanto existen cuatro posibles expresiones para la solución fundamental.

En las siguientes expresiones un superíndice consistente en una letra mayúscula (W o Y) entre paréntesis indica el material. ($W, Y = 1$ ó 2) y una barra sobre una variable indica su conjugada.

- Punto de colocación y de observación en el material W

$$u_{ij}^*(z_k^{(W)}, z_k^{0(W)}) = -\frac{1}{\pi} \operatorname{Re} \left\{ A_{jm}^{(W)} \left[Q_{mi}^{(W)} \ln(z_m^{(W)} - z_m^{0(W)}) + E_{mr}^{(WW)} \overline{Q_{ri}^{(W)}} \ln(z_m^{(W)} - \overline{z_r^{0(W)}}) \right] \right\} \quad (3.62)$$

$$p_{ij}^*(z_k^{(W)}, z_k^{0(W)}) = \frac{1}{\pi} \operatorname{Re} \left\{ L_{jm}^{(W)} \left(Q_{mi}^{(W)} \frac{\mu_m^{(W)} n_1 - n_2}{z_m^{(W)} - z_m^{0(W)}} - E_{mr}^{(WW)} \overline{Q_{ri}^{(W)}} \frac{\mu_m^{(W)} n_1 - n_2}{z_m^{(W)} - \overline{z_r^{0(W)}}} \right) \right\} \quad (3.63)$$

siendo

$$\mathbf{E}^{(WW)} = (\mathbf{L}^{(W)})^{-1} (\mathbf{B}^{(W)} + \overline{\mathbf{B}^{(Y)}})^{-1} (\overline{\mathbf{B}^{(W)}} - \overline{\mathbf{B}^{(Y)}}) \overline{\mathbf{L}^{(W)}} \quad (3.64a)$$

y el resto de parámetros, en estas expresiones y en las siguientes, según (3.25) y (3.29).

- Punto de colocación en el material W , punto de observación en el material Y

$$u_{ij}^*(z_k^{(Y)}, z_k^{0(W)}) = -\frac{1}{\pi} \operatorname{Re} \left[A_{jm}^{(Y)} E_{mr}^{(WY)} Q_{ri}^{(W)} \ln(z_m^{(Y)} - z_r^{0(W)}) \right] \quad (3.65)$$

$$p_{ij}^*(z_k^{(Y)}, z_k^{0(W)}) = \frac{1}{\pi} \operatorname{Re} \left[L_{jm}^{(Y)} E_{mr}^{(WY)} Q_{ri}^{(W)} \frac{\mu_m^{(Y)} n_1 - n_2}{z_m^{(Y)} - z_r^{0(W)}} \right] \quad (3.66)$$

siendo

$$\mathbf{E}^{(WY)} = (\mathbf{L}^{(Y)})^{-1} (\mathbf{B}^{(Y)} + \overline{\mathbf{B}^{(W)}})^{-1} (\overline{\mathbf{B}^{(W)}} + \mathbf{B}^{(W)}) \mathbf{L}^{(W)} \quad (3.67)$$

Solución fundamental bidimensional estática para semiespacios piezoeléctricos

Para un semiplano de material piezoeléctrico que ocupa el semiespacio inferior ($x_2 < 0$, x_1 según la superficie; la figura 3.3 también esquematiza esta situación) con la superficie $x_2 = 0$ con condiciones de superficie libre de tracciones en el sentido extendido: tracciones y desplazamientos eléctricos nulos, la solución fundamental para una distribución unitaria de carga, igualmente entendida en sentido extendido (carga mecánica y eléctrica) es (Pan, 1999):

$$u_{IJ}^*(z_K, z_K^0) = -\frac{1}{\pi} \operatorname{Re} \left[A_{JM} \left(Q_{MI} \ln(z_M - z_M^0) - E_{MR} Q_{RI} \ln(z_M - \overline{z_R^0}) \right) \right] \quad (3.68)$$

$$p_{IJ}^*(z_K, z_K^0) = \frac{1}{\pi} \operatorname{Re} \left[L_{JM} \left(Q_{MI} \frac{\mu_M n_1 - n_2}{z_M - z_M^0} - E_{MR} Q_{RI} \frac{\mu_M n_1 - n_2}{z_M - z_R^0} \right) \right] \quad (3.69)$$

donde se ha utilizado notación extendida, $\mathbf{n} = (n_1, n_2)$ es la normal exterior en el punto de colocación y el resto de parámetros pueden determinarse mediante (3.25), (3.29) y (3.32).

Solución fundamental bidimensional estática para bimateriales piezoeléctricos

Siguiendo los mismos criterios utilizados para definir el dominio, sistema de referencia y la notación; que en el caso de bimateriales anisótropos (figura 3.6) la solución fundamental bidimensional para bimateriales piezoeléctricos (Pan, 1999) tiene, al igual en aquel caso, cuatro expresiones dependiendo del material en el que se tomen los puntos de colocación y observación.

- Puntos de colocación y observación en el material W

$$u_{IJ}^*(z_K^{(W)}, z_K^{0(W)}) = -\frac{1}{\pi} \operatorname{Re} \left\{ A_{JM}^{(W)} \left[Q_{MI}^{(W)} \ln \left(z_M^{(W)} - z_M^{0(W)} \right) + E_{MR}^{(WW)} Q_{RI}^{(W)} \ln \left(z_M^{(W)} - \overline{z_R^{0(W)}} \right) \right] \right\} \quad (3.70)$$

$$p_{IJ}^*(z_K^{(W)}, z_K^{0(W)}) = \frac{1}{\pi} \operatorname{Re} \left\{ L_{JM}^{(W)} \left(Q_{MI}^{(W)} \frac{\mu_M^{(W)} n_1 - n_2}{z_M^{(W)} - z_M^{0(W)}} - E_{MR}^{(WW)} Q_{RI}^{(W)} \frac{\mu_M^{(W)} n_1 - n_2}{z_M^{(W)} - z_R^{0(W)}} \right) \right\} \quad (3.71)$$

siendo

$$\mathbf{E}^{(WW)} = (\mathbf{L}^{(W)})^{-1} \left(\mathbf{B}^{(W)} + \overline{\mathbf{B}^{(Y)}} \right)^{-1} \left(\overline{\mathbf{B}^{(W)}} - \overline{\mathbf{B}^{(Y)}} \right) \overline{\mathbf{L}^{(W)}} \quad (3.72a)$$

resto de parámetros, es estas expresiones y en las siguientes, según (3.25) y (3.29).

- Punto de colocación en el material W , punto de observación en el material Y

$$u_{IJ}^*(z_K^{(Y)}, z_K^{0(W)}) = -\frac{1}{\pi} \operatorname{Re} \left[A_{JM}^{(Y)} E_{MR}^{(WY)} Q_{RI}^{(W)} \ln \left(z_M^{(Y)} - z_R^{0(W)} \right) \right] \quad (3.73)$$

$$p_{IJ}^*(z_K^{(Y)}, z_K^{0(W)}) = \frac{1}{\pi} \operatorname{Re} \left[L_{JM}^{(Y)} E_{MR}^{(WY)} Q_{RI}^{(W)} \frac{\mu_M^{(Y)} n_1 - n_2}{z_M^{(Y)} - z_R^{0(W)}} \right] \quad (3.74)$$

siendo

$$\mathbf{E}^{(WY)} = (\mathbf{L}^{(Y)})^{-1} \left(\mathbf{B}^{(Y)} + \overline{\mathbf{B}^{(W)}} \right)^{-1} \left(\overline{\mathbf{B}^{(W)}} + \mathbf{B}^{(W)} \right) \mathbf{L}^{(W)} \quad (3.75)$$

En todas las soluciones fundamentales mostradas puede apreciarse el paralelismo con las soluciones programadas en esta tesis. Resulta evidente que la programación de estas soluciones no requiere un esfuerzo adicional en el tratamiento numérico de las integrales.

Capítulo 4

Fomulación hipersingular del MEC para materiales anisótropos elásticos y piezoeléctricos

4.1 Introducción

La resolución numérica de problemas de fractura mediante el MEC encuentra un primer problema en la representación geométrica de las grietas. Ésta se realiza mediante dos superficies que ocupan la misma posición en el espacio lo que nos lleva a obtener las mismas ecuaciones sobre ambas superficies y como consecuencia, a la degeneración del sistema algebraico de ecuaciones.

Tres son las posibles soluciones que se pueden encontrar en la literatura para superar esta dificultad: el uso de soluciones fundamentales específicas, el método de las subregiones y la formulación hipersingular.

Soluciones fundamentales específicas. Consiste en el uso de soluciones fundamentales sobre dominios que incorporan a la propia grieta (Snyder y Cruse, 1975). La aplicación de este método es poco flexible ya que se restringe a problemas con una estrecha relación con la configuración para la que ha sido obtenida cada solución fundamental.

El método de las subregiones (o de los subdominios). Consiste en introducir superficies ficticias que separan el dominio original en subdominios, cada uno de los cuales contiene a una de las superficies de la grieta. De esta forma las ecuaciones sobre cada una de las caras de la grieta son diferentes por pertenecer a subdominios distintos. Finalmente se imponen condiciones de equilibrio y compatibilidad sobre las superficies ficticias para cerrar el problema.

Introducido por Blandford, Ingraffea y Liggett (1981) es un método ampliamente utilizado para resolver problemas de fractura en materiales isótropos y anisótropos en dos y tres dimensiones. Así, por ejemplo, Sládek y Sládek (1982) e Ishikawa (1990) obtienen resultados para problemas tridimensionales de fractura anisótropa; Doblaré, Espiga, Gracia y Alcantud (1990) estudian, mediante este método, el crecimiento de grietas en materiales ortótropos; Gallego y Domínguez (1992) lo aplican para estudiar el crecimiento dinámico de grietas en dominios isótropos; Tan y Gao (1992a y 1992b) estudian el problema de fractura bidimensional anisótropa, Sollero y Aliabadi (1993) presentan la integral J para modo mixto en este tipo de problemas junto al método de los subdominios y Davì y Milazo (2001) lo aplican a la fractura bidimensional estática piezoeléctrica.

La formulación hipersingular (o mixta) del MEC. Consiste en aplicar ecuaciones diferentes a cada una de las superficies de la grieta. Se utiliza la ecuación de desplazamientos, vista en el capítulo anterior, sobre una de las superficies y la ecuación de tracciones, obtenida por derivación de la anterior, sobre la otra (Ioakimidis, 1983; Watson, 1986; Hong y Chen 1988).

Frente al método anterior presenta la ventaja de no tener que introducir contornos ficticios y la dificultad de la evaluación numérica de integrales hipersingulares, esto es, integrales de funciones que tienden a infinito en el intervalo de integración como $1/r^n$ ($n \geq 2$) cuando $r \rightarrow 0$. Este tipo de integrandos son inherentes a esta formulación.

La dificultad de la evaluación numérica de integrales con integrandos hipersingulares se pone de manifiesto tanto por la cantidad de publicaciones específicas sobre el tema como por los diferentes métodos propuestos para su evaluación: Kutt (1975), Ladopoulos (1988), Tsamaphyros y Dimou (1990), A.M. Korsunsky (1998), entre otros. Una completa revisión del estado del arte en esta materia puede consultarse en Chen y Hong (1999). Sin duda esta dificultad está en el origen de que el uso de este método sea sensiblemente inferior al del anterior.

Portela, Aliabadi y Rooke (1992) y Sollero y Aliabadi (1995) aplican este método a los casos isótropo y anisótropo, respectivamente, del problema de fractura bidimensional estática. El tratamiento que hacen de las integrales hipersingulares precisa de la utilización de elementos rectos.

Sáez, Gallego y Domínguez (1995) resuelven el problema de fractura bidimensional isótropa mediante un tratamiento genérico de las integrales hipersingulares que obvia la restricción anterior.

Este tratamiento constituye el punto de partida del tratamiento presentado en esta tesis para los casos anisótropo elástico y piezoeléctrico. En el caso anisótropo, el trata-

miento que se muestra en este capítulo mejora el tratamiento más restrictivo de Sollero y Aliabadi (1995) y se realiza una evaluación de los FIT, a partir de los desplazamientos en las inmediaciones del vértice de grieta, más directa que la integral J utilizada por estos autores. En el caso piezoeléctrico supone también una mejora sobre el trabajo de Pan (1999) que, utilizando también la formulación hipersingular, utiliza cuadraturas específicas para integrales hipersingulares, concretamente las de Tsamaphyros y Dimou (1990). Aquí el tratamiento que se hace de las integrales hipersingulares posibilita que la evaluación numérica se realice siempre sobre integrales regulares con la consiguiente mejora de precisión.

El problema dinámico de fractura bidimensional isótropa ha sido también tratado mediante esta formulación por Gallego y Domínguez (1996, 1997), no obstante, el autor de esta tesis no tiene constancia de que, hasta el momento, se haya presentado esta formulación para el tratamiento de los problemas bidimensionales de fractura dinámicos anisótropo elástico y piezoeléctrico. Estos problemas han sido resueltos, por métodos semianalíticos, basados, fundamentalmente, en la transformada de Fourier, por Itou (1996) e Itou y Haliding (1997), entre otros para el caso anisótropo elástico y por Shindo y Ozawa (1990) y Shindo, Narita y Ozawa (1999), en el caso piezoeléctrico.

4.2 Formulación mixta del MEC para problemas de fractura.

4.2.1 Degeneración del sistema. Ecuación integral de tracciones. Caso estático.

Si el dominio de estudio, Ω , con contorno Γ , presenta una grieta, se denotarán por Γ_c todos los contornos diferentes de las superficies de la grieta y por Γ_+ y Γ_- las dos superficies que la forman (figura 4.1), es decir: $\Gamma = \Gamma_c \cup \Gamma_+ \cup \Gamma_-$.

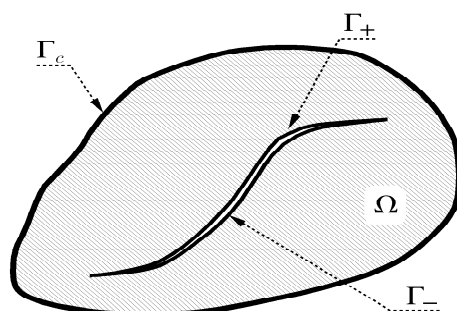


Figura 4.1: Notación de los diferentes contornos en un dominio genérico con una grieta.

Aplicando a todas las superficies la ecuación integral de contorno para los desplazamientos*

$$c_{IJ}(\boldsymbol{\xi})u_J(\boldsymbol{\xi}) + \int_{\Gamma} p_{IJ}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x})u_J(\mathbf{x})d\Gamma = \int_{\Gamma} u_{IJ}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x})p_J(\mathbf{x})d\Gamma \quad (4.1)$$

obtendríamos las mismas ecuaciones para los nodos coincidentes sobre las superficies Γ_+ y Γ_- . En estas condiciones el sistema algebraico final de ecuaciones resultaría degenerado.

Para resolver este problema se necesita una segunda ecuación que poder aplicar a una de las caras de la grieta (Watson, 1986; Hong y Chen 1988). Partiendo de la EICD para un punto interno ($c_{IJ} = \delta_{IJ}$)

$$u_I(\boldsymbol{\xi}) + \int_{\Gamma} p_{IJ}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x})u_J(\mathbf{x})d\Gamma = \int_{\Gamma} u_{IJ}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x})p_J(\mathbf{x})d\Gamma \quad (4.2)$$

se deriva respecto del punto de colocación y se aplican las relaciones cinemáticas (2.9) y las ecuaciones de comportamiento (2.1), obteniendo:

$$C_{sIKr} \frac{\partial u_K(\boldsymbol{\xi})}{\partial \xi_r} + C_{sIKr} \int_{\Gamma} \frac{\partial p_{KJ}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x})}{\partial \xi_r} u_J(\mathbf{x})d\Gamma = C_{sIKr} \int_{\Gamma} \frac{\partial u_{KJ}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x})}{\partial \xi_r} p_J(\mathbf{x})d\Gamma \quad (4.3)$$

donde $C_{sIKr}u_{I,r}(\boldsymbol{\xi})$ es el tensor de tensiones en el punto de colocación: $\sigma_{sK}(\boldsymbol{\xi})$.

Multiplicando por la normal en ese punto, $\mathbf{N}(\boldsymbol{\xi})$, se obtienen las tracciones en el mismo:

$$p_I(\boldsymbol{\xi}) + \int_{\Gamma} s_{IJ}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x})u_J(\mathbf{x})d\Gamma = \int_{\Gamma} d_{IJ}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x})p_J(\mathbf{x})d\Gamma \quad (4.4)$$

donde

$$p_I(\boldsymbol{\xi}) = N_s(\boldsymbol{\xi}) C_{sIKr} u_{K,r}(\boldsymbol{\xi}) \quad (4.5a)$$

$$d_{IJ}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}) = -N_s(\boldsymbol{\xi}) C_{sIKr} u_{KJ,r}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}) \quad (4.5b)$$

$$s_{IJ}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}) = -N_s(\boldsymbol{\xi}) C_{sIKr} p_{KJ,r}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}) \quad (4.5c)$$

y el símbolo \int indica integral en el sentido de *parte finita de Hadamard* ya que el integrando es hipersingular, como se razona un poco más abajo. En las expresiones (4.5a), (4.5b) y (4.5c) la coma seguida del índice r indica derivada respecto x_r y se ha tenido en cuenta que $\partial/\partial \xi_r = -\partial/\partial x_r$.

La ecuación (4.4) es la ecuación integral de las tracciones para un punto del dominio. Esta ecuación puede ser escrita para un punto del contorno siguiendo los mismos argumentos expuestos en el epígrafe 3.2. Definitivamente la ecuación integral de contorno en

*En adelante se utilizará la notación extendida, introducida para definir el problema piezoeléctrico, ya que comprende a la notación anisótropa elástica.

tracciones es

$$c_{IJ}(\boldsymbol{\xi})p_J(\boldsymbol{\xi}) + \int_{\Gamma} s_{IJ}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x})u_J(\mathbf{x}) d\Gamma = \int_{\Gamma} d_{IJ}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x})p_J(\mathbf{x}) d\Gamma \quad (4.6)$$

Estamos ahora en condiciones de aplicar la EICD sobre Γ_c y sobre una de las caras de la grieta, por ejemplo Γ_- y la EICT sobre la otra cara de la grieta, Γ_+ , evitando así la degeneración del sistema de ecuaciones.

4.2.2 Ecuaciones integrales en función de la apertura de grieta

En la gran mayoría de las aplicaciones la suma de las tracciones extendidas sobre las superficies de la grieta es nula. Este es el caso de grietas libres de tracciones mecánicas y de grietas autoequilibradas. Desde el punto de vista eléctrico las condiciones que se consideran en esta tesis sobre la grieta son, como ya se indicó, las de grieta impermeable y por tanto, también la componente extendida de las tracciones suma 0 sobre las superficies de la grieta.

En tales casos, no es necesario aplicar ecuaciones integrales a ambos de la grieta. Las ecuaciones integrales se van a reescribir utilizando como variables los desplazamientos o tracciones extendidas sobre Γ_c y el incremento de desplazamientos extendidos sobre las superficies de la grieta:

$$\Delta u_1(\mathbf{x}) = (u_1(\mathbf{x}^+) - u_1(\mathbf{x}^-), u_2(\mathbf{x}^+) - u_2(\mathbf{x}^-), \varphi(\mathbf{x}^+) - \varphi(\mathbf{x}^-)) \quad (4.7)$$

donde \mathbf{x}^+ y \mathbf{x}^- indican, respectivamente, puntos de Γ_+ y Γ_- . Se verá a continuación que con esas variables es suficiente considerar la EICD sobre Γ_c y la EICT sobre una de las superficies de la grieta.

Considerando la descomposición del contorno Γ en Γ_c , Γ_+ y Γ_- ; escribiremos las EICD sobre Γ_c y sobre una de las caras de la grieta y la EICT sobre la otra superficie de la grieta:

EICD si $\boldsymbol{\xi} \in \Gamma_c, \Gamma_-$

$$c_{IJ}(\boldsymbol{\xi})u_J(\boldsymbol{\xi}) + \int_{\Gamma_c + \Gamma_+ + \Gamma_-} p_{IJ}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x})u_J(\mathbf{x}) d\Gamma = \int_{\Gamma_c + \Gamma_+ + \Gamma_-} u_{IJ}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x})p_J(\mathbf{x}) d\Gamma \quad (4.8)$$

EICD si $\boldsymbol{\xi} \in \Gamma_+$

$$c_{IJ}(\boldsymbol{\xi})p_J(\boldsymbol{\xi}) + \int_{\Gamma_c + \Gamma_+ + \Gamma_-} s_{IJ}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x})u_J(\mathbf{x}) d\Gamma = \int_{\Gamma_c + \Gamma_+ + \Gamma_-} d_{IJ}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x})p_J(\mathbf{x}) d\Gamma \quad (4.9)$$

Donde el término libre $c_{IJ} = \delta_{IJ}$ si $\boldsymbol{\xi}$ pertenece a la grieta tomando en consideración la singularidad adicional que aparece por la coincidencia de las dos superficies de la grieta.

Teniendo en cuenta que

$$\int_{\Gamma_-} p_{IJ}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}) u_J(\mathbf{x}^-) d\Gamma = - \int_{\Gamma_+} p_{IJ}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}) u_J(\mathbf{x}^-) d\Gamma \quad (4.10)$$

$$\int_{\Gamma_-} u_{IJ}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}) p_J(\mathbf{x}^-) d\Gamma = \int_{\Gamma_+} u_{IJ}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}) p_J(\mathbf{x}^-) d\Gamma \quad (4.11)$$

$$\int_{\Gamma_-} s_{IJ}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}) u_J(\mathbf{x}^-) d\Gamma = - \int_{\Gamma_+} s_{IJ}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}) u_J(\mathbf{x}^-) d\Gamma \quad (4.12)$$

$$\int_{\Gamma_-} d_{IJ}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}) p_J(\mathbf{x}^-) d\Gamma = \int_{\Gamma_+} d_{IJ}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}) p_J(\mathbf{x}^-) d\Gamma \quad (4.13)$$

y denotando por $\Delta p(\mathbf{x})$ a la suma de las tracciones, en sentido extendido, sobre las superficie de la grieta: $p(\mathbf{x}^+) + p(\mathbf{x}^-)$, podemos escribir

$$\left. \begin{aligned} c_{IJ}(\boldsymbol{\xi}) u_J(\boldsymbol{\xi}) + \int_{\Gamma_c} p_{IJ}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}) u_J(\mathbf{x}) d\Gamma + \int_{\Gamma_+} p_{IJ}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}) \Delta u_J(\mathbf{x}) d\Gamma = \\ = \int_{\Gamma_c} u_{IJ}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}) p_J(\mathbf{x}) d\Gamma + \int_{\Gamma_+} u_{IJ}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}) \Delta p_J(\mathbf{x}) d\Gamma \end{aligned} \right\} \text{si } \boldsymbol{\xi} \in \Gamma_c \quad (4.14)$$

$$\left. \begin{aligned} p_J(\boldsymbol{\xi}) + \int_{\Gamma_c} s_{IJ}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}) u_J(\mathbf{x}) d\Gamma + \int_{\Gamma_+} s_{IJ}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}) \Delta u_J(\mathbf{x}) d\Gamma = \\ = \int_{\Gamma_c} d_{IJ}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}) p_J(\mathbf{x}) d\Gamma + \int_{\Gamma_+} d_{IJ}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}) \Delta p_J(\mathbf{x}) d\Gamma \end{aligned} \right\} \text{si } \boldsymbol{\xi} \in \Gamma_+ \quad (4.15)$$

Considerado las condiciones de grieta libre de tensiones o autoequilibrada e impermeable $\Delta p_J(\mathbf{x}) = 0$, las ecuaciones que, finalmente, se resuelven son:

$$\text{si } \boldsymbol{\xi} \in \Gamma_c \quad c_{IJ}(\boldsymbol{\xi}) u_J(\boldsymbol{\xi}) + \int_{\Gamma_c} p_{IJ}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}) u_J(\mathbf{x}) d\Gamma - \int_{\Gamma_+} p_{IJ}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}) \Delta u_J(\mathbf{x}) d\Gamma = \int_{\Gamma_c} u_{IJ}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}) p_J(\mathbf{x}) d\Gamma \quad (4.16)$$

$$\text{si } \boldsymbol{\xi} \in \Gamma_+ \quad p_J(\boldsymbol{\xi}) + \int_{\Gamma_c} s_{IJ}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}) u_J(\mathbf{x}) d\Gamma - \int_{\Gamma_+} s_{IJ}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}) \Delta u_J(\mathbf{x}) d\Gamma = \int_{\Gamma_c} d_{IJ}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}) p_J(\mathbf{x}) d\Gamma \quad (4.17)$$

Utilizando las ecuaciones integrales (4.16) y (4.17) no sólo se reducen el número de incógnitas y de la misma forma, el número de ecuaciones sino que, además, de la

resolución del sistema algebraico de ecuaciones que resulta se obtienen directamente las aperturas de grieta (Δu_j) que se usan como dato para la posterior evaluación de los factores de intensidad de tensión y desplazamiento eléctrico.

4.2.3 Estrategia de discretización

Para la discretización de la geometría y de las variables de campo se han utilizado elementos cuadráticos. En este tipo de elementos la geometría y las variables son interpoladas, a partir de tres valores nodales sobre el elemento, mediante polinomios de segundo grado.

La utilización de la EICT impone que la discretización tiene que garantizar que los desplazamientos sean de clase C^1 para poder derivar en el nodo y que las tracciones queden unívocamente definidas (Sáez, Gallego y Domínguez, 1995).

Tomando los puntos de colocación en los extremos del elemento y en un punto interno, la aproximación de los desplazamientos daría, en general, lugar a una situación como la esquematizada en la figura 4.2 (izda). En una situación como esa la derivada de los desplazamientos sería discontinua en x_3 . Para evitar esto es suficiente con desplazar los puntos de colocación hacia el interior del elemento, tal como indica la figura 4.2 (dcha). Ese problema no existe en los contornos donde se utiliza la EICD.

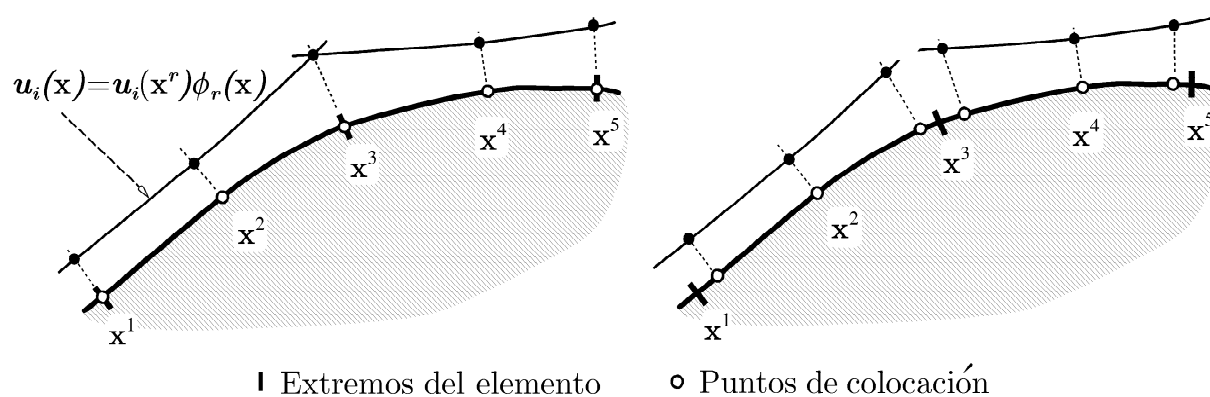


Figura 4.2: Discretización de los desplazamientos mediante elementos conformes (izda) y no conformes (dcha).

En base a lo anterior se utilizan, fundamentalmente dos tipos de elementos diferentes.

Elementos continuos (o conformes). Se usan los mismos puntos para definir la geometría y para las variables de campo: los extremos del elemento y el punto medio.

Las funciones de forma sobre estos elementos, *funciones de forma geométricas*, utilizando una coordenada natural ζ , que varía entre -1 y 1, tienen las expresiones siguientes

(figura 4.3 (izda.)):

$$\phi_{1G}(\zeta) = \frac{1}{2}\zeta(\zeta - 1) \quad ; \quad \phi_{2G}(\zeta) = (1 - \zeta^2) \quad ; \quad \phi_{3G}(\zeta) = \frac{1}{2}\zeta(\zeta + 1) \quad (4.18)$$

Con las expresiones (4.18) la geometría y las variables de campo (desplazamiento y tracciones) en un elemento Γ_e que pase por los puntos $\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, \mathbf{x}^3$ se aproximan por

$$\mathbf{x} \approx \phi_{jG}\mathbf{x}^j \quad ; \quad u_i(\mathbf{x}) \approx \phi_{jG}u_i(\mathbf{x}^j) \quad ; \quad p_i(\mathbf{x}) \approx \phi_{jG}p_i(\mathbf{x}^j) \quad (4.19)$$

Elementos discontinuos (o no conformes). Para la discretización de la geometría se utilizan los mismos puntos que en los elementos continuos, pero para las variables de campo se utilizarán unos puntos de colocación desplazados hacia el interior del elemento.

Para conseguir esto se utilizan funciones de forma ligeramente modificadas, que se denominan *funciones de forma de cálculo*. Estas funciones en lugar de pasar por el valor 1 en los valores de la coordenada natural $\zeta = -1, 0, 1$; lo harán en los valores $\zeta = \zeta_1, 0, \zeta_2$; siendo ζ_1 y ζ_2 , puntos del interior del elemento (figura 4.3 (dcha.)).

Las expresiones de estas funciones de forma son

$$\phi_1(\zeta) = \frac{\zeta(\zeta - \zeta_2)}{\zeta_1(\zeta_1 - \zeta_2)} \quad ; \quad \phi_2(\zeta) = \frac{(\zeta - \zeta_1)(\zeta - \zeta_2)}{\zeta_1\zeta_2} \quad ; \quad \phi_3(\zeta) = \frac{\zeta(\zeta - \zeta_1)}{\zeta_2(\zeta_2 - \zeta_1)} \quad (4.20)$$

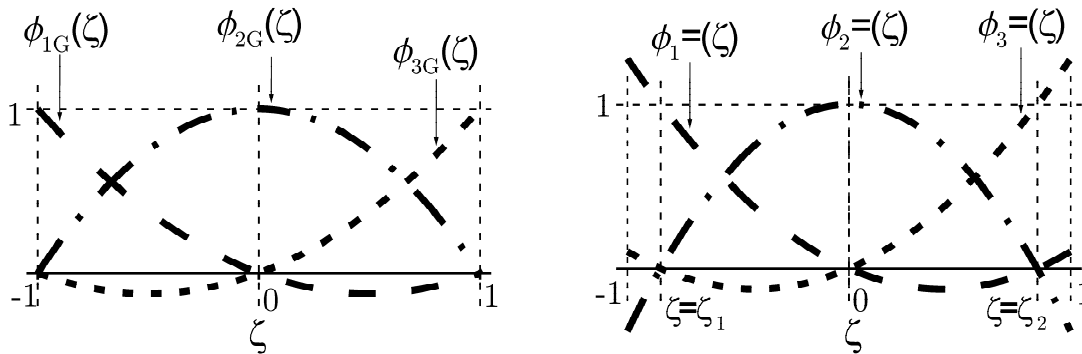


Figura 4.3: Funciones de forma geométricas (izda) y de cálculo (dcha).

Definitivamente la estrategia de discretización que se ha seguido ha sido el empleo de elementos discontinuos en los contornos de grietas (en rigor sólo en uno de los contornos) y la utilización de elementos continuos en los contornos exteriores.

En aquellos casos en los que la grieta tenga intersección con un contorno exterior en el contorno exterior se dispone un elemento semidiscontinuo, con el punto de colocación en el extremo de la intersección desplazado hacia el interior del elemento (figura 4.4).

Para los elementos discontinuos se han utilizado los valores de ζ_1 y ζ_2 utilizados en Sáez, Gallego y Domínguez (1995) $\zeta_1 = -3/4$ y $\zeta_2 = 3/4$.

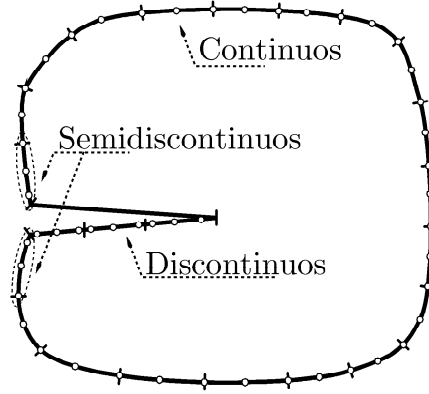


Figura 4.4: Tipos de elementos que pueden considerarse en la discretización de un dominio genérico.

4.2.4 Extensión al caso armónico

La extensión al caso armónico de la formulación anterior es inmediata. Es suficiente añadir a \mathbf{x} y $\boldsymbol{\xi}$, la frecuencia angular, ω , como variable independiente en las expresiones vistas en los epígrafes anteriores. Así, utilizando las aperturas extendidas de grieta como variables, las ecuaciones integrales en desplazamientos y tracciones que habrá que considerar serán las siguientes:

EICD

$$\begin{aligned}
 c_{IJ}(\boldsymbol{\xi})u_J(\boldsymbol{\xi}, \omega) + \int_{\Gamma_c} p_{IJ}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}, \omega)u_J(\mathbf{x}, \omega) d\Gamma - \int_{\Gamma_+} p_{IJ}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}, \omega)\Delta u_J(\mathbf{x}, \omega) d\Gamma = \\
 = \int_{\Gamma_c} u_{IJ}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}, \omega)p_J(\mathbf{x}, \omega) d\Gamma \quad \text{si } \boldsymbol{\xi} \in \Gamma_c
 \end{aligned} \tag{4.21}$$

EICT

$$\begin{aligned}
 p_J(\boldsymbol{\xi}, \omega) + \int_{\Gamma_c} s_{IJ}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}, \omega)u_J(\mathbf{x}, \omega) d\Gamma + \int_{\Gamma_+} s_{IJ}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}, \omega)\Delta u_J(\mathbf{x}, \omega) d\Gamma = \\
 = \int_{\Gamma_c} d_{IJ}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}, \omega)p_J(\mathbf{x}, \omega) d\Gamma \quad \text{si } \boldsymbol{\xi} \in \Gamma_+
 \end{aligned} \tag{4.22}$$

siendo

$$\Delta u_I(\mathbf{x}, \omega) = \begin{pmatrix} u_1(\mathbf{x}^+, \omega) - u_1(\mathbf{x}^-, \omega) \\ u_2(\mathbf{x}^+, \omega) - u_2(\mathbf{x}^-, \omega) \\ \varphi(\mathbf{x}^+, \omega) - \varphi(\mathbf{x}^-, \omega) \end{pmatrix} \tag{4.23}$$

4.3 Evaluación numérica de las integrales. Caso estático

Como se ha podido apreciar en el capítulo precedente, todas las soluciones fundamentales que se han empleado en esta tesis muestran, en los desplazamientos, una dependencia funcional con la distancia en el plano complejo entre los puntos de colocación y de observación, $z_K - z_K^o$, del tipo $\ln(z_K - z_K^o)$.

Los términos p_{IJ}^* y d_{KJ}^* , que aparecen en las ecuaciones integrales en desplazamientos y tracciones, contienen derivadas de los desplazamientos y dependen, por tanto, de esa distancia en la forma $1/(z_K - z_K^o)$ y los términos s_{KJ}^* , de la EI en tracciones, contienen derivadas segundas de los desplazamientos y tienen una dependencia del tipo $1/(z_K - z_K^o)^2$.

