

UNIVERSIDAD DE SEVILLA

Departamento de Matemática Aplicada I

Un estudio de la Conectividad y Planaridad de Grafos y 2-Complejos infinitos en el marco de la Topología General

Memoria presentada por
María José Chávez de Diego
para optar al grado de
Doctor en Matemáticas
por la Universidad de Sevilla

Director:

Tutor:

Dr. Antonio Quintero Toscano
Profesor Titular de Universidad
Depto. de Geometría y Topología
Universidad de Sevilla

Dr. Pedro Real Jurado
Profesor Titular de Universidad
Depto. de Matemática Aplicada I
Universidad de Sevilla

Sevilla, diciembre de 1998

A mis padres, in memoriam

Puede que un día, acaso me equivoque,
llegue a pensar en los días vividos con empeño
de ser lo que era, lo que éramos, acaso.

Manuel Villar.

Agradecimientos

He necesitado la ayuda de muchas personas para poder realizar el trabajo que aquí se presenta. Retrocediendo en el tiempo y en primer lugar, debo citar al Profesor Antonio Quintero al que tuve la suerte de conocer cuando comencé a estudiar en la Facultad de Matemáticas. Nunca agradeceré suficientemente su apoyo humano y científico a lo largo de los años, sin los que esta memoria no se habría realizado. Gran parte de responsabilidad en la conclusión de este trabajo la tienen los Profs. Alberto Márquez y Rafael Ayala en quienes siempre he encontrado colaboración y ayuda. También quiero dar las gracias al Profesor David Barnette, de la Universidad de California, por sus útiles sugerencias en la sección sobre descomposición de grafos infinitos 3-conexos.

No sólo han sido ellos los que me han aportado desinteresadamente su tiempo y atención. Quiero expresar mi gratitud a los Profs. Trinidad Villar y Luis Fernández del Departamento de Geometría y Topología de esta Universidad y a la generalidad de mis compañeros del Departamento de Matemática Aplicada I que me ha prestado su colaboración.

En último lugar, que no en importancia, no puedo dejar de mencionar a mi familia por su estímulo durante la realización de este trabajo.

Sevilla, Otoño de 1998
María José Chávez de Diego

Introducción

El lenguaje de la topología general permite formular precisa y concisamente numerosos problemas bajo un punto de vista común. Sin embargo el nivel de abstracción y generalidad inherente al concepto de espacio topológico hace que desde el punto de vista de las aplicaciones, se consideren objetos más sencillos. Esto ya era bien conocido por los primeros topólogos quienes restringieron sus estudios a espacios con una estructura más manejable como son los complejos simpliciales, dando lugar a la rama de la topología conocida como topología combinatorial. Dentro de la topología combinatorial los objetos más elementales son los grafos y los 2-complejos en los que centramos nuestro interés en esta memoria.

Por otra parte la mayor flexibilidad de la topología general también tiene ventajas. Así, cuando en teoría de grafos, o más generalmente en la topología combinatorial, se estudian los grafos infinitos localmente finitos no es posible aplicar directamente resultados ya conocidos de grafos finitos. Una de las razones principales de esta dificultad es que el proceso de “compactificación” tan habitual en la topología general no puede llevarse a cabo dentro de los límites de la teoría de grafos ni siquiera de la topología combinatorial. Por ejemplo, la compactificación por un punto del grafo definido por las aristas del reticulado plano (ver la figura 3.4) no produce un grafo. La dificultad anterior hace que muchos resultados de teoría de grafos infinitos tengan que ser demostradas sin poder sacar toda la ventaja de poseer ya un resultado análogo para grafos finitos.

Esta memoria tiene como principal objetivo el estudio para los grafos infinitos y 2-complejos de dos importantes nociones topológicas: la conectividad y la planaridad. Este estudio se llevará a cabo dentro del ámbito más flexible de la topología general.

Los principales resultados se obtendrán pues como consecuencia de resultados más generales de la categoría topológica. Para ello se estudiará

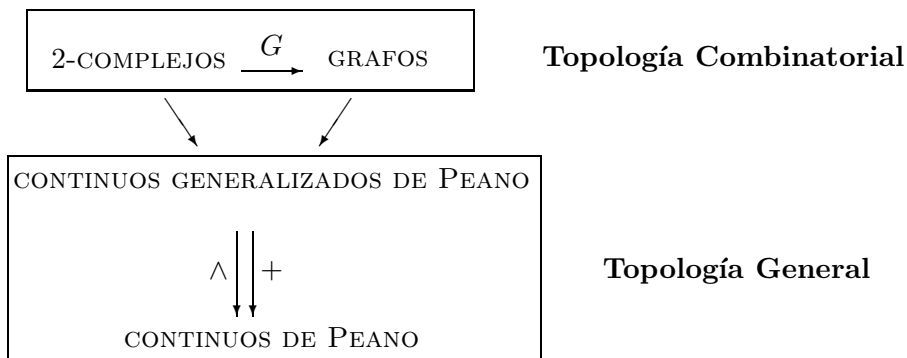
la clase de los continuos (generalizados) de Peano que son espacios que poseen muchas de las propiedades topológicas de los poliedros localmente finitos y de las variedades.

Historicamente los continuos de Peano aparecieron en el estudio de la noción de curva topológica propiciado por el famoso ejemplo, debido a G. Peano (1890), de la curva continua que llena el cuadrado y que culminaron cuando H. Hahn (1914) y S. Mazurkiewicz (1920) demostraron que los continuos de Peano son exactamente aquellos espacios que pueden ser obtenidos como imagen continua del intervalo $[0, 1]$, es decir, las “curvas continuas”.

Cuando la compacidad es reemplazada por la compacidad local se obtienen los continuos generalizados de Peano. Estos espacios fueron ya considerados por los fundadores de la teoría de continuos. De hecho Mazurkiewicz (1920) en su artículo fundamental [29] muestra que todo continuo generalizado de Peano es imagen continua de la semirecta $[0, \infty)$ pero que el recíproco no es cierto. Por tanto las imágenes continuas de $[0, \infty)$ no caracterizan los continuos generalizados de Peano. Esto se debe a que las aplicaciones continuas no describen que ocurre cerca del “infinito” de un espacio. Para tener el infinito en cuenta las aplicaciones continuas son reemplazadas por aplicaciones propias que son aplicaciones continuas $f : X \rightarrow Y$ para las que $f^{-1}(K)$ es compacto para todo compacto $K \subseteq Y$. Utilizando aplicaciones propias y árboles obtenemos un teorema análogo al teorema de Hahn-Mazurkiewicz para continuos generalizados de Peano (I.4.6) que a pesar de su simplicidad creemos nuevo en la literatura. De esta forma los continuos generalizados de Peano son caracterizados como las imágenes, por aplicaciones propias del árbol binario de Cantor $T(C)$ descrito en la figura 1.2.

En esta memoria centramos nuestro interés en los espacios no compactos. Nuestro marco de trabajo será pues la categoría de continuos generalizados y aplicaciones propias. Fijada la categoría topológica en la cual trabajaremos, pasamos a describir brevemente el método que se seguirá. Usaremos dos resultados de la topología general establecidos ya hace tiempo por S. Claytor (1937) y G. Nöbeling (1932) como generalizaciones a los continuos de Peano de los teoremas clásicos de planaridad debidos a K. Kuratowski (1930) y de conectividad debido a K. Menger (1927) y H. Whitney (1932) respectivamente. Basándonos en en estos resultados utilizamos el siguiente diagrama donde las transformaciones $+$ y

\wedge están definidas por las compactificaciones de Alexandroff y Freudenthal respectivamente y la transformación G lleva un 2-complejo K a su grafo bipartito asociado como en (IV.1.2).



Obsérvese que el triángulo no es conmutativo. Con este diagrama procedemos en la mayoría de los casos como sigue. Planteado un problema en GRAFOS es inmediatamente generalizado a CONTINUOS GENERALIZADOS DE PEANO y transferido a CONTINUOS DE PEANO por medio de los funtores $+$ y \wedge . Aquí es posible aplicar los resultados de Nöbeling y Claytor para resolver el problema y una vez obtenido el resultado este es interpretado en GRAFOS de donde partió el problema. En el caso de 2-COMPLEJOS se usará primero la transformación G .

Como ya dijimos, éste es el procedimiento usual; sin embargo hemos obtenido otros resultados moviéndonos de otra manera dentro del diagrama anterior. Así se han obtenido resultados en CONTINUOS DE PEANO apoyándose en resultados de CONTINUOS GENERALIZADOS DE PEANO; ver (II.3.1). También hemos obtenido nuevos resultados al sumergir directamente los 2-COMPLEJOS en CONTINUOS GENERALIZADOS DE PEANO; ver por ejemplo (IV.3.8), (V.1.11) o (V.1.10).

De esta forma, el estudio del diagrama anterior permite obtener numerosos resultados nuevos tanto en topología general como en teoría de grafos así como demostraciones unificadas de otros ya conocidos. Pasamos ahora a detallar el contenido de la memoria.

Una vez estudiada en el capítulo I la categoría de los continuos generalizados de Peano y las aplicaciones propias como marco de trabajo, en el capítulo II se definen diversos tipos de órdenes de conexión al tener en cuenta los puntos ideales en el infinito. Se demuestra que al pasar por las compactificaciones de Freudenthal y Alexandroff obtenemos un único orden de conexión en la categoría de los continuos de Peano. Este hecho

nos lleva a obtener diversas generalizaciones del teorema de Nöbeling a los continuos generalizados de Peano involucrando a los finales del espacio; ver §II.3.

Es interesante también observar que el proceso antes descrito puede ser invertido de manera que resultados de continuos generalizados de Peano pueden ser aplicados para obtener resultados para el caso de continuos de Peano; ver por ejemplo (II.3.1).

En el capítulo III se aplican los resultados del capítulo II a grafos infinitos localmente finitos para obtener nuevos teoremas sobre conectividad en teoría de grafos, así como nuevos teoremas de tipo Menger -Whitney que son aportaciones originales de esta memoria a la teoría de grafos; ver §III.3. También es nuevo el resultado obtenido en §III.4 donde, utilizando técnicas propias de la teoría de grafos se da respuesta a la pregunta de si todo grafo n -conexo localmente finito puede descomponerse como la unión de una familia exhaustiva de subgrafos finitos también n -conexos; ver (III.4.4). Este resultado extiende un teorema de E. Steinitz y H. Rademacher (1934) [40] para grafos finitos.

Una importante clase de grafos n -conexos es la que consiste en los 1-esqueletos de variedades. Más explícitamente, D. Barnette (1982) en [4] demuestra que los 1-esqueletos de n -seudovariedades cerradas son grafos $(n + 1)$ -conexos. En §III.5 extendemos este resultado a n -seudovariedades ($n \geq 2$) con borde lleno; ver (IV.4.9).

Puesto que un grafo es un complejo simplicial de dimensión 1 es natural preguntarse por las propiedades de los grafos que pueden ser extendidas a 2-complejos simpliciales. En el capítulo IV estudiamos la noción de n -conexión para 2-complejos simpliciales dada por E. Woon (1985) [46] y establecemos teoremas de tipo Menger-Whitney para tales complejos. En particular damos una demostración más simple y general del teorema de Woon que permite considerar sólo aristas para estudiar la conexión de 2-complejos infinitos; ver (IV.2.14). También introducimos la noción de final 2-dimensional y probamos varios teoremas de tipo Menger-Whitney para estos finales así como para los finales de Freudenthal ordinarios extendiendo los resultados de Woon para 2-complejos finitos §IV.3. Esto responde a un problema planteado por Woon en [46].

La técnica de demostración en este capítulo se basa en asociar a todo 2-complejo P un grafo bipartito $G(P)$ llamado el grafo asociado a P . Sin

embargo no es posible utilizar esta técnica para los órdenes de conexión en los que intervienen los finales de Freudenthal del 2-complejo P . La dificultad en este caso se debe a que, en general, no hay una biyección entre los finales de Freudenthal de P y finales de Freudenthal de $G(P)$. Sin embargo obtenemos resultados para tipos de conexión en los que intervienen los finales de P ; ver (IV.3.8).

Finalmente en §IV.4 generalizamos considerablemente los resultados de Woon al demostrar que el 2-esqueleto de toda n -seudovariedad compacta o no con borde lleno es un 2-complejo n -conexo; ver (IV.4.2).

Por último en el capítulo V estudiamos la planaridad tanto de grafos como de 2-complejos. La naturaleza puramente topológica del famoso teorema de Kuratowski fue puesta de manifiesto al extender Claytor dicho teorema a la clase de los continuos de Peano. En (V.1.1) se extiende el Teorema de Claytor a continuos generalizados de Peano, obteniéndose como corolarios la extensión a grafos infinitos localmente finitos del Teorema de Kuratowski debido a G. Dirac y S. Schuster (1954) así como la caracterización de R. Halin (1966) y C. Thomassen (1977) de la planaridad propia de grafos infinitos localmente finitos. Además los correspondientes resultados para 2-complejos debidos a S. Mardesic y J. Segal (1966) para el caso compacto y R. Ayala et al. (1997) para el caso no compacto son obtenidos como consecuencia de los resultados de §V.1.

En §V.2 y §V.3 se demuestran diversos resultados relacionando la planaridad y la conectividad para continuos generalizados de Peano. En particular se caracteriza la planaridad propia de los continuos generalizados de Peano 3-conexos y como consecuencia la de los grafos 3-conexos; ver (V.3.5) y (V.3.7).

Finalmente en §V.4, como una generalización de los grafos de aristas de reticulados planos, se introduce el concepto de inmersión reticular para los continuos generalizados de Peano y se caracterizan aquellos continuos generalizados de Peano para los cuales todas sus inmersiones planas son reticulares; ver (V.4.4). Como consecuencia también caracterizamos la planaridad de familias disjuntas de continuos generalizados de Peano; ver (V.4.8). Así mismo se caracterizan los grafos reticulares y la planaridad propia de grafos no necesariamente conexos; ver (V.4.12) y (V.4.16).

Capítulo I

La categoría propia de los continuos generalizados de Peano

En este capítulo estudiamos la clase de los continuos (generalizados) de Peano que son espacios topológicos dotados de muchas de las propiedades topológicas de los poliedros localmente finitos. Históricamente estos espacios aparecieron en el estudio de la noción de curva topológica propiciado por el famoso ejemplo, debido a G. Peano (1890), de la curva continua que llena el cuadrado. H. Hahn (1914) y S. Mazurkiewicz (1920) demostraron que los continuos de Peano son exactamente aquellos espacios que pueden ser obtenidos como imagen continua del intervalo $[0, 1]$; es decir, las “curvas continuas”.

Cuando la compacidad es reemplazada por la compacidad local se obtienen los continuos generalizados de Peano. Estos espacios fueron ya considerados por los fundadores de la teoría de continuos. De hecho Mazurkiewicz en su artículo fundamental [29] muestra que todo continuo generalizado de Peano es imagen continua de la semirrecta $[0, \infty)$ pero que el recíproco no es cierto. Por tanto las imágenes continuas de $[0, \infty)$ no caracterizan los continuos generalizados de Peano. Utilizando aplicaciones perfectas y árboles obtenemos un teorema análogo al teorema de Hahn- Mazurkiewicz para continuos generalizados de Peano que a pesar de su simplicidad creemos nuevo en la literatura. De esta forma los continuos generalizados de Peano son caracterizados como las imágenes, por aplicaciones perfectas del árbol binario de Cantor $T(C)$; ver la figura 1.2.

I.1 Continuos generalizados de Peano. Finales de Freudenthal

Los conceptos básicos de topología general se supondrán conocidos. Ver, por ejemplo [13]. No obstante, establecemos explícitamente algunas de estas nociones usadas en esta memoria. Aquí la palabra “espacio” significará siempre “espacio topológico”.

Un espacio se dice de *Hausdorff* si todo par de puntos distintos se puede separar por entornos disjuntos.

Un espacio es 1^0 -numerable si todo punto posee una base numerable de entornos.

Un espacio es 2^0 -numerable si posee una base numerable de abiertos.

Un espacio X se dice *separable* si existe $A \subseteq X$ *denso* (es decir su *clausura* $Cl(A)$ coincide con X) y numerable.

Un espacio es *metrizable* cuando existe una distancia sobre X cuyo espacio topológico asociado es el dado.

Un espacio se dice *discreto* si todo sus puntos son abiertos de la topología.

Un espacio es *0-dimensional* si existe una base de la topología formada por subconjuntos que son abiertos y cerrados.

Un espacio se dice *n-variedad topológica* si todo punto posee un entorno abierto homeomorfo al espacio euclídeo \mathbf{R}^n .

Un espacio es *conexo* si no existen abiertos disjuntos no vacíos U y V tales que $X = U \cup V$. Un *subconjunto* de X es *conexo* si lo es al considerar la topología relativa. Para cada $x \in X$, la *componente conexa* de x , C_x , es la unión de todos los subconjuntos conexos que contienen a x .

Un espacio X es *localmente conexo* si todo punto admite una base de entornos conexos.

Un *camino* entre a y b en el espacio X es una aplicación continua -

$\alpha : [0, 1] \rightarrow X$ tal que $\alpha(0) = a$ $\alpha(1) = b$. Si $a = b$ α se dice un *ciclo*. Si α es una inyección se dice un *arco*.

Un espacio es *conexo por caminos* si dos puntos arbitrarios se pueden unir por caminos.

Un espacio es *arcoconexo* si dos puntos arbitrarios se pueden unir por arcos. En los espacios de Hausdorff la conexión por caminos coincide con la conexión por arcos; ver ([45]; 31.6). La noción de componente conexa por caminos es inmediata.

Un espacio es *compacto* si todo recubrimiento abierto admite un subrecubrimiento finito. Un *subconjunto* K de X es un conjunto *compacto* si K con la topología relativa es un espacio compacto.

Un espacio X es *localmente compacto* si todo punto admite una base de entornos compactos.

Un espacio es σ - *compacto* si es unión numerable de subconjuntos compactos.

Definición I.1.1 Un *continuo* X es un espacio Hausdorff, compacto, localmente conexo y conexo. Un *continuo generalizado* es un espacio Hausdorff, conexo, σ -compacto, localmente conexo y localmente compacto. Si además es metrizable, X se llamará un *continuo (generalizado) de Peano*; ver [44].

Nota I.1.2 Todo continuo (generalizado) de Peano es conexo por caminos ([38]; 4.2.5) y localmente conexo; ver (I.1.13). Además, de la conectividad y compacidad local de los continuos generalizados de Peano se deduce la separabilidad y por tanto la σ - compacidad ([13]; 4.4 F(c), 4.1.16, y 3.8 C(b)).

Ejemplos de continuos generalizados de Peano son las variedades topológicas conexas y más generalmente los poliedros conexos localmente finitos (I.2.11).

Al ser los continuos generalizados espacios no compactos, una noción fundamental a estudiar en ellos es el concepto de final de F. Freudenthal (1931) introducido por Freudenthal en [14] . En lo que sigue daremos las definiciones

y propiedades básicas relativas a los finales de un continuo generalizado. Damos las demostraciones de todos los resultados ya que esta materia no suele formar parte de los manuales de topología general disponibles en la literatura.

Sea X un continuo generalizado. Por ser σ -compacto y localmente compacto se puede encontrar una sucesión creciente $K_1 \subseteq K_2 \subseteq \dots$ de subconjuntos compactos tales que $K_i \subseteq \text{int}K_{i+1}$ para todo $n \geq 1$ y $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$. Aquí y en lo sucesivo $\text{int}A$ denota el interior de A . Tal sucesión $\{K_n\}_{n \geq 1}$ se denomina *sucesión exhaustiva* del espacio X . Para cada $n \geq 1$ denotamos por $\pi_0(X - K_n)$ el conjunto de componentes conexas de $X - K_n$. Evidentemente la inclusión $K_n \subseteq K_{n+1}$ nos da una sucesión inversa de conjuntos

$$\{*\} = \pi_0(X) \leftarrow \pi_0(X - K_1) \leftarrow \dots \leftarrow \pi_0(X - K_n) \leftarrow \dots$$

Definición I.1.3 El conjunto de *finales de Freudenthal* de un continuo generalizado X es el límite inverso

$$\mathcal{F}(X) = \lim_{\leftarrow} \{\pi_0(X - K_n); n \geq 1\}$$

Recordemos que el límite inverso $\lim_{\leftarrow} \mathcal{X}$ del diagrama de la sucesión de conjuntos

$$\mathcal{X} = \{X_0 \xleftarrow{f_0} X_1 \xleftarrow{f_1} \dots X_n \xleftarrow{f_n} \dots\}$$

consiste en los puntos $(x_0, x_1 \dots x_n \dots)$ tales que $f_i(x_{i+1}) = x_i$ para todo $i \geq 0$

Nota I.1.4 a) El concepto de límite inverso puede ser definido con mayor generalidad para sistemas inversos indexados por un conjunto parcialmente ordenado y dirigido; ver ([13]; 2.5). En particular la anterior sucesión creciente $\{K_n\}$ es cofinal con respecto a la inclusión en la familia \mathcal{K} de los subconjuntos compactos de X . Así que el conjunto de finales de Freudenthal $\mathcal{F}(X)$ puede identificarse con el límite inverso

$$\lim_{\leftarrow} \{\pi_0(X - K); K \in \mathcal{K}\}.$$

Esto es, si $\mathcal{P}(X)$ denota la familia de subconjuntos de X , los finales de Freudenthal de un espacio X pueden considerarse formalmente como funciones $\varepsilon: \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{P}(X)$ tales que $\varepsilon(K)$ es una componente de $X - K$ y $\varepsilon(K) \subseteq \varepsilon(L)$ si $L \subseteq K$. En particular, el conjunto $\mathcal{F}(X)$ no depende de la sucesión exhaustiva $\{K_n\}_{n \geq 1}$ usada en la definición.

b) Además, se comprueba fácilmente que

$$\mathcal{F}(X) = \varprojlim \{\pi'_0(X - K_n); n \geq 1\}$$

donde $\pi'_0(X - K_n) \subseteq \pi_0(X - K_n)$ denota el conjunto de las componentes conexas no acotadas. Recordemos que un subespacio $A \subseteq X$ es *acotado* si su clausura $\mathcal{Cl}(A)$ es compacta.

Definimos a continuación la *compactificación de Freudenthal* de un continuo generalizado X . Sea $\varepsilon \in \mathcal{F}(X)$ un final de Freudenthal; esto es $\varepsilon = (C_n)_{n \geq 1}$ donde $C_n \subseteq X - K_n$ es una componente conexa y $C_{n+1} \subseteq C_n$ para todo $n \geq 1$. Si $U \subseteq X$ es un subconjunto de X y existen n con $C_n \subseteq U$ escribiremos $\varepsilon < U$. Por U^* denotamos la unión

$$U^* = U \cup U^{\mathcal{F}}$$

donde $U^{\mathcal{F}} = \{\varepsilon \in \mathcal{F}(X); \varepsilon < U\}$.

Definición I.1.5 La *compactificación de Freudenthal* de X es un espacio

$$\hat{X} = X \cup \mathcal{F}(X) \quad (1)$$

con la topología generada por la base

$$\mathcal{B}(\hat{X}) = \{U^*; U \text{ abierto en } X\}. \quad (2)$$

Como X es localmente compacto toda componente conexa $C_n \subseteq X - K_n$ es realmente un conjunto abierto de X y por tanto la familia

$$\mathcal{B}_0(\mathcal{F}(X)) = \{C_n^{\mathcal{F}}; C_n \subseteq X - K_n, n \geq 1\} \quad (3)$$

es una base numerable de abiertos de la topología de $\mathcal{F}(X)$. Además, la definición de $\mathcal{F}(X)$ implica las inclusiones siguientes. Ver Nota I.1.4; b).

$$\mathcal{F}(X) \subseteq \prod_{n=1}^{\infty} \pi'_0(X - K_n) \subseteq \prod_{n=1}^{\infty} \pi_0(X - K_n). \quad (4)$$

Ejemplos I.1.6 a) La semirrecta euclídea $\mathbf{R}_+ = [0, \infty)$ posee exactamente un final de Freudenthal y la recta euclídea dos. Todos los espacios euclídeos \mathbf{R}^n , $n \geq 2$, tienen exactamente un final de Freudenthal.

- b) Sea $X = \mathbf{R}_+ \times \{0\} \cup N \times \mathbf{R}_+ \subseteq \mathbf{R}^2$ Entonces $\mathcal{F}(X)$ es homeomorfo a la sucesión $\{1/n\}$ junto con su límite 0.

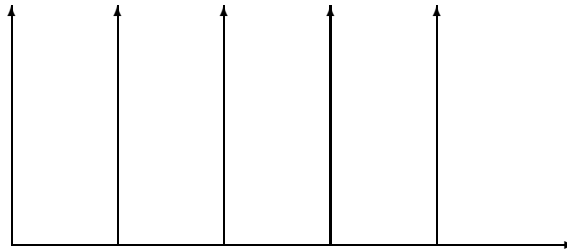


Figura 1.1

- c) El árbol binario de Cantor T_C es el subespacio de \mathbf{R}^2 indicado en la figura

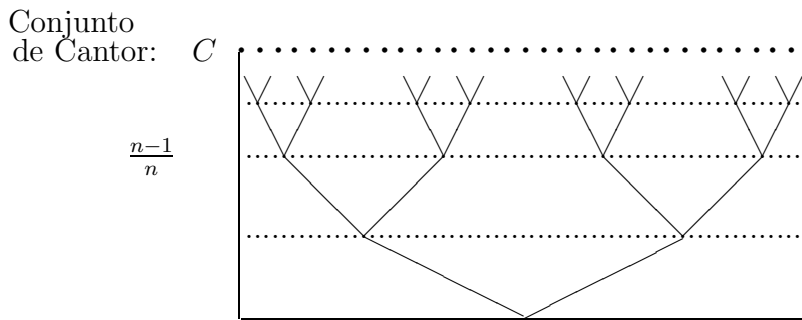


Figura 1.2 Árbol binario de Cantor

En la figura de arriba los vértices en el nivel $\frac{n-1}{n}$ ($n \geq 1$) corresponden a los puntos medios de los 2^{n-1} intervalos que son quitados en el n -ésimo paso de la construcción de C ; ver ([13] 3.1.28). Entonces el espacio de finales $\mathcal{F}(T_C)$ es homeomorfo al conjunto de Cantor C .

En general, si consideramos la topología producto de los conjuntos discretos $\pi_0(X - K_n)$, es decir, la topología que tiene por base los productos $\prod U_n$ con $U_n = \pi_0(X - K_n)$ salvo un número finito de índices, se tiene

Proposición I.1.7 *Al considerar las familias de componentes $\pi_0(X - K_n)$ como espacios discretos, la topología en $\mathcal{F}(X)$ inducida por las inclusiones (I.1.5)(4) coincide con la topología de $\mathcal{F}(X)$ como subespacio de \hat{X} .*

Demostración. Dado un final $\varepsilon = (C_n)_{n \geq 1}$ identificamos la base de entornos abiertos de ε $\{C_n^{\mathcal{F}}; \varepsilon \in C_n^{\mathcal{F}}\}$ en (I.1.5)(3) con la base de entornos abiertos de ε en $\mathcal{F}(X) \subseteq \prod_{n=1}^{\infty} \pi'_0(X - K_n)$ definido por la intersección $\Omega \cap \mathcal{F}(X)$, donde

$$\Omega = \{C_1\} \times \{C_2\} \times \dots \times \{C_n\} \times \pi_0(X - K_{n+1}) \times \dots$$

es un entorno de ε en la topología producto. \square

Lema I.1.8 *El conjunto de componentes no acotadas $\pi'_0(X - K_n)$ es finito para todo $n \geq 1$. Por tanto $\mathcal{F}(X)$ es un subconjunto cerrado y compacto del conjunto de Cantor.*

Demostración. Como $K_n \subseteq \text{Int}K_{n+1}$ y X es conexo, toda componente no acotada $C_n \subseteq X - K_n$ debe cortar a la frontera topológica de K_{n+1}

$$\text{Fr}(K_{n+1}) = K_{n+1} \cap \text{Cl}(X - K_{n+1})$$

En otro caso $C_n \cap (X - \text{Int}K_{n+1}) = C_n \cap (X - K_{n+1})$ sería un conjunto abierto y cerrado no vacío en el espacio conexo X . Además, cada C_n es un abierto en X y como X es localmente conexo, la compacidad del conjunto cerrado $\text{Fr}(K_{n+1}) \subseteq K_{n+1}$ implica que sólo una cantidad finita de componentes no acotadas pueden cortar a $\text{Fr}(K_{n+1})$.

Como consecuencia del Lema I.1.8 se tiene que el producto $\prod_{n=1}^{\infty} \pi'_0(X - K_n)$ es un espacio metrizable 0-dimensional compacto y por tanto es homeomorfo a un subespacio cerrado del conjunto de Cantor ([13]; 6.2.16). Además, recordemos que el límite inverso de un sistema inverso de espacios de Hausdorff $\{X_i\}$ es un subconjunto cerrado del producto $\prod_i X_i$ ([13]; 2.5.1). Luego $\mathcal{F}(X)$ es un subconjunto cerrado (y compacto) del conjunto de Cantor. \square

Teorema I.1.9 *Sea X un continuo generalizado. Entonces la compactificación de Freudenthal \hat{X} es una compactificación de Hausdorff de X cuya diferencia $\mathcal{F}(X) = \hat{X} - X$ es un subconjunto cerrado del conjunto de Cantor.*

Demostración. Se demuestra fácilmente que \hat{X} es un espacio de Hausdorff que contiene a X como un subespacio abierto y denso. Para ver que \hat{X} es compacto, consideramos un recubrimiento arbitrario de abiertos de la base

de abiertos dada en (I.1.5)(2) $X = \cup U_{\alpha}^*$. Por las notas previas sabemos que $\mathcal{F}(X)$ es un compacto, luego existe un número finito de índices $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ con $\mathcal{F}(X) \subseteq U_{\alpha_1}^* \cup \dots \cup U_{\alpha_k}^*$. El resultado se sigue de los dos próximos lemas. \square

Lema I.1.10 *Toda sucesión $\{x_n\} \subseteq X$ con $x_n \in K_{n+1} - K_n$ tiene al menos un final $\varepsilon \in \mathcal{F}(X)$ como un punto de acumulación en \hat{X} .*

Demostración. Por el Lema (I.1.8) el conjunto de componentes no acotadas $\pi'_0(X - K_n)$ es finito para todo $n \geq 1$. Por tanto, podemos construir inductivamente una sucesión de componentes no acotadas $C_1 \supset C_2 \supset C_3 \supset \dots \supset C_n \supset \dots$ y subsucesiones $S_1 \supset S_2 \supset S_3 \supset \dots \supset S_n \supset \dots$ de la sucesión $\{x_n\}$ tal que $S_i \subseteq C_i$ para todo i . Entonces la sucesión $\varepsilon = (C_n)$ es un final de $\mathcal{F}(X)$, que es evidentemente un punto de acumulación de $\{x_n\}$ en la topología de \hat{X} . \square

Lema I.1.11 *Si $U_{\alpha_1}^* \dots U_{\alpha_n}^*$ es un recubrimiento de $\mathcal{F}(X)$ por abiertos de la base en (I.1.5)(2), existe un número entero m tal que toda componente no acotada $C_m \in \pi'_0(X - K_n)$ está contenida en $U_{\alpha_i}^*$ para algún $i \leq n$.*

Demostración. Supongamos contrariamente que hay una sucesión $m_1 < m_2 < \dots$ y componentes no acotadas $D_j \in \pi'_0(X - K_{m_j})$ con $D_j \cap (X - U_i) \neq \emptyset$ para todo $i \leq n$. Por la demostración de (I.1.8), sabemos que $D_j \cap Fr(K_{m_j+1}) \neq \emptyset$ para todo j , por lo que podemos elegir un $x_j \in D_j \cap Fr(K_{m_j+1})$. Por (I.1.10) existe un final $\varepsilon = (C_n) \in \mathcal{F}(X)$ que es un punto de acumulación de $\{x_j\}$. Sea U_i^* con $\varepsilon \in U_i^* \subseteq U_i^*$. Entonces $\varepsilon \in C_{n_0}^* \subseteq U_i^*$ para algún n_0 . Además, podemos elegir un j_0 tal que $x_{j_0} \in C_{n_0}^*$ y $K_{n_0} \subseteq K_{m_{j_0}}$. Como $x_{j_0} \in D_{j_0} \cap C_{n_0}$, tenemos $D_{j_0} \subseteq C_{n_0} \subseteq C_{n_0}^* \subseteq U_i^*$ que es una contradicción. \square

La compactificación más simple es la llamada *compactificación de Alexandroff*. Recordemos que la compactificación de Alexandroff de un espacio localmente compacto y Hausdorff X , es el espacio $X^+ = X \cup \{\infty\}$ cuya topología contiene a X como subespacio abierto y para la cual los conjuntos $(X - K) \cup \{\infty\}$, con $K \subseteq X$ compacto, constituyen una base de entornos abiertos del punto ∞ .

Addendum I.1.12 *Si X es un continuo generalizado, entonces \hat{X} y X^+ son continuos. Además si X es 2^0 numerable entonces X es un continuo generalizado de Peano, siendo \hat{X} y X^+ continuos de Peano.*

Demostración. Como consecuencia del Teorema de Hahn-Mazurkiewicz I.4.1 las imágenes continuas de continuos de Peano son continuos de Peano. La aplicación $q : \hat{X} \rightarrow X^+$ con $q(\mathcal{F}(X)) = \infty$ muestra que es suficiente probar que \hat{X} es un continuo de Peano. Para ello observamos que si X es un conjunto conexo, de las inclusiones $C \subseteq A \subseteq \mathcal{Cl}(X)$ se deduce que A es conexo ([13]; 6.1.11). Por tanto $\hat{X} = \mathcal{Cl}(X)$ y $C^* \subseteq \mathcal{Cl}(C_n)$ son conexos. Aquí $C \in \pi'_0(X - K_n)$. Además $\{C^*; \varepsilon \in C^*\}$ es una base de entornos abiertos de $\varepsilon \in \mathcal{F}(X)$ en \hat{X} , por lo que \hat{X} es localmente conexo. Así \hat{X} es un continuo.

Supongamos ahora que X es 2^0 numerable. Dado que X es un espacio regular ([13]; 3.3.1), se sigue del teorema de metrización de Urysohn ([13]; 4.2.9) que X es metrizable. Esto es, X es un continuo generalizado de Peano. Además, si $\mathcal{V} = \{V_n\}$ es una base numerable de X , entonces es fácil deducir que

$$\mathcal{B} = \mathcal{V} \cup \{C^*; C \in \pi'_0(X - K_n)\}_{n \geq 1}$$

es una base numerable de la topología de \hat{X} , y por tanto \hat{X} es un espacio de Hausdorff compacto y 2^0 numerable y, por el teorema de metrización de Urysohn, metrizable. Por tanto \hat{X} es continuo de Peano. \square

Nota I.1.13 Como consecuencia de (I.1.12) y ([33]; 8.25) se sigue que todo continuo (generalizado) de Peano es localmente conexo por caminos.

La siguiente proposición muestra que \hat{X} es maximal entre las compactificaciones \tilde{X} de X cuya diferencia $\tilde{X} - X$ es 0-dimensional.

Teorema I.1.14 *Sea X un continuo generalizado y \tilde{X} una compactificación de X cuya diferencia $\tilde{X} - X$ es 0-dimensional. Entonces existe una aplicación continua $\tilde{j} : \hat{X} \rightarrow \tilde{X}$ que extiende la inclusión $j : X \subseteq \tilde{X}$.*

Demostración. Para un subespacio $A \subseteq X$, $\mathcal{Cl}^X(A)$ denotará la clausura de A en X . Sea $\varepsilon = (C_n)_{n \geq 1} \in \mathcal{F}(X)$ un final. Consideramos la intersección $C_\varepsilon = \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathcal{Cl}^{\tilde{X}}(C_n)$ de clausuras en \tilde{X} . Como \tilde{X} es compacto, C_ε es un subconjunto compacto de \tilde{X} no vacío. Además, como $\mathcal{Cl}^{\tilde{X}}(C_n)$ es conexo, C_ε es también conexo. Finalmente, no es difícil demostrar que

$$C_\varepsilon = \bigcap_{n=1}^{\infty} (\mathcal{Cl}^{\tilde{X}}(C_n) - \mathcal{Cl}^X(C_n)) \subseteq \tilde{X} - X.$$

Luego C_ε es justamente un punto z_ε , dado que $\tilde{X} - X$ es 0-dimensional y por tanto totalmente desconexo. Definimos ahora $\tilde{j} : \tilde{X} \rightarrow \tilde{X}$ como $\tilde{j} = j$ en X y $\tilde{j}(\varepsilon) = z_\varepsilon$. Demostraremos la continuidad en $\mathcal{F}(X)$. Si Ω es un entorno abierto de z_ε en \tilde{X} , entonces existe $n_0 \geq 1$ tal que todo $n \geq n_0$ se verifica que $C_n \subseteq \mathcal{Cl}^{\tilde{X}}(C_n) \subseteq \Omega$. Esto se sigue de la compacidad de las clausuras $\mathcal{Cl}^{\tilde{X}}(C_n)$ ([13]; 3.1.5). Además, $\varepsilon \in C_n^*$ y por definición de \tilde{j} se tiene que $\tilde{j}(C_n^*) \subseteq \Omega$. Para ello hacemos uso de la definición de C_n^* en (I.1.5)(2). Esto finaliza la demostración. \square

I.2 La categoría combinatorial. Una clase importante de continuos: los grafos

El lenguaje de la topología general permite formular precisa y concisamente numerosos problemas bajo un punto de vista común. Sin embargo el nivel de abstracción y generalidad inherente al concepto de espacio topológico hace que desde el punto de vista de las aplicaciones, se consideren objetos más sencillos. Esto ya era bien conocido por los primeros topólogos, quienes restringieron sus estudios a espacios con una estructura más manejable como son los complejos simpliciales, dando lugar a la rama de la topología conocida como topología combinatorial. Presentamos aquí las definiciones básicas de esta categoría que serán utilizadas en esta memoria en el tratamiento de los grafos y 2-complejos localmente finitos.

Dados $n + 1$ puntos $\{a_0, a_1, \dots, a_n\}$ afinmente independientes en \mathbf{R}^m , llamaremos *n-símplice* o *símplice de dimensión n* al conjunto convexo

$$\sigma = \{x \in \mathbf{R}^m; x = \sum_{i=0}^n \lambda_i a_i, \sum_{i=0}^n \lambda_i = 1, \lambda_i \geq 0\}$$

Los puntos a_i ($0 \leq i \leq n$) se llaman *vértices* de σ y σ se denotará por $\langle a_0, a_1, \dots, a_n \rangle$. Así, un 0-símplice es un punto, un 1-símplice es un segmento, un 2-símplice es un triángulo, un 3-símplice es un tetraedro, etc.

Llamaremos *interior* de σ a $\overset{\circ}{\sigma} = \{x \in \sigma; \lambda_i > 0\}$. Si τ y σ son dos símplices en \mathbf{R}^m de manera que $\tau \subseteq \sigma$ y los vértices de τ son vértices de σ , se dirá que τ es *cara* de σ ($\tau \leq \sigma$). Si $\tau \neq \sigma$ y $\tau \leq \sigma$ diremos que τ es una cara propia de σ y escribiremos $\tau < \sigma$. La unión de caras propias de un *n-símplice* se llamará *borde* de σ y se denotará por $\partial\sigma$. Nótese que $\overset{\circ}{\sigma} = \sigma - \partial\sigma$.

I.2. La categoría combinatorial. Una clase importante de continuos: los grafos¹¹

Definición I.2.1 Un *complejo simplicial*, K , es un conjunto de simplices tal que:

- a) Si $\sigma \in K$ y τ es una cara de σ entonces $\tau \in K$.
- b) Si $\sigma, \sigma' \in K$ entonces $\sigma \cap \sigma'$ es vacío o una cara común de σ y σ' .

A los 0-simplices se les llama *vértices* de K y $V(K)$ denotará el conjunto de vértices de K ; a los 1-simplices se les llama *aristas* de K . Para todo $\sigma \in K$ la *estrella* de σ en K es el subcomplejo $st(\sigma; K) = \{\mu; \exists \tau \in K \text{ con } \mu \leq \tau \text{ y } \sigma \leq \tau\}$. El *engarce* o *link* de σ en K es el subcomplejo $lk(\sigma; K) = \{\mu \in st(\sigma; K); \sigma \cap \mu = \emptyset\}$.

Un complejo K es *localmente finito* si todo $\sigma \in K$ es cara sólomente de un número finito de simplices de K . Esto es equivalente a decir que la estrella de cada símplice es finita.

Un *subcomplejo* L de K es un complejo cuyos simplices son simplices de K . Dado un subcomplejo $L \subseteq K$, denotamos por $K - L$ el subcomplejo de K

$$K - L = \{\tau \in K; \tau \leq \rho \text{ y } \rho \notin L\}.$$

El *i-esqueleto* de K es el subcomplejo $sk^i K \subseteq K$ que contiene todos los simplices $\sigma \in K$ con $\dim \sigma \leq i$. Diremos que K es *homogéneamente n-dimensional* cuando todo símplice $\sigma \in K$ sea una cara de algún n -simplex de K . Por simplicidad decimos que K es un *n-complejo* si K es un complejo conexo homogéneamente n -dimensional y localmente finito.

Sea σ un $(n - 1)$ -símplice de un n -complejo K . La *valencia* de σ , $val(\sigma)$, es el número de n -simplices en $st(\sigma; K)$. La valencia de K es el número

$$val(K) = \min\{val(\sigma); \dim \sigma = n - 1\}.$$

Un $(n - 1)$ -símplice $\sigma \in K$ se dice que es un *símplice borde* cuando $val(\sigma) = 1$. En otro caso se dice que σ es un *símplice interior*. El *borde* de K , ∂K , es el menor subcomplejo de K que contiene los simplices borde. El borde ∂K se dice es *lleno* cuando la intersección de todo símplice de K con el ∂K es una cara (posiblemente vacía).

Los complejos 1-dimensionales G se llaman *grafos* y sus 1-simplices se llaman *aristas*. En particular, en esta memoria todos los grafos G serán siempre

localmente finitos. Un camino $\Lambda : a_0 - a_n$ entre dos vértices $a_i, a_j \in G$ es una sucesión de vértices $\{a_0, a_1, \dots, a_n\}$ tal que $a_i \neq a_j$ ($i \neq j$) y $\langle a_i, a_{i+1} \rangle$ es una arista de G ($0 \leq i \leq n-1$). Si $a_0 = a_n$ se dirá que Λ es un *ciclo*. Un grafo conexo que no contenga ciclos es un *árbol*.

Por $|K|$ representamos la unión de todos los símlices de K con la topología débil de todos los símlices de K ; esto es, $D \subseteq |K|$ es un abierto si y sólo si $D \cap \sigma$ es abierto de σ para todo $\sigma \in K$. A $|K|$ se le llamará *poliedro subyacente* a K y a K una *triangulación* de $|K|$.

Los resultados básicos que se detallan a continuación pueden encontrarse en las secciones 5 y 6 de [1].

Lema I.2.2 *Si K es un complejo simplicial y $x \in |K|$ existe un único símlice $\sigma \in K$ tal que $x \in \overset{\circ}{\sigma}$.*

Lema I.2.3 *Con la topología débil $|K|$ es un espacio de Hausdorff; más aún K es localmente finito si y sólo si $|K|$ es localmente compacto.*

Al conjunto $|K|$ se le puede dotar de una métrica d como sigue. Todo punto $x \in |K|$ se puede representar por una colección de $\{\lambda_v\}_{v \in V(K)}$ de números reales no negativos de forma que λ_v es la coordenada baricéntrica de x respecto a v si $v \in \sigma$, con $x \in \overset{\circ}{\sigma}$. Entonces, se define $d(\{\lambda_v\}, \{\mu_v\}) = (\sum (\lambda_v - \mu_v)^2)^{\frac{1}{2}}$. Al conjunto $|K|$ con la topología inducida por d , se le denota por $|K|_d$.

