

R-23829

LBS 1326066

C 043/348

DCL

UNIVERSIDAD DE SEVILLA

Departamento de Matemática Aplicada I

**Triangulaciones
de Superficies**

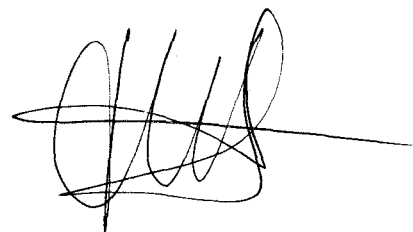
UNIVERSIDAD DE SEVILLA
FACULTAD DE MATEMÁTICAS
BIBLIOTECA

Vº Bº
del Director:



Fdo. Alberto Márquez Pérez
Catedrático de Universidad
del Departamento de
Matemática Aplicada I
de la Universidad de Sevilla

Memoria presentada por
Carmen Cortés Parejo
para optar al grado de
Doctora en Matemáticas
por la Universidad de Sevilla



Sevilla, Abril de 1999

UNIVERSIDAD DE SEVILLA
FACULTAD DE CIENCIAS

Curso 28
Número 355 del libro
Sevilla, 14 Mayo 1999

El Jefe del Negociado de Teoría

Alvaro Kuffel

UNIVERSIDAD DE SEVILLA

Departamento de DPTO. DE MATEMÁTICAS APLICADAS I
de Teoría de Informática y Estadística
Sevilla, 14 Mayo de 1999
Número 31 de Mayo de 1999

do 19
INSTITUCIÓN DE PARTICIPACIÓN

A Iván

*Enséñanos a preocuparnos y a no preocuparnos;
enséñanos a estar sosegados.*

(El silencio de los inocentes)

Thomas Harris

Agradecimientos

Las primeras palabras de este trabajo deben ser de agradecimiento para todos los que, de una forma u otra, me han ayudado a que esto llegue a buen término.

Al contrario de lo que se suele hacer, no voy a dejar para el final a la persona que para mí es más importante, Iván. Gracias por estar a mi lado, darme serenidad y aguantar mi mal humor, que ha sido mucho, en estos meses.

Quiero dar las gracias a Ferrán, Marc, Clara y Alberto por haber compartido conmigo muchas horas en el mundo de los triángulos, además de una bonita amistad.

Gracias a Javier, que siempre tiene un rato para atenderme; a Juanma, que siempre tiene una sonrisa para mostrarme; a M. Angeles, por ser mi amiga y a JoseRa, por ser mi amigo.

Gracias a Carlos, Isabel, Rocío, M. José y Clara por proporcionarme un estupendo ambiente de trabajo.

Finalmente, me gustaría dar las gracias de forma especial a mi director, Alberto, con quien me he peleado, me he gritado y no he estado de acuerdo un millón de veces, pero a quien quiero enormemente y de quien creo que he aprendido todo lo que sé de Teoría de Grafos, si es que algo sé.

Gracias a todos.

Resumen

El área de investigación sobre dibujos de grafos, la Teoría Topológica de Grafos, constituye una importante conexión entre diversos campos de las Matemáticas, tales como la Algorítmica o la Geometría Computacional. Dentro de ella, las inmersiones triangulares de grafos desarrollan un importante papel debido a sus múltiples aplicaciones a la generación de mallados para problemas de interpolación y a sus características de maximalidad.

Uno de los problemas que ha surgido más recientemente en Geometría Computacional es el de la generación aleatoria de datos para la comprobación de la eficiencia de algoritmos. En particular, para aquellos que requieren como entrada una triangulación de una nube de puntos o de un polígono, resulta fundamental disponer de una operación que permita el paso de unas triangulaciones a otras con el fin de poder generar ejemplos aleatorios.

Esta memoria está dedicada al estudio de la transformación de triangulaciones de nubes de puntos y de polígonos mediante la operación de flip diagonal en superficies distintas al plano, tanto desde un punto de vista topológico como métrico, ya que, como es bien sabido, la mayoría de los problemas prácticos no pueden ser modelizados como un grafo inmerso en el plano, sino que requieren el uso de inmersiones en otras superficies.

Este hecho nos conduce a la generalización a otras superficies de los conceptos de triangulación de un polígono y de una nube de puntos, generalización que consideraremos desde dos diferentes puntos de vista: el topológico, en el que ambos tipos de triangulaciones son tratadas como inmersiones de ciertos grafos en la superficie, y el métrico, en el que consideramos arcos de geodésica de la superficie en cuestión para unir pares de puntos.

Introducción

El objetivo principal de la Teoría Topológica de Grafos es dibujar un grafo en una superficie de forma que sus aristas no se crucen, siendo éste un problema geométrico intuitivo que puede ser enriquecido mediante condiciones específicas de simetría o de tipo combinatorio.

Existen múltiples aplicaciones que hacen de la Teoría Topológica de Grafos un objeto interesante de estudio, entre las que podemos citar la elaboración de bases de datos, el manejo de redes [64, 37, 67] o el diseño arquitectónico [55]. Cada una de ellas presenta la necesidad de verificar diversas propiedades, que se traducen en condiciones sobre el tipo de trazado del grafo. Estas aplicaciones exigen, no sólo las justificaciones teóricas que resuelvan los problemas sino también la búsqueda de algoritmos eficientes que apliquen los resultados obtenidos.

Dependiendo del problema que pretendamos modelizar con el dibujo de un grafo en una superficie, puede resultar interesante exigir en la representación que las aristas vengan dadas por arcos de geodésicas de la superficie en cuestión, en lugar de por cualquier curva de Jordan uniendo pares de vértices. Distinguiremos estos dos tipos de inmersiones refiriéndonos a ellas por inmersiones *métricas* o inmersiones *topológicas*, según el caso.

En cualquiera de los dos contextos, un tipo particular de inmersiones que han sido objeto de múltiples estudios son las *triangulaciones* de polígonos y de nubes de puntos. Quizás el interés original por estas estructuras, desde un punto de vista métrico, fuera la generación de mallas para problemas de interpolación. Imaginemos que queremos construir un mapa topográfico de un terreno bastante irregular; evidentemente, no es posible conocer la altura

sobre el nivel del mar de todos los puntos del terreno, sino que habremos realizado unas mediciones en un conjunto discreto de puntos de la región. A partir de estos datos, nos gustaría obtener una buena estimación de la altura en cualquier otro punto. Parece intuitivo pensar que la altura en un punto cualquiera del terreno debe ser parecida a la de los puntos que estén más cercanos a él, por lo que una solución a este problema consiste en encontrar una triangulación lo más equilátera posible del terreno original cuyos vértices sean los puntos del conjunto y aproximar la altura de un punto cualquiera por la media de las alturas de los vértices del triángulo en que éste se encuentre.

El problema anterior fue resuelto para nubes de puntos en el plano por Fortune [20] dando una demostración constructiva en la que partiendo de una triangulación cualquiera del conjunto y aplicando sucesivamente una operación sobre las aristas obtiene la triangulación óptima. Esta operación, que utilizaremos de forma exhaustiva a lo largo de esta memoria, es la de *flip diagonal* y puede definirse tanto para triangulaciones de tipo métrico como topológico.

Aunque veremos la definición formal de esta operación en el capítulo de Preliminares, podemos decir que el *flip diagonal* de una arista de una triangulación consiste en intercambiarla por la otra diagonal del cuadrilátero que forman los dos triángulos que la comparten. Si consideramos triangulaciones métricas, esta operación sólo puede aplicarse si el cuadrilátero anteriormente mencionado es convexo; en el caso de triangulaciones topológicas, el flip diagonal sólo puede realizarse si con ello no se pierde la simplicidad del grafo.

El concepto de triangulación topológica de una nube de puntos en el plano coincide con el de *grafo plano maximal*, esto es, un grafo con exactamente $3n-6$ aristas. Si consideramos un grafo plano maximal G , cualquier inmersión suya en el plano induce una partición *topológica* de éste en regiones triangulares (regiones acotadas por 3-ciclos).

Si consideramos un grafo plano en el que los vértices del grafo puedan disponerse en el ciclo exterior y el resto de las caras sean todas triangulares, obtenemos un grafo *periplano* maximal, o dicho de otra forma, obtenemos una triangulación topológica de un polígono. Este tipo de grafos encuentra una de sus aplicaciones principales en el diseño de placas. Por ejemplo, supongamos que tenemos que construir un cierto circuito impreso que representamos como un grafo, donde los vértices son las terminales del circuito y las aristas, las conexiones entre ellas. Si ese circuito es parte de un sistema más complejo,

y sus terminales deben conectarse a su vez con otras partes del sistema, se comprende fácilmente que dichas terminales deban situarse en la periferia de la placa, o dicho de otra manera, el grafo que lo modeliza, debe ser *periplano*.

Existen diversas razones que hacen interesante el estudio de los flips en triangulaciones (topológicas o métricas) de nubes de puntos y de polígonos. La primera de ellas ya ha sido comentada anteriormente y consiste en la existencia de un algoritmo simple que construye la triangulación óptima (según el criterio de maximizar el mínimo ángulo) de un conjunto de puntos en el plano mediante la aplicación sucesiva de flips diagonales, a partir de una triangulación inicial arbitraria de la nube de puntos [20]. En este algoritmo, la iteración de mejoras locales conduce a un óptimo global. Una consecuencia de este hecho ha sido la utilización de los flips diagonales en algoritmos para encontrar triangulaciones que optimicen criterios tales como el de máximo ángulo o la valencia máxima en los vértices [9].

Otra motivación para el estudio de los flips viene de la existencia de una biyección entre el conjunto de las triangulaciones de un $(n + 2)$ -gono convexo y los árboles binarios con n nodos internos. Bajo esta biyección, el flip de una arista en una triangulación corresponde precisamente a la *rotación* en el correspondiente árbol binario [61, 30]. También aparece esta operación en otra clase de triangulaciones. Por ejemplo, en el trabajo de Avis [3] para enumeración de triangulaciones enraizadas salvo isomorfismo o en el de Pocchiola y Vegter [48] para computar el grafo de visibilidad de un conjunto de objetos en el plano.

Todas las aplicaciones anteriores justifican sobradamente el estudio de las triangulaciones y este hecho conduce de forma inmediata a la elaboración de algoritmos que resuelvan problemas relativos a las mismas y a la necesidad de enumerar y generar triangulaciones aleatorias tanto de nubes de puntos como de polígonos.