En estas condiciones, cuando la integración de las ecuaciones de contorno se esté realizando sobre el elemento que contiene al punto de colocación se tendrán que evaluar integrales de singularidad logarítmica, integrales singulares e *integrales hipersingulares*.

Cuando la integración se realiza sobre elementos que no contienen al punto de colocación las integrales tienen integrandos regulares en todo los casos. Estas integrales han sido evaluadas según un esquema de cuadraturas ordinarias de Gauss.

A continuación se detallan los tratamientos, aplicados tanto al caso anisótropo elástico como piezoeléctrico, para la integración numérica de los integrandos no regulares.

4.3.1 Integrandos de singularidad débil

Son los integrandos que contienen a los desplazamientos de la solución fundamental. Estos integrandos muestran una singularidad del tipo $O[\ln(z_K - z_K^o)]$ cuando el punto de observación tiende al punto de colocación, es decir cuando $\mathbf{x} \rightarrow \boldsymbol{\xi}$. Integrales con este comportamiento aparecen en el término

$$\int_{\Gamma_c} u_{IJ}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}) p_J(\mathbf{x}) d\Gamma \quad (4.24)$$

Después de discretizar el dominio, introducir en (4.24) la expresión de las soluciones fundamentales, aproximar las tracciones $p_J(x)$ mediante los valores nodales y las funciones de interpolación ϕ y sacar de la integral los términos que sólo dependen de las propiedades del material; han de resolverse integrales débilmente singulares de la forma:

$$I_d = \int_{\Gamma_e} \ln(z_K - z_K^o) \phi d\Gamma \quad (4.25)$$

cuando Γ_e es el elemento que contiene a ξ .

Estas integrales han sido calculadas mediante cuadraturas de Gauss específicas para el logaritmo.

4.3.2 Integrandos de singularidad fuerte

Los integrandos que contienen los términos $p_{IJ}^*(\xi, \mathbf{x})$, $d_{IJ}^*(\xi, \mathbf{x})$ muestran una singularidad del tipo $O[1/(z_K - z_K^0)]$ cuando $\mathbf{x} \rightarrow \xi$. Los términos que muestran este comportamiento son

$$\oint_{\Gamma_c} p_{IJ}^*(\xi, \mathbf{x}) u_J(\mathbf{x}) d\Gamma \quad ; \quad \oint_{\Gamma_+} d_{IJ}^*(\xi, \mathbf{x}) \Delta p_J(\mathbf{x}) d\Gamma \quad (4.26)$$

de la EICD y EICT, respectivamente, cuando son integrados sobre el elemento que contiene a ξ .

Nótese que para las condiciones de contorno asumidas sobre las superficies de la grieta en esta tesis ($\Delta p_J = 0$), los núcleos d_{IJ}^* nunca exhibirían comportamiento singular. No obstante se incluye su integración singular para completar la exposición con la posibilidad de considerar condiciones de contorno diferentes.

Tomando en consideración las derivadas de los desplazamientos de las soluciones fundamentales y tras la discretización de los contornos, de los desplazamientos y de las tracciones, se han de evaluar las siguientes integrales singulares:

$$I_{f1} = \oint_{\Gamma_e} \frac{\mu_K n_1 - n_2}{z_K - z_K^0} \phi d\Gamma \quad (\text{sin suma en K}) \quad (4.27)$$

$$I_{f2} = \oint_{\Gamma_e} \frac{\mu_K N_1 - N_2}{z_K - z_K^0} \phi d\Gamma \quad (\text{sin suma en K}) \quad (4.28)$$

siendo $\mathbf{n} = (n_1, n_2)$ la normal en el punto de observación y $\mathbf{N} = (N_1, N_2)$ la normal en el punto de colocación.

El tratamiento numérico de estas integrales se hace en base un cambio de variable que transforma cada elemento del contorno, Γ_e , al plano complejo. La nueva variable es la distancia en el plano complejo entre los puntos de colocación y observación que se denota por χ_K :

$$\chi_K = z_K - z_K^0 = (x_1 - \xi_1) + \mu_K(x_2 - \xi_2) \quad (4.29)$$

el jacobiano de la transformación entre el contorno y el plano complejo tiene la siguiente expresión

$$\frac{d\chi_K}{d\Gamma} = \frac{d\chi_K}{dx_1} \frac{dx_1}{d\Gamma} + \frac{d\chi_K}{dx_2} \frac{dx_2}{d\Gamma} \quad (4.30)$$

donde

$$\frac{d\chi_K}{dx_1} = 1 \quad ; \quad \frac{d\chi_K}{dx_2} = \mu_K \quad (4.31)$$

las derivadas $dx_1/d\Gamma$ y $dx_2/d\Gamma$ están relacionadas con la normal externa al contorno en el punto de observación (ver figura 4.5) en la forma

$$\frac{dx_1}{d\Gamma} = \cos(\theta) = -n_2 \quad ; \quad \frac{dx_2}{d\Gamma} = \sin(\theta) = n_1 \quad (4.32)$$

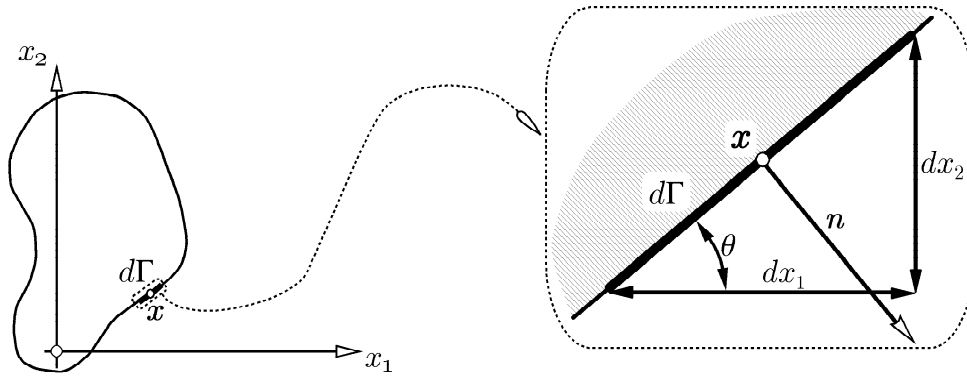


Figura 4.5: Elemento diferencial de contorno en torno al punto de observación y normal exterior en ese punto.

Sustituyendo (4.32) y (4.31) en (4.30) se obtiene, para el jacobiano, la expresión

$$\frac{d\chi_k}{d\Gamma} = \mu n_1 - n_2 \quad (4.33)$$

El jacobiano de la transformación está, por tanto, incluido en la propia solución fundamental para todos los casos estáticos vistos en el capítulo 3: solución de campo completo, semiespacio, bimateriales; para comportamiento anisótropo elástico y piezoelectrico. Esta es la idea fundamental que permite el proceso de regularización de las integrales singulares y de las hipersingulares como se muestra en las secciones siguientes.

Evaluación numérica de I_{f1}

Con la nueva variable χ_K , introduciendo (4.33) en (4.27), la integral I_{f1} queda

$$I_{f1} = \int_{\Gamma_e} \frac{\mu_K n_1 - n_2}{z_K - z_K^0} \phi d\Gamma = \int_{\Gamma_e} \frac{1}{\chi_K} \phi d\chi_K \quad (4.34)$$

Esta integral, fuertemente singular cuando $\mathbf{x} \rightarrow \boldsymbol{\xi}$, puede ser fácilmente descompuesta en la suma de una integral regular más una singular de solución analítica conocida:

$$I_{f1} = \int_{\Gamma_e} \frac{1}{\chi_K} \phi d\chi_K = \int_{\Gamma_e} \frac{1}{\chi_K} (\phi \pm 1) d\chi_K = \underbrace{\int_{\Gamma_e} \frac{1}{\chi_K} (\phi - 1) d\chi_K}_{I_{f1}^{(R)}} + \underbrace{\int_{\Gamma_e} \frac{1}{\chi_K} d\chi_K}_{I_{f1}^{(S)}} \quad (4.35)$$

En la integral $I_{f1}^{(R)}$ de (4.35) la singularidad del término $1/\chi_K$ en el punto de colocación se cancela con el término $(\phi - 1)$ ya que este término se anula cuando $\mathbf{x} \rightarrow \boldsymbol{\xi}$ con un cero del mismo orden que la variable χ_K . Esta integral queda, pues, regular y puede ser calculada mediante un esquema estándar de cuadraturas de Gauss.

La integral $I_{f1}^{(S)}$ de (4.35) sigue siendo fuertemente singular pero tiene solución analítica conocida:

$$I_{f1}^{(S)} = \ln(\chi_K)|_{\Gamma_e} \quad (4.36)$$

La condición de movimiento de sólido rígido (Lacht y Watson, 1976) permite evitar la evaluación numérica de esta integral así como la del término libre c_{IJ} .

Evaluación numérica de I_{f2}

La integral I_{f2} (4.28), introduciendo la variable χ_K (4.29), queda

$$I_{f2} = \int_{\Gamma_e} \frac{\mu_K N_1 - N_2}{z_K - z_K^0} \phi d\Gamma = \int_{\Gamma_e} \frac{\mu_K N_1 - N_2}{\chi_K} \phi d\Gamma \quad (4.37)$$

Con el objetivo de regularizar esta integral se suma y se resta el término $d\chi_K/d\Gamma$ al término $(\mu_K N_1 - N_2)$:

$$\begin{aligned} I_{f2} &= \int_{\Gamma_e} \frac{(\mu_K N_1 - N_2 \pm d\chi_K/d\Gamma)}{\chi_K} \phi d\Gamma = \\ &= \underbrace{\int_{\Gamma_e} \frac{(\mu_K N_1 - N_2 - d\chi_K/d\Gamma)}{\chi_K} \phi d\Gamma}_{I_{f2}^{(R)}} + \underbrace{\int_{\Gamma_e} \frac{1}{\chi_K} \phi d\chi_K}_{I_{f2}^{(S)}} \end{aligned} \quad (4.38)$$

En el numerador y denominador del integrando de $I_{f2}^{(R)}$ hay ahora dos ceros del mismo orden ya que

$$\mathbf{x} \rightarrow \boldsymbol{\xi} \Rightarrow \mathbf{n}(\mathbf{x}) \rightarrow \mathbf{N}(\boldsymbol{\xi}) \quad (4.39)$$

y esto permite afirmar, teniendo en cuenta (4.33), que

$$d\chi_K/d\Gamma \rightarrow \mu_K N_1 - N_2 \text{ cuando } \mathbf{x} \rightarrow \boldsymbol{\xi} \quad (4.40)$$

Por lo tanto la integral $I_{f_2}^{(R)}$ es regular y puede ser evaluada mediante cuadraturas ordinarias de Gauss.

La integral singular $I_{f_2}^{(S)}$ es la integral (4.34) del apartado anterior, cuyo proceso de integración ya ha sido descrito.

4.3.3 Integrandos hipersingulares

Los términos s_{IJ}^* de la ecuación integral de contorno en tracciones muestran, cuando el punto de observación tiende al de colocación, una singularidad de tipo $O[1/(z_K - z_K^o)^2]$ dando lugar a que aparezcan integrales hipersingulares en los términos que contienen esto núcleos:

$$\oint_{\Gamma_e} s_{IJ}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}) u_{J}(\mathbf{x}) d\Gamma \quad (4.41)$$

Las integrales hipersingulares que, tras el proceso de discretización, han de ser evaluadas numéricamente tienen, para cualesquiera de las soluciones fundamentales estáticas consideradas, la forma

$$I_h = \oint_{\Gamma_e} \frac{\mu_K n_1 - n_2}{(z_K - z_K^o)^2} \phi d\Gamma \quad (\text{sin suma en } K) \quad (4.42)$$

Con el cambio de variable propuesto en (4.29) y teniendo en cuenta (4.33), la integral hipersingular (4.42) puede escribirse en función de la variable χ_K como:

$$I_h = \oint_{\Gamma_e} \frac{\mu_K n_1 - n_2}{(z_K - z_K^o)^2} \phi d\Gamma = \oint_{\Gamma_e} \frac{1}{\chi_K^2} \phi d\chi_K^2 \quad (4.43)$$

Desarrollando en serie de Taylor la función de forma ϕ , considerada como función de la variable compleja χ_K , en el entorno de $\chi_K = 0$, puede escribirse

$$\phi(\chi_K \approx 0) = \phi(\chi_K = 0) + \left. \frac{d\phi}{d\chi_K} \right|_{\chi_K=0} \chi_K + O[\chi_K^2] = \phi_0 + \phi'_0 \chi_K + O[\chi_K^2] \quad (4.44)$$

Sumando y restando, a la función ϕ en (4.43), los dos primeros términos del desarrollo (4.44), la integral I_h puede ser descompuesta de la siguiente forma

$$\begin{aligned} I_h &= \oint_{\Gamma_e} \frac{1}{\chi_K^2} \phi d\chi_K = \oint_{\Gamma_e} \frac{1}{\chi_K^2} (\phi \pm (\phi_0 + \phi'_0 \chi_K)) d\chi_K = \\ &= \underbrace{\oint_{\Gamma_e} \frac{\phi - (\phi_0 + \phi'_0 \chi_K)}{\chi_K^2} d\chi_K}_{I_h^{(R)}} + \phi_0 \underbrace{\oint_{\Gamma_e} \frac{1}{\chi_K^2} d\chi_K}_{I_h^{(H)}} + \phi'_0 \underbrace{\oint_{\Gamma_e} \frac{1}{\chi_K} d\chi_K}_{I_h^{(S)}} \end{aligned} \quad (4.45)$$

En la integral $I_h^{(R)}$ el numerador y el denominador del integrando son ceros del mismo orden, $O[z_K - z_K^2]$, cuando $\mathbf{x} \rightarrow \boldsymbol{\xi}$. Esta integral es, por lo tanto, regular e integrable por cuadraturas ordinarias de Gauss.

La integral $I_h^{(S)}$ es la misma integral singular que ha sido obtenida con anterioridad ($I_{f1}^{(S)}$) y la integral $I_h^{(H)}$ es hipersingular pero tiene solución analítica conocida:

$$I_h^{(H)} = \frac{1}{\chi_K} \Big|_{\Gamma_e} \quad (4.46)$$

Este método es aplicado por primera vez por Sáez, Gallego y Domínguez (1995) al caso isótropo. En ese caso las soluciones fundamentales son funciones reales de variable real. En esta tesis la idea es extendida a los comportamientos anisótropo elástico (García, Sáez y Domínguez, 2004) y piezoeléctrico (García-Sánchez, Sáez y Domínguez, próxima publicación) donde la integración se realiza sobre funciones complejas de variable compleja.

El método de regularización y posterior integración muestra ventajas importantes frente a otros métodos que han sido utilizados para resolver problemas semejantes.

La precisión de la integración numérica no se vé comprometida ya que se realiza únicamente sobre integrales regulares. Esta es una sensible ventaja frente a métodos que utilizan cuadraturas específicas para la evaluación numérica de integrales hipersingulares, por ejemplo Pan (1997, 1999). La existencia de diferentes tipos de cuadraturas para integrales hipersingulares (Kutt, 1975; Ladopoulos, 1988; Tsamasphyros y Dimou, 1990; entre otros) pone de manifiesto que la eficacia y precisión de estos métodos no es un tema cerrado en la actualidad.

El proceso de regularización empleado es sencillo, por lo sencillo de la función sobre la que se realiza el método de sustracción y genérico en el sentido de que no es necesario asumir elementos rectos sobre la grieta.

Otros trabajos que emplean el método de sustracción mediante desarrollo en serie de Taylor lo aplican sobre funciones más complicadas, así Sollero y Aliabadi (1995) lo aplican sobre una función $f(\zeta)$ definida por el producto de la solución fundamental, una función de forma, el jacobiano de la transformación a la coordenada natural ζ y el término $(\zeta - \zeta_0)^2$, siendo ζ_0 la coordenada natural que define al punto de colocación. Con esta definición, necesitan considerar, sobre la grieta, elementos rectos. De esta forma el jacobiano resulta constante y pueden realizar la integración analítica de las integrales hipersingulares.

4.4 Evaluación numérica de las integrales. Caso dinámico

Se utiliza, al igual que para el caso estático, la notación extendida, que permite tratar los casos anisótropo elástico y piezoléctrico simultáneamente.

En el epígrafe 3.4 se pone de manifiesto como las soluciones fundamentales armónicas admiten una descomposición en parte regular y parte singular.

Teniendo presente esta idea, los núcleos de la SF armónica ($u_{IJ}^*(x_m, \xi_m, \omega)$, $p_{IJ}^*(x_m, \xi_m, \omega)$, $d_{IJ}^*(x_m, \xi_m, \omega)$, $s_{IJ}^*(x_m, \xi_m, \omega)$) de las ecuaciones integrales en desplazamientos (4.21) y en tracciones (4.22) se descomponen, de esta forma, para su integración.

Como la parte singular coincide con la solución fundamental estática, salvo constantes, su integración se realiza según lo expuesto en el epígrafe anterior. A estas integrales hay que añadir el resultado integrar la parte regular.

A continuación se muestran las expresiones obtenidas a partir de la parte regular de los desplazamientos de la SF en frecuencia de todos los núcleos (aunque los de los desplazamientos y las tracciones ya han sido mostrados (3.60) y (3.61) se vuelven mostrar para conservar el orden de la exposición):

$$u_{IJ}^{R*}(x_m, \xi_m, \omega) = \frac{1}{8\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \gamma_{IJ}^m \Phi^R(k_m, |\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}| \cos(\theta)) d\theta \quad (4.47)$$

$$p_{IJ}^{R*} = \frac{1}{8\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \bar{\Gamma}_{JK} \gamma_{IK}^m k_m \Upsilon(k_m |\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}| \cos(\theta)) \text{sig}(\cos(\theta)) d\theta \quad (4.48)$$

$$\begin{aligned} d_{IJ}^{R*} &= N_r C_{rIKl} u_{KJ,l}^{R*} = \\ &= -\frac{1}{8\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \bar{\Gamma}_{IK} \gamma_{KJ}^m k_m \Upsilon(k_m |\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}| \cos(\theta)) \text{sig}(\cos(\theta)) d\theta \end{aligned} \quad (4.49)$$

$$\begin{aligned} s_{IJ}^{R*} &= N_r C_{rIKl} p_{KJ,l}^{R*}(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}) = \\ &= -\frac{1}{8\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \bar{\Gamma}_{IK} \bar{\Gamma}_{JS} \gamma_{KS}^m k_m^2 \Phi(k_m |\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}| \cos(\theta)) \text{sig}(\cos(\theta)) d\theta \end{aligned} \quad (4.50)$$

siendo:

$$\gamma_{ij}^m = V_{im} V_{jm} / \rho c_m^2 \text{ para el caso isótropo elástico.}$$

$$\gamma_{IJ}^m = \mathcal{E}_{IJ}^m / \rho c_m^2 E_{qq}^m \text{ para el caso piezoléctrico.}$$

Los parámetros \mathcal{E}_{IJ}^m , E_{qq}^m , V_{im} , c_m ρ han sido definidos en el epígrafe 3.4.

$\bar{\Gamma}_{JK} = C_{rJKl} n_r \eta_l$; $\bar{\bar{\Gamma}}_{IK} = C_{rIKl} N_r \eta_l$ siendo n_r la normal en el punto de observación, N_r la normal en el punto de colocación y η_l la normal a la circunferencia de integración.

$$\Upsilon(s) = -\pi \exp(is) - 2[\cos(s) \text{si}(s) - \sin(s) \text{ci}(s)]$$

y sig la función signo.

Entrando con las expresiones (4.47) a (4.50) en (4.21) y (4.22) las integrales que han de evaluarse numéricamente, sobre cada elemento del contorno, son las siguientes integrales dobles

$$I_1 = \int_{\Gamma_e} \left[\int_{-\pi}^{\pi} \gamma_{IJ}^m \Phi^R(k_m, |\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}| |\cos(\theta)|) d\theta \right] d\Gamma \quad (4.51)$$

$$I_2 = \int_{\Gamma_e} \left[\int_{-\pi}^{\pi} \bar{\Gamma}_{JK} \gamma_{IJ}^m k_m \Upsilon(k_m |\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}| |\cos(\theta)|) \text{sig}(\cos(\theta)) \right] d\Gamma \quad (4.52)$$

$$I_3 = \int_{\Gamma_e} \left[\int_{-\pi}^{\pi} \bar{\bar{\Gamma}}_{IK} \gamma_{KJ}^m k_m \Upsilon(k_m |\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}| |\cos(\theta)|) \text{sig}(\cos(\theta)) d\theta \right] d\Gamma \quad (4.53)$$

$$I_4 = \int_{\Gamma_e} \left[\int_{-\pi}^{\pi} \bar{\bar{\Gamma}}_{IK} \bar{\Gamma}_{JS} \gamma_{KS}^m k_m^2 \Phi(k_m |\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}| |\cos(\theta)|) \text{sig}(\cos(\theta)) d\theta \right] d\Gamma \quad (4.54)$$

Las integrales I_1 , I_2 , I_3 pueden ser evaluadas mediante cuadraturas de Gauss ordinarias.

En el integrando de I_4 vuelve a aparecer la función Φ . Como ha sido comentado en el epígrafe 3.4 esta función presenta dos características que resultan importantes respecto de la evaluación numérica de esa integral:

- Muestra un comportamiento singular del tipo $O[\ln(|\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}| |\cos(\theta)|)]$ cuando $\mathbf{x} \rightarrow \boldsymbol{\xi}$ y cuando $\theta \rightarrow \pm\pi/2$.
- Muestra un comportamiento oscilatorio directamente proporcional al producto del número de onda por la distancia entre los puntos de colocación y observación.

La singularidad logarítmica del radicando ha sido tratada, como en el caso estático, mediante cuadraturas de Gauss que incorporan la función logaritmo.

El comportamiento oscilatorio de la función puede generar problemas numéricos si el producto $k_m |\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}|$ es elevado, en otras palabras en los casos de frecuencias elevadas y/o

campo lejano. Para superar esta dificultad con las frecuencias resueltas se ha seguido la solución propuesta por Denda, Wang y Yong (2003) consistente en la división de la circunferencia unitaria de integración en un número de intervalos $n = 2\omega|\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}|/c_2$ siendo c_2 es la mínima velocidad de fase y ω la frecuencia de estudio.

Denda, Wang y Yong (2003) y Denda, Araki y Yong (2004) proponen, para la integración de I_1 e I_2 , expresiones (4.51) y (4.52), intercambiar las integrales, es decir integrar primero sobre el elemento y después sobre la circunferencia unidad. Este enfoque tiene sentido para la utilización de elementos rectos, que son los empleados en esos trabajos, porque permite la integración analítica sobre el elemento. Con elementos cuadráticos esa integración analítica no resulta posible y el intercambiar el orden de las integrales no aporta ventaja alguna por lo que la integración se ha realizado en el orden indicado.

4.5 Evaluación de los factores de intensidad

Para la evaluación de los factores de intensidad de tensión y desplazamiento eléctrico se utiliza el método de los desplazamientos. En este método, los valores de desplazamiento obtenidos sobre nodos concretos de la grieta y sus coordenadas se llevan a las expresiones analíticas de los desplazamientos en el entorno del vértice de grieta obteniendo, así, un sistema algebraico para determinar los factores de intensidad.

En la literatura se pueden encontrar dos modos de realizar este cálculo, la formulación monopunto y la formulación multipunto; según se utilicen los valores de los desplazamientos en uno o más puntos por cada cara de la grieta.

En esta tesis se ha optado por la formulación monopunto siguiendo las conclusiones del trabajo de Sáez, Gallego y Domínguez (1995) en el que se realiza, para el caso isótropo, un estudio comparativo de ambas formulaciones. Para ello se evalúa el FIT a partir de la apertura de grieta a dos distancias (r_1 y r_2) del vértice: puntos a y b y puntos c y d en la figura 4.6. Comparando estos resultados entre sí y con los obtenidos a partir de los desplazamientos en los cuatro puntos, los resultados de ese trabajo indican que introducir valores más alejados del vértice produce un aumento del error. Este comportamiento resulta lógico porque a medida que nos alejamos del vértice los términos asintóticos predominantes en la zona dominada por la singularidad pierden peso.

La generalidad del método de integración empleado aquí permite el uso en el vértice de la grieta del elemento un cuarto discontinuo recto. Este elemento se caracteriza porque el punto interno lo divide en dos partes de longitudes $l/4$ y $3l/4$, siendo l la longitud del elemento. Sus puntos de colocación para $\zeta_1 = -3/4$ y $\zeta_2 = 3/4$ (siendo ζ la coordenada natural) ocupan las posiciones que se indican en la figura 4.7.

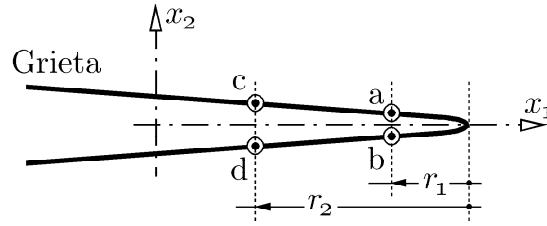


Figura 4.6: Puntos para determinación del factor de intensidad de tensiones.

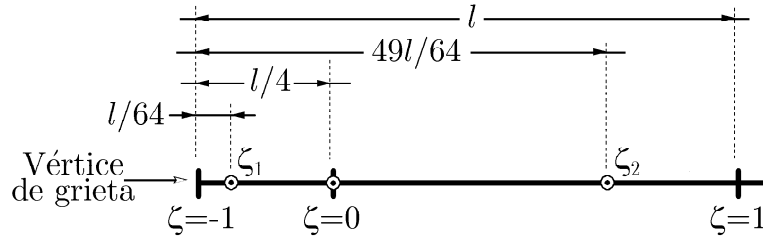


Figura 4.7: Elemento a un cuarto discontinuo con $\zeta_1 = -3/4$, $\zeta_2 = 3/4$.

Por la relación que muestra este elemento entre su coordenada natural y la coordenada radial (r) del sistema polar con origen en el vértice de la grieta (ver figura 2.1):

$$\zeta = 2\sqrt{\frac{r}{l}} - 1 \quad (4.55)$$

es capaz de reproducir el comportamiento \sqrt{r} de los desplazamientos en el entorno del vértice de grieta (Martínez y Domínguez, 1984), expresiones (2.55a), (2.55b), (2.57a), (2.57b) y (2.59) para comportamiento anisótropo elástico y (2.63) para piezoeléctrico.

Esta característica del elemento, unida a la existencia de un punto de colocación muy cercano al vértice (ζ_1 en la figura 4.7) permite la evaluación directa de los factores de intensidad.

El postprocesado de resultados necesario para la utilización de este método es mínimo y por tanto lo es el costo computacional. En cualquier caso, el costo es mucho menor que el de el resto de métodos utilizados con el mismo fin (véase epígrafe 2.4.4). Sin embargo este menor costo computacional no va en detrimento de la precisión en los resultados que, como se pone de manifiesto en el siguiente capítulo, tienen una precisión muy elevada.

Para obtener las expresiones de los FI como función de las aperturas extendidas de grieta se introducen las coordenadas de los puntos más cercanos al vértice ($r = \bar{r}$, $\theta = \pm\pi$; en el sistema usual de coordenadas polares fijado en el vértice de grieta, ver figura 2.1) en las expresiones analíticas de los desplazamientos en esta zona. A continuación se muestran las expresiones utilizadas en los casos analizados.

- **Expresiones del FIT en función de las aperturas de grieta para el caso anisótropo elástico**

Introduciendo las coordenadas $\theta = \pi$, $r = l/64$ para la superficie superior de la grieta y $\theta = -\pi$, $r = l/64$ (l es la longitud del elemento un cuarto situado en el vértice de la grieta) para la inferior en (2.55a), (2.57a) y (2.59) se obtiene para el caso plano (Sih Paris e Irwin, 1965):

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \Delta u_1|_{r=l/64} \\ \Delta u_2|_{r=l/64} \\ \Delta u_3|_{r=l/64} \end{pmatrix} &= \sqrt{\frac{l}{8\pi}} \begin{pmatrix} D_{11} & D_{12} & 0 \\ D_{21} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & D_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K_I \\ K_{II} \\ K_{III} \end{pmatrix} \Rightarrow \\ \Rightarrow \begin{pmatrix} K_I \\ K_{II} \\ K_{III} \end{pmatrix} &= \sqrt{\frac{8\pi}{l}} \begin{pmatrix} D_{11} & D_{12} & 0 \\ D_{21} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & D_{33} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \Delta u_1|_{r=l/64} \\ \Delta u_2|_{r=l/64} \\ \Delta u_3|_{r=l/64} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (4.56)$$

siendo

$$\begin{aligned} D_{11} &= \operatorname{Re} \left(i \frac{\mu_1 A_{12} - \mu_2 A_{11}}{\mu_1 - \mu_2} \right); \quad D_{12} = \operatorname{Re} \left(i \frac{A_{12} - A_{11}}{\mu_1 - \mu_2} \right) \\ D_{21} &= \operatorname{Re} \left(i \frac{\mu_1 A_{22} - \mu_2 A_{21}}{\mu_1 - \mu_2} \right); \quad D_{22} = \operatorname{Re} \left(i \frac{A_{22} - A_{21}}{\mu_1 - \mu_2} \right) \\ D_{33} &= \operatorname{Re} \left(\frac{i}{\mu_3 C_{44} + C_{45}} \right) \end{aligned} \quad (4.57)$$

donde $i = \sqrt{-1}$, C_{44} y C_{45} son componentes del tensor de comportamiento y la matriz \mathbf{A} y las raíces μ_1 , μ_2 y μ_3 han sido definidas en el epígrafe 2.2.2.

Es pues suficiente entrar con los valores de la apertura de grieta en el nodo más cercano al vértice de grieta, obtenidos mediante el MEC, en (4.56) para obtener directamente los valores de los FIT.

- **Expresiones del FIT/FIDE en función de las aperturas extendidas de grieta para el caso piezoeléctrico**

Para el caso piezoeléctrico pueden sustituirse las coordenadas de los puntos en las expresiones (2.63) para despejar los valores de los FIT y el FIDE. No obstante, resulta más cómoda la expresión matricial obtenida para el caso plano generalizado por Suo, Kuo, Barnett y Willis (1992):

$$\begin{pmatrix} K_{II} \\ K_I \\ K_{III} \\ K_{IV} \end{pmatrix} = \sqrt{\frac{8\pi}{l}} \mathbf{H}^{-1} \begin{pmatrix} \Delta u_1|_{r=l/64} \\ \Delta u_2|_{r=l/64} \\ \Delta u_3|_{r=l/64} \\ \Delta \varphi|_{r=l/64} \end{pmatrix} \quad (4.58)$$

siendo

$$\mathbf{H} = \operatorname{Re}(i \mathbf{A} \mathbf{L}^{-1})$$

donde \mathbf{A} y \mathbf{L} son las matrices formadas, por columnas, por los vectores definidos en el epígrafe 2.3.2 e $i = \sqrt{-1}$.

Capítulo 5

Resultados numéricos

5.1 Introducción

En este capítulo se presenta una amplia relación de resultados numéricos empleando la formulación hipersingular del MEC mediante el tratamiento de regularización descrito en el capítulo anterior.

A lo largo de estos ejemplos se utilizan todas las soluciones fundamentales descritas en el tercer capítulo: SF estáticas anisótropas elásticas para espacio completo y para semiespacio, SF estáticas piezoeléctricas y SF dinámicas para comportamiento anisótropo elástico y piezoeléctrico.

En cada caso se resuelven problemas cuyos resultados se encuentran en la literatura con el objetivo de validar la formulación utilizada así como la implementación que, de la misma, se ha realizado.

Una vez comprobado que estas comparaciones resultan satisfactorias, se aportan nuevos resultados, al menos el autor no tiene constancia de la publicación previa de los mismos, resolviendo las mismas configuraciones de grieta utilizadas para los casos comparados.

Los resultados que se muestran son siempre FIT adimensionalizados (FIT y FIDE adimensionalizados para el caso piezoeléctrico). En los problemas estáticos los resultados se representan gráficamente, o se tabulan, para diferentes parámetros geométricos en función de la referencia utilizada. Para los ejemplos dinámicos el resultado se aportará, las más de las veces, como una curva frente a la frecuencia adimensionalizada y en algún caso concreto, frente al tiempo adimensionalizado.

La formulación empleada se muestra numéricamente muy robusta. Como es sabido,

la formulación del problema anisótropo elástico no es trasladable de forma inmediata al comportamiento isótropo. Si en el tensor de comportamiento se introdujeran las constantes de un material isótropo las ecuaciones se degenerarían y no sería posible obtener el resultado. Numéricamente el resultado del problema isótropo puede ser, sin embargo, obtenido mediante constantes *cuasi isótropas*, es decir valores suficientemente cercanos a los valores isótropos para obtener un buen resultado y suficientemente diferentes entre sí para que no se produzca la degeneración de la formulación. Se pone de manifiesto a lo largo de todo el capítulo que esta formulación resuelve el problema isótropo con una gran precisión y sin dificultades numéricas.

5.2 Resultados estáticos. Solución fundamental anisótropa elástica de campo completo

5.2.1 Grieta recta, dominio infinito

Para analizar influencia de la relación de ortotropía en el resultado, se resuelve el problema de una grieta recta en un dominio infinito sometida a tracción uniforme (figura 5.1). La solución analítica de este problema es conocida (Sih, Paris e Irwin, 1965): $K_I/\sigma\sqrt{\pi a} = 1$.

Se han definido las propiedades de un material ortótropo hipotético:

$$E_1 = G_{12}(\varphi + 2\nu_{12} + 1) ; E_2 = E_1/\varphi ; G_{12} = 6.0GPa ; \nu_{12} = 0.03 \quad (5.1)$$

Se ha hecho coincidir la dirección 1 con la dirección de la grieta. Se ha discretizado la grieta con 6 elementos y se ha hecho variar la relación E_1/E_2 entre 10^{-3} y 10^3 . En todos los casos los errores obtenidos han sido inferiores al 0.1%.

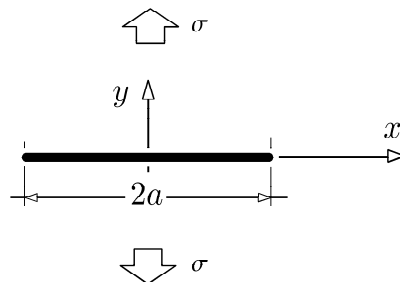


Figura 5.1: Grieta recta sometida a tracción. Dominio infinito.

5.2.2 Grieta inclinada sometida a tracción en dominio isótropo

Para evaluar la estabilidad de la formulación cuando las propiedades del material tienden a propiedades de isotropía se resuelve el problema de una grieta en dominio infinito, sometida a tracción uniforme e inclinada respecto de la dirección de las tracciones (figura en tabla 5.1). La solución analítica de este problema fue publicada por Irwin en 1957 para $G = 76.9231 \text{ GPa}$; $\nu = 0.3$. En este caso las propiedades, cuasi isótropas, adoptadas han sido:

$$G = 76.9231 \text{ GPa} ; \quad \nu = 0.3 ; \quad E_1 = (1 + \alpha)E ; \quad E_2 = (1 - \alpha)E \quad (5.2)$$

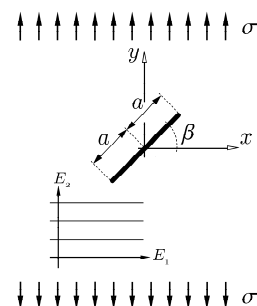
con $E = 2(1 + \nu)G$ y $\alpha \ll 1$. Esta misma técnica se empleará en adelante para obtener resultados en dominios isótropos.