Proposición I.2.4 *Si K es un complejo simplicial, las siguientes proposiciones son equivalentes:*

- a) K es localmente finito.
- b) $|K|$ es localmente compacto.
- c) La identidad $Id : |K| \rightarrow |K|_d$ es homeomorfismo.
- d) $|K|$ es $1^{\mathfrak{Q}}$ numerable.

I.2. La categoría combinatorial. Una clase importante de continuos: los grafos13

Definición I.2.5 Se dice que K puede ser realizado en \mathbf{R}^∞ si existe un homeomorfismo sobre la imagen de $|K|$ en \mathbf{R}^∞ , de manera que la imagen de cada $|\sigma|$ es un símplice geométrico de \mathbf{R}^∞ . A la imagen de $|K|$ se le llama *realización geométrica* de K .

Proposición I.2.6 K puede ser realizado en \mathbf{R}^∞ si y sólo si es localmente finito y posee a lo más una cantidad numerable de símplices.

Definición I.2.7 Un subespacio X de \mathbf{R}^n es un *poliedro euclídeo* si existe un complejo simplicial localmente finito K tal que $|K| = X$. En tal caso, se dice que K es una triangulación de X .

Proposición I.2.8 Todo complejo K n -dimensional y localmente finito se puede realizar en \mathbf{R}^{2n+1} .

Proposición I.2.9 Sea $|K|$ un poliedro euclídeo y $\mathcal{S} = \{S_\alpha\}_{\alpha \in A}$ una familia localmente finita de poliedros compactos en $|K|$. Entonces, existe una subdivisión K' de K que contiene como subcomplejo triangulaciones de cada elemento de \mathcal{S} .

Corolario I.2.10 Sea P una unión localmente finita de símplices en \mathbf{R}^n . Entonces, es posible triangular P de modo que sea el espacio subyacente de un complejo simplicial localmente finito.

Las propiedades topológicas de los poliedros conexos y localmente compactos pueden resumirse en la siguiente

Proposición I.2.11 Los poliedros conexos y localmente compactos son continuos generalizados de Peano.

Más aún, los grafos (conexos) localmente finitos pueden ser redefinidos en la clase de los continuos de Peano gracias a la sencilla

Proposición I.2.12 Un continuo generalizado de Peano X es un grafo localmente finito y conexo si y sólo si X es una unión localmente finita de una familia numerable de arcos tales que, o bien, son disjuntos, o tienen en común sólamente uno de los dos puntos extremos.

Nótese que no todo continuo generalizado 1-dimensional es un grafo, ya que el siguiente espacio no puede ser homeomorfo a ningún grafo

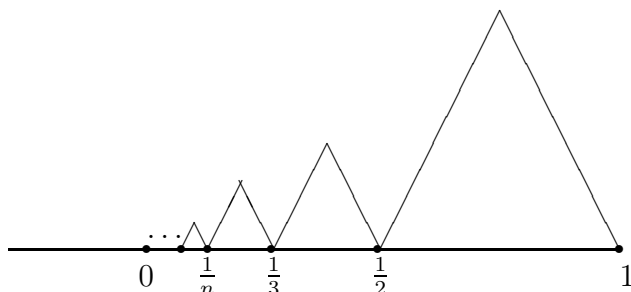


Figura 1.3

La siguiente proposición caracteriza los grafos entre los continuos generalizados de Peano. Esta proposición es análoga a una bien conocida caracterización en el caso de grafos finitos ([33]; 9.10). Damos aquí la demostración para ilustrar cómo pasar de un resultado sobre continuos a uno sobre continuos generalizados.

Proposición I.2.13 *Un continuo generalizado de Peano X es un grafo localmente finito si y sólo si*

- a) $ord(x, X) < \infty$ para todo $x \in X$.
- b) El conjunto $S = \{x, ord(x, X) \geq 3\}$ es localmente finito en X .

Recordemos que dado $x \in X$ el orden de x en X , $ord(x, X)$, es $\leq n$ si para todo entorno N de x en X existe otro entorno $M \subseteq N$ con $Card(Fr(M)) \leq n$.

Demostración. Puesto que todo continuo generalizado de Peano es un espacio métrico localmente compacto y separable (I.1.2), el conjunto S es necesariamente discreto y numerable.

Claramente, las propiedades a) y b) son ciertas si X es un grafo localmente finito. Recíprocamente, escribimos $X = X_1 \cup X_2 \cup \dots$ donde X_i es un continuo de Peano y $X_i \subseteq int X_{i+1}$; ver (I.4.4). Entonces, dado $x \in X_i$ se tiene trivialmente $ord(x, X_i) \leq ord(x, X)$. Por tanto, el teorema para el caso compacto mencionado más arriba nos dice que cada X_i puede ser triangulado como un grafo finito G_i .

I.2. La categoría combinatorial. Una clase importante de continuos: los grafos 15

Sea $e \in G_2$ una arista con $e \cap (X_2 - X_1) \neq \emptyset$. La intersección $e \cap Cl(X_2 - X_1)$ tiene una cantidad finita de componentes, pues en caso contrario la compacidad de e determinaría un punto donde se acumularían puntos con ordenes ≥ 3 , contradiciendo la condición b); ver la figura 1.3. Entonces, tenemos las subdivisiones G'_1 y G'_2 de G_1 y G_2 obtenidas al considerar como nuevos vértices los extremos de todas las componentes de $e \cap Cl(X_2 - X_1)$ cuando e varía entre todas las aristas que cortan a $Cl(X_2 - X_1)$. Es inmediato comprobar que G'_1 queda contenido en G'_2 como subcomplejo.

Ahora consideramos los grafos G_3 y G'_2 . Observamos en primer lugar que como $|G_i| = X_i$, todo camino desde un punto $x \in X_3 - X_2$ a X_1 corta necesariamente a $X_2 - X_1$. Entonces, para cada arista $e \in G_3$ con $e \cap (X_3 - X_2) \neq \emptyset$ los extremos de las componentes conexas de $e \cap Cl(X_3 - X_2)$ son todos puntos de $X_2 - X_1$.

Sean ahora G''_2 y G'_3 las subdivisiones de G'_2 y G_3 respectivamente, obtenidas al considerar como nuevos vértices los extremos de todas las componentes de $e \cap Cl(X_3 - X_2)$. Por construcción $G''_1 = G'_1$ aparece como subcomplejo de G''_2 y podemos reiterar el proceso obteniendo una sucesión creciente de subcomplejos.

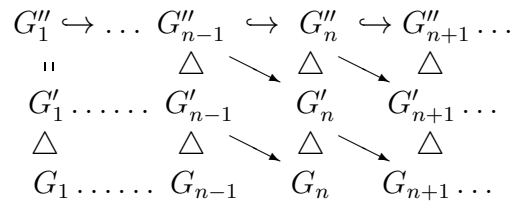


Figura 1.4

donde $A \triangleleft B$ indica que A es subdivisión de B . Entonces $G'' = \bigcup_{i=1}^{\infty} G''_i$ es el grafo buscado. \square

Como consecuencia inmediata, se tienen los siguientes corolarios bien conocidos

Corolario I.2.14 *Todo subcontinuo generalizado de un grafo es un grafo.*

Corolario I.2.15 *Todo continuo generalizado de Peano X con $ord(x, X) \leq 2$ es \mathbf{R}_+ ó \mathbf{R} . Más aún, si $ord(x, X) = 2$ para todo $x \in X$, entonces X es \mathbf{R} .*

Los árboles forman una subclase de grafos de gran importancia en la teoría de grafos. Los árboles localmente finitos pueden ser caracterizados entre los continuos de Peano como sigue

Proposición I.2.16 *Un continuo generalizado de Peano X es un árbol si y sólo si el conjunto de puntos que no desconectan a X*

$$C(X) = \{x \in X; X - \{x\} \text{ es conexo}\}$$

es localmente finito (y por tanto, discreto y numerable) en X .

Demostración. Si X es un continuo de Peano, procediendo de forma análoga a la demostración de la Proposición I.2.13 tenemos $X = X_1 \cup X_2 \cup \dots$, donde X_i es un continuo de Peano, $X_i \subseteq \text{int}X_{i+1}$ y $X_i \cap C(X)$ es finito. Por el teorema ([33]; 9.28) cada X_i es un árbol T_i . La intersección $T_k \cap Cl(X_{k+1} - X_k)$ sólo puede ser un punto que, o bien es un vértice de X_k , o bien es interior a una arista de X_k , dado que $X_k = T_k$ es contráctil. Luego X es un árbol.

Recíprocamente, si X es un árbol localmente finito, entonces cualquier punto interior a una arista desconecta X . Luego $C(X) \subseteq V(X)$, que es localmente finito en X , más aún, se puede comprobar que $C(X)$ es el conjunto de vértices terminales, esto es, $\text{ord}(x, X) = 1$. \square

De la proposición anterior se deduce de forma inmediata que $X = \mathbf{R}$ ($X = \mathbf{R}_+$) es el único continuo generalizado de Peano con $\mathcal{F}(X) = \{\pm\infty\}$ ($\mathcal{F}(X) = \{\infty\}$) y $C(X) = \{\emptyset\}$ ($C(X) = \{*\}$) respectivamente.

I.3 Aplicaciones propias y perfectas

En esta memoria centramos nuestro interés en los espacios no compactos. Las aplicaciones continuas no describen qué ocurre cerca del “infinito” de un espacio: piénsese en una aplicación constante de \mathbf{R}^2 en \mathbf{R} . Para tener el infinito en cuenta, las aplicaciones continuas son reemplazadas por aplicaciones propias. Nuestro marco de trabajo será pues la categoría \mathcal{P} de continuos generalizados y aplicaciones propias.

Definición I.3.1 Una *aplicación perfecta* $f : X \rightarrow Y$ es una aplicación continua y cerrada tal que para cada $y \in Y$ la fibra $f^{-1}(y)$ es compacta.

Recordemos que una aplicación $f : X \rightarrow Y$ es cerrada si $f(F)$ es cerrado para todo cerrado $F \subseteq X$.

Proposición I.3.2 ([6]; I. 10.2.1) Una aplicación $f : X \rightarrow Y$ es perfecta si y sólo si para todo espacio T , $f \times Id : X \times T \rightarrow Y \times T$ es cerrada.

La clase de las aplicaciones perfectas fue introducida por I. Vainstein (1947) en [42]. Posteriormente, las aplicaciones perfectas entre espacios localmente compactos y Hausdorff fueron estudiadas por Bourbaki [6]. Para un estudio en profundidad de estos conceptos se puede consultar [6] y [13].

Nota I.3.3 Dado $f : X \rightarrow Y$ continua, se dice que una propiedad topológica \mathcal{P} es *invariante (inversa)* por f si Y (respectivamente X) tiene la propiedad \mathcal{P} cuando X (respectivamente Y) tiene la propiedad \mathcal{P} . Muchas propiedades topológicas son invariantes y/o inversa por aplicaciones perfectas ([13]; capítulo 3). Como ejemplos importantes tenemos:

- i) La propiedad de Hausdorff es invariante por aplicaciones perfectas ([13]; 3.7.20), e invariante inversa por aplicaciones continuas.
- ii) La compacidad local es invariante e invariante inversa por aplicaciones perfectas ([13]; 3.7.21 y 3.7.24).
- iii) La conexión local es invariante por aplicaciones cocientes; en particular, por aplicaciones cerradas y, por tanto, por aplicaciones perfectas ([38]; 2.5.15).
- iv) La metrizabilidad es invariante por aplicaciones perfectas ([38]; 4.4.15).

Como consecuencia inmediata se tiene

Proposición I.3.4 Sea X un continuo generalizado (de Peano) y $f : X \rightarrow Y$ una aplicación perfecta sobreyectiva. Entonces Y es un continuo generalizado (de Peano).

Más generalmente

Proposición I.3.5 Sean $\{X_\alpha\}_{\alpha \in I}$ una familia de continuos generalizado de Peano, Y un espacio conexo y $f : \sqcup_{\alpha \in I} X_\alpha \rightarrow Y$ una aplicación perfecta sobreyectiva. Entonces Y es un continuo generalizado de Peano.

Definición I.3.6 Una aplicación propia $f : X \rightarrow Y$ es una aplicación continua tal que $f^{-1}(K)$ es compacto para todo subconjunto compacto $K \subseteq Y$.

Proposición I.3.7 ([6]; I. 10.2.6) Toda aplicación perfecta es propia.

Ejemplo I.3.8 No toda aplicación propia entre espacios de Hausdorff es perfecta. En efecto, sean $X_\alpha = \{0, 1\}$, $\alpha \in \mathbf{R}$, y $X = \prod_\alpha X_\alpha$. Consideremos X con la topología \mathcal{T} generada por $\prod_\alpha M_\alpha$ con $M_\alpha \subseteq X_\alpha$ y $M_\alpha = X_\alpha$ salvo para una cantidad numerable de índices. Este espacio es de Hausdorff y todo subconjunto compacto es finito ([6]; ej. §9.4). Sea $f = Id : (X, \text{discreta}) \rightarrow (X, \mathcal{T})$. Entonces f es propia pero no cerrada. Sin embargo, para los espacios Hausdorff localmente compactos se tiene

Proposición I.3.9 ([6]; I. 10.3.7.) Sea $f : X \rightarrow Y$ continua entre dos espacios de Hausdorff localmente compactos. Son equivalentes:

- a) f es perfecta.
- b) f es propia.
- c) Para todo $K \subseteq Y$ existe un subespacio $L \subseteq X$ con $f(Cl(X - L)) \subseteq (Y - K)$.

Nótese en particular que una inmersión $X \hookrightarrow \mathbf{R}^2$ de un continuo generalizado de Peano es cerrada si y sólo si es propia.

Como consecuencia de (I.3.9) en la clase de los espacios localmente compactos y Hausdorff, las aplicaciones perfectas, o equivalentemente propias, pueden ser caracterizadas como aquellas aplicaciones continuas que llevan el “infinito” en el “infinito”. Más explícitamente:

Proposición I.3.10 Sean X e Y dos espacios de Hausdorff y localmente compactos, y sean X^+ e Y^+ las respectivas compactificaciones de Alexandroff de X e Y . Entonces la aplicación continua $f : X \rightarrow Y$ es perfecta si y sólo si la extensión $f^+ : X^+ \rightarrow Y^+$ dada por $f^+(\infty) = \infty$ es continua.

Más aún, se tiene

Proposición I.3.11 Si X e Y son continuos generalizados, toda aplicación propia $f : X \rightarrow Y$ se extiende a una aplicación continua $\hat{f} : \hat{X} \rightarrow \hat{Y}$ cuya restricción $f_* : \mathcal{F}(X) \rightarrow \mathcal{F}(Y)$ es continua.

Explícitamente si $\varepsilon = (C_n)_{n \geq 1} \in \mathcal{F}(X)$, entonces $\hat{f}(\varepsilon) = f_*(\varepsilon) = (D_k)_{k \geq 1}$ donde $f(C_{n_k}) \subseteq D_k$ para alguna subsucesión creciente $(C_{n_k})_{k \geq 1}$ de ε .

La proposición anterior nos permite considerar los finales de Freudenthal de un continuo generalizado de Peano X como clases de equivalencia de rayos infinitos en X . Más explícitamente

Definición I.3.12 Un rayo en X con origen en $a \in X$ es una aplicación propia $r : [0, \infty) \rightarrow X$ con $r(0) = a$. Un final $\varepsilon \in \mathcal{F}(X)$ está inducido por r si $r_*(\infty) = \varepsilon$. Evidentemente, todo rayo r define un único final de Freudenthal ε , que se dice inducido por r , y que denotamos por $r : a - \varepsilon$.

Dados dos finales $\varepsilon, \varepsilon' \in \mathcal{F}(X)$, un birayo $r : \varepsilon - \varepsilon'$ es una aplicación propia $r : \mathbf{R} \rightarrow X$ tal que los finales inducidos por los rayos $r|_{(-\infty, 0]}$ y $r|_{[0, \infty)}$ son ε y ε' respectivamente.

Proposición I.3.13 Para todo final ε de un continuo generalizado de Peano X podemos encontrar un rayo $r : [0, \infty) \rightarrow X$ que induce ε . Además, dos rayos inducen el mismo final ε si y sólo si pueden unirse fuera de cualquier subconjunto compacto $K \subseteq X$.

Esta proposición es un caso particular muy simple de (I.4.6) o (I.3.23).

Ejemplo I.3.14 Nótese que la Proposición I.3.13 no es cierta si X es sólomente un continuo generalizado. En efecto, sea L la “línea larga”; es decir, el espacio construido a partir del conjunto $[0, \Omega)$ de números ordinales, donde Ω es el menor ordinal no numerable, colocando entre cada ordinal y el siguiente una copia del intervalo $(0, 1)$. El conjunto L es entonces linealmente ordenado y dotado de la topología del orden. La “línea larga completada” L^* se construye de forma similar a partir de $[0, \Omega]$. Es sabido que L^* es un continuo. Sin embargo, L^* no es conexo por caminos puesto que no existe un camino que una Ω con los otros puntos ([39]; ejemplo 46). Tomamos una copia L_n^* para cada $n \geq 1$ y consideremos el espacio cociente W obtenido al identificar $\Omega_n \in L^*$ con $0_{n+1} \in L_{n+1}^*$. Se puede observar fácilmente que W es un continuo generalizado con $\mathcal{F}(W) = \{\infty\}$. Sin embargo no existe un rayo en W definiendo ∞ . De hecho, si $f : \mathbf{R}_+ \rightarrow W$ fuese propia, podríamos elegir $x \in L_i^*$ e $y \in L_j^* - L_i^*$ ($j \geq i + 1$) tal que $a \geq b - 1$ donde $a = \max f^{-1}(x)$ y $b = \min f^{-1}(y)$. Entonces, $f([a, b])$ será un camino de x a y en W , y por conexión este camino debe contener a Ω_k ($i + 1 \leq k \leq j$), lo que nos lleva a una contradicción.

A continuación, consideramos las aplicaciones propias (o equivalentemente perfectas) en la categoría combinatorial de los poliedros euclídeos. Recordemos que una *aplicación simplicial* entre dos complejos simpliciales K y L es una aplicación $f : |K| \rightarrow |L|$ tal que :

- a) Transforma vértices de un símplice de K en vértices de un símplice de L .
- b) Es lineal sobre la clausura de cada símplice de K .

Definición I.3.15 Una *aplicación poliedral* entre dos complejos simpliciales K y L es una función $f : |K| \rightarrow |L|$ tal que existen subdivisiones K', L' de forma que $f : |K'| \rightarrow |L'|$ es simplicial.

Nota I.3.16 Obviamente, toda aplicación simplicial es aplicación poliedral y toda aplicación poliedral es continua.

Es inmediato comprobar la siguiente

Proposición I.3.17 *Sea $f : |K| \rightarrow |L|$ una aplicación propia entonces f es una aplicación poliedral si y sólo si para cada subcomplejo finito $K_0 \subseteq K$ existe un subcomplejo $L_0 \subseteq L$, conteniendo a $f(|K_0|)$, de modo que $f|_{K_0} : |K_0| \rightarrow |L_0|$ es aplicación poliedral.*

El siguiente teorema es fundamental en el cambio de la categoría topológica de los poliedros a la categoría combinatorial. De hecho, prueba que salvo homotopía toda aplicación continua (propia) entre poliedros puede ser reemplazada por una aplicación poliedral (propia). Recordemos que una *aproximación simplicial* de una aplicación continua $f : |K| \rightarrow |L|$ es una aplicación simplicial $\varphi : K \rightarrow L$ tal que $f(x) \in \sigma$ implica $\varphi(x) \in \sigma$ para $x \in |K|$ y σ símlice de K . Entonces tenemos

Teorema I.3.18 *Sean K y L dos complejos simpliciales y $h : |K| \rightarrow |L|$ una aplicación continua. Toda aproximación simplicial de h es homotópica a h . Más aún, siempre existe una subdivisión K' de K tal que h posee una aproximación simplicial $f : |K'| \rightarrow |L|$. Además, si h es una aplicación propia entre poliedros localmente finitos entonces f y la homotopía $H : f \simeq h$ también son aplicaciones propias.*

Recordemos que una homotopía H entre $f, g : X \rightarrow Y$ es una aplicación continua $H : X \times I \rightarrow Y$ con $H(x, 0) = f(x)$ y $H(x, 1) = g(x)$.

La demostración de la primera parte de (I.3.18) puede encontrarse en ([28]; 2.5.16). Además si h es propia f también lo es. En efecto, dado un conjunto compacto $C \subseteq |L|$ el conjunto $N = \{\sigma \in L, ; \sigma \cap C \neq \emptyset\}$ es también compacto, y por ser h propia $h^{-1}(N)$ también lo es. Entonces, si $M = \cup\{\eta \in K'; \eta \cap L^{-1}(N) \neq \emptyset\}$ tenemos que M es compacto y además $f^{-1}(C) \subseteq M$ pues por ser f aproximación simplicial de h tenemos que para todo $x \in |K'|$ $f(x) \in C$ si $h(x) \in \overset{\circ}{C}$. Por tanto el cerrado $f^{-1}(C)$ también es compacto y f es propia. Más aún, por ser f aproximación simplicial de h la convexidad de los símlices nos dice que $H(x, t) = (1 - t)f(x) + th(x)$ es una homotopía entre f y g . Ahora es fácil ver que H también es propia si f y g lo son.

Gracias a (I.3.18) tenemos que la conexión de un poliedro euclídeo está caracterizado por su 1-esqueleto. Más aún, como consecuencia de (I.3.18) también

obtenemos que la clase de homotopía de un (bi)rayo está representada por un (bi)rayo simplicial. Por tanto, usando (I.3.13) se tiene

Proposición I.3.19 *Los finales de Freudenthal de un complejo simplicial K localmente finito sólo dependen de su 1-esqueleto*

En lo que sigue redefinimos las nociones de camino y (bi)rayo directamente en el lenguaje simplicial que, gracias a (I.3.19), resultan ser equivalentes a las correspondientes nociones continuas sobre los poliedros euclídeos.

Un *rayo* $R : a_0 - \infty$ empezando en el vértice $a_0 \in K$ es una sucesión de vértices $\{a_0, \dots\}$ tales que $a_i \neq a_j$ ($i \neq j$) y $\langle a_i, a_{i+1} \rangle$ es una arista de K . Un rayo entre $\Pi \subseteq V(K)$ e infinito (∞ , por comodidad) es un rayo R empezando en algún $e \in \Pi$, con $\Pi \cap R = \{e\}$.

Un rayo $R : a_0 - \varepsilon$ entre $a_0 \in V(K)$ y $\varepsilon \in \mathcal{F}(|K|)$ es un rayo empezando en a_0 que define el final ε . Análogamente podemos definir un rayo entre los conjuntos $\Pi \subseteq V(K)$ y $F \subseteq \mathcal{F}(|K|)$.

Finalmente, un *birayo* con inicio en ε y terminación en ε' $R : \varepsilon - \varepsilon'$ es una sucesión de vértices subindiciados por el conjunto de números enteros \mathbf{Z} $\{\dots a_{-2}, a_{-1}, a_0, a_1, a_2 \dots\}$ tales que $a_i \neq a_j$ ($i \neq j$), el segmento $\langle a_i, a_{i+1} \rangle$ es una arista de K , y R define los finales $\varepsilon, \varepsilon' \in \mathcal{F}(|K|)$. Análogamente podemos definir un birayo entre $F, F' \subseteq \mathcal{F}(|K|)$.

Nota I.3.20 Con la definición anterior de rayo, Halin definió un final de Freudenthal del complejo K como una clase de equivalencia de rayos, donde dos rayos R y R' están relacionados si existe otro rayo R'' que corta a R y R' en infinitos vértices. No es difícil probar usando (I.3.18) y (I.3.19) que la definición de final según Halin es equivalente a la definición de final de Freudenthal para poliedros euclídeos. De hecho Halin en [16] demostró el siguiente

Lema I.3.21 *Si G es un grafo localmente finito existe un árbol maximal $T \subseteq G$ tal que la inclusión induce un homeomorfismo $\mathcal{F}(T) \cong \mathcal{F}(G)$.*

Como consecuencia del Lema de Halin y de (I.3.19) se obtiene

Proposición I.3.22 *Si K es un complejo simplicial localmente finito existe un árbol maximal $T \subseteq K$ tal que la inclusión induce un homeomorfismo $\mathcal{F}(T) \cong \mathcal{F}(K)$.*

Esta proposición admite la siguiente generalización a continuos generalizados de Peano. Compárese con (I.3.13) y (I.4.6)

Proposición I.3.23 *Sea X un continuo generalizado de Peano. Entonces existe un árbol $T \subseteq X$ tal que la inclusión induce un homeomorfismo $\mathcal{F}(T) \cong \mathcal{F}(X)$.*

Demostración. Sea $\{K_n\}_{n \geq 1}$ una sucesión exhaustiva en X . Sea $\{C_n^j; j \in J_n\}$ la familia de componentes conexas (por caminos) de $X - K_n$. Para cada $n \geq 1$ y $j \in J_n$ escogemos un punto $x_n^j \in C_n^j \cap FrK_{n+1}$ y sea $x_1 \in intK_1$ un punto cualquiera. Ahora construimos una sucesión creciente de árboles finitos $T_1 \subseteq T_2 \subseteq T_3 \subseteq \dots$ como sigue. Tomamos $T_1 = \{x_1\}$ y para la construcción de T_2 ordenamos el conjunto $J_1 = \{j_1, \dots, j_{t_1}\}$ y escogemos para $x_1^{j_1}$ un arco $\Gamma \subseteq X$ de $x_1^{j_1}$ a x_1 . Para $x_1^{j_2}$ escogemos un arco $\Gamma_2 \subseteq X$ desde $x_1^{j_2}$ a Γ_1 . Obsérvese que el corte de Γ_2 con Γ_1 se produce en K_1 . Reiterando el proceso obtenemos el árbol T_2 .

Supongamos construido el árbol T_n conteniendo a los puntos x_k^j con $k \leq n - 1$. Para construir T_{n+1} ordenamos el conjunto $J_n = \{j_1 \dots j_{t_n}\}$ y escogemos un arco Γ_1 en $X - K_{n-2}$ que una $x_n^{j_1}$ con algún punto de $T_n - K_{n-1}$. Sea $T_{n+1}^1 = T_n \cup \Gamma_1$. Ahora, para $x_n^{j_2}$ escogemos un arco Γ_2 en $X - K_{n-2}$ que una $x_n^{j_2}$ con $T_{n+1}^1 - K_{n+1}$. Sea $T_{n+1}^2 = T_{n+1}^1 \cup \Gamma_2$. Reiteramos el proceso hasta $x_{j_{t_n}}$ para obtener el árbol T_{n+1} . Obsérvese que los arcos Γ_i anteriores existen, pues $x_{n-1}^j \in T_n - K_{n-1}$. Además, de la construcción de T_n es fácil deducir que dos puntos de $T_n - T_s$ ($s \leq n - 1$) que están en la misma componente de $X - K_{s-1}$ pueden ser unidos en $T_n - T_{s-2}$.

No es difícil comprobar que el subconjunto cerrado $T = \cup_{n=1}^{\infty} T_n \subseteq X$ es un árbol. Más aún por construcción y la definición de final de Freudenthal se sigue que la inclusión $i : T \hookrightarrow X$ induce una aplicación continua sobreyectiva $i_* : \mathcal{F}(T) \rightarrow \mathcal{F}(X)$. Además, si $\varepsilon, \varepsilon' \in \mathcal{F}(X)$ son dos finales definidos por las sucesiones $\{x_n\}$ y $\{x'_n\}$ en T tales que $i_*(\varepsilon) = i_*(\varepsilon')$, se sigue que x_n y x'_n están en la misma componente $C_{k(n)}^{j_n} \subseteq X - K_{k(n)}$ con $k(n) \rightarrow \infty$. Sea $s(n) \geq 1$ tal que $x_n, x'_n \in T_{s(n)}$. Podemos suponer sin pérdida de generalidad que $k(n) \leq s(n)$.

Entonces pueden ser unidos en $T - T_{k(n)-2}$ por lo que $\varepsilon = \varepsilon'$ en $\mathcal{F}(T)$. Esto prueba que i_* es en efecto un homeomorfismo.

I.4 Un teorema de Hahn-Mazurkiewicz para continuos generalizados de Peano

Los continuos de Peano surgieron en el estudio de la noción de curva en topología. El bien conocido teorema de Hahn-Mazurkiewicz [29] establece que:

Teorema I.4.1 *Un espacio de Hausdorff P es un continuo de Peano si y sólo si es la imagen del intervalo unidad $I = [0, 1]$.*

Este teorema culminó el estudio iniciado por el famoso ejemplo de la curva de Peano que rellena un cuadrado. Ver la siguiente figura, donde se describe la 1ª y 2ª etapa de la curva de Peano.

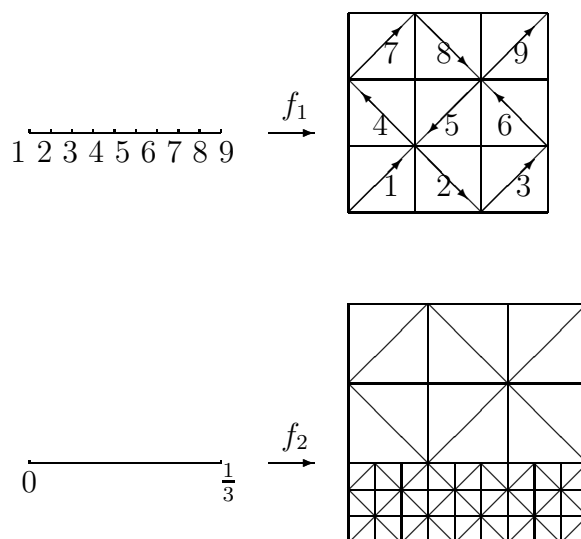


Figura 1.5

Cuando la compacidad es reemplazada por la compacidad local se obtienen, como ya se ha dicho, los continuos generalizados de Peano. Estos espacios fueron ya considerados por los fundadores de la teoría de continuos. De hecho

Mazurkiewicz en su artículo fundamental [29] muestra que todo continuo generalizado de Peano es imagen continua de la semirrecta $[0, \infty)$. Por ejemplo, sea $g : [0, \infty) \rightarrow T(C)$ la extensión natural de la aplicación $g : \mathbf{N} \rightarrow T(C)$ en el árbol binario de Cantor $T(C)$ (I.1.6 c)) descrito en la figura 1.6

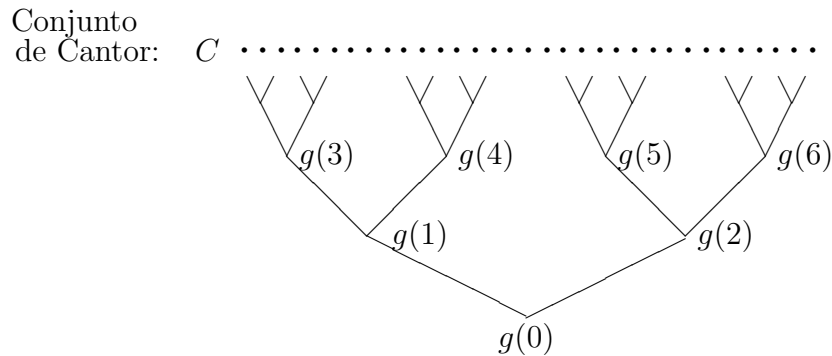


Figura 1.6 $g : \mathbf{N} \rightarrow T(C)$

Sin embargo el recíproco no es cierto en general. Por tanto las imágenes continuas de $[0, \infty)$ no caracterizan los continuos generalizados de Peano. Utilizando aplicaciones perfectas y árboles obtenemos un teorema análogo al teorema de Hahn- Mazurkiewicz para continuos generalizados de Peano. De esta forma, los continuos generalizados de Peano son caracterizados como las imágenes, por aplicaciones perfectas del árbol binario de Cantor $T(C)$.

Por un *árbol simple* con un vértice raíz v_0 entendemos un árbol T tal que para todo vértice $v \neq v_0$ el número de aristas conteniendo a v (la valencia de v) es ≥ 2 . El vértice raíz induce el siguiente orden en el conjunto de vértices $T^0 \subseteq T$. Escribiremos $v \leq w$ si v está contenido en el único arco γ_w de w a v_0 . Además definimos la altura de v , $|v|$, como el número de vértices en el arco γ_v . Por S_n denotamos el n -ésimo nivel de T ; esto es, $S_n = \{v \in T^0; |v| = n\}$. Evidentemente, si $T_n \subseteq T$ es el subárbol generado por los vértices con $|v| \leq n$, se tiene que $\{T_n\}$ define una sucesión exhaustiva en T . Finalmente, para todo $v \in T^0$, $T(v)$ denota el subárbol de T generado por todos los vértices $w \geq v$.

Teorema I.4.2 *Sea X un continuo generalizado de Peano y T un árbol. Dada una aplicación continua $g : \mathcal{F}(X) \rightarrow \mathcal{F}(T)$ existe una aplicación propia $f : X \rightarrow T$ tal que $f_* = g$. Además, si g es sobreyectiva f también es sobreyectiva.*

Demostración. Sea $\{K_n\}$ una sucesión exhaustiva de X . Para cada nivel S_j consideramos el recubrimiento cerrado y abierto $\mathcal{G}_j = \{g^{-1}(\mathcal{F}(T_v)); v \in S_j\}$ de $\mathcal{F}(X)$. Este recubrimiento puede ser refinado por un recubrimiento $\{U^{\mathcal{F}}\}$ donde los conjuntos U son las componentes de $X - K_{n_j}$ para algún n_j . Podemos suponer que $n_1 < n_2 < \dots$

Sea $m_j = n_j + 1$ y $A_U^j = FrK_{m_j} \cap U$. Nótese que $K_{n_j} \subseteq intK_{m_j}$ implica que cada A_U^j es un conjunto compacto no vacío. Tomamos el vértice $f(A_U^j) = v_U^j = v$ si $g(\mathcal{F}(U)) \subseteq T_v$. Nótese que $v_U^j \leq v_W^{j+1}$ si $W \subseteq U$.

Para cada componente $U \subseteq X - K_{n_{j-1}}$ consideramos el árbol finito - $T_U(j - 1, j)$ generado por el vértice $f(A_U^{j-1})$ junto con todos los vértices $f(A_W^j)$ con $W \subseteq U$.

Por $D_U(j-i, j) \subseteq X$ denotamos la intersección $U \cap Cl(K_{m_j} - K_{m_{j-1}})$. Dado que un entorno de un árbol finito en \mathbf{R}^2 es un disco, podemos usar el Teorema de extensión de Tietze para extender $f : A_U^{j-1} \cup \{A_W^j; W \subseteq U\} \rightarrow T_U(j - 1, j)$ a una aplicación continua $f_U^{j-1} : D_U(j - 1, j) \rightarrow T_U(j - 1, j)$.

A partir de f_U^{j-1} se tiene $f^{j-1} : Cl(K_{m_j} - K_{m_{j-1}}) \rightarrow Cl(T_j - T_{j-1})$ ($j \geq 2$), que es una aplicación continua donde T_j es el árbol generado por todos los vértices v con $|v| \leq j$. Para $j = 0$, sea $f^0 : K_{m_1} \rightarrow T_1$ una extensión de $f^1|_{Fr(K_{m_1})}$ y $f^0(x_0) = v_0$ para todo elemento $x_0 \in intK_{m_1}$. Entonces las aplicaciones f^{j-1} ($j \geq 1$) definen una aplicación $f = \cup f^{j-1} : X \rightarrow T$. Además la aplicación f es propia, dado que $f(K_{m_j}) \subseteq T_j$ para todo $j \geq 1$. La conectividad de X implica que la imagen de $f(X)$ coincide con el subárbol de T generado por el vértice raíz v_0 y todos los vértices $f(A_U^j)$ con $j \geq 1$ y $U \subseteq X - K_{n_j}$. Por tanto $f(X) = T$ si g es sobreyectiva. La igualdad $f_* = g$ se deduce fácilmente de la definición de f . \square

En particular tenemos

Corolario I.4.3 *Sea X un continuo generalizado de Peano con $\mathcal{F}(X)$ el conjunto de Cantor. Entonces para todo árbol T existe una aplicación propia sobreyectiva $f : X \rightarrow T$.*

Demostración. El resultado sigue de (I.4.2), ya que todo espacio métrico compacto es la imagen continua del conjunto de Cantor ([38]; 4.1.6). \square

I.4. Un teorema de Hahn-Mazurkiewicz para continuos generalizados de Peano 27

En la demostración del siguiente teorema usaremos la siguiente propiedad relativa de la arcoconexión local uniforme (a.c.l.u.r.)

Lema I.4.4 *Sea X un continuo generalizado de Peano y $K \subseteq U \subseteq X$ con K compacto y U abierto. Dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $x, y \in K$ y $d(x, y) < \delta$ entonces x e y pueden unirse por un arco en U de diámetro menor que ε .*

En la demostración de (I.4.4) usamos la siguiente versión relativa del Lema de Lebesgue cuya demostración es análoga a la habitual en la literatura ([45]; 22.5) con las modificaciones obvias.

Lema I.4.5 *Sea (X, d) un espacio métrico y $K \subseteq X$ un subespacio compacto. Entonces para todo recubrimiento abierto \mathcal{U} de K por abiertos de X existe un número real $\lambda > 0$ tal que para todo conjunto $A \subseteq X$ con $A \cap K \neq \emptyset$ y diámetro $\delta(A) < \lambda$ se tiene $A \subseteq U$ para algún $U \in \mathcal{U}$.*

Demostración de (I.4.4). Sea $\varepsilon > 0$. Como todo continuo generalizado de Peano es localmente conexo por caminos (I.1.2), dado $x \in K$ existe un entorno abierto conexo por caminos de x $\Omega_x \subseteq U \cap B(x, \frac{\varepsilon}{2})$. Consideramos el recubrimiento abierto de K $\mathcal{U} = \{\Omega_x; x \in K\}$ y aplicamos el lema (I.4.5) para obtener $\delta > 0$ tal que dados dos puntos $x, x' \in K$ con $d(x, x') < \delta$ entonces $x, x' \in \Omega_y$ para algún y . Por ello existe un camino de x a x' en Ω_y que necesariamente es de diámetro $< \varepsilon$. \square

Ya estamos en condiciones de probar el siguiente Teorema de Hahn - Mazurkiewicz para continuos generalizados de Peano.

Teorema I.4.6 *Sea X un espacio topológico. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes*

- a) X es un continuo generalizado de Peano.
- b) Existe un árbol simple T y una aplicación perfecta sobreyectiva $g : T \rightarrow X$. Además T y g se pueden elegir de manera que $g_* : \mathcal{F}(T) \rightarrow \mathcal{F}(X)$ sea un homeomorfismo.

- c) Existe una aplicación perfecta sobreyectiva $f : T_C \longrightarrow X$.
- d) X se recubre por una sucesión creciente de subcontinuos de Peano $\{X_n\}_{n \geq 1}$ con $X_n \subseteq \text{int}X_{n+1}$.

Demostración. Obsérvese en primer lugar que b) \Rightarrow c) es una consecuencia inmediata de (I.4.3). Sea ahora $\{K_n\}_{n \geq 1}$ una sucesión exhaustiva de X .

a) \Rightarrow b) Construimos el árbol T inductivamente como sigue. El nivel S_0 consiste en un vértice $S_0 = \{v_0\}$. El nivel $S_n (n \geq 1)$ tiene un vértice por cada componente de $X - K_n$. Además los vértices $v \in S_n$ y $w \in S_{n+1} (n \geq 0)$ están unidos por una arista $\langle v, w \rangle$ si las correspondientes componentes $D_v \subseteq X - K_n$ y $D_w \subseteq X - K_{n+1}$ verifican que $D_w \subseteq D_v$. Si T^0 denota el conjunto de vértices de T , definimos la aplicación $f_0 : T^0 \longrightarrow X$ como sigue. Dado $v \in S_n$ sus correspondientes componentes D_v no son acotadas y por tanto $D_v \cap FrK_{n+1} \neq \emptyset$. Entonces $f_0(v)$ es cualquier punto en $D_v \cap FrK_{n+1}$.

Ahora la construcción de $f : T \longrightarrow X$ es una variación de la demostración del clásico Teorema de Hahn-Mazurkiewicz I.4.1; ver ([38]; 4.2.7). Primeramente, sabemos que X es conexo por caminos (I.1.2). Además, la propiedad a.c.l.u.r. se cumple para $E_n = (K_{n+2} - \text{int}K_n)$ en $B_n = (\text{int}K_{n+3}) - K_{n-1}$

En segundo lugar, si $C_{\langle v, w \rangle}$ denota la copia del conjunto de Cantor C obtenida por la identificación $[0, 1] = \langle v, w \rangle$, y $C_{\langle v, w \rangle}^1$ y $C_{\langle v, w \rangle}^2$ denotan las copias homeomorfas a $C_{\langle v, w \rangle}$ formadas por los puntos $\leq \frac{1}{3}$ y $\geq \frac{2}{3}$ respectivamente, sabemos por ([38]; 4.1.6) que existen aplicaciones sobreyectivas $f_{\langle v, w \rangle}^i : C_{\langle v, w \rangle}^i \rightarrow Cl(D)_v \cap E_n$. Además, como $C_{\langle v, w \rangle}^i$ es un espacio homogéneo ([45]; 30.A) podemos suponer que $f_{\langle v, w \rangle}^1(v) = f_0(v) \in Fr(K_{n+1})$ y $f_{\langle v, w \rangle}^2(w) = f_0(w) \in Fr(K_{n+2})$. Sea $f_{\langle v, w \rangle} = f_{\langle v, w \rangle}^1 \cup f_{\langle v, w \rangle}^2$.

En tercer lugar, vamos a extender $f_{\langle v, w \rangle}$ a una aplicación continua $g_{\langle v, w \rangle} : \langle v, w \rangle \longrightarrow X$ con $\text{Img}_{\langle v, w \rangle} \subseteq B_n$. La función $g_{\langle v, w \rangle}$ se obtiene usando la propiedad a.c.l.u.r. en lugar de la propiedad habitual de la arcoconexión local uniforme. Más concretamente, para todo $k \in \mathbf{N}$ sea $\delta_k > 0$ tal que cualesquiera dos puntos $x, y \in E_n$ con $d(x, y) < \delta_k$ se pueden unir por un camino en B_n de diámetro $< \frac{1}{k}$. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer $\delta_1 > \delta_2 > \dots$. Si (a, b) es una componente de $\langle v, w \rangle - C_{\langle v, w \rangle}$ con $d(f_{\langle v, w \rangle}(a), f_{\langle v, w \rangle}(b)) \geq \delta_1$

I.4. Un teorema de Hahn-Mazurkiewicz para continuos generalizados de Peano 29

entonces extendemos $f_{\langle v,w \rangle}$ sobre (a, b) por medio de cualquier camino en B_n . Si por el contrario $\delta_{j+1} \leq d(f_{\langle v,w \rangle}(a), f_{\langle v,w \rangle}(b)) < \delta_j$ entonces extendemos $f_{\langle v,w \rangle}$ por un camino en B_n de diámetro menor que $\frac{1}{n}$. De esta manera queda definida la función $g_{\langle v,w \rangle} : \langle v, w \rangle \rightarrow B_n$. La continuidad de $g_{\langle v,w \rangle}$ se demuestra como en ([38]; 4.2.7).