Desde un punto de vista práctico, la utilidad de la generación aleatoria de datos radica en la comprobación de la validez de ciertos algoritmos y en la determinación de la eficiencia de los mismos. Existe una larga tradición en el análisis de los algoritmos de estudiar el comportamiento del “caso medio”; sin embargo, un algoritmo puede ser eficiente en el caso medio y aumentar significativamente su complejidad bajo ciertas entradas de datos. Las técnicas de generación aleatoria nos proporcionan un análisis probabilístico de la bondad de dichos algoritmos. Desde un punto de vista teórico, la utilización de

estas técnicas permiten la generación de ejemplos que faciliten la conjetura de ciertos resultados.

En particular, cuando tratamos con algoritmos que requieren la generación aleatoria de triangulaciones de nubes de puntos o de polígonos, es fundamental disponer de una operación que transforme secuencialmente unas triangulaciones en otras. Así, partiendo de una triangulación inicial arbitraria y aplicando un número aleatorio de veces la operación mencionada, obtendremos una nueva triangulación.

La cuestión que nos planteamos es si la operación de flip diagonal es adecuada para resolver el problema anterior. Esto nos conduce a la definición del *grafo de triangulaciones* de una nube de puntos o de un polígono, que se define como el grafo cuyo conjunto de vértices son las triangulaciones del conjunto (resp. del polígono) y en el que dos triangulaciones son adyacentes si se pueden transformar entre sí mediante un flip diagonal. Con esta definición, la validez de la operación de flip diagonal para el problema de la generación aleatoria de triangulaciones se traduce en el estudio de la conexión del grafo de triangulaciones asociado.

Para triangulaciones métricas de nubes de puntos en el plano, la conexión del grafo de triangulaciones en una consecuencia inmediata del algoritmo de Fortune [20] para la construcción de la triangulación de Delaunay. Por otra parte, un clásico resultado de Wagner [68] establece que cualesquiera dos triangulaciones (topológicas) no etiquetadas en el plano, con el mismo número de vértices, se pueden transformar entre sí mediante una secuencia de flips diagonales, hecho que establece la conexión del grafo de triangulaciones topológicas de una nube de puntos en esta superficie. Con respecto al grafo de triangulaciones de un polígono en el plano, es conocido que este grafo es conexo [30], tiene diámetro lineal si el número de vértices es suficientemente alto [61] y que es hamiltoniano [38].

Sin embargo, la mayoría de los problemas prácticos no pueden ser modelizados mediante un dibujo plano de un grafo, sino que requieren la utilización de inmersiones en otras superficies. Esto nos obliga a generalizar los conceptos de triangulación de una nube de puntos y de un polígono, tanto desde un punto de vista topológico como desde el métrico, para posteriormente abordar el problema de la conexión de sus respectivos grafos de triangulaciones.

Topológicamente, una *triangulación de una superficie* F^2 es una inmersión de un grafo simple en F^2 que induce una partición topológica de la misma en regiones triangulares. La conexión del grafo de triangulaciones en este caso ya ha sido establecida para el toro [15], el plano proyectivo y la botella de Klein [44] y recientemente, Negami [43] ha obtenido un resultado más general que establece dicha conexión para cualquier superficie, si las triangulaciones tienen un número igual y suficientemente alto de vértices.

En nuestro intento por obtener una generalización topológica del concepto de polígono plano, hemos de observar en primer lugar, que una curva simple y cerrada divide al plano en dos regiones, una acotada y otra que no lo está. Sin embargo, este hecho no es cierto en general en otras superficies, ya que las curvas *esenciales* (homotópicamente no nulas) ni siquiera tienen por qué dividirlas en dos componentes conexas. De esta forma obtenemos una primera restricción para nuestra generalización y es que hemos de considerar ciclos homotópicamente no nulos como frontera de los polígonos.

Además, puesto que un ciclo en las condiciones anteriores divide en general a una superficie en una región *2-celular* (homeomorfa a un disco abierto) y otra que no lo es, hemos de especificar cuál de ellas será considerada como interior del polígono. Topológicamente, el hecho de triangular una región 2-celular en una superficie es equivalente a triangular un polígono plano y puesto que este caso ya ha sido resuelto, no presenta gran interés.

Definimos entonces un *polígono topológico* de n vértices en una superficie F^2 como la región no homeomorfa a un disco abierto acotada por un ciclo de longitud n y una *triangulación* de un polígono topológico en F^2 como una inmersión de un grafo simple en F^2 , en la que existe una cara 2-celular donde se encuentran todos los vértices (el borde del polígono) y en la que el resto de las caras. Habitualmente, llamaremos *peritriangulaciones* a estas triangulaciones de polígonos topológicos.

La conexión del grafo de triangulaciones topológicas de un polígono en la esfera es una consecuencia inmediata del resultado de Wagner para triangulaciones topológicas de nubes de puntos en el plano. También se mantiene este hecho para triangulaciones topológicas de polígonos en el plano proyectivo [17].

Intentando seguir un paralelismo con los resultados obtenidos para nubes de puntos en superficies, en el Capítulo 1 de la presente memoria establecemos la

conexión del grafo de triangulaciones de los polígonos topológicos de n vértices en la superficie del toro. Para ello veremos que cualquier peritriangulación de esta superficie se puede transformar mediante una secuencia de flips diagonales y contracciones de aristas en la única triangulación topológica de un polígono de seis vértices que existe en esta superficie, que resulta ser una inmersión tórica del grafo completo K_6 .

La mayoría de estos resultados aparecen recogidos en [13] en un trabajo realizado en colaboración con el profesor Nakamoto.

En el Capítulo 2 trasladamos esta misma cuestión a la botella de Klein y es importante reseñar que los argumentos para resolverla difieren en gran medida de los utilizados para el caso tórico. Hacemos uso de un tipo particular de triangulaciones topológicas de polígonos, las peritriangulaciones *irreducibles*, determinando el conjunto completo de las mismas a partir de la descripción de las triangulaciones irreducibles de la botella de Klein dada por Lawrencenko y Negami en [35]. Estas especiales triangulaciones de polígonos nos servirán para establecer la conexión del grafo de triangulaciones topológicas de un polígono en esta superficie.

En nuestra idea por obtener resultados para polígonos topológicos similares a los existentes para triangulaciones de superficies, nuestro siguiente objetivo es establecer la conexión del grafo de triangulaciones topológicas de un polígono en cualquier superficie, ya sea orientable o no.

A ello dedicamos el Capítulo 3 de este trabajo, obteniendo una respuesta afirmativa a la cuestión anteriormente planteada para polígonos con un número suficientemente alto de vértices. Es de destacar que la complejidad de este problema radica precisamente en la arbitrariedad de la superficie, ya que no podremos apoyarnos en la topología de la misma como hicimos en el caso tórico y en la botella de Klein, lo cual nos obligará a utilizar técnicas alternativas.

Utilizaremos como pieza clave en nuestra demostración las *pseudo-triangulaciones* de polígonos (que habitualmente llamaremos *pseudo-peritriangulaciones*), esto es, triangulaciones de un polígono topológico en las que el grafo subyacente no tiene por qué ser simple. Comenzamos estableciendo la conexión del grafo de pseudo-triangulaciones de un polígono en cualquier superficie y a través de ciertas operaciones que nos permitirán el paso de una pseudo-triangulación a una triangulación, obtendremos el resultado general de conexión para trian-

gulaciones de un polígono.

Observemos que en una inmersión topológica de un grafo, ni la posición de los vértices ni la longitud de las aristas revisten importancia; sin embargo, existen situaciones reales en las que estos parámetros requieren ser considerados. Esto nos lleva a una definición métrica de las triangulaciones de nubes de puntos y de polígonos en otras superficies distintas al plano.

Recordemos que una *triangulación métrica de una nube de puntos* en el plano es un conjunto maximal de segmentos uniendo pares de puntos y de forma que no se intersecan entre sí, salvo, a lo sumo, en sus puntos finales. Podemos generalizar directamente esta definición a otras superficies simplemente considerando como segmentos las geodésicas que dan la mínima longitud entre dos puntos de la misma.

Con respecto a los polígonos, si bien desde un punto de vista topológico es equivalente triangular un polígono en el plano que triangular la región homeomorfa a un disco de las dos en que queda dividida una superficie por un ciclo, no ocurre así cuando estamos considerando triangulaciones métricas. Observemos que en este caso, la noción de convexidad cobra gran importancia y puede ocurrir que no todas las diagonales sean interiores a la región 2-celular. Definimos por tanto un *polígono* en una superficie, desde un punto de vista métrico, como la región 2-celular acotada por una línea poligonal cerrada y simple en la superficie y los llamaremos, para distinguirlos de los polígonos topológicos, *polígonos euclídeos*. Con esta definición estamos eliminando las líneas poligonales esenciales (homotópicamente no nulas) como posibles fronteras de polígonos.

En el último capítulo de este trabajo, nos planteamos el problema de la conexión del grafo de triangulaciones métricas de nubes de puntos y de polígonos en distintas superficies, utilizando en cada una de ellas las métricas definidas en el capítulo de Preliminares.

Comenzamos en la primera sección tratando el problema anterior sobre la esfera. Para nubes de puntos, nos centramos en el caso en que éstos no estén contenidos en un hemisferio, (sino, su comportamiento es muy similar al de un conjunto de puntos en el plano [26]) y demostramos que cualquier triangulación de la nube se puede transformar en la triangulación esférica de Delaunay mediante una secuencia de flips diagonales. Con respecto a los

polígonos esféricos, veremos que es posible adaptar ciertos resultados sobre polígonos a la superficie esférica y esto nos permitirá obtener igualmente la conexión del grafo de triangulaciones para polígonos en esta superficie.

En cuanto al cilindro, es de destacar que si bien la envolvente convexa de una nube de puntos sobre la esfera es la propia superficie si los puntos están en posición no euclídea, esto no siempre ocurre así en el cilindro, ya que si los puntos no están comprendidos entre dos generatrices diametralmente opuestas, la envolvente convexa del conjunto es una banda no necesariamente cerrada [26] y por lo tanto, una triangulación de la nube no dividirá en general en regiones triangulares dicha envolvente. El cilindro presenta además otro tipo de peculiaridades, como que la región a triangular no tiene por qué estar unívocamente determinada y que la triangulación óptima según el criterio de maximizar el mínimo ángulo no es la dual del diagrama de Voronoi.