Se obtienen los resultados indicados en la tabla 5.1 con una muy buena coincidencia con los resultados de la referencia. El parámetro, α se ha hecho variar entre 10^{-3} y 10^{-20} sin que aparezcan problemas numéricos lo que muestra la robustez de la formulación en este sentido. La malla empleada ha sido la misma que en el ejemplo anterior.

Tabla 5.1: Grieta oblicua en medio infinito isótropo. Resultados y esquema.

β	Solución exacta [1]		MEC F. Hipersingular	
	$K_I/\sigma\sqrt{\pi a}$	$K_{II}/\sigma\sqrt{\pi a}$	$K_I/\sigma\sqrt{\pi a}$	$K_{II}/\sigma\sqrt{\pi a}$
30	0.7500	0.4330	0.7502	0.4331
45	0.5000	0.5000	0.5001	0.5001
75	0.0670	0.2500	0.0670	0.2501

[1] Irwin (1957)



5.2.3 Placa ortótropa con grieta horizontal centrada

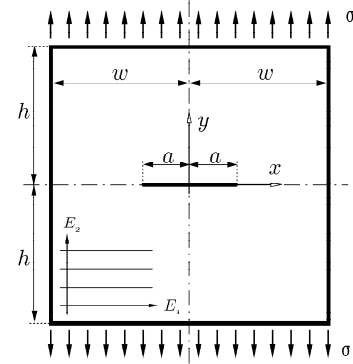
El problema de una placa cuadrada sometida a tracción con una grieta de longitud $2a$, dispuesta perpendicularmente a la carga en el centro de la placa (figura en tabla 5.2) fue resuelto, numéricamente, para un material ortótropo hipotético por Bowie y Freeze en 1972. Las propiedades definidas por estos autores para el material fueron las expresadas en (5.1). Como muestra la tabla 5.2 los resultados se ajustan muy bien a los de la referencia.

La malla empleada para la grieta es la misma que la de los ejemplos precedentes. El contorno exterior se ha discretizado con 6 elementos iguales por cada lado.

Tabla 5.2: Placa ortótropa a tracción, grieta horizontal centrada. Resultados para $w = h$.

E_1/E_2	$K_I/\sigma\sqrt{\pi a}$					
	a/w=0.2			a/w=0.5		
	[2]	F. Hip.	Dif.	[2]	F. Hip.	Dif.
0.1	1.16	1.1541	-0.51%	1.85	1.8523	0.12%
0.3	1.10	1.0957	-0.39%	1.57	1.5695	-0.03%
0.5	1.08	1.0766	-0.31%	1.46	1.4569	-0.21%
0.7	1.07	1.0658	-0.39%	1.39	1.3926	0.19%
0.9	1.06	1.0585	-0.14%	1.35	1.3508	0.06%
1.1	1.05	1.0532	0.30%	1.32	1.3215	0.11%
1.5	1.05	1.0460	-0.38%	1.28	1.2833	0.26%
2.5	1.04	1.0370	-0.29%	1.24	1.2375	-0.20%
3.5	1.03	1.0327	0.26%	1.22	1.2169	-0.25%
4.5	1.03	1.0303	0.03%	1.20	1.2052	0.43%

[2] Bowie y Freeze (1972)



5.2.4 Placa ortótropa con grietas en bordes opuestos

Placa de apilado simétrico grafito epoxy, con ángulo de apilado $\pm\phi$, sometida a tracción. La placa tiene dimensiones $2w * 2w$ y sendas grietas de longitud $a = 0.5w$ en los bordes no cargados, dispuestas simétricamente (figura en tabla 5.3). Las propiedades del grafito epoxy son:

$$E_1 = 144.8 \text{ GPa} ; \quad E_2 = 11.7 \text{ GPa} ; \quad G_{12} = 9.66 \text{ GPa} ; \quad \nu_{12} = 0.21 \quad (5.3)$$

La tabla 5.3 muestra el buen acuerdo entre estos resultados y los publicados por Chu y Hong en 1990 obtenidos mediante la integral J evaluada a partir de los resultados del método de los elementos finitos.

Se han utilizado 5 elementos para la grieta y aprovechando la simetría respecto del eje y (ver figura en tabla 5.3), se discretiza sólo la mitad del problema.

5.2.5 Grieta centrada oblicua en placa anisótropa

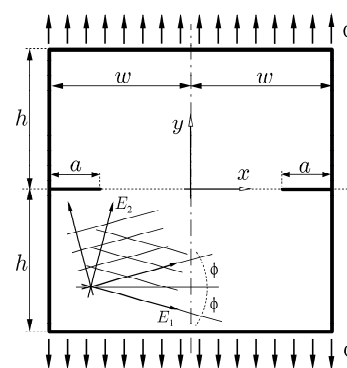
Placa de dimensiones $4w * 2w$ sometida a tracción. Grieta de longitud $2a$ ($a = 0.2w$) formando 45° con la dirección de las tracciones. Fibras de vidrio orientadas según el ángulo ϕ en matriz epoxy (figura en tabla 5.4). Propiedades:

$$E_1 = 48.26 \text{ GPa} ; \quad E_2 = 17.24 \text{ GPa} ; \quad G_{12} = 6.89 \text{ GPa} ; \quad \nu_{12} = 0.29 \quad (5.4)$$

Tabla 5.3: Placa de apilado simétrico ($\pm\phi$) a tracción. Grietas desde los bordes.

ϕ	$K_I/\sigma\sqrt{\pi a}$						
	[3]	F. Hip.	Dif.	ϕ	[3]	F. Hip.	Dif.
0	1.164	1.1654	0.12%	50	1.471	1.4789	0.54%
10	1.167	1.1690	0.17%	60	1.771	1.7745	0.20%
20	1.190	1.1866	-0.29%	70	2.050	2.0583	0.40%
30	1.228	1.2291	0.09%	80	2.186	2.1843	-0.08%
40	1.301	1.2962	-0.37%	90	2.215	2.2096	-0.24%

[3] Chu y Hong (1990)

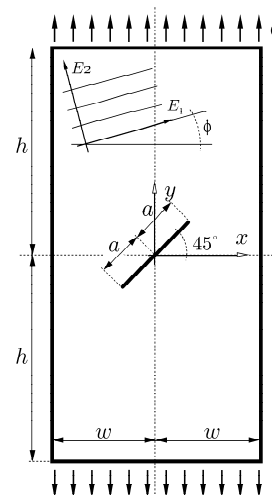


La solución numérica de este problema fue publicada por Gandhi en 1972. La tabla 5.4 muestra un muy buen acuerdo entre los resultados de formulación hipersingular y los de la referencia.

Tabla 5.4: Placa anisótropa a tracción. Grieta central oblicua.

ϕ	$K_I/\sigma\sqrt{\pi a}$			$K_{II}/\sigma\sqrt{\pi a}$		
	[4]	F. Hip.	Dif.	[4]	F. Hip.	Dif.
0	0.522	0.5230	0.19%	0.507	0.5076	0.12%
45	0.515	0.5154	0.08%	0.505	0.5049	-0.02%
90	0.513	0.5134	0.08%	0.509	0.5091	0.02%
105	0.517	0.5166	-0.08%	0.510	0.5108	0.16%
120	0.524	0.5241	0.02%	0.512	0.5118	-0.04%
135	0.532	0.5318	-0.04%	0.511	0.5112	0.04%
180	0.522	0.5230	0.19%	0.507	0.5076	0.12%

[4] Gandhi (1972)



5.2.6 Grietas emanando desde un orificio central en una placa sometida a tracción

Placa de dimensiones $4w * 2w$ con orificio central de diámetro $2r$ y grietas de longitud a emanando simétricamente desde el orificio. Este problema tiene un indudable interés práctico ya que puede presentarse en situaciones de uniones mecánicas entre placas. En la literatura aparecen soluciones a este problema para comportamiento isótropo, ortótropo y anisótropo.

Se ha utilizado una malla de 5 elementos por grieta, 26 elementos para el orificio y 36 para el contorno exterior.

Caso isótropo

Resuelto numéricamente por Newman en 1971 para los casos $r = 0.25w$ y $r = 0.5w$ con un material de propiedades $G = 385 \text{ GPa}$ y $\nu = 0.3$. La figura 5.2 muestra el acuerdo entre estos resultados y los obtenidos mediante la formulación hipersingular del MEC para todas las longitudes de grieta analizadas. Las propiedades cuasi isótropas consideradas han sido:

$$G = 385 \text{ GPa} ; \quad \nu = 0.3 ; \quad E_1 = E(1 + \alpha) ; \quad E_2 = E(1 - \alpha) ; \quad \alpha \ll 1 \quad (5.5)$$

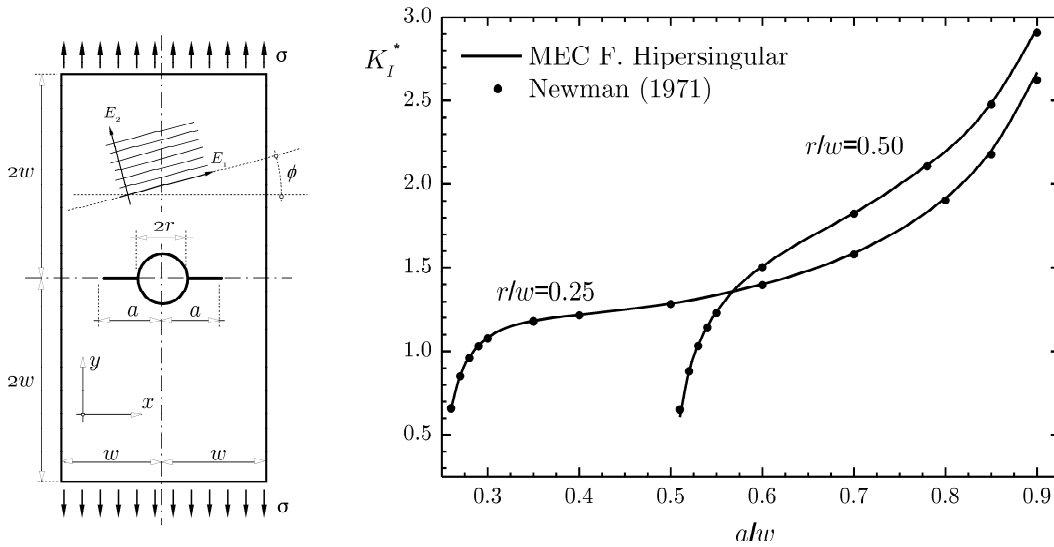


Figura 5.2: Grietas emanando simétricamente desde un orificio centrado en una placa a tracción. Resultado para material isótropo.

Casos ortótropo y anisótropo

Los resultados de este problema, para los casos ortótropo y anisótropo, fueron obtenidos mediante el MEC por Sollero Aliabadi y Rooke (1994) utilizando la técnica de las subregiones. Para el comportamiento ortótropo tomaron las propiedades de un apilado simétrico de boro epoxy, con ángulo de apilado $\pm\phi$ (figura 5.2). Para el comportamiento anisótropo tomaron las propiedades de una sola lámina del mismo material con las fibras orientadas según ϕ . Las propiedades del boro epoxy son:

$$E_1 = 204 \text{ GPa} ; \quad E_2 = 18.5 \text{ GPa} ; \quad G_{12} = 5.59 \text{ GPa} ; \quad \nu_{12} = 0.23 \quad (5.6)$$

La figura 5.3 muestra el buen acuerdo existente entre los resultados obtenidos y los de la referencia para todos los ángulos de orientación de las fibras.

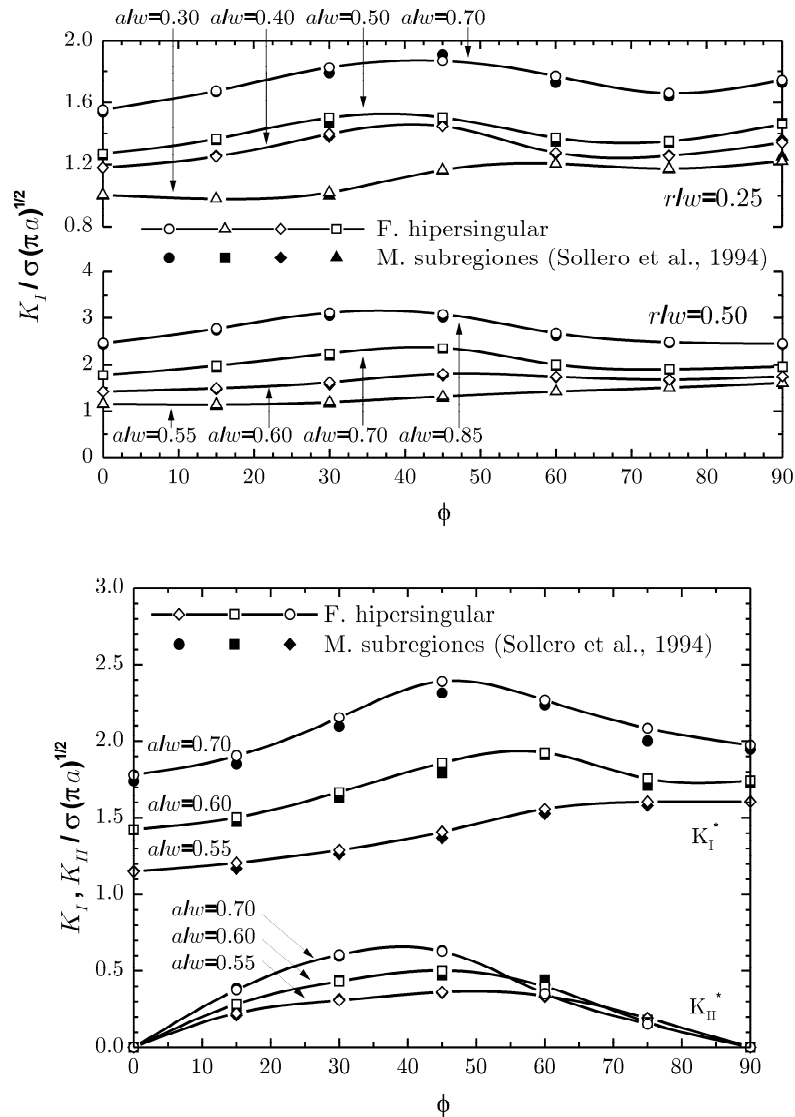


Figura 5.3: Grietas emanando simétricamente desde un orificio central en una placa a tracción. Resultados para casos ortótropo (arriba) y anisótropo para $r = 0.5w$ (abajo).

5.2.7 Grieta en forma de arco circular en dominio infinito

Para analizar el comportamiento de los elementos cuadráticos en contornos curvos se obtienen resultados para una grieta con forma de arco circular definida por el radio (r) y el semiángulo abarcado (α), figura 5.4, sometida a un estado biaxial de tracciones.

En primer lugar se comparan los resultados con los analíticos obtenido por Muskhelishvili (1953) para el caso isótropo: figura 5.4.

A continuación se presentan los resultados, con la misma configuración de grieta, para un material ortótropo. Para comprobar el efecto de la curvatura de los elementos se utilizan dos mallas, una de elementos rectos y la otra con elementos curvos, con igual número de elementos: 10 si $\alpha < 70^\circ$ y 12 si $\alpha \geq 70^\circ$. La figura 5.5 muestra la comparación

de ambos resultados, la mayor diferencia se obtiene para K_{II} , diferencia que, como era de esperar, crece con el semiángulo abarcado por la grieta llegando a estar en torno a 4.1% para para la grieta de semiángulo 75° . Las propiedades del material han sido las de una grafito epoxy (Scotchply):

$$E_1 = 138.9 \text{ GPa} ; \quad E_2 = 8.96 \text{ GPa} ; \quad G_{12} = 7.1 \text{ GPa} ; \quad \nu_{12} = 0.3 \quad (5.7)$$

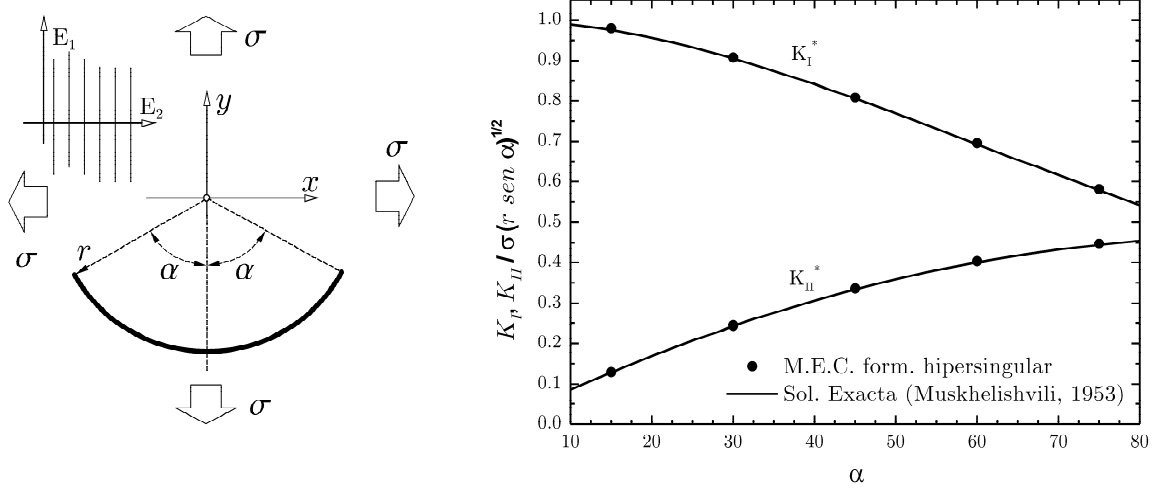


Figura 5.4: Grieta en forma de arco circular, material isótropo ($\nu=0.25$). Resultados en función del ángulo abarcado.

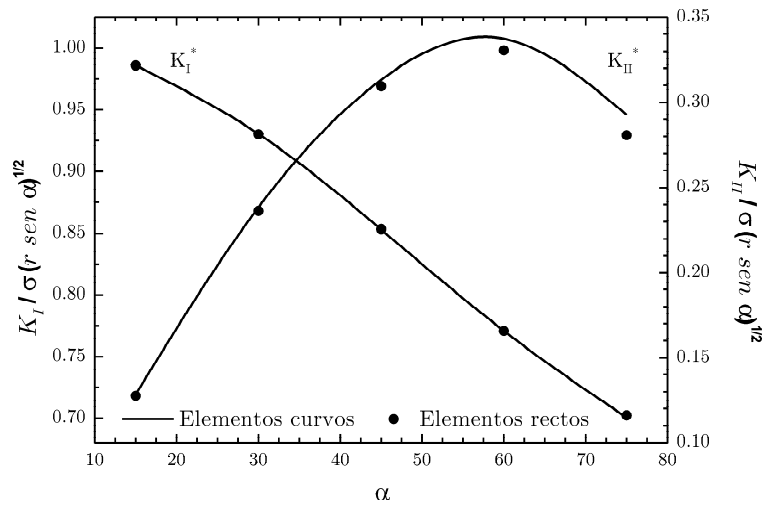


Figura 5.5: Grieta en forma de arco circular en grafito epoxy. Elementos curvos vs. elementos rectos para diferentes valores del ángulo abarcado.

5.3 Resultados estáticos. Solución fundamental anisótropa elástica de semiespacio.

Para comprobar la implementación de la solución fundamental de semiespacio con la formulación hipersingular se resuelven diferentes problemas sobre dominio isótropo y

anisótropo cuyos resultados se encuentran en la literatura. Una vez hecha esta comprobación se presentan otros resultados para semiespacio anisótropo.

5.3.1 Grieta en semiespacio isótropo

Mediante métodos semianalíticos, Isida (1966, 1979) e Higashida y Kamada (1982) obtienen, para semiespacio isótropo, los resultados para grietas vertical, oblicua y horizontal respectivamente. Las figuras 5.7, 5.6 y 5.8 muestran el buen acuerdo entre los resultados obtenidos y los de las referencias. Propiedades cuasi isótropas:

$$G = 76.9231 \text{ GPa} ; \quad \nu = 0.3 ; \quad E_1 = (1 + \alpha)E ; \quad E_2 = (1 - \alpha)E ; \quad \alpha \ll 1 \quad (5.8)$$

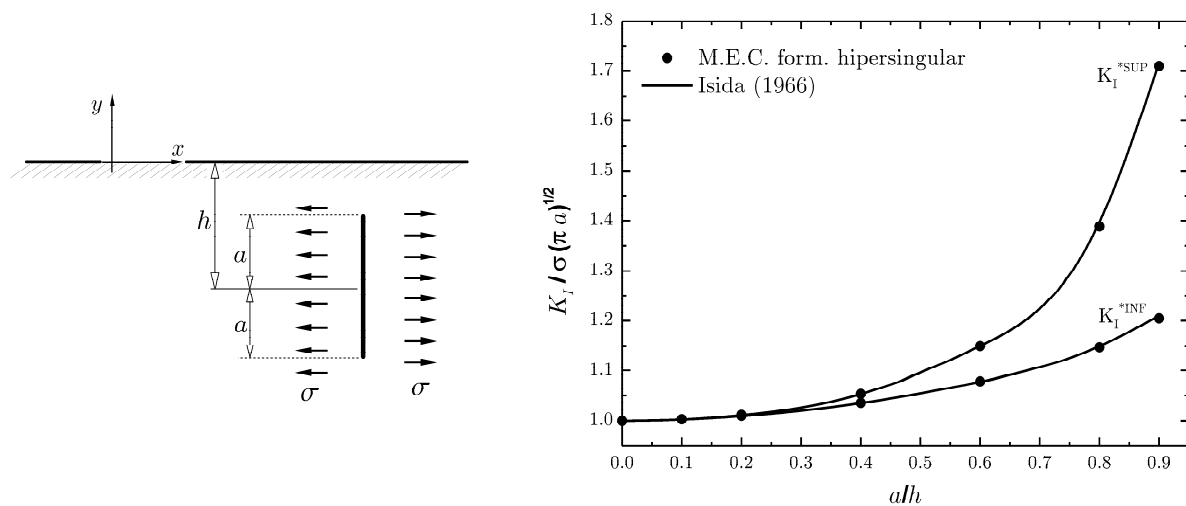


Figura 5.6: Grieta vertical en semiespacio isótropo. Resultados en función de la profundidad de la grieta.

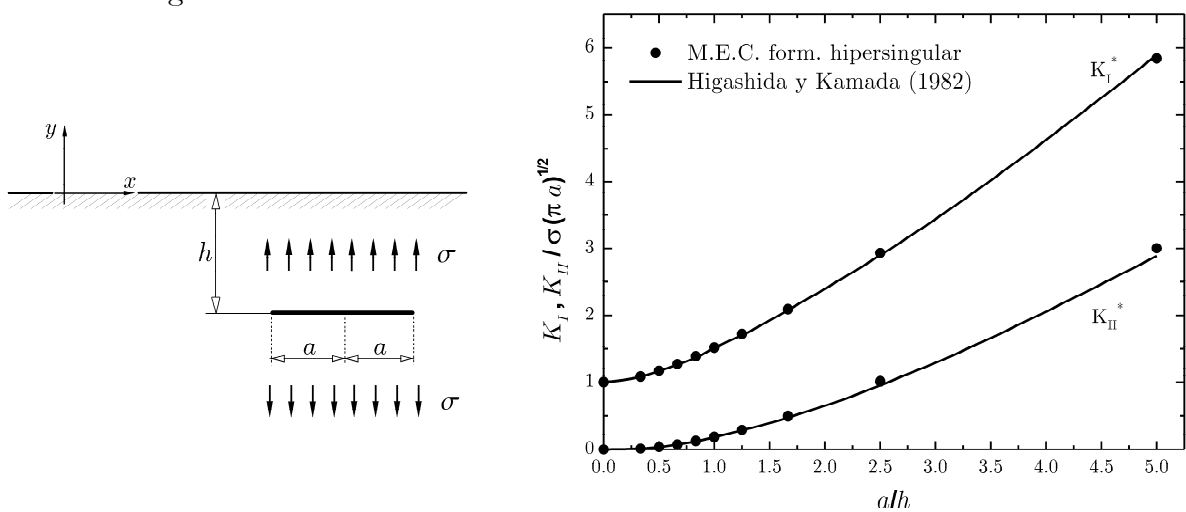


Figura 5.7: Grieta horizontal en semiespacio isótropo. Resultados en función de la profundidad de la grieta.

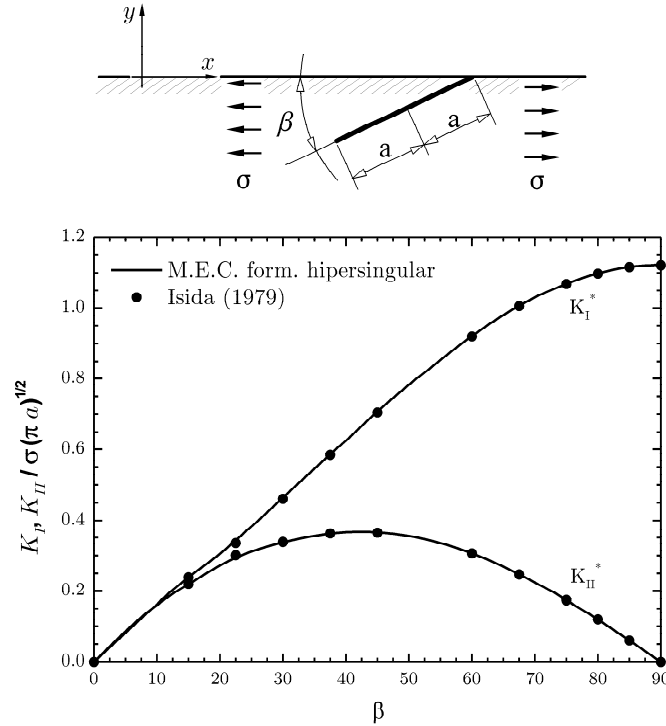


Figura 5.8: Grieta oblicua desde la superficie libre en semiespacio isótropo. Resultados en función del ángulo con la superficie libre.

Las grietas en los dos primeros casos se han discretizado con 12 elementos y en este último con 5.

5.3.2 Grieta en semiespacio anisótropo

Sung y Liou (1995) resuelven mediante un método semianalítico el caso de una grieta en un semiespacio anisótropo para dos situaciones de carga: tracción uniforme y tensiones tangenciales uniformes. La grieta está colocada perpendicularmente a la superficie libre (figura 5.9). Las propiedades del material utilizadas en este trabajo son:

$$C_{11} = \delta^2 \frac{E}{1 - \nu^2} \quad ; \quad C_{22} = \frac{1}{\delta^2} \frac{E}{1 - \nu^2} \quad ; \quad C_{12} = \frac{\nu E}{1 - \nu^2} \quad ; \quad C_{66} = \frac{E}{2(\kappa + \nu)} \quad (5.9)$$

Con esta definición, eligiendo $\kappa = 1$, la relación de ortotropía es gobernada por el parámetro δ . Una vez escogido este parámetro, las propiedades de anisotropía se hacen variar mediante el ángulo ϕ (figura 5.9) definido entre la dirección principal 1 del material y la superficie libre.

Las figuras 5.9 y 5.10 muestran los resultados para $h = 1.1a$. Puede apreciarse el buen acuerdo existente entre los resultados para todos los casos. Para la discretización se ha utilizado la misma malla de 12 elementos que en el semiespacio isótropo.

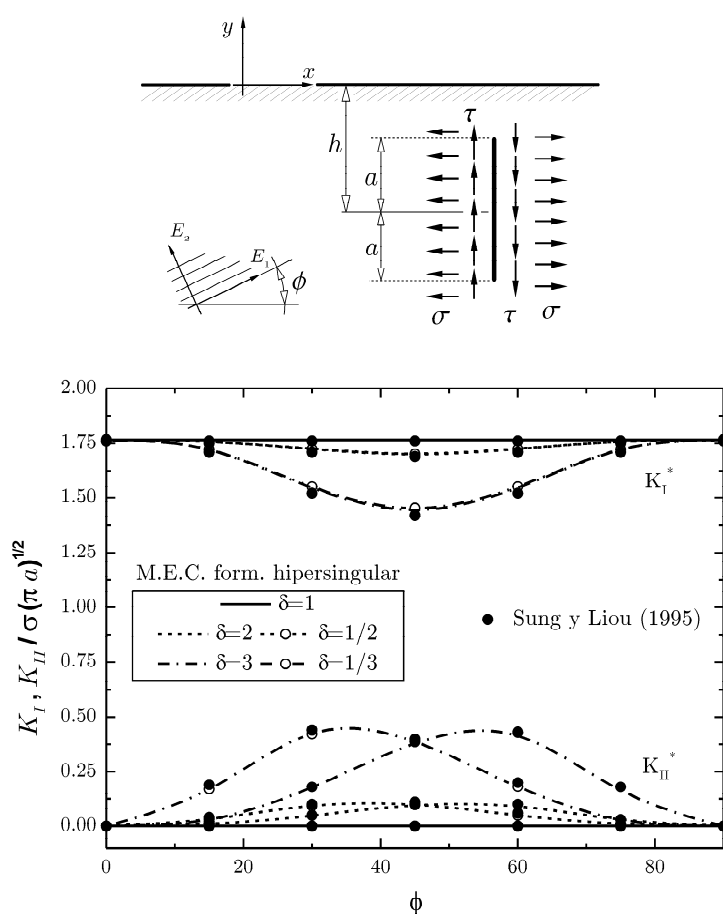


Figura 5.9: Grieta vertical en semiespacio anisótropo. Esquema del problema y resultados para carga de tracción en función de la orientación de las direcciones principales.

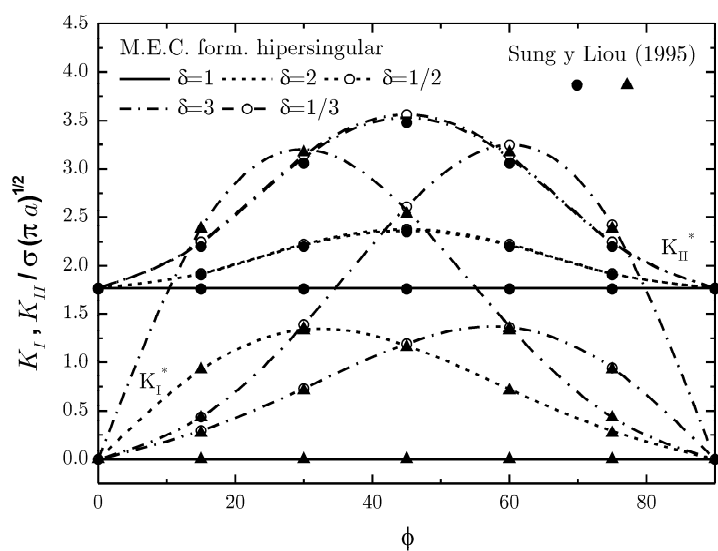


Figura 5.10: Grieta vertical en semiespacio anisótropo. Resultado para tensiones tangenciales en función de la orientación de las direcciones principales.

A continuación se presentan los resultados para grieta oblicua en un semiespacio anisótropo en función de la profundidad de grieta. Se representan resultados para dos ángulos diferentes de inclinación de la grieta respecto de la superficie libre: $\beta = 30^\circ$ (figura 5.11) y $\beta = 75^\circ$ (figura 5.12). Estos resultados se superponen a los del mismo problema para material isótropo para mostrar la influencia de la anisotropía sobre el resultado. Se puede apreciar que, independiente de las propiedades del medio, la tendencia de los resultados a los de grieta en dominio infinito es muy rápida, aunque diferente según la inclinación de la grieta. Las mallas empleadas han sido de 6 elementos.

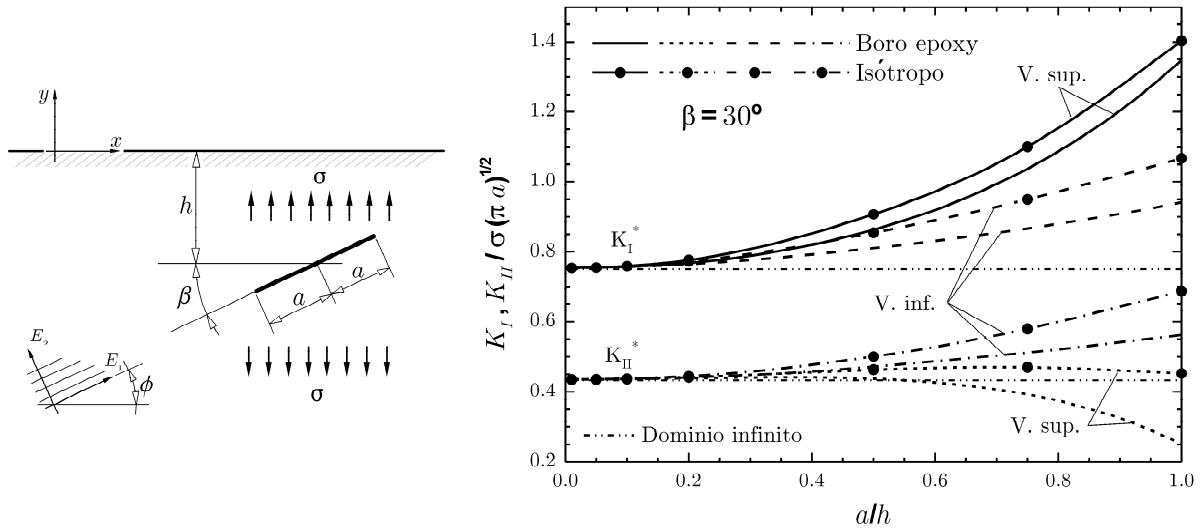


Figura 5.11: Grieta oblicua, $\beta = 30^\circ$, en semiespacio anisótropo e isótropo. Resultados frente a la profundidad de grieta en los vértices superior e inferior.

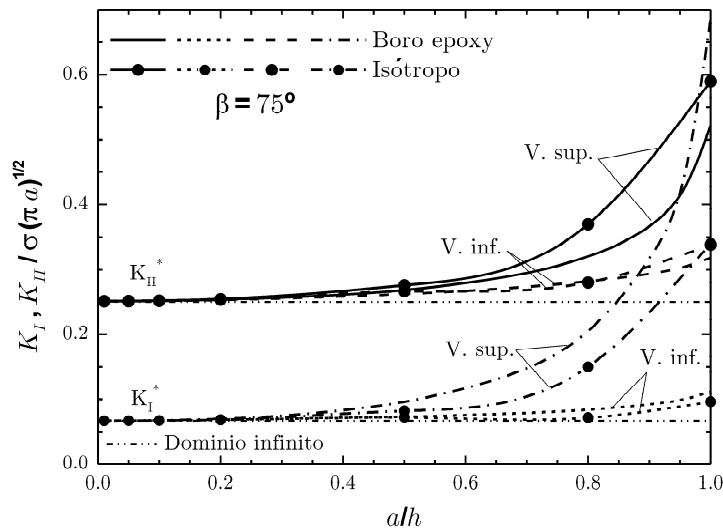


Figura 5.12: Grieta oblicua, $\beta = 75^\circ$, en semiespacio anisótropo e isótropo. Resultados frente a la profundidad de grieta en los vértices superior e inferior.