Sea $g : T \rightarrow X$ la aplicación definida por $g|_{\langle v,w \rangle} = g_{\langle v,w \rangle}$. Se comprueba fácilmente que g es propia, ya que $B_m \cap K_n = \emptyset$ si $m \geq n + 1$. Igualmente es claro que $g_* : \mathcal{F}(T) \rightarrow \mathcal{F}(X)$ es un homeomorfismo.

c) \Rightarrow d) Sea $Y_n = f(T_n)$ donde $T_n \subseteq T_C$ es el subárbol generado por los vértices de niveles $\leq n$. Entonces cada T_n es obviamente un continuo de Peano y el teorema de Hahn-Mazurkiewicz implica que X_n es también un continuo de Peano. Además, puesto que f preserva la compacidad local (I.3.3)(ii) X es localmente compacto, y de aquí que por cada Y_n podamos encontrar un conjunto abierto G_n con $Cl(G_n)$ compacto y $Y_n \subseteq G_n$. Como f es perfecta entonces existe k_n con $T_n \subseteq f^{-1}(G_n) \subseteq f^{-1}(Cl(G_n)) \subseteq T_{k_n}$. Entonces $Y_n \subseteq G_n \subseteq Y_{k_n}$ y por tanto $Y_n \subseteq int Y_{k_n}$. Es claro que se puede definir inductivamente una subsucesión creciente $Y_{k_1} \subseteq Y_{k_2} \subseteq \dots \subseteq$ con $Y_{k_i} \subseteq int Y_{k_{i+1}}$ y $X = \bigcup_{i=1}^{\infty} Y_{k_i}$. Ahora tomamos $X_i = Y_{k_i}$ para todo $i \geq 1$.

d) \Rightarrow a) Evidentemente X es un espacio Hausdorff, compacto, localmente conexo y localmente compacto. Además X es un espacio regular ([13]; 3.3.1) y 2^{\aleph_0} numerable puesto que es unión numerable de interiores de subespacios métricos compactos. Por tanto X metrizable por el teorema de metrización de Urysohn ([13]; 4.2.9), y concluimos que X es un continuo generalizado de Peano. \square

A continuación usamos los Teoremas I.4.2 y I.4.6 para probar los resultados siguientes (comparar con [33]; 8.19 y 8.20)

Corolario I.4.7 Sean X e Y dos continuos generalizados de Peano y sea $g : \mathcal{F}(X) \rightarrow \mathcal{F}(Y)$ una aplicación continua. Entonces existe una aplicación propia $f : X \rightarrow Y$ tal que $f_* = g$. Además si g es sobreyectiva f también.

Demostración. Por (I.4.6)(b) tenemos un árbol T y una aplicación perfecta sobreyectiva $h : T \rightarrow Y$ con $h_* : \mathcal{F}(T) \rightarrow \mathcal{F}(Y)$ un homeomorfismo.

Por el teorema (I.4.2) podemos encontrar una aplicación $f' : X \rightarrow T$ con $f'_* = h_*^{-1}g : \mathcal{F}(X) \rightarrow \mathcal{F}(T)$. Entonces $f = hf' : X \rightarrow T$ es una aplicación propia con $f_* = g$. Además si g es sobreyectiva entonces f' , y por tanto, f son sobreyectivas. \square

Como corolario inmediato del Corolario I.4.7 obtenemos el siguiente resultado de G.A. Swarup [37] que se utiliza para el estudio de finales de variedades y grupos.

Corolario I.4.8 *Sea M una variedad abierta. Existe una aplicación propia sobreyectiva $f : M \rightarrow \mathbf{R}$ si y sólo si M tiene al menos dos finales.*

El Corolario I.4.7 muestra que todo continuo generalizado de Peano X (por ejemplo cualquier variedad) es la imagen por una aplicación propia de cualquier otro continuo de Peano Y con el mismo espacio de finales. Más aún, Y se puede obtener como un cociente de X como se deduce del siguiente

Corolario I.4.9 *Sea X un continuo generalizado de Peano. Entonces un espacio Y que sea Hausdorff y 1^0 numerable o localmente compacto es el espacio cociente de una descomposición semicontinua superiormente de X si y sólo si Y es un continuo generalizado de Peano y existe una aplicación sobreyectiva $g : \mathcal{F}(X) \rightarrow \mathcal{F}(Y)$.*

Recordemos que una partición de X , \mathcal{G} , es una *descomposición semicontinua superiormente* si cada $A \in \mathcal{G}$ es compacto en X y para cada conjunto abierto $U \subseteq X$ con $A \subseteq U$ existen otro conjunto abierto $V \subseteq X$ que contiene a A tal que todo $A' \in \mathcal{G}$ que corte a V está contenido en U . Ahora (I.4.9) sigue de (I.4.7), (I.3.4) y ([8]; I.3.5).

Capítulo II

Conectividad en continuos de Peano

La noción de conexión en la teoría de grafos ha sido estudiada ampliamente. Muchos de los resultados en esta área están relacionados con el bien conocido Teorema de K. Menger (1927) y H. Whitney (1932) el cual afirma que “*para dos vértices de un grafo, el máximo número de caminos independientes entre ellos coincide con el mínimo número de vértices necesario para separarlos*”. Ver [30], [43] y [22].

El enunciado esencialmente topológico de este importantísimo teorema sugirió su formalización dentro de la categoría topológica. Un teorema de tipo Menger-Whitney, fue formulado por G. Nöbeling (1932) para continuos de Peano. Un estudio reciente sobre la conectividad en espacios métricos compactos es debido a A. Quillot (1984) [36]

Este capítulo contiene diversas generalizaciones del teorema de Nöbeling a los continuos generalizados de Peano. Los resultados serán aplicados en el capítulo 2 a grafos localmente finitos para obtener teoremas sobre conectividad ya conocidos en teoría de grafos, así como nuevos teoremas que son aportaciones originales de esta memoria.

II.1 Separación en continuos de Peano

En esta sección estudiamos la noción de conexión en los continuos generalizados de Peano. Sea X un continuo generalizado de Peano, recordemos que un *camino* en X con origen en $a \in X$ y extremo en $b \in X$ es una aplicación continua $\alpha : [0, 1] \rightarrow X$ con $\alpha(0) = a$ y $\alpha(1) = b$. Si $a = b$ el camino α se llama *ciclo*. Puesto que $\alpha(I)$ es un continuo de Peano (I.4.2) entonces existe un arco sumergido en $\alpha(I)$ de a a b , por lo que siempre podremos reemplazar, cuando sea necesario, un camino por un arco.

En lo que sigue, una *trayectoria* significará un camino, un rayo, o un birayo según el contexto. Un camino Λ entre dos conjuntos $A, B \subseteq X$ es un camino $\Lambda : a_0 - a_1$ con $\Lambda \cap A = \{a_0\}$ y $\Lambda \cap B = \{a_1\}$.

Dos caminos (rayos, respectivamente) $\Lambda, \Gamma : a - b$ ($\Lambda, \Gamma : a - \infty$, *resp.*) se dicen *independientes* cuando $\Lambda \cap \Gamma = \{a, b\}$ ($\Lambda \cap \Gamma = \{a\}$, *resp.*). Dos birayos son independientes cuando son disjuntos.

Notación. Una trayectoria se denotará habitualmente por una letra minúscula si se entiende como aplicación y por una letra mayúscula cuando se entienda como el conjunto imagen de esa aplicación.

Con el fin de simplificar consideramos el conjunto de símbolos $\{X, \infty, \mathcal{F}(X)\}$ y llamamos *tipo de conexión* a los pares (X, X) , (X, ∞) , $(X, \mathcal{F}(X))$, y $(\mathcal{F}(X), \mathcal{F}(X))$.

Dado un tipo de conexión (A, B) y $a \in A$ y $b \in B$ con $a \neq b$, el *orden de conexión* de (a, b) es el máximo número $Con(a, b)$ de trayectorias independientes de a a b . El *orden de conexión* del par $A_0 \subseteq A$, $B_0 \subseteq B$ es el número (posiblemente ∞) $Con(A_0, B_0) = \min\{Con(a, b); a \in A_0, b \in B_0, a \neq b\}$. El *orden de conexión de tipo* (A, B) de X es el número $Con(A, B)$. Decimos que X es *n-conexo de tipo* (A, B) si $Con(A, B) \geq n$. Nótese que para un espacio X con sólo un final, sólo están definidos los órdenes de conexión de tipo (X, X) y $(X, \infty) = (X, \mathcal{F}(X))$.

La noción dual de independencia de caminos es la noción de conjunto de corte. Por un *conjunto de corte* para $a, b \in X$ se entenderá un conjunto acotado $J \subseteq X$ tal que a y b están en diferentes componentes conexas de $X - J$. Recordemos que J se dice acotado si la clausura $Cl(J)$ es compacta.

Cuando introducimos los finales y el punto del infinito ∞ de un continuo generalizado de Peano, se pueden considerar diferentes nociones de conjunto de corte. Así, el mismo conjunto J es un conjunto de corte para $a \in X$ y ∞ si a está en una componente conexa acotada de $X - J$. Dados $a \in X$ y $\varepsilon \in \mathcal{F}(X)$, decimos que J es un conjunto de corte para a y ε cuando a no está en la misma componente $V_\varepsilon \subseteq X - J$ que define ε . Finalmente, J es un conjunto de corte para $\varepsilon, \varepsilon' \in \mathcal{F}(X)$ cuando $V_\varepsilon \neq V_{\varepsilon'}$.

Dado un tipo de conexión (A, B) el conjunto $J \subseteq X$ se dirá un *conjunto de corte de tipo (A, B)* si existen $a \in A$ y $b \in B$ para los que J es un conjunto de corte. Sea $\mathcal{S}(A, B)$ la familia de conjuntos de corte de tipo (A, B) ; esto es, $\mathcal{S}(A, B) = \cup\{\mathcal{S}(a, b); a \in A, b \in B, a \neq b\}$ donde $\mathcal{S}(a, b)$ es la familia de todos los conjuntos de corte para a y b . Más aún, definimos el *orden de corte* o *separación* de (a, b) como el número (posiblemente ∞) $Sep(a, b) = \min\{|J|; J \in \mathcal{S}(a, b)\}$. Aquí $|J|$ denota el cardinal de J . El *orden de corte* del par $A_0 \subseteq A, B_0 \subseteq B$ es el número $Sep(A_0, B_0) = \min\{|J|; J \in \mathcal{S}(a, b); a \in A_0, b \in B_0; a \neq b\}$. Por último, el *orden de corte* o *separación* de tipo (A, B) de X es el número $Sep(A, B) = \min\{|J|; J \in \mathcal{S}(A, B)\}$.

Damos a continuación una relación de resultados básicos sobre los distintos órdenes de corte

Definición II.1.1 Sea X un continuo generalizado de Peano. Dado $A \subseteq X$ se dice que A es $\mathcal{F}(X)$ -denso si $\mathcal{F}(X) \subseteq Cl_{\hat{X}}(A)$

Lema II.1.2 En un continuo generalizado de Peano X se verifican las siguientes igualdades para cualquier conjunto $\mathcal{F}(X)$ -denso A .

a) $\mathcal{S}(A, A) = \mathcal{S}(A, \mathcal{F}(X))$.

b) Si $|\mathcal{F}(X)| \geq 2$ entonces $\mathcal{S}(A, \infty) \cup \mathcal{S}(\mathcal{F}(X), \mathcal{F}(X)) = \mathcal{S}(A, \mathcal{F}(X))$.

Demostración. a) Sea $J \in \mathcal{S}(A, A)$ un conjunto de corte de los puntos $v, w \in A$. Sea C_v y C_w componentes conexas de v y w en $X - J$. Si ambas C_v y C_w son acotadas, necesariamente existe una tercera componente conexa infinita C_∞ , puesto que J es acotado. Entonces J separa v y w de todo final ε definido

por C_∞ , y por tanto $J \in \mathcal{S}(A, \mathcal{F}(X))$. Si C_v (C_w respectivamente) es infinita procedemos de la misma forma con $C_w = C_\infty$ ($C_v = C_\infty$, respectivamente). Hemos demostrado que $\mathcal{S}(A, A) \subseteq \mathcal{S}(A, \mathcal{F}(X))$. Recíprocamente, si J separa $v \in A$ de $\varepsilon \in \mathcal{F}(X)$, obviamente J separa v de todo punto $w \in V_\varepsilon \cap A$. Nótese que $V_\varepsilon \cap A \neq \emptyset$ por ser A $\mathcal{F}(X)$ -denso.

b) Si $J \in \mathcal{S}(\mathcal{F}(X), \mathcal{F}(X))$ entonces J separa dos finales $\varepsilon, \varepsilon' \in \mathcal{F}(X)$, y por tanto separa ε de todo punto de A en la componente conexa $V_\varepsilon' \subseteq X - J$ que define ε' . De aquí que $\mathcal{S}(\mathcal{F}(X), \mathcal{F}(X)) \subseteq \mathcal{S}(A, \mathcal{F}(X))$. Además, si $L \in \mathcal{S}(A, \infty)$ entonces J deja algún punto $v \in A$ en una componente conexa acotada $C_v \subseteq X - L$. Por tanto, L separa v de $\mathcal{F}(X)$, y $L \in \mathcal{S}(A, \mathcal{F}(X))$.

Ahora, si $K \in \mathcal{S}(A, \mathcal{F}(X)) - \mathcal{S}(\mathcal{F}(X), \mathcal{F}(X))$, K separa un final $\varepsilon \in \mathcal{F}(X)$ de un punto $v \in A$; pero la componente conexa $C_v \subseteq X - K$ que contiene a v debe ser acotada pues de otra manera $K \in \mathcal{S}(\varepsilon, \varepsilon')$ para todo ε' definido por C_v . Por tanto $K \in \mathcal{S}(A, \infty)$. \square

Proposición II.1.3 *En un continuo generalizado de Peano X se verifican las siguientes igualdades para cualquier conjunto $\mathcal{F}(X)$ -denso A .*

- a) $Sep(A, A) = Sep(A, \mathcal{F}(X)) \leq Sep(\mathcal{F}(X), \mathcal{F}(X))$.
- b) $Sep(A, \mathcal{F}(X)) \leq Sep(A, \infty)$.
- c) De hecho, cuando $|\mathcal{F}(X)| \geq 2$ tenemos

$$Sep(A, \mathcal{F}(X)) = \min\{Sep(A, \infty), Sep(\mathcal{F}(X), \mathcal{F}(X))\}.$$

Corolario II.1.4 *$Sep(X, X) = Sep(X, \mathcal{F}(X))$ es el menor orden de corte de X . Además, para un continuo generalizado de Peano X con un sólo final el orden de corte $Sep(\mathcal{F}(X), \mathcal{F}(X))$ no está definido y los otros dos órdenes de corte coinciden.*

Demostración de (II.1.3). Los apartados a) y b) son consecuencia directa de (II.1.2).

- c) Supongamos que $Sep(A, \mathcal{F}(X)) = n$ y sea $J \in \mathcal{S}(A, \mathcal{F}(X))$ con $|J| = n$.

Si $n < Sep(\mathcal{F}(X), \mathcal{F}(X))$ entonces J no pertenece a $\mathcal{S}(\mathcal{F}(X), \mathcal{F}(X))$ y por tanto $J \in \mathcal{S}(A, \infty)$ por (II.1.2)(b). De aquí que $Sep(A, \infty) \leq n$, y por b) se tiene $Sep(A, \infty) = n$.

Por otra parte, si $n < Sep(A, \infty)$, claramente $J \notin Sep(A, \infty)$. Por tanto $J \in \mathcal{S}(\mathcal{F}(X), \mathcal{F}(X))$ por (II.1.2)(b), luego $Sep(\mathcal{F}(X), \mathcal{F}(X)) \leq n$, y el apartado a) implica $Sep(\mathcal{F}(X), \mathcal{F}(X)) = n$. \square

Hemos definido varios órdenes de conexión en un continuo generalizado de Peano X para los puntos ideales del infinito. Sin embargo, las compactificaciones de Freudenthal y Alexandroff proporcionan continuos de Peano en los cuales los puntos del infinito aparecen como puntos ordinarios y para los que tenemos definidos un único orden de separación. En lo que sigue veremos que los órdenes de separación introducidos para los puntos del infinito pueden ser calculados dentro de la correspondiente compactificación. Para ello denotaremos por $Sep_Y(A, B)$ el orden separación de A y B en Y .

Para un continuo generalizado de Peano X se tienen los siguientes resultados

Proposición II.1.5 *Si $A, B \subseteq X$ entonces $Sep_{\widehat{X}}(A, B) = Sep_X(A, B)$.*

Demostración. \widehat{X} es un continuo de Peano por (I.1.12). Además, supongamos que $Sep(A, B) = m < \infty$ y sea $M \in \mathcal{S}(a, b)$ en \widehat{X} con $a \in A$ y $b \in B$ en X y $|M| = m$. Es claro que para $N = M - \mathcal{F}(X)$ se tiene $N \in \mathcal{S}(a, b)$ en \widehat{X} .

En efecto, si no fuera así, sea γ un camino de a a b en $\widehat{X} - N$. Puesto que el conjunto de finales $\{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m\} \subseteq M$ es finito, podemos encontrar entornos disjuntos conexos por caminos, digamos U_1, \dots, U_m , de $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m$ en \widehat{X} tales que además $a, b \notin U_i$ para todo $i \leq m$ (ver I.1.2). Entonces podemos desviar el camino dentro de U_i y obtener un camino γ'_i que no toca a los finales ε_i , contradiciendo que M separa a y b . Más aún, N necesariamente separa X , pues dados dos puntos $x, y \in X$ en las componentes de a y b en $\widehat{X} - N$ es inmediato que a y b quedan separados por N en X . Por tanto, $m = |M| \geq |N|$, y por ello $Sep_X(A, B) \leq |N| \leq |M| = Sep_{\widehat{X}}(A, B)$.

Supongamos ahora que $Sep_X(A, B) = k < \infty$ y sea $C \in \mathcal{S}(a, b)$ con $a \in A$ y $b \in B$ en X y $|C| = k$. Entonces si U_a y U_b son las componentes de a y b en $X - C$ es fácil probar que U_a^* y U_b^* son las componentes conexas de a y b en $\widehat{X} - C$ (ver I.1.5). Luego $C \in \mathcal{S}(a, b)$ en \widehat{X} y por ello $Sep_{\widehat{X}}(A, B) \geq |C| = Sep_X(A, B)$.

Claramente $Sep_{\widehat{X}}(A, B) = \infty$ si y sólo si $Sep_X(A, B) = \infty$. \square

Proposición II.1.6 *Si $A \subseteq X$ y $F \subseteq \mathcal{F}(X)$ se tiene $Sep_{\widehat{X}}(A, F) = Sep_X(A, F)$.*

Demostración. Supongamos que $Sep_{\widehat{X}}(A, F) = m < \infty$ y sea $M \in \mathcal{S}(a, \varepsilon)$ en X con $a \in A$ y $\varepsilon \in F$ y $|M| = m$. Tomando $N = M - \mathcal{F}(X)$ y siguiendo el razonamiento de la prueba de (II.1.5), se llega a que $N \in \mathcal{S}(a, \varepsilon)$ en \widehat{X} . Además $N \in \mathcal{S}(a, \varepsilon)$ en X , pues en caso contrario encontraríamos un rayo $R : a - \varepsilon$ en $X - N$ que nos define un camino en $\widehat{X} - N$ entre a y ε al tomar $R(\infty) = \varepsilon$. Así que $Sep_X(A, F) \leq |N| \leq |M| = Sep_{\widehat{X}}(A, F)$.

Sea ahora $Sep_X(A, F) = k < \infty$ y sea $N \in \mathcal{S}(a, \varepsilon)$ en X con $a \in A$ y $\varepsilon \in F$ y $|N| = k$. Si C_a y C_ε son las componentes conexas de a y ε en $X - N$ es fácil probar que C_a^* y C_ε^* son las componentes conexas de a y ε en $\widehat{X} - N$ (ver I.1.5). Luego $N \in \mathcal{S}(a, \varepsilon)$ en \widehat{X} y por ello $Sep_{\widehat{X}}(A, F) \geq |N| = Sep_X(A, F)$.

Claramente $Sep_{\widehat{X}}(A, F) = \infty$ si y sólo si $Sep_X(A, F) = \infty$. \square

Proposición II.1.7 *Si $F, F' \subseteq \mathcal{F}(X)$ se tiene $Sep_{\widehat{X}}(F, F') = Sep_X(F, F')$.*

Demostración. Supongamos que $Sep_{\widehat{X}}(F, F') = m < \infty$ y sea $M \in \mathcal{S}(\varepsilon, \varepsilon')$ en X con $\varepsilon \in F$ y $\varepsilon' \in F'$ y $|M| = m$. Tomando $N = M - \mathcal{F}(X)$ y siguiendo el razonamiento de la demostración de (II.1.5), se llega a que $N \in \mathcal{S}(\varepsilon, \varepsilon')$ en \widehat{X} . Además $N \in \mathcal{S}(\varepsilon, \varepsilon')$ en X , pues en caso contrario encontraríamos un rayo $R : \varepsilon - \varepsilon'$ en $X - N$ que nos define un camino en $\widehat{X} - N$ entre ε y ε' al tomar $R(-\infty) = \varepsilon$ y $R(+\infty) = \varepsilon'$. Así que $Sep_X(F, F') \leq |N| \leq |M| = Sep_{\widehat{X}}(F, F')$.

Sea ahora $Sep_X(F, F') = k < \infty$ y sea $N \in \mathcal{S}(\varepsilon, \varepsilon')$ en X con $\varepsilon \in F$ y $\varepsilon' \in F'$ y $|N| = k$. Si C_ε y $C_{\varepsilon'}$ son las componentes conexas de ε y ε' en $X - N$ es fácil probar que C_ε^* y $C_{\varepsilon'}^*$ son las componentes conexas de ε y ε' en $\widehat{X} - N$ (ver I.1.5). Luego $N \in \mathcal{S}(\varepsilon, \varepsilon')$ en \widehat{X} y por ello $Sep_{\widehat{X}}(F, F') \geq |N| = Sep_X(F, F')$.

Claramente $Sep_{\widehat{X}}(F, F') = \infty$ si y sólo si $Sep_X(F, F') = \infty$. \square

Proposición II.1.8 $Sep_{\widehat{X}}(\widehat{X}, \widehat{X}) = Sep_X(X, X)$.

Demostración. Obviamente $X \subseteq \widehat{X}$, por lo que aplicando (II.1.5) se tiene $Sep_{\widehat{X}}(\widehat{X}, \widehat{X}) \leq Sep_{\widehat{X}}(X, X) = Sep_X(X, X)$. Sea ahora $J \in \mathcal{S}(\widehat{X}, \widehat{X})$ y $|J| = Sep_{\widehat{X}}(\widehat{X}, \widehat{X}) < \infty$. Entonces $J \in \mathcal{S}(a, b)$ para ciertos puntos $a, b \in \widehat{X}$. En primer lugar, si $a, b \in X$ entonces $Sep_X(X, X) \leq |J| = Sep_{\widehat{X}}(\widehat{X}, \widehat{X})$. En segundo lugar, si $a \in X$ y $b \in \mathcal{F}(X)$ aplicando (II.1.3) y la primera parte de la demostración de (II.1.6) tenemos que $Sep_X(X, X) = Sep_X(X, \mathcal{F}(X)) \leq |J| = Sep_{\widehat{X}}(\widehat{X}, \widehat{X})$. Por último, si $a, b \in \mathcal{F}(X)$ entonces por (II.1.3) y la primera parte de la demostración de (II.1.7) tenemos $Sep_X(X, X) \leq Sep_X(\mathcal{F}(X), \mathcal{F}(X)) \leq |J| = Sep_{\widehat{X}}(\widehat{X}, \widehat{X})$.

Claramente $Sep_X(X, X) = \infty$ si y sólo si $Sep_{\widehat{X}}(\widehat{X}, \widehat{X}) = \infty$. \square

Proposición II.1.9 Si $A \subseteq X$ se tiene $Sep_{X^+}(A, \infty) = Sep_X(A, \infty)$.

Demostración. Recordemos que X^+ es continuo de Peano (I.1.12). Supongamos que $Sep_X(A, \infty) = m < \infty$ y sea $M \in \mathcal{S}(a, \infty)$ en X con $|M| = m$ con $a \in A$. Obviamente $M \subseteq X$. Además, si C_x es la componente (acotada) de $X - M$ con $x \in C_x$ es claro que C_x sigue siendo componente conexa de x en $X^+ - M$ con $\infty \notin C_x$. Por tanto, M separa x de ∞ en X^+ . Luego $Sep_X(A, \infty) = |M| = Sep_{X^+}(a, \infty) \geq Sep_{X^+}(A, \infty)$.

Supongamos ahora $Sep_{X^+}(A, \infty) = k < \infty$ y sea $N \in \mathcal{S}(A, \infty)$ en X^+ con $|N| = k$. Evidentemente $\infty \notin N$, luego $N \in \mathcal{S}(X, \infty)$ en X , y por tanto $Sep_X(A, \infty) = |N| = k \geq Sep_{X^+}(A, \infty)$.

Claramente $Sep_X(A, \infty) = \infty$ si y sólo si $Sep_{X^+}(A, \infty) = \infty$. \square

Nota II.1.10 Obsérvese que en general no se verifica $Sep_{X^+}(x, y) = Sep_X(x, y)$. Basta tomar $X = \mathbf{R}$; entonces $X^+ = S^1$ y para cualesquiera dos puntos $x, y \in X$ $Sep_{S^1}(x, y) = 2 \leq 1 = Sep_{\mathbf{R}}(x, y)$

II.2 Relación entre los conjuntos Sep y Con.

Teorema de Menger-Nöbeling

Muchos resultados relacionados con la noción de conexión se pueden encontrar en la teoría de grafos. El resultado clásico sobre conexión es el bien conocido Teorema de Menger-Whitney, el cual afirma que “*para dos vértices de un grafo, el máximo número de caminos independientes entre ellos es igual que el mínimo número de vértices necesario para separarlos*”. Ver [30], [43] y [22].

Los distintos teoremas de tipo Menger-Whitney relacionando los conjuntos de corte y los correspondientes conjuntos de trayectorias independientes para los tipos de conexión en §II.1 pueden ser resumidos en la siguiente versión general.

Teorema II.2.1 (*Menger-Whitney*) *Sea G un grafo localmente finito y sea (A, B) cualquier tipo de conexión. Entonces para todo par de conjuntos $A_0 \subseteq A$ y $B_0 \subseteq B$ se tiene $Con(A_0, B_0) = Sep(A_0, B_0)$. En particular $Con(A, B) = Sep(A, B)$ para todo tipo de conexión (A, B) .*

Para los pares $(V(G), V(G))$, $(V(G), \infty)$, $(V(G), \mathcal{F}(G))$ y $(\mathcal{F}(G), \mathcal{F}(G))$ se pueden encontrar las demostraciones en [22], [19], [20], y [35] respectivamente.

En esta memoria se da una demostración unificada del Teorema II.2.1 como consecuencia de los resultados obtenidos en esta sección para continuos generalizados de Peano. Ver Nota III.1.2.

Comenzamos con el siguiente teorema debido a Nöbeling [34] que generaliza para continuos de Peano el teorema de Menger-Whitney para el par $(V(G), V(G))$.

Teorema II.2.2 (*Nöbeling*) *Para dos conjuntos cerrados disjuntos de un continuo de Peano, el máximo número de caminos independientes entre ellos es igual que el mínimo número de puntos necesario para separarlos.*

El objetivo de esta sección es extender el resultado de Nöbeling a los diversos tipos de conexión introducidos en §II.1 para un continuo generalizado de

Peano X . Esto se hace más adelante en el Teorema II.2.8. Como consecuencia se obtiene el Teorema II.2.1. Ver Nota III.1.2.

Teorema II.2.3 *Para todo $A, B \subseteq X$ se tiene $Con_X(A, B) = Con_{\widehat{X}}(A, B)$. En particular $Con_X(X, X) = Con_{\widehat{X}}(X, X)$.*

Demostración. Supongamos $Con_{\widehat{X}}(A, B) = k < \infty$ y sean k caminos independientes $\gamma_1, \dots, \gamma_k$ en \widehat{X} entre los puntos $a \in A$ y $b \in B$. Ahora procedemos a reemplazar los caminos $\{\gamma_i\}$ por una nueva colección $\gamma'_1, \dots, \gamma'_k$ de caminos independientes en X que siguen uniendo a con b .

Sea d la distancia que define la topología de \widehat{X} . Puesto que $F_i = \mathcal{F}(X) \cap \gamma_i$ es una familia de subconjuntos compactos disjuntos dos a dos en \widehat{X} , podemos encontrar $\eta > 0$ tal que $d(F_i, F_j) > \eta$. Luego podemos encontrar un compacto $K \subset X$ tal que cada componente no acotada $C \subset X - K$ verifica que el diámetro $\delta(C^*)$ es más pequeño que η ; en particular, $\delta(C^* \cap \mathcal{F}(X)) < \eta$. Por ello C^* corta como mucho a un conjunto F_i . Nótese que la intersección $C^{\mathcal{F}} = C^* \cap \mathcal{F}(X)$ es abierta y cerrada en $\mathcal{F}(X)$ y C^* es abierto en \widehat{X} . Además, para cada C sean $p_i^C, q_i^C \in C^* \cap F_i$ el primer y el último punto de γ_i respectivamente. Puesto que C^* es abierto en \widehat{X} , por continuidad existen puntos $x_i^C \in \gamma_i \cap C$ con $x_i^C < p_i^C$ e $y_i^C \in \gamma_i \cap C$ con $q_i^C < y_i^C$. Entonces podemos desviar el camino γ_i dentro de C uniendo x_i^C con y_i^C . Puesto que el número de componentes C es finito, encontramos una nueva familia de caminos independientes dos a dos $\gamma'_1, \gamma'_2, \dots, \gamma'_k$ en X de a a b , luego $Con_X(a, b) \geq k = Con_{\widehat{X}}(a, b)$.

El recíproco es inmediato, dado que todo conjunto de caminos de a a b independientes en X son caminos independientes en \widehat{X} , por tanto se tiene que $Con_X(a, b) \leq Con_{\widehat{X}}(a, b)$.

Claramente $Con_X(A, B) = \infty$ si y sólo si $Con_{\widehat{X}}(A, B) = \infty$. \square

Proposición II.2.4 *Si $F, F' \subseteq \mathcal{F}(X)$ se tiene $Con_{\widehat{X}}(F, F') = Con_X(F, F')$.*

Demostración. Supongamos $Con_{\widehat{X}}(F, F') = k$ y sean $\varepsilon \in F$ y $\varepsilon' \in F'$. Entonces existen al menos k caminos independientes $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_k$ de $\varepsilon \in F$ a $\varepsilon' \in F'$ en \widehat{X} . Usando el mismo proceso de desviación que en la demostración de (II.2.3)

podemos inductivamente encontrar para todo $m \geq 1$ una familia $\{\gamma_i^m\}_{1 \leq i \leq k}$ de caminos independientes $\gamma_i^m : [-1, 1] \rightarrow \widehat{X}$ de ε' a ε y una sucesión exhaustiva $K_m \subseteq \text{int}K_{m+1}$ en X tales que

$$\gamma_i^m\left(\left[\frac{-m}{m+1}, \frac{m}{m+1}\right]\right) \subseteq X,$$

$$\gamma_i^{m-1}(x) = \gamma_i^m(x) \text{ si } x \in \left[\frac{-m+1}{m}, \frac{m-1}{m}\right] \quad (m \geq 2)$$

y

$$\gamma_i^m\left[-1, \frac{-m}{m+1}\right] \subseteq C_\varepsilon^m$$

$$\gamma_i^m\left[\frac{m}{m+1}, 1\right] \subseteq C_{\varepsilon'}^m$$

donde C_ε^m y $C_{\varepsilon'}^m$ son las componentes de $X - K_m$ que definen a ε y ε' respectivamente.

En efecto, el modo de definir γ_i^1 es justamente una variación de la demostración de (II.2.3). Más explícitamente, separamos ε y ε' por medio de dos componentes C_ε^1 y $C_{\varepsilon'}^1$, es decir, $C_\varepsilon^{1*} \cap C_{\varepsilon'}^{1*} = \emptyset$ (I.1.5). Entonces si $F_i = \mathcal{F}(X) \cap \gamma_i$ el conjunto $F'_i = F_i - (C_\varepsilon^{1*} \cup C_{\varepsilon'}^{1*})$ es compacto. Además, por ser $\mathcal{F}(X)$ 0-dimensional, existen puntos en X $p_i^1 \in C_\varepsilon^1 \cap \gamma_i$ y $q_i^1 \in C_{\varepsilon'}^1 \cap \gamma_i$. Aplicamos la demostración de (II.2.3) con $a = p_i^1$ y $b = q_i^1$ y encontramos caminos independientes γ_i^1 de ε a ε' tales que los subcaminos $\rho_i^1 \subset \gamma_i^1$ desde p_i^1 a q_i^1 están contenidos en X . Finalmente, los caminos son reparametrizados tomando $\gamma_i^1\left(\left[\frac{-1}{2}, \frac{1}{2}\right]\right) = \rho_i^1$. Ahora procedemos de la misma forma dentro de las componentes disjuntas $C_{\varepsilon'}^{1*}$, C_ε^{1*} con nuevas componentes $C_\varepsilon^2 \subseteq C_\varepsilon^1$ y $C_{\varepsilon'}^2 \subseteq C_{\varepsilon'}^1$.

Se comprueba fácilmente que $R_i = \bigcup_{m \geq 1} \gamma_i^m$ define un birayo de ε a ε' , $R_i : \mathbf{R} \cong [-1, 1] - \{\pm 1\} \rightarrow X$, obteniéndose así una familia de k birayos disjuntos R_1, \dots, R_k de ε a ε' en X . Luego $\text{Con}_X(\varepsilon, \varepsilon') \geq k$, y por tanto se tiene que $\text{Con}_X(F, F') \geq k = \text{Con}_{\widehat{X}}(F, F')$. El recíproco es inmediato.

Claramente $\text{Con}_X(F, F') = \infty$ si y sólo si $\text{Con}_{\widehat{X}}(F, F') = \infty$. \square

Proposición II.2.5 Si $A \subseteq X$ y $F \subseteq \mathcal{F}(X)$ se tiene $\text{Con}_{\widehat{X}}(A, F) = \text{Con}_X(A, F)$.

Demostración. Supongamos $Con_{\widehat{X}}(A, F) = k$ y sean $a \in A$ y $\varepsilon \in F$. Entonces existen al menos k rayos independientes $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_k$ de $a \in A$ a $\varepsilon \in F$ en \widehat{X} . Usando el mismo proceso de desviación que en la demostración de (II.2.3), podemos inductivamente encontrar para todo $m \geq 1$ una familia $\{\gamma_i^m\}_{1 \leq i \leq k}$ de caminos independientes $\gamma_i^m : [-1, 1] \rightarrow \widehat{X}$ de a a ε y una sucesión exhaustiva $K_m \subseteq intK_{m+1}$ de componentes de X con

$$\gamma_i^m([-1, \frac{m}{m+1}]) \subseteq X ,$$

$$\gamma_i^{m-1}(x) = \gamma_i^m(x) \text{ si } x \in [-1, \frac{m-1}{m}] \text{ (} m \geq 2 \text{)}$$

y

$$\gamma_i^m[\frac{m}{m+1}, 1] \subseteq C_\varepsilon^m$$

donde C_ε^m la componente de $X - K_m$ que definen a ε

En efecto, el modo de definir γ_i^1 es justamente una variación de la demostración de (II.2.3). Más explícitamente, tomamos una componente C_ε^1 con $a \notin C_\varepsilon^1$. Entonces si $F_i = \mathcal{F}(X) \cap \gamma_i$ el conjunto $F'_i = F_i - C_\varepsilon^{1*}$ es compacto. Además, por ser $\mathcal{F}(X)$ 0-dimensional, existe un punto en X $q_i^1 \in C_\varepsilon^1 \cap \gamma_i$. Aplicamos la demostración de (II.2.3) con a y $b = q_i^1$ y encontramos caminos independientes γ_i^1 de a a ε tales que los subcaminos $\rho_i^1 \subset \gamma_i^1$ desde a a q_i^1 están contenidos en X . Finalmente, los caminos son reparametrizados tomando $\gamma_i^1([-1, \frac{1}{2}]) = \rho_i^1$. Ahora procedemos de la misma forma dentro de C_ε^{1*} con una nueva componente $C_\varepsilon^2 \subseteq C_\varepsilon^1$ y seguimos inductivamente.

Se comprueba fácilmente que $R_i = \bigcup_{m \geq 1} \gamma_i^m$ define un rayo de a a ε , - $R_i : \mathbf{R}^+ \cong [-1, 1]\{1\} \rightarrow X$, y se obtiene así una familia de k rayos disjuntos R_1, \dots, R_k de a a ε en X . Luego $Con_X(a, \varepsilon) \geq k$, y por tanto se tiene que $Con_X(A, F) \geq k = Con_{\widehat{X}}(A, F)$. El recíproco es inmediato.

Claramente $Con_X(A, F) = \infty$ si y sólo si $Con_{\widehat{X}}(A, F) = \infty$. \square

Siguiendo la misma técnica de demostración, pero de manera más simple, obtenemos la siguiente proposición

Proposición II.2.6 Si $A \subseteq X$ se tiene $Con_X(A, \infty) = Con_{X^+}(A, \infty)$.

Nota II.2.7 Obsérvese que no se tiene $Con_X(A, B) = Con_{X^+}(A, B)$ si $A, B \subseteq X$; ver (II.1.10)

Como consecuencia de los resultados anteriores tenemos la siguiente generalización del Teorema de Nöbeling análoga a la generalización del Teorema de Menger-Whitney en (II.2.1).

Teorema II.2.8 Sea X un continuo generalizado de Peano y sea (A, B) cualquier tipo de conexión. Entonces para todo par de conjuntos cerrados $A_0 \subseteq A$ y $B_0 \subseteq B$ se tiene $Con(A_0, B_0) = Sep(A_0, B_0)$. En particular, $Con(A, B) = Sep(A, B)$ para todo tipo de conexión (A, B) .

Demostración. Sea $Y = \widehat{X}, X^+$ la compactificación de Freudenthal y la compactificación de Alexandroff de X respectivamente, que son continuos de Peano (I.1.12). Por los resultados de §II.1 tenemos igualdades de la forma $Sep_Y(-, -) = Sep_X(-, -)$. En las Proposiciones II.2.3 , II.2.4 , II.2.5 y II.2.6 se han demostrado las correspondientes igualdades $Con_Y(-, -) = Con_X(-, -)$. Finalmente, las igualdades $Con_Y(-, -) = Sep_Y(-, -)$ son ahora consecuencias inmediatas del Teorema de Nöbeling y combinando las tres igualdades se sigue el resultado. \square

Corolario II.2.9 $Con_{\widehat{X}}(\widehat{X}, \widehat{X}) = Con_X(X, X)$.

II.2A Otras cotas de órdenes de separación

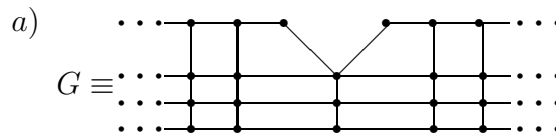
Teniendo en cuenta los teoremas anteriores se pueden restablecer (II.1.3) y (II.1.4) para $Con(A, B)$ para todo tipo de conexión . A estos resultados añadimos nuevas desigualdades en la siguiente proposición (II.2A.1). Para ello definimos el ancho del final ε , $w(\varepsilon)$, de un continuo generalizado X como el máximo número de rayos disjuntos dos a dos que define ε . Nótese que dicho número puede ser infinito. El número $w(\varepsilon)$ para grafos se encuentra en [19], y también en [35] donde se llama

multiplicidad. El ancho de $\mathcal{F}(X)$ es el número $w(X) = \min\{w(\varepsilon); \varepsilon \in \mathcal{F}(X)\}$. Mediante la noción de orden de $x \in X$ en X (ver (I.2.13)) definimos el orden de X como el número (posiblemente ∞) $ord(X) = \min\{ord(x; X); x \in X\}$. Obsérvese que para un grafo G y un vértice v de G , $ord(v; G)$ es justamente la valencia de v en G .

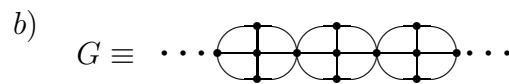
Proposición II.2A.1 *Si $w(X)$ y $ord(X)$ son respectivamente el ancho y orden de un continuo generalizado de Peano X entonces para cualquier conjunto $\mathcal{F}(X)$ -denso A se verifican las desigualdades $Sep(\mathcal{F}(X), \mathcal{F}(X)) \leq w(X)$ y $\max\{Sep(A, \infty), Sep(A, A)\} \leq ord(X)$.*

Demostración. La demostración es inmediata. \square

Notas II.2A.2 (1) El ejemplo siguiente muestra grafos para los cuales las desigualdades (II.1.3) y (II.2A.1) son estrictas.



$$Sep(V(G), \mathcal{F}(G)) = Sep(G, \mathcal{F}(G)) = 2 < Sep(\mathcal{F}(G), \mathcal{F}(G)) = 3 < w(G) = 4$$



$$Sep(V(G), \mathcal{F}(G)) = Sep(G, \mathcal{F}(G)) = 1 < Sep(G, \infty) = 2 < val(G) = ord(G) = 3$$

Figura 2.1

(2) Nótese que fijados los valores $ord(X)$ y $|\mathcal{F}(X)|$ se pueden encontrar valores arbitrariamente grandes para $Sep(\mathcal{F}(X), \mathcal{F}(X))$. Damos un ejemplo con $ord(X) = 2 = |\mathcal{F}(X)|$. Sea Λ_n un camino con n aristas. Entonces el grafo $G_n = \Lambda_n \times \mathbf{Z} \cup \{v \times \mathbf{R}; v \in V(\Lambda_n)\}$ verifica $Sep(\mathcal{F}(G_n), \mathcal{F}(G_n)) = n$ mientras que $ord(G_n) = 2$ y $|\mathcal{F}(G_n)| = 2$ para todo n .

II.3 Variantes del Teorema de Nöbeling para continuos (generalizados) de Peano

Esta sección contiene diversos teoremas sobre la conectividad en continuos generalizados de Peano. Estos resultados tendrán consecuencias importantes en la teoría de grafos; ver §III.3.

Proposición II.3.1 *Sea X un continuo (generalizado) de Peano. Sean el conjunto $\mathcal{N} = \{x_1, \dots, x_p\}$ y $v \in X - \mathcal{N}$. Supongamos $\text{Con}(x_k, v) = n$ para todo k . Entonces dado un conjunto de enteros positivos $\{a_1, \dots, a_p\}$ con $\sum_{k=1}^p a_k = n$, existen n caminos independientes de \mathcal{N} a v tales que a_k de ellos comienzan en x_k .*

Demostración. Sea $Y = X - \mathcal{N}$; claramente Y es un continuo generalizado de Peano. Obsérvese que $\mathcal{F}(X) \subseteq \mathcal{F}(Y)$. Más aún, existe una epiyección continua $\hat{f} : \hat{Y} \rightarrow \hat{X}$ tal que $\hat{f} = \text{id}$ en $Y \cup \mathcal{F}(X) \subseteq \hat{Y}$, y para todo k , $\hat{f}^{-1}(x_k) = F_k \subseteq \mathcal{F}(Y)$ es un cerrado no vacío.