Como veremos más adelante, este comportamiento tan particular de las triangulaciones de nubes de puntos en el cilindro, impondrá un marco más restringido que en el caso plano al considerar el problema de la transformación mediante flips diagonales y más aún, nos obligará buscar técnicas alternativas a las usadas en el plano para resolverlo.

Con respecto a los polígonos en el cilindro, además de los euclídeos, consideraremos otro tipo de polígonos, que llamaremos *esenciales* y que definiremos como la región acotada por dos líneas poligonales esenciales. Grima demostró en [26] que todo polígono (euclídeo o esencial) en el cilindro admite una triangulación y en esta sección demostraremos que el grafo de triangulaciones en ambos casos es conexo.

En la última sección de este capítulo nos detendremos en las múltiples peculiaridades que presenta la superficie tórica al tratar con triangulaciones de nubes de puntos y de polígonos. Veremos que, al igual que ocurre en el cilindro, una triangulación de un conjunto de puntos que no esté comprendido entre dos paralelos o dos meridianos diametralmente opuestos (*posición no cilíndrica*) no tiene por qué dividir a la envolvente convexa, que en este caso es la propia superficie [26], en regiones triangulares e incluso existen nubes de puntos para las que ciertos conjuntos maximales de aristas no delimitan ninguna cara triangular. Nos detendremos también en comprobar que la existencia de triangulaciones que dividan a la envolvente convexa en regiones triangulares no es independiente de la elección de los segmentos iniciales.

En la superficie tórica sólo consideraremos polígonos euclídeos y veremos que sus triangulaciones también muestran un comportamiento insólito en esta superficie. Obtenemos ejemplos de polígonos que no admiten ninguna diagonal, por lo que cualquier razonamiento de tipo inductivo similar a los usados en otras superficies para demostrar la conexión del grafo de triangulaciones falla en este punto.

Hemos dejado para el final de esta introducción el hacer un comentario sobre la primera sección del Capítulo 1, hecho que justificamos a continuación.

La mayoría de los resultados que presentamos en esta memoria tienen un marcado carácter topológico en el que el concepto del dibujo o inmersión de un grafo en una superficie es fundamental.

Tradicionalmente en la Teoría Topológica de Grafos, a la hora de describir una inmersión de un grafo en una superficie, se ha recurrido a los sistemas de rotación. Sin embargo, existen inmersiones de un mismo grafo en una superficie que, si bien son homeomorfas y proceden del mismo sistema de rotación, presentan un aspecto tan distinto a la vista que a veces necesitan ser tratadas como diferentes. Esta idea de "igualdad" de inmersiones en función del parecido entre sus dibujos la recoge el concepto de isotopía ambiente.

Por esta razón, cobra interés el buscar otra clase de invariante de tipo combinatorio, que al igual que hace el sistema de rotación con las inmersiones homeomorfas, refleje las clases de isotopía de las inmersiones.

En la primera sección del Capítulo 1 abordamos este problema para los grafos que admiten una inmersión en el toro. Para ello utilizaremos como herramienta fundamental un tipo muy especial de curvas de las cuales se conoce una caracterización completa en el toro, los *nudos tóricos*.

Es importante destacar que únicamente se conoce una clasificación para los nudos que admiten una inmersión en el toro [56] y esto nos proporciona una poderosa herramienta de trabajo en esta superficie y no en otras.

Contenido

Agradecimientos	i
Resumen	iii
Introducción	v
Contenido	xiv
0 Preliminares	1
0.1 Introducción	1
0.2 Notaciones en Teoría de Grafos	1
0.3 Inmersiones de grafos en superficies	4
0.4 Representación y métricas de superficies	7
0.4.1 La Esfera	8
0.4.2 El Cilindro	8
0.4.3 El Toro	11

0.4.4	La Botella de Klein	13
0.4.5	Posición euclídea	14
0.5	Triangulaciones y Peritriangulaciones	16
1	Triangulaciones topológicas del toro	24
1.1	Introducción	25
1.2	Clases de isotopía de inmersiones peritóricas	28
1.2.1	Nudos tóricos.	29
1.2.2	El polinomio asociado a una cara.	46
1.3	Peritriangulaciones tóricas.	51
1.3.1	peritriangulaciones tóricas pseudo-minimales	52
1.3.2	Insertando vértices de valencia tres	62
1.3.3	Flips en peritriangulaciones tóricas	65
1.4	Conclusiones y problemas abiertos	68
2	Flips en peritriangulaciones de la botella de Klein.	69
2.1	Introducción	69
2.2	Peritriangulaciones irreducibles de la botella de Klein.	71
2.3	Flips diagonales en peritriangulaciones de la botella de Klein.	75
2.4	Conclusiones y problemas abiertos	82

3	Flips en peritriangulaciones de superficies	83
3.1	Introducción	83
3.2	Pseudo-peritriangulaciones	85
3.3	Peritriangulaciones irreducibles	90
3.4	De las pseudo-peritriangulaciones a las peritriangulaciones	93
3.5	Conclusiones y problemas abiertos	101
4	Triangulaciones métricas de superficies	102
4.1	Introducción	102
4.2	Triangulaciones en la esfera	105
4.2.1	Triangulaciones de polígonos esféricos	105
4.2.2	Triangulaciones de nubes de puntos	110
4.3	Triangulaciones en el cilindro	115
4.3.1	Triangulaciones de polígonos	116
4.3.2	Triangulaciones de nubes de puntos	118
4.3.3	El diámetro del grafo de triangulaciones	132
4.4	Triangulaciones en el toro	135
4.4.1	Triangulaciones de nubes de puntos	135
4.4.2	Triangulaciones de polígonos.	142

Referencias

Capítulo 0

Preliminares

0.1 Introducción

El presente capítulo se dedicará a dar las definiciones generales y establecer la notación que se utilizará a lo largo de la presente memoria. Así mismo, se introducirán los conceptos de flip diagonal y de triangulación de nubes de puntos y de polígonos, sobre los que se fundamenta este trabajo.

Aunque se irán definiendo los conceptos más elementales que se utilizarán a lo largo de este trabajo sería recomendable, para quienes no estén familiarizados con dichos conceptos, la lectura de textos que pueden ser considerados ya como clásicos, como son los de Bollobás [10] y Gross y Tucker [27] de Teoría de Grafos o el de O'Rourke [47] [49] de Geometría Computacional.

0.2 Notaciones en Teoría de Grafos

Comenzaremos estableciendo los conceptos relativos a la Teoría de Grafos que utilizaremos a lo largo de esta memoria. Los textos de Harary [28] y Bollobás [10] representan una referencia básica para esta sección.

Se define un *grafo* G como un par (V, A) formado por un conjunto de *vértices* V y una colección de *aristas* A , donde cada arista $l \in A$ es un par no ordenado de vértices distintos de G , es decir, $l = \{v_i, v_j\}$ con $v_i, v_j \in V$. Dos aristas son *incidentes* si comparten un vértice. Un vértice v y una arista son *incidentes* si el vértice v es uno de los que definen a dicha arista. Dos vértices se dicen *adyacentes* si ambos definen una arista de G .

Como caso más general, si un vértice es adyacente a él mismo decimos que en A existe un *lazo*. Si dos vértices son adyacentes a través de más de una arista decimos que existen en A *aristas múltiples*. Llamamos *multigrafo* o grafo *no simple* a un grafo en el que se permiten lazos y aristas múltiples.

Llamaremos *etiquetado de vértices* de un grafo G con n vértices a cualquier biyección $\rho : V(G) \rightarrow \{1, \dots, n\}$.

Dado un grafo $G = (V, A)$ se denomina *valencia* del vértice $v \in V$ al número de aristas de G que inciden en dicho vértice, y se denota por $\delta(v)$. Si el grafo $G = (V, A)$ posee n vértices y todos ellos poseen la misma valencia, se dice que es *regular de valencia n* . Como caso particular, si la valencia de cada vértice es $n - 1$, el grafo no admite más aristas y se dice que se trata de un *grafo completo*, denotándose por K_n , donde n representa el número de vértices.



Figura 0.1: Los grafos completos K_3 y K_4 .

Dados dos vértices v_1 y v_2 de un grafo G , un *camino* en G que une v_1 con v_2 es un conjunto ordenado de vértices $\alpha = \{v_1, w_1, \dots, w_k, v_2\}$ con la condición de

que cada vértice sea adyacente al anterior y al posterior. Definimos la *longitud* del camino α como el número de vértices que posee menos 1. También se llama camino en G de v_1 a v_2 a la sucesión de aristas $\{\{v_1, w_1\}, \{w_1, w_2\}, \dots, \{w_k, v_2\}\}$. La longitud de este camino (que es la misma que la de α) viene determinada por el número de aristas que lo componen.

Un camino se dice que es *simple* si no contiene vértices repetidos. Resulta fácil comprobar que si existe un camino que une a los vértices v_i y v_j , existe un camino simple que también los une y por ello, siempre que hablemos de un camino nos estaremos refiriendo a uno simple.

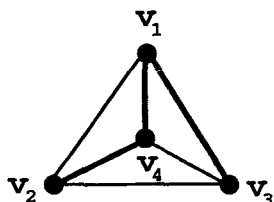


Figura 0.2: Un camino de longitud 3 entre los vértices v_2 y v_3 .

Si $G_1 = (V_1, A_1)$ y $G_2 = (V_2, A_2)$ son dos grafos y $h : V_1 \rightarrow V_2$ es una aplicación inyectiva de tal forma que si los vértices v y w de G_1 son adyacentes en G_1 entonces $h(v)$ y $h(w)$ son adyacentes en G_2 , se dice que h es un *homomorfismo* de G_1 en G_2 . Si h es un homomorfismo biyectivo de G_1 en G_2 de forma que h^{-1} es un homomorfismo de G_2 en G_1 , entonces se dice que h es un *isomorfismo* entre G_1 y G_2 . En tal caso, diremos que G_1 y G_2 son *isomorfos*.

Si $l = \{v_1, v_2\}$ es una arista de un grafo $G = (V, E)$, llamaremos *subdivisión* de l al resultado de sustituir dicha arista por el camino simple $\{v_1, w_1, \dots, w_k, v_2\}$ donde los vértices w_i , para $1 \leq i \leq k$, son todos distintos y ninguno de ellos perteneciente a V .