Para el comportamiento anisótropo se han elegido las propiedades de un boro epoxy:

$$E_1 = 204 \text{ GPa} ; \quad E_2 = 18.5 \text{ GPa} ; \quad G_{12} = 5.59 \text{ GPa} ; \quad \nu_{12} = 0.23 \quad (5.10)$$

tomando una inclinación de la dirección principal 1 de 15° respecto de la superficie del semiespacio ($\phi = 15^\circ$ en la figura 5.11)

Para el comportamiento isótropo se han tomado

$$E_1 = E(1 + \alpha) ; \quad E_2 = E(1 - \alpha) ; \quad G_{12} = 500 \text{ GPa} ; \quad \nu_{12} = 0.3 ; \quad \alpha \ll 1 \quad (5.11)$$

5.4 Resultados estáticos. Solución fundamental piezoeléctrica de campo completo

En los ejemplos que siguen se muestran resultados de grietas en dominios piezoeléctricos tomando en cuenta las siguientes consideraciones: los ejes principales del material coinciden con los ejes coordenados ($1 = x, 2 = y$), la dirección 2 es la dirección de polarización. En estas condiciones la matriz de comportamiento que se supondrá en los ejemplos es:

$$\begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & 0 & 0 & e_{21} \\ C_{12} & C_{22} & 0 & 0 & e_{22} \\ 0 & 0 & C_{66} & e_{16} & 0 \\ 0 & 0 & e_{16} & -\varepsilon_{11} & 0 \\ e_{12} & e_{22} & 0 & 0 & -\varepsilon_{22} \end{pmatrix} \quad (5.12)$$

Estas consideraciones se han tenido en cuenta porque es la situación que suelen considerar la gran mayoría de los trabajos que tratan este comportamiento. No obstante son absolutamente innecesarias para la implementación que se ha hecho de la formulación hipersingular del MEC para la solución fundamental piezoeléctrica aplicable sea cual sea la forma del tensor de comportamiento piezoeléctrico.

5.4.1 Grieta recta, dominio infinito

La solución analítica al problema de una grieta recta en dominio infinito piezoeléctrico sometida a tracción uniforme (en sentido extendido) fue publicado, simultáneamente, en 1992 por Pak y por Suo, Kuo, Barnett y Willis. La figura 5.13 muestra los resultados obtenidos para un PZT-4, con una malla de diez elementos, frente a los resultados analíticos para los casos de carga mecánica (σ_y) y de carga eléctrica (D_y).

Las propiedades utilizadas han sido las de un PZT-4:

$$\begin{aligned} C_{11} &= 139 \text{ GPa} ; & C_{12} &= 74.3 \text{ GPa} ; & C_{22} &= 115 \text{ GPa} ; & C_{66} &= 25.6 \text{ GPa} \\ e_{21} &= -5.2 \text{ C/m}^2 ; & e_{22} &= 15.1 \text{ C/m}^2 ; & e_{16} &= 12.7 \text{ C/m}^2 \\ \varepsilon_{11} &= 6.461 \text{ C/(GV m)} ; & \varepsilon_{22} &= 5.62 \text{ C/(GV m)} \end{aligned} \quad (5.13)$$

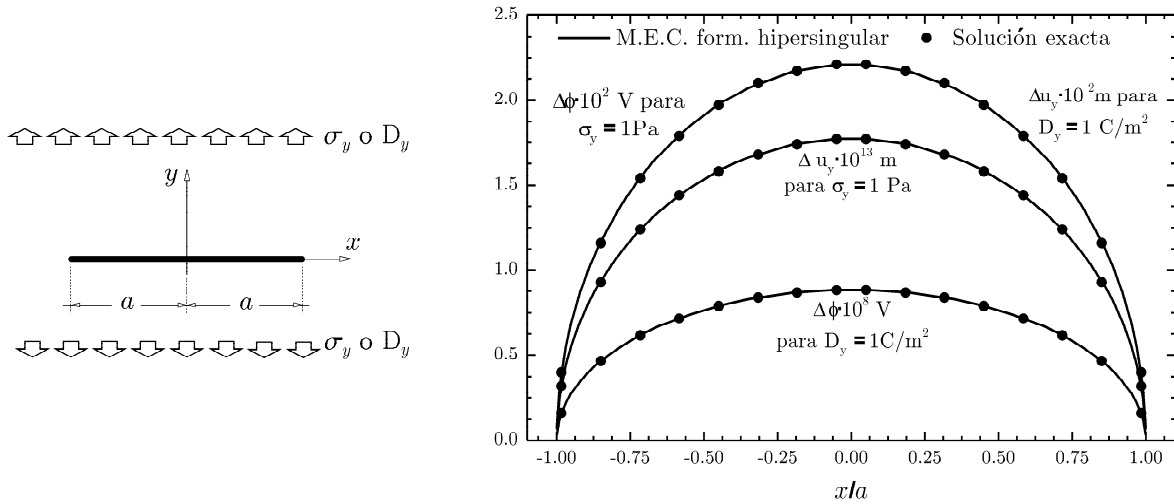
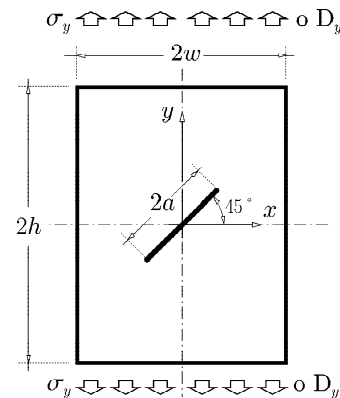


Figura 5.13: Grieta recta en medio piezoeléctrico infinito. Incrementos de desplazamientos extendidos. Carga mecánica: 1 Pa. Carga eléctrica: $1\text{C}/\text{m}^2$.

5.4.2 Placa a tracción, grieta centrada oblicua

Pan (1999) obtiene el resultado para una placa de PZT-4 sometida a tracción extendida y con una grieta centrada oblicua. La placa tiene dimensiones $2w * 4w$. La grieta forma 45° con la dirección de la carga (o de polarización) y tiene una semilongitud $a = w/5$. Para resolver este problema Pan también utiliza la formulación hipersingular del MEC, la diferencia con el método aplicado en esta tesis está en la forma de calcular las integrales hipersingulares para lo que Pan utiliza las cuadraturas para integrales hipersingulares de Tamasphtyros y Dimou (1990).



La figura 5.14 muestra los resultados de este trabajo en comparación con los de Pan para los casos de carga mecánica (izda.) y de carga eléctrica (dcha.). Por la posición de la grieta, en este ejemplo el acoplamiento entre todas las componentes del desplazamiento extendido es total. Como se puede apreciar, el acuerdo entre los resultados es muy bueno en todos los casos.

El dominio se ha discretizado con 10 elementos para la grieta y 24 para el contorno exterior.

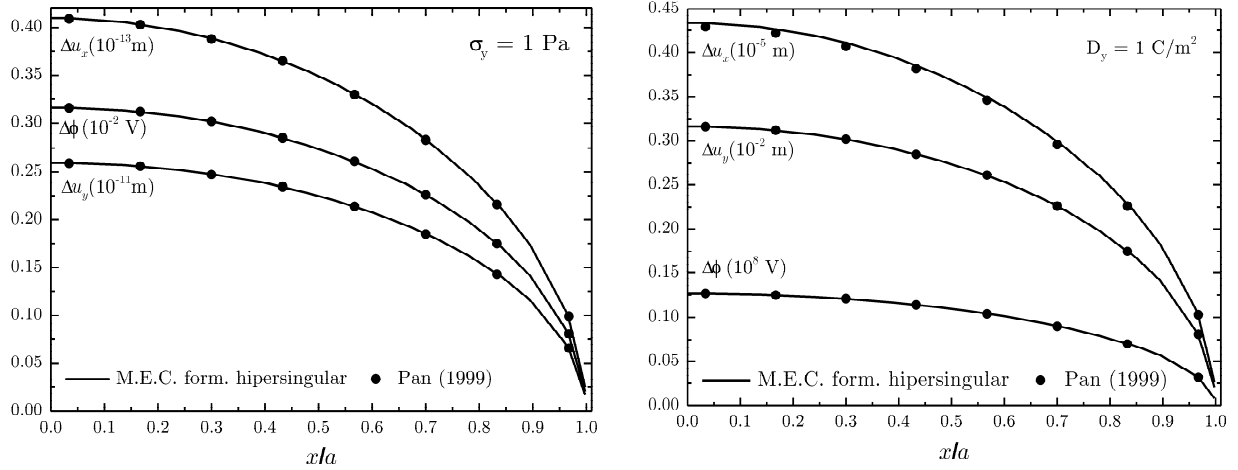
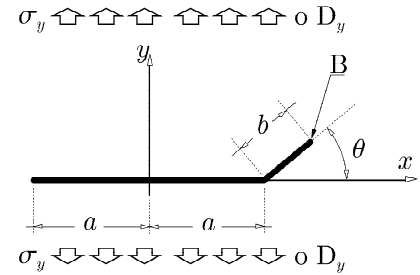


Figura 5.14: Grieta centrada a 45° en placa de material piezoeléctrico. Incrementos de desplazamientos extendidos. Carga mecánica: 1 Pa. Carga eléctrica: 1 C/m².

5.4.3 Grieta ramificada en dominio infinito

Se resuelve ahora el problema de una grieta ramificada en el seno de un material infinito piezoeléctrico para diferentes longitudes y ángulos de la ramificación. Este problema fue resuelto por Xu y Rajapakse (2000) mediante un método semianalítico haciendo uso del potencial complejo de Lekhnitskii y un modelo de dislocaciones. El sistema final que obtienen es resuelto mediante un método de cuadraturas publicado por Gerasoulis (1982).



Los resultados mostrados en las figuras 5.15 y 5.16 son los FIT y FIDE en el vértice de la ramificación. Estos resultados han sido obtenidos para dos longitudes de ramificación haciendo variar el ángulo, θ , grieta/ramificación. La representación se extiende al intervalo válido de ángulos. Ese intervalo es diferente para cada longitud. Fuera del intervalo los desplazamientos obtenidos indican la interpenetración de las superficies de grieta lo cual es, físicamente, inaceptable. En todos los casos el acuerdo con la referencia es muy bueno.

La grieta madre se ha discretizado con 12 elementos y las ramificaciones con 2 y 6 según su longitud. El material empleado ha sido un PZT-4 con las siguientes propiedades:

$$\begin{aligned}
 C_{11} &= 139 \text{ GPa} ; & C_{12} &= 74.3 \text{ GPa} ; & C_{22} &= 113 \text{ GPa} ; & C_{66} &= 25.6 \text{ GPa} \\
 e_{21} &= -6.98 \text{ C m}^{-2} ; & e_{22} &= 13.84 \text{ C m}^{-2} ; & e_{16} &= 13.44 \text{ C m}^{-2} \\
 \varepsilon_{11} &= 6.0 \text{ C/(GV m)} ; & \varepsilon_{22} &= 5.47 \text{ C/(GV m)}
 \end{aligned}
 \tag{5.14}$$

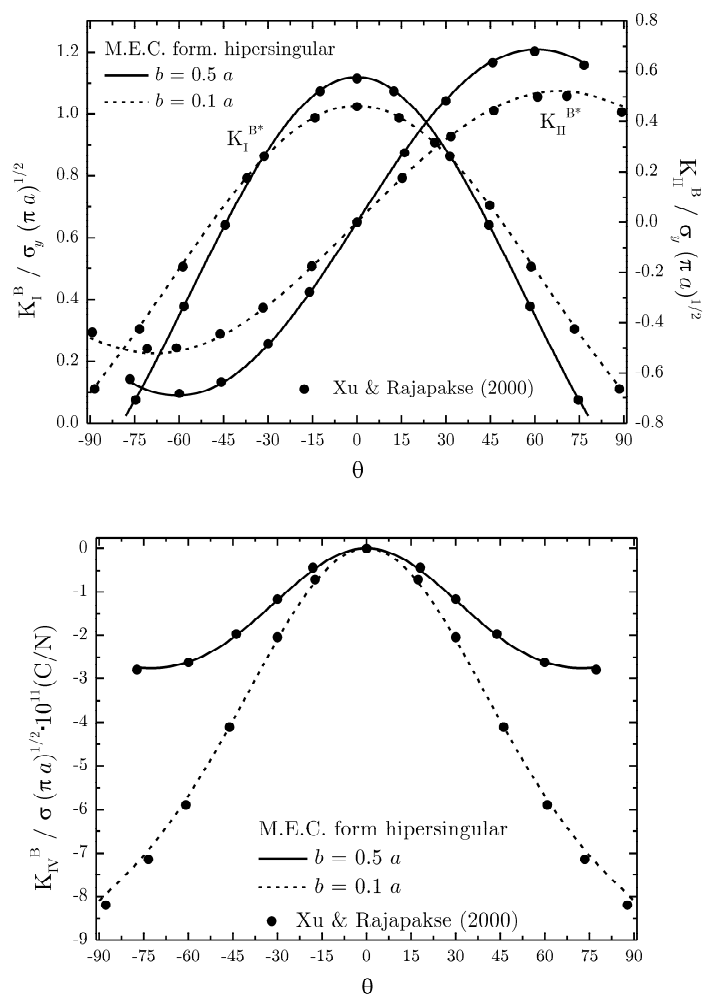


Figura 5.15: Grieta ramificada en medio piezoeléctrico infinito sometida a tracción.

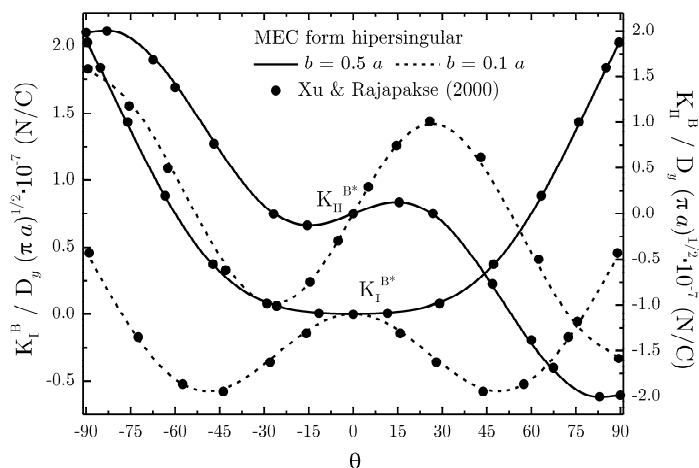


Figura 5.16: Grieta ramificada en medio piezoeléctrico infinito sometida a desplazamiento eléctrico.

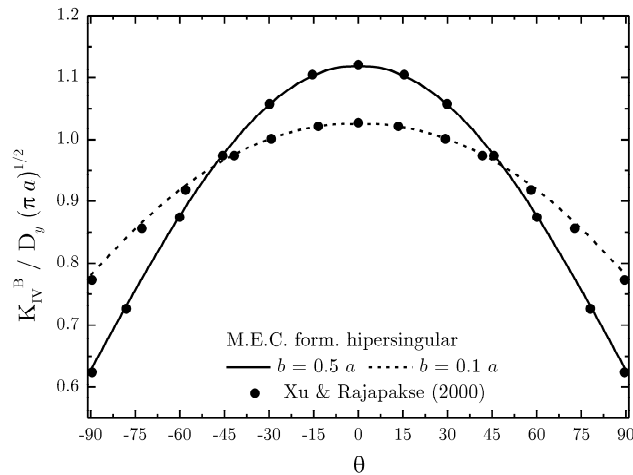
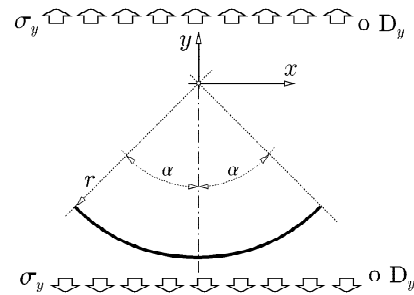


Figura 5.16 (cont): Grieta ramificada en medio piezoeléctrico infinito sometida a desplazamiento eléctrico.

5.4.4 Grieta en forma de arco circular en dominio infinito

Se presentan a continuación, para el mismo material del caso anterior, los resultados para grieta con forma de arco circular en dominio piezoeléctrico infinito en función del semiángulo abarcado por la grieta. Los resultados son para el caso de carga mecánica de tracción y de carga eléctrica de desplazamiento eléctrico impuesto. Se ha utilizado la misma malla que para el caso anisótropo elástico.



Para adimensionalizar el FIDE cuando la craza es mecánica y los FIT cuando es eléctrica, se utiliza la relación $\vartheta = \varepsilon_{22}/e_{22}$ entre las propiedades dieléctrica y piezoeléctrica del material en la dirección de polarización. Los resultados se representan en las figuras 5.17 y 5.18 frente al ángulo abarcado, α .

5.5 Resultados dinámicos. Solución fundamental anisótropa elástica

5.5.1 Generalidades

A continuación se muestra una relación de resultados obtenidos para ondas planas armónicas que inciden sobre grietas en el seno de materiales anisótropos elásticos. En concreto los resultados que se muestran son los FIT frente a la frecuencia de excita-

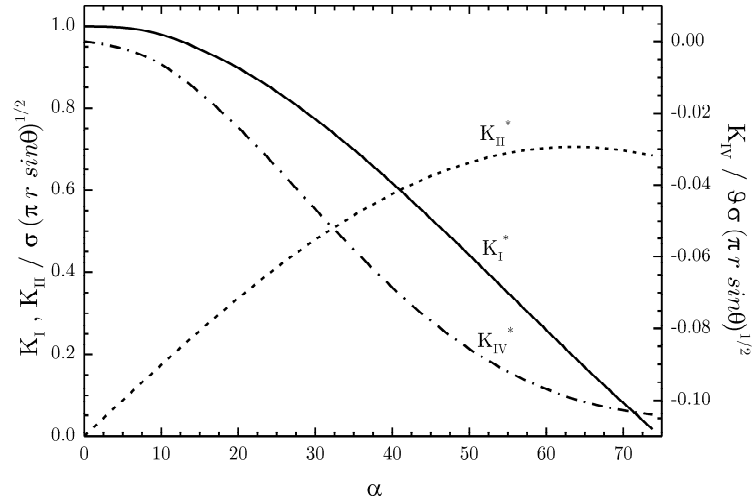


Figura 5.17: Grieta con forma de arco circular en medio piezoeléctrico infinito sometida a tracción.

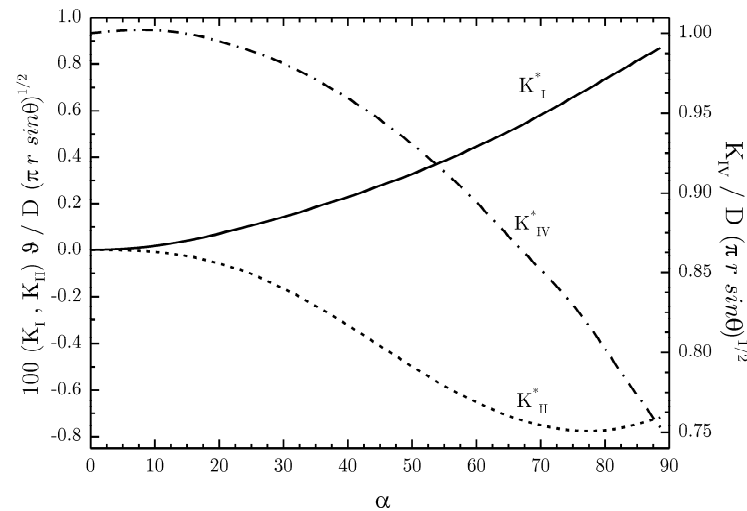


Figura 5.18: Grieta con forma de arco circular en medio piezoeléctrico infinito sometida a desplazamiento eléctrico.

ción de la onda, ambos adimensionalizados. Los FIT son adimensionalizados mediante la amplitud de la tensión y la dimensión característica de la grieta y la frecuencia se adimensionaliza mediante la longitud característica de la grieta y la velocidad de fase.

En algún caso muy concreto se compara con resultados en el dominio del tiempo. Dado que la formulación dinámica que se ha implementado en esta tesis es la formulación en el dominio de la frecuencia, para poder realizar estas comparaciones se ha hecho uso de la antitransformada de Fourier para poder obtener resultados en el tiempo a partir de resultados en frecuencia.

Con el objetivo de poder establecer comparaciones con resultados existentes en la literatura se consideran ondas que se propagan según los ejes principales del material.

En estas condiciones puede hablarse de ondas longitudinales (P) y transversales (SV) puras. Es decir, ondas que dejan el medio moviéndose según la dirección de propagación (ondas P) o perpendicularmente a ésta (ondas SV). Para cualquier otra dirección de propagación el acoplamiento entre los desplazamientos daría lugar a ondas de tipo mixto (cuasi longitudinales o cuasi transversales) que dejarían al medio moviéndose con un vector de desplazamientos con componentes según la dirección de propagación y su perpendicular.

No obstante, lo anterior no resta generalidad a la formulación presentada que puede aplicarse en la misma forma para cualquier dirección de propagación de la onda.

5.5.2 Condiciones de contorno para ondas P y SV en medios ortótropos elásticos

En este epígrafe se obtienen las condiciones de contorno que se imponen sobre las superficies de las grietas para resolver los problemas de grietas en dominio infinito.

El sistema de referencia se considera según las direcciones principales del material: $x \equiv 1$, $y \equiv 2$.

• Onda P propagándose según la dirección y en material ortótropo elástico

Una onda P propagándose según la dirección y impone en el medio un vector de desplazamientos cuyas componentes según x e y (u, v) responden a las expresiones

$$u = 0 \quad ; \quad v = v_0 \exp[i\omega(y/c_p + t)] \quad (5.15)$$

siendo $c_p = \sqrt{C_{22}/\rho}$ la velocidad de fase de la onda, ω la frecuencia angular, t el tiempo, v_0 la amplitud del desplazamiento e $i = \sqrt{-1}$.

Sustituyendo (5.15) en la ecuación de comportamiento (2.7) y considerando las relaciones cinemáticas (2.9) se obtiene:

$$\begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & 0 \\ C_{12} & C_{22} & 0 \\ 0 & 0 & C_{66} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{,x} \\ v_{,y} \\ u_{,y} + v_{,x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{12}v_0 \frac{i\omega}{c_p} \exp[i\omega(y/c_s)] \\ C_{22}v_0 \frac{i\omega}{c_p} \exp[i\omega(y/c_s)] \\ 0 \end{pmatrix} \quad (5.16)$$

De (5.16) se deduce que las tracciones sobre un plano con normal (n_x, n_y) son:

$$\begin{pmatrix} p_x \\ p_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_x & 0 \\ 0 & \sigma_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{C_{12}}{C_{22}}n_x \\ n_y \end{pmatrix} \sigma_0 \exp[i\omega(y/c_p)] \quad (5.17)$$

siendo $\sigma_0 = v_0 C_{22} i\omega/c_p$

- **Onda SV propagándose según la dirección y en material ortótropo elástico**

Campo de desplazamientos

$$u = u_0 \exp[i\omega(y/c_s + t)] \quad ; \quad v = 0 \quad (5.18)$$

siendo $c_s = \sqrt{C_{66}/\rho}$ la velocidad de fase, u_0 la amplitud del desplazamiento y el resto de parámetros como en (5.15).

Mediante la ecuación de comportamiento puede escribirse

$$\sigma_x = \sigma_y = 0 \quad ; \quad \sigma_{xy} = C_{66} u_0 \frac{i\omega}{c_s} \exp[i\omega(y/c_s)] \quad (5.19)$$

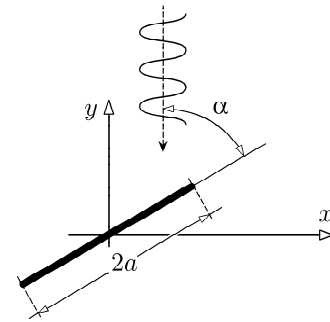
de donde pueden obtenerse las tracciones para un plano definido por la normal (n_x, n_y) como

$$\begin{pmatrix} p_x \\ p_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_{xy} \\ \sigma_{xy} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n_y \\ n_x \end{pmatrix} \tau_0 \exp[i\omega(y/c_s)] \quad (5.20)$$

siendo $\tau_0 = u_0 C_{66} i\omega/c_s$

5.5.3 Grieta recta, dominio infinito isótropo. Dominio de la frecuencia y dominio del tiempo

El problema de ondas armónicas planas, tipo P y SV, incidiendo según diferentes ángulos, sobre una grieta recta en un dominio infinito isótropo fue resuelto por Sih y Loeber (1969) utilizando un método semianalítico.



En este caso se ha resuelto el mismo problema utilizando 10 elementos para discretizar la grieta y las siguientes propiedades cuasi isótropas:

$$E_1 = E(1 + \alpha) \quad ; \quad E_2 = E(1 - \alpha) \quad ; \quad G = 400GPa \quad ; \quad \nu_{12} = 0.25 \quad ; \quad \alpha \ll 1 \quad (5.21)$$

Los resultados, según pueden verse en las figuras (5.19, 5.20) muestran un muy buen acuerdo, en todos los casos, con los de Sih y Loeber (1969):

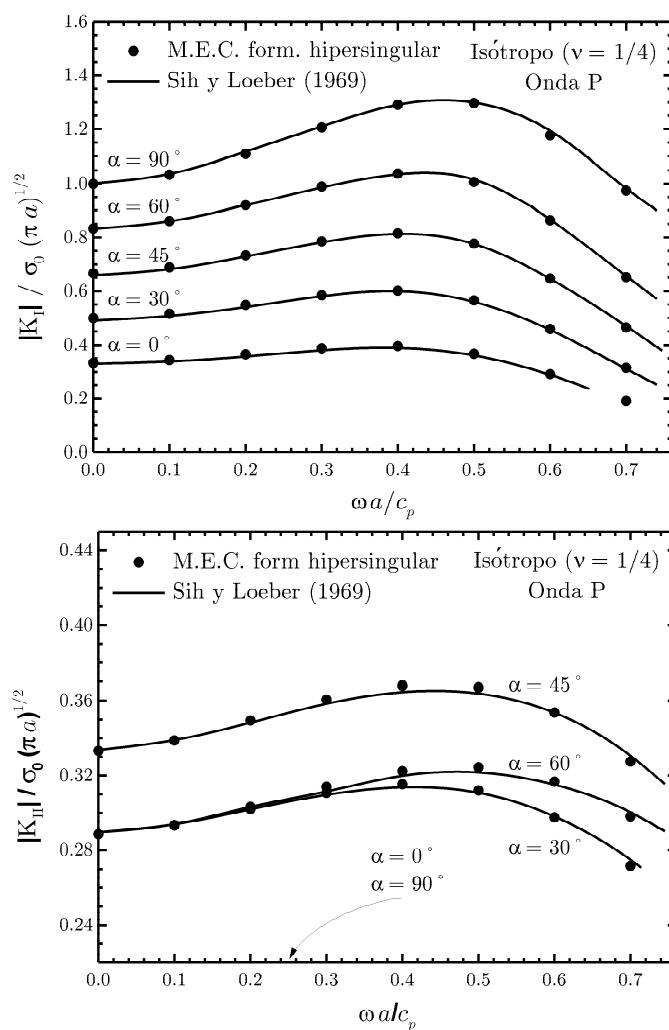


Figura 5.19: Onda P incidiendo con diferentes ángulos, α , sobre grieta recta. Dominio isótropo infinito. Resultados en función de la frecuencia.

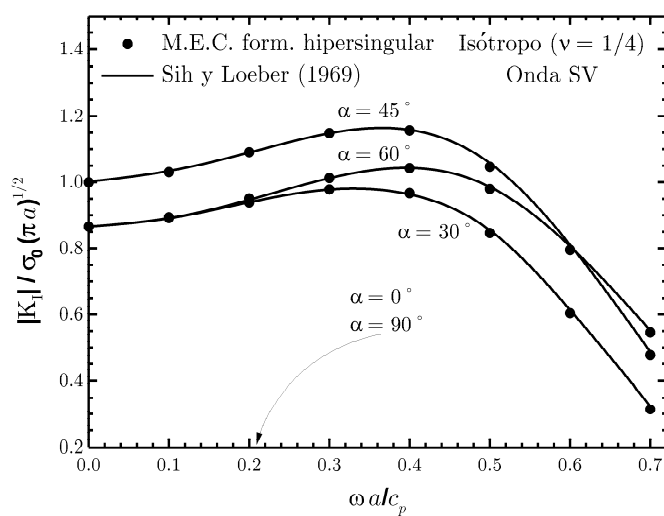


Figura 5.20: Onda SV incidiendo con diferentes ángulos, α , sobre grieta recta. Dominio isótropo infinito. Resultados en función de la frecuencia.

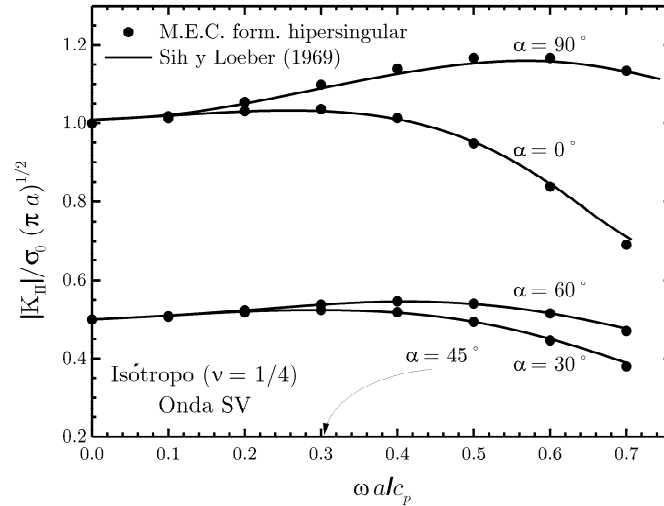


Figura 5.20 (cont): Onda SV incidiendo con diferentes ángulos, α , sobre grieta recta. Dominio isótropo infinito. Resultados en función de la frecuencia.

El resultado del transitorio para el caso de una grieta recta en dominio infinito isótropo sometida a una carga de impacto: $\sigma(t) = \sigma_0 H(t)$ siendo $H(t)$ la función de Heaviside, fue obtenido mediante la transformada de Laplace por Thau y Lu en 1971.

A partir de los resultados para onda armónica P incidiendo perpendicularmente, pueden obtenerse aquí los mismos resultados, haciendo uso de la transformada inversa de Fourier.

La figura 5.21 muestra el buen acuerdo existente entre los resultados obtenidos y el resultado de Thau y Lu.

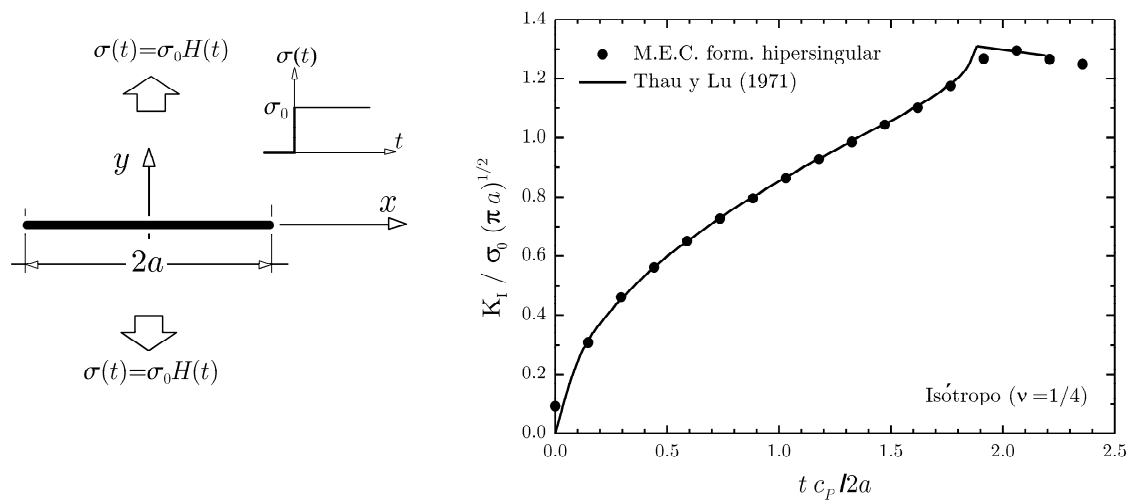
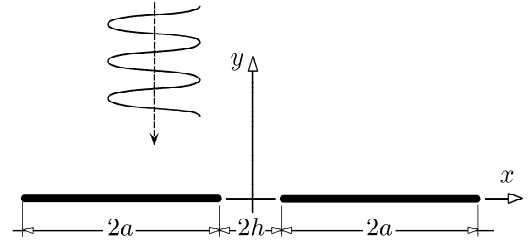


Figura 5.21: FIT frente al tiempo para una grieta recta sometida a carga de impacto.

5.5.4 Grietas colineales dominio ortótropo

Para comportamiento ortótropo Itou (1996) resuelve el problema de dos grietas colineales de igual dimensión sobre las que incide perpendicularmente una onda. Las grietas están dispuestas según la dirección principal 1 del material y la onda se propaga según la dirección 2. Itou resuelve los casos de ondas P y SV para diferentes distancias de separación de las grietas.



El método empleado por Itou es semianalítico, se basa en la transformada de Fourier y descompone de los desplazamientos en una serie infinita de funciones evaluando finalmente un número finito de términos. El material empelado ha sido un boro epoxy con las siguientes propiedades

$$E_1 = 224.06 \text{ GPa} \quad ; \quad E_2 = 12.69 \text{ GPa} \quad ; \quad G_{12} = 4.43 \text{ GPa} \quad ; \quad \nu_{12} = 0.256 \quad (5.22)$$

Las figuras 5.22 y 5.23 muestran el buen acuerdo entre los resultados con la formulación que se presenta y los de la referencia.

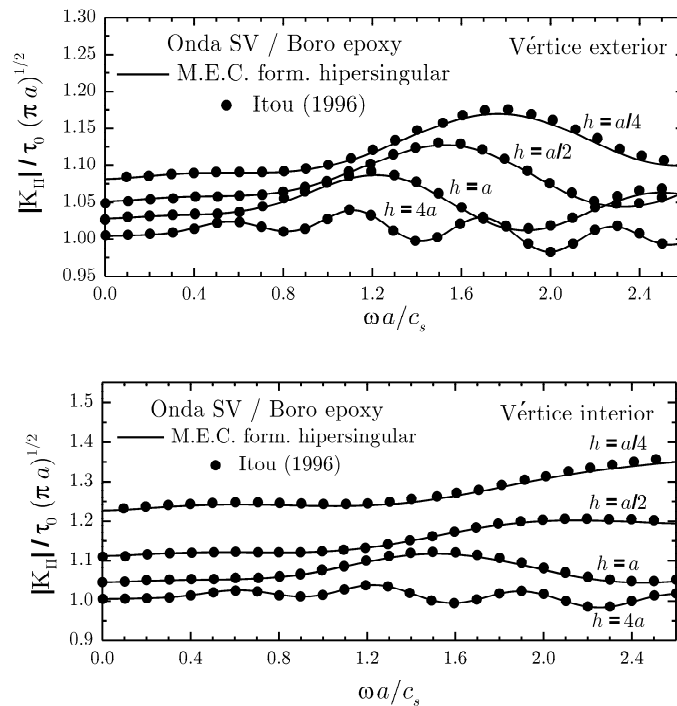


Figura 5.22: Onda SV sobre grietas colineales. Resultados para diferentes separaciones de grieta.