Para cada k sea $\mathcal{R}(k)$ una familia de n caminos independientes en X desde x_k a v . Obsérvese que para cada rayo $R \in \mathcal{R} = \cup_{k=1}^p \mathcal{R}(k)$ la diferencia $R - \mathcal{N}$ consiste en una colección finita de rayos en Y . El conjunto de finales de $\cup_{k=1}^p F_k$ determinado por los rayos de $R - \mathcal{N}$ se llamará el conjunto de *finales generados* por R . Sea $K \subseteq Y$ un compacto tal que $v \in \text{int}K$ y tal que, para cada $\varepsilon \in \cup_{k=1}^p F_k$, en el entorno $V_\varepsilon \subseteq Y - K$ que determina a ε sólo están los rayos que generan a ε . Obsérvese que un final $\varepsilon \in F_k$ puede ser generado por algún camino de $\mathcal{R}(k')$ con $k' \neq k$. Sin embargo, para todo k , si $R \in \mathcal{R}(k)$ sólo existe un final $\varepsilon \in F_k$ entre los finales generados por R . Por comodidad escribiremos $\varepsilon = \mathcal{F}(R)$ y a ε se le llamará *final principal* asociado a R . Denotemos por $\mathcal{F}(k) \subseteq F_k$ el conjunto de los finales principales; esto es, $\mathcal{F}(k) = \{\varepsilon \in F_k; \varepsilon = \mathcal{F}(R) \text{ y } R \in \mathcal{R}(k)\}$. Si $R \in \mathcal{R}$ para cada final $\varepsilon \in \cup_{k=1}^p F_k$ generado por R denotaremos por $T_R \subseteq R \cap V_\varepsilon$ a cualquiera de los subrayos determinados por R dentro de V_ε . Obsérvese que T_R puede denotar posiblemente a dos rayos distintos en R si ε no es un final principal de R .

II.3. Variantes del Teorema de Nöbeling para continuos (generalizados) de Peano 45

Dado $\varepsilon \in \cup_{k=1}^p F_k$ formamos la familia \mathcal{T}_ε que contiene a todos los rayos T_R ($R \in \mathcal{R}$) cuyo final es ε . Elegimos una subfamilia $\mathcal{M}_\varepsilon \subseteq \mathcal{T}_\varepsilon$ tal que

$$|\mathcal{M}_\varepsilon| = \max\{|\mathcal{H}|; \mathcal{H} \subseteq \mathcal{T}_\varepsilon \text{ y los rayos de } \mathcal{H} \text{ son disjuntos dos a dos}\}.$$

Ahora para cada $R \in \mathcal{R}$ con $\varepsilon = \mathcal{F}(T_R)$ y tal que $T_R \notin \mathcal{M}_\varepsilon$ elegimos un conjunto Ψ_R de n caminos disjuntos dos a dos en V_ε , uniendo T_R con todos los subrayos de \mathcal{M}_ε . Esto es posible por la definición de final de Freudenthal. Llamamos *red* de T_R al conjunto Ψ_R . Nótese que algunos caminos de Ψ_R pueden degenerar a un punto.

Para cada $R \in \mathcal{R}$ consideramos un subcamino Γ_R^I en cada intervalo abierto $I \subseteq R$ determinado por los puntos de $\mathcal{N} - \{x_k\}$ en R tal que Γ_R^I contiene a todos los puntos de la red Ψ_R en I .

Sea \mathcal{J}_R la familia de los intervalos I anteriores, y tomemos

$$X_1 = \bigcup\{\Gamma_R^I, R \in \mathcal{R}, I \in \mathcal{J}_R\} \bigcup\{\Psi_R, R \in \mathcal{R}\}$$

Para cada $T_R \in \mathcal{M}_\varepsilon$, sea $I \in \mathcal{J}_R$ con $T_R \subseteq I$ y $p(T_R)$ el último punto en $T_R \cap \Gamma_R^I$ con respecto al orden natural de $T_R \cong [0, \infty)$ definido al identificar ε con ∞ . Consideremos el conjunto

$$\Theta_k = \{p(T_R); T_R \in \mathcal{M}_\varepsilon \text{ y } \varepsilon \in \cup_{k=1}^p F_k\}.$$

Construimos un nuevo continuo de Peano X_0 como sigue: tomamos $\{D_k\}_{1 \leq k \leq p}$, conjuntos disjuntos dos a dos con $|D_k| = a_k$, y formamos los grafos bipartitos completos $L_k = K(D_k, \Theta_k)$ y $C = K(c, \cup_{k=1}^p D_k)$ donde c es un nuevo vértice. Por (I.3.7) $X_0 = X_1 \cup \cup_{k=1}^p L_k \cup C$ es efectivamente un continuo de Peano.

Además $Con(v, c) \geq n$ en X_0 . En caso contrario, sea $J \subseteq X_0$ un conjunto separador de v y c en X_0 con $|J| \leq n - 1$. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $J \cap (\cup_{k=1}^p L_k \cup C) \subseteq \cup_{k=1}^p D_k \cup \Theta_k$ (ver la demostración de III.1.1). Como $\sum_{i=1}^p a_k = n$, existe un k_0 tal que $D_{k_0} - J \neq \emptyset$. Sea $z \in D_{k_0} - J$. Por hipótesis existe en X un camino $R_0 \in \mathcal{R}(k_0)$ que no contiene puntos de J . No obstante R_0 podría contener algunos otros puntos de $\mathcal{N} - \{x_{k_0}\}$. Veamos a continuación que siempre es posible elegir R_0 de manera que para todo $x_j \in \mathcal{N} \cap R_0$

tengamos $D_j - J \neq \emptyset$. En otro caso, todos los caminos en $\mathcal{R}(k_0)$ que evitan $J \cap X_1$ contendrían algún $x_j \in \mathcal{N}$ con $D_j \subseteq J$. Sea $\Lambda = \{k; D_k \subseteq J\}$. Entonces necesariamente $n = |\mathcal{R}(k_0)| \leq |J \cap X_1 \cup \{x_k; k \in \Lambda\}|$. Más aún, puesto que $D_k \subseteq J$ para todo $k \in \Lambda$, se sigue $|J \cap X_1| \leq n - 1 - \sum_{k \in \Lambda} a_k$, y de aquí se concluye $n \leq |J \cap X_1| + |\Lambda| \leq n - 1$, que es contradicción.

Por tanto hemos probado que existe un conjunto no vacío $\mathcal{L}(k_0) \subseteq \mathcal{R}(k_0)$ que consiste en aquellos caminos $R \in \mathcal{R}(k_0)$ que no cortan a J y tales que para cada $j \neq k_0$ con $x_j \in R \cap \mathcal{N}$ tenemos $D_j - J \neq \emptyset$. Consideremos el conjunto de finales $\mathcal{C}(k_0) = \{\varepsilon \in \mathcal{F}(k_0); \varepsilon = \mathcal{F}(R) \text{ con } R \in \mathcal{L}(k_0)\}$.

Probamos ahora que existe $\varepsilon_0 \in \mathcal{C}(k_0)$ tal que para algún $T_0 \in \mathcal{M}_{\varepsilon_0}$ $T_0 \cap J = \emptyset$. En caso contrario, si $m_\varepsilon = |\mathcal{M}_\varepsilon|$ y, como antes, $\Lambda = \{k; D_k \subseteq J\}$ entonces

$$\sum_{\varepsilon \in \mathcal{C}(k_0)} m_\varepsilon \leq (n - 1) - \sum_{k \in \Lambda} a_k - r$$

donde $r = |J - \bigcup_{\varepsilon \in \mathcal{C}(k_0)} V_\varepsilon|$. Además, si w_ε es el número total de rayos en $\mathcal{R}(k_0)$ que tienen a ε como final principal, la maximalidad de \mathcal{M}_ε da

$$\sum_{\varepsilon \in \mathcal{C}(k_0)} w_\varepsilon \leq \sum_{\varepsilon \in \mathcal{C}(k_0)} m_\varepsilon \leq (n - 1) - \sum_{k \in \Lambda} a_k - r$$

Ahora bien, por definición de $\mathcal{C}(k_0)$

$$\sum_{\varepsilon' \in \mathcal{F}(k_0) - \mathcal{C}(k_0)} w_{\varepsilon'} \leq r + |\Lambda|$$

y como $|\Lambda| \leq \sum_{k \in \Lambda} a_k$, tenemos

$$n = \sum_{\varepsilon \in \mathcal{F}(k_0)} w_\varepsilon = \sum_{\varepsilon \in \mathcal{C}(k_0)} w_\varepsilon + \sum_{\varepsilon' \in \mathcal{F}(k_0) - \mathcal{C}(k_0)} w_{\varepsilon'} \leq n - 1$$

que es una contradicción.

Por tanto, hemos probado que existen $\varepsilon_0 \in \mathcal{C}(k_0)$ y $T_0 \in \mathcal{M}_{\varepsilon_0}$ con $T_0 \cap J = \emptyset$. Así, existe un camino $R_0 \in \mathcal{L}(k_0)$ con $\mathcal{F}(R_0) = \varepsilon_0$. Ya que X_1 contiene a la red Ψ_R es posible escoger un camino α_0 en X_1 de R_0 a T_0 tal que

$U = \alpha_0 \cup R_0 \cup T_0$ evita J . Más aún, $\mathcal{N} \cap (T_0 \cap \alpha_0) = \emptyset$, y podemos suponer también que $\mathcal{N} \cap R_0 = \{x_{k_0}\}$; pues si $(\mathcal{N} - \{x_{k_0}\}) \cap R_0 \neq \emptyset$ entonces podemos reemplazar x_{k_0} por el último punto en $\mathcal{N} \cap R_0$ que aparece R_0 , ya que $D_j - J \neq \emptyset$ para todo $x_j \in R_0 \cap \mathcal{N}$. Aquí usamos que $R_0 \in \mathcal{L}(k_0)$. Después de esta observación es fácil construir un camino en X_0 que conecta v a c a través de U y la arista con extremos el punto $U \cap \Theta_{k_0}$ y z . Hemos probado que $Con(c, v) \geq n$ en X_0 . El Teorema de Nöbeling II.2.2 nos asegura que existen n caminos independientes $\{\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n\}$ en X_0 de v a c . Claramente a_k de estos caminos terminan como caminos simpliciales de dos aristas de la forma $\langle p, q \rangle \cup \langle q, c \rangle$ con $p \in \Theta_k$ y $q \in D_k$. Para cada j , sea $\gamma'_j \subseteq \gamma_j$ el subcamino obtenido al quitar las dos aristas del tipo anterior de γ_j . Por la elección de Θ_k , para cada k existen a_k rayos disjuntos en Y que prolongan a los γ'_j . Estos rayos determinan unívocamente a_k caminos independientes de v a x_k . \square

Teorema II.3.2 *Sea X un continuo (generalizado) de Peano. Sean dos conjuntos finitos y disjuntos de puntos de X , $\mathcal{N} = \{x_1, \dots, x_p\}$ y $\mathcal{M} = \{y_1, \dots, y_q\}$. Supongamos $Con(x_k, y_h) = n$ para todo par k, h . Entonces dadas dos familias de enteros positivos $\{a_1, \dots, a_p\}$ y $\{b_1, \dots, b_q\}$ con $\sum_{k=1}^p a_k = \sum_{h=1}^q b_h = n$ existen n caminos independientes de \mathcal{N} a \mathcal{M} tales que a_k de ellos comienzan en x_k , y b_h de ellos terminan en y_h para todo par k, h .*

Demostración. Usando la misma notación que en (II.3.1) y siguiendo la misma demostración que allí, con \mathcal{M} haciendo el papel del punto v , construimos, a partir de una familia $\mathcal{R}(k, h)$ de n caminos independientes en X de x_k a y_h , un continuo de Peano X_0 que contiene a los puntos de \mathcal{M} y un cierto punto c tal que para todo $y_h \in \mathcal{M}$ $Con(c, y_h) \geq n$ en X_0 . Ahora, el Teorema II.3.1 nos asegura que existen n caminos independientes $\{\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n\}$ en X_0 de c a \mathcal{M} tales que b_h de ellos terminan en y_h . Claramente a_k de estos caminos empiezan como caminos simpliciales de dos aristas de la forma $\langle q, c \rangle \cup \langle p, q \rangle$ con $p \in \Theta_k$ y $q \in D_k$. Para cada j , sea $\gamma'_j \subseteq \gamma_j$ el subcamino obtenido al quitar las dos aristas del tipo anterior de γ_j . Por la elección de Θ_k , para cada k existen a_k rayos disjuntos en Y que prolongan a los γ'_j . Estos rayos determinan unívocamente a_k caminos independientes de x_k a \mathcal{M} , y esto termina la demostración. \square

A partir del Teorema II.3.2 se obtienen las siguientes caracterizaciones de la conectividad de tipo (A, B) en cualquier continuo (generalizado) de Peano

$A, B \subseteq X$.

Teorema II.3.3 *Sea X un continuo (generalizado) de Peano y $A, B \subseteq X$. Entonces son equivalentes*

- a) X es n -conexo de tipo (A, B) .
- b) *Dados dos conjuntos disjuntos de puntos $\mathcal{N} = \{x_1, \dots, x_p\} \subseteq A$ y $\mathcal{M} = \{y_1, \dots, y_q\} \subseteq B$ y dos conjuntos de enteros positivos $\{a_1, \dots, a_p\}$ y $\{b_1, \dots, b_q\}$ con $\sum_{k=1}^p a_k = \sum_{h=1}^q b_h = n$, existen n caminos independientes de \mathcal{N} en \mathcal{M} tales que a_k de ellos empiezan en x_k y b_h de ellos llegan a y_h para todo k, h .*

Demostración. $a) \Rightarrow b)$ es consecuencia del Teorema II.3.2 y $b) \Rightarrow a)$ se deduce de forma inmediata tomando $p = q = 1$. \square

Nota II.3.4 Si $A = B = X$ se sigue que (II.3.3)(b) es una caracterización de la n -conexión de X .

Teorema II.3.5 *Sea X un continuo (generalizado) de Peano y $A, B \subseteq X$ dos conjuntos disjuntos. Entonces son equivalentes:*

- a) X es n -conexo de tipo (A, B) .
- b) *Dado un conjunto $A' \subseteq A$ con $|A'| = n - 1$, para todo par de puntos $x \in A'$ e $y \in B$ existe un ciclo $R \subseteq X$ con $R \cap A = \{x\}$ e $y \in R$.*
- c) *Dado un conjunto $A' \subseteq A$ con $|A'| = n$, para todo par de puntos $x \in A'$ e $y \in B$ existe un camino $R \subseteq X$ de x a y con $R \cap A' = \{x\}$.*

Nota II.3.6 Si $A = B = X$ se sigue que (II.3.5)(b) (o equivalentemente (II.3.5)(c)) es una caracterización de la n -conexión de X .

Demostración. $a) \Rightarrow b)$ Puesto que X es n -conexo de tipo (A, B) podemos encontrar n caminos independientes de x a y . Al menos dos caminos no

contienen puntos de A' distintos de x . Estos dos caminos definen un ciclo R con $R \cap A' = \{x\}$ e $y \in R$.

b) \Rightarrow c) Existe un ciclo R tal que $x, y \in R$ y a lo más hay otro punto $x' \neq x$ con $x' \in R \cap A'$. Entonces es claro que podemos encontrar un camino $R' \subseteq R$ conteniendo a x e y con $R' \cap A' - \{x\} = \emptyset$.

c) \Rightarrow a) Sea $J \subseteq X$ un conjunto de puntos con $|J| \leq n - 1$. Dados dos puntos $x \in A - J$ e $y \in B - J$, aplicando c) a $A' = J \cup \{x\}$ podemos encontrar un camino $R : x - y$ con $R \cap J = \emptyset$. Por tanto $J \notin \mathcal{S}(A, B)$ y se concluye que X es n -conexo de tipo (A, B) . \square

Teorema II.3.7 *Sea X un continuo (generalizado) de Peano y $A, B \subseteq X$ dos conjuntos disjuntos. Supongamos que X es s -conexo de tipo (A, A) . Entonces son equivalentes:*

- a) X es n -conexo de tipo (A, B) .
- b) Para todo $A' = \{x_1, \dots, x_{n-1}\} \subseteq A$ e $y \in B$, y para todo $1 \leq m \leq \min\{s + 1, n - 1\}$ existe un ciclo $R \subseteq X$ con $R \cap A' = \{x_1, \dots, x_m\}$ e $y \in R$.
- c) Para todo $A' = \{x_1, \dots, x_n\} \subseteq A$ e $y \in B$, y para todo $1 \leq m \leq \min\{s + 1, n\}$ existe un camino $R \subseteq X$ con $R \cap A' = \{x_1, \dots, x_m\}$ e $y \in R$.
- d) Para todo $A' = \{x_1, \dots, x_{n-1}\} \subseteq A$ e $y_1, y_2 \in B$, y para todo $1 \leq m \leq n - 1$ existe un camino R de y_1 a y_2 tal que $R \cap A' = \{x_1, \dots, x_m\}$.

Demostración. a) \Rightarrow b) El caso $m = 1$ es (II.3.5). Supongamos que tenemos demostrado b) para $m \leq k - 1 \leq s$. Sea R un ciclo con $R \cap A' = \{x_1, \dots, x_{k-1}\}$. Dado $x_k \in A$, como X es n -conexo de tipo (A, B) podemos encontrar $k + 1$ caminos independientes L_1, \dots, L_{k+1} de x_k a y que no contienen a $\{x_{k+1}, \dots, x_{n-1}\}$. Si $R \cap L_i \neq \emptyset$, sea $a_i \in L_i$ el primer punto de L_i en R ($1 \leq i \leq k + 1$).

Si orientamos R , los puntos $x_1 \dots x_{k-1}$ e y definen una descomposición de R en $k - 2$ caminos $R_1 \dots R_{k-2}$ más dos caminos R_{-y}, R_{+y} que empiezan y terminan en y respectivamente. Supongamos que dos puntos a_s, a_t estén en el

mismo camino R_j ($1 \leq j \leq k-2$, $j = \pm y$). Entonces podemos encontrar un ciclo en $R \cup L'_s \cup L'_t$ que contiene $\{x_1, \dots, x_k\}$. Aquí $L'_i \subseteq L_i$ denota el camino de x_k a a_i . Por tanto, podemos suponer que al menos un camino L_i no corta a $R - \{y\}$.

Supongamos que sólomente L_1 evite $R - \{y\}$; esto es, $a_1 = y$. Además, por lo anterior podemos suponer que cada a_i ($2 \leq i \leq k+1$) está en un único camino $R_{j(i)}$ ($1 \leq j(i) \leq k-2$, $j(i) = \pm y$). De aquí que se pueda encontrar un ciclo en $R \cup L_1 \cup L'_{i_0}$ donde $j(i_0) = \pm y$. En este punto será suficiente suponer que al menos dos caminos L_i evitan R .

Como X es s -conexo, por (II.3.1) podemos también encontrar un conjunto de s caminos independientes $\gamma_i : x_k - x_i$ ($1 \leq i \leq k-1$). Por $b_i \in \gamma_i$ denotamos el primer punto de γ_i en $\gamma_i \cap R$. Si ningún b_i está en $R_{-y} \cup R_{+y}$, debe existir un camino R_j que contiene dos vértices b_p, b_q y por tanto se puede encontrar un ciclo $R' \subseteq R \cup \gamma'_p \cup \gamma'_q$ con $\{x_1, \dots, x_k\} \subseteq R'$. Aquí $\gamma'_p \subseteq \gamma_p$ denota el camino de x_k a b_p .

Supongamos ahora que $b_1 \in R_{+y}$. Sabemos que hay dos caminos L_p, L_q que son disjuntos con $R - \{y\}$. De estos dos caminos sea L_q el que tiene con γ'_1 la intersección más cercana a b_1 . Entonces podemos encontrar un camino $\gamma''_1 \subseteq L_q \cup \gamma'_1$ de x_k a b_1 tal que $L_p \cap \gamma''_1 = \{x_k\}$, y por tanto podemos encontrar un ciclo $R \cup L_p \cup \gamma''_1$ que contiene $\{x_1, \dots, x_k\}$.

La demostración $a) \Rightarrow c)$ es similar y la podemos omitir.

$a) \Rightarrow d)$ Usando a) podemos encontrar dos caminos R_1, R_2 de x_1 a y_1 tal que $R_i \cap A' = \{x_1\}$ ($i = 1, 2$). Análogamente existen dos caminos R'_j ($j = 1, 2$) de x_1 a y_2 con la misma propiedad. Si $y_1 = y_2$ estamos en el caso b). Si $y_1 \neq y_2$ existe un último punto en cada R_i común con R'_1 y R'_2 respectivamente. Es ahora fácil construir un camino $R \subseteq R_1 \cup R_2 \cup R'_1 \cup R'_2$ con $\{y_1, y_2\} \subseteq R$ y $R \cap A = \{x_1\}$. De aquí se deduce d) para $m = 1$. En este punto podemos seguir el modelo de demostración de $a) \Rightarrow b)$ para probar d).

Los recíprocos $b) \Rightarrow a)$ así como $c) \Rightarrow a)$ siguen de (II.3.5), y $d) \Rightarrow b)$ sigue al tomar $y_1 \neq y_2$. \square

Nota II.3.8 Si $X = A = B$ la hipótesis adicional de la s -conexión es redundante y se obtiene que la condición b) (o equivalentemente c) o d)) en (II.3.7) es una

caracterización de la n -conexión de X .

Usando ahora las compactificaciones de Alexandroff y Freudenthal obtenemos como corolarios inmediatos de los teoremas anteriores los siguientes resultados sobre tipos de conectividad en un continuo de Peano X en los que intervienen los puntos del infinito de X .

Teorema II.3.9 *Sea X un continuo generalizado de Peano. Entonces son equivalentes*

- a) X es n -conexo de tipo (A, ∞) .
- b) Sea $A' = \{x_1, \dots, x_p\} \subseteq A$. Dada una familia de enteros positivos $\{a_1, \dots, a_p\}$ con $\sum_{i=1}^p a_i = n$, existen n rayos independientes de A' a ∞ tal que a_i de ellos empiezan en x_i , para todo i .
- c) Dado un subconjunto $A' \subseteq A$ con $|A'| = n$ existe una familia de n rayos independientes de A' a ∞ .

Teorema II.3.10 *Sea X un continuo generalizado de Peano. Entonces son equivalentes:*

- a) X es n -conexo de tipo (A, ∞) .
- b) Dado un conjunto $A' \subseteq A$ con $|A'| = n - 1$, para todo $x \in A'$ existe un birayo $R \subseteq X$ con $R \cap A' = \{x\}$.
- c) Dado un conjunto $A' \subseteq A$ con $|A'| = n$, para todo punto $x \in A'$ existe un rayo $R \subseteq X$ con $R \cap A' = \{x\}$.

Teorema II.3.11 *Sea X un continuo generalizado de Peano y $A \subseteq X$ un conjunto $\mathcal{F}(X)$ -denso. Supongamos que X es s -conexo de tipo (A, A) . Entonces son equivalentes:*

- a) X es n -conexo de tipo (A, ∞) .

- b) Para $A' = \{x_1, \dots, x_{n-1}\} \subseteq A$ y $1 \leq m \leq \min \{s+1, n-1\}$ existe un birayo $R \subseteq X$ con $R \cap A' = \{x_1, \dots, x_m\}$.
- c) Para $A' = \{x_1, \dots, x_n\} \subseteq A$ y $1 \leq m \leq \min \{s+1, n\}$ existe un rayo $R \subseteq X$ con $R \cap A' = \{x_1, \dots, x_m\}$.

Respecto a la conectividad de tipo $(A, \mathcal{F}(X))$ tenemos en primer lugar

Teorema II.3.12 *Sea X un continuo generalizado de Peano y $A \subseteq X$ un conjunto $\mathcal{F}(X)$ -denso. Entonces son equivalentes*

- a) X es n -conexo de tipo $(A, \mathcal{F}(X))$.
- b) Dado dos conjuntos $A = \{x_1, \dots, x_p\} \subseteq A$ y $F = \{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_q\} \subseteq \mathcal{F}(X)$ y dos conjuntos de enteros positivos $\{a_1, \dots, a_p\}$ y $\{b_1, \dots, b_q\}$ con $\sum_{k=1}^p a_k = \sum_{h=1}^q b_h = n$, existen n rayos independientes de A a F tal que a_k de ellos comienzan en x_k y b_h de ellos definen a ε_h , para todo par k, h .

Otros resultados concernientes a la conectividad $(A, \mathcal{F}(X))$ son los dos siguientes.

Teorema II.3.13 *Sea X un continuo generalizado de Peano y $A \subseteq X$ un conjunto $\mathcal{F}(X)$ -denso. Entonces son equivalentes:*

- a) X es n -conexo de tipo $(A, \mathcal{F}(X))$.
- b) Dado $A' \subseteq A$ con $|A'| = n-1$, para todo punto $x \in A'$ y todo final $\varepsilon \in \mathcal{F}(X)$ existe un birayo $R \subseteq X$ con ambos finales ε y $R \cap A' = \{x\}$.
- c) Dado un conjunto $A' \subseteq A$ con $|A'| = n$, para todo punto $x \in A'$ y todo final $\varepsilon \in \mathcal{F}(X)$ existe un rayo $R \subseteq X$ cuyo final es ε y tal que $R \cap A' = \{x\}$.

El siguiente teorema es consecuencia de $Con(A, \mathcal{F}(X)) = Con(A; A)$ y de (II.3.7) para todo conjunto A $\mathcal{F}(X)$ -denso. Ver (II.2A).

Teorema II.3.14 *Sea X un continuo generalizado de Peano y $A \subseteq X$ un conjunto $\mathcal{F}(X)$ -denso. Entonces son equivalentes:*

- a) X es n -conexo de tipo $(A, \mathcal{F}(X))$.
- b) Para $A' = \{x_1, \dots, x_{n-1}\} \subseteq A$, $\varepsilon \in \mathcal{F}(X)$ y $1 \leq m \leq n-1$, existe un birayo R con ambos finales ε y tal que $R \cap A = \{x_1 \dots x_m\}$.
- c) Para $A' = \{x_1, \dots, x_n\} \subseteq A$, $\varepsilon \in \mathcal{F}(X)$ y $1 \leq m \leq n$, existe un rayo R cuyo único final es ε y tal que $R \cap A' = \{x_1, \dots, x_m\}$.
- d) Para $A' = \{x_1, \dots, x_{n-1}\} \subseteq A$, $\varepsilon, \varepsilon' \in \mathcal{F}(X)$ y $1 \leq m \leq n-1$, existe un birayo R cuyos finales son ε y ε' y tal que $R \cap A' = \{x_1, \dots, x_m\}$.

Finalmente, obtenemos la siguiente caracterización de la conectividad de tipo $(\mathcal{F}(X), \mathcal{F}(X))$

Teorema II.3.15 *Sea X un continuo generalizado de Peano. Entonces son equivalentes*

- a) X es n -conexo de tipo $(\mathcal{F}(X), \mathcal{F}(X))$.
- b) Dados dos conjuntos de finales $F = \{\eta_1, \dots, \eta_p\}$, y $F' = \{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_q\}$, y dos conjuntos de enteros positivos $\{a_1, \dots, a_p\}$ y $\{b_1, \dots, b_q\}$ con $\sum_{k=1}^p a_k = \sum_{h=1}^q b_h = n$, existen n birayos independientes de F a F' tal que a_k de ellos definen η_k y b_h de ellos definen ε_h , para todo k, h .

Capítulo III

Conectividad de grafos localmente finitos

En este capítulo obtenemos como consecuencia inmediata de resultados del Capítulo II varios teoremas ya conocidos en teoría de grafos. Más aún, obtenemos nuevos teoremas sobre conectividad en grafos infinitos involucrando los finales de Freudenthal. Asimismo, se da en la sección §III.4 otra aportación a la teoría de grafos al dar respuesta a la pregunta de si todo grafo n -conexo localmente finito puede descomponerse como la unión de una familia exhaustiva de subgrafos finitos también n -conexos. Una importante clase de grafos n -conexos es la que consiste en los 1-esqueletos de variedades. Más explícitamente, Barnette en [4] demuestra que los 1-esqueletos de pseudovariedades cerradas son grafos $(n + 1)$ -conexos. En la sección §III.5 extendemos este resultado a n -seudovariedades ($n \geq 2$) no necesariamente compactas con borde lleno.

III.1 Separación y conectividad de grafos

Las nociones sobre conexión en los continuos generalizados de Peano dadas en §II.1 son extensión de las definidas en el lenguaje simplicial, dentro de la teoría de grafos. De hecho, muchos resultados relacionados con el concepto de conexión se encuentran en la literatura sobre grafos para los pares $(V(G), V(G))$, $(V(G), \infty)$, $(V(G), \mathcal{F}(G))$ y $(\mathcal{F}(G), \mathcal{F}(G))$ de un grafo G .

Obsérvese que dado un grafo conexo G no son de interés los números $Sep(A, B)$ con $A = G$, pues $Sep(G, B) \leq 2$ dado que el orden de corte de un par de puntos interiores de una arista es ≤ 2 . De hecho, sólo los vértices de G son de interés desde el punto de vista combinatorial. Además, si $Sep_{V(G)}$ denota el orden de separación usando sólo vértices de G , esto es, la definición combinatorial habitual en teoría de grafos, se tiene

Lema III.1.1 *Sea G un grafo localmente finito y sea (A, B) cualquier tipo de conexión. Entonces para todo par de conjuntos $A_0 \subseteq A$ y $B_0 \subseteq B$ se tiene $Sep_{V(G)}(A_0, B_0) = Sep(A_0, B_0)$.*

Demostración. Claramente $Sep_{V(G)}(A, B) \geq Sep(A, B)$. Si ahora $J \in \mathcal{S}(v, w)$ con $v \in A, w \in B$ y $|J| = n = Sep(A, B)$, entonces procedemos a reemplazar J por un conjunto $J' \subseteq V(G)$ tal que $J' \in \mathcal{S}(v, w)$ y $|J'| = n$. Lo haremos por inducción sobre el número $k = |J - V(G)|$. El resultado es inmediato para $k = 0$. Supongamos que lo tenemos para $k-1$, y sea $J = \{v_1, \dots, v_{k-1}, x_k, \dots, x_n\}$ con $x_j \notin V(G)$ para $j \geq k$. Sea e la arista de G en cuyo interior está x_k . Si los dos vértices de e estuvieran en J este conjunto no sería maximal. Sea v_k un vértice de e que no esté en J . Afirmamos que $J' = \{v_1, \dots, v_{k-1}, v_k, x_{k+1}, \dots, x_n\}$ separa v de w . En caso contrario, existiría una trayectoria Λ en G de v a w que no toca a J , luego en Λ estará necesariamente x_k . Por tanto, Λ contiene a la arista e y tenemos contradicción, luego $Sep_{V(G)}(A, B) = Sep(A, B)$. La demostración para los otros pares es análoga. \square

Nota III.1.2 Obsérvese que el Lema III.1.1 y la generalización del Teorema de Nöbeling II.2.8 implican directamente el Teorema de Menger-Whitney II.2.1

A continuación, enunciamos para grafos las relaciones básicas sobre los distintos órdenes de conexión (II.1.2) (II.1.3) (II.1.4) dadas en §II.1 para continuos generalizados de Peano. Para su demostración basta tener en cuenta el lema anterior y la $\mathcal{F}(G)$ -densidad del conjunto $\mathcal{V} \subseteq V(G)$ considerado.

Lema III.1.3 *En un grafo G se verifican las siguientes igualdades, donde $\mathcal{S}(-, -)$ indica la familia de los conjuntos de corte por vértices y $\mathcal{V} \subseteq V(G)$ es un conjunto $\mathcal{F}(G)$ -denso:*

$$a) \mathcal{S}(\mathcal{V}, \mathcal{V}) = \mathcal{S}(\mathcal{V}, \mathcal{F}(G)).$$

$$b) \text{ Si } |\mathcal{F}(G)| \geq 2 \text{ entonces } \mathcal{S}(\mathcal{V}, \infty) \cup \mathcal{S}(\mathcal{F}(G), \mathcal{F}(G)) = \mathcal{S}(\mathcal{V}, \mathcal{F}(G)).$$

Proposición III.1.4 *En un grafo G se verifican las siguientes igualdades, donde $Sep(-, -)$ indica el orden de corte por vértices y $\mathcal{V} \subseteq V(G)$ es un conjunto $\mathcal{F}(G)$ -denso:*

$$a) Sep(\mathcal{V}, \mathcal{V}) = Sep(\mathcal{V}, \mathcal{F}(G)) \leq Sep(\mathcal{F}(G), \mathcal{F}(G)).$$

$$b) Sep(\mathcal{V}, \mathcal{F}(G)) \leq Sep(\mathcal{V}, \infty).$$

c) *De hecho cuando $|\mathcal{F}(G)| \geq 2$ tenemos*

$$Sep(\mathcal{V}, \mathcal{F}(G)) = \min\{Sep(\mathcal{V}, \infty), Sep(\mathcal{F}(G), \mathcal{F}(G))\}.$$

Corolario III.1.5 *$Sep(V(G), V(G)) = Sep(V(G), \mathcal{F}(G))$ es el menor orden de corte de G . Además para un grafo G con un sólo final el orden de corte - $Sep(\mathcal{F}(G), \mathcal{F}(G))$ no está definido y los otros órdenes de corte coinciden.*

Nota III.1.6 Como ya hemos mencionado en §II.2, el resultado clásico sobre conexión para grafos es el Teorema de Menger-Whitney citado en (II.2.1). Una consecuencia inmediata de dicho teorema son las desigualdades análogas a las dadas en la proposición (III.1.3) donde se sustituye $Sep(-, -)$ por $Con.(-, -)$.

Recordemos que el ancho del final ε , $w(\varepsilon)$, es el máximo número de rayos disjuntos que definen ε y que el número $w(G) = \min\{w(\varepsilon); \varepsilon \in \mathcal{F}(G)\}$ es el ancho de $\mathcal{F}(G)$. A las desigualdades anteriores podemos añadir la siguiente proposición, consecuencia inmediata de (II.2A.1) y del hecho de que $V(G)$ es $\mathcal{F}(G)$ -denso.

Proposición III.1.7 *Si $w(G)$ y $val(G)$ son el ancho y la valencia de G respectivamente, entonces $Con(\mathcal{F}(G), \mathcal{F}(G)) \leq w(G)$ y $Con(V(G), \infty) \leq val(G)$.*

III.2 Variantes del Teorema de Menger-Whitney en la literatura

En esta sección obtenemos en primer lugar varios teoremas de la literatura de teoría de grafos como consecuencia inmediata de los resultados de §II.3 aplicados a grafos localmente finitos. Más aún, en §(III.3), obtenemos nuevos teoremas sobre conectividad en grafos infinitos involucrando a los puntos ideales en “el infinito”.

Comenzamos con el siguiente Teorema de Dirac ([12]; Teorema B y [10]; Teorema I), que es ahora consecuencia de (II.3.3) aplicado a grafos localmente finitos.

Teorema III.2.1 *Sea G un grafo. Entonces son equivalentes:*

- a) G es n -conexo de tipo $(V(G), V(G))$.
- b) *Dados dos conjuntos disjuntos de vértices $A = \{v_1, \dots, v_p\}$ y $B = \{w_1, \dots, w_q\}$ y dos conjuntos de enteros positivos $\{a_1, \dots, a_p\}$ y $\{b_1, \dots, b_q\}$ con $\sum_{k=1}^p a_k = \sum_{h=1}^q b_h = n$, existen n caminos independientes de A en B tal que a_k de ellos empiezan en v_k y b_h de ellos llegan a w_h , para todo k, h .*

El Teorema de Linck ([26]; Thm.1) (ver también [31]; Thm 3) es consecuencia inmediata de (II.3.5)

Teorema III.2.2 *Sea G un grafo. Entonces son equivalentes:*

- a) G es n -conexo de tipo $(V(G), V(G))$.
- b) *Dado un conjunto $A \subseteq V(G)$ con $|A| = n$ y $v, w \in A$, existe un ciclo $C \subseteq V(G)$ con $C \cap A = \{v, w\}$.*
- c) *Dado un conjunto $B \subseteq V(G)$ con $|B| = n$ y $v, w \in B$, existe un arco $C \subseteq X$ con $C \cap B = \{v, w\}$.*

También la generalización de este Teorema debida a Halin ([18]; S. 5.4 y S. 5.5) puede ser establecida como consecuencia de (II.3.7). Esto es

Teorema III.2.3 *Sea G un grafo. Entonces son equivalentes:*

- a) X es n -conexo de tipo $(V(G), V(G))$.
- b) Dado un conjunto $A = \{v_1, \dots, v_n\}$ de n vértices y $2 \leq m \leq n$, existe un ciclo $C \subseteq V(G)$ con $C \cap A = \{v_1, \dots, v_m\}$.
- c) Dado un conjunto $A = \{v_1, \dots, v_{n+1}\}$ y $2 \leq m \leq n + 1$, existe un arco $C \subseteq V(G)$ con $C \cap A = \{v_1, \dots, v_m\}$.

III.3 Variantes del Teorema de Menger-Whitney para grafos infinitos

Los siguientes resultados son aportaciones originales de esta memoria a la teoría de grafos localmente finitos. Ellos son consecuencias inmediatas de los teoremas obtenidos en §II.3.

Teorema III.3.1 *Sea G un grafo infinito. Entonces para $\mathcal{V} \subseteq V(G)$ son equivalentes:*

- a) G es n -conexo de tipo (\mathcal{V}, ∞) .
- b) Sea $A = \{v_1, \dots, v_p\} \subseteq \mathcal{V}$. Dada una familia $\{a_1, \dots, a_p\}$ de enteros positivos con $\sum_{i=1}^p a_i = n$, existen n rayos independientes de A a ∞ tal que a_i de ellos empiezan en v_i , para todo i .
- c) Dado un conjunto de vértices $A \subseteq \mathcal{V}$ con $|A| = n$, existe una familia de n rayos independientes de A a ∞ .

Nota III.3.2 Si $\mathcal{V} = V(G)$ se sigue que (III.3.1)(b) (o equivalentemente c)) es una caracterización de la n -conexión de tipo $(V(G), \infty)$.

El teorema anterior es consecuencia de (II.3.9) y (III.1.1). El siguiente teorema lo es de (II.3.10) y (III.1.1).

Teorema III.3.3 *Sea G un grafo infinito. Entonces para $\mathcal{V} \subseteq V(G)$ son equivalentes:*

- a) G es n -conexo de tipo (\mathcal{V}, ∞) .
- b) Dado un conjunto de vértices $A \subseteq \mathcal{V}$ con $|A| = n - 1$, para todo vértice $v \in A$ existe un birayo $R \subseteq G$ con $R \cap A = \{v\}$.
- c) Dado un conjunto de vértices $B \subseteq \mathcal{V}$ con $|B| = n$, para todo vértice $v \in B$ existe un rayo $R \subseteq G$ con $R \cap B = \{v\}$.

Nota III.3.4 Si $\mathcal{V} = V(G)$ se sigue que (III.3.3)(b) (o equivalentemente c)) es una caracterización de la n -conexión de tipo $(V(G), \infty)$.

El siguiente análogo del Teorema III.2.3 es consecuencia de (II.3.11) y (III.1.1).

Teorema III.3.5 *Sea G un grafo infinito s -conexo de tipo $(\mathcal{V}, \mathcal{V})$ para $\mathcal{V} \subseteq V(G)$. Entonces son equivalentes:*

- a) G es n -conexo de tipo (\mathcal{V}, ∞) .
- b) Dado un conjunto de vértices $A = \{v_1, \dots, v_{n-1}\} \subseteq \mathcal{V}$ y $1 \leq m \leq \min \{s + 1, n - 1\}$, existe un birayo $R \subseteq G$ con $R \cap A = \{v_1, \dots, v_m\}$.
- c) Dado un conjunto de vértices $B = \{v_1, \dots, v_n\} \subseteq \mathcal{V}$ y $1 \leq m \leq \min \{s + 1, n\}$, existe un rayo $R \subseteq G$ con $R \cap A = \{v_1, \dots, v_m\}$.

Nota III.3.6 Si $\mathcal{V} = V(G)$ se sigue que (III.3.5)(b) (o equivalentemente c)) es una caracterización de la n -conexión de tipo $(V(G), \infty)$.

Ejemplo III.3.7 Obsérvese que (III.3.5) no se cumple sin la hipótesis de la conectividad de G . En efecto, el árbol G_1 es 1-conexo y 3-conexo de tipo $(V(G_1), \infty)$, pero no satisface la condición c) en (III.3.5). Por otra parte, G_2 es 1-conexo y 4-conexo de tipo $(V(G_2), \infty)$, pero no satisface la condición b) en (III.3.5)



Figura 3.1

Tenemos teoremas similares para la conectividad de tipo $(V(G), \mathcal{F}(G))$. Comenzamos con la siguiente caracterización.

Teorema III.3.8 Sea G un grafo infinito. Entonces son equivalentes para $\mathcal{V} \subseteq V(G)$:

- a) G es n -conexo de tipo $(\mathcal{V}, \mathcal{F}(G))$.
- b) Dados dos conjuntos $A = \{v_1, \dots, v_p\} \subseteq \mathcal{V}$ y $B = \{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_q\} \subseteq \mathcal{F}(G)$ y dos conjuntos de enteros positivos $\{a_1, \dots, a_p\}$ y $\{b_1, \dots, b_q\}$ con $\sum_{k=1}^p a_k = \sum_{h=1}^q b_h = n$, existen n rayos independientes de A a B tal que a_k de ellos comienzan en v_k y b_h de ellos definen a ε_h para todo k, h .

El Teorema III.3.8 es una consecuencia inmediata de la siguiente proposición para continuos generalizados de Peano, que generaliza a (II.3.12).

Proposición III.3.9 Sea X un continuo generalizado de Peano, $A = \{x_1, \dots, x_p\}$ un conjunto de puntos de X y $B = \{B_1, \dots, B_q\}$ una familia de conjuntos cerrados $B_i \subseteq \mathcal{F}(X)$ disjuntos dos a dos. Supongamos que para cada (k, h) existen n rayos de x_k a B_h . Entonces dados dos conjuntos de enteros positivos $\{a_1, \dots, a_p\}$ y $\{b_1, \dots, b_q\}$ con $\sum_{k=1}^p a_k = \sum_{h=1}^q b_h = n$ $A = \{x_1, \dots, x_p\} \subseteq X$ tal que , existen n rayos independientes de A a $\cup_{h=1}^q B_h$ tal que a_k de ellos comienzan en x_k y b_h de ellos terminan en B_h , para todo k, h .

Nota III.3.10 Puesto que un rayo comenzando en v es justamente un rayo de v a $\mathcal{F}(G)$, se tiene que $a) \Rightarrow b)$ en el Teorema III.3.1 es un caso particular de la Proposición III.3.9 tomando $q = 1$ y $B_1 = \mathcal{F}(G)$.

Demostración. de III.3.9 Para cada k, h sea $\mathcal{R}(k, h)$ una familia de n rayos independientes en X desde x_k a B_h y sea $\mathcal{F}(k, h) \subseteq B_h$ el conjunto de finales definidos por los rayos de $\mathcal{R}(k, h)$. Si consideramos la compactificación de Freudenthal \hat{X} de X , entonces los rayos de $\mathcal{R}(k, h)$ se convierten en caminos en \hat{X} de x_k a B_h que sólo cortan a B_h en sus puntos finales. A partir de aquí se puede repetir la demostración de (II.3.2), tomando $A = \mathcal{N}$ y \mathcal{M} el conjunto de puntos finales de los rayos en $\mathcal{R} = \cup_{1 \leq h \leq p} \cup_{1 \leq k \leq q} \mathcal{R}(k, h)$. \square

Otros resultados relacionados con el par de conectividad $(V(G), \mathcal{F}(G))$ son los siguientes.

Teorema III.3.11 Sea G un grafo infinito. Entonces son equivalentes para $\mathcal{V} \subseteq V(G)$:

- a) G es n -conexo de tipo $(\mathcal{V}, \mathcal{F}(G))$.
- b) Dado un conjunto de vértices $A \subseteq \mathcal{V}$ con $|A| = n - 1$, para todo vértice $v \in A$ y todo final $\varepsilon \in \mathcal{F}(G)$ existe un birayo $R \subseteq G$ con ambos finales ε y $R \cap A = \{v\}$.
- c) Dado un conjuntos de vértices $B \subseteq \mathcal{V}$ con $|B| = n$, para todo vértice $v \in B$ y todo final $\varepsilon \in \mathcal{F}(G)$ existe un rayo $R \subseteq G$ cuyo final es ε y tal que $R \cap B = \{v\}$.