Dado un grafo G se define una *subdivisión* de G como el grafo resultante de realizar sucesivas particiones de algunas de sus aristas. Diremos que dos grafos G_1 y G_2 son *homeomorfos* si existe un tercer grafo G_3 que sea subdivisión

común de G_1 y G_2 . Este concepto coincide con el de homeomorfismo de los espacios topológicos subyacentes a los grafos G_1 y G_2 .

0.3 Inmersiones de grafos en superficies

Nuestro objetivo en esta sección es fijar los conceptos sobre superficies e inmersiones de grafos con los que trabajaremos a lo largo de esta memoria.

Suponemos conocidos conceptos básicos como espacio topológico, compacidad, conexión por arcos, espacio de Hausdorff, homeomorfismo, etc. En este contexto, decimos que una *superficie cerrada* F^2 es un espacio topológico compacto de Hausdorff, conexo por arcos y localmente homeomorfo a un disco, esto es, para cada punto p de F^2 existe un conjunto abierto de F^2 conteniendo a p , el cual es homeomorfo a un disco abierto del plano. Excluimos por tanto con esta definición al plano y al cilindro, por tratarse de espacios que no son cerrados, si bien resultará interesante considerar inmersiones de grafos en estas dos superficies.

Existen dos tipos de superficies cerradas, las *orientables* y las *no orientables*. Las primeras se caracterizan como aquellas que pueden ser obtenidas añadiendo asas a la esfera (ver Figura 0.3). Las superficies no orientables se pueden obtener como el resultado de cortar k agujeros en la esfera y “pegar” una banda de Möbius a lo largo de cada una de las fronteras de los k agujeros.

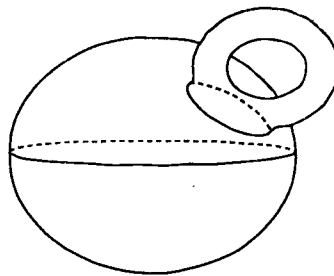


Figura 0.3: Una esfera con un asa, i.e., un toro.

Tanto al número de asas de una superficie orientable como al de bandas de Möbius en una no orientable, se le llama *género* de la superficie y se les denota por g y N , respectivamente. Así, la esfera tiene género $g = 0$, el toro $g = 1$ y la botella de Klein $N = 2$.

Para cualquier superficie F^2 y cualquier grafo G inmerso en F^2 se verifica que el número $|V(G)| - |E(G)| + |F(G)|$ es constante. A este número se le llama *característica de Euler* y se denota por $\chi(F^2)$. Tenemos por tanto la siguiente expresión conocida como *fórmula de Euler* [32].

$$|V(G)| - |E(G)| + |F(G)| = \chi(F^2)$$

Además, la característica de Euler y el género de una superficie guardan la siguiente relación.

$$\chi(F^2) = \begin{cases} 2 - g & \text{si } F^2 \text{ es orientable} \\ 2 - 2N & \text{si } F^2 \text{ es no orientable} \end{cases}$$

Una *curva cerrada* en una superficie cerrada F^2 es una aplicación continua $l: S^1 \rightarrow F^2$ (o su imagen), donde $S^1 = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 | x^2 + y^2 = 1\}$; si además, la aplicación l es inyectiva, diremos que la curva es *simple*. Una curva cerrada y simple se llama *trivial* si acota una región *2-celular* (homeomorfa a un disco abierto) en F^2 ; en caso contrario, se dirá que la curva es *esencial*.

Una curva cerrada y simple en el plano siempre es trivial y como es sabido, lo divide en una región acotada, que es homeomorfa a un disco, y en otra que no lo está. Sin embargo, en una superficie cerrada, una curva trivial divide a la superficie en dos regiones acotadas, si bien una de ellas es 2-celular y la otra, salvo en el caso de la esfera, no lo es.

Dos curvas cerradas l_1 y l_2 en una superficie cerrada F^2 son *homotópicas* en F^2 si existe una aplicación continua $\Phi: [0, 1] \times S^1 \rightarrow F^2$ tal que $\Phi(0, x) = l_1(x)$ y $\Phi(1, x) = l_2(x)$ para cada $x \in S^1$.

Aunque en la sección anterior se ha definido un grafo como un objeto puramente combinatorio, ya hemos comentado en la Introducción la necesidad de recurrir a una representación topológica de los mismos.

Decimos que un grafo G admite una *inmersión* en una superficie F^2 si es posible obtener un dibujo en ella en el que los vértices están representados por puntos, las aristas por arcos de curvas de Jordan y de tal forma que dos aristas cualesquiera no se intersectan en puntos que no sean vértices comunes a ambas. Si pensamos en un grafo G como un espacio topológico con la estructura de un complejo 1-dimensional, una inmersión de G en una superficie F^2 puede ser considerada como una aplicación continua $\phi : G \rightarrow F^2$ cuya imagen es homeomorfa a G vía la aplicación ϕ .

Si consideramos el complementario en F^2 de una inmersión de un grafo, obtenemos una serie de regiones distintas llamadas *caras* de la inmersión. Al conjunto de aristas que delimitan una cara se le llama *frontera* o *borde* de la cara. Denotaremos por $|V(G)|$, $|E(G)|$ y $|F(G)|$ a los conjuntos de vértices, aristas y caras de una inmersión de un grafo G , respectivamente.

Diremos que una inmersión de un grafo G en una superficie F^2 es *2-celular* si cada una de sus caras es homeomorfa a un disco abierto. A lo largo de esta memoria sólo trataremos con inmersiones 2-celulares de grafos en superficies.

La *unión* de dos caras C_1 y C_2 de una inmersión de un grafo se obtiene eliminando los bordes comunes entre ellas. La Figura 0.4 muestra la unión de dos caras de una inmersión plana.

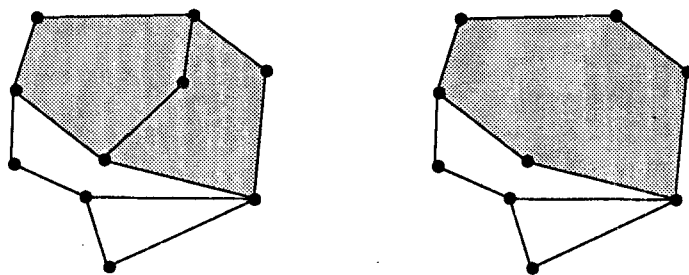


Figura 0.4: La unión de dos caras de una inmersión plana.

Sean ϕ_1 y ϕ_2 dos inmersiones de dos grafos G_1 y G_2 , respectivamente, en una

superficie cerrada F^2 . Decimos que ϕ_1 y ϕ_2 son *homeomorfas* si existe un homeomorfismo $h : F^2 \rightarrow F^2$ con $h \circ \phi_1 = \phi_2$ que induce un isomorfismo de G_1 en G_2 .

Habitualmente, si dos grafos G_1 y G_2 inmersos en la misma superficie cerrada tienen la misma estructura combinatoria, es decir, los mismos conjuntos de vértices, aristas y caras, entonces suelen ser considerados como el mismo grafo. Por lo tanto, a menudo sólo distinguiremos inmersiones de grafos en superficies, salvo homeomorfismo. Sin embargo, existen inmersiones que si bien son homeomorfas, presentan un aspecto tan distinto que merecen ser consideradas como diferentes. Este concepto de "igualdad" de inmersiones en función del parecido entre sus dibujos lo recoge el concepto de isotopía ambiente que definimos a continuación.

Una *isotopía ambiente* $H : F^2 \times [0, 1] \rightarrow F^2$ es una aplicación continua tal que $h_t(x) = H(x, t)$ es un homeomorfismo sobre F^2 , para todo $t \in [0, 1]$ y h_0 es la aplicación identidad en F^2 .

Si ϕ_1 y ϕ_2 son dos inmersiones de un grafo G en una superficie F^2 , diremos que son *ambiente isotópicas* o simplemente *isotópicas* si existe una isotopía ambiente $H : F^2 \times [0, 1] \rightarrow F^2$ tal que $h_1 \circ \phi_1 = \phi_2$ (de la propia definición de isotopía se deduce que $h_0 \circ \phi_1 = \phi_1$). Intuitivamente, podemos decir que una isotopía ambiente H deforma ϕ_1 en ϕ_2 continuamente sobre F^2 , considerando $h_t \circ \phi_1$ como la posición de ϕ_1 en el instante t . En este caso diremos que ϕ_1 y ϕ_2 pertenecen a la misma *clase de isotopía ambiente* o que son la misma, *salvo isotopía*.

0.4 Representación y métricas de superficies

Dado que en el último capítulo de esta memoria trabajaremos con distintas superficies y sus métricas concretas, dedicamos esta sección a establecer las notaciones y definiciones necesarias para ello.

0.4.1 La Esfera

Es bien conocido que no existe ninguna isometría entre el plano y la esfera, por lo que al tratar problemas de tipo métrico en ella deberemos movernos sobre la propia superficie y no podremos recurrir a ninguna representación plana de la misma. Comenzaremos estableciendo el concepto de longitud y para ello necesitamos definir una métrica [8].

Sea S^2 la esfera unidad en \mathbf{R}^3 ; la función $d : S^1 \times S^1 \rightarrow [0, \pi]$, $d(x, y) = \arccos[(x/y)]$ es una métrica que induce en S^2 la misma topología que \mathbf{R}^3 ; $d(x, y)$ es la medida del menor arco (*geodésica*) de *círculo máximo* (círculo que se obtiene como intersección de la esfera con un plano conteniendo al centro de la misma) pasando por x e y , al cual denotamos por $g(x, y)$. Llamamos a esta métrica *distancia geodésica* y para que esté bien definida es necesario que x e y no sean puntos *antipodales* (i.e., diametralmente opuestos respecto del origen de la esfera). Llamaremos *segmento* en la esfera a cualquier geodésica de mínima longitud uniendo a dos puntos de la superficie.

Un *hemisferio* H es la intersección de S^2 con un semiespacio asociado a un plano que pasa a través del origen. Para un hemisferio H , denotamos por \hat{H} al semiespacio de \mathbf{R}^3 asociado a H .

Un *paralelo* es la intersección de la esfera con cualquier plano y en general éstos no son geodésicas sobre la esfera.

Siempre que trabajemos con conjuntos de puntos sobre la esfera, supondremos que no existen tres puntos en un mismo círculo máximo ni cuatro puntos coplanares; estas restricciones son la adaptación natural a la esfera de las condiciones sobre conjuntos de puntos en el plano en posición general.