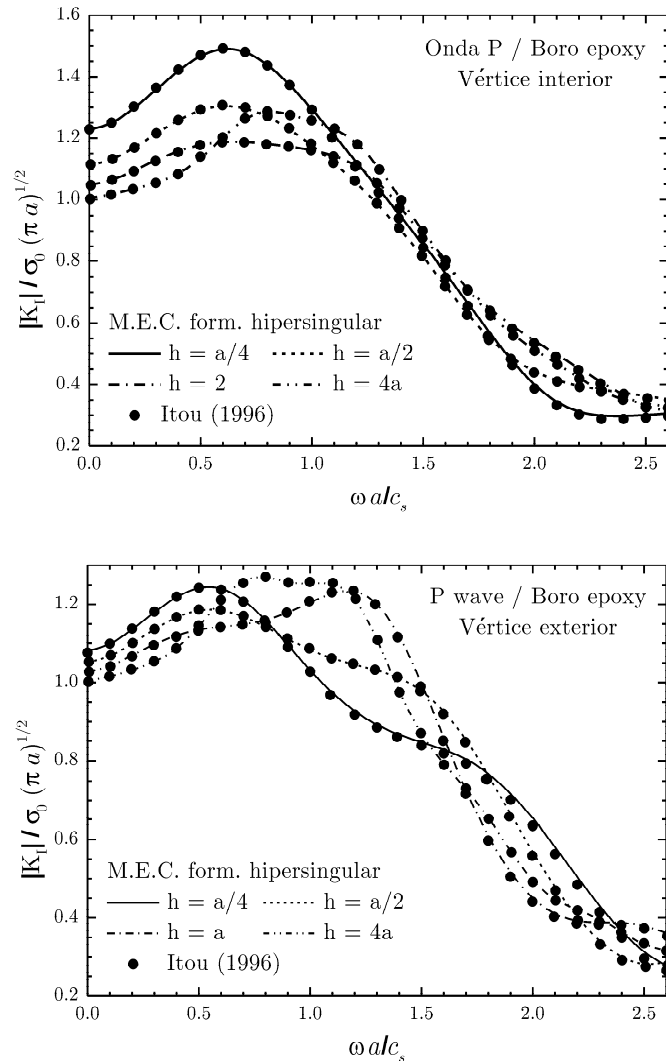
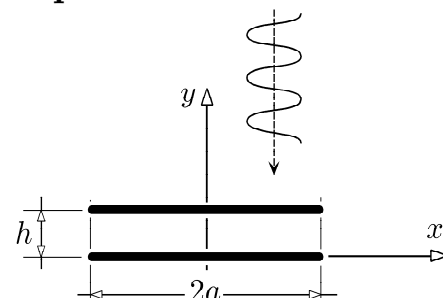


Figura 5.23: Onda P sobre grietas colineales. Resultados para diferentes separaciones de grieta.

Las dos grietas han sido discretizadas con la misma malla de 10 elementos utilizadas en el ejemplo anterior.

5.5.5 Grietas paralelas dominio ortótropo

Los resultados para dos grietas paralelas de igual longitud, en dominio ortótropo infinito, sujetas a ondas incidiendo perpendicularmente, fueron publicados por Itou y Haliding (1997) utilizando el mismo método indicado en el ejemplo precedente. Se resuelve este problema para diferentes separaciones de grieta.



En su publicación de 1997, Itou y Haliding presentan resultados para tres materiales

ortótropos. El primero de ellos es el boro epoxy empleado en el ejemplo anterior (5.22), y los otros dos son una matriz plástica reforzada con fibra de carbono de propiedades

$$E_1 = 145.0 \text{ GPa} \quad ; \quad E_2 = 9.6 \text{ GPa} \quad ; \quad G_{12} = 4.8 \text{ GPa} \quad ; \quad \nu_{12} = 0.23 \quad (5.23)$$

y un grafito epoxy (modulite II) de propiedades

$$E_1 = 158.0 \text{ GPa} \quad ; \quad E_2 = 15.3 \text{ GPa} \quad ; \quad G_{12} = 5.52 \text{ GPa} \quad ; \quad \nu_{12} = 0.34 \quad (5.24)$$

En todos los casos los resultados obtenidos mediante el MEC, con el tratamiento propuesto, muestran un gran acuerdo con la referencia, como muestran las figuras 5.24, 5.25 y 5.26. Las mallas utilizadas en este caso son las mismas mallas de 10 elementos utilizadas en los dos ejemplos precedentes.

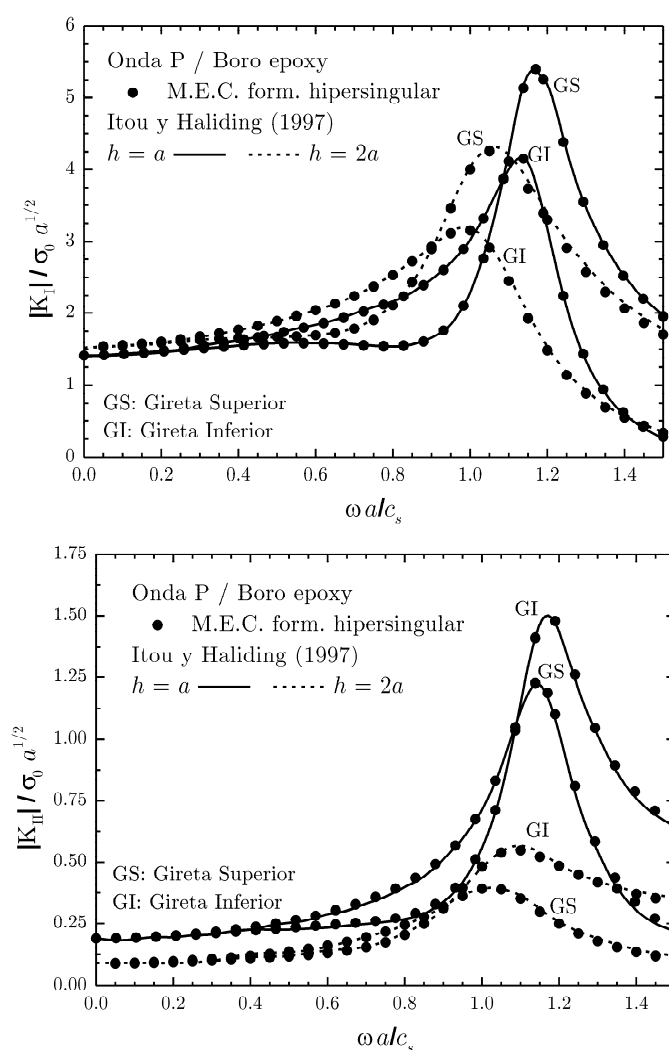


Figura 5.24: Onda P sobre grietas paralelas en boro epoxy. Dos separaciones de grieta.

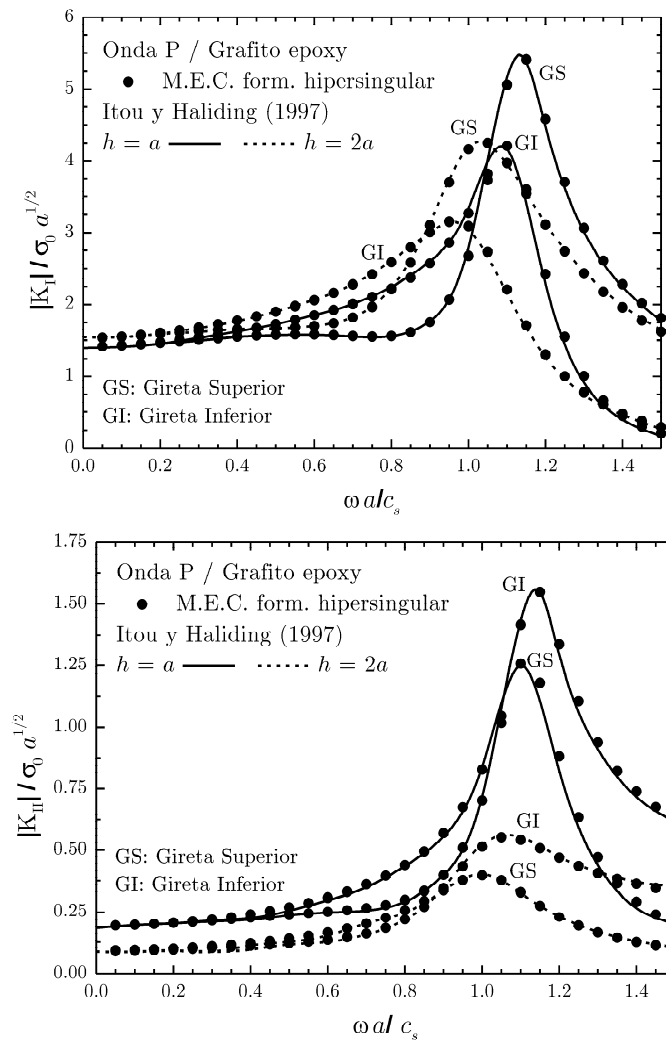


Figura 5.25: Onda P sobre grietas paralelas en grafito epoxy. Dos separaciones de grieta.

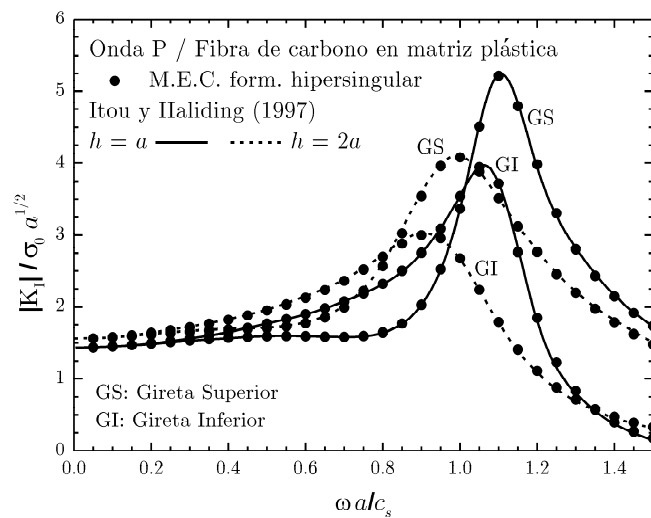


Figura 5.26: Onda P sobre grietas paralelas. Fibra de carbono en matriz plástica. Dos separaciones de grieta.

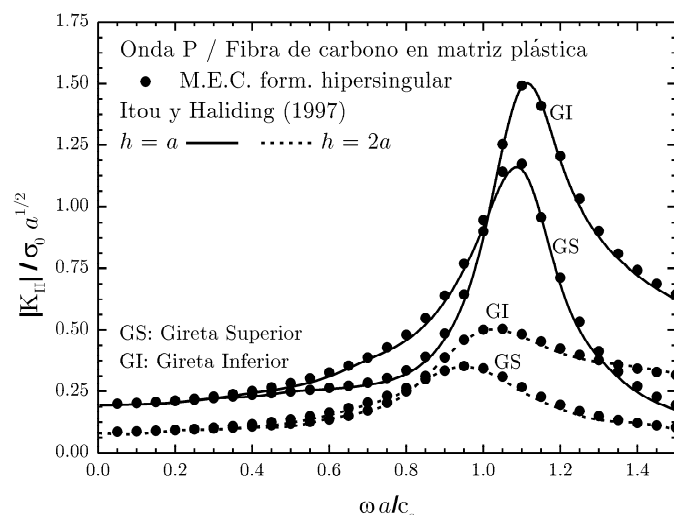
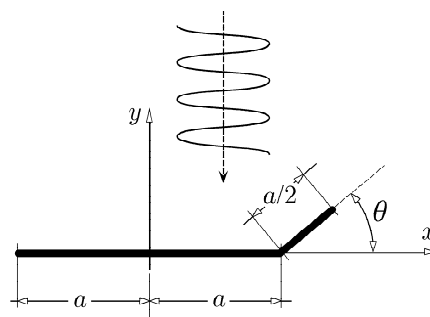


Figura 5.26 (cont): Onda P sobre grietas paralelas. Fibra de carbono en matriz plástica. Dos separaciones de grieta.

Una vez comprobada la formulación mediante los ejemplos mostrados, se presentan nuevos resultados para grietas bajo ondas planas armónicas según geometrías ya analizadas en el caso estático y que pueden resultar de interés para el caso dinámico.

5.5.6 Grieta ramificada dominio ortótropo

Se presentan los resultados para ondas planas P y SV incidente sobre una grieta ramificada con la geometría de la figura. Los resultados se muestran en el vértice de la ramificación, para diferentes ángulos: para los ángulos positivos la onda alcanza antes a la ramificación y para los negativos a la grieta madre.



El material ortótropo escogido ha sido un boro epoxy cuyas propiedades se recogen en (5.22). A modo de comparación se muestran los resultados superpuestos a los de un material cuasi isotrópico caracterizado por $\nu = 1/4$.

Se ha utilizado la misma malla que para el caso estático.

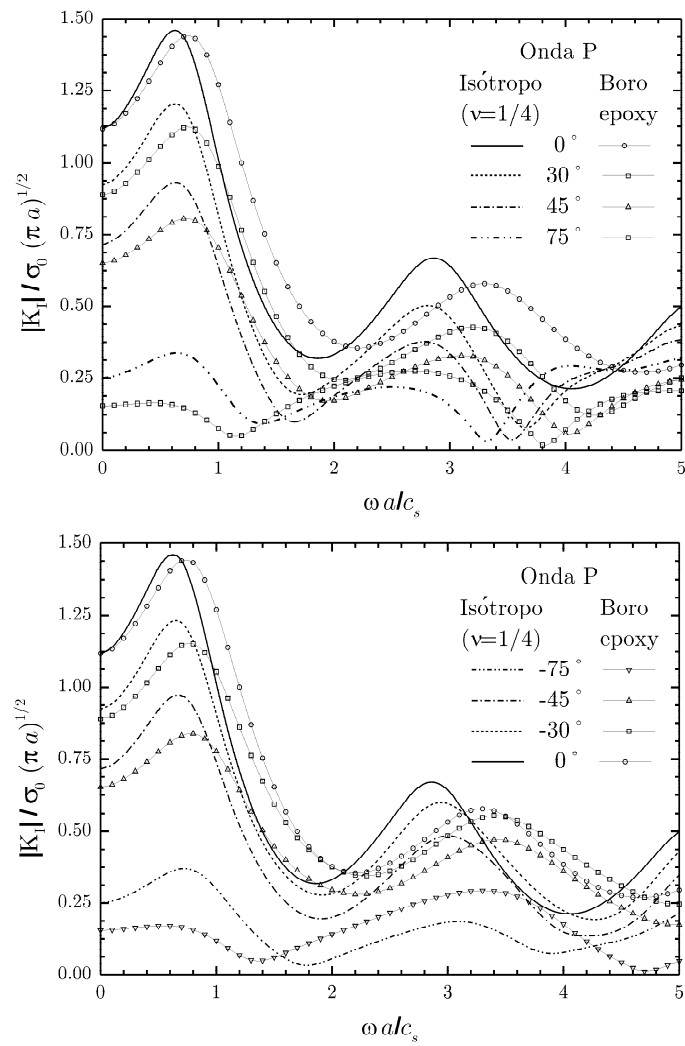


Figura 5.27: Onda P, grieta ramificada. Diferentes ángulos de ramificación. Modo I.

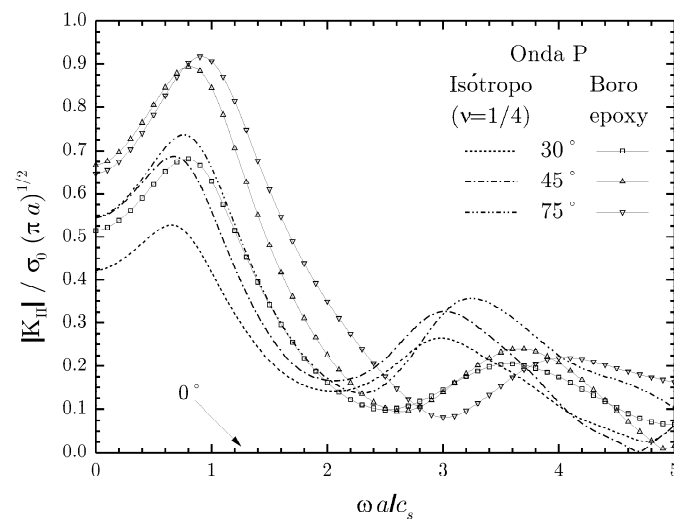


Figura 5.28: Onda P, grieta ramificada. Diferentes ángulos de ramificación. Modo II.

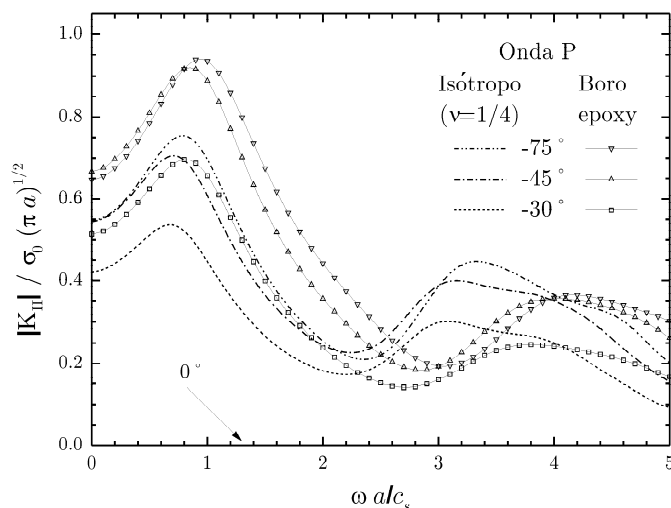


Figura 5.28 (cont): Onda P, grieta ramificada. Diferentes ángulos de ramificación. Modo II.

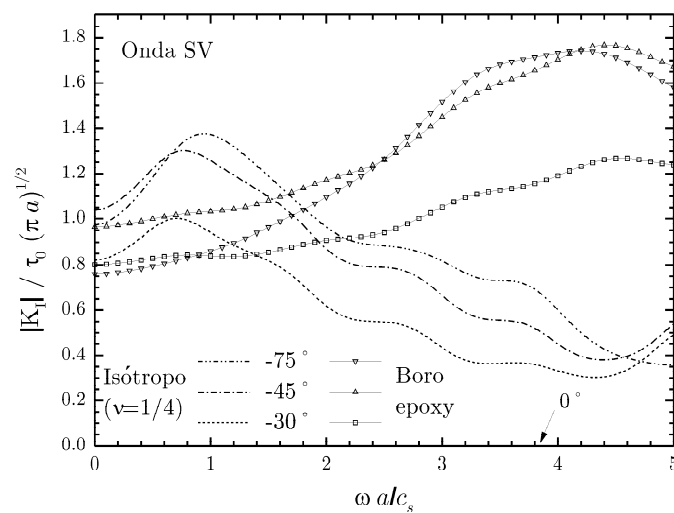
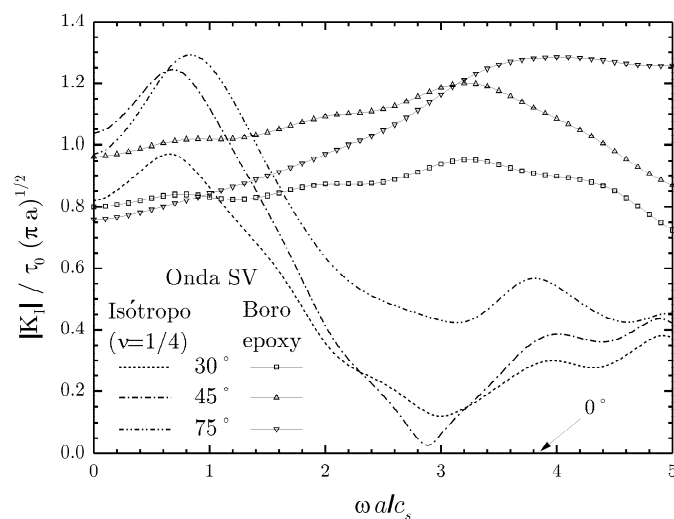


Figura 5.29: Onda SV, grieta ramificada. Diferentes ángulos de ramificación. Modo I.

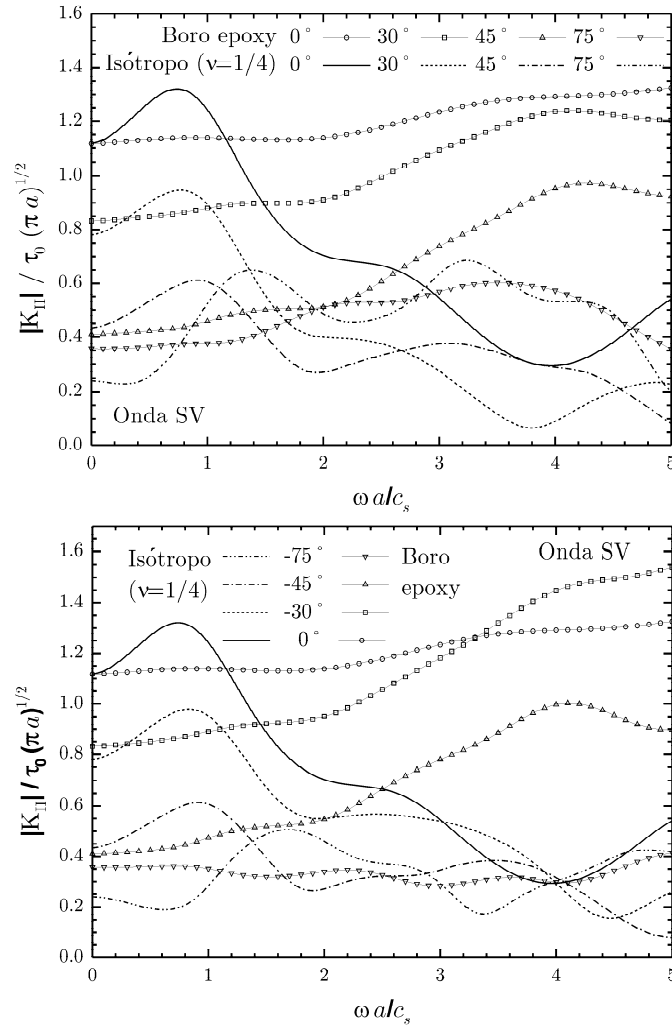
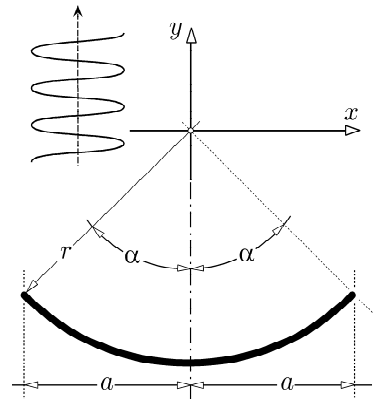


Figura 5.30: Onda SV, grieta ramificada. Diferentes ángulos de ramificación. Modo II.

5.5.7 Grieta circular dominio ortótropo

A continuación se presentan los resultados de ondas planas P y SV incidiendo sobre una grieta con forma de arco circular que abarca un semiángulo α . La onda incide por la parte convexa del arco. En este ejemplo se han utilizado dos materiales ortótropos para poner de manifiesto la influencia de las propiedades en el resultado. Los materiales empleados han sido boro epoxy (5.22) y modulite II (5.24)



Como referencia se incluyen los resultados de grieta recta que permiten poner de manifiesto la influencia de la curvatura de la grieta.

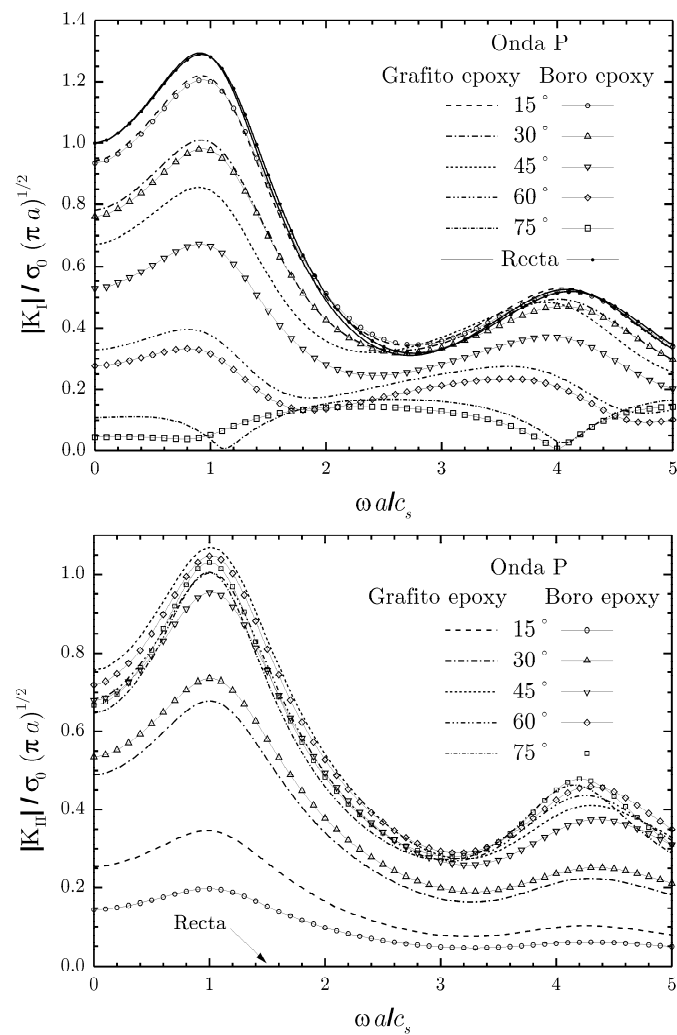


Figura 5.31: Onda P sobre grieta circular. Diferentes ángulos abarcados.

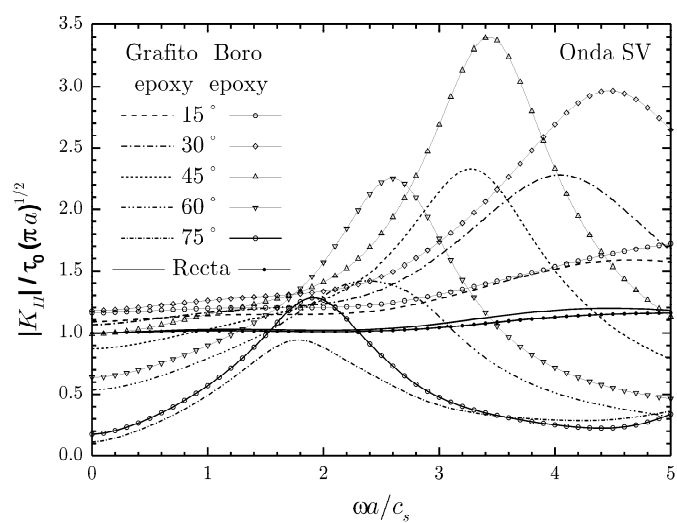


Figura 5.32: Onda SV sobre grieta circular. Diferentes ángulos abarcados.

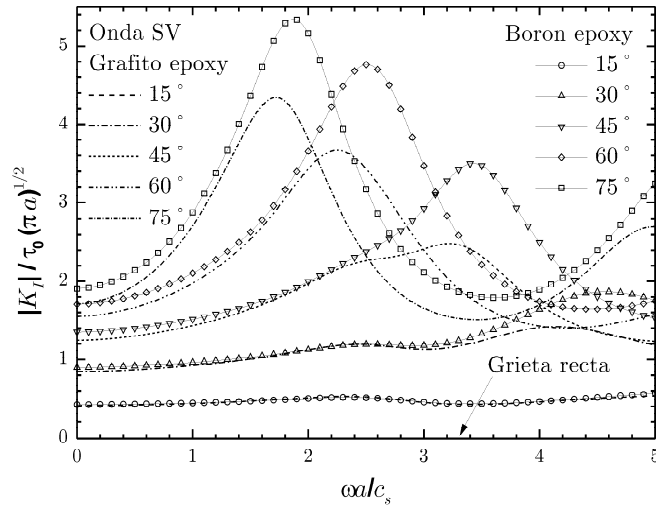


Figura: 5.32 (cont): Onda SV sobre grieta circular. Diferentes ángulos abarcados.

5.6 Resultados dinámicos. Solución fundamental piezoeléctrica

La escasez de resultados publicados de problemas de fractura dinámica plana en dominios piezoeléctricos ha determinado que la única comparación que se ha podido realizar sea para el problema de una grieta recta en dominio infinito solicitada por una onda P que incide perpendicularmente.

Los resultados a este problema, obtenidos mediante métodos semianalíticos, fueron publicados, en el dominio de la frecuencia, por Shindo y Ozawa (1990) y en el dominio del tiempo, por Shindo, Narita y Ozawa (1999).

En ambos trabajos se ha considerado la grieta según uno de los ejes principales del material y la onda incidiendo según el otro eje. Con esta disposición las condiciones de contorno sobre las superficie de la grieta, para onda P y SV son las que se obtienen seguidamente.

- **Onda P propagándose según la dirección y en material piezoeléctrico**

Se considera que la dirección según la que se propaga la onda (y) es la dirección de polarización y por tanto su dirección principal 2.

En estas condiciones el campo de desplazamientos en sentido extendido que dejaría la onda sería (Shindo y Ozawa, 1990)

$$u = 0 \quad ; \quad v = v_0 \exp[i\omega(y/c_p + t)] \quad ; \quad \varphi = \varphi_0 \exp[i\omega(y/c_p + t)] \quad (5.25)$$

siendo $c_p = \sqrt{(C_{22} + e_{22}^2/\varepsilon_{22})/\rho}$ la velocidad de fase, ω la frecuencia angular, t el tiempo, ν_0 y φ_0 las amplitudes de la velocidad según y y del potencial eléctrico e $i = \sqrt{-1}$.

Sustituyendo (5.25) en la ecuación de comportamiento (2.42) y considerando las realciones (2.36) se obtiene

$$\begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \\ D_x \\ D_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & 0 & 0 & e_{21} \\ C_{12} & C_{22} & 0 & 0 & e_{22} \\ 0 & 0 & C_{66} & e_{16} & 0 \\ 0 & 0 & e_{16} & -\varepsilon_{11} & 0 \\ e_{21} & e_{22} & 0 & 0 & -\varepsilon_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{,x} \\ v_{,y} \\ u_{,y} + v_{,x} \\ \varphi_{,x} \\ \varphi_{,y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{12}\nu_0 + e_{21}\varphi_0 \\ C_{22}\nu_0 + e_{22}\varphi_0 \\ 0 \\ 0 \\ e_{22}\nu_0 - \varepsilon_{22}\varphi_0 \end{pmatrix} \frac{i\omega}{c_y} \exp[i\omega(y/c_p)] \quad (5.26)$$

La condición de grieta impermeable ($D = 0$) implica que

$$\varphi_0 = \frac{e_{22}}{\varepsilon_{22}}\nu_0 \quad (5.27)$$

Finalmente las condiciones de contorno en tracciones extendidas sobre las superficies de la grieta quedan

$$p_x = \frac{\varepsilon_{22}C_{12} + e_{12}e_{22}}{\varepsilon_{22}C_{22} + e_{22}^2}n_x\sigma_0 \exp[i\omega(y/c_p)] ; \quad p_y = n_y\sigma_0 \exp[i\omega(y/c_p)] ; \quad D_n = 0 \quad (5.28)$$

siendo $\sigma_0 = \nu_0 (C_{22} + e_{22}^2/\varepsilon_{22})i\omega/c_p$

• Onda SV propagándose según la dirección y en material piezoeléctrico

Considerando que el campo de desplazamientos que deja la onda tiene la forma:

$$u = u_0 \exp[i\omega(y/c_s + t)] ; \quad v = 0 ; \quad \varphi = 0 \quad (5.29)$$

siendo $c_s = \sqrt{C_{66}/\rho}$, u_0 la amplitud del desplazamiento y el resto de parámetros como en (5.25).

Haciendo uso de las ecuaciones de comportamiento las tensiones extendidas quedan

$$\begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \\ D_x \\ D_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ e_{16}/C_{66} \\ 0 \end{pmatrix} \tau_0 \exp[i\omega(y/c_s)] \quad (5.30)$$

siendo $\tau_0 = u_0 i\omega/c_s$.

Con lo anterior las condiciones de contorno en tracciones extendidas para un plano de normal (n_x, n_y) quedan

$$\begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n_y \\ n_x \\ \frac{e_{16}}{C_{66}} n_x \end{pmatrix} \tau_0 \exp[i\omega(y/c_s)] \quad (5.31)$$

5.6.1 Grieta recta, dominio infinito piezoeléctrico. Dominio de la frecuencia y dominio del tiempo

Shindo y Ozawa (1990) presentan los resultados en función de la frecuencia para el caso de onda P que incide perpendicularmente sobre una grieta en dominio infinito piezoeléctrico. El material empleado para obtener esos resultados fue un PZT-6B. La figura 5.33 muestra que los resultados obtenidos tienen un buen acuerdo con los de Shindo y Ozawa.

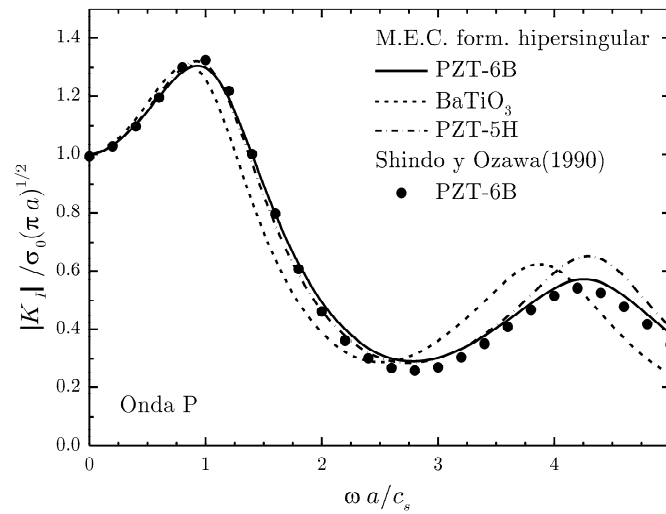


Figura 5.33: Grieta recta en dominio piezoeléctrico, onda P. Diferentes materiales.

En la figura se incluyen los resultados obtenidos para dos materiales más: BaTiO₃ y PZT-5H. El motivo es que estos son los materiales utilizados por Shindo, Narita y Ozawa (1999) para obtener los resultados del transitorio para una carga de impacto perpendicular a la grieta recta. A partir de los resultados mostrados se obtienen los resultados para el problema indicado: figura 5.34. Se observa el buen acuerdo existente, para los tres materiales, entre los resultados obtenidos mediante la formulación hipersingular del MEC en el dominio de la frecuencia y el posterior paso al dominio del tiempo mediante la transformada inversa de Fourier y los resultados semianalíticos de Shindo,

Narita y Ozawa (1999). La discretización en todos los casos se ha hecho con una malla de 10 elementos.