Nota III.3.12 Si $\mathcal{V} = V(G)$ se sigue que (III.3.11)(b) (o equivalentemente c)) es una caracterización de la n -conexión de tipo $(V(G), \mathcal{F}(G))$.

El Teorema III.3.11 es consecuencia de (II.3.13). Además, como $Con(\mathcal{V}, \mathcal{F}(G)) = Con(\mathcal{V}, \mathcal{V})$ (ver (III.1.3)(a) y (III.1.6)) tenemos el siguiente teorema análogo a (III.3.5), que es consecuencia de (II.3.14).

Teorema III.3.13 *Sea G un grafo infinito. Entonces para todo conjunto $\mathcal{F}(G)$ - denso $\mathcal{V} \subseteq V(G)$ son equivalentes :*

- a) G es n -conexo de tipo $(\mathcal{V}, \mathcal{F}(G))$.
- b) *Dados un conjunto de vértices $A = \{v_1, \dots, v_{n-1}\} \subseteq \mathcal{V}$, un final $\varepsilon \in \mathcal{F}(G)$ y $1 \leq m \leq n - 1$ existe, un birayo R cuyo único final es ε y tal que $R \cap A = \{v_1 \dots v_m\}$.*
- c) *Dados un conjunto de vértices $B = \{v_1, \dots, v_n\} \subseteq \mathcal{V}$, un final $\varepsilon \in \mathcal{F}(G)$ y $1 \leq m \leq n$ existe un rayo R cuyo final es ε y tal que $R \cap A = \{v_1, \dots, v_m\}$.*

Nota III.3.14 Si $\mathcal{V} = V(G)$ se sigue que (III.3.13)(b) (o equivalentemente c)) es una caracterización de la n -conexión de tipo $(V(G), \mathcal{F}(G))$.

Otro teorema relacionado con la conectividad tipo $(V(G), \mathcal{F}(G))$ es el siguiente, consecuencia de (II.3.15)

Teorema III.3.15 *Sea G un grafo infinito ($n \geq 2$ y $|\mathcal{F}(G)| \geq 2$). Entonces son equivalentes para $\mathcal{V} \subseteq V(G)$:*

- a) G es n -conexo de tipo $(\mathcal{V}, \mathcal{F}(G))$.
- b) *Dados un conjunto de vértices $A = \{v_1, \dots, v_{n-1}\} \subseteq \mathcal{V}$ dos finales $\varepsilon, \varepsilon' \in \mathcal{F}(G)$ y $1 \leq m \leq n - 1$ existe un birayo R cuyos finales son ε y ε' tal que $R \cap A = \{v_1, \dots, v_m\}$.*

Nota III.3.16 Si $\mathcal{V} = V(G)$ se sigue que (III.3.15)(b) (o equivalentemente c)) es una caracterización de la n -conexión de tipo $(V(G), \mathcal{F}(G))$.

Para el par de conectividad $(\mathcal{F}(G), \mathcal{F}(G))$ se tiene

Teorema III.3.17 *Sea G un grafo infinito. Entonces son equivalentes:*

- a) G es n -conexo de tipo $(\mathcal{F}(G), \mathcal{F}(G))$.

b) Dados dos conjuntos de finales $F = \{\eta_1, \dots, \eta_p\}$, $F' = \{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_q\}$ y dos conjuntos de enteros positivos $\{a_1, \dots, a_p\}$ y $\{b_1, \dots, b_q\}$ con $\sum_{k=1}^p a_k = \sum_{h=1}^q b_h = n$, e $A = \{x_1, \dots, x_p\} \subseteq X$ existen n birayos independientes de F a F' tal que a_k de ellos definen η_k y b_h de ellos definen ε_h , para todo k, h .

Nota III.3.18 Para la conexión de tipo $(V(G), V(G))$, el caso $p = q = n$ y $a_i = b_j = 1$ en b) anterior es equivalente a a) ([46]; Theorem 7A). Pero esto no es cierto para la conexión de tipo $(\mathcal{F}(G), \mathcal{F}(G))$, como muestra el siguiente grafo G

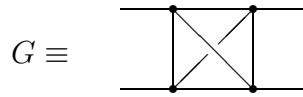


Figura 3.2

En efecto, G satisface b) para $p = q = n = 2$ y $a_i = b_j = 1$ pero es sólo 1-conexo de tipo $(\mathcal{F}(G), \mathcal{F}(G))$. De forma similar para el par $(V(G), \mathcal{F}(G))$.

El Teorema III.3.17 es consecuencia inmediata de la siguiente Proposición III.3.19 que generaliza (II.3.15).

Proposición III.3.19 Sea X un continuo generalizado de Peano, $\mathcal{A} = \{A_1 \dots A_p\}$ y $\mathcal{B} = \{B_1, \dots, B_q\}$ dos familias de conjuntos disjuntos dos a dos de finales de Freudenthal de X con $\mathcal{A} \cup \mathcal{B} = \emptyset$. Supongamos que para cada par (k, h) existen n birayos de A_k a B_h . Entonces, dados dos conjuntos de enteros positivos $\{a_1, \dots, a_p\}$ y $\{b_1, \dots, b_q\}$ con $\sum_{k=1}^p a_k = \sum_{h=1}^q b_h = n$, existen n birayos independientes de $\cup_{k=1}^p A_k$ a $\cup_{h=1}^q B_h$ tales que a_k de ellos comienzan en A_k y b_h de ellos terminan en B_h , para todo k, h .

Demostración. Para cada k, h consideramos una familia $\mathcal{R}(k, h)$ de n birayos independientes en X desde A_k a B_h . Si \hat{X} es la compactificación de Freudenthal de X , los birayos de $\mathcal{R}(k, h)$ se convierten en caminos en \hat{X} de A_k a B_h tales que sólo cortan a A_k y B_h en sus extremos. Ahora, podemos hacer la misma demostración que en (II.3.2) con \mathcal{N} y \mathcal{M} los puntos extremos de los caminos en $R = \cup_{1 \leq h \leq p} \cup_{1 \leq k \leq q} \mathcal{R}(k, h)$. \square

III.4 Descomposición de grafos infinitos 3-conexos

Una técnica habitual en la teoría de grafos infinitos es descomponer un grafo infinito $G = \cup G_i$ como la unión de una familia exhaustiva de subgrafos finitos G_i y estudiar las propiedades de estos grafos. En relación con la conectividad, es natural preguntarse si un grafo infinito G n -conexo puede descomponerse como la unión de una familia exhaustiva de subgrafos finitos G_i n -conexo.

En esta sección generalizamos un resultado debido a E. Steinitz y H. Rademacher (1934) [40] que afirma que todo grafo 3-conexo se puede obtener de un grafo completo K_4 mediante la operación de “adición” de aristas. Más explícitamente, si llamamos cara de un grafo G sumergido en una superficie M a la clausura de una componente de $M - G$, *añadir una arista* a G equivale a subdividir una cara de G en dos caras.

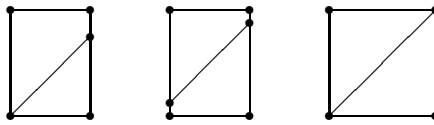


Figura 3.3

El teorema de Steinitz-Rademacher establece

Teorema III.4.1 *Un grafo finito 3-conexo se puede generar a partir de K_4 añadiendo aristas.*

Posteriormente D. Barnette y B. Grünbaum (1969) [5] demuestran que todo grafo finito 3-conexo tiene una arista eliminable. Ellos dan un interesante método de construcción de grafos finitos 3-conexos (con más de 6 aristas) a partir de K_4 añadiendo aristas. Una modificación de estas técnicas se utilizarán para extender el Teorema III.4.1 a grafos infinitos.

Dado un grafo infinito G no se tiene en general que sus subgrafos finitos sean del mismo orden de conexión. Un ejemplo es el grafo G de las aristas del reticulado plano indicado en la figura 3.4.

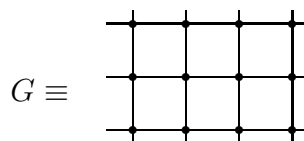


Figura 3.4

Por tanto, un grafo infinito G n -conexo no se puede obtener en general como unión de grafos finitos n -conexos.

En esta sección demostramos que todo grafo 3-conexo infinito es la unión de una familia exhaustiva de subgrafos finitos 2-conexo que son subdivisiones de grafos 3-conexos. También veremos que este resultado no puede ser mejorado para grafos n -conexos con $n \geq 3$.

Con el fin de simplificar la exposición, si G es una subdivisión de un grafo 3-conexo H , diremos que G es un $S3G$ y que H es el *grafo subyacente*. Los caminos en G que son subdivisiones de aristas de H los llamaremos *caminos principales* de G . Los vértices de G que son vértices de H los llamaremos *vértices principales* de G . Construiremos $S3G$ añadiendo caminos. Es decir, $G' = G \cup \Lambda$ se obtiene de un $S3G$ G *añadiendo un camino* Λ si las aristas de Λ no están en G pero sus puntos extremos son vértices de G tales que ambos no están en el mismo camino principal de G .

Lema III.4.2 *Si G es un $S3G$ y G' se obtiene de G añadiendo un camino, entonces G' es un $S3G$.*

Demostración. Añadir un camino en G corresponde a añadir una arista en el grafo subyacente de G . Pero, es fácil observar que esta operación preserva la 3-conexión. \square

Lema III.4.3 *Sea G un $S3G$ subdivisión de un grafo 3-conexo infinito H . Sea Λ un camino principal en G que contiene un vértice de valencia 2 en G . Entonces existe un camino Λ' con aristas en $H - G$ que se puede añadir a G , tal que uno de los extremos de Λ' es un vértice de valencia 2 de Λ y el otro extremo de Λ' es un vértice que no está en Λ . (Y añadiendo Λ cambia G a un $S3G$, $G \cup \Lambda$).*

Demostración. Si todo camino de aristas Λ en $H - G$ que sale de un vértice de valencia 2 vuelve a Λ antes de encontrarse con un vértice de G que no es de Λ , entonces H se puede desconectar quitando el vértice extremo de Λ . Luego, tal camino existe, y por el Lema III.4.2 $G \cup \Lambda$ es un nuevo $S3G$. \square

En la demostración de varios de los resultados que siguen se hace uso de la función distancia sobre un grafo. Más explícitamente, dados dos vértices v y v' de G diremos que la distancia entre ellos es n y lo denotaremos por $d(v, v') = n$ si existe un camino $\Gamma : v - v'$ con n aristas.

Teorema III.4.4 *Sea G' un subgrafo $S3G$ de un grafo 3-conexo infinito localmente finito G . Entonces existe una familia exhaustiva $G_1 \subseteq G_2 \subseteq \dots$ de grafos $S3G$ tales que G_1 es G' , para todo $i > 2$, G_i se obtiene de G_{i-1} , añadiendo un camino y $G = G_1 \cup G_2 \cup \dots$*

Demostración. Sea v un vértice principal de G' . Se construirá inductivamente una familia $G' = K_1 \subseteq K_2 \subseteq \dots$ de grafos $S3G$ tales que $K_1 = G'$, K_i contiene todas las aristas de G que unen vértices de G a una distancia $i - 1$ de v (claramente K_1 satisface esta condición), y se obtiene de K_{i-1} por una sucesión finita de adición de caminos. Si esta sucesión se puede construir es claro que la sucesión $\{G_i\}$ requerida en el teorema existe. Supongamos construido K_i . Elegimos un vértice $v_1 \in G$ a distancia i de v tal que existen aristas incidentes con v_1 en $G - K_i$ (si no existen vértices con esta condición, entonces todo v_1 elegible está en G_i y tomamos $G_{i+1} = G_i$).

En el primer paso, consideramos un camino principal Λ en K_i que contiene a v_1 . Si Λ no es una arista, entonces contendrá vértices de valencia 2 en K_i y por el Lema III.4.3, podemos añadir un camino desde el vértice de valencia 2 de Λ a un vértice de $G_i - \Lambda$, creando un nuevo $S3G$. Continuamos añadiendo caminos que salen de vértices de valencia 2 de los caminos principales en K_i que contienen a v_1 , obteniendo así un nuevo $S3G$ K'_i .

En un segundo paso, añadimos el resto de aristas de extremo v_1 de G que no están en K'_i . Tomamos un camino Γ con aristas en $G - K'_i$, que sólo tiene en K'_i los extremos v_1 y w . Si $\langle v_1, w \rangle$ no es una arista, añadimos el camino Γ creando otro $S3G$. Si $\langle v_1, w \rangle$ es una arista, añadimos el camino Γ y

suprimimos la arista $\langle v_1, w \rangle$ (nótese que el grafo así producido tiene el mismo grafo subyacente que G'_i). A continuación, añadimos un camino desde un vértice de valencia 2 de Γ (debe existir al menos uno) a otro vértice de K'_i y entonces reemplazamos la arista suprimida. Repitiendo este proceso con todos los vértices de G a distancia i de v , creamos K_{i+1} a partir de K_i . \square

Diremos que un grafo infinito G se *construye a partir de* H si existe una sucesión exhaustiva G_1, G_2, \dots de subgrafos S3G de G tal que el grafo subyacente de G_1 sea isomorfo a H , cada G_i se obtenga de sus predecesores por adición de caminos, y G sea la unión todos los G_i . La sucesión de grafos subyacentes de los G_i es la sucesión de grafos producidos por adición de aristas a H .

Como consecuencia inmediata del Teorema III.4.4 se obtiene

Corolario III.4.5 *Sea G' un subgrafo S3G de un grafo infinito, localmente finito y 3-conexo. Entonces G se construye a partir del grafo subyacente de G' por una sucesión numerable de adición de aristas.*

Lema III.4.6 *Todo grafo infinito localmente finito 3-conexo contiene una subdivisión de K_4 .*

Demostración. Sea x e y dos vértices de G , y sea $\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3$ tres caminos independientes de x a y . Al menos dos de los caminos tienen vértices de valencia 2 (vértices que no son los extremos). Supongamos que Λ_1 tiene un vértice de valencia 2. Si no existiese un camino Γ uniendo un vértice de valencia 2 de Λ_1 a un vértice de valencia 2 de Λ_2 o Λ_3 , entonces G se podría desconectar eliminando x e y , luego existe tal camino. Ahora $\Lambda_1 \cup \Lambda_2 \cup \Lambda_3 \cup \Gamma$ es una subdivisión de K_4 . \square

Como una consecuencia inmediata del Lema III.4.6 y del Corolario III.4.5 tenemos la siguiente extensión del teorema de Steinitz-Rademacher III.4.1 a grafos infinitos.

Corolario III.4.7 *Todo grafo infinito localmente finito 3-conexo G se construye a partir de K_4 por una sucesión numerable de adición de aristas. Por tanto, G es unión de una familia exhaustiva de grafos 2-conexos finitos que son subdivisiones de grafos 3-conexos.*

La segunda parte de este corolario no se puede mejorar sustituyendo -2-conexo por 3-conexo, como muestra el grafo G de la figura 3.4 en el que no es difícil ver que los vértices extremos de cualquiera de sus subgrafos finitos son de valencia 2, por lo que no existe un subgrafo finito 3-conexo de G .

Lema III.4.8 *Todo grafo infinito localmente finito 3-conexo G con un final ε contiene una subdivisión del grafo infinito 3-conexo W_1 de la figura 3.5.*

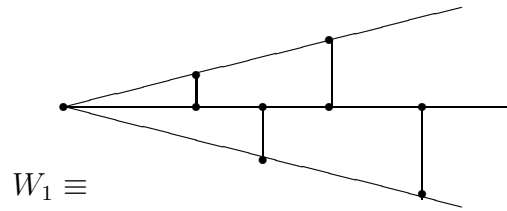


Figura 3.5

Demostración. Sea v un vértice de G . Dado que G es 3-conexo, por (III.3.1) y (III.1.4) existen tres rayos independientes R_1, R_2, R_3 de v a ε . Definimos el subgrafo finito de G , $G_n = \{x \in G, d(v, x) < n\}$ donde d denota la distancia en el grafo G . Como R_1 y R_2 definen el mismo final ε , existe un camino $(R_1R_2)_n$ tal que todas sus aristas están en $G - G_n$, y tal que $(R_1R_2)_n$ interseca a R_1 y R_2 sólo en sus puntos finales. Si la familia de caminos $\{(R_1R_2)_n\}$ con $n \geq 1$ tiene infinitos vértices en R_3 , entonces es inmediato que $R_1 \cup R_2 \cup R_3 \cup (R_1R_2)_n$ contiene una subdivisión de W_1 ; en caso contrario, consideramos sólo los caminos de $(R_1R_2)_n$ que no tienen vértices en R_3 . Ahora, sean los correspondientes caminos $(R'_2R_3)_n$ con todos sus vértices en $G - G_n$ y tal que $(R'_2R_3)_n$ interseca a R_2 y R_3 sólo en sus puntos finales. De nuevo es fácil comprobar que si la familia de caminos $\{(R'_2R_3)_n\}$ con $n \geq 1$ tiene infinitos vértices en R_3 , entonces es inmediato que $R_1 \cup R_2 \cup R_3 \cup (R'_2R_3)_n$ contiene una subdivisión de W_1 . Si no, podemos elegir dos sucesiones de $(R_1R_2)_{n_i}$ y $(R'_2R_3)_{n_i}$ de caminos donde para todo n_i , $(R_1R_2)_{n_i}$ no cortan a R_1 y $(R'_2R_3)_{n_i}$ no cortan a R_2 , y existirá una subdivisión de W_1 en

$$R_1 \cup R_2 \cup R_3 \cup (R_1R_2)_{n_i} \cup (R'_2R_3)_{n_i}. \square$$

Puesto que todo grafo infinito localmente finito tiene al menos un final, se tiene como consecuencia del Lema III.4.8 y el Corolario III.4.7

Corolario III.4.9 *Todo grafo infinito localmente finito 3-conexo G se construye a partir de W_1 por una sucesión numerable de adición de aristas.*

Obsérvese que como el conjunto de grafos 3-conexos infinitos es no numerable, es imposible tomar una familia finita (o en su caso numerable) tal que todo grafo finito 3-conexo se construya a partir de esta familia por una sucesión finita de adición de aristas.

Lema III.4.10 *Todo grafo infinito localmente finito 3-conexo G con al menos dos finales, contiene una subdivisión del grafo infinito 3-conexo W_2 de la figura 3.6.*

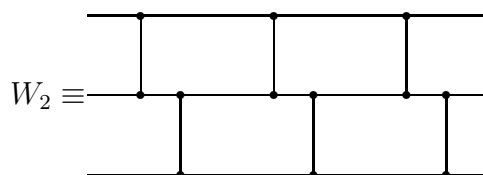


Figura 3.6

La demostración es similar a la dada en el Lema III.4.6.

III.5 Conectividad del 1-esqueleto de unaseudovarietad

Un importante ejemplo de grafos n -conexos son los 1-esqueletos de variedades. Más explícitamente, Barnette en [4] demuestra que los 1-esqueletos deseudovarietades cerradas son grafos $(n + 1)$ -conexos. La misma demostración es cierta paraseudovarietades infinitas sin borde. En esta sección extendemos este resultado a n -seudovarietades ($n \geq 2$) con borde lleno. Referimos a §I.2 para las definiciones y resultados de topología combinatorial usados en esta sección.

Un complejo simplicial homogéneamente n -dimensional K se dice *fuertemente conexo* si dado dos n -símplices γ, γ' existe una cadena $\sigma_0 \dots \sigma_k$ de n -símplices tales que $\gamma = \sigma_0$, $\gamma' = \sigma_k$, y $\sigma_i \cap \sigma_{i+1}$ es una $(n - 1)$ -cara común. Si M y M' son componentes fuertemente conexas de un complejo simplicial K

entonces es obvio que $\dim(M \cap M') \leq n - 2$. Obsérvese que si $\widetilde{\dim}|K| = 2$ entonces el poliedro $|K|$ es fuertemente conexo si y sólo si $|K|$ es 1-conexo por 2-caminos.

Recordemos que una n -pseudovariiedad M es un n -complejo fuertemente conexo tal que la valencia $val(\sigma)$ de todo $(n - 1)$ -símplice $\sigma \in M$ es menor o igual que 2. Denotamos por \mathcal{P} la clase de todas las pseudovariiedades. Una n -pseudovariiedad M se dice que es *normal* si para todo k -símplice σ ($k \leq n - 2$) el engarce $lk(\sigma; M)$ es una $(n - k)$ -pseudovariiedad, y el borde ∂M es una $(n - 1)$ -pseudovariiedad normal. Sea \mathcal{N} la clase de todas las pseudovariiedades normales.

Una n -bola (n -esfera) combinatorial es un complejo simplicial que admite una subdivisión simplicial isomorfa a una subdivisión del n -símplice Δ^n ($\partial\Delta^{n+1}$ respectivamente). Una n -variedad combinatorial M es un n -complejo tal que para todo vértice $v \in M$, $lk(v; M)$ es una $(n - 1)$ -bola o $(n - 1)$ -esfera combinatorial. La clase de todas las variedades combinatoriales la denotaremos por \mathcal{C} . Finalmente, una n -variedad homológica M es un n -complejo tal que para todo vértice $v \in M$, $\widetilde{H}_*(lk(v; M))$ es trivial o isomorfo a $\widetilde{H}_*(S^{n-1})$. Aquí \widetilde{H}_* denota la homología simplicial reducida con coeficientes enteros (ver [28]). Si \mathcal{H} denota la clase de las variedades de homología, se tienen las inclusiones $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{H} \subseteq \mathcal{N} \subseteq \mathcal{P}$. Además, todas estas clases coinciden en dimensión 1. En dimensión 2 se tiene que $\mathcal{N} = \mathcal{H} = \mathcal{C}$, mientras que en dimensión 3 la igualdad $\mathcal{H} = \mathcal{C}$ aún se cumple [28].

Un ejemplo de pseudovariiedad que no es pseudovariiedad normal es el toro “estrangulado” $C_*(S^1 \times S^1) \cup S^1 \times B^2$ donde C_*A indica el cono sobre A de vértice $*$.

Nuestro objetivo es demostrar el siguiente

Teorema III.5.1 *Sea M^n una n -pseudovariiedad con borde lleno ($n \geq 2$). Entonces $sk^1 M$ es un grafo $(n + 1)$ -conexo.*

Ejemplo III.5.2 El siguiente ejemplo muestra que el borde lleno es necesario, ya que el 1-esqueleto de la 2-bola M es sólomente 2-conexo.

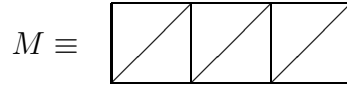


Figura 3.8

Recordemos que para todaseudovarietad M el borde de su primera subdivisión baricéntrica es siempre lleno.

La demostración de (III.5.1) sigue el mismo esquema de Barnette en [4] para pseudovarietades cerradas. En particular, usamos el siguiente lema ([4]; §3).

Lema III.5.3 *Sea K un n -complejo fuertemente conexo. Entonces sk^1K es n -conexo.*

El siguiente resultado servirá para comenzar la inducción en la demostración de (III.5.1).

Proposición III.5.4 *Sea M un 2-seudovarietad con borde lleno. Dado un vértice $v \in M$, la familia $\mathcal{L} = \{L_i\}$ de componentes conexas de $L = lk(v; M)$ es una familia disjunta de ciclos y arcos. Además, \mathcal{L} verifica las siguientes propiedades con respecto a la familia $\{M_j\}$ de componentes fuertemente conexas de $M' = M - st(v; M)$:*

- a) *Todo 1-símplice en $L - \partial M$ está en el borde de un único M_j . Además, si L_i es un arco, entonces L_i está contenido en el borde de un único M_j .*
- b) *Dado M_j y $M_{j'}$ existe al menos un ciclo L_i tal que $dim(M_j \cap L_i) = dim(M_{j'} \cap L_i) = 1$.*

Demostración. Si algún vértice $w \in L$ tiene valencia ≥ 3 en L entonces la arista $\langle v, w \rangle$ está contenida en al menos tres 2-símplices, y M no sería una 2-seudovarietad. Por tanto $val(w) \leq 2$, y \mathcal{L} es una familia (disjunta) de ciclos y arcos. Cuando v es un vértice interior de L sólo contiene ciclos.

Todo 1-símlice $\gamma \subseteq L - \partial M$ debe ser un símlice interior de M . Así pues $\gamma \subseteq \partial M'$, y existe sólamete una componente $M_j \subseteq M'$ con $\gamma \subseteq \partial M_j$, dado que $\dim(M_j \cap M_{j'}) \leq 0$.

Supongamos ahora que $\partial L_i \neq \emptyset$. Entonces $v \in \partial M$ y dado dos 1-símlices $\gamma, \gamma' \subseteq L_i$, con $\gamma \subseteq \partial M_j$ y $\gamma' \subseteq \partial M_{j'}$, el vértice $w = \gamma \cap \gamma'$ debe ser un punto interior puesto que ∂M es lleno en M . Sea $S \subseteq lk(w; M)$ la componente conexa de $lk(w; M)$ que contiene a v . Es fácil comprobar que S contiene los dos vértices u, u' con $\gamma = \langle u, w \rangle$, y $\gamma' = \langle w, u' \rangle$. Como S es un ciclo, podemos encontrar un arco de u a u' en $S - \{v\}$. De aquí que exista una cadena de 2-símlices de γ a γ' , luego $M_j = M_{j'}$. Esto demuestra a).

Finalmente, dadas dos componentes fuertemente conexas M_j y $M_{j'}$, como la 2-seudovariiedad M es fuertemente conexa toda cadena en M de 2-símlices de M_j a 2-símlices de $M_{j'}$ debe pasar a través de una componente $L_i \subseteq L$, que es un ciclo por a).□

Proposición III.5.5 *Dado una 2-seudovariiedad M con borde lleno, el 1-esqueleto $sk^1 M$ es 3-conexo.*

Demostración. Por (III.5.3) $sk^1 M$ es al menos 2-conexo. Veamos que $sk^1 M$ es de hecho 3-conexo. Sea $J = \{v_1, v_2\}$ un conjunto de dos vértices y sean $a, b \in M - J$ dos vértices cualesquiera. Comprobemos que J no separa a y b . Sean Γ_1 , y Γ_2 dos caminos independientes de a a b con $\Gamma_i \cap J = \{v_i\}$ ($i = 1, 2$). Si $\Gamma_i \cap J = \emptyset$ entonces ya separaría a y b . Sean p_1 y p_2 los vértices en M con $\langle p_1, v_1 \rangle \cup \langle v_1, p_2 \rangle \subseteq \Gamma_1$. En particular $p_1, p_2 \in lk(v_1; M)$. Sean M_i las componentes fuertemente conexas de $M' = M - st(v_1; M)$ que contienen a p_i ($i = 1, 2$). Por (III.5.4)(b) existe un ciclo $S \subseteq lk(v_1; M)$ tal que $\dim(M_i \cap S) = 1$ ($i = 1, 2$).

Aplicando (III.5.3) a M_i encontramos un camino $\Lambda_i \subseteq M_i$ de p_i a $p'_i \in S$ tal que $v_2 \notin \Lambda_i$ ($i = 1, 2$). Además, podemos suponer que $p_i \neq p'_i$. Sea $\Theta \subseteq S$ un camino de p'_1 a p'_2 con $v_2 \notin \Theta$. Es claro que se puede definir un camino $\xi \subseteq \Lambda_1 \cup \Lambda_2 \cup \Theta \cup \Gamma_1$ de a a b disjuncto con J . Esto nos dice que J no es un conjunto de corte de a, b y por tanto $sk^1 M$ es 3-conexo.□

A partir de este punto la demostración de (III.5.1) sigue el esquema de la dada por Barnette en [4]. Más explícitamente

Demostración de (III.5.1). El caso $n = 2$ es (III.5.5). Supongamos el resultado para $n - 1$ y sea M una n -seudovariiedad con $n \leq 3$. Sea $J = \{v_1, \dots, v_m\}$ un conjunto de corte minimal sk^1M donde M es una n -seudovariiedad con borde lleno. Consideremos el engarce $L = lk(v_1; M)$. Si $J' = \{v_2, \dots, v_m\}$ separa una de las componentes fuertemente conexas de L entonces $m \geq n + 1$ por la hipótesis de inducción. Supongamos ahora que J' no separa ninguna componente fuertemente conexas de L . Se construye la seudovariiedad M' como sigue. Si $\widehat{M} = M - st(v_1; M)$ y $\{L_1, \dots, L_k\}$ son las componentes fuertemente conexas de L , se toma $M' = \widehat{M} \cup \{c_i * L_i\}_{1 \leq i \leq k}$ donde $c_i * L_i$ es el cono sobre L_i con vértice c_i . El conjunto J' separa sk_1M' , ya que de otra manera dado dos vértices $a, b \in M'$ existiría un camino $\Gamma \subseteq M'$ de a a b con $\Gamma \cap J' = \emptyset$. Como J separa M , entonces $\Gamma \cap L_i \neq \emptyset$ para algún i . Sea p_i, q_i el primer y último vértice de Γ en L_i respectivamente. Como J' no separa L_i podemos encontrar un camino $\Theta_i \subseteq L_i$ de p_i a q_i con $\Theta_i \cap J' = \emptyset$. Es fácil ahora encontrar un camino $\xi \subseteq \cup \{\Theta_i; \Gamma \cap (c_i * L_i) \neq \emptyset\} \cup \Gamma$ de a a b en $sk^1M - \{v_1\}$ que es disjunto con J' . Por tanto J' no separa $sk^1M - \{v_1\}$ lo que es contradicción. \square

A continuación presentamos una demostración alternativa de (III.5.1) para la clase \mathcal{N} y por tanto para las clases \mathcal{H} y \mathcal{C} .

Definición III.5.6 Un grafo G conexo se dice que es *relativamente n -conexo* con respecto a un vértice v si $lk(v; G)$ está contenido en un subgrafo n -conexo que no contiene a v .

Nota III.5.7 Nótese que todo grafo n -simplicial G en el sentido de Larman y Mani [25] es relativamente n -conexo con respecto a todo vértice $v \in G$.

Teorema III.5.8 *Todo grafo G relativamente n -conexo con respecto a todo vértice $v \in G$ es $(n + 1)$ -conexo.*

Demostración. Supongamos que $J = \{v_1, \dots, v_m\}$ es un conjunto de corte minimal de vértices para G con $m \leq n$. Podemos encontrar m caminos independientes $\Gamma_1, \dots, \Gamma_m$ entre dos vértices $a, b \in G - J$ y tal que $\Gamma_i \cap J = \{v_i\}$ para todo i . Cada intersección $\Gamma_i \cap lk(v_i; G)$ contiene al menos dos vértices y tomamos $p, q \in \Gamma_1 \cap lk(v_1; G)$. Como G es relativamente n -conexo con respecto

a v_1 , sea $G' \subseteq G$ un subgrafo n -conexo con $lk(v_1; G) \subseteq G'$ y $v_1 \notin G'$. Dado que $p, q \in G'$, podemos encontrar un camino $\Theta \subseteq G'$ entre p, q tal que $\Theta \cap J = \emptyset$. Por tanto se puede encontrar un camino $\Gamma_1 \cup \Theta$ de a a b disjunto con J . Esto nos lleva a una contradicción. \square

Teorema III.5.9 *El 1-esqueleto sk^1M de una n -seudovariiedad normal M con borde lleno ($n \geq 2$) es relativamente n -conexo para todo vértice $v \in M$.*

Demostración. El caso $n = 2$ es obvio, puesto que para cada vértice $v \in sk^1M$ se tiene $lk(v; M) \subseteq sk^1M_v$ donde $M_v = M - st(v; M)$ es una 2-variedad conexas, y podemos aplicar (III.5.3). Nótese que M_v es conexas dado que M tiene borde lleno, pero M_v no necesita tener borde lleno.

Supongamos que (III.5.9) se cumple para $n-1$. Dada una n -seudovariiedad normal M , cada engarce $lk(v; M)$ es una $(n-1)$ -seudovariiedad normal con borde lleno y por la hipótesis de inducción y (III.5.8) $sk^1lk(v; M)$ es n -conexo y la inclusión $lk(v; sk^1M) \subseteq sk^1lk(v; M)$ nos da que sk^1M es relativamente n -conexo. \square

Ahora tenemos como consecuencia inmediata de (III.5.8) y (III.5.9)

Teorema III.5.10 *Sea M una n -seudovariiedad normal con borde lleno ($n \geq 2$). Entonces sk^1M es un grafo $(n+1)$ -conexo.*

Capítulo IV

Conectividad de 2-complejos infinitos

Puesto que un grafo es un complejo simplicial de dimensión 1, es natural preguntarse por propiedades de grafos que puedan ser extendidas a 2-complejos simpliciales. En este capítulo estudiamos la noción de n -conexión para 2-complejos simpliciales dada por E. Woon (1985) [46] y establecemos teoremas de tipo Menger-Whitney para tales complejos. En particular, damos una demostración más simple y general que el teorema de Woon, que permite considerar sólo aristas para estudiar la conexión de 2-complejos infinitos; ver §IV.2.

También introducimos la noción de final 2-dimensional y probamos varios teoremas de tipo Menger-Whitney para estos finales, así como para los finales de Freudenthal ordinarios, extendiendo los resultados de Woon para 2-complejos finitos. Esto responde a un problema planteado por este autor en [46].

Finalmente, generalizamos considerablemente los resultados de Woon al demostrar que el 2-esqueleto de toda n -seudovariiedad, compacta o no, con borde lleno, es un 2-complejo n -conexo; ver §IV.4.

IV.1 Resultados básicos sobre 2-complejos

En esta sección y en todo este capítulo usamos la notación de §I.2. Recordemos que un 2-complejo es un complejo simplicial donde cada símplice es cara de algún 2-símplice. Dado un 2-complejo P , un 2-camino entre dos aristas e_0 y e_n de P , $\Lambda : e_0 - e_n$, es una sucesión finita de aristas y triángulos $\{e_0, t_1, e_1, t_2, \dots, t_n, e_n\}$ tal que t_i son triángulos, e_i son aristas y $e_i, e_{i+1} < t_i$ ($1 \leq i \leq n$). La correspondiente noción de 2-rayo de e_0 a ∞ (ó $\varepsilon \in \mathcal{F}(P)$) es clara. Similarmente se define la noción de 2-birayo entre dos finales de Freudenthal $\varepsilon, \varepsilon' \in \mathcal{F}(P)$.

Los 2-caminos en P inducen una noción de conexión más fuerte que la noción de conexión usual. Más explícitamente, se dice que P es *conexo por 2-caminos* cuando todo par de aristas e, e' se pueden unir por un 2-camino en P . Ahora la definición de componente conexa por 2-caminos es clara. Además, los 2-rayos en P inducen una nueva clase de finales en P . Más explícitamente, un 2-final Δ es una clase de equivalencia de 2-rayos, donde dos 2-rayos R, R' son equivalentes si existe un rayo R'' que tiene en común con R y R' infinitas aristas. Esto equivale a decir que para todo subcomplejo finito $K \subseteq P$ se tiene $C_K(R) = C_K(R')$ donde $C_K(R) \subseteq P - K$ denota la componente conexa por 2-caminos que contiene un subrayo de R .

Por $\mathcal{F}_2(P)$ denotamos el conjunto de 2-finales de P . Está clara la existencia de 2-complejos infinitos conexos P con $\mathcal{F}_2(P) = \emptyset$. Por ejemplo

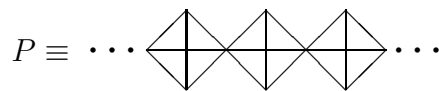


Figura 4.1

El siguiente lema muestra que un 2-complejo P conexo por 2-caminos verifica que $\mathcal{F}_2(P) \neq \emptyset$.

Lema IV.1.1 *Sea P un 2-complejo conexo por 2-caminos. Entonces $\mathcal{F}_2(P) \neq \emptyset$. Más explícitamente, toda componente conexa por 2-caminos del complementario de un subcomplejo finito define al menos un 2-final.*

Demostración. Sea $K \subseteq P$ un subcomplejo finito. Dada una compo-

nente conexa $L \subseteq P - K$ podemos encontrar un subcomplejo 2-dimensional puro $L' \subseteq L$ tal que $L - L'$ es finito. Veamos que L' define al menos un 2-final. En efecto, en caso contrario todas las componentes conexas por 2-caminos $A_i \subseteq L'$ serían finitas. Para cada A_i tomamos una arista $e_i \in A_i$; puesto que P es conexo por 2-camino podemos encontrar 2-caminos en P $\Lambda_i : e_i - e_{i+1}$. Además, todos estos 2-caminos tienen en $P - L'$ una arista. Sea σ_i la primera arista en $\Lambda_i \cap (P - L')$. Como $P - L'$ es finito encontramos una arista $\sigma = \sigma_{i_1} = \sigma_{i_2} = \dots$ en infinitos 2-rayos. Esto contradice que P es localmente finito. \square

Notación. Con el fin de simplificar, diremos que P es un *2-complejo admisible* cuando P sea un 2-complejo conexo por 2-caminos tal que todo 2-símplice de P contiene a lo más una arista borde. Nótese que en este caso el borde ∂P es lleno en P .

Definición IV.1.2 Dado un 2-complejo admisible P , si $\mathcal{E}(P)$ denota el conjunto de aristas interiores de P , el *grafo bipartito* de P , $G(P)$, se define como sigue. El conjunto de vértices es $V(G(P)) = E \cup T$, donde E es el conjunto de los baricentros \bar{e} con $e \in \mathcal{E}(P)$ y T es el conjunto de los baricentros de los triángulos de P . Un vértice $\bar{e} \in E$ se une en $G(P)$ con $\bar{t} \in T$ cuando $e < t$. Claramente $G(P)$ es un subcomplejo del 1-esqueleto $sk^1 P^{(1)}$ de la primera subdivisión baricéntrica $P^{(1)}$ de P .

Toda 2-trayectoria (2-camino, 2-rayo, 2-birayo) en P induce una trayectoria (camino, rayo, birayo) en $G(P)$ y viceversa. En particular, P es conexo por 2-caminos si y sólo si $G(P)$ es conexo. Además, los finales de Freudenthal de $G(P)$ están en correspondencia biyectiva con los 2-finales de P . En efecto, es fácil definir la siguiente biyección $g : \mathcal{F}(G(P)) \cong \mathcal{F}_2(P)$. Dado $\varepsilon \in \mathcal{F}(G(P))$ definido por el rayo $\{\bar{e}_0, \bar{t}_1, \bar{e}_1, \bar{t}_2, \dots\}$ en $G(P)$, definimos $g(\varepsilon)$ como el 2-final definido por el 2-rayo $\{e_0, t_1, e_1, t_2, \dots\}$ en P .

En general $\mathcal{F}(G(P))$ no coincide con $\mathcal{F}(P)$, como muestra el siguiente ejemplo.

Ejemplo IV.1.3 Sea $X \subseteq \mathbf{R}^2$ el subespacio $X = [2, \infty) \times [-4, 4] - \cup \{C_n; n \geq 1\}$ donde C_n es el disco abierto de centro $2n + 1$ y radio 1 ($n \geq 1$). Entonces

P es el 2-complejo admisible obtenido como una subdivisión de la siguiente descomposición celular de X sin nuevos vértices.

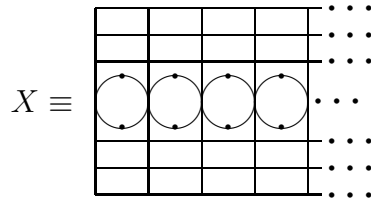


Figura 4.2

El 2-complejo P verifica que $\mathcal{F}_2(P) = 2 > 1 = \mathcal{F}(P)$. En cualquier caso, tenemos

Proposición IV.1.4 *Sea P un 2-complejo admisible. Entonces existe una aplicación sobreyectiva $h : \mathcal{F}_2(P) \rightarrow \mathcal{F}(P)$ tal que el siguiente diagrama es conmutativo*

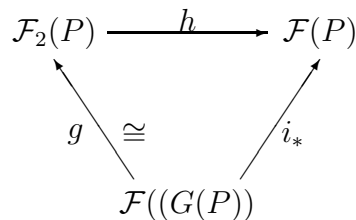


Figura 4.3

donde g se define como antes e i_* está inducida por la inclusión (topológica) $i : G(P) \subseteq P$.

Demostración. La aplicación h está definida como i_*g^{-1} . Para demostrar que h es sobre, será suficiente demostrar que i_* es sobre. Sea $\varepsilon \in \mathcal{F}(P) = \mathcal{F}(sk^1P^{(1)})$. Construimos la sucesión de vértices $S \subseteq V(G(P))$ como sigue: dada una arista $e \subseteq P$ tomamos $\bar{e} \in S$ si $e \in \mathcal{E}(P)$. Por otra parte, $\bar{t} \in S$ donde t es el único triángulo $t \in P$ con $e < t$. La sucesión S define al menos un final de Freudenthal $\eta \in \mathcal{F}(G(P))$. No es difícil demostrar que $i_*(\eta) = \varepsilon$. \square

IV.2 La conectividad en 2-complejos. Teorema de tipo Menger-Whitney

Definimos a continuación varios tipos de conectividad para un 2-complejo P . En primer lugar, nótese que dado el conjunto de símbolos $\{\mathcal{E}(P), \infty, \mathcal{F}(P), \mathcal{F}_2(P)\}$ tenemos tres nuevos pares de conexión además de los correspondientes análogos a los ya dados para continuos de Peano. Estos son $(\mathcal{E}(P), \mathcal{F}_2(P))$, $(\mathcal{F}(P), \mathcal{F}_2(P))$ y $(\mathcal{F}_2(P), \mathcal{F}_2(P))$. Dado un par de conexión (A, B) y $a \in A$, $b \in B$ con $a \neq b$, el orden de conexión de (a, b) es el máximo número $Con(a, b)$ de 2-trayectorias independientes de a a b . Aquí, por una 2-trayectoria entendemos un 2-camino, un 2-rayo o un 2-birayo, dependiendo de la naturaleza de a y b . Nótese que el tipo $(\mathcal{F}(P), \mathcal{F}_2(P))$ está definido por un par $\varepsilon \in \mathcal{F}(P)$, $\Delta \in \mathcal{F}_2(P)$ con $h(\Delta) \neq \varepsilon$. El orden de conexión de tipo (A, B) de P , $Con(A, B)$, se define ahora de forma similar a §II.1; es decir $Con(A, B) = \min\{Con(a, b); a \in A, b \in B; a \neq b\}$. Un 2-complejo se dice n -conexo de tipo (A, B) si $Con(A, B) \geq n$.

Un conjunto J de triángulos y/o aristas de P es un conjunto de corte para (A, B) si toda 2-trayectoria de $a \in A$ a $b \in B$ en P contiene algún elemento de J . Si $\mathcal{S}(A, B)$ es la familia de conjuntos de corte para (A, B) , el orden de corte o separación $Sep(A, B)$ se define como en §II.1.

Damos seguidamente una relación de resultados sobre órdenes de separación de interés en 2-complejos

Proposición IV.2.1 *Todo 2-complejo P con $|\mathcal{F}(P)| \geq 2$ verifica:*

- a) $Sep(\mathcal{E}(P), \mathcal{F}_2(P)) = Sep(\mathcal{E}(P), \mathcal{E}(P)) =$
 $= \min\{Sep(\mathcal{E}(P), \mathcal{F}(P)), Sep(\mathcal{F}_2(P), \mathcal{F}_2(P))\}.$
- b) $\max\{Sep(\mathcal{E}(P), \mathcal{F}(P)), Sep(\mathcal{F}_2(P), \mathcal{F}_2(P))\} \leq Sep(\mathcal{F}(P), \mathcal{F}_2(P)) \leq$
 $\leq \min\{Sep(\mathcal{F}(P), \mathcal{F}(P)), w_2(P)\}$

Aquí $w_2(P) = \min\{w(\Delta), \Delta \in \mathcal{F}_2(P)\}$ denota el ancho de P , y $w(\Delta)$ es el ancho del 2-final Δ , es decir, el máximo número de 2-rayos independientes que definen el 2-final Δ .