0.4.2 El Cilindro

Para trabajar en el cilindro consideraremos el desarrollo del mismo al cortarlo por una generatriz, y en este desarrollo, en el que el cilindro queda

representado en un rectángulo con dos lados infinitos e identificados, las geodésicas se representan usando rectas [16].

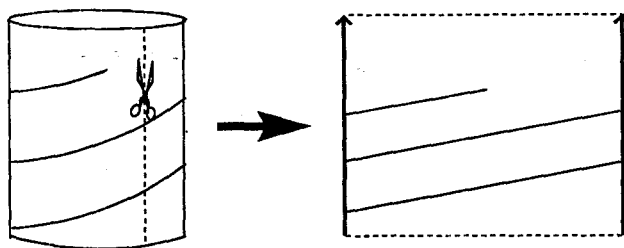


Figura 0.5: Geodésicas en el cilindro.

Si llamamos \mathcal{L} al desarrollo plano de nuestro cilindro, podemos considerar la banda infinita \mathcal{M} originada al considerar traslaciones horizontales y enteras de la baldosa \mathcal{L} , como se muestra en la Figura 0.6.

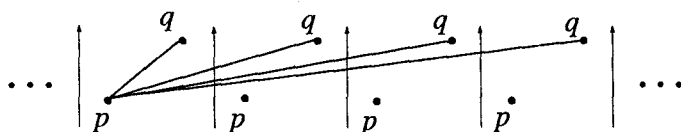


Figura 0.6: Las infinitas geodésicas del cilindro que unen a p y q están representadas en \mathcal{M} por las rectas que unen a una copia fija de p con las infinitas copias de q .

En \mathcal{L} se tiene un sistema de referencia euclídeo como se nos muestra en la Figura 0.7. Los *paralelos* o *círculos máximos* del cilindro serán las rectas de ecuaciones $y = y_0$; las *generatrices* o *meridianos* las de ecuaciones $x = x_0$.

Llamamos generatrices *diametralmente opuestas* a las generatrices a distancia $1/2$. Dados dos puntos p y q sobre el cilindro ya hemos visto anteriormente que existen infinitas geodésicas en esta superficie uniendo a p y q , pero usando el Teorema de Hopf-Rinow [29] tenemos que existe una geodésicas que da la longitud mínima.

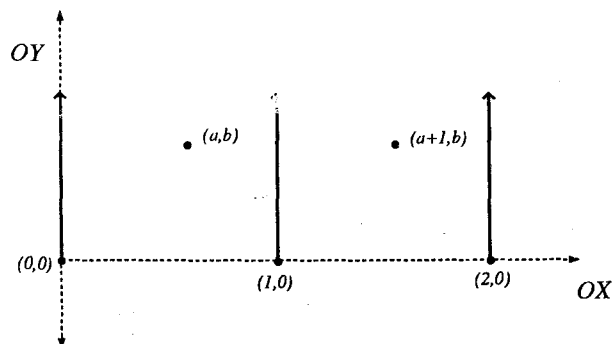


Figura 0.7: Cada punto del cilindro tendrá unas coordenadas (x, y) en este sistema de referencia, y dado un punto de coordenadas (a, b) las infinitas copias del mismo en \mathcal{M} son los puntos $\{(a + m, b)/m \in \mathbf{Z}\}$.

Para el caso de dos puntos en el cilindro esta geodésica puede no ser única, y ésto ocurre para puntos en generatrices diametralmente opuestas, puntos que llamaremos *diametralmente opuestos*, es decir, usando nuestro sistema de referencia, éstos son puntos con coordenadas (a, b) y $(a + 1/2, b)$.

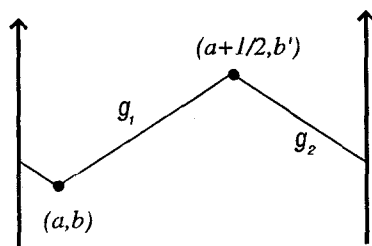


Figura 0.8: Entre dos puntos diametralmente opuestos existen dos geodésicas distintas que tienen la mínima longitud.

En los casos en los que necesitemos asegurar la unicidad de la geodésica de longitud mínima entre cualesquiera dos puntos de un conjunto dado, exigiremos que no haya en el citado conjunto puntos sobre generatrices diametralmente opuestas; consideraremos como casos degenerados aquellos casos en que existan puntos en tal situación, y para “arreglar” estas

configuraciones no deseadas podemos usar técnicas como el *S.O.S* de Edelsbrunner [18]. En estos términos, un *segmento* en el cilindro es una geodésica de mínima longitud uniendo a dos puntos sobre la superficie. Si $p = (p_1, p_2)$ y $q = (q_1, q_2)$ son las coordenadas en \mathcal{L} de dos puntos sobre el cilindro, $0 \leq p_1 \leq q_1 \leq 1$, $p_2, q_2 \in \mathbf{R}$, definimos la *distancia* entre ellos como

$$d(p, q) = \begin{cases} \sqrt{(p_1 - q_1)^2 + (p_2 - q_2)^2} & \text{si } q_1 - p_1 \leq 1/2, \\ \sqrt{(p_1 + 1 - q_1)^2 + (p_2 - q_2)^2} & \text{si } q_1 - p_1 > 1/2. \end{cases}$$

0.4.3 El Toro

Para trabajar en el toro consideraremos la representación del mismo en la estructura conocida como *toro plano* [16], en la cual el toro está representado en una loseta \mathcal{L} donde los lados opuestos están identificados y en el mismo sentido.

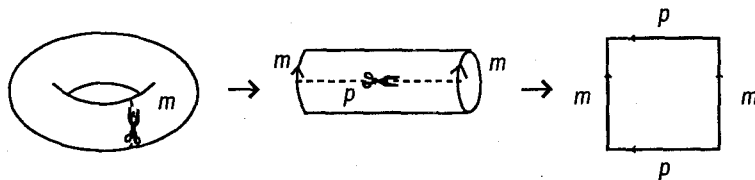


Figura 0.9: Podemos considerar el toro representado por un cuadrado con los lados opuestos identificados.

Usando esta representación, las geodésicas uniendo a dos puntos p y q en el toro, como ocurría en el cilindro, se pueden representar como las rectas que en el mosaico \mathcal{M} une una copia fija de p con todas las copias de q , siendo \mathcal{M} el mosaico obtenido al realizar traslaciones enteras, horizontales y verticales, de \mathcal{L} .

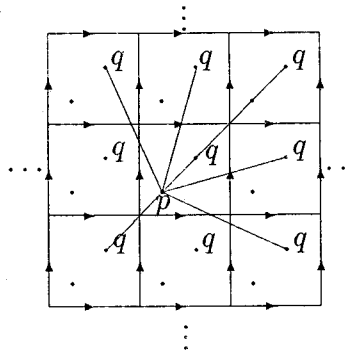


Figura 0.10: Las infinitas geodésicas del toro que unen a p y q están representadas en \mathcal{M} por las rectas que unen a una copia fija de p con las infinitas copias de q .

También, como en el caso del cilindro, podemos considerar en \mathcal{M} un sistema de referencia métrico como el que nos muestra la Figura 0.11.

Usando el sistema de referencia anterior, los *paralelos* del toro serán las rectas de ecuaciones $y = y_0$ y los *meridianos* las de ecuaciones $x = x_0$. Llamamos paralelos (respectivamente meridianos) *diametralmente opuestos* a los paralelos (respectivamente meridianos) a distancia $1/2$. Dados dos puntos p y q sobre el toro sabemos que existen infinitas geodésicas en esta superficie uniendo a p y q , pero usando el Teorema de Hopf-Rinow [29] tenemos que existe una geodésica que da la longitud mínima. Para el caso de dos puntos en el toro esta geodésica puede ser no única, y esto ocurre para puntos en paralelos o meridianos diametralmente opuestos, como nos muestra la Figura 0.12.

En cualquier caso, si es necesario asegurar la unicidad de la geodésica de mínima longitud, podemos considerar estos casos como degenerados. Llamamos *segmento* en el toro a toda geodésica de mínima longitud uniendo a dos puntos sobre dicha superficie. Si $p = (p_1, p_2)$ y $q = (q_1, q_2)$ son las coordenadas en \mathcal{L} de dos puntos en el toro, definimos la *distancia* entre ellos

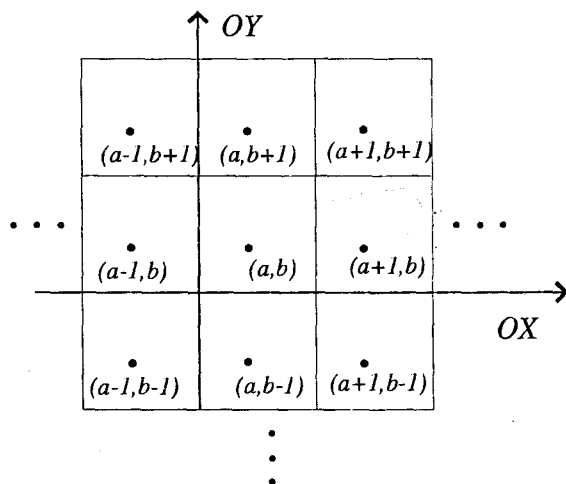


Figura 0.11 : Se puede considerar $\mathcal{L} = [0, 1] \times [0, 1]$, y así dado un punto de coordenadas (a, b) , las infinitas copias del mismo en \mathcal{M} son los puntos $\{(a + m, b + n)/m, n \in \mathbf{Z}\}$.

como

$$d(p, q) = \min \left\{ \begin{array}{l} \sqrt{(p_1 - q_1)^2 + (p_2 - q_2)^2}, \quad \sqrt{(p_1 - q_1 + 1)^2 + (p_2 - q_2)^2}, \\ \sqrt{(p_1 - q_1)^2 + (p_2 - q_2 + 1)^2}, \quad \sqrt{(p_1 - q_1 - 1)^2 + (p_2 - q_2)^2}, \\ \sqrt{(p_1 - q_1)^2 + (p_2 - q_2 - 1)^2}, \quad \sqrt{(p_1 - q_1 - 1)^2 + (p_2 - q_2 - 1)^2}, \\ \sqrt{(p_1 - q_1 + 1)^2 + (p_2 - q_2 - 1)^2}, \quad \sqrt{(p_1 - q_1 - 1)^2 + (p_2 - q_2 + 1)^2}, \\ \sqrt{(p_1 - q_1 + 1)^2 + (p_2 - q_2 + 1)^2} \end{array} \right\}$$

0.4.4 La Botella de Klein

La botella de Klein se define como la superficie obtenida al identificar las fronteras de dos bandas de Möbius con la de una esfera con dos agujeros y es por tanto, una superficie no orientable de género $N = 2$.