Las propiedades de los tres materiales indicados son:

$$PZT - 6B \quad (5.32)$$

$$\begin{aligned} C_{11} &= 168 \text{ GPa} ; C_{12} = 60 \text{ GPa} ; C_{22} = 163 \text{ GPa} ; C_{66} = 27.1 \text{ GPa} \\ e_{21} &= -0.9 \text{ C/m}^2 ; e_{22} = 7.1 \text{ C/m}^2 ; e_{16} = 4.6 \text{ C/m}^2 \\ \varepsilon_{11} &= 3.6 \text{ C/(GV m)} ; \varepsilon_{22} = 3.4 \text{ C/(GV m)} \end{aligned}$$

$$BaTiO_3 \quad (5.33)$$

$$\begin{aligned} C_{11} &= 150 \text{ GPa} ; C_{12} = 66 \text{ GPa} ; C_{22} = 146 \text{ GPa} ; C_{66} = 44 \text{ GPa} \\ e_{21} &= -4.35 \text{ C/m}^2 ; e_{22} = 17.5 \text{ C/m}^2 ; e_{16} = 11.4 \text{ C/m}^2 \\ \varepsilon_{11} &= 9.87 \text{ C/(GV m)} ; \varepsilon_{22} = 11.2 \text{ C/(GV m)} \end{aligned}$$

$$PZT - 5H \quad (5.34)$$

$$\begin{aligned} C_{11} &= 126 \text{ GPa} ; C_{12} = 84.1 \text{ GPa} ; C_{22} = 117 \text{ GPa} ; C_{66} = 23 \text{ GPa} \\ e_{21} &= -6.5 \text{ C/m}^2 ; e_{22} = 23.3 \text{ C/m}^2 ; e_{16} = 17 \text{ C/m}^2 \\ \varepsilon_{11} &= 15.04 \text{ C/(GV m)} ; \varepsilon_{22} = 13 \text{ C/(GV m)} \end{aligned}$$

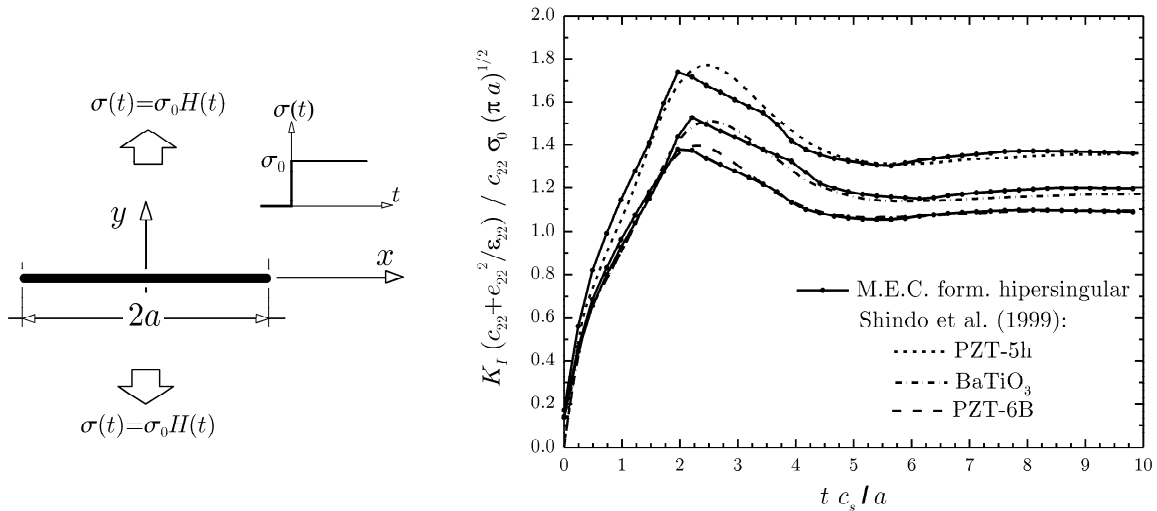


Figura 5.34: Grieta recta en dominio piezoeléctrico, carga de impacto. Diferentes materiales.

A partir de este punto, se muestra una relación de resultados dinámicos en función de la frecuencia para grietas en dominios bidimensionales piezoeléctricos infinitos.

Se utilizan las mismas configuraciones resueltas para comportamiento anisótropo elástico con idénticas discretizaciones.

5.6.2 Grietas colineales dominio piezoeléctrico

Resultados para grietas colineales sobre las que inciden ondas P y SV perpendicularmente. Como en el caso estático para adimensionalizar el FIDE cuando la carga es mecánica se utilizó la relación $\vartheta = \varepsilon_{22}/e_{22}$. El material piezoeléctrico elegido es un PZT-5H cuyas propiedades aparecen en (5.34).

Como referencia se presentan también los resultados para una única grieta.

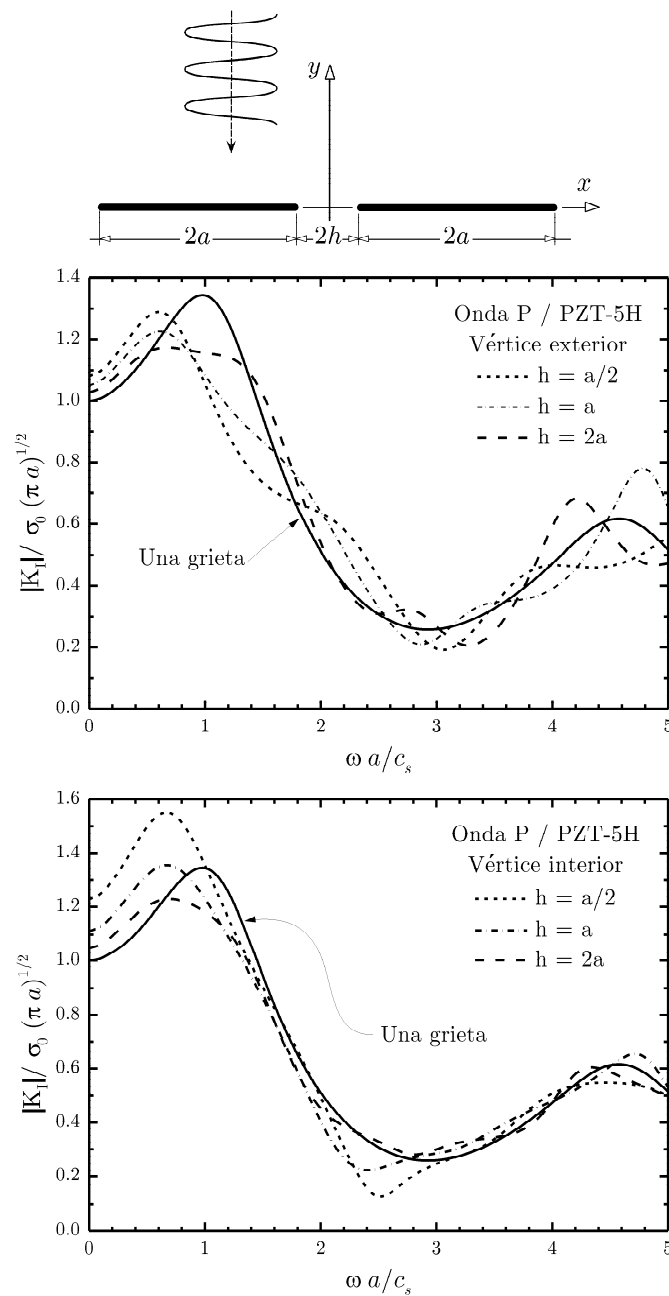


Figura 5.35: Grietas colineales en dominio piezoeléctrico. Onda P incidiendo perpendicularmente. Resultados, modo I, diferentes separaciones de grietas.

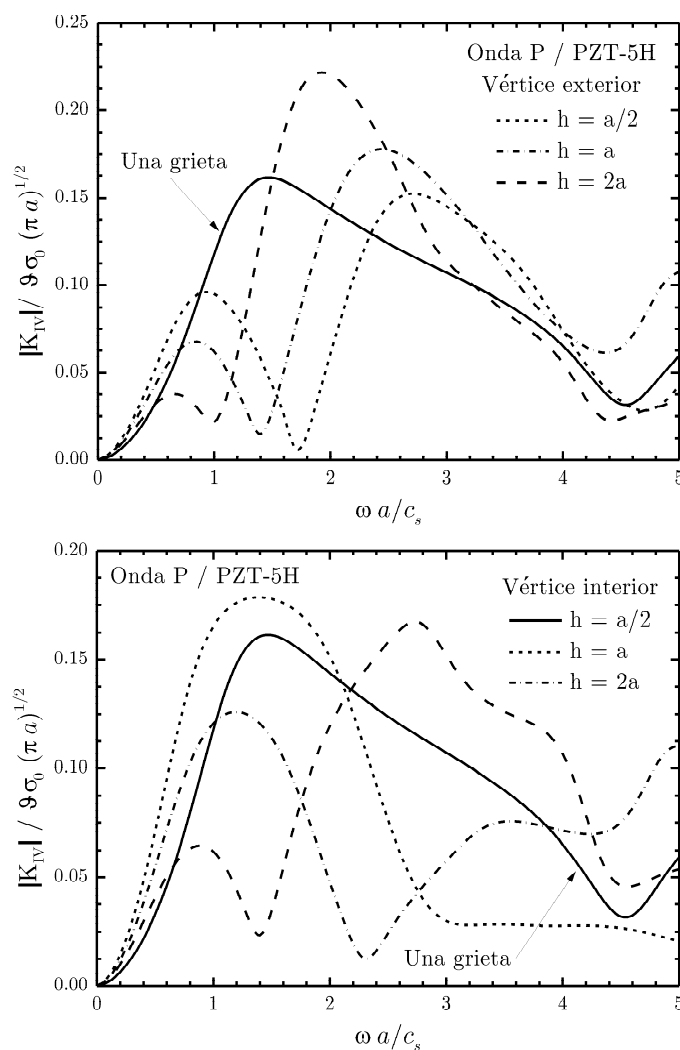


Figura 5.36: Grietas colineales en dominio piezoeléctrico. Onda P incidiendo perpendicularmente. Resultados, modo IV, diferentes separaciones de grieta.

5.6.3 Grietas paralelas en dominio piezoeléctrico

Utilizando el mismo material que en el ejemplo anterior, PZT-5H cuyas propiedades están en (5.34), se obtienen ahora los resultados, para diferentes separaciones de grieta, cuando estas se disponen paralelamente. La onda es igual que en el caso anterior una onda P que incide perpendicularmente.

La comparación de los resultados de ambos ejemplos pone claramente de manifiesto que la presencia de una segunda grieta tiene un efecto multiplicador muy superior si se encuentra en la dirección de la propagación de la onda que si está en la dirección perpendicular.

Se puede apreciar, para el caso de las grietas paralelas, un pico muy acusado de los FI para valores de la frecuencia adimensional en el entorno de 1.1. Este pico se suaviza

a medida que aumenta la distancia entre grietas. además el comportamiento es bastante similar en los FIT y en el FIDE.

En el caso de grietas paralelas este efecto multiplicador sobre los FIT es sensiblemente inferior e incluso se produce un efecto atenuador a medida que las grietas se separan mientras que en el FIDE la distorsión que impone la presencia de la segunda grieta es mayor.

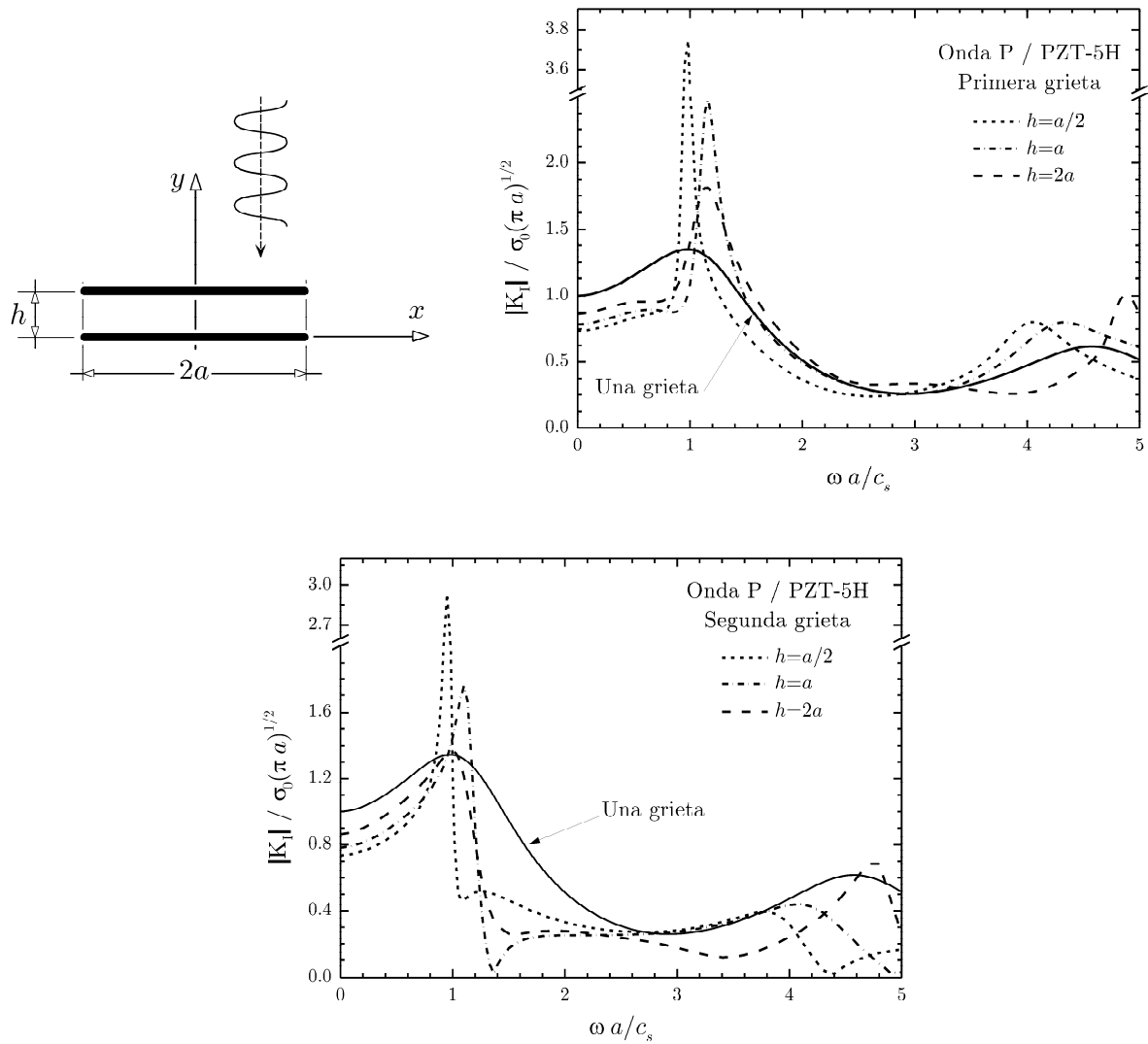


Figura 5.37: Grietas paralelas, dominio piezoeléctrico. Onda P incidiendo perpendicularmente. Resultados, modo I, en ambas grietas. Diferentes separaciones de grieta.

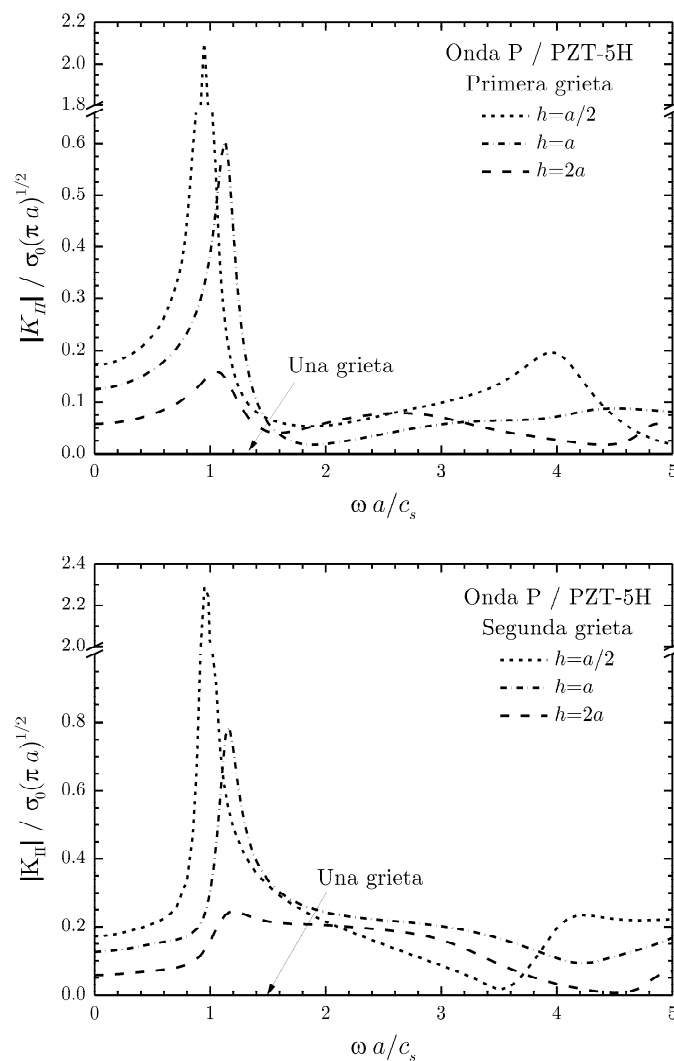


Figura 5.38: Grietas colineales en dominio piezoeléctrico. Onda P incidiendo perpendicularmente. Resultados modo II. Diferentes separaciones de grieta.

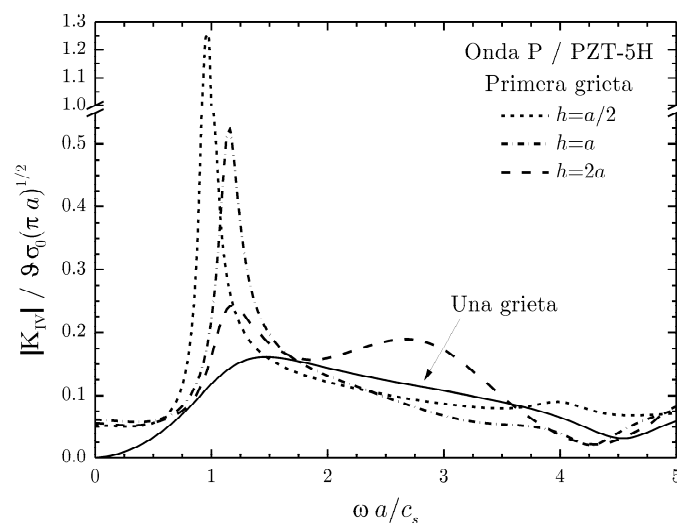


Figura 5.39: Grietas paralelas en dominio piezoeléctrico. Onda P incidiendo perpendicularmente. Resultados modo IV. Diferentes separaciones de grieta.

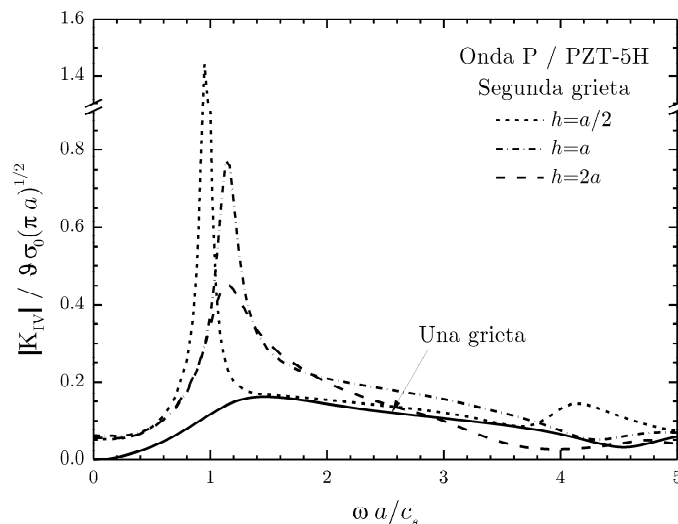


Figura 5.39 (cont): Grietas paralelas en dominio piezoeléctrico. Onda P incidiendo perpendicularmente. Resultados modo IV. Diferentes separaciones de grieta.

5.6.4 Grieta ramificada dominio piezoeléctrico

Resultados para grieta ramificada en el seno de un material PZT4, propiedades en (5.14). Ondas P y SV que inciden con dirección perpendicular a la grieta madre. Se muestran los resultados, en el vértice de la ramificación, frente a los resultados de grieta de recta.

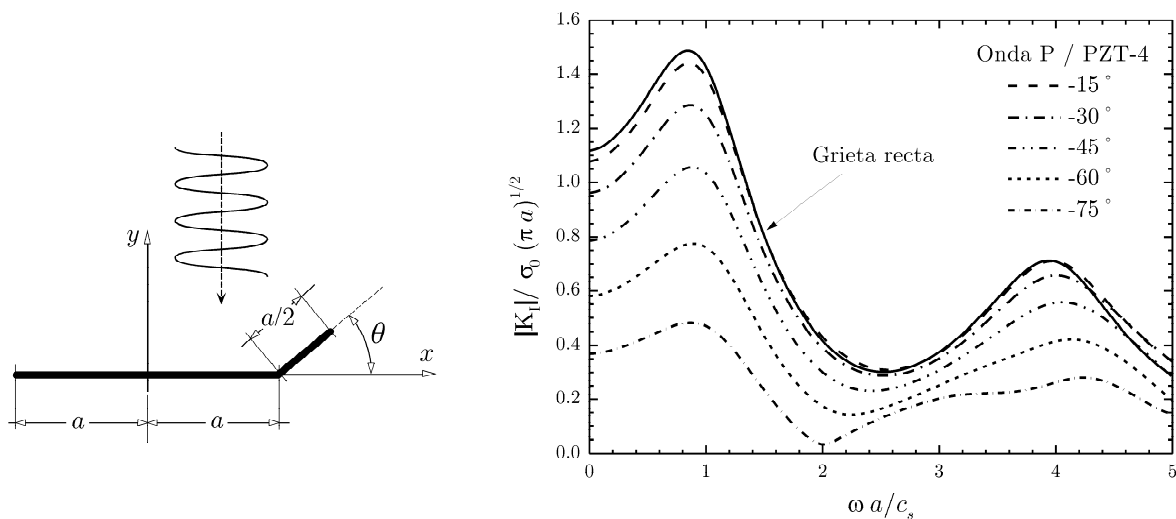


Figura 5.40: Grieta ramificada en dominio piezoeléctrico. Onda P incidiendo perpendicularmente. Resultados modo I.

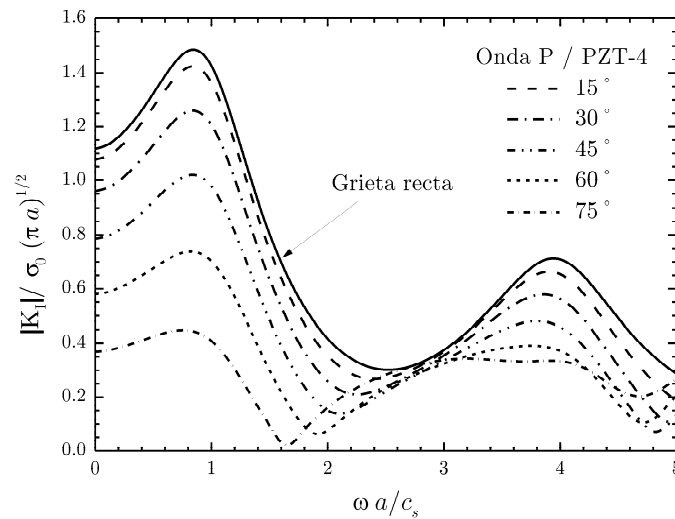


Figura 5.40 (cont): Grieta ramificada em domínio piezoelétrico. Onda P incidindo perpendicularmente. Resultados modo I.

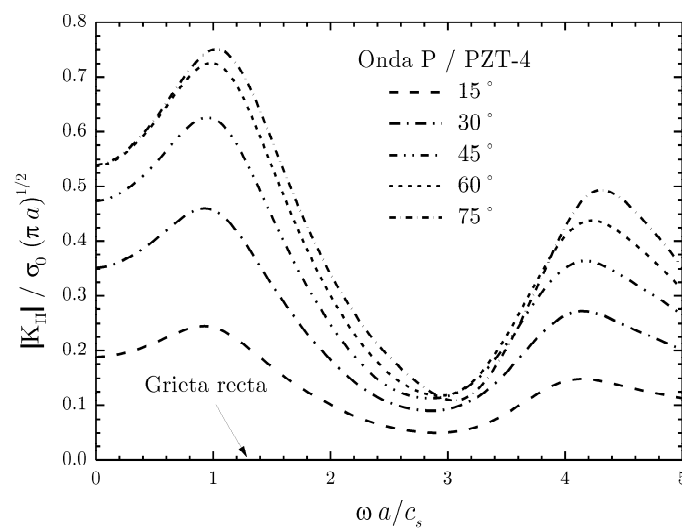
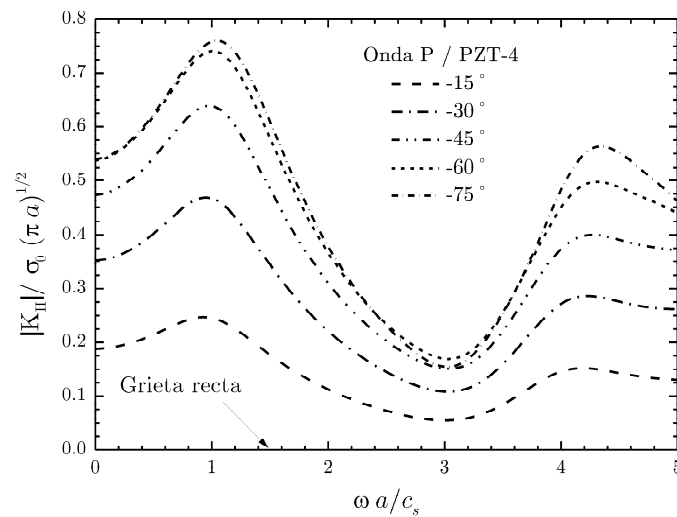


Figura 5.41: Grieta ramificada em domínio piezoelétrico. Onda P incidindo perpendicularmente. Resultados modo II.

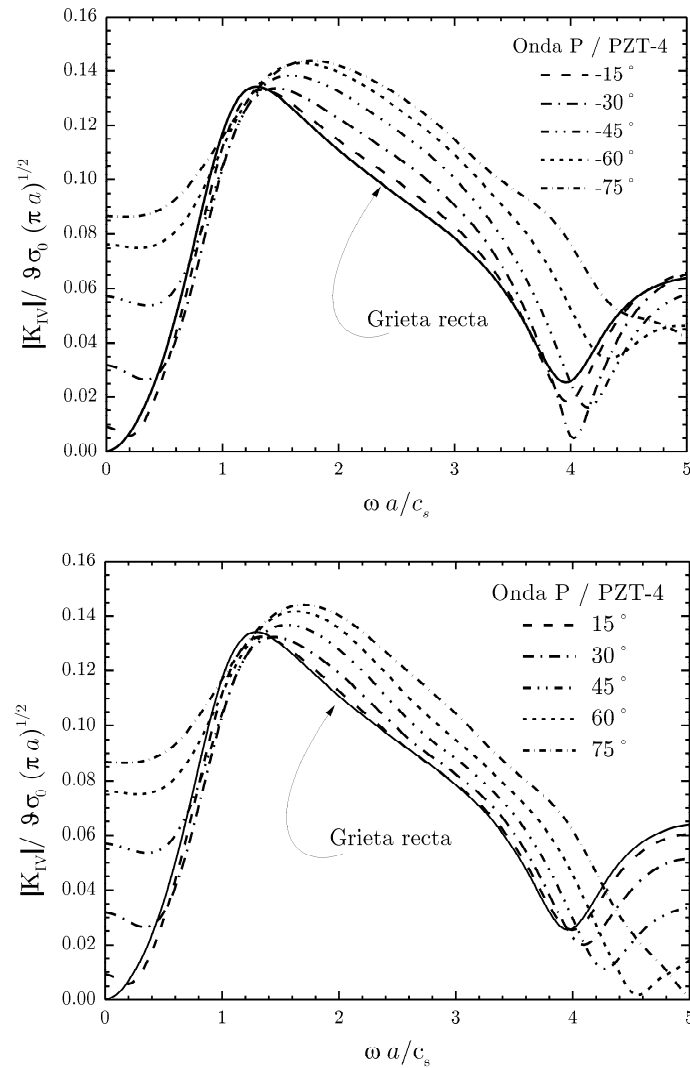


Figura 5.42: Grieta ramificada en dominio piezoeléctrico. Onda P incidiendo perpendicularmente. Resultados modo IV

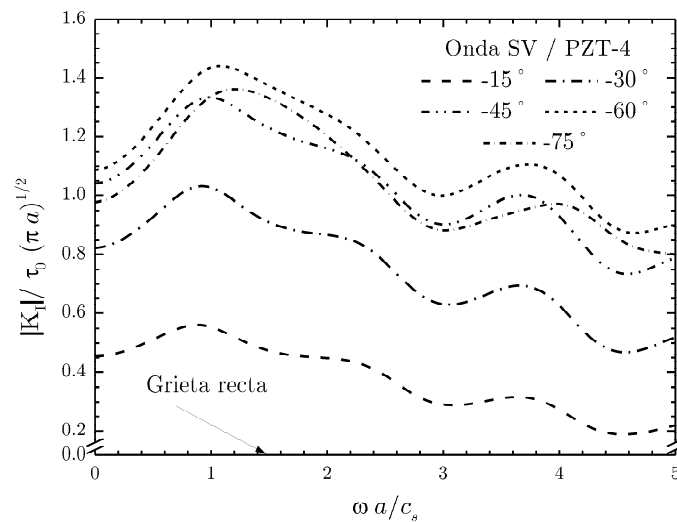


Figura 5.43: Grieta ramificada en dominio piezoeléctrico. Onda SV incidiendo perpendicularmente. Resultados modo I.

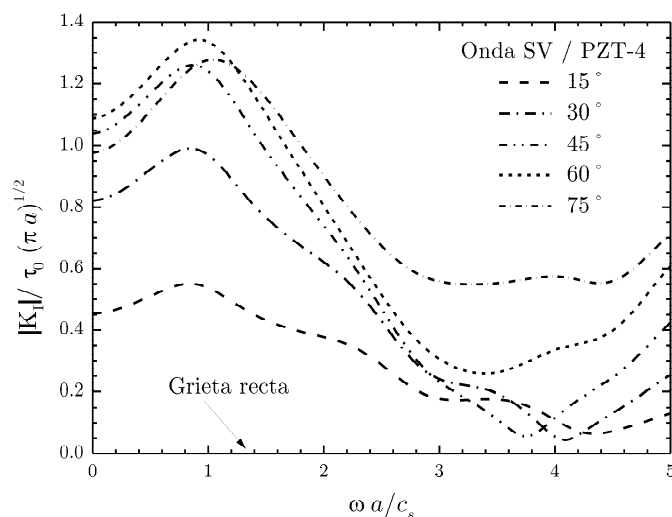


Figura 5.43 (cont): Fenda ramificada em domínio piezoelétrico. Onda SV incidindo perpendicularmente. Resultados modo I.

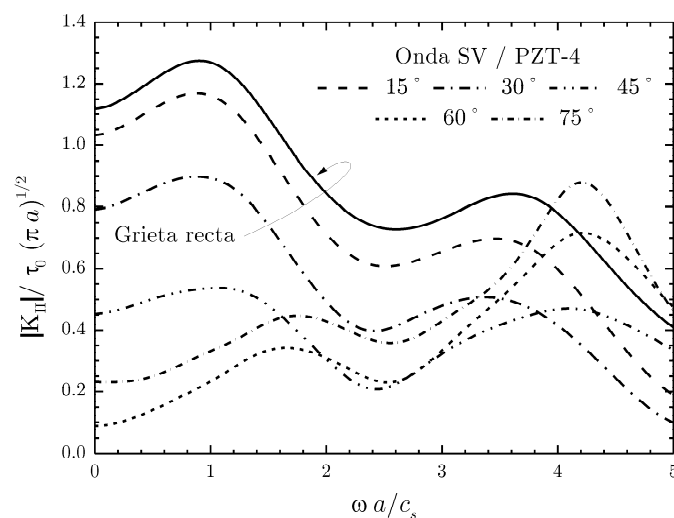
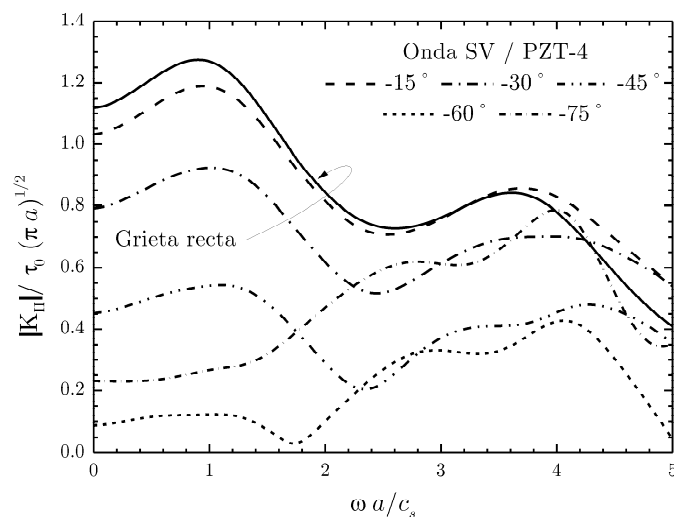


Figura 5.44: Fenda ramificada em domínio piezoelétrico. Onda SV incidindo perpendicularmente. Resultados modo II.

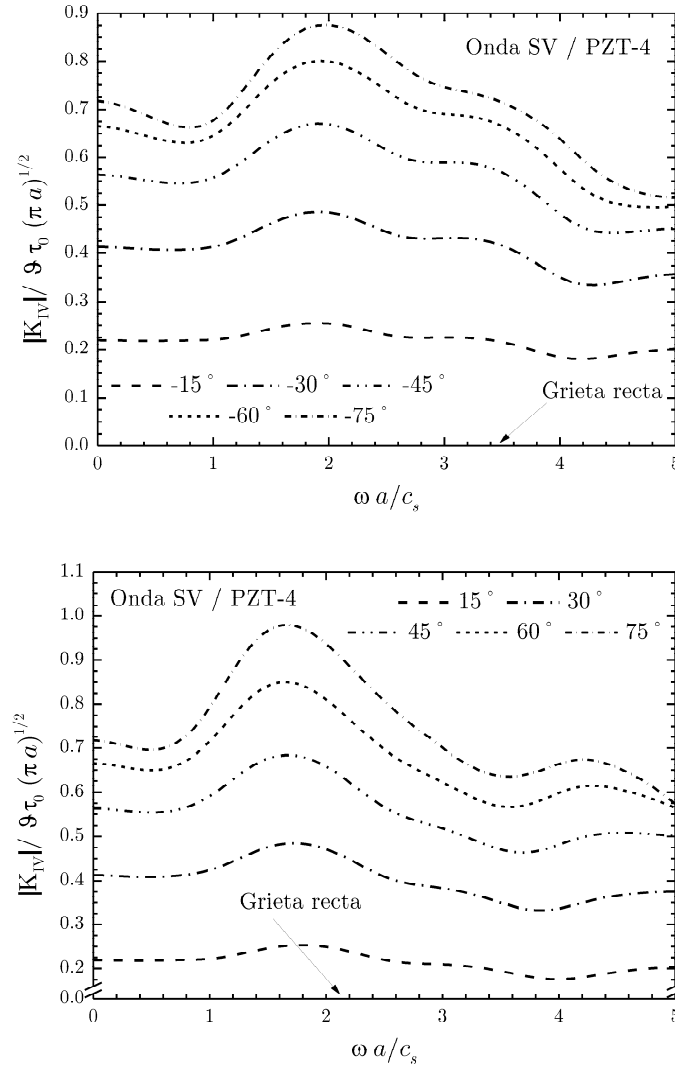
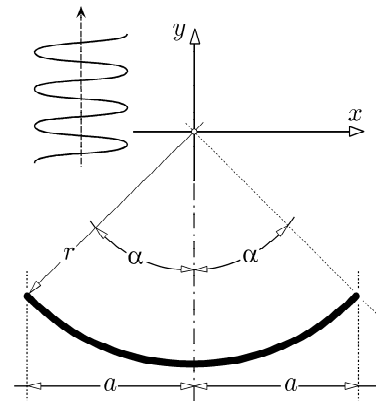


Figura 5.45: Grieta ramificada en dominio piezoeléctrico. Onda SV incidiendo perpendicularmente. Resultados modo IV.