Por otra parte, está claro que $Sep(\mathcal{E}(P), \infty) \leq val(P)$. Además podemos probar:

Proposición IV.2.2 *Para un 2-complejo admisible P con $|\mathcal{F}_2(P)| \geq 2$ se verifican las siguientes igualdades:*

$$a) \min\{Sep(\mathcal{E}(P), \infty), Sep(\mathcal{F}_2(P), \mathcal{F}_2(P))\} = Sep(\mathcal{E}(P), \mathcal{F}_2(P)) = Sep(\mathcal{E}(P), \mathcal{E}(P)).$$

$$b) \min\{Sep(\mathcal{E}(P), \infty), Sep(\mathcal{F}(P), \mathcal{F}_2(P))\} = Sep(\mathcal{E}(P), \mathcal{F}(P))$$

Corolario IV.2.3 *El número $Sep(\mathcal{E}(P), \mathcal{E}(P)) = Sep(\mathcal{E}(P), \mathcal{F}_2(P))$ es el orden de separación más pequeño de P . Además, si P es un 2-complejo infinito admisible con sólo un 2-final, entonces todos los órdenes de separación definidos para P coinciden.*

La demostración de (IV.2.1) y (IV.2.2) necesita los siguientes lemas sobre la familia de conjuntos de corte $\mathcal{S}(A, B)$.

Lema IV.2.4 *Dado P como antes, se tiene :*

$$a) \mathcal{S}(\mathcal{E}(P), \mathcal{F}(P)) \subseteq \mathcal{S}(\mathcal{E}(P), \mathcal{F}_2(P)) = \mathcal{S}(\mathcal{E}(P), \mathcal{E}(P))$$

$$b) \mathcal{S}(\mathcal{F}(P), \mathcal{F}(P)) \subseteq \mathcal{S}(\mathcal{F}(P), \mathcal{F}_2(P)) = \mathcal{S}(\mathcal{F}_2(P), \mathcal{F}_2(P))$$

$$c) \mathcal{S}(\mathcal{E}(P), \mathcal{E}(P)) = \mathcal{S}(\mathcal{E}(P), \mathcal{F}(P)) \cup \mathcal{S}(\mathcal{F}_2(P), \mathcal{F}_2(P))$$

Demostración a) Claramente si J separa la arista e del final ε entonces J separa e del 2-final $\Delta \in h^{-1}(\varepsilon)$ (ver (IV.1.4)). En orden a probar la equivalencia a) podemos utilizar la demostración de (II.1.2), usando la identificación $\mathcal{F}_2(P) = \mathcal{F}(G(P))$ en (IV.1.4).

b) Si J separa ε y ε' en $\mathcal{F}(P)$ entonces J también separa ε (ε' respectivamente) de todo 2-final $\Delta' \in h^{-1}(\varepsilon')$ ($\Delta \in h^{-1}(\varepsilon)$ respectivamente).

c) La inclusión $\mathcal{S}(\mathcal{F}_2(P), \mathcal{F}_2(P)) \subseteq \mathcal{S}(\mathcal{E}(P), \mathcal{E}(P))$ sigue de y una demostración análoga a (II.1.2)(a), y así $\mathcal{S}(\mathcal{F}_2(P), \mathcal{F}_2(P)) \cup \mathcal{S}(\mathcal{E}(P), \mathcal{F}(P)) \subseteq \mathcal{S}(\mathcal{E}(P), \mathcal{E}(P))$ por a).

Supongamos ahora que $J \in \mathcal{S}(\mathcal{E}(P), \mathcal{E}(P))$. Si $J \notin \mathcal{S}(\mathcal{E}(P), \mathcal{F}(P))$ el complementario $P - J$ tiene al menos dos componente conexa por 2-caminos, estas y todas las demás son infinitas, puesto que de otra manera J debería ser un conjunto de corte en $\mathcal{S}(\mathcal{E}(P), \mathcal{F}(P))$. De aquí que $J \in \mathcal{S}(\mathcal{F}_2(P), \mathcal{F}_2(P))$.

Si $J \notin \mathcal{S}(\mathcal{F}_2(P), \mathcal{F}_2(P))$ el complementario $P - J$ tiene al menos dos componentes conexas por 2-caminos, pero sólo una de ellas puede ser infinita. Por tanto $J \in \mathcal{S}(\mathcal{E}(P), \mathcal{F}(P))$. \square

Lema IV.2.5 *Dado P como antes:*

$$a) \mathcal{S}(\mathcal{E}(P), \infty) \cup \mathcal{S}(\mathcal{F}_2(P), \mathcal{F}_2(P)) = \mathcal{S}(\mathcal{E}(P), \mathcal{F}_2(P)).$$

$$b) \mathcal{S}(\mathcal{E}(P), \infty) \cup \mathcal{S}(\mathcal{F}(P), \mathcal{F}_2(P)) = \mathcal{S}(\mathcal{E}(P), \mathcal{F}(P)) = \\ = \mathcal{S}(\mathcal{E}(P), \infty) \cup \mathcal{S}(\mathcal{F}(P), \mathcal{F}(P)).$$

Demostración. a) Sigue de la identificación $\mathcal{F}_2(P) = \mathcal{F}(G(P))$ dada en (IV.1.4) y una demostración análoga a (II.1.2)(b).

b) Dado un conjunto de corte J de $e \in \mathcal{E}(P)$ y ∞ , es claro que J separa e de todo final de Freudenthal $\varepsilon \in \mathcal{F}(P)$. Análogamente, dado un conjunto de corte J de $\varepsilon \in \mathcal{F}(P)$ y $\Delta \in \mathcal{F}_2(P)$ se tiene que J separa ε de todo vértice interior de la componente conexa $C_\Delta \subseteq P - J$ que define Δ .

Además, si $J \in \mathcal{S}(\mathcal{E}(P), \mathcal{F}(P)) - \mathcal{S}(\mathcal{F}(P), \mathcal{F}_2(P))$, J separa una arista $e \in \mathcal{E}(P)$ de un final de Freudenthal $\varepsilon \in \mathcal{F}(P)$, y por (IV.1.1) e debe estar en una componente conexa finita de $P - J$. Por tanto $J \in \mathcal{S}(\mathcal{E}(P), \infty)$, y la primera igualdad queda probada. La segunda igualdad se prueba de forma similar. \square

Demostración de (IV.2.1); a) Usando (IV.2.4)(a) y (IV.2.4)(c) podemos demostrar fácilmente que

$$Sep(\mathcal{E}(P), \mathcal{F}_2(P)) = Sep(\mathcal{E}(P), \mathcal{E}(P)) \leq$$

$$\leq \min\{Sep(\mathcal{E}(P), \mathcal{F}(P)), Sep(\mathcal{F}_2(P), \mathcal{F}_2(P))\}$$

Además, si $Sep(\mathcal{E}(P), \mathcal{E}(P)) = n < Sep(\mathcal{E}(P), \mathcal{F}(P))$, existe un conjunto de corte $J \in \mathcal{S}(\mathcal{E}(P), \mathcal{E}(P))$ con $|J| = n$. En particular, $J \notin \mathcal{S}(\mathcal{E}(P), \mathcal{F}(P))$, y de aquí que $J \in \mathcal{S}(\mathcal{F}_2(P), \mathcal{F}_2(P))$ por (IV.2.4; c). Luego $Sep(\mathcal{F}_2(P), \mathcal{F}_2(P)) = n$.

En el caso que $n < Sep(\mathcal{F}_2(P), \mathcal{F}_2(P))$, podemos usar (IV.2.4)(c) nuevamente para demostrar que $Sep(\mathcal{E}(P), \mathcal{F}(P)) = n$.

b) De (IV.2.4)(b) y (IV.2.5)(b) se tiene $Sep(\mathcal{E}(P), \mathcal{F}(P)) \leq Sep(\mathcal{F}(P), \mathcal{F}_2(P))$ y $Sep(\mathcal{F}_2(P), \mathcal{F}_2(P)) \leq Sep(\mathcal{F}(P), \mathcal{F}_2(P)) \leq Sep(\mathcal{F}(P), \mathcal{F}(P))$.

Finalmente, se comprueba fácilmente que $Sep(\mathcal{F}(P), \mathcal{F}_2(P)) \leq w_2(P)$. \square

Demostración de (IV.2.2); a) Sigue utilizando el mismo argumento que en la demostración de (II.1.3)(c) usando (IV.2.4)(a,c) y (IV.2.5)(a).

b) Se demuestra de forma análoga a (IV.2.1)(b), usando (IV.2.5)(b). \square

Ejemplo IV.2.6 El siguiente 2-complejo admisible P muestra que la desigualdad (IV.2.1) puede ser estricta. Sea X como en (IV.1.3) y sea X' la copia simétrica de X respecto al eje OY . Consideramos el espacio

$$Y = [-2, -1] \times [-4, 4] \cup X \cup X' \cup [-1, 2] \times ([2, 4] \cup [-4, -3])$$

. Entonces P es el 2-complejo obtenido como una subdivisión de la siguiente descomposición celular de X sin nuevos vértices.

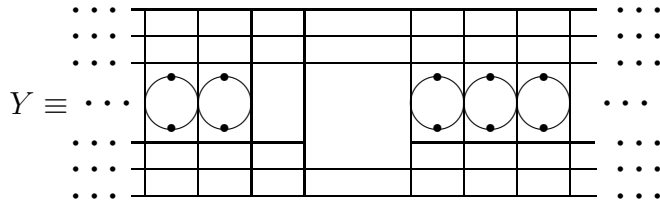


Figura 4.4

Tenemos $Sep(\mathcal{E}(P), \mathcal{F}(P)) = Sep(\mathcal{F}_2(P), \mathcal{F}_2(P)) = 1$, $Sep(\mathcal{F}(P), \mathcal{F}_2(P)) = 2$ y $Sep(\mathcal{F}(P), \mathcal{F}(P)) = w_2(P) = 3$.

La siguiente proposición es inmediata a partir de la definición del grafo bipartito $G(P)$,

Proposición IV.2.7 *Sea P un 2-complejo infinito admisible . Entonces el orden de corte de tipo (A, B) con $A, B \neq \mathcal{F}(P)$ coincide con $Sep(G(A), G(B))$. Aquí $G(\mathcal{E}(P))$ es el conjunto $E \subseteq V(G(P))$ asociado a las aristas interiores, $G(\infty) = \infty$ y $G(\mathcal{F}_2(P)) = \mathcal{F}(G(P))$.*

Nota IV.2.8 Las igualdades y desigualdades dadas anteriormente para $Sep(-, -)$ son ciertas también para $Con(-, -)$. Esto será consecuencia del Teorema de Menger-Whitney para 2-complejos que demostraremos en (IV.2.13) y para cuya demostración necesitamos el siguiente resultado consecuencia inmediata de (IV.2.7) y (II.2.1).

Proposición IV.2.9 *Sea P un 2-complejo infinito admisible y sean A, B como en (IV.2.7). Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

- a) *No existe un conjunto de corte J de tipo (A, B) con $|J| < n$.*
- b) *Existen n trayectorias independientes entre cualesquiera dos elementos $a \in A, b \in B$. Es decir, G es n -conexo de tipo (A, B) .*

El correspondiente resultado donde se considera los finales de Freudenthal de P es también cierto. Pero no es consecuencia inmediata de (IV.2.7) puesto que no se puede identificar $\mathcal{F}(G(P))$ con $\mathcal{F}(P)$. De hecho, se tienen los siguientes teoremas tipo Menger-Whitney para los finales de P .

Proposición IV.2.10 *Sea P un 2-complejo infinito admisible. Dados un conjunto finito de aristas $\Pi \subseteq \mathcal{E}(P)$ y un conjunto cerrados de finales $F \subseteq \mathcal{F}(P)$ las siguientes condiciones son equivalentes:*

- a) *Los conjuntos Π y F no se pueden separar por un conjunto de corte de menos de n aristas y/o triángulos.*
- b) *Existen n 2-rayos independientes de Π a F . Es decir, P es n -conexo de tipo $(\mathcal{E}(P), \mathcal{F}(P))$.*

Demostración. Supongamos a). Entonces no existe un conjunto de corte $J \subseteq V(G(P))$ con $|J| \leq n - 1$ para $\bar{\Pi} = \{\bar{e}; e \in \Pi\} \subseteq V(G(P))$ y $i_*^{-1}(F) \subseteq \mathcal{F}(G(P))$, donde i_* es la aplicación definida en (IV.1.4). Por (II.2.1) podemos encontrar n rayos independientes de $\bar{\Pi}$ a $i_*^{-1}(F)$ en $G(P)$, y por tanto estos rayos definen n 2-rayos independientes de Π a $i_*(i_*^{-1}(F)) = F$, dado que i_* es sobre por (IV.1.4). El recíproco b) \Rightarrow a) es inmediato. \square

Proposición IV.2.11 *Sea P un 2-complejo infinito admisible, y $F, H \subseteq \mathcal{F}(P)$ dos conjuntos cerrados de finales de Freudenthal. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

- a) *F y H no se pueden separar por un conjunto de corte con menos de n aristas y/o triángulos.*
- b) *Existen n 2-birayos independientes de F a H . Es decir, P es n -conexo de tipo $(\mathcal{F}(P), \mathcal{F}(P))$.*

Demostración. La demostración es similar a (IV.2.10). La continuidad de la aplicación i_* (IV.1.4) nos dice que $i_*^{-1}(F)$ y $i_*^{-1}(H)$ son cerrados y por el Teorema II.2.1 existen n birayos independientes de $i_*^{-1}(F)$ a $i_*^{-1}(H)$. Estos birayos definen n 2-birayos independientes de F a H . \square

Proposición IV.2.12 *Sea P un 2-complejo infinito admisible, y sea $F \subseteq \mathcal{F}(P)$, y $H \subseteq \mathcal{F}_2(P)$ dos conjuntos cerrados con $F \cap h(H) = h(H) \cap F = \emptyset$. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

- a) *F y H no se pueden separar por un conjunto de corte con menos de n aristas y/o triángulos.*
- b) *Existen 2-birayos independientes de F a H . Es decir, P es n -conexo de tipo $(\mathcal{F}(P), \mathcal{F}_2(P))$.*

Demostración. Usando el mismo argumento que en la demostración de (IV.2.11) encontramos n birayos independientes de $i_*^{-1}(h(H))$ a $i_*^{-1}(F)$. Estos birayos definen n 2-birayos independientes en P que unen H con F . \square

Las proposiciones previas de (IV.2.10) a (IV.2.12) se pueden sintetizar en el siguiente teorema general de tipo Menger-Whitney para 2-complejos :

Teorema IV.2.13 *Sea P un 2-complejo admisible. Para todo par de conexión (A, B) , si $a \in A$, $b \in B$ y $a \neq b$, entonces $Sep(a, b) = Con(a, b)$. En particular el orden de conexión de tipo (A, B) coincide con el orden de corte - $Sep(A, B) = \min\{Sep(a, b); a \in A, b \in B; a \neq b\}$. Nótese que estos números son finitos puesto que P es localmente finito.*

Damos a continuación un teorema que nos permite considerar conjuntos de corte que contienen sólo aristas para cualquier tipo de conexión. Este teorema fue probado por Woon ([46]; Thm 3) para 2-complejos finitos y el par de conexión $(\mathcal{E}(P), \mathcal{E}(P))$. Aquí damos una demostración más simple y general.

Teorema IV.2.14 *Sea P un 2-complejo infinito admisible tal que $val(e) \geq n$ para toda arista interior $e \in \mathcal{E}(P)$. Entonces P es n -conexo de tipo (A, B) si y sólo si no existe un conjunto de corte $J \in \mathcal{S}(A, B) \cap \mathcal{E}(P)$ con $|J| < n$.*

La demostración es una consecuencia inmediata del lema siguiente:

Lema IV.2.15 *Si J es un conjunto de corte minimal de tipo (A, B) para P con $|J| = k < n$, entonces existe un conjunto de corte $J' \in \mathcal{S}(A, B) \cap \mathcal{E}(P)$ con $|J'| = k$.*

Demostración. Probaremos el lema por inducción en el número $m \geq 0$ de triángulos en J . El caso $m = 0$ es trivial. Supongamos que el resultado se cumple para m , y sea $J = \{t, t_1, t_2, \dots, t_m\} \cup \{a_{m+1}, \dots, a_{k-1}\}$ un conjunto de corte de tipo (A, B) con triángulos t, t_1, t_2, \dots, t_m .

Dado $c \in C$, para todo $C \in \{\mathcal{E}(P), \infty, \mathcal{F}(P), \mathcal{F}_2(P)\}$, sea A_c el conjunto de aristas de P que se unen con c por trayectorias independientes con J . Si J es un conjunto de corte para $a \in A$ y $b \in B$ tenemos que $A_a \cap A_b = \emptyset$. Además, puesto que J es minimal, existe un conjunto $\{\Lambda_\alpha\}_{\alpha \in J}$ de trayectorias independientes con $\Lambda_\alpha \cap J = \{\alpha\}$ para cada $\alpha \in J$. Dado Λ_t , por e_a (e_b respectivamente) denotamos

la arista de t que están en $A_a \cap \Lambda_t$ ($A_b \cap \Lambda_t$ respectivamente). Sea e la primera arista de t .

Supongamos que $A, B = \mathcal{E}(P)$.

Caso 1: $A_e \cap A_a = \emptyset$. Si $e_a = a$, como $val(a) \geq n$ existen p triángulos s_1, \dots, s_p en $st(a; P) - J$. Además, puesto que $p > k - m - 1$, existe una arista $a' < s_j$ con $a' \notin J$. Así $a' \in A_a$, y todo 2-camino de a' a b contiene elementos de J . Además, dado que $A_e \cap A_a = \emptyset$ deducimos que todo 2-camino $\Gamma : a' - b$ con $\Gamma \cap J = \{t\}$ contiene a a . Por tanto, $J_1 = \{a, t_1, \dots, t_m\} \cup \{a_{m+1}, \dots, a_{k-1}\}$ es un conjunto de corte para a' y b con sólo m triángulos.

Si $a \neq e_a$, la hipótesis $A_e \cap A_a = \emptyset$ implica que $J_1 = \{e_a, t_1, \dots, t_m\} \cup \{a_{m+1}, \dots, a_{k-1}\}$ es un conjunto de corte para a y b .

Caso 2: $A_e \cap A_a \neq \emptyset$. Como $A_a \cap A_b = \emptyset$, se sigue que $A_e \cap A_b = \emptyset$, y procedemos análogamente sustituyendo a por b .

Supongamos $A = \mathcal{E}(P)$, y $B \neq \mathcal{E}(P)$. En el caso 1, la demostración es igual a la anterior. En el caso 2, el conjunto $J_2 = \{e_b, t_1, \dots, t_m\} \cup \{a_{m+1}, \dots, a_{k-1}\}$ es un conjunto de corte para a, b con m triángulos.

Finalmente, supongamos $A, B \in \{\mathcal{F}_2(P), \mathcal{F}(P)\}$. En el caso 1 el conjunto $J_3 = \{e_a, t_1, \dots, t_m\} \cup \{a_{m+1}, \dots, a_{k-1}\}$ es un conjunto de corte para a, b . En el caso 2 el conjunto J_2 anterior es un conjunto de corte.

Ahora aplicamos la hipótesis de inducción para finalizar la demostración. \square

IV.3 Otros teoremas sobre la conectividad de 2-complejos

Esta sección contiene los resultados 2-dimensionales análogos a los dados en §III.3. Los teoremas sobre la $(\mathcal{E}(P), \mathcal{E}(P))$ -conexión de 2-complejos finitos se encuentran en ([46]; §4). Damos a continuación algunos teoremas concernientes a la conexión de tipo $(\mathcal{E}(P), \infty)$.

Teorema IV.3.1 *Sea P un 2-complejo infinito admisible con $\text{val}(P) \geq n$. Entonces son equivalentes:*

- a) P es n -conexo de tipo $(\mathcal{E}(P), \infty)$
- b) Dado $A = \{e_1, \dots, e_p\} \subseteq \mathcal{E}(P)$ y una familia $\{a_1, \dots, a_p\}$ de enteros positivos con $\sum_{i=1}^p a_i = n$ existen n 2-rayos independientes de A a ∞ tal que a_i de ellos comienzan en e_i , para todo i .
- c) Dado un conjunto de aristas $A \subseteq \mathcal{E}(P)$ con $|A| = n$ existe una familia de n 2-rayos independientes de A a ∞ .

Demostración. $a) \Rightarrow b)$ Sea E el conjunto de vértices de $G(P)$ asociado a las aristas interiores. De acuerdo con (IV.2.8) $\text{Con}(E, \infty) = n$. Además el conjunto A define un conjunto $\bar{A} = \{\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n\} \subseteq E$ y (III.3.1) muestra que existen n rayos en $G(P)$ con a_i de ellos comenzando en \bar{e}_i . Claramente estos rayos definen 2-rayos in P .

$b) \Rightarrow c)$ Es evidente.

$c) \Rightarrow a)$ Sea J un conjunto de corte para P . Como $\text{val}(P) \geq n$ podemos suponer que $J \subseteq \mathcal{E}(P)$ por (IV.2.14). Si $|J| \leq n - 1$ y $e \in \mathcal{E}(P) - J$ podemos aplicar c) a $J \cup \{e\}$ para obtener un 2-rayo R de e a ∞ con $R \cap J = \emptyset$ lo existe que es una contradicción. Luego $|J| \geq n$, y P es n -conexo de tipo $(\mathcal{E}(P), \infty)$. \square

Teorema IV.3.2 *Sea P un 2-complejo infinito admisible con $\text{val}(P) \geq n$. Entonces son equivalentes:*

- a) P es n -conexo de tipo $(\mathcal{E}(P), \infty)$.
- b) Dado un conjunto $A \subseteq \mathcal{E}(P)$ con $|A| = n - 1$, toda arista $e \in A$ está contenida en un 2-birayo que evita las otras $n - 2$ aristas de A .
- c) Dado un conjunto $B \subseteq \mathcal{E}(P)$ con $|B| = n$, toda arista de B está contenida en un 2-rayo que evita las otras $n - 1$ aristas de B .

Demostración. $a) \Rightarrow b)$ Usando (IV.2.8) tenemos que $\text{Con}(E, \infty) = n$ en el grafo bipartito $G(P)$. Aquí E es el conjunto de vértices de $G(P)$ correspondiente a las aristas interiores. Además el conjunto A define un conjunto $\bar{A} \subseteq E$ y

(III.3.3) nos da un birayo R en $G(P)$ que contiene un vértice de $\bar{e} \in \bar{A}$ y evita el resto de vértices de \bar{A} . El birayo R define claramente un 2-birayo con la propiedad requerida.

b) \Rightarrow c) Es evidente.

c) \Rightarrow a) Es similar a la demostración correspondiente de (IV.3.1). \square

Teorema IV.3.3 *Sea P un 2-complejo infinito admisible. Supongamos que P es s -conexo de tipo $(\mathcal{E}(P), \mathcal{E}(P))$ y $\text{val}(P) \geq n$. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

a) P es n -conexo de tipo $(\mathcal{E}(P), \infty)$.

b) Para $A = \{e_1, \dots, e_{n-1}\} \subseteq \mathcal{E}(P)$ y $1 \leq m \leq \min\{s+1, n-1\}$, existe un 2-birayo $R \subseteq P$ con $R \cap A = \{e_1, \dots, e_m\}$.

c) Para $A = \{e_1, \dots, e_n\} \subseteq \mathcal{E}(P)$ y $1 \leq m \leq \min\{s+1, n\}$, existe un 2-rayo $R \subseteq P$ con $R \cap A = \{e_1, \dots, e_m\}$.

Demostración. a) \Rightarrow b) Sabemos por (IV.2.8) que $\text{Con}(E, \infty) = n$ y $\text{Con}(E, E) = s$ para el conjunto E de aristas de $G(P)$ correspondientes a las aristas interiores. Además, el conjunto $A = \{e_1, \dots, e_{n-1}\}$ define un conjunto $\bar{A} = \{\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_{s+1}\} \subseteq E$ y (III.3.5) nos da un birayo R en $G(P)$ con $R \cap \bar{A} = \{\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_m\}$. El birayo R del grafo bipartito $G(P)$ induce el requerido 2-birayo en P .

La demostración de a) \Rightarrow c) es similar. Además b) \Rightarrow a) y c) \Rightarrow a) siguen de (IV.3.2). \square

Para la conectividad de tipo $\text{Con}(\mathcal{E}(P), \mathcal{F}_2(P))$ tenemos el siguiente resultado que sigue el esquema de (IV.3.2). Nótese que $\mathcal{F}_2(P)$ se identifica con $\mathcal{F}(G(P))$ por (IV.1.4). Compárese con (III.3.11).

Teorema IV.3.4 *Sea P un 2-complejo infinito admisible con $\text{val}(P) \geq n$. Entonces son equivalentes:*

- a) P es n -conexo de tipo $(\mathcal{E}(P), \mathcal{F}_2(P))$.
- b) Dado un conjunto $A \subseteq \mathcal{E}(P)$ con $|A| = n - 1$, para toda arista $e \in A$ y todo 2-final $\Delta \in \mathcal{F}_2(P)$ existe un 2-birayo R cuyo 2-final es Δ y tal que $R \cap A = \{e\}$.
- c) Dado un conjunto $B \subseteq \mathcal{E}(P)$ con $|B| = n$, para todo $e \in B$ y todo 2-final Δ existe un 2-rayo R cuyo 2-final es Δ y tal que $B \cap R = \{e\}$.

Puesto que $Con(\mathcal{E}(P), \mathcal{F}_2(P)) = Con(\mathcal{E}(P), \mathcal{E}(P))$ (ver (IV.2.8) y (IV.2.2)(a)), tenemos también los dos teoremas siguientes

Teorema IV.3.5 *Sea P un 2-complejo infinito admisible con $val(P) \geq n$. Entonces son equivalentes:*

- a) P es n -conexo de tipo $(\mathcal{E}(P), \mathcal{F}_2(P))$.
- b) Para $A = \{e_1, \dots, e_{n-1}\} \subseteq \mathcal{E}(P)$, $\Delta \in \mathcal{F}_2(P)$ y $1 \leq m \leq n - 1$, existe un 2-birayo R cuyo único 2-final es Δ y tal que $R \cap A = \{e_1 \dots e_m\}$.
- c) Para $B = \{e_1, \dots, e_n\} \subseteq \mathcal{E}(P)$, $\Delta \in \mathcal{F}_2(P)$ y $1 \leq m \leq n$, existe un 2-rayo R cuyo 2-final es Δ y tal que $R \cap B = \{e_1 \dots e_m\}$.

Demostración. Supongamos a). Podemos razonar como en (IV.3.3) y obtener b) y c). Los recíprocos siguen de (IV.3.4). \square

Teorema IV.3.6 *Sea P un 2-complejo infinito admisible con $val(P) \geq n$ y $|\mathcal{F}_2(P)| \geq 2$. Entonces son equivalentes:*

- a) P es n -conexo de tipo $(\mathcal{E}(P), \mathcal{F}_2(P))$.
- b) Para $A = \{e_1, \dots, e_{n-1}\} \subseteq \mathcal{E}(P)$, $\Delta, \Delta' \in \mathcal{F}_2(P)$ y $1 \leq m \leq n - 1$, existe un 2-birayo R con 2-finales Δ, Δ' tal que $R \cap A = \{e_1 \dots e_m\}$.

El Teorema IV.3.6 es consecuencia de (III.3.15). El siguiente resultado se obtiene al aplicar (III.3.8) al grafo bipartito $G(P)$.

Teorema IV.3.7 *Sea P un 2-complejo infinito admisible. Entonces son equivalentes:*

- a) P es n -conexo de tipo $(\mathcal{F}_2(P), \mathcal{F}_2(P))$.
- b) Dado dos conjuntos disjuntos de 2-finales $F = \{\Delta_1, \dots, \Delta_p\}$ y $F' = \{\Delta'_1, \dots, \Delta'_q\}$ y dos conjuntos de enteros positivos $\{a_1, \dots, a_p\}$ y $\{a'_1, \dots, a'_q\}$ con $\sum_{i=1}^p a_i = \sum_{j=1}^q a'_j = n$, existen 2-birayos independientes de F a F' tal que a_i de ellos definen a Δ_i y a'_j de ellos definen a Δ'_j , para todo i, j .

Para finalizar esta sección, consideraremos los tipos de conexión en los que intervienen los finales de Freudenthal del 2-complejo P . La dificultad en este caso se debe a que, en general, no hay una biyección entre los finales de Freudenthal de P y finales de Freudenthal de $G(P)$. Sin embargo, los análogos a los Teoremas IV.3.2 y IV.3.3 para el par de conexión $Con(\mathcal{E}(P), \mathcal{F}(P))$ se verifican. En efecto

Teorema IV.3.8 *Sea P un 2-complejo infinito admisible con $val(P) \geq n$. Entonces son equivalentes:*

- a) P es n -conexo de tipo $(\mathcal{E}(P), \mathcal{F}(P))$.
- b) Dado un conjunto $A \subseteq \mathcal{E}(P)$ con $|A| = n - 1$, para toda arista $e \in A$ y todo final $\varepsilon \in \mathcal{F}(P)$ existe un 2-birayo con ambos finales ε y $R \cap A = \{e\}$.
- c) Dado un conjunto $B \subseteq \mathcal{E}(P)$ con $|B| = n$, para toda arista $e \in B$ y todo final $\varepsilon \in \mathcal{F}(P)$ existe un 2-rayo cuyo final es ε y tal que $R \cap B = \{e\}$.

Demostración. Sea $i_*^{-1}(\varepsilon) = C_\varepsilon$ el conjunto de finales de Freudenthal del grafo bipartito $G(P)$ determinado por de ε . Sea \bar{A} el conjunto de vértices asociados a las aristas de A y $\bar{\varepsilon} \in \bar{A}$. Por a) podemos encontrar n rayos independientes en $G(P)$ de $\bar{\varepsilon}$ a C_ε . Razonando como en (II.3.5) para la compactificación de Freudenthal $\widehat{G(P)}$ de $G(P)$, obtenemos un birayo R en $G(P)$ con ambos finales en C_ε tal que $\bar{R} \cap \bar{A} = \{\bar{\varepsilon}\}$. Este birayo \bar{R} induce el birayo buscado en b). El resto de la demostración sigue un esquema análogo. \square

Teorema IV.3.9 *Sea P un 2-complejo infinito admisible. Supongamos que P es s -conexo de tipo $(\mathcal{E}(P), \mathcal{E}(P))$ y $\text{val}(P) \geq n$. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

- a) P es n -conexo de tipo $(\mathcal{E}(P), \mathcal{F}(P))$.
- b) Dado un conjunto $A = \{e_1, \dots, e_{n-1}\} \subseteq \mathcal{E}(P)$, un final $\varepsilon \in \mathcal{F}(P)$ y $1 \leq m \leq \min\{s+1, n-1\}$, existe un 2-birayo $R \subseteq P$ cuyo único final es ε y tal que $R \cap A = \{e_1, \dots, e_m\}$.
- c) Dado un conjunto $A = \{e_1, \dots, e_n\} \subseteq \mathcal{E}(P)$, un final $\varepsilon \in \mathcal{F}(P)$ y $1 \leq m \leq \min\{s+1, n\}$ existe un 2-rayo $R \subseteq P$ cuyo final es ε y tal que $R \cap A = \{e_1, \dots, e_m\}$.

Demostración. La demostración sigue el mismo procedimiento que la demostración de (II.3.7) con las modificaciones obvias. \square

Nota IV.3.10 Señalemos que el Teorema IV.3.9 no es cierto sin la hipótesis de la conectividad de tipo $(\mathcal{E}(P), \mathcal{E}(P))$. Efectivamente, el siguiente 2-complejo P muestra la necesidad de tal hipótesis para el Teorema IV.3.9. Sea M un 2-complejo admisible que es 3-conexo de tipo $(\mathcal{E}(P), \mathcal{E}(P))$ y con sólo un 2-final, por ejemplo el 2-esqueleto de una 3-variedad abierta con un único final (ver (IV.4.2)). Sea $A = \{x_0, \dots, x_n, \dots\}$ una sucesión de vértices no adyacentes de M . Consideramos tres copias disjuntas $A_i = \{x_n^i\} \subseteq M_i$, ($1 \leq i \leq 3$) de A y M respectivamente y construimos el 2-complejo P_0 identificando en un punto y_n los tres puntos x_n^i para cada n . Dado $y_0 \in P_0$ tomamos tres aristas adyacentes a y_0 $\gamma_i = \langle y_0, v_i \rangle \subseteq M_i \subseteq P_0$ una en cada copia M_i de M . Sea $c \notin P_0$ y consideramos el complejo K_0 con tres triángulos $\langle c, y_0, v_i \rangle$ ($1 \leq i \leq 3$). Tomamos $P = K_0 \cup P_0$. Entonces P tiene un final de Freudenthal pero tres 2-finales. Además, P es 3-conexo de tipo $(\mathcal{E}(P), \mathcal{F}(P))$ y sólo 1-conexo de tipo $(\mathcal{E}(P), \mathcal{E}(P))$. Claramente P satisface la condición a) en (IV.3.9) pero no la condición b). Un ejemplo similar se puede construir para c).

El análogo de (IV.3.7) para finales de Freudenthal se cumple también. Efectivamente se tiene

Teorema IV.3.11 *Sea P un 2-complejo infinito admisible. Entonces son equivalentes:*

- a) P es n -conexo de tipo $(\mathcal{F}(P), \mathcal{F}(P))$.
- b) Dados $F = \{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_p\}$ y $F' = \{\eta_1, \dots, \eta_q\}$ dos conjuntos disjuntos de finales de Freudenthal y dos conjuntos de enteros positivos $\{a_1, \dots, a_p\}$ y $\{a'_1, \dots, a'_q\}$ con $\sum_{i=1}^p a_i = \sum_{i=1}^q a'_i = n$, existen 2-birayos independientes de F a F' tales que a_i de ellos definen ε_i y a'_j de ellos definen η_j , para todo i, j .

Demostración. Claramente basta con demostrar $a) \Rightarrow b)$. Para esto, obsérvese que por (IV.1.4) cada final de Freudenthal $\alpha \in \mathcal{F}(P)$ define un conjunto cerrado $A_\alpha = i_*^{-1}(\alpha) \subseteq \mathcal{F}(G(P))$ donde $G(P)$ es el grafo bipartito de P . Por tanto los conjuntos F y F' determinan dos familias \mathcal{A}_F y $\mathcal{A}_{F'}$ de conjuntos de finales de Freudenthal de $G(P)$ disjuntos dos a dos. Como P es n -conexo de tipo $(\mathcal{F}(P), \mathcal{F}(P))$ se puede aplicar a $G(P)$ la Proposición III.3.19 tomando $\mathcal{A} = \mathcal{A}_{F'}$ y $\mathcal{B} = \mathcal{A}_F$ y obtener n birayos disjuntos en $G(P)$ tales que a_i de ellos comienzan en A_{ε_i} y b_j de ellos terminan en A_{η_j} . Además, por la biyección g de (IV.1.4) los birayos en $G(P)$ inducen 2-birayos en P , obteniéndose así el resultado. \square

Los correspondientes teoremas para los pares de conectividad de tipo $(\mathcal{E}(P), \mathcal{F}(P))$ y $(\mathcal{F}(P), \mathcal{F}_2(P))$ se obtienen de forma análoga como consecuencia de (III.3.9) y (III.3.19) respectivamente. Más explícitamente

Teorema IV.3.12 *Sea P un 2-complejo infinito admisible. Entonces son equivalentes:*

- a) P es n -conexo de tipo $(\mathcal{E}(P), \mathcal{F}(P))$.
- b) Dados $A = \{e_1, \dots, e_p\} \subseteq \mathcal{E}(P)$ y un conjunto de finales de Freudenthal $F = \{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_q\}$ y dos conjuntos de enteros positivos $\{a_1, \dots, a_p\}$ y $\{a'_1, \dots, a'_q\}$ con $\sum_{i=1}^p a_i = \sum_{i=1}^q a'_i = n$, existen 2-rayos independientes de A a F tales que a_i de ellos comienzan en e_i y a'_j de ellos definen ε_j , para todo i, j .

Teorema IV.3.13 *Sea P un 2-complejo infinito admisible. Entonces son equivalentes:*

- a) P es n -conexo de tipo $(\mathcal{F}(P), \mathcal{F}_2(P))$.
- b) *Dados un conjunto de finales de Freudenthal $F = \{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_p\}$ y un conjunto de 2-finales $F' = \{\Delta_1, \dots, \Delta_q\}$ y dos conjuntos de enteros positivos $\{a_1, \dots, a_p\}$ y $\{a'_1, \dots, a'_q\}$ con $\sum_{i=1}^p a_i = \sum_{i=1}^q a'_i = n$, existen 2-birayos independientes de F a F' tales que a_i de ellos definen ε_i y a'_j de ellos definen Δ_j , para todo i, j .*

IV.4 Conectividad del 2-esqueleto de una pseudovariiedad

Como ya mencionamos en §III.5 los 1-esqueletos de n -variedades forman una clase destacada de grafos $(n+1)$ -conexos. De manera similar, un importante ejemplo de 2-complejos n -conexos son los 2-esqueletos de variedades. En esta sección presentamos los resultados correspondientes para los 2-esqueletos de n -pseudovariiedades de borde lleno y demostramos que son 2-complejos n -conexos. Este resultado es una generalización considerable del Teorema 4 de Woon en [46].

Proposición IV.4.1 *Toda 2-pseudovariiedad M con borde lleno es 2-conexa por 2-caminos.*

Demostración. Sabemos que M es 1-conexa, por ser fuertemente conexa. Si no fuese 2-conexa, por (IV.2.14) existiría un conjunto de corte consistente en una arista interior e que separa un par de aristas $\alpha, \beta \in \mathcal{E}_{int}(M)$. Como ∂M es lleno en M , existe al menos un vértice v en $e \cap (M - \partial M)$. Por tanto, $lk(v; M)$ es una unión disjunta de ciclos por (III.5.4). Si σ_1 , y σ_2 son los dos 2-símplices de M con $\sigma_1 \cap \sigma_2 = e$, sean e_1 , y e_2 las caras opuestas de v en σ_1 , y σ_2 respectivamente. Claramente $e_1 \cup e_2$ está en una componente $C \subseteq lk(v; M)$. Además, dado un 2-camino $\Lambda : \alpha - \beta$ en M , los 2-símplices σ_1 y σ_2 tienen que estar necesariamente contenidos en Λ . Como C es un ciclo, la diferencia $A = C - e_1 \cup e_2$ es un arco en $lk(v; M)$. Sea $\hat{A} \subseteq st(v; M)$ el subcomplejo generado por v y A .

Es ahora fácil definir 2-caminos de α a β en $\widehat{A} \cup \Lambda$ evitando e , lo que da una contradicción. \square

Teorema IV.4.2 *Sea M una n -seudovariedad con borde lleno. Entonces sk^2M es n - conexo ($n \geq 2$).*

Demostración. Procedemos por inducción. Para $n = 2$ el resultado es (IV.4.1). Supongamos que es cierto para $n - 1$ y sea M una n -seudovariedad con $n \geq 3$. Sea J un conjunto de corte para las aristas α y β de M . Dado que ∂M es lleno, toda arista $e \in sk^2M$ pertenece al menos a dos n -símplices de M , luego $val(e) \geq n$ en sk^2M y, por (IV.2.14), podemos suponer que J contiene sólo aristas e_1, \dots, e_k . Sea \widetilde{M} la subdivisión de M con $V(\widetilde{M}) - V(M)$ el conjunto unitario consistente en el baricentro $b(e_1)$ de e_1 . Sea e'_1 y e''_1 dos aristas en \widetilde{M} con $e_1 = e'_1 \cup e''_1$.

Como J es un conjunto de corte para sk^2M , el siguiente Lema IV.4.3 muestra que $\widetilde{J} = \{e'_1, e''_1, e_2, \dots, e_k\}$ es entonces un conjunto de corte para $sk^2\widetilde{M}$. Ahora la demostración de (III.5.1) se puede repetir aquí con los cambios obvios (de aristas por vértices, 2-caminos por caminos, etc..) cuando se reemplace M por \widetilde{M} y $st(v_1; M)$ por $st(b(e_1); \widetilde{M})$. Esto finaliza la demostración. \square

Lema IV.4.3 *Con la notación de la demostración (IV.4.2) el conjunto \widetilde{J} es un conjunto de corte $sk^2\widetilde{M}$ para las aristas α y β .*

Demostración. Supongamos por el contrario que \widetilde{J} no es un conjunto de corte para dichas aristas. Entonces existe en $sk^2M - \widetilde{J}$ un 2-camino $\Lambda = \{\alpha, t_0, \alpha_1, t_1, \dots, \alpha_m, t_m, \beta\}$ que contiene a α y β . Veamos cómo convertir Λ en un nuevo 2-camino Λ' entre α y β en $sk^2M - J$, lo que nos llevará a contradicción.

Sean v_0, v_1 los vértices de α y supongamos que $t_0 \notin sk^2M$. Si no, elegimos el primer triángulo en Λ con esta propiedad. Obsérvese que por ser J un conjunto de corte de sk^2M el 2-camino Λ debe contener algún triángulo de aristas e'_1 ó e''_1 . Necesariamente $t_0 = \langle v_0, v_1, b(e_1) \rangle$ y α_1 es la arista $\langle v_1, b(e_1) \rangle$ ó $\langle v_0, b(e_1) \rangle$. Supongamos que $\alpha_1 = \langle v_1, b(e_1) \rangle$; el caso $\alpha_1 = \langle v_0, b(e_1) \rangle$ es similar.

Distinguiamos ahora dos nuevos casos: a) Si $t_1 = \langle v_1, b(e_1), v_2 \rangle$ con $e_1 = \langle v_0, v_2 \rangle$, entonces tomamos $\alpha_2 = \langle v_1, v_2 \rangle$ y comenzamos Λ' como el 2-camino $\{\alpha, t, \alpha_2\}$ donde $t = \langle v_0, v_1, v_2 \rangle$ y seguimos con α_2 en el papel de α .

b) Si $t_1 \neq \langle v_1, b(e_1), v_2 \rangle$ tenemos necesariamente que $t_1 = \langle v_1, b(e_1), w \rangle$ donde $\sigma = \langle v_0, v_1, v_2, w \rangle$ es un 3-símplce de M . Aquí usamos la definición de la subdivisión \widetilde{M} . Además, α_2 es la arista $\langle v_1, w \rangle$ o bien la arista $\langle b(e_1), w \rangle$; en el primer caso podemos comenzar Λ' como el 2-camino $\{\alpha, t', \alpha_2\}$ donde $t' = \langle v_0, v_1, w \rangle$ y seguimos con α_2 en el papel de α . En el segundo caso la arista α_3 es necesariamente una arista de σ , y podemos encontrar un 2-camino $\Lambda_0 \subseteq sk^2\sigma$ de α a α_3 y entonces comenzamos Λ' como Λ_0 y seguimos con α_3 como α . \square

Nota IV.4.4 En general, para todo n -complejo P fuertemente conexo el esqueleto 2-dimensional sk^2P es $(n-1)$ -conexo. Compárese (III.5.3). De hecho, para $n=2$ el resultado es trivial, dado que la 1-conectividad es justamente la conexión fuerte requerida. Además para $n \geq 3$, sea C el n -complejo formado por dos n -símplices teniendo en común una $(n-1)$ -cara. Entonces por ([46]; Prop.4) se tiene que sk^2C es $(n-1)$ -conexo y de aquí se deduce fácilmente que para toda cadena $C \subseteq P$ de n -símplices $\sigma_0, \dots, \sigma_k$ con $\sigma_i \cap \sigma_{i+1}$ en común con $(n-1)$ -caras, el 2-esqueleto sk^2C es $(n-1)$ -conexo. Ahora el resultado es inmediato. Compárese ([46]; Thm.5).