Puesto que una esfera con dos agujeros es homeomorfa a un anillo e identificando una de las componentes de la frontera de un anillo con una

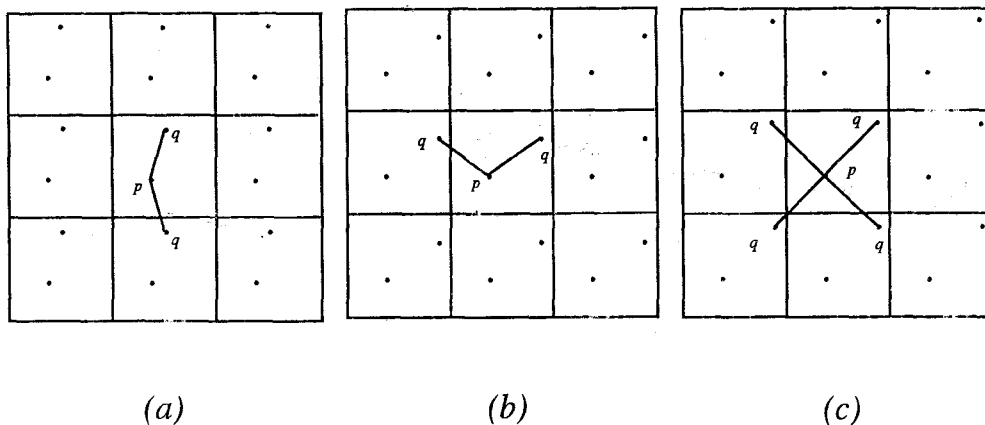


Figura 0.12: Si p y q están sobre paralelos diametralmente opuestos (a), o sobre meridianos diametralmente opuestos (b), existen, en cada caso, dos geodésicas distintas con la mínima longitud; si ocurren ambas cosas, (c), son cuatro las geodésicas distintas que dan la mínima longitud.

banda de Möbius se obtiene de nuevo una banda de Möbius (con un “collar” en sus bordes), la botella de Klein también puede ser considerada como la superficie que se obtiene al identificar las fronteras de dos bandas de Möbius, obteniéndose la representación plana de esta superficie que se muestra en la Figura 0.14, representación que utilizaremos de esta superficie en este trabajo. En ella, los dos lados horizontales del rectángulo están identificados en paralelos y los verticales de forma antipodal [27].

0.4.5 Posición euclídea

Cuando tratamos con nubes de puntos en superficies, parece intuitivo pensar que si los puntos se encuentran “muy cercanos” unos de otros, el comportamiento del conjunto debe ser muy similar al de un conjunto de puntos en el plano.

Esta intuición queda confirmada en el trabajo de Grima [26], donde un

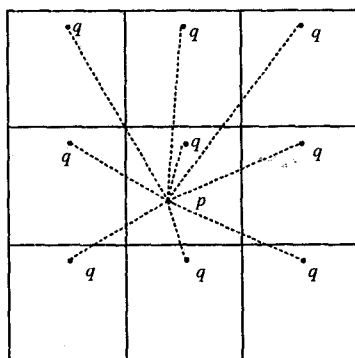


Figura 0.13: La distancia de p a q en el toro, es la longitud de la geodésica más corta que une a p con las nueve copias vecinas a p de q .

exhaustivo estudio de la envolvente convexa de conjuntos de puntos en distintas superficies demuestra que para conjuntos de puntos que se distribuyen en regiones “pequeñas” de las mismas, los algoritmos para el plano son válidos.

Esta idea de “proximidad” de los puntos queda recogida en el concepto de *posición euclídea*.

Diremos que un conjunto de puntos sobre la esfera está en *posición euclídea* cuando esté totalmente contenido en un hemisferio de la misma.

Dado un conjunto de puntos sobre el cilindro con coordenadas, diremos que el conjunto está en *posición euclídea* sobre el cilindro cuando los puntos de V_n estén todos contenidos entre dos generatrices diametralmente opuestas; diremos que V_n está en *posición no euclídea* en otro caso.

Dado un conjunto $V_n = \{P_1, P_2, \dots, P_n\}$ de puntos sobre el toro con coordenadas $P_i = (x_i, y_i)$, diremos que V_n está en *posición euclídea* cuando todos sus puntos estén contenidos entre dos meridianos y dos paralelos diametralmente opuestos, dicho de otra forma, si se puede “dibujar” V_n en un cuadrado de lado $1/2$ contenido en la superficie. Diremos que V_n está en *posición cilíndrica* cuando esté contenido entre dos paralelos ó entre dos

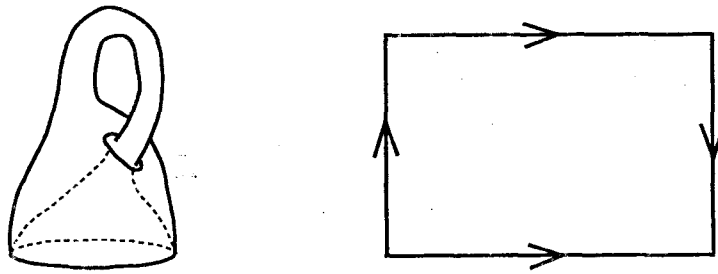


Figura 0.14: Podemos considerar la botella de Klein representada por un rectángulo en el los lados horizontales están identificados en paralelo y los verticales de forma antipodal.

meridianos diametralmente opuestos, es decir, V_n se dibuja en un rectángulo $1 \times 1/2$ ó $1/2 \times 1$ en la superficie.

0.5 Triangulaciones y Peritriangulaciones

A continuación vamos a definir las dos estructuras básicas con las que vamos a trabajar en esta memoria, las triangulaciones y las peritriangulaciones de superficies.

Como hemos comentado en la Introducción, nuestro interés principal en este trabajo es el de considerar el problema de la transformación de triangulaciones, tanto de nubes de puntos como de polígonos, mediante el uso de la operación de flip diagonal. Lo haremos desde dos diferentes puntos de vista: el topológico, en el que la situación de los vértices y la longitud de las aristas no juegan un papel relevante, y el métrico, que viene determinado por el uso de geodésicas de la superficie en cuestión. Comenzamos en primer lugar presentando estas definiciones en el marco topológico.

Recordemos que en el plano, el concepto de triangulación de una nube de puntos coincide topológicamente con el de *grafo plano maximal*, esto es, un grafo con exactamente $3n - 6$ aristas que define una partición topológica de esta superficie en regiones triangulares, donde por n estamos denotando al

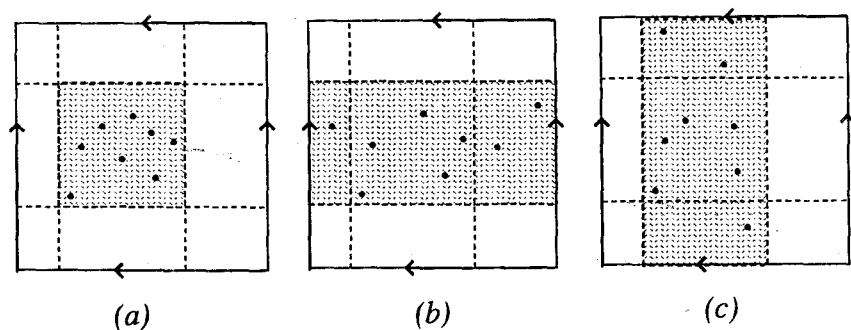


Figura 0.15: (a) Un conjunto en posición euclídea sobre el toro; (b) el conjunto está contenido entre dos paralelos diametralmente opuestos y, por lo tanto, en posición cilíndrica como ocurre también en (c), puesto que en este caso el conjunto está contenido entre dos meridianos diametralmente opuestos.

número de vértices. En este sentido, las aristas son cualquier curva de Jordan uniendo pares de vértices (Figura 0.16 (a)).

Generalizando a cualquier superficie esta definición, una *triangulación topológica* de una superficie cerrada F^2 es una inmersión de un grafo simple en F^2 en la que todas las caras son triangulares y tal que dos cualesquiera de ellas comparten a lo sumo una arista.

Por otra parte, para encontrar una generalización adecuada del concepto de polígono a otras superficies, hemos de realizar previamente una serie de consideraciones. Si bien el interior de un polígono en el plano queda determinado por ser la única región acotada de las dos en las que éste queda dividido por una línea poligonal cerrada y simple, no ocurre así en otras superficies en general. Observemos que, salvo en el plano y en la esfera, una línea poligonal cerrada y simple en una superficie puede ser homotópicamente nula (línea poligonal *trivial*) o no serlo (línea poligonal *esencial*). En el primero de los casos, la superficie queda dividida en dos regiones por la poligonal, una de las cuales es homeomorfa a un disco abierto y otra que generalmente no lo es, excluyendo, claro está, el caso de la esfera, que queda dividida en dos regiones 2-celulares. Por ejemplo, una de las regiones de las dos en las que el toro queda dividido por una poligonal trivial

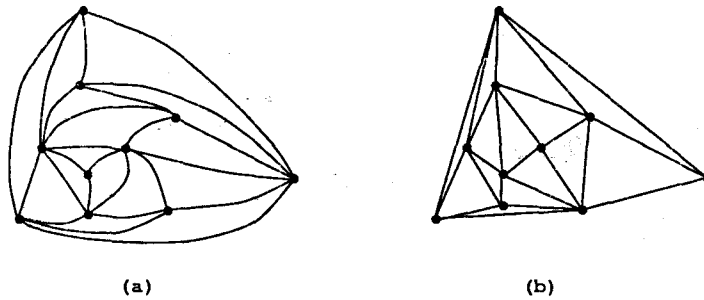


Figura 0.16: Una triangulación topológica (a) y una métrica (b) de una nube de puntos en el plano.

es homeomorfa al *wedge* de dos circunferencias (i.e., dos circunferencias unidas por un punto).