5.6.5 Grieta circular dominio piezoeléctrico

Para finalizar se recogen los resultados para grieta con forma de arco circular con diferentes ángulos abarcados, bajo la acción de ondas P y SV. El material empleado en este caso es un PZT4 cuyas propiedades aparecen en (5.14). Como referencia aparecen los resultados para grieta recta.



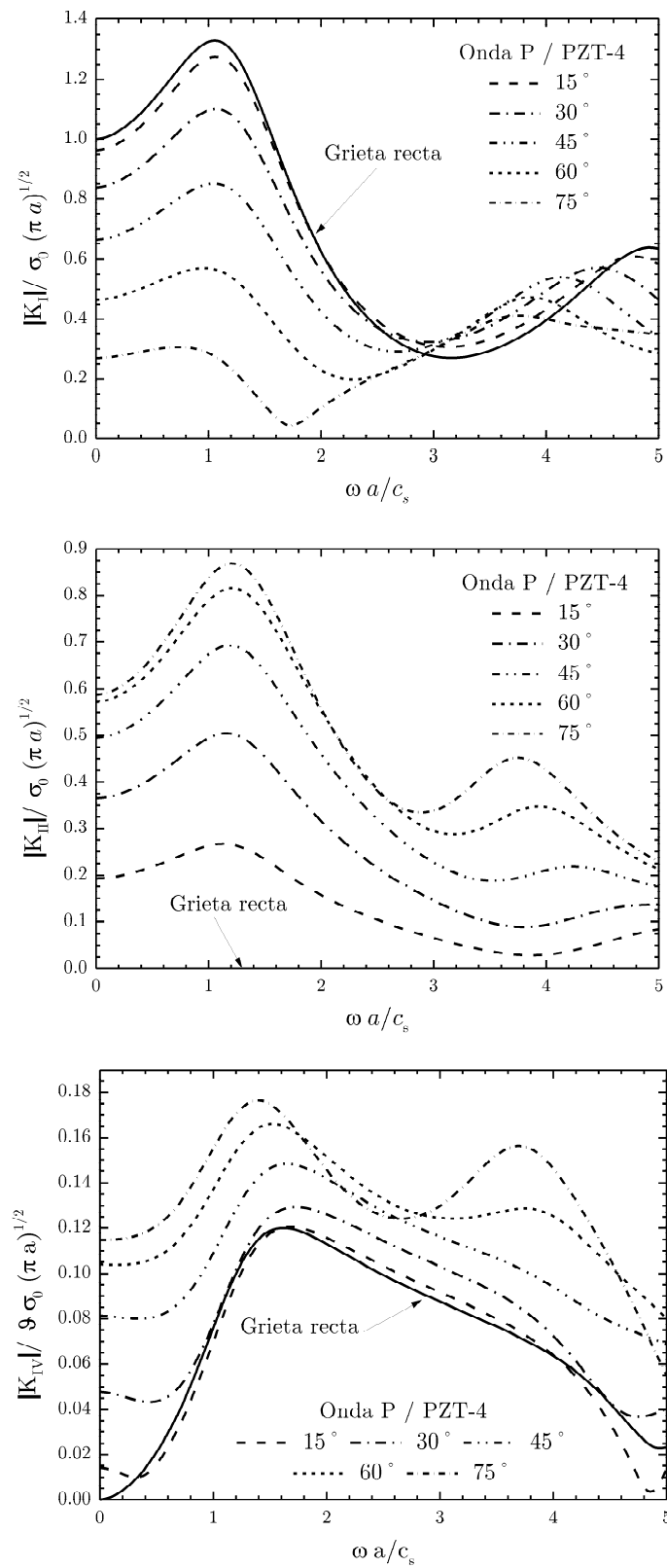


Figura 5.46: Grieta circular en dominio piezoeléctrico. Onda P, resultados modos I, II y IV.

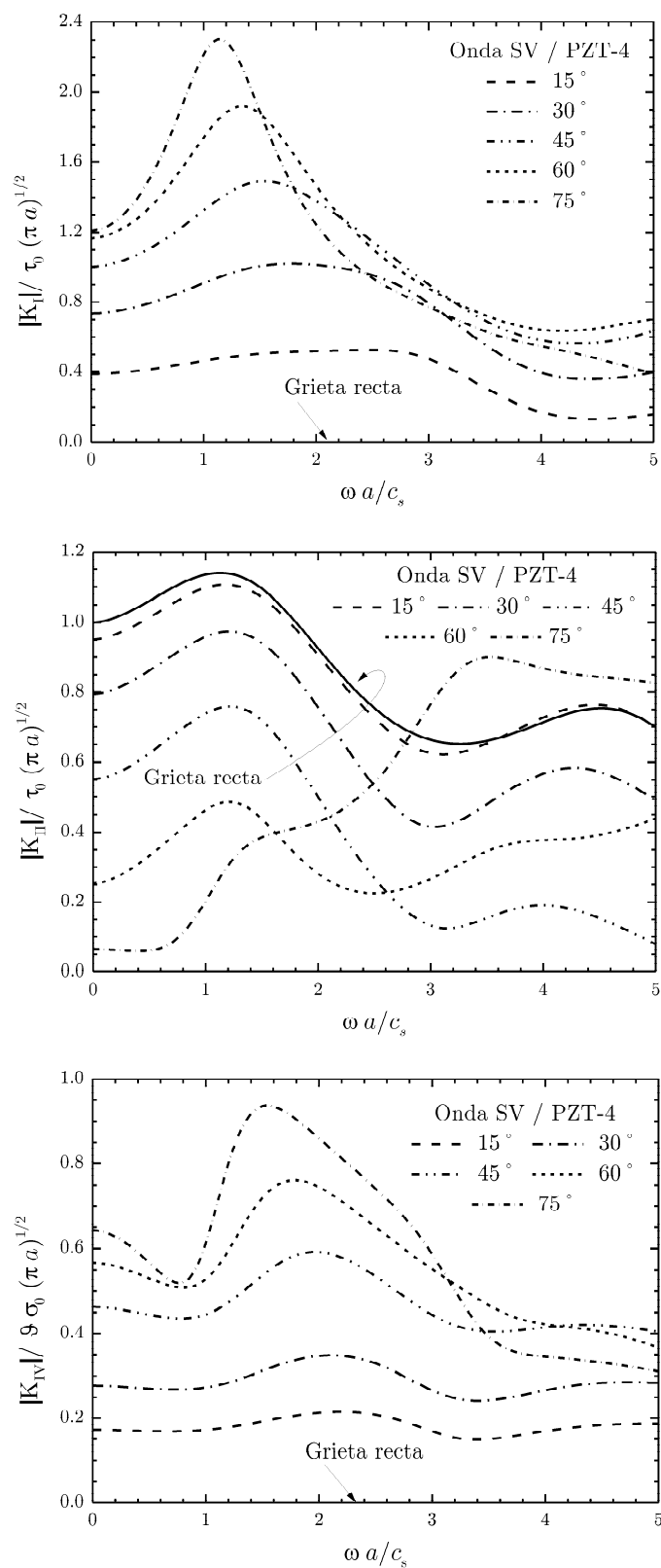


Figura 5.47: Grieta circular en dominio piezoeléctrico. Onda SV, resultados modos I, II y IV.

Capítulo 6

Conclusiones y desarrollos futuros

6.1 Conclusiones

En esta tesis se ha implementado la formulación hipersingular del método de los elementos de contorno para estudiar el problema bidimensional de fractura estática y dinámica en materiales que presentan comportamiento anisótropo elástico y piezoeléctrico.

Sobre la base de la idea presentada por Sáez, Gallego y Domínguez (1995) para regularización de integrales hipersingulares en el estudio de la fractura bidimensional en materiales isótropos, en el que la integración hipersingular se realiza sobre funciones reales de variable real, aquí se desarrolla una extensión de aquella idea a funciones complejas de variable compleja que son las que se encuentran en las soluciones fundamentales para los comportamientos y sollicitaciones tratados.

Para el caso de acciones estáticas la solución fundamental tiene forma explícita, no así para el problema dinámico, cuya solución fundamental existe únicamente en forma integral.

El aspecto más delicado de la formulación hipersingular, el cálculo numérico de las integrales hipersingulares, ha sido tratado con éxito mediante un adecuado cambio de variable. Este cambio de variable ha permitido la evaluación de estas integrales mediante una descomposición de los integrandos hipersingulares en suma de términos regulares, singulares e hipersingulares; de tal modo que los términos singulares e hipersingulares tienen integral analítica conocida. Esta descomposición puede realizarse en virtud de la relación que existe entre el jacobiano de la transformación del contorno al plano complejo y la normal exterior al contorno. Esta relación pone de manifiesto que dicho jacobiano está presente en las derivadas de las soluciones fundamentales utilizadas lo que ha permitido el tratamiento genérico de las integrales sin restricciones adicionales sobre la

geometría de los elementos. En suma, este cambio de variable permite desplazar las singularidades e hipersingularidades a integrales que son evaluables analíticamente quedando la integración numérica restringida a integrales regulares que han sido calculadas mediante un esquema estándar de cuadraturas de Gauss.

Mediante este procedimiento han podido ser resueltos problemas estáticos de fractura sobre dominios bidimensionales anisótropos elásticos y piezoeléctricos tomando en consideración la semejanza formal entre las expresiones de las soluciones fundamentales para los dos casos, expresiones (3.20) y (3.33).

El problema de fractura dinámica se ha resuelto en el dominio de la frecuencia. Las soluciones fundamentales, anisótropa elástica y piezoeléctrica, para solicitaciones armónicas tienen expresiones integrales, (3.36) y (3.51), que admiten una descomposición en dos términos, uno singular e independiente de la frecuencia y otro regular.

El término independiente de la frecuencia coincide, salvo constantes, con la solución fundamental estática por lo que la expresión integral de este término puede ser sustituida por la expresión explícita de la solución fundamental estática a la que se añaden la necesarias constantes.

El término dependiente de la frecuencia es regular pero sus derivadas segundas, que son los términos que aparecen en la formulación hipersingular, presentan singularidad de tipo logarítmico y su integración numérica es resuelta según un esquema de cuadraturas de Gauss para el logaritmo.

En la literatura pueden encontrarse otras implementaciones del método de elementos de contorno para resolver el problema de mecánica de fractura estática en dominios anisótropos elásticos y piezoeléctricos.

Así, por ejemplo, Sollero y Aliabadi (1993), Sollero, Aliabadi y Rooke (1994); aplican la técnica de las subregiones al caso anisótropo elástico.

Pan (1997, 1999a, 1999b), Pan y Amadei (1996, 1999), Pan, Chen y Amadei (1997) aplican también la formulación mixta del método a los casos anisótropo elástico y piezoeléctrico. En estos trabajos las integrales hipersingulares se evalúan mediante cuadraturas específicas para integración hipersingular.

Sollero y Aliabadi (1995) aplican también al caso anisótropo elástico la formulación hipersingular. En esta ocasión las integrales hipersingulares se resuelven analíticamente para lo que se restringen a elementos rectos en los que el jacobiano de la transformación del elemento de integración es una constante.

Sobre todas estas implementaciones, la desarrollada en esta tesis presenta sensibles ventajas:

- No es necesaria la introducción de contornos ficticios propia de la técnica de subdominios. Lo que además lleva asociado una reducción en el número de ecuaciones que se resuelven.
- La evaluación de las integrales hipersingulares es más precisa que en el caso de cuadraturas ponderadas utilizadas para la evaluación numérica de la parte finita de Hadamard, ya que la evaluación numérica, en este caso, se hace sobre integrandos regulares.
- Esta formulación no tiene la limitación del uso de elementos rectos.

Una característica añadida de la formulación presentada es la versatilidad para el modelado de contornos curvos propia del uso de elementos cuadráticos.

Esta tesis aporta, además, esta formulación del método de los elementos de contorno a la resolución, en función de la frecuencia, del problema plano de fractura dinámica en materiales anisótropos elásticos y piezoelectricos. La presencia en la literatura de este método aplicado a este tipo de problemas se reduce, prácticamente, a los trabajos en el dominio del tiempo de Albuquerque, Sollero y Fedelinski (2003a, 2003b) y Albuquerque, Sollero y Aliabadi (2002, 2004). Ya ha sido referido en el capítulo 1 que otros trabajos que aplican el MEC a problemas de fractura no isótropa están dedicados a dominios tridimensionales.

La formulación presentada a sido ampliamente contrastada a lo largo de un buen número de ejemplos en los que se comparan los resultados de esta formulación con otros resultados obtenidos por métodos analíticos, semianalíticos y numéricos. Esta relación de resultados previamente existentes ha sido enriquecida con un buen número de nuevos casos resueltos.

Para finalizar se destaca el hecho de que, la formulación presentada permite el uso del elemento un cuarto discontinuo situado en el vértice de la grieta. El uso de este elemento implica la disposición de un punto de colocación a muy poca distancia del vértice, donde los desplazamientos y el potencial eléctrico tienen una expresión universal conocida. Esta situación ha sido aprovechada para la determinación directa, precisa y con un mínimo costo de computación de los factores de intensidad de tensión y desplazamiento eléctrico a partir del incremento de los desplazamientos y del potencial eléctrico en ese punto.

6.2 Desarrollos futuros

La continuación al trabajo presentado en esta tesis podría desarrollarse según una doble vertiente:

- La mejora de las dificultades numéricas encontradas en el caso dinámico.
- La aplicación de la formulación expuesta a problemas gobernados por formulaciones matemáticas similares.

Las mejoras numéricas del desarrollo presentado se refieren al problema comentado al final del epígrafe 4.4 acerca del carácter oscilatorio de la solución fundamental en frecuencia. Como se ha indicado, este carácter dificulta la obtención de resultados para alta frecuencia y/o para campo lejano. Este aspecto supone una limitación al estudio de problemas de difracción de ondas y al estudio, mediante la transformada de Fourier, de transitorios en dominios anisótropos elásticos o piezoeléctricos en los que la relación entre las frecuencias de estudio, las velocidades de fase y las dimensiones del dominio, dé lugar a integrandos de marcado carácter oscilatorio.

Para superar esta limitación se debe de trabajar en la obtención de una solución asintótica de campo lejano como la que, para el caso transversalmente isótropo, obtuvo Sáez en 1997.

En el apartado de nuevas aplicaciones es de destacar el importante trabajo que, paralelamente al desarrollo de esta tesis, se ha estado realizando en el estudio de fractura en placas anisótropas sometidas a flexión (Dirgantara y Aliabadi, 1999, 2002; entre otros). Este problema está gobernado por unas ecuaciones matemáticas que guardan una sensible similitud formal con las que gobiernan los problemas aquí estudiados Maksimenko y Podruzhin (2003). De este modo la extensión de la implementación presentada a ese problema aparece como algo natural y es por tanto una línea continuísta que el autor propone.

Un campo de trabajo de indudable interés en el ámbito de la mecánica de la fractura es el estudio de la propagación de grietas. Son muy numerosos los trabajos que muestran la aplicación del método de los elementos de contorno al estudio de este problema ya sea mediante el uso de subregiones (por ejemplo Ingraffea, Blandford y Liggett, 1987; Doblare, Espiga, Gracia y Alcantud, 1990; Gallego y Domínguez, 1992) o, más recientemente, mediante el uso de la formulación hipersingular (por ejemplo Portela, Aliabadi y Rooke, 1993; Mi y Aliabadi, 1994, 1995). En este sentido, el uso de la formulación hipersingular carece, como se ha indicado, de la servidumbre de la presencia de subcontornos ficticios y del consecuente remallado que acompaña al crecimiento de la grieta, propio de la técnica

de subregiones. Por lo tanto parece lógico pensar en que un posible desarrollo futuro puede consistir en la aplicación del tratamiento presentado en el estudio de la propagación de grietas en problemas bidimensionales anisótropos elásticos y piezoeléctricos.

Respecto del crecimiento de grietas en dominios piezoeléctricos se presenta como un aspecto de sumo interés la posibilidad del estudio numérico, supeditado a una eventual comprobación experimental, de la medida en que la aplicación de un potencial eléctrico puede incidir en el desarrollo de una grieta en el seno de un material piezoeléctrico.

Por último se cita otra continuación natural a este trabajo que, recientemente, ha dejado de ser una posibilidad y es una tarea actualmente en desarrollo por el autor de esta tesis. Se trata de la aplicación de la formulación hipersingular presentada al estudio, en el dominio del tiempo, del problema bidimensional de fractura para materiales anisótropos elásticos y piezoeléctricos.

No se trata de la realización de un esquema de integración temporal paso a paso como el que puede encortarse, por ejemplo, en Gallego y Domínguez (1996 y 1997) para el caso isótropo o en Wang, Achenbach y Hirose (1996) para el caso anisótropo, se trata de la combinación del tratamiento que se ha dado aquí a la formulación hipersingular con la idea expuesta en los trabajos de Zhang, Savaidis y Savaidis (2001), Zhang (2002) y Zhang y Savaidis (2003).

En resumen consiste en aplicar la formulación hipersingular expuesta, que aquí se aplica en el dominio de la frecuencia, al dominio de Laplace. Posteriormente, mediante la aplicación de la cuadratura de Lubich (1988) para el producto de convolución, se obtiene la matriz del sistema para cada instante de tiempo como la antitransformada de Fourier de la matriz obtenida en el dominio de Laplace. A partir de este punto, para obtener el resultado como función del tiempo se resuelve el sistema algebraico de ecuaciones para cada instante en función de los resultados de los instantes anteriores.

Esta idea ha sido aplicada por Zhang y Savaidis (2003) sobre una formulación de contorno en tracciones no hipersingular para resolver el problema de fractura tridimensional en dominios anisótropos. Esta formulación aplicada a una grieta plana circular en dominio infinito se ha mostrado más estable, frente a la discretización en el tiempo, que el esquema paso a paso usualmente utilizado.

Apéndice A

Formalismo integral de Barnett y Lothe

Como se ha indicado, las matrices que aparecen en las soluciones fundamentales estáticas anisótropa elástica y piezoeléctrica pueden ser determinadas mediante la resolución de un problema de autovectores y autovalores: expresiones (2.27), (2.28) y (2.29); para el caso anisótropo elástico y (2.54) para el caso piezoeléctrico.

Barnett y Lothe presentaron en sendos trabajos, publicados en 1973 para el caso anisótropo elástico y en 1975 para el piezoeléctrico, lo que denominaron formalismo integral. Este formalismo permite evitar la resolución de este problema de autovalores y autovectores obteniendo la solución del problema plano anisótropo elástico y piezoeléctrico mediante funciones reales de variable real.

A partir del formalismo matricial de Stroh (se usará notación extendida que incluye a la notación para el caso anisótropo elástico), normalizando los autovectores de determinada forma, son capaces de definir unas relaciones de cierre a partir de las que obtienen varias reglas de suma para los elementos de los autovectores. Con esas reglas y mediante sendos teoremas integrales para autovalores llegan a la siguiente expresiones

$$Q_{KS} = Q_{SK} = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathbf{C}_{22}^{-1}(\theta) d\theta = i \sum_{r=1}^{r=8} \pm A_{Sr} A_{Kr} \quad (\text{A.1})$$

$$S_{KS} = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathbf{C}_{22}^{-1}(\theta) \mathbf{C}_{21}(\theta) d\theta = i \sum_{r=1}^{r=8} \pm A_{Kr} L_{Sr} \quad (\text{A.2})$$

$$B_{KS} = B_{SK} = -\frac{1}{8\pi^2} \int_0^{2\pi} (\mathbf{C}_{11}(\theta) - \mathbf{C}_{12}(\theta) \mathbf{C}_{22}^{-1}(\theta) \mathbf{C}_{21}(\theta)) d\theta =$$

$$= -\frac{1}{4\pi i} \sum_{r=1}^{r=8} \pm L_{Kr} L_{Sr} \quad (\text{A.3})$$

donde:

El ángulo θ es el ángulo en el plano $x_1 - x_2$ (plano que contiene al dominio de estudio).

Las matrices de los integrandos son reales ya que se trata de las submatrices del tensor de comportamiento definidas por las expresiones (2.49).

Los vectores \mathbf{A}_r , \mathbf{L}_r y μ_r fueron definidos en (2.53) pero en este caso se utilizan todos los autovalores (6 para el caso aniótropo elástico, 8 para el piezoeléctrico) no sólo los que tienen la parte imaginaria positiva.

El signo \pm ha de tomarse de acuerdo a la parte imaginaria del autovalor.

$$i = \sqrt{-1}.$$

A partir de las relaciones (A.1), (A.2) y (A.3) entre las matrices \mathbf{Q} , \mathbf{S} y \mathbf{B} y los autovalores y autovectores (\mathbf{A}_r , \mathbf{L}_r y μ_r) se puede llegar a una expresión para la solución fundamental bidimensional mediante estas nuevas matrices en lugar de las anteriores.

Con esto se habría conseguido sustituir el problema de los autovalores y autovectores complejos por la evaluación, mediante cuadraturas de Gauss, de las integrales regulares que aparecen en las expresiones (A.1), (A.2) y (A.3).

La expresión para la solución fundamental quedaría, tomando el sistema de referencia de forma que uno de los ejes estuviera según la dirección que une los puntos de colocación y observación

$$u_{IJ} = \frac{1}{2\pi i} \sum_{r=1}^{r=8} \pm A_{Ir} A_{Jr} \ln |\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}| = -\frac{1}{2\pi} Q_{IJ} \ln |\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}| \quad (\text{A.4})$$

cuyas derivadas pueden escribirse como:

$$u_{SJ,m} = \frac{-\eta_m Q_{JI} + \lambda_m (C_{22})_{JR}^{-1} [S_{IR} + (C_{21})_{RK} Q_{KI}]}{2\pi |\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}|} \quad (\text{A.5})$$

donde $\boldsymbol{\eta}$ y $\boldsymbol{\lambda}$ son los vectores unitarios que definen el sistema de referencia, $\boldsymbol{\xi}$ es el punto donde se coloca la carga y \mathbf{x} es un punto genérico donde se evalúa el campo.

Este formalismo, como se ha dicho, surge en la idea de evitar el cálculo de autovalores y autovectores complejos. Si bien puede ser de utilidad para el cálculo de tracciones mediante otros procedimientos, su aplicación en el MEC resultaría incómoda ya que cuando el sistema de referencia no se dispone de la forma indicada para obtener (A.4)

la expresión de los desplazamientos se complica perdiendo toda su utilidad. Por otra parte, en la actualidad el cálculo de autovectores y autovalores es un problema superado por la existencia de conocidos y precisos algoritmos. No obstante se ha traído aquí este formalismo para dejar constancia de la existencia de una formulación real de la solución fundamental para los casos tratados en este trabajo.

Apéndice B

El problema anisótropo elástico antiplano. Resultados

Generalidades

Como se ha indicado en el segundo capítulo los problemas elásticos planos y antiplano aparecen desacoplados para comportamiento monoclinico (epígrafe 2.2.1). Este anexo recoge algunos resultados anisótropos elásticos antiplanos que vienen a complementar los resultados planos mostrados.

La ecuación de comportamiento en el caso antiplano es

$$\begin{pmatrix} \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{44} & C_{45} \\ C_{54} & C_{55} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{3,2} \\ u_{3,1} \end{pmatrix} \quad (\text{B.1})$$

en este caso el vector de desplazamientos tendrá una sola componente $u_3(x_1, x_2)$, siendo $x_1 - x_2$ el plano donde está definido el dominio.

La solución fundamental en desplazamientos y tracciones puede ahora ser escrita en la forma:

$$u_{33}^*(z_3, z_3^0) = -\frac{1}{\pi} \operatorname{Re} [A_{33}Q_{33} \ln (z_3 - z_3^0)] \quad (\text{B.2})$$

$$p_{33}^*(z_3, z_3^0) = \frac{1}{\pi} \operatorname{Re} \left[L_{33}Q_{33} \frac{\mu_3 n_1 - n_2}{z_3 - z_3^0} \right] \quad (\text{B.3})$$

donde

$z_3 = x_1 + \mu_3 x_2$, $z_3^0 = \xi_1 + \mu_3 \xi_2$ siendo (x_1, x_2) y (ξ_1, ξ_2) los puntos de observación y colocación respectivamente.

μ_3 , la raíz del polinomio característico para este caso. Esta raíz puede ser determinada mediante

$$\mu_3 = - \left(C_{45} + i \sqrt{C_{44} C_{55} - C_{45}^2} \right) / C_{44} \quad (\text{B.4})$$

Siendo $i = \sqrt{-1}$.

A_{33} , Q_{33} y L_{33} son función de las propiedades del material según la definición indicada en el epígrafe 3.3.1.

El caso antiplano no supone ninguna variación respecto de las ecuaciones integrales de contorno, en desplazamientos y tracciones, ni del tratamiento que de la integración de núcleos hipersingulares se ha propuesto. Por tanto todos esos aspectos han sido ya vistos en esta tesis. La única variación que debe ser reseñada es la expresión utilizada para el cálculo del factor de intensidad de tensiones:

$$K_{III} = - \frac{\sqrt{\pi/8r}}{\text{Im} [1 / (C_{45} + \mu_3 C_{44})]} \Delta u_3 \quad (\text{B.5})$$

donde r e Δu_3 se evalúan nuevamente en el nodo más cercano al vértice de la grieta.

Resultados numéricos

Se muestran resultados empleando las soluciones fundamentales de campo completo y de semiespacio. Se comparan los resultados con diferentes configuraciones cuyos resultados existen en la literatura para dominio isótropo. Para obtener estos resultados se consideran propiedades cuasi isótropas, es decir $C_{44} \approx C_{55}$.

Resultados para una grieta ramificada en dominio infinito en función de la relación de longitudes entre la grieta madre y la ramificación. La figura B.1 muestra el buen acuerdo existente con los resultados analíticos obtenidos por Sih en 1965.

También para el caso isótropo, se comparan seguidamente los resultados para dos grietas vecinas con los resultados obtenidos por Pan (1997) mediante la formulación hipersingular del método de los elementos de contorno integrando los núcleos hipersingulares mediante las cuadraturas ponderadas de Gaus publicadas por Tsamaphyros y Dimou (1990). Se aprecia en la tabla de la figura B.2 el buen acuerdo existente entre los dos resultados.

Para dominio cerrado se presentan los resultados para una placa cuadrada, en un caso con tensiones en el contorno y la grieta excéntrica y en el otro caso con la grieta centrada y bordes empotrados, figura B.3. Estos resultados fueron publicados por Ma

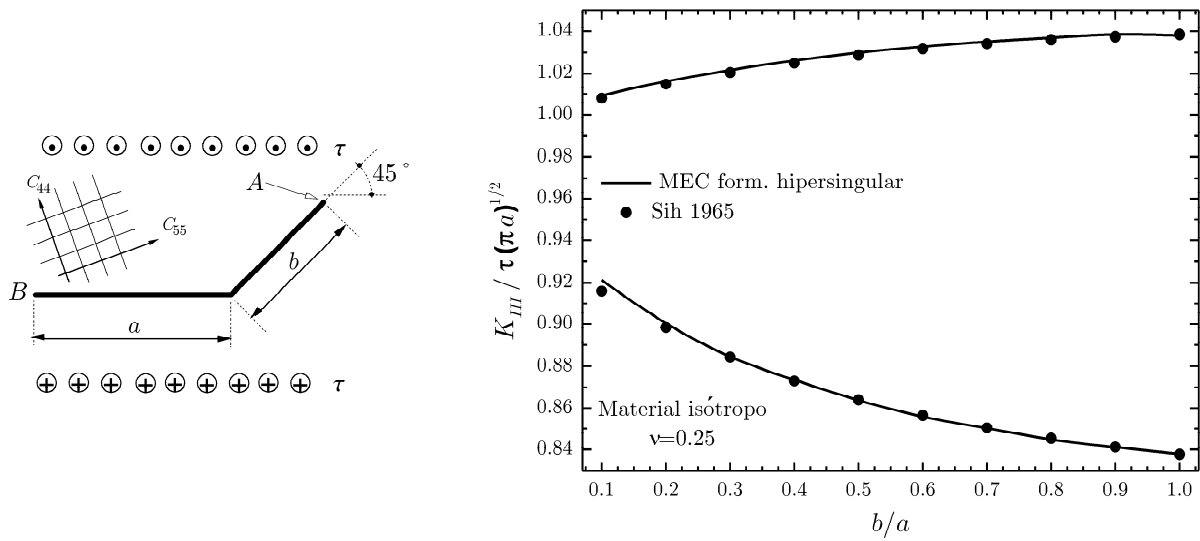


Figura B.1: Grieta ramificada sometida a tensión antiplana, dominio infinito. Esquema y resultados en función de la relación de longitudes.

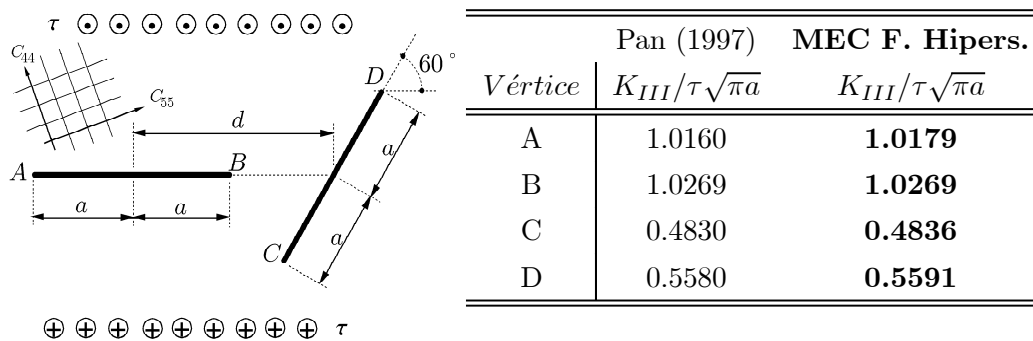


Figura B.2: Grietas cercanas sometidas a tensión antiplana, dominio infinito. Esquema y resultado para $d = 20a/9$.

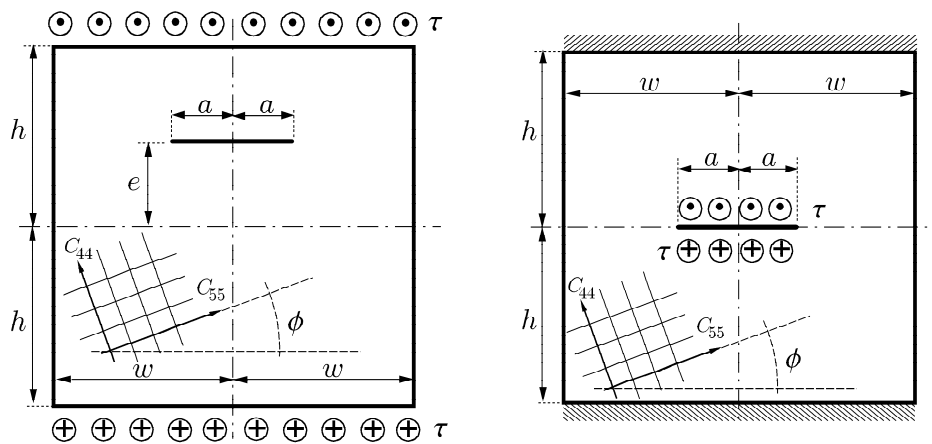


Figura B.3: Placas rectangulares con grietas, sometidas a tensión antiplana. Esquemas para diferentes condiciones de contorno.

(1988 y 1989) y por Ma y Zhang (1991) utilizado un método semianalítico basado en ecuaciones integrales. El material isótropo utilizado se caracteriza por $\nu = 0.25$.

Los resultados muestran un buen acuerdo con los de la referencia como muestra la tabla B.1.

Tabla B.1: Resultados para los problemas antiplanos esquematizados en la figura B.3

caso	e/w	Referencia	MEC form. hipers.
fig. B.3 izda.	0.0	1.130 [1]	1.1311
fig. B.3 izda.	0.5	1.178 [2]	1.1542
fig. B.3 dcha.	0.0	0.923 [3]	0.9232

[1] Ma (1988), [2] Ma y Zhang (1991), [3] Ma (1989)

Para solución de semiespacio se comparan a continuación los resultados de una grieta vertical en semiespacio isótropo ($\nu = 0.25$) cuyos resultados fueron publicados por Pan (1997) obtenidos mediante la formulación hipersingular con cuadraturas específicas para las integrales hipersingulares. También en este caso el acuerdo es muy bueno.

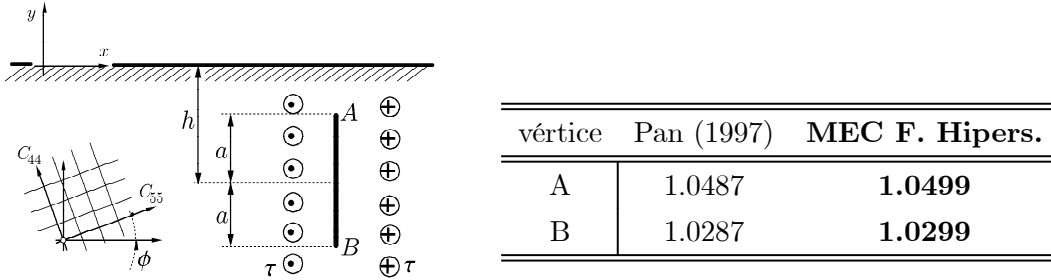


Figura B.4: Grieta vertical e semiespacio isótropo sometida a tensión antiplana. Esquema y resultados para $h=2a$.

A continuación se presentan los resultados para el problema de la figura B.3 utilizando para las propiedades del material las de un grafito epoxy:

$$C_{44} = 3.5 \text{ GPa} \quad ; \quad C_{55} = 7.07 \text{ GPa} \quad ; \quad C_{45} = 0 \quad (\text{B.6})$$

Se consideran distintas orientaciones del material definidas por el ángulo ϕ (figura B.4) y se representa el resultado en función de este ángulo.

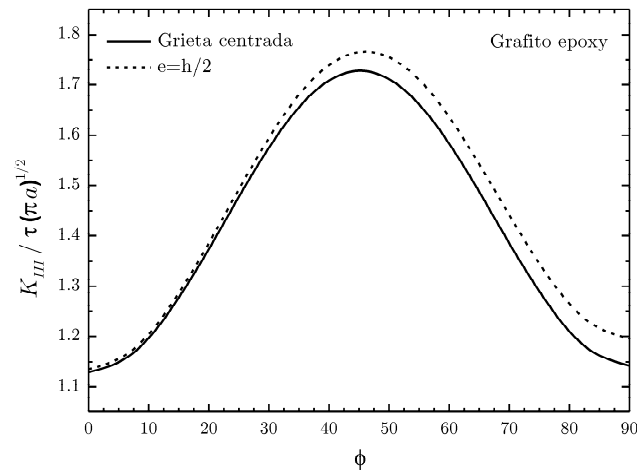


Figura B.5: Placa cuadrada con grieta, carga antiplana. Resultados, para dos posiciones de grieta, en función de la posición de los ejes principales del material.

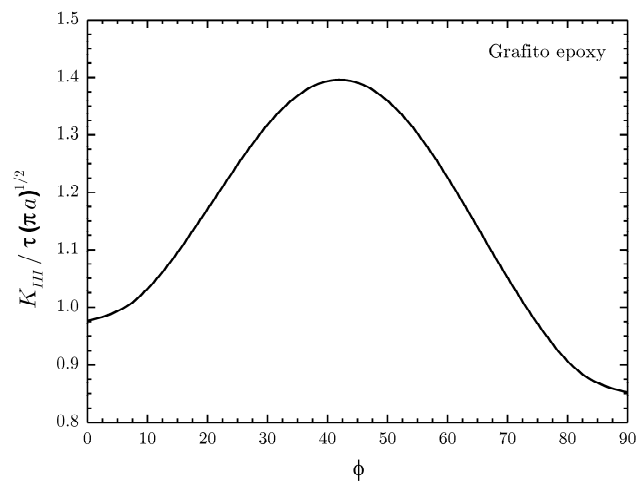


Figura B.6: Placa cuadrada, grieta centralizada, carga antiplana, bordes opuestos empotrados. Resultado en función de la posición de los ejes principales del material.