Para finalizar esta sección, presentamos una demostración alternativa de (IV.4.2) para las pseudovariiedades normales y en particular para las variedades de homología y las variedades combinatoriales.

Definición IV.4.5 Un 2-complejo admisible P se dice que es *relativamente n -conexo* con respecto al vértice $v \in P$ si $lk(v; P)$ está contenido en un 2-subcomplejo n -conexo que no contiene a v .

Nota IV.4.6 Nótese que todo 2-complejo n -radial P en el sentido de Woon [46] es relativamente $(n-1)$ -conexo con respecto a todo vértice $v \in P$ ([46]; Prop.4.2).

Teorema IV.4.7 *Sea P un 2-complejo admisible relativamente $(n - 1)$ -conexo con respecto a todo vértice $v \in P$. Si $val(e) \geq n$ para todo $e \in \mathcal{E}_{int}(P)$ entonces P es n -conexo*

Demostración. Sea J un conjunto de corte minimal para las aristas α, β en P . Dado que $val(e) \geq n$ para toda $e \in \mathcal{E}_{int}(P)$ usamos (IV.2.14) y podemos suponer que $J = \{e_1, \dots, e_k\} \subseteq \mathcal{E}_{int}(P)$. Sea $k \leq n - 1$, y sean $\Lambda_1, \dots, \Lambda_k$ 2-caminos tales que $\Lambda_i \cap J = \{e_i\}$ para $1 \leq i \leq k$.

Si $\Lambda_1 = \{a_0, t_0, a_1, t_1, \dots, a_m, t_m, a_{m+1}\}$ con $a_0 = \alpha$, $a_{m+1} = \beta$ y $a_j = e_1 = \langle v, w \rangle$ para cierto j , podemos considerar dos casos. En primer lugar si $a_{j-1} \cap a_{j+1} = \{w\}$, entonces $a_{j-1}, a_{j+1} \in lk(v; P)$ y por un argumento similar al dado en la demostración de (III.5.8) encontramos un 2-camino Λ'_1 de α a β con $\Lambda'_1 \cap J = \emptyset$ que es una contradicción. Luego $k \geq n$.

Supongamos ahora $a_{j-1} \cap a_{j+1} = \emptyset$, y sea a'_{j-1} , la arista de t_{j-1} distinta de a_{j-1} y e_1 . Como $val(a_{j+1}) \geq n$ y $k \leq n - 1$ podemos encontrar un triángulo t en $st(a_{j+1}, P)$ tal que sus tres aristas no están en J . Ahora sea w el vértice común de a'_{j-1} y a_{j+1} . Entonces alguna arista $b < t$ así como a_{j-1} pertenecen a $lk(w; P)$, y concluimos como antes. \square

Teorema IV.4.8 *El 2-esqueleto sk^2M de una n -seudovariiedad normal M ($n \geq 2$) con borde lleno es relativamente $(n - 1)$ -conexo para todo vértice $v \in M$.*

Demostración. Si $n = 2$ tenemos que $lk(v; M) \subseteq M_v = M - st(v; M)$ y el resultado sigue de aplicar (IV.4.4) a la 2-variedad M_v . Nótese que M_v es conexa ya que ∂M es lleno en M . Sin embargo, no podemos garantizar que M_v tenga borde lleno. Procedemos ahora por inducción como en la demostración de (III.5.9) usando la inclusión $lk(v; sk^2M) \subseteq sk^2lk(v; M)$ y (IV.4.7). \square

Ahora tenemos como consecuencia inmediata de (IV.4.7) y (IV.4.8)

Teorema IV.4.9 *Sea M una n -seudovariiedad normal con borde lleno ($n \geq 2$). Entonces sk^2M es un 2-complejo n -conexo.*

Capítulo V

Planaridad y conectividad de continuos generalizados de Peano

La planaridad es el concepto más estudiado en teoría de grafos. De hecho el famoso Teorema de Kuratowski (1927) que caracteriza la planaridad de los grafos finitos es uno de los más citados en toda la literatura matemática. La naturaleza puramente topológica del teorema de Kuratowski fue puesta de manifiesto al extender S. Claytor (1937) dicho teorema a la clase de los continuos de Peano. En este capítulo se extiende el Teorema de Claytor a continuos generalizados de Peano en §V.1, obteniéndose como corolarios la extensión a grafos infinitos localmente finitos del Teorema de Kuratowski debido a G. Dirac y S. Schuster (1954) así como la caracterización de R. Halin (1966) y C. Thomassen (1977) de la planaridad propia de grafos infinitos localmente finitos y los correspondientes resultados para poliedros 2-dimensionales debidos a S. Mardesic y J. Segal (1966) para el caso compacto y a R. Ayala et al. (1997) para el caso no compacto.

En §V.2 y §V.3 se demuestran diversos resultados relacionando la planaridad y la conectividad para continuos generalizados de Peano. En particular, se caracteriza la planaridad de los continuos generalizados de Peano 3-conexos y como consecuencia de los grafos 3-conexos.

Finalmente en §V.3 como una generalización de los grafos de aristas de reticulados planos se introduce el concepto de inmersión reticular para los continuos generalizados de Peano y se caracterizan aquellos continuos generalizados

de Peano para los cuales todas sus inmersiones planas son reticulares. Como consecuencia, también caracterizamos la planaridad de familias de continuos generalizados de Peano.

V.1 Planaridad de continuos generalizados de Peano

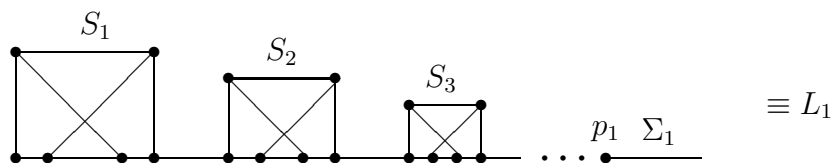
En esta sección extendemos un teorema de Claytor con el fin de caracterizar los continuos generalizados de Peano que se pueden sumergir en la 2-esfera. También damos una caracterización de los continuos generalizados de Peano que admiten una inmersión en el plano (Teorema V.1.3). Obteniendo así extensiones a continuos generalizados de los resultados citados anteriormente.

El bien conocido Teorema de Kuratowski [24] establece que un grafo finito G se puede sumergir en la 2-esfera S^2 si y sólo si G no contiene un subgrafo homeomorfo al grafo completo bipartito $K_{3,3}$ o al grafo completo con cinco vértices K_5 ; ver la figura 5.1.



Figura 5.1

Posteriormente Claytor [7] caracterizó los continuos de Peano que son sumergibles en S^2 añadiendo a $K_{3,3}$ y K_5 dos curvas prohibidas L_1 , y L_2 que son continuos de Peano 1-dimensionales que no son grafos; ver la figura 5.2. Realmente L_1 y L_2 son debidos a Kuratowski quien ya sugirió su importancia en [24].



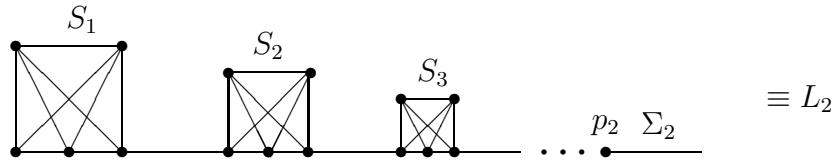


Figura 5.2

El Teorema de Kuratowski fue extendido a grafos localmente finitos por Dirac y Schuster [9] probando que un grafo G con estas condiciones es plano si y sólo si todos sus subgrafos finitos son planos. Además Halin [17] caracterizó los grafos localmente finitos que admiten inmersión planas sin acumulación de vértices (VAP-plano) por seis grafos prohibidos. Explícitamente K_5 , $K_{3,3}$, y los cuatro grafos infinitos de la figura 5.3

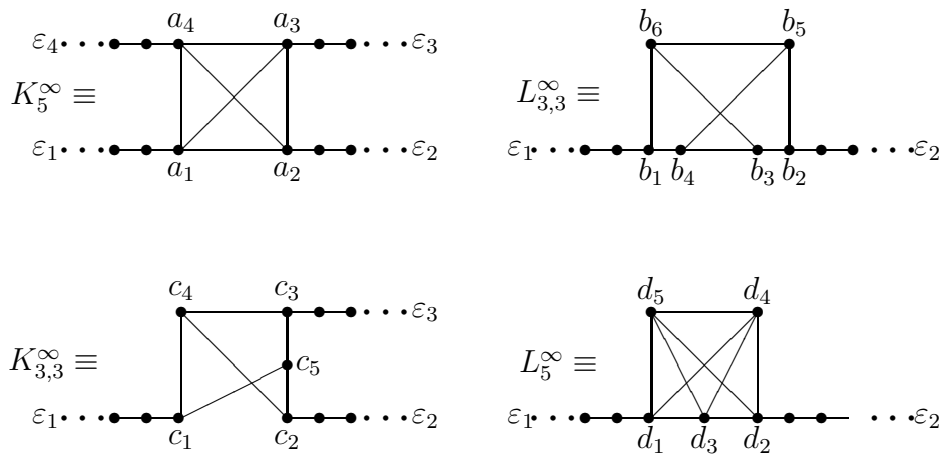


Figura 5.3

Posteriormente Thomassen ([41]; Cor. 4.1) demuestra que un grafo localmente finito conexo es VAP-plano si y sólo si admite una inmersión propia en \mathbf{R}^2 .

Existen grafos localmente finitos VAP-planos que sin embargo presentan otro tipo de acumulación. Sea por ejemplo, un grafo con dos componentes conexas: una cuadrícula infinita y un subgrafo homeomorfo a \mathbf{R} . Entonces es posible dar una inmersión en \mathbf{R}^2 sin acumulación de vértices (VAP-plana) pero es posible que existan puntos del interior de las aristas que se acumulen, como se observa en la figura siguiente

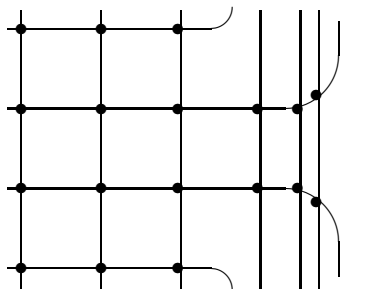


Figura 5.4

También los complejos finitos 2-dimensionales sumergibles en S^2 han sido caracterizados por Mardesic y Segal en [27] usando el Teorema de Claytor para mostrar que $K_5, K_{3,3}$ y la “chincheta” $F \subseteq \mathbf{R}^3$ dado por

$$F = \{(x, y, 0); x^2 + y^2 \leq 1\} \cup \{(0, 0, z); 0 \leq z \leq 1\}$$

son los subespacios prohibidos para que un 2-complejo finito sea plano.

Más aún, en [3] se encuentra la generalización del Teorema de Mardesic y Segal a 2-complejos localmente finitos, caracterizándose además la planaridad propia de los 2-complejos. .

En esta sección demostramos que el teorema de Claytor se cumple para continuos generalizados de Peano (Teorema V.1.1). También caracterizamos los continuos generalizados de Peano que admiten una inmersión propia en \mathbf{R}^2 (Teorema V.1.3).

Teorema V.1.1 *Sea X un continuo generalizado de Peano. Entonces son equivalentes*

- 1) X se puede sumergir en S^2 (o equivalentemente en \mathbf{R}^2 si $X \neq S^2$).
- 2) Todo subcontinuo $K \subseteq X$ se puede sumergir en S^2 .
- 3) X no contiene un conjunto homeomorfo a $K_5, K_{3,3}, L_1$ ó L_2 .
- 4) La compactificación de Freudenthal \widehat{X} de X se puede sumergir en S^2 .

Demostración. Sólomente se necesita demostrar $3) \implies 4)$. Supongamos que no es cierto 4). Entonces por (I.1.12) podemos aplicar el Teorema de

Claytor y encontrar un subespacio $A \subseteq \widehat{X}$ homeomorfo a uno de los espacios de la familia $\mathcal{S} = \{K_5, K_{3,3}, L_1, L_2\}$. Dado que se verifica 3), se tiene necesariamente que $A \cap \mathcal{F}(X) \neq \emptyset$. Ahora reemplazaremos A por un nuevo A' homeomorfo a un subespacio de \mathcal{S} y tal que $A' \cap \mathcal{F}(X) = \emptyset$; es decir $A' \subseteq X$, lo que nos llevará a una contradicción.

Caso 1: $A = K_{3,3}$ ó K_5 y no hay vértices de A en $\mathcal{F}(X)$. Observamos que para cada arista $E \subseteq A$ la intersección $F = E \cap \mathcal{F}(X)$ es homeomorfa a un subconjunto cerrado del conjunto de Cantor. Ahora usando que F es 0-dimensional y (I.1.11) podemos recubrir F por un número finito de abiertos disjuntos W_1, \dots, W_k de \widehat{X} tales que $W'_i = W_i \cap X$ son componentes conexas del complementario $X - K$ de cierto conjunto compacto $K \subseteq X$ (dependiendo de F). Además podemos suponer sin pérdida de generalidad que $W_i \cap E' = \emptyset$ para toda arista $E' \neq E$ de A , y que las intersecciones $F_i = F \cap W_i$ son también cerradas en F , y por tanto subconjuntos compactos de E . Sean x_i e y_i el primer y último elemento de F_i respectivamente. Aquí identificamos E con $[0, 1]$ mediante un homeomorfismo lineal. Nótese que x_i y y_i no son vértices de A . Sean $x'_i \leq x_i$ e $y'_i \geq y_i$ puntos de F_i . Entonces reemplazamos el segmento $\langle x'_i, y'_i \rangle \subseteq E$ por un arco $C_i \subseteq W'_i$ que une x'_i a y'_i . Realizando el mismo proceso para cada arista de A obtenemos un nuevo grafo $A' \subseteq X$ que es homeomorfo a A . Tenemos pues una contradicción.

Caso 2: Supongamos que $A = K_{3,3}$ o K_5 y que $A \cap \mathcal{F}(X)$ contiene algún vértice $v \in A$. Por definición de la topología de Freudenthal de \widehat{X} podemos encontrar una base de entornos abiertos $\{U_n\}$ de v en \widehat{X} tal que $U'_n = U_n - \mathcal{F}(X) \subseteq X$ es conexo por caminos. Además, podemos suponer que U_n no contiene ningún otro vértices de A salvo v . Como $\mathcal{F}(X)$ es 0-dimensional, toda arista incidente con v tiene intersección no vacía con U'_n . Ahora tomamos un arco Γ_1 en U'_n uniendo dos de las aristas que contienen a v ; sean estas aristas Γ_1 y Γ_2 . Si $D_1 \subseteq \Gamma_1$ es el segmento abierto de v a $q_1 = \gamma_1 \cap \Gamma_1$ consideramos el nuevo grafo $A_1 = (A - D_1) \cup \gamma_1$. Sea $U_2 \subseteq U_1$ un nuevo entorno de v en \widehat{X} con $\gamma_1 \cap U_2 = \emptyset$. Sea $\gamma_2 \subseteq U_2$ un arco desde $\Gamma_2 \subseteq A_1$ a otra arista de A distinta de Γ_1 , sea Γ_3 . Nótese que $\Gamma_3 \subseteq A_1$. Sea $A_2 = (A_1 - D_2) \cup \gamma_2$ donde $D_2 \subseteq \Gamma_2$ es el segmento abierto de v a $q_2 = \gamma_2 \cap \Gamma_2$. Si $A = K_{3,3}$ terminamos aquí, de otra forma aun tenemos que tomar un nuevo entorno $U_3 \subseteq U_2$ de v en \widehat{X} . Repitiendo lo mismo para cada vértice de $A \cap \mathcal{F}(X)$, obtenemos un nuevo grafo $A_0 \subseteq \widehat{X}$ en el que $A_0 \cap \mathcal{F}(X)$ no contiene vértices de A_0 . Nótese que A_0 es homeomorfo a A si $A = K_{3,3}$ y es

contráctil en el sentido de ([47]; §1.3), y por tanto homeomorfo a A , si $A = K_5$. Ver la figura 5.5

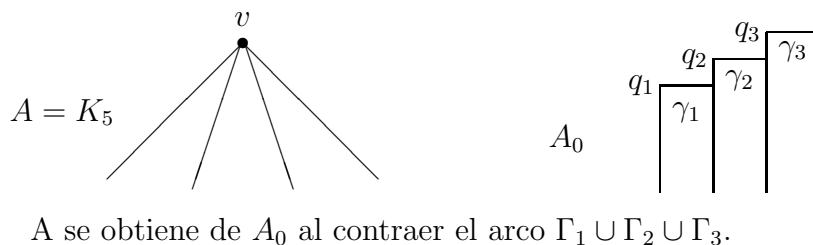


Figura 5.5

Caso 3: Supongamos $A = L_i$ ($i = 1, 2$). Sea $N_i = L_i - \Sigma_i$ el complementario del segmento Σ_i en L_i . Si $A \cap \mathcal{F}(X)$ contiene el punto límite $p_i = \Sigma_i \cap N_i$ la conexión de X implica la existencia de un arco $\Gamma \subseteq X$ desde el segmento Σ_i a N_i . Aquí usamos que $\mathcal{F}(X)$ es de dimensión 0 para asegurarnos que $N_i \cap X = \emptyset$ y $(\Sigma_i - \{p_i\}) \cap X = \emptyset$. La unión $A \cup \gamma$ contiene una copia de K_5 si $A = L_2$ o de $K_{3,3}$ si $A = L_1$ y estamos en los casos 1 y 2.

Si $p_i \notin A \cap \mathcal{F}(X)$ entonces podemos encontrar un entorno Ω de p_i en X con $\Omega \cap \mathcal{F}(X) = \emptyset$. Además $\Omega \cap A \subseteq X$ contiene una copia homeomorfa de L_i y llegamos a una contradicción con nuestra hipótesis 3) terminando aquí la demostración. \square

Nota V.1.2 Las equivalencias 1) \iff 2) \iff 3) corresponden a la extensión del Teorema de Dirac-Schuster [9] a continuos generalizados de Peano.

Un continuo generalizado de Peano P se dice que es *propriadamente plano* si existe una inmersión propia (o equivalentemente cerrada) de P en el plano euclídeo \mathbf{R}^2 . Tenemos la siguiente caracterización de continuos generalizados de Peano propriadamente planos.

Teorema V.1.3 *Sea $X \neq S^2$ un continuo generalizado de Peano. Entonces son equivalentes*

- a) X es propriadamente plano.

- b) La compactificación de Alexandroff X^+ se puede sumergir en S^2 .
- c) X no contiene conjuntos cerrados homeomorfos a $K_5, K_{3,3}, L_1, L_2$ o uno de los cuatro grafos de Halin en la figura 5.3.

Demostración. Mostraremos $a) \implies c) \implies b) \implies a)$. De hecho, sólo $c) \implies b)$ necesita de demostración. Usamos aquí la notación de la demostración de (V.1.1).

Supongamos por el contrario que X^+ no es sumergible en S^2 . De acuerdo con, (I.1.12) y el Teorema de Claytor podemos encontrar un subespacio cerrado $A \subseteq X^+$ homeomorfo a un continuo en la familia $\{K_5, K_{3,3}, L_1, L_2\}$. Además podemos suponer que $\infty \in A$, dado que de otra manera se contradice c).

Si $A = K_5, K_{3,3}$ entonces se sigue fácilmente que $A - \{\infty\}$ es uno de los grafos de Halin de la figura 5.3. En el caso de que $A = L_i$, podemos también suponer $p_i = \infty$ puesto que podemos tomar siempre una copia de L_i en cualquier entorno Ω de p_i con $\infty \notin \Omega$. Luego supongamos $p_i = \infty$. Por ser X conexo podemos encontrar un arco $\Gamma \subseteq X$ uniendo el segmento Σ_i a $N_i = L_i - \Sigma_i$. Es claro que en $(A_i - \{p_i\}) \cup \gamma$ se pueden encontrar copias de L_5^∞ si $A = L_2$ o $L_{3,3}^\infty$ si $A = L_1$. Esto contradice c) y la demostración queda terminada. \square

Nota V.1.4 Nótese que la compactificación de Alexandroff de un grafo de Halin es un grafo de Kuratowski. Además si unimos por un arco dos diferentes “aristas infinitas” en K_5^∞ obtenemos una copia de $K_{3,3}^\infty$ sumergida en el nuevo grafo. Si actuamos de igual forma con $K_{3,3}^\infty$ obtenemos una inmersión de $L_{3,3}^\infty$, y si unimos tres diferentes “aristas infinitas” de K_5^∞ obtenemos una inmersión de $L_{3,3}^\infty$ en el nuevo grafo.

Corolario V.1.5 Sea P un continuo generalizado de Peano plano cuyo número de finales es $e(P) = k$, entonces P no es propiamente plano si y sólo si contiene un grafo de Halin H con $e(H) \leq k$.

Demostración. Puesto que P es plano, debe existir un grafo de Halin $H \subseteq P$ contenido en P . Si $e(H) > k$. Entonces al menos dos finales de H determinan el mismo final de P . Ahora (V.1.4) nos da un nuevo grafo de Halin

H' con $e(H') < e(H)$. El resultado sigue después de aplicar tres pasos como máximo. \square

Corolario V.1.6 *Si P es un continuo generalizado de Peano con un sólo final, entonces P es plano si y sólo si P es propiamente plano.*

Nota V.1.7 La equivalencia $a) \iff c)$ de (V.1.3) es la extensión a continuos generalizados de Peano de la caracterización de Halin y Thomassen para grafos conexos localmente finitos y propiamente planos ([17] y [41]; Cor. 4.1). De hecho, la demostración de (V.1.3) muestra que el Teorema de Claytor implica esta caracterización puesto que L_i ($i = 1, 2$) no puede ser sumergido en un grafo H ya que en caso contrario los puntos de valencia ≥ 3 definen un conjunto de vértices en H que tienen a p_i como punto de acumulación en la topología de H .

Terminamos esta sección señalando que la caracterización de poliedros compactos planos de [27] se puede extender a poliedros localmente compactos con pequeños cambios. Es decir, si se usa (V.1.1) en vez del Teorema de Claytor en la demostración de $c) \implies a)$ en ([27]; §3) se tiene

Teorema V.1.8 *Un poliedro localmente compacto 2-dimensional P se puede sumergir en S^2 si y sólo si P no contiene un conjunto homeomorfo a $K_{3,3}$, K_5 ó a F .*

Demostración. Supongamos que P no es plano. Como es un continuo generalizado de Peano aplicamos (V.1.1) y existe una inmersión de K_5 , $K_{3,3}$, L_1 ó L_2 en P . Ahora el resultado sigue de la siguiente proposición. \square

Proposición V.1.9 ([27]; Thm.3) *Sea P un poliedro localmente compacto que contiene a L_1 ó L_2 . Entonces P contiene una copia de “la chincheta” F .*

Demostración. Sea K un complejo simplicial con $|K| = P$; podemos suponer sin pérdida de generalidad que K es 2-dimensional, puesto que los poliedros 1-dimensionales no pueden contener ni a L_1 ni a L_2 (ver (V.1.7)) y si $\dim(K) \geq 3$, K contiene algún 3-símplice y por tanto a F . Además podemos

suponer también que tres 2-símplices de K no tienen una arista común ya que de otra forma P contendría a F . Subdividiendo si es necesario, podemos tomar el punto límite p_i de L_i como un vértice de K . Finalmente, la estrella $st(p_i, K)$ contiene a L_i dado que todo entorno de p_i en L_i contiene una copia de L_i .

Por la última condición, la estrella $st(p_i, K)$ debe ser de dimensión 2. Más aún, la componente $C \subseteq st(p_i, K) - \{p_i\}$ que contiene al conjunto conexo $T_i = L_i - \Sigma_i$ debe ser 2-dimensional (ver (V.1.7)). Ahora, como $val(\sigma) \leq 2$ para todo 2-símplice $\sigma \in K$, el poliedro $D = C \cup \{p_i\}$ es un disco, pues $M = C \cap lk(p_i; K)$ es un grafo finito de valencia ≤ 2 . Luego M es una circunferencia o un arco y D es entonces un disco. Más aún, $p_i \notin \partial D$, pues si no $L_i \subseteq D \cup \Sigma_i \subseteq \mathbf{R}^2$ lo que es contradicción. Además, Σ_i no puede estar en D pues en tal caso $L_i \subseteq \mathbf{R}^2$. Así que D está en otra componente $C' \subseteq st(p_i, K) - \{p_i\}$ y por tanto $\Sigma_i \cap D = \{p_i\}$, con lo que $\Sigma_i \cup D$ es homeomorfo al espacio F . \square

De forma similar, usando (V.1.3) se tiene la siguiente caracterización de los complejos 2-dimensionales propiamente planos.

Teorema V.1.10 *Un poliedro conexo localmente compacto 2-dimensional $P \neq S^2$ es propiamente plano si y sólo si P no contiene un conjunto cerrado homeomorfo a $K_{3,3}, K_5, K_5^\infty, L_5^\infty, K_{3,3}^\infty, L_{3,3}^\infty$ ó F .*

Nota V.1.11 Las demostraciones dadas aquí de (V.1.8) y (V.1.10) son demostraciones alternativas a los teoremas Thm.C' y Thm.C respectivamente de [3].

V.2 Planaridad y conectividad en continuos generalizados de Peano

En esta sección probamos diversos resultados relacionando la planaridad y conectividad de continuos generalizados de Peano. Comenzamos fijando algunas notaciones. Dado un espacio P y $p, q \in P$, por $[p, q]$ y (p, q) denotamos un arco y un arco abierto de p a q respectivamente. Además si R es un (bi)rayo orientado y $x, y \in R$, $R[x, y]$ y $R(x, y)$ representará el arco y el arco abierto en R de x a y .

Para cualquier grafo M de la figura 5.3, se llamará *bloque* de M al subgrafo finito $B(M) \subseteq M$ generado por el conjunto \mathcal{V} de vértices de valencia ≥ 3 . Dado un espacio X , una aplicación $\varphi : \mathcal{V} \rightarrow X$ quedará definida por el vector $(\varphi(v_1), \dots, \varphi(v_r))$ siendo $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_r\}$. A continuación reescribimos (V.1.4) de acuerdo con esta notación.

Nota V.2.1 Si unimos dos rayos de K_5^∞ por un arco fuera de $B(K_5^\infty)$ se obtiene una copia de $K_{3,3}^\infty$ inmersa en el nuevo grafo. Cuando procedemos de la misma forma con $K_{3,3}^\infty$ se obtiene una inmersión de $L_{3,3}^\infty$. De igual modo, si unimos tres rayos de K_5^∞ ó $(K_{3,3}^\infty)$ fuera de sus bloques, se obtiene una inmersión de $L_{3,3}^\infty$ ó $(K_{3,3}$ respectivamente). Y finalmente, si los cuatro rayos de K_5^∞ se unen fuera de $B(K_5^\infty)$ se tiene una inmersión de K_5 .

Notación. En la nota anterior como en el resto de la sección, todas las inmersiones de los grafos de Halin se consideran propias.

Proposición V.2.2 Sea P un continuo generalizado de Peano 2-conexo de tipo $(\mathcal{F}(P), \mathcal{F}(P))$ y que admite una inmersión $K_5^\infty \subseteq P$. Entonces P admite una inmersión de K_5 ó $K_{3,3}^\infty$.

Demostración. Según (V.2.1) podemos suponer que los finales de K_5^∞ son distintos como finales de P . Es decir, la inmersión $K_5^\infty \subseteq P$ induce una aplicación inyectiva $\mathcal{F}(K_5^\infty) \rightarrow \mathcal{F}(P)$. Como P es 2-conexo de tipo $(\mathcal{F}(P), \mathcal{F}(P))$ dados los finales $\varepsilon_i \in \mathcal{F}(P)$ definidos por los rayos $[a_i, \varepsilon_i] \subseteq K_5^\infty$ ($1 \leq i \leq 4$) podemos encontrar un birayo $R : \varepsilon_1 - \varepsilon_2$ con $a_1 \notin R$.

Aplicando (V.2.1) podemos también suponer $R \cap B(K_5^\infty) \neq \emptyset$. Puesto que $B(K_5^\infty)$ es finito, existe un punto $w \in P$ tal que el subrayo $S : w - \varepsilon_1$ de R sólo toca a $B(K_5^\infty)$ en $\{w\}$. Nótese que $w \neq a_1$, dado que $a_1 \notin R$. Tomemos ahora un punto $\eta \in (a_1, \varepsilon_1) \subseteq K_5^\infty$ que se pueda unir a S fuera de $B(K_5^\infty)$.

Si $w = a_k$ ($k \neq 1$), existe una inmersión $K_{3,3}^\infty \subseteq P$ por (V.2.1). Tenemos que ver aún dos posibilidades. En cada una concluiremos estudiando sólomente un caso particular, dado que cualquier otro caso lo podemos reducir a éste por un homeomorfismo adecuado de K_5^∞ en sí mismo. Como ilustración tratamos un segundo caso en a).

a) Si $w \in (a_1, a_2)$ la aplicación $\{c_1, \dots, c_5\} \rightarrow P$ definida por $(a_4, a_3, \eta, a_1, a_2)$ se extiende a un inmersión de $K_{3,3}^\infty$. Otra posibilidad sería $w \in (a_1, a_4)$, y en tal caso basta aplicar el homeomorfismo de K_5^∞ en sí mismo definido por $(a_1, a_4, a_3, a_2, a_5)$ y estaríamos en el caso a).

b) Si $w \in (a_2, a_3)$ la aplicación $\{c_1, \dots, c_5\} \rightarrow P$ definida por (a_3, a_4, η, a_1, w) se extiende a una inmersión de $K_{3,3}^\infty$. \square

Proposición V.2.3 *Sea P un continuo generalizado de Peano 2-conexo de tipo $(\mathcal{F}(P), \mathcal{F}(P))$ y que admite una inmersión $L_5^\infty \subseteq P$. Entonces P admite una inmersión de K_5 ó $L_{3,3}^\infty$.*

Demostración. Usando el mismo argumento que en la demostración de (V.2.2) podemos suponer que los finales $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ de L_5^∞ son distintos en $\mathcal{F}(P)$. Además, podemos encontrar un birayo $R : \varepsilon_1 - \varepsilon_2$ en P tal que $d_1 \notin R$ y $R \cap B(L_5^\infty) \neq \emptyset$. Sea $w \in B(L_5^\infty)$ un punto de P tal que el subrayo $S : w - \varepsilon_1$ de R sólo toca a $B(L_5^\infty)$ en $\{w\}$. Nótese que $w_1 \neq d_1$ dado que $d_1 \notin R$. Sea $\eta \in (d_1, \varepsilon_1) \subseteq L_5^\infty$ un punto que se puede unir con S fuera de $B(L_5^\infty)$. Pueden ocurrir las siguientes posibilidades (en cada una concluiremos estudiando sólomente un caso particular, dado que cualquier otro caso se puede reducir a este con un homeomorfismo adecuado de K_5^∞ en sí mismo. Como ilustración tratamos un segundo caso en a)).

a) $w = d_j$ ($j \neq 1$). En el caso $w = d_2$, por la Nota V.2.1 se tiene la inmersión $K_5 \subseteq P$. Si $w = d_5$ la aplicación $\{b_1, \dots, b_6\} \rightarrow P$ definida por $(d_2, \eta, d_1, d_4, w, d_3)$ se extiende a una inmersión $L_{3,3}^\infty \subseteq P$. Otra posibilidad sería $w = d_3$ y en tal caso basta aplicar el homeomorfismo de K_5^∞ en sí mismo definido por $(d_1, d_2, d_5, d_4, d_3)$, y estaríamos en el caso a).

b) $w \in (d_1, d_j)$ ($j \neq 2$). Supongamos $w \in (d_1, d_5)$. Entonces la aplicación $\{b_1, \dots, b_6\} \rightarrow P$ definida por $(d_2, \eta, d_1, d_4, d_5, d_3)$ se extiende a una inmersión $L_{3,3}^\infty \subseteq P$.

c) $w \in (d_4, d_5) \cup (d_3, d_4) \cup (d_3, d_5)$. Supongamos $w \in (d_4, d_5)$. Entonces $(d_2, \eta, d_1, d_5, w, d_3)$ se extiende a una inmersión $L_{3,3}^\infty \subseteq P$.

d) $w \in (d_2, d_3) \cup (d_2, d_4)$. Supongamos $w \in (d_2, d_3)$. Entonces la aplicación $\{b_1, \dots, b_6\} \rightarrow P$ definida por $(d_2, \eta, d_3, d_4, d_1, d_6)$ se extiende a una inmersión

$L_{3,3}^\infty \subseteq P$. \square

Proposición V.2.4 *Sea P un continuo generalizado de Peano 2-conexo de tipo $(\mathcal{F}(P), \mathcal{F}(P))$ y que admite una inmersión $L_{3,3}^\infty \subseteq P$. Entonces P admite una inmersión de $K_{3,3}$ or $K_{3,3}^\infty$.*

Demostración. Como en la demostración anterior, supongamos que los finales $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ de $L_{3,3}^\infty$ son distintos en $\mathcal{F}(P)$. Por ser P 2-conexo de tipo $(\mathcal{F}(P), \mathcal{F}(P))$, podemos encontrar dos birayos disjuntos $R_1, R_2 : \varepsilon_1 - \varepsilon_2$. Además, por (V.2.1) podemos suponer sin pérdida de generalidad que $R_j \cap B(L_{3,3}^\infty) \neq \emptyset$. Sea w_1 y w_2 los vértices de P tales que los subrayos $S_j : w_j - \varepsilon_1$ de R_j ($j = 1, 2$) sólo tocan a $B(L_{3,3}^\infty)$ en $\{w_1, w_2\}$. Por la Nota V.2.1 podemos también suponer que el rayo $[b_2, \varepsilon_2) \subseteq L_{3,3}^\infty$ no toca a S_j ($j = 1, 2$).

Caso 1. Supongamos $w_1 = b_1$ (de forma similar si $w_2 = b_1$). Entonces pueden ocurrir las siguientes posibilidades (en cada una concluiremos estudiando sólo un caso particular, dado que cualquier otro caso se puede reducir a éste con un homeomorfismo adecuado de $L_{3,3}^\infty$ en sí mismo; como ilustración tratamos un segundo caso en b)).

a) $w_2 = b_j$ ($j \neq 1$). Supongamos $w_2 = b_2$. Entonces la aplicación $\{c_1, \dots, c_5\} \rightarrow P$ dada por $(b_4, b_2, b_6, b_5, b_3)$ se extiende a una inmersión $K_{3,3}^\infty \subseteq P$.

b) $w_2 \in (b_1, b_4) \cup (b_1, b_6) \cup (b_2, b_3) \cup (b_2, b_5)$. Supongamos $w_2 \in (b_1, b_4)$. Entonces $(b_4, b_2, b_6, b_5, b_3)$ se extiende a una inmersión $K_{3,3}^\infty \subseteq P$. Otra posibilidad sería $w_2 \in (b_2, b_5)$, y en tal caso basta aplicar el homeomorfismo de $L_{3,3}^\infty$ en sí mismo definido por $(b_2, b_1, b_4, b_3, b_6, b_5)$, y estaríamos en el caso b).

c) $w_2 \in (b_3, b_6) \cup (b_5, b_6) \cup (b_3, b_4) \cup (b_4, b_5)$. Supongamos $w_2 \in (b_5, b_6)$. Se puede comprobar que $(b_3, b_1, w_2, b_6, b_5)$ se extiende a una inmersión $K_{3,3}^\infty \subseteq P$.

Caso 2. Supongamos $w_1, w_2 \neq b_1$. Si S_1 no corta al rayo $[b_1, \varepsilon_1) \subseteq L_{3,3}^\infty$, podemos razonar como en el caso 1 con $[b_1, \varepsilon_1)$ en lugar de S_2 . De forma similar si $S_2 \cap [b_1, \varepsilon_1) = \emptyset$. Por tanto, supongamos $S_j \cap [b_1, \varepsilon_1) \neq \emptyset$ ($j = 1, 2$) y sea p_j el primer punto de P de esta intersección. Claramente $p_j \neq b_1$. Si p_1 está entre b_1 y p_2 reemplazamos S_1 por $S'_1 = \Gamma \cup \Sigma$, donde $\Gamma \subseteq [b_1, \varepsilon_1)$ es el arco de b_1 a p_1 y $\Sigma \subseteq S_1$ es el subrayo $\Sigma : p_1 - \varepsilon_1$. Ahora podemos argumentar como en el caso 1 con S'_1 y S_2 . De forma similar si p_2 está entre b_1 y p_1 . \square

Las Proposiciones (V.2.2), (V.2.3), y (V.2.4) nos dan

Teorema V.2.5 Si P es un continuo generalizado de Peano 2-conexo de tipo $(\mathcal{F}(P), \mathcal{F}(P))$ entonces son equivalentes

- a) P no admite una inmersión propia en el plano.
- b) P contiene una copia de $L_1, L_2, K_5, K_{3,3}$ ó $K_{3,3}^\infty$.

A continuación damos el siguiente teorema del tipo de conexión $(P, \mathcal{F}(P))$. Recordemos que dado $A \subseteq P$ se dice que A es $\mathcal{F}(P)$ -denso si $\mathcal{F}(P) \subseteq Cl_{\hat{P}}(A)$; ver (II.1.1).

Teorema V.2.6 Sea P un continuo generalizado de Peano y $Q \subseteq P$ un conjunto $\mathcal{F}(P)$ -denso. Supongamos que P es 2-conexo de tipo $(Q, \mathcal{F}(P))$. Entonces son equivalentes:

- a) P no admite una inmersión propia en el plano.
- b) P contiene una copia de $L_1, L_2, K_5, K_{3,3}$, ó $K_{3,3}^\infty$.

Demostración. Sigue de (II.1.3) y (V.2.5). \square

Nota V.2.7 El grafo $K_{3,3}^\infty$ no se puede reemplazar por $L_{3,3}^\infty$ en (V.2.6)(b) como muestra el siguiente ejemplo.

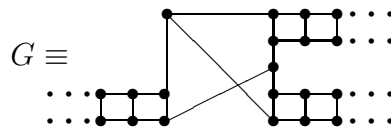


Figura 5.6

El grafo G es 2-conexo y contiene una copia de $K_{3,3}^\infty$. Sin embargo, no es posible sumergir en G una copia de $L_{3,3}^\infty$. En realidad, si tal copia existiese entonces los finales de $L_{3,3}^\infty$ definirían diferentes finales de G dado que de otra forma sería

fácil encontrar una copia de $K_{3,3}$ en el grafo plano G por la Nota (V.2.1). Sean $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \mathcal{F}(G)$ los finales definidos por los finales de $L_{3,3}^\infty$. No es difícil encontrar una inmersión plana $\varphi : G \rightarrow \mathbf{R}^2$ en la que los finales $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ están en la misma componente de $\mathbf{R}^2 - \varphi(G)$. Ahora identificando ε_1 y ε_2 podríamos obtener una inmersión plana de $K_{3,3}$ lo que es una contradicción.

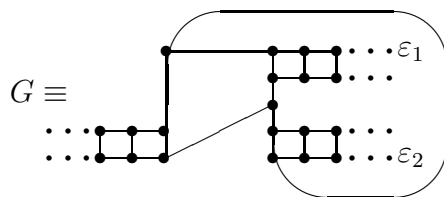


Figura 5.7

Para continuos generalizados de Peano 3-conexos de tipo $(\mathcal{F}(P), \mathcal{F}(P))$ podemos probar que $K_{3,3}^\infty$ y $L_{3,3}^\infty$ juegan un mismo papel. Empezamos con

Proposición V.2.8 *Sea P es un continuo generalizado de Peano 3-conexo de tipo $(\mathcal{F}(P), \mathcal{F}(P))$ que admite una inmersión de $K_{3,3}^\infty$. Entonces P admite una inmersión de $K_{3,3}$ ó $L_{3,3}^\infty$.*

Ahora, usando (II.1.3)(c) se deduce sin esfuerzo el siguiente teorema que prueba que para un continuo generalizado de Peano plano y 3-conexo P la planaridad propia de P queda determinada por la no existencia de un $K_{3,3}^\infty$ en P (o equivalentemente $L_{3,3}^\infty$).

Teorema V.2.9 *Sea P un continuo generalizado de Peano y $Q \subseteq P$ un conjunto $\mathcal{F}(P)$ -denso; supongamos que P es 3-conexo de tipo $(Q, \mathcal{F}(P))$. Entonces son equivalentes:*

- a) P no admite una inmersión propia en el plano .
- b) P contiene una copia de $L_1, L_2, K_5, K_{3,3}$, ó $K_{3,3}^\infty$.
- c) P contiene una copia de $L_1, L_2, K_5, K_{3,3}$, ó $L_{3,3}^\infty$.

Demostración de (V.2.8). Como de costumbre, por la Nota V.2.1 siempre podemos suponer que la inmersión $K_{3,3}^\infty \subseteq P$ induce una aplicación

inyectiva $\mathcal{F}(K_{3,3}^\infty) = \{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3\} \subseteq \mathcal{F}(P)$. Además, puesto que P es 3-conexo de tipo $(\mathcal{F}(P), \mathcal{F}(P))$, podemos encontrar una familia de tres birayos disjuntos dos a dos en P $\{R_j : \varepsilon_1 - \varepsilon_2\}$ $\{\Gamma_j : \varepsilon_1 - \varepsilon_3\}$ ($1 \leq j \leq 3$). Nuevamente por la Nota V.2.1 podemos suponer que R_j y Γ_j siempre tocan a $B(K_{3,3}^\infty)$. Puesto que $B(K_{3,3}^\infty)$ es compacto, para cada j existen puntos $w_j^1, w_j^2 \in R_j$ y $v_j^1, w_j^3 \in \Gamma_j$ tales que los subrayos $S_j^i \subseteq R_j$ ($i = 1, 2$) y $S_j^3 \subseteq \Gamma_j$ que van de w_j^k a ε_k ($k = 1, 2, 3$) sólo tocan a $B(K_{3,3}^\infty)$ en $\{w_j^1, w_j^2, w_j^3\}_{1 \leq j \leq 3}$. Además, nuevamente por la Nota V.2.1 podemos suponer que los rayos $\{S_j^i\}_{1 \leq i, j \leq 3}$ son disjuntos dos a dos. Para cada i , sea $L_i \subseteq K_{3,3}^\infty$ la unión de las aristas $[c_i, c_4]$ y $[c_i, c_5]$ con el rayo $[c_i, \varepsilon_i)$.

La demostración consistirá en comprobar varias afirmaciones para reducir el caso general a un caso particular.

AFIRMACIÓN 1. *Siempre podemos suponer que $w_j^i \in L_i$ ($1 \leq j \leq 3$); es decir, $w_j^i \in [c_i, c_4] \cup [c_i, c_5]$. Además, se puede volver a sumergir $K_{3,3}^\infty$ en P de forma que para cada $m \leq 3$ exista j_m con $S_{j_m}^m = [c_m, \varepsilon_m)$. Por añadidura podemos suponer $j_1 = 3$.*

DEMOSTRACIÓN. De otra manera, sea $w_j^1 \in L_3$. Tomemos un arco $\Gamma : v_1 - v_2$ uniendo S_j^1 con $[c_1, \varepsilon_1)$ fuera de $B(K_{3,3}^\infty)$. Usando γ es fácil extender la aplicación $\{b_1, \dots, b_6\} \rightarrow P$ dada por $\langle c_2, v_1, c_1, c_4, w_j^1, c_5 \rangle$ a una inmersión $L_{3,3}^\infty \subseteq P$. De forma similar en los otros casos.

Finalmente, para cada m escogemos $1 \leq j_m \leq 3$ tal que $w_{j_m}^m \notin \{c_4, c_5\}$. Ahora podemos sumergir de nuevo $K_{3,3}^\infty$ en P de forma que c_m se envía a $w_{j_m}^m$ y el rayo $[c_m, \varepsilon_m)$ a $S_{j_m}^m$. Además, reordenando los birayos R_j , si es necesario, podemos suponer $j_1 = 3$.