Topológicamente, triangular la región 2-celular delimitada por una poligonal trivial en una superficie, es similar a triangular un polígono en el plano, por lo que este caso no presenta interés para nuestro objetivo.

Definimos por tanto un *polígono topológico* de n vértices en una superficie cerrada F^2 como la región no homeomorfa a un disco abierto acotada por un ciclo de longitud n . De esta forma, una *triangulación* de un polígono topológico en F^2 puede ser definida como una inmersión de un grafo simple en F^2 , en la que existe una cara 2-celular donde se encuentran todos los vértices (el borde del polígono) y en la que el resto de las caras son todas triangulares (Figura 0.17). Habitualmente, llamaremos *peritriangulaciones* a estas triangulaciones de polígonos topológicos. A la cara 2-celular donde se encuentran todos los vértices la llamaremos *cara exterior* por analogía con el caso plano y la denotaremos por C_E . Apuntamos aquí que no consideraremos en esta memoria una generalización topológica de polígonos que queden delimitados por dos ciclos esenciales, sin embargo, como veremos más adelante, éstos sí serán considerados desde un punto de vista métrico.

En este contexto topológico, si denotamos por T a una triangulación de una superficie cerrada F^2 o de un polígono de n vértices en F^2 , definimos la

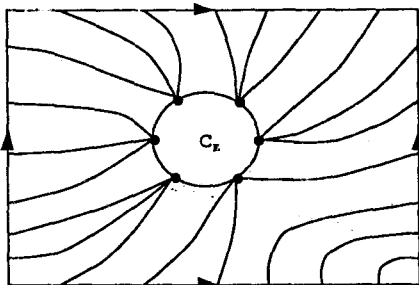


Figura 0.17: Una triangulación de un polígono topológico de 6 vértices en el toro, o equivalentemente, una peritriangulación tórica de 6 vértices.

operación de *flip diagonal* como sigue. Sea $v_i v_j$ una arista de T y $\{v_i, v_j, v_k\}$ y $\{v_i, v_j, v_l\}$ los vértices de las caras de T que comparten la arista $v_i v_j$ (observemos que si T es la triangulación de un polígono en F^2 , estamos exigiendo que $v_i v_j$ no pertenezca a la frontera de la cara exterior). El *flip* de la arista $v_i v_j$ es *realizable* si v_k y v_l no son vértices adyacentes y en este caso, la operación de *flip diagonal* sobre la arista $v_i v_j$ consiste en eliminarla de T y sustituirla por la arista $v_k v_l$ (ver Figura 0.18).

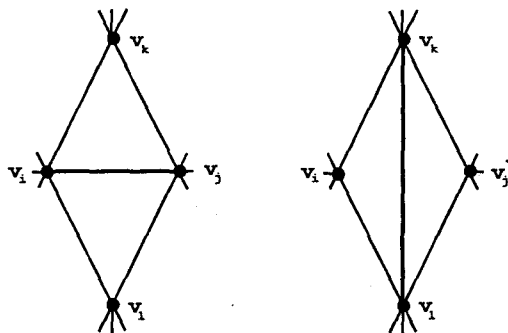


Figura 0.18: Un flip diagonal.

Si denotamos por \mathcal{T}_n al conjunto de triangulaciones de n vértices de una

superficie F^2 , definimos el *grafo de triangulaciones* de n vértices en F^2 , $G_{\mathcal{T}_n}$, como aquel cuyo conjunto de vértices son los elementos de \mathcal{T}_n y en el que dos triangulaciones son adyacentes si se pueden transformar entre sí mediante un flip diagonal.

Igualmente, si denotamos por \mathcal{P}_n al conjunto de las triangulaciones de un polígono de n vértices en una superficie F^2 , definimos el *grafo de peritriangulaciones* de n vértices en F^2 , $G_{\mathcal{P}_n}$, como aquel cuyo conjunto de vértices son los elementos de \mathcal{P}_n y en el que dos triangulaciones son adyacentes si se pueden transformar entre sí mediante un flip diagonal.

Otra operación que utilizaremos a menudo en este trabajo es la de *contracción* de una arista, tanto en triangulaciones de superficies como en triangulaciones de polígonos topológicos.

Dada una triangulación T de una superficie F^2 y una arista $e = ac$ de T compartida por dos caras triangulares abc y acd , la *contracción* de e (o simplemente *contraer* e) consiste en identificar los vértices finales a y c de e y reemplazar las aristas múltiples $\{ab, ad\}$ y $\{cb, cd\}$ por dos aristas simples, respectivamente (ver Figura 0.19). Diremos que e es *contractible* si el grafo obtenido de T al contraer e es simple. Diremos también que una triangulación T es *contractible* a otra triangulación T' si T puede ser transformada en T' mediante una secuencia de contracciones de aristas. Una triangulación sin aristas contractibles se dirá *irreducible*.

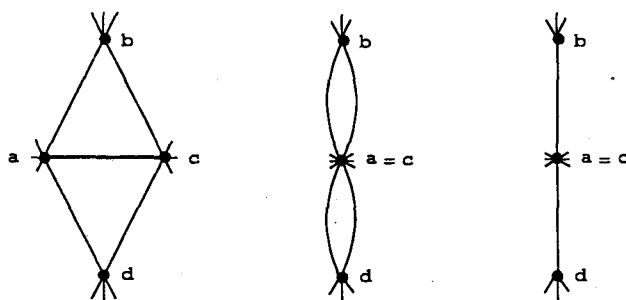


Figura 0.19: Una contracción de arista en una triangulación.

Por otra parte, dada una triangulación T de un polígono en una superficie F^2 y $e = ac$ una arista de la frontera de la cara exterior, $e \in \partial(C_E)$, que forma parte del triángulo abc , la *contracción* de e (o simplemente *contraer* e) consiste en identificar los vértices finales a y c de e y reemplazar la arista múltiple $\{ab, cb\}$ por una arista simple (ver Figura 0.20). Diremos que e es *contractible* si el grafo obtenido de T al contraer e es simple. Diremos también que una triangulación T de un polígono es *contractible* a otra T' , si T puede ser transformada en T' mediante una secuencia de contracciones de aristas. Una triangulación de un polígono que no posea aristas contractibles se dirá *irreducible*.

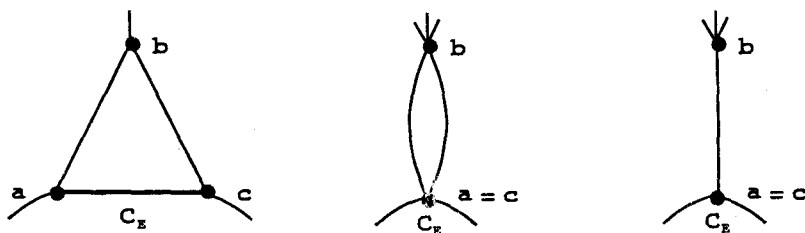


Figura 0.20: Una contracción de arista en una peritriangulación.

Observemos que la operación de contracción de arista en una peritriangulación se aplica sólo en aristas del borde de la cara exterior, a diferencia de la operación similar definida para triangulaciones de superficies.

Desde un punto de vista métrico, una *triangulación de una nube de puntos* V_n en una superficie F^2 es un conjunto maximal de segmentos (arcos de geodésica de la superficie) uniendo a los puntos del conjunto de dos en dos y de forma que no se intersequen entre sí, salvo a los más, en sus puntos finales. En el plano, esta definición coincide con la de una subdivisión de la envolvente convexa $\mathcal{CH}(V_n)$ en regiones triangulares con interiores disjuntos (Figura 0.16 (b)), sin embargo, esta coincidencia no es cierta en general en otras superficies, como veremos en capítulos posteriores.

Diremos que el *flip* de una arista e de una triangulación métrica T de V_n es *realizable* si e es compartida por dos triángulos t_i y t_j de T cuya unión es un

cuadrilátero convexo $C = t_i \cup t_j$. La operación de *flip diagonal* sobre la arista e consiste en eliminar e de T y reemplazarla por la otra diagonal del cuadrilátero C (ver Figura 0.18). En la definición anterior, entendemos por *polígono convexo* en una superficie aquel en el que un segmento uniendo cualquier par de puntos del polígono queda contenido en el interior del polígono, aunque en general este concepto no vaya unido a un criterio sobre ángulos convexos en los vértices del polígono como ocurre en el plano.

Como hemos comentado anteriormente, existen superficies en las que las triangulaciones de una nube de puntos no dividen en regiones triangulares a toda la envolvente convexa del conjunto sino a un subdominio de ésta, que ni siquiera tiene por qué ser el mismo para todas las triangulaciones del conjunto.

Dado un conjunto V_n de puntos en una superficie F^2 cuyas triangulaciones dividan en regiones triangulares a una misma región de la superficie, podemos definir el *grafo de triangulaciones* de V_n de forma análoga a como se ha hecho para triangulaciones topológicas superficies.

A la hora de generalizar métricamente el concepto de polígono a otras superficies, hemos de hacer hincapié en que, si bien desde un punto de vista topológico triangular una región 2-celular en una superficie es equivalente a triangular un polígono en el plano, no ocurre así cuando consideramos triangulaciones métricas, ya que al tratar con geodésicas de la superficie, pueden existir segmentos uniendo pares de puntos que sean exteriores a la región 2-celular.

Visto que esta situación sí presenta interés al contrario de lo que ocurre para triangulaciones topológicas, definimos un *polígono euclídeo* en una superficie como la región homeomorfa a un disco abierto acotada por una línea poligonal trivial. En el caso de la esfera, puesto que una línea poligonal trivial divide a la superficie en dos regiones 2-celulares, habremos de especificar cuál de ellas consideramos como interior del polígono.

Por otra parte, definimos un *polígono esencial* como la región delimitada por dos líneas poligonales esenciales de la superficie. Estos polígonos sólo serán considerados en este trabajo en la superficie cilíndrica.

Una *triangulación* de un polígono, tanto euclídeo como esencial, es una

partición del interior del polígono en regiones triangulares mediante diagonales que sólo se intersectan, a lo sumo, en sus vértices finales. Para ambos tipos de polígonos, la operación de flip diagonal y el grafo de triangulaciones asociado se definen de forma similar a como se hizo para triangulaciones de una nube de puntos anteriormente.