Apéndice C

Discretizaciones utilizadas

A continuación detallan las mallas con las que han sido obtenidos los resultados que se han mostrado a lo largo de la tesis. Cada caso es referido por el epígrafe en el que se encuentra.

Salvo indicación en sentido contrario a indica semilongitud de grieta.

Epígrafes 5.2.1. - 5.2.2.

Grieta: 6 elementos de longitudes $0.20a - 0.30a - 0.50a - 0.50a - 0.30a - 0.20a$

Epígrafe 5.2.3.

Grieta como 5.2.1.

Contorno externo: 24 elementos iguales.

Epígrafe 5.2.4.

Grieta: 5 elementos de longitudes $0.10a - 0.15a - 0.20a - 0.25a - 0.30a$ siendo a la longitud total de la grieta.

Contorno exterior: 36 elementos iguales.

Epígrafe 5.2.5.

Grieta: 6 elementos de longitudes $0.20a - 0.30a - 0.50a - 0.50a - 0.30a - 0.20a$

Contorno exterior: 24 elementos iguales.

Epígrafe 5.2.6.

Grieta: 5 elementos de longitudes $0.06a - 0.10a - 0.16a - 0.28a - 0.40a$ siendo a la longitud total de la grieta.

Orificio: 26 elementos. 15° /elemento salvo los elementos en contacto en la grieta, 7.5° .

Contornos superior e inferior: 6 elementos iguales.

Contornos laterales: 12 elementos de proporciones $0.215l - 0.215l - 0.215l - 0.16l - 0.115l - 0.08l - 0.08l - 0.115l - 0.16l - 0.215l - 0.215l - 0.215l$ siendo l el ancho de la placa ($= 2w$ en figura 5.2)

Epígrafe 5.2.7.

Se considera r el radio de la grieta y α el simángulo abarcado.

Si $\alpha < 70^\circ$

Grieta: 10 elementos. Los elementos del vértice tienen una longitud $r\alpha/30$. El arco abarcado por cada elemento desde el centro de la grieta es $0.50\alpha - 0.35\alpha - 0.15\alpha$.

Si $\alpha \geq 70^\circ$

Grieta: 12 elementos. Los elementos del vértice tienen una longitud $r\alpha/30$. El arco abarcado por cada elemento desde el centro de la grieta es $0.30\alpha - 0.30\alpha - 0.20\alpha - 0.145\alpha$.

En ambos casos el elemento que no se define es el necesario para acoplar el elemento un cuarto con el arco.

Epígrafe 5.3.1.

Casos de las figuras 5.7 y 5.6:

Grieta: 12 elementos de longitudes $0.05a - 0.08a - 0.13a - 0.21a - 0.26a - 0.27a - 0.27a - 0.26a - 0.21a - 0.13a - 0.08a - 0.05a$.

Caso de la figura 5.8:

Grieta: 5 elementos de longitudes $0.08a - 0.14a - 0.26a - 0.26a - 0.26a$ siendo a la longitud total de la grieta

Epígrafe 5.3.2.

Caso de la figura 5.9:

Grieta como casos de las figuras 5.6 y 5.7.

Caso de la figura 5.11:

Grieta: 6 elementos de longitudes $0.20a - 0.30a - 0.50a - 0.50a - 0.30a - 0.20a$

Epígrafe 5.4.1.

Grieta: 10 elementos de longitudes $0.04a - 0.08a - 0.18a - 0.30a - 0.40a - 0.40a - 0.30a - 0.18a - 0.08a - 0.04a$.

#Epígrafe 5.4.2.

Grieta: 10 elementos con una relación de longitudes entre elementos contiguos (l_i/l_{i+1}) constante. La longitud del elemento central es el doble que la del vértice de la grieta: $l_{central} = 2l_{vértice}$

Contorno exterior: 24 elementos iguales.

Epígrafe 5.4.3.

Grieta madre: 12 elementos, $l_{central} = 2l_{vértice}$ con $l_i/l_{i+i} = cte$.

Ramificación $b = a/2$ siendo b la longitud total de la ramificación y a la semilongitud de la grieta madre: 6 elementos, $l_{central} = 2l_{vértice}$ con $l_i/l_{i+i} = cte$.

Ramificación $b = a/10$: dos elementos iguales.

Epígrafe 5.4.4.

Como 5.2.7.

Epígrafes 5.5.3., 5.5.4. y 5.5.5.

Grieta: 10 elementos con $l_i/l_{i+i} = cte$ y $l_{central} = 2l_{vértice}$.

Epígrafe 5.5.6.

Como 5.4.3.

Epígrafe 5.5.7.

Como 5.2.7.

Epígrafes 5.6.1., 5.6.2. y 5.6.3.

Como 5.5.3

Epígrafe 5.6.4.

Como 5.4.3.

Epígrafe 5.6.5.

Como 5.2.7

Bibliografía

- [1] Azhdari A., Obata M., Nemat-Nasser S., *Alternative solution methods for crack problems in plane anisotropic elasticity, with examples*, International journal of solids and structures, 2000; **37**: 6433-6478.
- [2] Ahmad S., Leyte F., Rajapakse R.K.N.D. , *BEM analysis of two-dimensional elastodynamic problems of anisotropic solids*, ASCE Journal of engineering mechanics, 2001; **127**: 149-156.
- [3] Albuquerque E.L., Sollero P., Aliabadi M.H., *The boundary element method applied to time dependent problems in anisotropic materials*, International journal of solids and structures, 2002; **39**: 1405-1422.
- [4] Albuquerque E.L., Sollero P., Aliabadi M.H., *Dual boundary element method for anisotropic dynamic fracture mechanics*, International journal for numerical methods in engineering, 2004; **59**: 1187-1205.
- [5] Albuquerque E.L., Sollero P., Fedelinski P., *Free vibration analysis of anisotropic material structures using the boundary element method*, Engineering analysis with boundary element, 2003; **27**: 977-985.
- [6] Albuquerque E.L., Sollero P., Fedelinski P., *Dual reciprocity boundary element method in Laplace domain applied to anisotropic dynamic problems*, Computers and structures, 2003; **81**: 1703-1713.
- [7] Aliabadi M.H., *Boundary element formulation in fracture mechanics*, Applied mechanics reviews., 1997; **50**, n° **2**: 83-96.
- [8] Ang W.T., Park Y.S., *Hypersingular integral equations for arbitrarily located planar cracks in an anisotropic elastic bimaterial*, Engineering analysis with boundary elements, 1997; **20**: 135-143.
- [9] Ariza M.P., Domínguez J., *Boundary element formulation for 3-D transversely isotropic cracked bodies*, International journal for numerical methods in engineering, 2004; **60**.

- [10] Ariza M.P., Domínguez J., *BE analysis of 3-D cracks in transversely isotropic solids*, Computational methods in applied mechanics and engineering, 2004; **193**: 765-779.
- [11] Blandford G.E., Ingraffea A.R., Liggett J.A., *Two-dimensional stress intensity factors computations using the boundary element method*, International journal of numerical methods in engineering, 1981, 17: 387-404.
- [12] Barnett D.M., Lothe J., *Synthesis of the sextic and the integral formalism for dislocations, Green functions, and surface waves in anisotropic elastic solids*, Physica norvegica, 1973; **1**: 13-19.
- [13] Barnett D.M., Lothe J., *Dislocations and line charges in anisotropic piezoelectric insulators*, Physica status solidi, 1975; **B 76**: 105-111.
- [14] Beskos D.E., *Boundary element methods in dynamic analysis*, ASME Applied mechanics reviews, 1987; **40**: 1-23.
- [15] Beskos D.E., *Boundary element methods in dynamic analysis: Part II (1986-1996)*, ASME Applied mechanics reviews, 1997; **50**: 149-197.
- [16] Bowie O.L., Freeze C.E., *Central crack in plane orthotropic rectangular sheet*, International journal of fracture mechanics, 1972; **8**: 49-58
- [17] Brebbia C.A., Domínguez J., *Boundary elements. An introductory course*, Segunda edición, Coputational mechanics publications, Southampton y Mc.Graw-Hill, New York, 1992
- [18] Chan K.S., Cruse T.A., *Stress intensity factors for anisotropic compact-tension specimens with inclined cracks*. Engineering fracture mechanics, 1986; **23**: 863-874.
- [19] Chen J.T., Hong H.-K., *Review of dual boundary element methods with emphasis on hypersingular integrals and divergent series*, Applied mechanics reviews, 1999; **52**:17-33.
- [20] Chu S.J., Hong C.S., *Aplication of the J_K integral to mixed mode crack problems for anisotropic composites laminates*, Enginnering fracture mechanics, 1990: **35**, 1093-1103.
- [21] Cruse T.A., *Boundary element analysis in computational fracture mechanics*, Kluwer academic publisher, Dordrecht, The Netherlands, 1988.
- [22] Cruse T.A., Aithal R., *Nonsingular boundary integral equation implementation*, International journal for numerical methods in engineering; 1993: **36**: 237-254.

- [23] Cruse T.A., Swedlow J.L., *Interactive program for analysis and design problems in advanced composites technology*. Carnegie-Mellon University (USA), Report AFML-TR-71-268, 1971.
- [24] Daros C.-H., Antes H. *Dynamic fundamental solutions for transversely isotropic piezoelectric materials*. International journal of solids and structures, 2000, **37**: 1639-1658.
- [25] Davì G., Milazzo A., *Multidomain boundary integral formulation for piezoelectric materials fracture mechanics*. International journal of solids and structures, 2001; **38**: 7065-7078.
- [26] Deans S.R., *The Radon transform and some of its applications*, 1983, Wiley-Interscience Publication.
- [27] Deeg W.F., *The analysis of dislocation, crack and inclusion problems in piezoelectric solids*, Ph. D. thesis, Standford University, 1980.
- [28] Denda M., Lua J., *Development of the boundary element method for 2D piezoelectricity*, Composites: Part B, 1999; **30**: 699-707.
- [29] Denda M., Araki Y., *2-D general anisotropic and piezoelectric time-harmonic BEM for eigenvalue analysis*, Actas del 15th ASCE Engeneering mechanics conference, Columbia Univerity, NY, 2002.
- [30] Denda M., Wang C.Y., Yong Y.K.; *2-D time-harmonic BEM for solids of general anisotropy with application to eigenvalue problems*, Journal of sound and vibration; 2003; **261**: 247-276.
- [31] Denda M., Araki Y., Yong Y.K., *Time-harmonic BEM for 2-D piezoelectricity applied to eigenvalue problems*, International journal of solids and structures, 2004; **41**: 7241-7265.
- [32] Dirgantara T., Aliabadi M.H., *A new boundary element formulation for shear deformable shells analysis*, International journal for numerical methods in engineering, 1999; **45**: 1257-1275.
- [33] Dirgantara T., Aliabadi M.H., *Stress intensity factors for cracks in thin plates*, Engineering fracture mechanics, 2002; **69**: 1465-1468.
- [34] Domínguez, J., *Boundary elements in dynamics*, Computational mechanics publications, Southampton y Elsevier Applied Science, London, 1993.

- [35] Doblaré M., Espiga, F. Gracia L., Alcantud M., *Study of crack propagation in orthotropic materials by using the boundary element method*, Engineering fracture mechanics, 1990; **37 n° 5**: 953-967.
- [36] Dravinski M., Niu Y., *Three-dimensional time-harmonic Green's functions for a triclinic full-space using a symbolic computation system*, International journal for numerical methods in engineering, 2002; **53**: 455-472.
- [37] Eringen A.C., Suhubi E.S., *Elastodynamics*, Vol. 2: Linear Theory, Academic Press, New York, 1975.
- [38] Erdogan F., *Fracture mechanics*, International journal of solids and structures, 2000; **37**: 171-183.
- [39] Eshelby J.D., Read W.T., Shockley W., *Anisotropic elasticity with applications to dislocation theory*, Acta metallurgica, 1953; **1**: 251-259.
- [40] Farris T.N., Liu M., *Boundary element crack closure calculation of three-dimensional stress intensity factors*, International journal of fracture, 1993; **60**: 33-47.
- [41] Gallego R., Domínguez J., *Dynamic crack propagation analysis by moving singular boundary elements*, Journal of applied mechanics, 1992; **59**: 158-162.
- [42] Gallego R., Domínguez J., *Hypersingular BEM for transient elastodynamics*, International journal for numerical methods in engineering, 1996; **39**: 1681-1705.
- [43] Gallego R., Domínguez J., *Solving transient dynamic crack problems by the hypersingular boundary element method*, Fatigue and fracture of engineering materials and structures, 1997; **20 n° 5**: 799-812.
- [44] Gandhi K.R., *Analysis of an inclined crack in plane orthotropic rectangular sheet*, Journal strain analysis, 1972; **7**: 157-162.
- [45] García F., Sáez A., Domínguez J., *Traction boundary elements for cracks in anisotropic solids*, Engineering analysis with boundary elements, 2004; **28 n° 6**: 667-676.
- [46] García-Sánchez F., Sáez A., Domínguez J., *Anisotropic and piezoelectric materials fracture analysis by BEM*, Computers and structures, próxima publicación.
- [47] Gao C.-F., Fan W.-X., *Exact solutions for the plane problem in piezoelectric materials with an elliptic or a crack*, International journal of solids and structures, 1999; **36**: 2527-2540.
- [48] Gerasoulis A., Computational mathematics applied, 1990; **8**: 15.

- [49] Graffi D. *Sul teorema di reciprocità nella dinamica dei corpi elastici*, Mem. Accad. Sci., Bologna, 1946, Ser. 10, Vol. 4, 103-111.
- [50] Guerney I.D.C., , Ph. D. thesis, University of Cambridge, 1957.
- [51] Hao T.-H., Shen Z.-Y., *A new electric boundary condition of electric fracture mechanics and its applications*, Engineering fracture mechanics, 1994; **47**: 793-802
- [52] Higashida Y., Kamada K. *Stress fields around a crack lying parallel to a free surface*, International journal of fracture, 1982; **19**: 39-52.
- [53] Hill L.R., Farris T.N., *Three-dimensional piezoelectric boundary element method*. AIAA journal, 1998; **36**:102-108.
- [54] Hirose S., Zhang Ch., Wang C.-Y., *A comparative study on two time domain BEM/BIEM for transient dynamic crack analysis of anisotropic solids*, en actas BeTeQ 3rd international conference, Z. Yao y M.H. Aliabadi Eds., Tsinghua University Press & Springer-Verlag, Beijing, 2002
- [55] Hong H., Chen J., *Derivations of integral equations of elasticity*, Journal of engineering mechanics, ASCE, 1988; **114**: 1028-1044.
- [56] Hucker S.A., Farris T.N., *Modified crack closure method using boundary elements*, Engineering fracture mechanics, 1993; **46**: 763-772.
- [57] Ingraffea A.R., Blandford G., Liggett J.A., *Automatic modeling of mixed-mode fatigue and quasi-static crack propagation using the boundary element method*, 14th National symposium on fracture, ASTM STP 791, 1987: 1407-1426.
- [58] Ioakimidis N.I., *A new singular integral equation for the classical crack problem in plane and antiplane elasticity*, International journal of fracture, 1983; **21**: 115-122.
- [59] Irwin G.R., *Analysis of stress and strains near the end of a crack transversing a plate*, Trans. ASME, Ser. E, Journal of applied mechanics, 1957; **24**, n° 3: 361-364.
- [60] Irwin G.R., *Fracture I, Handbuch der physik VI*, Ed. S. Flugge, Springer, Berlin 558-590.
- [61] Isida M., *Stress intensity factors for the tension of a eccentrically cracked strip*, Trans. ASME, Ser. E, Journal of applied mechanics, 1966; **33**: 674-675.
- [62] Isida M., *Tension of a half plane containig array cracks, branched cracks and cracks emanating form sharp notches*, Trans. japan society mechanical engineers, 1979; **45**, n° **392**: 306-317.

- [63] Ishikawa H., *Application of the boundary element method to anisotropic crack problems*, Advances in boundary element methods for fracture mechanics, Eds. M.H. Aliabadi y C.A. Brebbia, Computational mechanics publications, Southampton and Elsevier Applied Science, London, 1990; 269-292.
- [64] Itou S., *Dynamic stress intensity factors of two collinear cracks in orthotropic medium subjected to time-harmonic disturbance*, Theoretical and applied fracture mechanics, 1996; **25**: 155-166
- [65] Itou S., Haliding H., *Dynamic stress intensity factors around two parallel cracks in an infinite orthotropic plane subjected to incident harmonic stress waves*, International journal of solids and structures, 1997; **34**, n° **9**: 1145-1165
- [66] Kobayashi S., Nishimura N., Kishima T., *A BIE analysis of wave propagation in anisotropic media*, en Actas de Boundary Elements VIII, Springer, Berlin, 1986, 425-434.
- [67] Kögl M., Gaul L., *A boundary element method for transient piezoelectric analysis*. Engineering analysis with boundary elements, 2000; **24**: 591-598.
- [68] Kögl M., Gaul L., *A 3-D boundary element method for dynamic analysis of anisotropic elastic solids*, Computational modeling in engineering and science; 2000; **1**: 27-43.
- [69] Korsunsky A.M., *Gauss-Chebyshev quadrature formulae for strongly singular integrals*, Quarterly of applied mathematics, 1998; **LVI**: 461-472.
- [70] Krishnamurthy T., Ramamurthy T.S., Vijayakumar K., Duttaguru B., *Modified crack closure integral method for higher order finite elements*, Proceedings of the international conference in finite elements in computational mechanics, Bombay, 1985, 891-900.
- [71] Kuo C.-M., Barnett D.M., *Stress singularities of interfacial cracks in bonded piezoelectric half-spaces*, Proceedings of the workshop on anisotropic elasticity and its applications, Eds. J.J. Wu, T.C.T. Ting D.M. Barnett, SIAM, Philadelphia, 1990, 33-50.
- [72] Kutt H.R., *Quadrature formulae for finite-part integrals*. Special report WISK 178. National research institute for mathematical sciences, Pretoria, South Africa; 1975.
- [73] Lachat J.C., Watson J.O., *Effective numerical treatment of boundary integral equations*, International journal for numerical methods in engineering, 1976; **10**: 991-1005

- [74] Ladopoulos E.G., *On the numerical evaluation of the general type of finite-part singular integrals and integral equations used in fracture mechanics*, Engineering fracture mechanics, 1988; **31**, 315-337.
- [75] Lekhnitskii S.G., *Theory of elasticity of an anisotropic elastic body*, Holden-Day, San Francisco, 1963.
- [76] Liu Y., Fan H., *On the conventional boundary integral formulation for piezoelectric solids with defects or of thin shapes*. Engineering analysis with boundary elements 2001; **25**: 77-91.
- [77] Love A.E.H., *A treatise on the mathematical theory of elasticity*, Dover Publications, New York, 1944.
- [78] Lubich C., *Convolution quadrature and discretized operational calculus. I*, Numerische mathematik, 1988; **52**: 129-145.
- [79] Ludwig D., *The Radon transform on euclidean space*, Communications on pure and applied mathematics, 1966; **19**: 49-81.
- [80] Maiti S.K., *Finite element computation of the strain energy release rate for a kinking of a crack*, International journal of fracture, 1990; **43**: 161-174.
- [81] Martínez J., Domínguez J., *On the use of quarter-point boundary elements for stresses intensity factor computations*, International journal for numerical methods in engineering, 1984; **20**: 1941-1950.
- [82] Maksimenko V.N., Podruzhin E.G., *Fundamental solutions in problems of bending of anisotropic plates*, Journal of applied mechanics and technical physics, 2003; **44**, n° 4: 564-570.
- [83] Mukhopadhyay N.K., Maiti S.K., Kadodkar A., *A review of SIF evaluation and modelling of singularities in BEM*, Computational mechanics, 2000; **25**: 358-375.
- [84] Mukhopadhyay N.K., Maiti S.K., Kadodkar A., *Modified crack closure integral based computation of SIFs for 2-D thermoelastic problems through BEM*, Nuclear engineering desing 1999; **187**: 277-290.
- [85] Muskhelishvili N.I., *Some basic problems of the mathematical theory of elasticity*. Leiden: Noordhoff; 1953: 542-545.
- [86] Narita F., Shindo Y., *Diffraction of antiplane shear waves by a infinite crack in an orthotropic piezoelectric ceramic strip*, Theoretical and applied mechanics, 1997; **46**: 139-149.

- [87] Narita F., Shindo Y., *Scattering of an antiplane shear wave by a finite crack in piezoelectric laminate*, Acta mechanica, 1999; **134**: 27-43.
- [88] Newman J.C. (Jr.), *An improved method of collocation for stress analysis of cracked plates with various shaped boundaries*, NASA report TN D-6376, 1971.
- [89] Niu Y., Dravinski M., *Three-dimensional BEM for scattering of elastic waves in general anisotropic media*, International journal for numerical methods in engineering, 2003; **58**: 979-998.
- [90] Ou Z.C., Chen Y.H., *Discussion of the crack face electric boundary condition in piezoelectric fracture mechanics*, Journal of fracture, 2003; **123**, L151-L155
- [91] Pak Y.E., *Crack extension force in a piezoelectric material*, Journal of applied mechanics, 1990; **57**: 647-653.
- [92] Pak Y.E., *Force on a piezoelectric screw dislocation*, Journal of applied mechanics, 1990; **57**: 863-869.
- [93] Pak Y.E., *Linear electro-elastic fracture of piezoelectric materials*, International journal of fracture, 1992; **54**: 79-100.
- [94] Pan Y.C., Chou T.W., *Point force solution for an infinite transversely isotropic solid*, ASME Journal of applied mechanics, 1976; **43**: 608-612.
- [95] Pan E., *A general boundary element analysis of 2-D linear elastic fracture mechanics*, International journal of fracture, 1997; **88**: 41-59.
- [96] Pan E., *A BEM analysis of fracture mechanics in 2D anisotropic piezoelectric solids*, Engineering analysis with boundary elements, 1999; **23**: 67-76.
- [97] Pan E., *Boundary element analysis of fracture mechanics in anisotropic bimetals*. Engineering analysis with boundary elements 1999; **23**: 683-691.
- [98] Pan E., Amadei B., *Fracture mechanics analysis of cracked 2-D anisotropic media with a new formulation of the boundary element method*, International journal of fracture, 1996; **77**: 161-174.
- [99] Pan E., Amadei B., *Boundary element analysis of fracture mechanics in anisotropic bimaterials*, Engineering analysis with boundary elements, 1999; **23**, 683-691.
- [100] Pan E., Chen C.-S., Amadei B., *A BEM formulation for anisotropic half-plane problems*, Engineering analysis with boundary elements, 1997, **20**: 185-195.

- [101] Pan E., Yuan F.G., *Boundary element analysis of three-dimensional cracks in anisotropic solids*, International journal for numerical methods in engineering, 2000; **48**: 211-237.
- [102] Park S.B., Sun C.T., *Fracture criteria for piezoelectric ceramics*. Journal of the american ceramic society, 1995; **78**:1475-1480 (correction(1996)).
- [103] Parks D.M., *A stiffness derivative finite element technique for determination of crack tip stress intensity factors*, International journal of fracture, 1974; **10**: 487-502.
- [104] Parton V.Z., *Fracture mechanics of piezoelectric material*, Acta astronautica, 1976; **3**: 671-683.
- [105] Parton V.Z., Kudryatsev B.A., *Electromagnetoelasticity*, Gordon and Breach science publisher, New York, 1988.
- [106] Portela A., Aliabadi H., Rooke D.P., *The dual boundary element method: effective implementation for crack problems*, International journal for numerical methods in engineering, 1992, **33**: 1269-1287.
- [107] Portela A., Aliabadi H., Rooke D.P., *Dual boundary element incremental analysis of crack propagation*, International journal of computers and structures, 1993; **46**: 237-247
- [108] Prasad N.N.V., Aliabadi M.H., Rooke D.P., *The dual boundary element method for thermoelastic crack problems*, International journal of fracture, 1994; **66**: 255-272.
- [109] Rajapakse R.K.N.D., Xu X.-L., *Boundary element modeling of cracks in piezoelectric solids*, Engineering analysis with boundary elements, 2001; **25**: 771-781.
- [110] Rice J.R., *A path independent integral and the approximate analysis of strain concentration by notches and cracks*, Journal of applied mechanics, Trans. ASME, 1968; **33**: 379-386.
- [111] Rizzo F.J., Shippy D.J., *A method for stress determination in plane anisotropic elastic bodies*. Journal of composite materials, 1970; **4**: 36-61.
- [112] Rybicki E.F., Kanninen M.F., *A finite element calculation of stress intensity factors by a modified crack closure integral*, Engineering fracture mechanics, 1977; **9**: 931-938.
- [113] Sáez A., *Análisis numérico de problemas elastodinámicos en materiales transversalmente isótropos*, Tesis doctoral, Universidad de Sevilla, 1997.

- [114] Sáez A., Ariza M.P., Domínguez J., *Three dimensional fracture analysis in transversely isotropic solids*, Engineering analysis with boundary elements 1997; **20**: 287-298.
- [115] Sáez A., Domínguez J., *BEM analysis of wave scattering in transversely isotropic solids*, International journal for numerical methods in engineering, 1999; **44**: 1283-1300.
- [116] Sáez A., Domínguez J., *Dynamic crack problems in three-dimensional transversely isotropic solids*, Engineering analysis with boundary elements, 2001; **25**: 203-210.
- [117] Sáez A., Gallego R., Domínguez J., *Hypersingular quarter-point boundary elements for crack problems*, International journal of numerical methods in engineering, 1995; **38**: 1681-1701.
- [118] Shindo Y., Minamida K., Narita F., *Antiplane shear wave scattering from two curved interface cracks between a piezoelectric fiber and an elastic matrix*, Smart materials and structures, 2002; **11**: 534-540.
- [119] Shindo Y., Narita F., *Diffraction of an antiplane shear wave by a finite crack in an orthotropic piezoelectric ceramic*, ASCE en Actas de 10th conference, Engineering mechanics, 1995; **1**: 577-580.
- [120] Shindo Y., Narita F., Ozawa E., *Impact response of a finite crack in an orthotropic piezoelectric ceramic*, Acta mechanica, 1999; **137**: 99-107.
- [121] Shindo Y., Ozawa E., *Dynamic analysis of a cracked piezoelectric material*, Mechanical modelling of new materials, Ed. R.K.T. Hsieh, Elsevier Science Publishers B.V., 1990: 297-304.
- [122] Sih G.C., Loeber J.F., *Wave propagation in an elastic solid with a line of discontinuity or finite crack*, Quarterly of applied mathematics, 1969, **27**: 193-213.
- [123] Sih G.C., *Stress distribution near internal crack tips for longitudinal shear problems*, Transactions ASME, Ser. E, Journal of applied mechanics, 1965; **32**:51-58.
- [124] Sih G.C., Paris P.C., Irwin G.R., *On cracks in rectilinearly anisotropic bodies*, International journal of fracture, 1965; **1**: 189-203.
- [125] Sih G.C., Liebowitz H., *Mathematical theories of brittle fracture*, Fracture - An advanced treatise Vol. 2, Ed. H. Liebowitz, Academic Press, New York, 1968.
- [126] Singh R., Carter B.J., Wawrzynek P.A., Ingraffea A.R., *Universal crack closure integral for SIF estimation*, Engineering fracture mechanics, 1998, **60**: 133-146.

- [127] Sládek V., Sládek J., Tanaka M., *Regularization of hypersingular and nearly singular integrals in the potential theory and elasticity*, International journal of numerical methods in engineering, 1993; **36**: 1609-1628.
- [128] Sládek V., Sládek J., *Regularization of hypersingular integrals in BEM formulations using various kinds of continuous elements*. Engineering analysis with boundary elements, 1996; **17**: 5-18.
- [129] Snyder M.D., Cruse T.A., *Boundary-integral analysis of anisotropic cracked plates*, International journal of fracture mechanics, 1975; **11**: 315-328.
- [130] Sollero P., Aliabadi M.H., *Fracture mechanics analysis of anisotropic composite laminates by the boundary element method*, International journal of fracture, 1993; **64**: 269-284
- [131] Sollero P., *Fracture mechanics analysis of anisotropic laminates by the boundary element method*, Ph. D. Thesis: Wessex Institute of Technology, 1994.
- [132] Sollero P., Aliabadi M.H., Rooke D.P., *Anisotropic analysis of cracks emanating from circular holes in composite laminates using the boundary element method*, Engineering fracture mechanics, 1994; **49**: 213-224.
- [133] Sollero P., Aliabadi M.H., *Anisotropic analysis of cracks in composite laminates using the dual boundary element method*, Composite structures, 1995; **31**: 229-233.
- [134] Sosa H., *Plane problems in piezoelectric media with defects*, International journal of solids and structures, 1991; **28**: 491-505.
- [135] Sosa H., *On the fracture mechanics of piezoelectric solids*, International journal of solids and structures, 1992; **21**: 2613-2622.
- [136] Stroh A.N., *Dislocation and cracks in anisotropic elasticity*, Philosophical magazine, 1958; **3**: 625-646.
- [137] Stroh A.N., *Steady state problems in anisotropic elasticity*, Journal of mathematics and physics, 1962; **41**: 77-103.
- [138] Sung J.C., Liou J.Y., *Analysis of a crack embedded in a linear elastic half-plane solid*, Journal of applied mechanics, 1995; **62**: 78-86.
- [139] Suo Z., *Singularities, interfaces and cracks in dissimilar anisotropic media*, Proceedings of the royal society of London, 1990; **A 427**: 331-358
- [140] Suo Z., Kuo C.-M., Barnett D.M., Willis J.R., *Fracture mechanics for piezoelectric ceramics*, Journal of mechanics and physics of solids, 1992; **4**: 739-765.

- [141] Tan C.L., Gao Y.L., *Boundary integral equation fracture mechanics analysis of plane orthotropic bodies*, International journal of fracture, 1992; **53**: 343-365.
- [142] Tan C.L., Gao Y.L., *Boundary elements analysis of plane anisotropic bodies with stress concentrations and cracks*, Composite structures, 1992; **20**: 17-28.
- [143] Tanaka M., Sládek V., Sládek J., *Regularization techniques applied to boundary element methods*, ASME Applied mechanics reviews, 1994; **47**: 457-499.
- [144] Thau S.A., Lu T.H., *Transient stress intensity factor for a finite crack in a elastic solid caused by a dilatational wave*, International journal of solids and structures, 1971; **5**: 731-750.
- [145] Ting T.C.T., *Anisotropic elasticity*, Oxford university press, New York, 1996.
- [146] Ting T.C.T., *Explicit solutions and invariance of the singularities at an interface crack in anisotropic composites*, International journal of solids and structures, 1986; **22**: 965-983.
- [147] Ting T.C.T., *Interface cracks in anisotropic bimaterials*, Journal of mechanics and physics of solids, 1990; **38**: 505-513
- [148] Tomlin G.R., Butterfield R., *Elastic analysis of zoned orthotropic continua*. En proceedings of ASCE, EM3 1974; 511-529.
- [149] Tonon F., Pan E., Amadei B., *Green's functions and boundary element method formulation for 3D anisotropic media*, Computers and structures, 2002; **39**: 2235-2255.
- [150] Tsamasphyros G., Dimou G., *Gauss quadrature rules for finite part integrals*, International journal of numerical methods in engineering, 1990; **30**, 13-26.
- [151] Voigt W., *Lehrbuch der kristallphysik*, Leipzig, 1910.
- [152] Wang C.-Y., *2-D elastostatic Green's functions for general anisotropic solids and generalization of Stroh's formalism*, International journal of solids and structures, 1994; **31**: 2591-2597.
- [153] Wang C.-Y., Achenbach J.D., *A new look at 2-D time-domain elastodynamic Green's functions for general anisotropic solids*, Wave motion, 1992; **16**, 389-405.
- [154] Wang C.-Y., Achenbach J.D., *A new method to obtain 3-D Green's functions for general anisotropic solids*, Wave motion, 1993; **18**: 273-289.
- [155] Wang C.-Y., Achenbach J.D., *Elastodynamic fundamental solutions for anisotropic solids*, Geophysics journal international, 1994; **118**: 384-392.

- [156] Wang C.-Y., Achenbach J.D., *Three-dimensional time-harmonic elastodynamic Green's functions for anisotropic solids*, Proceedings of the royal society of London, 1995; **A449**: 441-458.
- [157] Wang C.-Y., Achenbach J.D., Hirose S., *Two-dimensional time domain BEM for scattering of elastic waves in anisotropic solids*, International journal of solids and structures, 1996; **33** n° **26**: 3843-3864.
- [158] Watson J.O., *Hermitian cubic and singular elements for plane strain*, en Banerjee and Watson (eds.) Developments in boundary element methods 4, Elsevier applied science publishers. Barking, U.K., 1986.
- [159] Wheeler L.T., Sternberg E., *Some theorems in classical elastodynamics*, Arch. Rat. Mech. Anal., 1968, **31**: 51-90.
- [160] Williams M.L., *Stress singularities resulting from various boundary conditions in angular corners of plates in extension*, Journal of applied mechanics, 1952; **19**: 526-528.
- [161] Williams M.L., *The stresses around a fault or crack in dissimilar media*, Bulletin of the seismological society of America, 1959; **49**: 199-204.
- [162] Wu C.C., See K.Y., Huang Y.Q., *Numerical solution on fracture of piezoelectric materials by hybrid element*. International journal of solids and structures 2001; **38**: 4315-4329.
- [163] Xu X.-L., Rajapakse R.K.N.D., *Analytical solution for an arbitrarily oriented void/crack and fracture of piezoceramics*, Acta materialia, 1997; **47**: 1735-1747.
- [164] Xu X.-L., Rajapakse R.K.N.D., *A theoretical study of branched cracks in piezoelectrics*, Acta materialia, 2000; **48**: 1865-1882.
- [165] Xu X.-L., Rajapakse R.K.N.D., *On a plane crack in piezoelectric solids*, International journal of solids and structures, 2001; **38**: 7643-7658.
- [166] Zhang Ch., *Transient elastodynamic antiplane crack analysis of anisotropic solids*, International journal of solids and structures, 2000; **37**: 6107-6130.
- [167] Zhang Ch., *A 2-D time-domain BIEM for dynamic analysis of cracked orthotropic solids*, Computational modeling in engineering and science, 2002; **3** 381-398.
- [168] Zhang Ch., Savaidis A., *3-D transient dynamic crack analysis by a novel time-domain BEM*, Computational modeling in engineering and science, 2003; **4** n°**5**: 603-618.

- [169] Zhang Ch., Savaidis A., Savaidis G., *Dynamic crack analysis of anisotropic solids under impact loading*, Transactions, SMiRT 16, Washington DC, August 2001. Paper #1981.
- [170] Zhao M.H., Shen Y.P., Liu Y.J., Liu G.N., *Isolated crack in three-dimensional piezoelectric solid: Part I- Solution by Hankel transform*. Theoretical and applied fracture mechanics, 1997; **26**: 129-139.
- [171] Zhao M.H., Shen Y.P., Liu Y.J., Liu G.N., *Isolated crack in three-dimensional piezoelectric solid: Part II: Stress intensity factors for circular crack*. Theoretical and applied fracture mechanics, 1997; **26**: 141-149.