De ahora en adelante consideraremos el orden en cada R_j inducido por la identificación de $R_j : \varepsilon_1 - \varepsilon_2$ con la recta real $(-\infty, \infty)$. Con este orden sea a_j el punto ($j \leq 3$)

$$a_j = \max\{a \in R_j \cap L_1; R_j[w_j^1, a] \cap B(K_{3,3}^\infty) \subseteq L_1\}.$$

Nótese que a_j existe puesto que $w_j^1 \in L_1$.

Sea $L'_i \subseteq L_i$ un arco que contenga los tres puntos $\{w_j^i\}_{1 \leq j \leq 3}$.

AFIRMACIÓN 2. *Siempre podemos suponer que los birayos R_1, R_2 no tocan el*

arco $L'_1 \subseteq L_1$.

DEMOSTRACIÓN. En efecto, dado que los tres rayos S_j^1 definen el mismo final ε_1 encontramos arcos fuera de $B(K_{3,3}^\infty)$ uniendo dos rayos y evitando el otro. Supongamos que encontramos arcos Γ_1, Γ_2 uniendo S_1^1 con S_3^1 y S_3^1 con S_2^1 . Podemos sumergir de nuevo $K_{3,3}^\infty$ en P de manera que $w_1^1 = \Gamma_1 \cap S_1^1$, $w_3^1 = c_1$ sea el primer punto en $A = (\Gamma_1 \cup \Gamma_2) \cap S_3^1$ en dirección al final ε_1 , y $w_2^1 = \Gamma_2 \cap S_2^1$. Para esta nueva inmersión L'_i consiste en la unión de $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$ y el arco definido por A .

Si no ocurre lo anterior, deben existir dos sucesiones de arcos disjuntos $\{\Gamma_i\}$ y $\{\eta_i\}$ para los cuales al menos uno de los dos casos siguientes se verifica:

Caso 1. Los arcos Γ_i unen S_1^1 con S_2^1 y los arcos η_i unen S_2^1 con S_3^1 . Además podemos suponer que Γ_1 está más cerca de $B(K_{3,3}^\infty)$ que η_1 . Entonces encontramos una inmersión $L_{3,3}^\infty \subseteq P$ inducida por la aplicación $\{b_1, b_2, \dots, b_6\} \rightarrow P$ dada por $\langle q, c_3, w_1^1, p, w_2^1, c_1 \rangle$, donde $p = \Gamma_1 \cap S_2^1$ y $q = \eta_1 \cap S_2^1$.

Caso 2. Los arcos Γ_i unen S_1^1 con S_3^1 y los arcos η_i unen S_1^1 con S_2^1 . En este caso un argumento similar al caso 1 da una inmersión $L_{3,3}^\infty \subseteq P$ inducida por la aplicación $\langle q, c_3, w_1^1, p, w_2^1, c_1 \rangle$, donde ahora $p = \eta \cap S_1^1$ y $q = \Gamma \cap S_1^1$.

AFIRMACIÓN 3. Si $a_j \neq c_4, c_5$ podemos suponer siempre que el rayo abierto $R_j(a_j, \varepsilon_2)$ corta al bloque $B(K_{3,3}^\infty)$. Además, si b_j es el primer elemento en $R_j(a_j, \varepsilon_2) \cap B(K_{3,3}^\infty)$ se tiene $b_j \in L_{k(j)} - \{c_4, c_5\}$ para algún $k(j) = 2, 3$. Además podemos suponer que $b_j \in [c_{k(j)}, c_h]$, donde $\alpha_j \in (c_1, c_h)$, $h = 4, 5$.

DEMOSTRACIÓN. De otra manera si $R_j(a_j, \varepsilon_2) \cap B(K_{3,3}^\infty) = \emptyset$, tomamos un arco $\Gamma : v_1 - v_2$ uniendo R_j con $[c_2, \varepsilon_2)$ fuera de $B(K_{3,3}^\infty) \cup R[w_j^1, a_j]$. Usando Γ se comprueba que la aplicación $\langle c_3, v_1, c_1, c_5, c_2, c_4 \rangle$ se extiende a una inmersión $L_{3,3}^\infty \subseteq G$. Además, por definición, $b_j \notin \{c_4, c_5\}$. Finalmente, si $a_j \in (c_1, c_5)$ y $b_j \in (c_{k(j)}, c_4)$ la aplicación $\langle c_1, c_{k(j)}, b_j, a_j, c_5, c_4 \rangle$ nos da una inmersión $L_{3,3}^\infty \subseteq G$. El caso $a_j \in (c_1, c_4)$ y $b_j \in (c_{k(j)}, c_5)$ es similar.

AFIRMACIÓN 4. Podemos suponer $\{a_1, a_2\} = \{c_4, c_5\}$.

DEMOSTRACIÓN. Supongamos por el contrario $a_1 \notin \{c_4, c_5\}$. Si $a_1 \in (c_1, c_h)$ ($h = 4, 5$) entonces $b_1 \in [c_r, c_h] - \{c_h\}$ ($r = 2, 3$) por la Afirmación 3. Sea ahora $h = 4$ y $r = 3$. Los otros casos son similares.

Caso 1. Si $b_1 = c_3$ sea Γ un arco uniendo $S_{j_1}^3$ con $S_{j_2}^3$ fuera de $B(K_{3,3}^\infty)$ donde $c_3 = w_{j_1}^3$ y $w_{j_2}^3 \in [c_3, c_4]$. Entonces la aplicación $\langle c_1, v, c_4, a_1, c_3, c_5 \rangle$ con $v = \Gamma \cap S_{j_2}^3$ nos da una inmersión $L_{3,3}^\infty \subseteq P$.

Caso 2. Supongamos ahora $b_1 \notin (c_3, c_4)$. Podemos usar el arco $R[a_1, b_1]$ para mostrar que la aplicación $\{c_1, c_2, \dots, c_5\} \rightarrow P$ dada por $\langle c_1, c_2, c_3, a_1, c_5 \rangle$ se extiende a una nueva inmersión $K_{3,3}^\infty \subseteq P$ con $a_1 = c_4$.

AFIRMACIÓN 5. *En la Afirmación 4 podemos suponer que de hecho los arcos $[w_1^1, c_4]$ y $[w_2^1, c_5]$ coinciden con los arcos $R_1[w_1^1, a_1]$ y $R_2[w_2^1, a_2]$ respectivamente.*

DEMOSTRACIÓN. En efecto, por la Afirmación 4 se tiene $a_1, a_2 \in \{c_4, c_5\}$. Además, por la Afirmación 2 podemos también suponer $L'_1 \cap R_i = \emptyset$ ($i = 1, 2$). De aquí que podamos reemplazar los arcos $[w_i^1, a_i]$ en $K_{3,3}^\infty$ por los arcos $R_i[w_i^1, a_i]$ ($i = 1, 2$) y tomar una nueva inmersión de $K_{3,3}^\infty$ en P tal que, reenumerando si es necesario, se tenga $R_i[w_i^1, a_i] = [w_i^1, c_{3+i}]$.

Ahora estamos preparados para finalizar la demostración de (V.2.8). Después de la Afirmación 5 podemos suponer $a_3 \in L'_1$. Además por la Afirmación 3, $b_3 \in L_2 \cup L_3 - \{c_4, c_5\}$. De aquí, la demostración de (V.2.8) se reduce a los siguientes casos.

Caso 1. $b_3 \in \{c_2, c_3\}$. Sea $b_3 = c_2$ (el caso $b_3 = c_3$ es similar). Consideremos dos arcos Γ_1, Γ_2 fuera de $B(K_{3,3}^\infty)$ uniendo S_1^1 y S_2^1 con $S_{j_1}^2$ y $S_{j_2}^2$ respectivamente. Por tanto, $w_{j_1}^2 = c_2$ y $w_{j_2}^2 \in [c_2, c_5]$. Entonces es fácil comprobar que la aplicación $\langle v_1, v_2, c_5, w_2^1, c_2, c_4 \rangle$ donde $v_i = \Gamma_i \cap S_{j_2}^i$ ($i = 1, 2$) induce una inmersión $L_{3,3}^\infty \subseteq P$.

Caso 2. $b_3 \notin \{c_2, c_3\}$. Entonces $b_3 \in (c_l, c_h)$ con $l = 2, 3$ y $h = 4, 5$. Si $l = 3$ y $h = 5$, entonces $a_3 \in (w_2^1, c_1)$ y la aplicación $\langle w_2^1, c_3, b_3, c_5, c_4, a_3 \rangle$ induce una inmersión $L_{3,3}^\infty \subseteq P$. Para $l = 2$ se intercambia c_2 por c_3 . Los casos con $h = 4$ son similares a $h = 5$ mediante a un homeomorfismo de $K_{3,3}^\infty$ en sí mismo que intercambie c_4 con c_5 . Esto finaliza la demostración de (V.2.8). \square

V.3 Planaridad en continuos generalizados de Peano 3-conexos

En esta sección mostramos que los continuos generalizados de Peano 3-conexos que admiten una inmersión propia en el plano quedan caracterizados por un sólo grafo prohibido. En particular, para grafos localmente finitos 3-conexo damos un refinamiento de la caracterización de Halin-Thomassen para grafos localmente finitos que admiten una inmersión cerrada en el plano.

El Teorema V.1.1 caracteriza los continuos generalizados de Peano que son sumergibles en S^2 por los grafos $K_{3,3}$, K_5 y las curvas prohibidas L_1 , y L_2 . Sin embargo bajo ligeras hipótesis de conexión las curvas L_1 L_2 (figura 5.1) son redundantes. En efecto se tiene

Proposición V.3.1 *Sea P un continuo generalizado de Peano 2-conexo. Entonces P es sumergible en S^2 si y sólo si P no contiene una copia de K_5 o $K_{3,3}$.*

Demostración. Dado que el punto límite $p_i \in L_i$ no separa L_i en P , podemos encontrar un arco $\Gamma \subseteq P - \{p_i\}$ del segmento Σ_i al complementario $N_i = L_i - \Sigma_i$. Sea Ω un entorno de p_i en P con $\Omega \cap \Gamma = \emptyset$. Entonces por la topología de L_i existe un bloque S_{k_0} con $S_k \subseteq \Omega$ para todo $k \geq k_0$. Es claro ahora cómo construir a partir de S_{k_0} , dentro de $L_i \cup \Gamma$, una copia de K_5 ó $K_{3,3}$ si $i = 1$ ó $i = 2$ respectivamente. \square

Además si P es 3-conexo se tiene la siguiente generalización de ([21]; Thm.1)

Teorema V.3.2 ([21]; Thm.1)

Si $P \neq K_5$ es un continuo generalizado de Peano 3-conexo, entonces P no es sumergible en S^2 si y sólo si P contiene una copia de $K_{3,3}$.

Demostración. De acuerdo con V.3.1 P contiene una copia de K_5 ó $K_{3,3}$. Ahora la demostración de ([21]; Thm.1) permite obtener una inmersión de $K_{3,3}$ a partir de toda inmersión de K_5 . \square

Para inmersiones propias planas de continuos generalizados de Peano tenemos los siguientes resultados

Teorema V.3.3 *Sea P un continuo generalizado de Peano 2-conexo. Entonces son equivalentes*

- a) P no admite una inmersión propia en el plano.
- b) P contiene una copia de K_5 , $K_{3,3}$ ó $K_{3,3}^\infty$.

Demostración. Es consecuencia de (II.1.3), (V.2.5) y (V.3.1).□

Como consecuencia inmediata de (V.3.3) se tiene

Corolario V.3.4 *Un continuo generalizado de Peano plano 2-conexo no admite una inmersión propiamente plana si y sólo si contiene una copia de $K_{3,3}^\infty$.*

Teorema V.3.5 *Sea P un continuo generalizado de Peano 3-conexo. Entonces son equivalentes*

- a) P no admite inmersión propia plana.
- b) P contiene una copia de $K_{3,3}$ ó $K_{3,3}^\infty$.
- c) P contiene una copia de $K_{3,3}$ ó $L_{3,3}^\infty$.

Demostración. Sigue (II.1.3), (V.2.9) y (V.3.2).□

Corolario V.3.6 *Un continuo generalizado de Peano plano 3-conexo no es propiamente plano si y sólo si contiene una copia de $L_{3,3}^\infty$.*

De los corolarios V.3.4 y V.3.6 se deduce que los papeles de $K_{3,3}^\infty$ y $L_{3,3}^\infty$ son equivalentes para caracterizar la planaridad propia de los continuos generalizados planos 3-conexos. En (V.2.7) se observa que para 2-conexos esto no es así.

Como aplicación de estos resultados a la teoría de grafos, obtenemos el siguiente refinamiento de la caracterización de Halin-Thomassen de los grafos conexos propiamente planos, para grafos localmente finitos 2 y 3 -conexos.

Teorema V.3.7 *La planaridad propia de grafos localmente finitos 2-conexos se caracteriza por la familia de grafos prohibidos $\mathcal{A} = \{K_5, K_{3,3}, K_{3,3}^\infty\}$. Además para grafos 3-conexos la planaridad propia se caracteriza por cualquiera de las dos familias siguientes de grafos prohibidos $\mathcal{A}' = \{K_{3,3}, K_{3,3}^\infty\}$ y $\mathcal{A}'' = \{K_{3,3}, L_{3,3}^\infty\}$.*

V.4 Continuos generalizados de Peano reticulares

Definición V.4.1 Una inmersión propia $\varphi : P \rightarrow \mathbf{R}^2$ se dice *reticular* si las componentes conexas de $\mathbf{R}^2 - \varphi(P)$ son todas acotadas; esto es, sus clausuras son todas compactas. Un continuo generalizado de Peano propiamente plano se dice *reticular* si toda inmersión plana propia de P es reticular.

Proposición V.4.2 *Si P es un continuo generalizado de Peano que admite una inmersión propia reticular, entonces $e(P) = 1$.*

En la demostración de (V.4.2) necesitamos el siguiente resultado debido a Schönflies

Proposición V.4.3 ([23]; X.61.10) *Si $Q \subseteq S^2$ es un continuo de Peano y $R_n \subseteq S^2 - Q$ una sucesión infinita de componentes, entonces $\lim \delta(R_n) = 0$, donde $\delta(R_n)$ es el diámetro de R_n .*

Demostración de (V.4.2) Supongamos que P tiene dos o más finales. Entonces escogemos dos finales $\varepsilon_1 \neq \varepsilon_2$ y un birayo $R \subseteq P$ de ε_1 a ε_2 . Usando ([32]; 22, pag.24) y la compactificación de Alexandroff podemos suponer sin pérdida de generalidad que la inmersión φ lleva R en el eje OX de \mathbf{R}^2 de manera que ε_1 se identifica con $-\infty$ y ε_2 con ∞ . Sea ahora una bola $B \subseteq \mathbf{R}^2$ de centro el origen y de radio r adecuado para que los finales ε_1 y ε_2 estén definidos por componentes distintas U_1 y U_2 respectivamente de $\mathbf{R}^2 - B$. En cada circunferencia de radio $t \in [r, \infty)$ y centro el origen podemos encontrar un semiarco en el semiplano superior \mathbf{R}_+^2 que sólo corta a $\varphi(P)$ en sus extremos. Para ello se toma en el sentido de las agujas del reloj el último punto de contacto con U_1

y el primero después de éste que corta a otra componente $U' \neq U_1$. Sea Γ_t un arco de extremos a_t y b_t en la semicircunferencia de radio $t \geq r$ tal que la imágenes por φ de sus extremos estén en las componentes U_1 y U' de P y el interior $\Gamma_t^0 \subseteq \Gamma_t$ esté contenido en alguna componente $C_t \subseteq \mathbf{R}^2 - \varphi(P)$, y por tanto $\varphi(a_t), \varphi(b_t) \in FrC_t$.

Como las componentes son acotadas, la familia de componentes $\{C_t\}$ con $t \in \mathbf{N}$ y $t \geq r$ es infinita. Con el fin de aplicar (V.4.3) a $\{C_t\}$ consideramos $P^+ = P \cup \{\infty\}$ la compactificación de Alexandroff de P y la extensión continua de φ , $\varphi^+ : P^+ \rightarrow S^2 = \mathbf{R}^2 \cup \{\infty\}$ con $\varphi^+(\infty) = \infty$. Obviamente $\mathbf{R}^2 - \varphi(P) = S^2 - \varphi^+(P^+)$ por lo que la familia $\{C_t\}$ anterior es una sucesión de componentes de $S^2 - \varphi^+(P^+)$. Además P^+ es un continuo de Peano por (I.1.12) y por ello $\delta(C_t) = \delta(Cl(C_t)) \rightarrow 0$ en S^2 , de acuerdo con (V.4.3). Esto quiere decir que es posible encontrar C_{t_0} tal que $Cl(C_t) \cap B = \emptyset$ si $t \geq t_0$, pues en caso contrario tendríamos que las componentes C_t contendrían un punto x_t con $x_t \rightarrow \infty$ y otro punto $y_t \in B$. Luego $\delta(C_t) \geq d(x_t, y_t) \geq \varepsilon$ para cierto $\varepsilon \geq 0$ y para todo $t \geq r$.

Para terminar la demostración, observamos que FrC_{t_0} es conexa por ([23]; X.61.4) y esto implica que las componentes U_1 y U' pueden ser conectadas fuera de B , lo que nos da una contradicción. \square

Teorema V.4.4 *Un continuo generalizado de Peano propiamente plano P es reticular si y sólo si contiene como subespacio cerrado a uno de los espacios $L_1 - \Sigma_1, L_2 - \Sigma_2$ en la figura 5.8.*

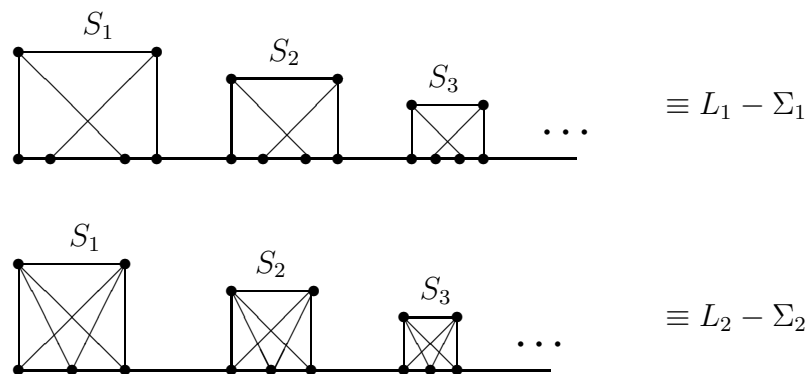


Figura 5.8

Recuérdese que L_1 y L_2 han sido definidos en §V.1 figura 5.2.

Demostración. Si P es reticular entonces la unión disjunta $X = P \sqcup [0, \infty)$ no puede ser propiamente plana y la compactificación de Alexandroff $X^+ = X \cup \{\infty\}$ no se sumerge en la esfera S^2 ; ver (V.1.3). Por (V.1.1) existe una inmersión de $L_1, L_2, K_{3,3}$ ó K_5 en P^+ . Por ser P propiamente plano, no contiene ni a $K_{3,3}$ ni a K_5 y debe contener a L_1 ó L_2 . Si $M = K_{3,3}$ ó $M = K_5$ está contenido en X^+ , entonces por ser la valencia de los vértices de M mayor o igual que 3 todos los vértices están en P . De nuevo por conexión, ninguna arista puede tocar a $[0, \infty)$. Por tanto $M \subseteq P^+ = P \cup \{\infty\}$. Ahora, por ser P propiamente plano no puede darse esta situación (V.1.3). Así pues L_1 ó L_2 deben estar contenido en X^+ . Dado que P es plano, necesariamente $L_i \cap [0, \infty) \neq \emptyset$. Como antes, ningún bloque S_k de L_i corta a $[0, \infty)$ (ver la figura 5.8) y por conexión $L_i \cap [0, \infty) \subseteq \Sigma_i$. Más aún, al ser P plano, L_i debe contener a ∞ como punto límite p_i ya que en caso contrario aparecería siempre en P una copia homeomorfa de L_i . Por tanto $L_i - \Sigma_i \subseteq P$ como subespacio cerrado. \square

Nota V.4.5 Si P es un continuo generalizado de Peano reticular, entonces se sigue fácilmente que $e(P) = 1$ (compárese con la Proposición V.4.2). En efecto si $L_i - \Sigma_i \subseteq P$ y $e(P) \geq 2$ se podría encontrar un rayo R disjunto con $L_i - \Sigma_i$ y por tanto la compactificación de Alexandroff P^+ contendría a $L_i \cong [(L_i - \Sigma_i) \cup \mathbf{R}]^+$ por lo que P^+ no sería plano; esto es, P no es propiamente plano (V.1.3) lo que nos da una contradicción.

Definición V.4.6 Un continuo generalizado de Peano se dice *n-euclídeo* en el infinito si $P^+ = P \cup \{\infty\}$ es n -variedad en ∞ . Equivalentemente, si un entorno de ∞ en P es homeomorfo a $[0, \infty) \times S^{n-1}$.

El siguiente lema es inmediato a partir de la definición

Lema V.4.7 Si $\varphi : P \rightarrow \mathbf{R}^2$ es una inmersión de un continuo generalizado de Peano que es 2-euclídeo en el infinito, entonces φ es reticular.

Usando el Teorema V.4.4 podemos generalizar el Teorema V.1.3 a familias disjuntas de continuos generalizados de Peano. Más adelante se aplicarán estos resultados a grafos no conexos.

Corolario V.4.8 *Sea $X = \sqcup_{\alpha \in J} P_\alpha$ una unión disjunta de continuos generalizados de Peano ninguno de lo cuales es 2-euclídeo en el infinito. Entonces X es propiamente plano si y sólo si J es numerable y no contiene un subespacio cerrado homeomorfo a ningún espacio de la familia $\mathcal{S} = \{L_1, L_2, K_{3,3}, K_5, K_{3,3}^\infty, K_5^\infty, L_{3,3}^\infty, L_5^\infty, L_1 - \{p_1\}, L_2 - \{p_2\}\}$.*

Demostración. Sea $\varphi : X \rightarrow \mathbf{R}^2$ una inmersión propia. Entonces X es necesariamente 2-numerable y por tanto el número de componentes $|J|$ es numerable. Más aún, si alguna componente P_{α_0} es reticular entonces todas las demás componentes deben ser compactas. Además, por ser todas las componentes planas, X no contiene como subespacio cerrado ningún espacio de la familia \mathcal{S} , salvo posiblemente $L_i - \{p_i\}$ ($i = 1, 2$) que necesariamente estaría contenido en la componente P_{α_0} que es reticular, y este caso queda excluido.

Recíprocamente, si X no contiene ningún espacio de $\mathcal{S} - \{L_i - \{p_i\}\}_{i=1,2}$ entonces todas las componentes P_α son propiamente planas. Podemos suponer sin pérdida de generalidad que éstas son subespacios cerrados de \mathbf{R}^2 . Además, si existe alguna componente P_{α_0} que sea reticular, entonces todas las demás deben ser compactas; pues si P_{α_1} no es compacta contendría a $[0, \infty)$ como subespacio cerrado y nos llevaría a que $L_i - \{p_i\} \subseteq P_{\alpha_0} \cup P_{\alpha_1} \subseteq X$ para algún $i = 1, 2$. Al ser J numerable podemos sumergir cada P_α con $\alpha \neq \alpha_i$ en alguna componente de $\mathbf{R}^2 - P_{\alpha_0}$. Aquí usamos que P_{α_0} no es 2-euclídeo en ∞ para asegurar que $\mathbf{R}^2 - P_{\alpha_0}$ tiene infinitas componentes (todas acotadas).

En el caso que ninguna componente P_α sea reticular, procedemos como sigue. Tomamos los ángulos $\theta_n = \frac{\pi}{2n}$ con $n \in \mathbf{N}$ y parábolas disjuntas $\Gamma_1 \dots \Gamma_n \dots$ cuyos ejes son las semirrectas R_n en el primer cuadrante de ángulo θ_n . Más aún, el vértice de cada parábola Γ_n está situado en un punto $p_n \in \Gamma_n$ de abscisa x_n , con $x_n \rightarrow \infty$.

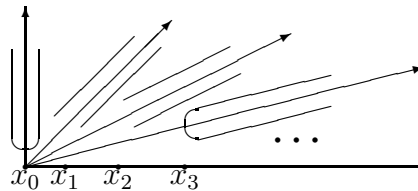


Figura 5.9

Sea ahora P_n una componente de X . Como P_n no es reticular existe un

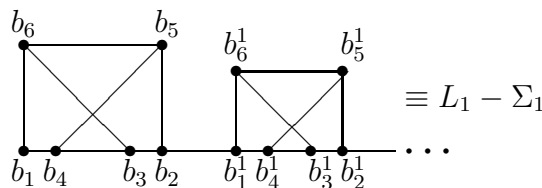
rayo $\psi : \mathbf{R}_+ \rightarrow \mathbf{R}^2 - P_n$. Más aún, existe una inmersión propia $\varphi : \mathbf{R}_+ \rightarrow \mathbf{R}^2$ con $d(\psi(x), \varphi(x)) < \frac{d(\psi(x), P_n)}{2}$ para todo $x \in \mathbf{R}_+$ y así $\varphi(\mathbf{R}_+) \cap P_n = \emptyset$; ver ([32];10, Thm.7). Ahora es fácil obtener un birayo $S_n \subseteq \mathbf{R}^2 - P_n$. Usando ([32]; 22, pag.24) y la compactificación de Alexandroff, se puede encontrar un homeomorfismo $h_n : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$ que lleva S_n en la parábola Γ_n . Haciendo una involución respecto a Γ_n (si es necesario) tenemos una inmersión propia de P_n en la región cóncava determinada por Γ_n . Repitiendo esto para todo n , obtenemos una inmersión propia de todo X en \mathbf{R}^2 . Esto termina la demostración. \square

Cuando el continuo generalizado de Peano tiene un cierto grado de conectividad, los resultados anteriores pueden ser simplificados como sigue

Corolario V.4.9 *Sea P un continuo generalizado de Peano propiamente plano tal que $Con(p, \infty) \geq 3$ para algún $p \in P$. Entonces son equivalentes*

- a) P es reticular.
- b) P admite una inmersión reticular.
- c) P contiene a $L_1 - \Sigma_1$ como subespacio cerrado.

Demostración. Sólo hay que demostrar $b) \rightarrow c)$. Sea entonces $\varphi : P \rightarrow \mathbf{R}^2$ una inmersión propia reticular y sea $p \in P$ tal que $Con(p, \infty) \geq 3$. Sean $R_i : p - \infty$ tres rayos independientes. Usando ([32]; 22, pag.24) y la compactificación de Alexandroff podemos suponer sin pérdida de generalidad que $\varphi(p) = 0$, $\varphi(R_1) = 0X_-$, $\varphi(R_2) = 0X_+$ y $\varphi(R_3) = 0Y_+$. Por (V.4.2) $e(P) = 1$ y podemos encontrar una sucesión de arcos disjuntos $\{\Gamma_j\}_{j \geq 1}$ en P que unen dos a dos los rayos R_i . Supongamos por un momento que hay infinitos arcos Γ_j en cada una de las tres regiones de $\mathbf{R}^2 - \varphi(\cup_{i=1}^3 R_i)$. En tal caso, usando los arcos Γ_j adecuados, P admite una inmersión de $L_1 - \Sigma_1$ como se indica en el dibujo.



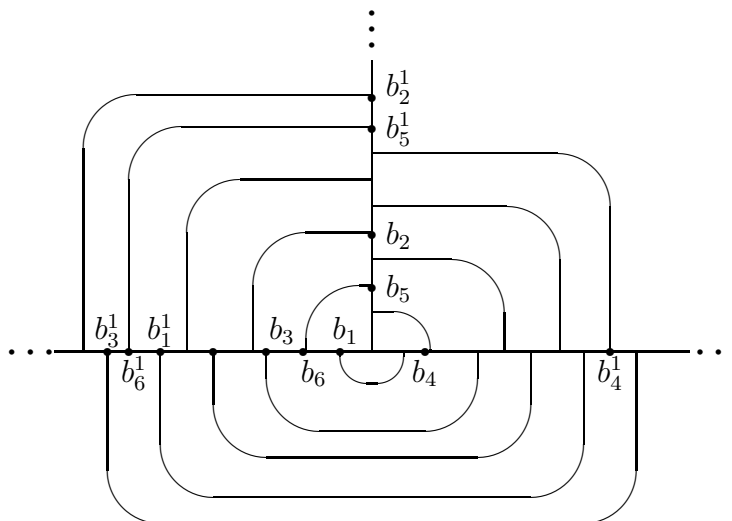


Figura 5.10

Consideremos ahora el caso más desfavorable en el que en alguna (sólo una) de las regiones aparece un número finito de arcos Γ_j . Podemos suponer sin pérdida de generalidad que dicha región es el semiplano inferior. Afirmamos que es posible ampliar la familia $\{\Gamma_j\}$ con nuevos arcos en $\mathbf{R}_-^2 \cap \varphi(P)$ uniendo R_1 con R_2 con lo que se estaría en el caso anterior. Si la afirmación precedente no es cierta tomamos una bola $B \subseteq \mathbf{R}^2$ de centro el origen y radio r tal que R_1 y R_2 no pueden ser conectados en $(\mathbf{R}_-^2 \cap \varphi(P)) - B$. Sean V_1 y V_2 respectivamente los conjuntos (conexos) de puntos en $\mathbf{R}_-^2 \cap \varphi(P)$ que se unen a R_1 y R_2 . Es claro que $V_1 \cup V_2 = \mathbf{R}_-^2 \cap \varphi(P)$. Esto sigue de la conexión de $\varphi(P)$ y $e(P) = 1$. Siguiendo un razonamiento análogo al dado en la demostración de (V.4.2) con $U_1 = V_1$ y $U' = V_2$ se llega a la existencia de una componente no acotada en $\mathbf{R}^2 - \varphi(P)$ lo que contradice que φ sea reticular. \square

Corolario V.4.10 *Sea P un continuo generalizado de Peano propiamente plano tal que $Con(Q, \infty) = 3$ para todo $Q \subseteq P$ $\mathcal{F}(P)$ - denso. Entonces P es reticular si y sólo si existe una inmersión de $L_1 - \Sigma_1$.*

Utilizando (V.4.10) y (V.4.8) y (V.3.7) obtenemos

Corolario V.4.11 *Sea $X = \sqcup_{\alpha \in J} P_\alpha$ una unión disjunta de continuos generalizados de Peano tal que todos los P_α son 3-conexos y ninguno es 2-euclídeo en el infinito. Entonces X es propiamente plano si y sólo si J es numerable y se cumple una de las dos condiciones siguientes:*

- 1) X no contiene un subespacio cerrado homeomorfo a $K_{3,3}, L_1 - \{p_1\}$ ó $K_{3,3}^\infty$.
- 2) X no contiene un subespacio cerrado homeomorfo a $K_{3,3}, L_1 - \{p_1\}$ ó $L_{3,3}^\infty$.

Terminamos esta sección con varios resultados en teoría de grafos que aparecen en [2] que ahora son obtenidos como consecuencia inmediata de los resultados anteriores. Obsérvese como en (V.1.7) que si G contiene a $L_1 - \Sigma_1$ ó a $L_2 - \Sigma_2$ sus vértices deben ser vértices de G . El siguiente teorema se deduce de (V.4.4) y la observación anterior

Teorema V.4.12 *Un grafo G es un grafo reticular si y sólo si G contiene un subgrafo homeomorfo a $L_1 - \Sigma_1$ ó $L_2 - \Sigma_2$.*

Habitualmente se define un *mosaico* como una familia localmente finita \mathcal{T} de discos topológicos $T \in \mathcal{T}$ con interiores disjuntos dos a dos que recubren \mathbf{R}^2 . Los bordes de los discos definen un grafo $G(\mathcal{T})$ que se llama el *grafo de aristas* de \mathcal{T} . Un *grafo mosaico* es un grafo propiamente plano tal que todas sus immersiones planas propias son grafos de aristas de algún mosaico. Es sabido que las componentes del complemento de un grafo finito plano G son discos topológicos si y sólo si G es 2-conexo (ver [15]; 1.6.1). Para el caso infinito tenemos una demostración análoga, obteniéndose así

Lema V.4.13 *Si G es un grafo infinito reticular, entonces todas las componentes de $\mathbf{R}^2 - G$ son discos si y sólo si G es 2-conexo.*

Demostración. Supongamos que el borde de alguna región Γ no es un ciclo, pero sí una trayectoria cerrada, tal que el vértice v aparece dos veces, como en

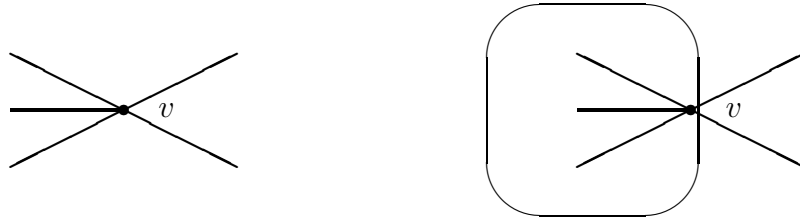


Figura 5.11

la parte izquierda de la figura 5.11. Entonces existe un camino simple cerrado en el plano que parte de v entre dos aristas del borde de Γ , está todo el tiempo en Γ , y regresa posteriormente a v entre dos aristas distintas, como muestra la parte derecha de la figura 5.11. Este camino cerrado separa el plano en dos regiones, que contienen parte del grafo G . Dado que el camino intersecta al grafo G sólo en el vértice v , se sigue que v es un conjunto de corte de G y por tanto concluimos que G es 2-conexo.

Recíprocamente, supongamos que G tiene un punto de corte v . Dada una inmersión de G , que suponemos simplicial para una subdivisión de G , recorriendo la estrella de v en contra de las agujas del reloj, podemos encontrar dos aristas consecutivas d y e de distintas componentes H y K de $G - \{v\}$ respectivamente. Sea Γ la región cerrada de $\mathbf{R}^2 - G$ de vértice v entre d y e . Al recorrer el borde de Γ comenzando por la arista d no nos encontraremos con aristas de K antes de volver a v , por ser v punto de corte de G . Dado que e también está en el borde de Γ y éste es cerrado, llegamos a la conclusión que el borde de Γ no es un ciclo simple y por tanto Γ no es un disco. \square

Corolario V.4.14 *Un grafo G es un grafo mosaico si y sólo si es 2-conexo y contiene a un subgrafo homeomorfo a $L_1 - \Sigma_1$ ó $L_2 - \Sigma_2$.*

Corolario V.4.15 *Un grafo 3-conexo G es un grafo mosaico si y sólo si G contiene a un subgrafo homeomorfo a $L_1 - \Sigma_1$.*

Teorema V.4.16 *Sea G un grafo con una cantidad numerable de vértices (conexo o no). Entonces G es propiamente plano si y sólo si G no contiene un subgrafo homeomorfo a $L_1 - \{p_1\}$, $L_2 - \{p_2\}$, $K_{3,3}$, K_5 , $K_{3,3}^\infty$, K_5^∞ , $L_{3,3}^\infty$, L_5^∞ . En el caso de*

que todas las componentes de G sean 3-conexas, entonces G es propiamente plano si y sólo se cumple una de las dos condiciones siguientes:

- 1) G no contiene un subespacio cerrado homeomorfo a $K_{3,3}, L_1 - \{p_1\}$ ó $K_{3,3}^\infty$.
- 2) G no contiene un subespacio cerrado homeomorfo a $K_{3,3}, L_1 - \{p_1\}$ ó $L_{3,3}^\infty$.

Bibliografía

- [1] AYALA, R., DOMÍNGUEZ, E., QUINTERO, A. *Topología Poliedral*. Publicaciones del Seminario Matemático García de Galdeano. Sección 3, **12** Publicaciones de Univ. de Zaragoza, 1987.
- [2] AYALA, R., DOMÍNGUEZ, E., MÁRQUEZ, A., QUINTERO, A. *On the graphs which are the edge of a plane tiling*. Math. Scand. **77** (1995), 5-16.
- [3] AYALA, R., MÁRQUEZ, A., QUINTERO, A. *On the Planarity of Infinite 2-Complexes*, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg, **67** (1997), 137-148.
- [4] BARNETTE, D. *Decompositions of homology manifolds and their graphs*. Israel J. Math., **41** (1982), 203-212.
- [5] BARNETTE, D., GRÜNBAUM, B. *On Steinitz's Theorem concerning convex 3-polytopes and on some properties of planar graphs*. In The Many Facets of Graph Theory, Lecture Notes in Mathematics, (1969), Vol. 110, 27-39.
- [6] BOURBAKI, N. *Elements of Mathematics General Topology. Part I*, Hermann, 1966.
- [7] CLAYTOR, S. *Peanian continua not imbeddable in a spherical surface*. Ann. of Math. , **38** (1937) 631-646.
- [8] DAVERMAN, R.J. *Decomposition of manifolds*. Academic Press, 1986.
- [9] DIRAC, G., SCHUSTER, S. *A theorem of Kuratowski*. Indag. Math., **16** (1954), 343-348.
- [10] DIRAC, G. *Généralisations du théorème de Menger*. C. R. Acad. Sci. Paris, **250** (1960), 4252-4253.

- [11] DIRAC, G. *Connectedness and structure in graphs*. Rend. Circulo Mat. Palermo, **9** (1960), 114-124.
- [12] DIRAC, G. *Extensions of Menger's theorem*. J. London Mat. Soc., **38** (1963), 148-163.
- [13] ENGELKING, R. *General Topology*. Heldermann, 1989.
- [14] H. FREUDENTHAL, H. *Über die topologischer Räume und Grupper*. Math. Z., **33** (1931), 692-713.
- [15] GROSS, J.L., TUCKER, T.W. *Topological Graph Theory*. Wiley & Sons, 1987.
- [16] HALIN, R. *Über unendliche Wege in Graphen*. Math. Ann., **157** (1964), 125-137.
- [17] HALIN, R. *Zur häufungspunkt freien Darstellung abzählbarer Graphen in der Ebenen*. Arch. Math., **17** (1966) 239-242.
- [18] HALIN, R. *Zur Theorie der n-fach Zusammenhängenden Graphe*. Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg, **33** (1969), 133-164.
- [19] HALIN, R. *Die Maximalzahl fremder zweiseitig unendlicher Wege in Graphen*. Math. Nach., **44** (1970), 119-127.
- [20] HALIN, R. *A Note on Menger's Theorem for infinite locally finite Graphs*. Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg, **40** (1974), 111-114.
- [21] D.W. HALL, D.W. *A note on pinture skew curves*. Bull. Amer. Math. Soc., **49** (1943), 935-937.
- [22] KÖNIG, D. *Theory of finite and infinite graphs*. Birkhäuser, 1990.
- [23] KURATOWSKI, K. *Topology. Vol. 2* Academic Press, 1968.
- [24] KURATOWSKI, K. *Sur le problème des courbes gauches en topologie*. Fund. Math., **15** (1930), 271-283.
- [25] LARMAN, D.G., MANI, P. *On the existence of certain configuration within graphs and the 1-skeletons of polytopes*. Proc. London Math. Soc., **20** (1970), 144-60.

- [26] LINCK, D.R. *Characterization of n -connected and n -line connected graphs*. J. Comb. Theory Series B, **14** (1973), 122-124.
- [27] MARDESIC, S, SEGAL, J. *A note on polyhedra embeddable in the plane*. Duke. Math. J., **33** (1966), 633-638.
- [28] MAUNDER, C.R.F. *Algebraic Topology*. Van Nostrand, 1972.
- [29] MAZURKIEWICZ, S. *Sur les lignes de Jordan*. Fund. Math., **1** (1920), 166-209.
- [30] MENGER, K. *Zur allgemeinen Kurventheorie*. Fund. Math., **10** (1927), 96-115.
- [31] MESNER, D.M., WATKINS, M.E. *Some Theorems about n -Vertex Connected graphs*. J. of Math. and Mech. Vol. 16, No. **4** (1966), 321-326.
- [32] MOISE, E.E. *Geometric Topology in Dimensions 2 and 3*. Springer-Verlag, 1977.
- [33] NADLER, JR.S.B. *Continuum Theory*. Pure and Appl. Math., **158** Marcel Dekker, Inc. 1992
- [34] NÖBELING, G. *Eine Verschärfung des n -Beinnsatzes*. Fund. Math., **18** (1932), 23-38
- [35] POLAT, N. *Topological aspects of infinite graphs*. In "Cycles and rays" Edited by G. Hahn, G. Sabidussi and R.E. Woodrow. Mathematical and Physical Sciences, Vol. 301 Kluwer, 1990.
- [36] QUILLOT, A. *A problème de connectivité sur les espaces métriques*. Europ. J. Combinatorics, **5** (1984), 243-253.
- [37] SAGEEV, M. *Ends of group pairs and non-positively curved cube complexes*. Proc. London Math. Soc., **71** (1995), 585-617.
- [38] SCHURLE, A.W. *Topics in Topology*. North-Holland, 1979.
- [39] STEEN. L.A., SEEBACH, J.A. *Counterexamples in Topology*. Springer, 1978.
- [40] STEINITZ, E., RADEMACHER, H. *Vorlesungen Über die Theorie der Polyeder*. Springer, Berlin, 1934.

- [41] THOMASSEN, C. *Straightline representations of infinite planar graphs*. J. London Math. Soc., **16** (1977), 411-423.
- [42] VAINSTEIN, I.A. *On closed mapping of metric spaces*. Dokl. Akad. Nauk. SSSR, **57** (1947), 319-321.
- [43] WHITNEY, H. *Congruent graphs and the connectivity of graphs*. Amer. J. Math., **54** (1932), 150-168.
- [44] WHYBURN, G.T. *Open mapping on locally compact spaces*. Memoirs Amer. Math. Soc., **1** Amer. Math. Soc, 1950.
- [45] WILARD, S. *General Topology*. Addison-Wesley, 1970.
- [46] WOON, E.Y. *N-connectedness in pure 2-Complexes*. Israel J. Math., **52** (1985), 177-192.
- [47] A.A. ZYKOV, A.A. *Fundamentals of graph theory*. B.C.S. Associates, 1960.

Índice

I	La categoría propia de los continuos generalizados de Peano	1
I.1	Continuos generalizados de Peano. Finales de Freudenthal	2
I.2	La categoría combinatorial. Una clase importante de continuos: los grafos	10
I.3	Aplicaciones propias y perfectas	16
I.4	Un teorema de Hahn-Mazurkiewicz para continuos generalizados de Peano	24
II	Conectividad en continuos de Peano	31
II.1	Separación en continuos de Peano	32
II.2	Relación entre los conjuntos Sep y Con. Teorema de Menger- Nöbeling	38
II.2A	Otras cotas de órdenes de separación	42
II.3	Variantes del Teorema de Nöbeling para continuos (generalizados) de Peano	44
III	Conectividad de grafos localmente finitos	55
III.1	Separación y conectividad de grafos	55
III.2	Variantes del Teorema de Menger-Whitney en la literatura	58

III.3 Variantes del Teorema de Menger-Whitney para grafos infinitos	59
III.4 Descomposición de grafos infinitos 3-conexos	65
III.5 Conectividad del 1-esqueleto de una pseudovariiedad	70
IV Conectividad de 2-complejos infinitos	77
IV.1 Resultados básicos sobre 2-complejos	78
IV.2 La conectividad en 2-complejos. Teorema de tipo Menger-Whitney	81
IV.3 Otros teoremas sobre la conectividad de 2-complejos	88
IV.4 Conectividad del 2-esqueleto de una pseudovariiedad	95
V Planaridad y conectividad de continuos generalizados de Peano	99
V.1 Planaridad de continuos generalizados de Peano	100
V.2 Planaridad y conectividad en continuos generalizados de Peano	107
V.3 Planaridad en continuos generalizados de Peano 3-conexos	116
V.4 Continuos generalizados de Peano reticulares	118