Capítulo 1

Triangulaciones topológicas del toro

En este capítulo demostramos que cualesquiera dos triangulaciones de un polígono topológico de n vértices en el toro se pueden transformar entre sí mediante una secuencia de flips diagonales, salvo homeomorfismo, hecho que establece la conexión del grafo de peritriangulaciones de un polígono en esta superficie. Este problema ya fue resuelto en el plano por Wagner [68] en 1963 y muy recientemente, Edelman y Reiner [17] han demostrado un resultado similar para polígonos topológicos en el plano proyectivo.

La mayoría de los resultados obtenidos son válidos salvo homeomorfismo de inmersiones. Sin embargo, si bien la más conocida descripción combinatoria de las inmersiones de grafos en superficies, los sistemas de rotación, garantiza la unicidad salvo homeomorfismo, desde muchos puntos de vista es más práctica, e incluso más intuitiva, la unicidad salvo isotopía. Así, en la primera sección de este capítulo, presentamos una descripción combinatoria de las inmersiones tóricas que garantiza la unicidad salvo isotopía. La herramienta fundamental que utilizaremos para ello será la existencia y clasificación de los nudos tóricos.

1.1 Introducción

A la hora de describir combinatoriamente una inmersión de un grafo en una superficie, tradicionalmente en Teoría de Grafos, se ha recurrido a los sistemas de rotación. Recordemos que un *sistema de rotación* en un grafo es una asignación de una lista ordenada a cada vértice, única salvo permutación cíclica, de las aristas incidentes en ese vértice [27]. Es evidente que la asignación de un orden cíclico al conjunto de aristas incidentes en cada uno de los vértices de un grafo, nos permite construir una inmersión del mismo en una superficie. Para ello bastará representar cada vértice por un punto del cual parten rayos etiquetados, por ejemplo en el sentido de las agujas del reloj (sentido negativo), de acuerdo a la rotación asignada a ese vértice.

Esta idea fue implícitamente recogida por Heffter en 1891 y Ringel [51, 52, 53] la utilizó frecuentemente en los años cincuenta. Posteriormente, Edmonds [19], que aparentemente desconocía estos trabajos anteriores, esbozó la primera versión del resultado que recoge la relación entre ambos conceptos y fue Stahl [62] quien finalmente, en 1978 publicó la primera prueba formal del resultado que enunciamos a continuación.

Teorema 1.1.1. [62] *Todo sistema de rotación de un grafo G define (salvo homeomorfismo de inmersiones) una única inmersión localmente orientada $\phi : G \rightarrow F^2$. Recíprocamente, cualquier inmersión localmente orientada $\phi : G \rightarrow F^2$ define un sistema de rotación para G .*

Ya hemos visto cómo el sistema de rotación de un grafo nos permite obtener una inmersión del mismo en una superficie; de hecho, el resultado anterior demuestra que podemos obtener un número infinito de ellas, todas homeomorfas entre sí.

Sin embargo, existen inmersiones de un mismo grafo en una superficie que, si bien son homeomorfas y proceden del mismo sistema de rotación, presentan un aspecto tan distinto a la vista que a veces necesitan ser tratadas como diferentes como es el caso de las inmersiones mostradas en la Figura 1.1.

Imaginemos una inmersión en la que los vértices están unidos mediante gomas elásticas; parece intuitivo pensar que el hecho de estirar o encoger las

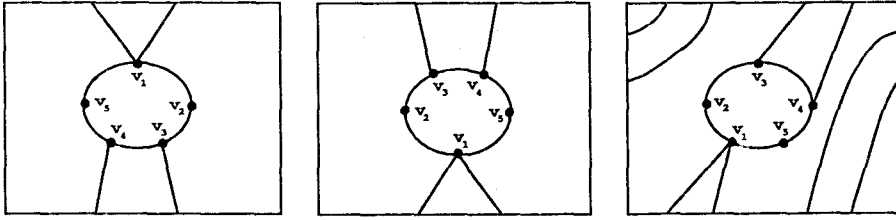


Figura 1.1: Tres inmersiones tóricas homeomorfas de un grafo G .

gomas (nunca cortarlas) no hace variar de forma intrínseca el carácter de la inmersión. Esta idea de “igualdad” de inmersiones en función del parecido entre sus dibujos la recoge el concepto de isotopía ambiente, ya definido en el capítulo de Preliminares de esta memoria.

Puesto que el sistema de rotación de un grafo no caracteriza por sí sólo las clases de isotopía ambiente de las inmersiones, nuestro objetivo en la primera parte de este capítulo será buscar otra clase de invariante de tipo combinatorio, que al igual que hacía el sistema de rotación con las inmersiones homeomorfas, refleje las clases de isotopía de las inmersiones tóricas.

Una primera restricción que permite simplificar nuestra tarea viene dada por la observación de que en la esfera la unicidad salvo isotopía coincide con la unicidad salvo homeomorfismo. Por lo tanto, si tenemos varias caras cuya unión es homeomorfa a un disco cerrado, el sistema de rotación define perfectamente dichas caras. En consecuencia, podemos suponer que no se da dicho caso y que disponemos de una cara destacada, tal que cualquier otra al unirla con ella contiene curvas esenciales; tampoco nos interesa el caso de caras que solamente contengan a uno de los dos generadores del toro (paralelos y meridianos) puesto que cortando por dichas curvas obtendríamos una inmersión en el cilindro, donde de nuevo nos encontramos con una situación fácil de resolver. Además, por tratarse de un problema topológico, podemos suponer que todos los vértices están en esta cara destacada. A las inmersiones que se encuentren en las condiciones anteriormente descritas las llamaremos *peritóricas* y daremos una descripción combinatoria de cada una de sus caras.

Más concretamente, y recogiendo esta idea, vamos a utilizar como herramienta fundamental un tipo muy especial de curvas de las cuales se conoce una caracterización completa en el toro, los nudos tóricos. Esto nos permitirá asociar a cada inmersión peritórica un conjunto de polinomios (uno por cada cara de la inmersión) que la caractericen, salvo isotopía ambiente. Es fundamental subrayar la importancia que tienen los nudos tóricos en nuestra caracterización; en general, un nudo es cualquier homeomorfismo de la circunferencia unidad en \mathbf{R}^3 y es evidente que no todos ellos admiten una inmersión en cualquier superficie; de hecho, únicamente se conoce una clasificación para los nudos que admiten una inmersión en el toro [56] y esto nos proporciona una poderosa herramienta de trabajo en esta superficie y no en otras.

En la segunda parte de este capítulo nos centramos en el estudio de la conexión del grafo de triangulaciones de los polígonos topológicos en el toro.

Recordemos que la definición de triangulación de un polígono topológico, dada en el capítulo de Preliminares, generaliza a cualquier superficie el concepto de inmersión de un grafo periplano maximal. Más concretamente, una triangulación de un polígono topológico en el toro es una inmersión de un grafo simple en esta superficie en la que existe una cara 2- celular donde se encuentran todos los vértices y el resto de las caras son triangulares.

En esta sección demostramos que cualesquiera dos triangulaciones de un polígono topológico de n vértices en el toro se pueden transformar entre sí mediante una secuencia de flips diagonales, salvo homeomorfismo, utilizando argumentos que dependen fuertemente de la topología de la superficie tórica. Obtenemos también una versión de este resultado para polígonos etiquetados.

A lo largo de esta sección y para abreviar, llamaremos *peritriangulación tórica de n vértices* a cualquier triangulación de un polígono topológico de n vértices en el toro.

1.2 Clases de isotopía de inmersiones peritóricas

Esta sección la dedicaremos a presentar una descripción combinatoria de las clases de isotopía ambiente de inmersiones peritóricas, asociando a cada clase un conjunto de polinomios que la determinan unívocamente. Para ello hacemos uso de un tipo particular de curvas cuya clasificación se conoce completamente en el toro, los nudos tóricos.

Como ya hemos comentado en la introducción de este capítulo, el concepto de homeomorfismo de inmersiones no recoge la idea intuitiva de “igualdad” entre sus dibujos. Recurrimos por tanto a la definición que formaliza esta idea, la isotopía ambiente, que ya se introdujo en el capítulo de Preliminares.

La relación de isotopía ambiente es de equivalencia en el conjunto de las inmersiones peritóricas. Con esta definición, las tres inmersiones de la Figura 1.1 son distintas entre sí, ya que pertenecen a diferentes clases de isotopía ambiente (no se pueden deformar continuamente las unas en las otras); este ejemplo demuestra que, si bien conocer el sistema de rotación de un grafo nos permite determinar cada clase de equivalencia por homeomorfismo, no resulta suficiente para determinar una inmersión del mismo salvo isotopía ambiente. Buscamos, por tanto, otro clase de invariante de tipo combinatorio, que al igual que hacía el sistema de rotación con las inmersiones homeomorfas, refleje las clases de isotopía de las inmersiones peritóricas.

Vamos a utilizar como herramienta fundamental un tipo muy especial de curvas de las cuales se conoce una caracterización completa en el toro, los nudos tóricos. Esto nos permitirá asociar a cada inmersión peritórica un conjunto de polinomios (uno por cada cara de la inmersión) que la caractericen, salvo isotopía ambiente.

A lo largo de esta sección y para abreviar, entenderemos por una inmersión $\phi : G \rightarrow T^2$ cualquier elemento de su clase de isotopía ambiente y diremos que dos inmersiones son distintas si pertenecen a distintas clases de isotopía ambiente.

1.2.1 Nudos tóricos.

Comenzamos definiendo el concepto de nudo tórico y demostrando algunos resultados de tipo algebraico que nos serán de utilidad. Posteriormente, para cada una de las caras C de una inmersión peritórica, haremos un estudio detallado de los nudos contenidos en la región $C^+ = C \cup C_E$, región que resulta de eliminar los bordes comunes a las caras C y C_E .

Si consideramos las dos inmersiones peritóricas de la Figura 1.2, podemos ver que las regiones $C_i^+ = C_i \cup C_E$, $i = 1, 2$, contienen diferentes tipos de curvas simples y cerradas. Por ejemplo, la región C_1^+ contiene una curva que gira alrededor de un paralelo y dos meridianos así como otra curva que gira sólo alrededor de un meridiano; en cambio, la región C_2^+ contiene sólo una curva de este último tipo. Parece por tanto, que las curvas cerradas y simples contenidas en cada región $C^+ = C \cup C_E$ diferencian en algún sentido a dos inmersiones. Pasemos entonces a formalizar este concepto que, tal y como comprobaremos más adelante, se concretará en un invariante que refleja la topología de cada inmersión.

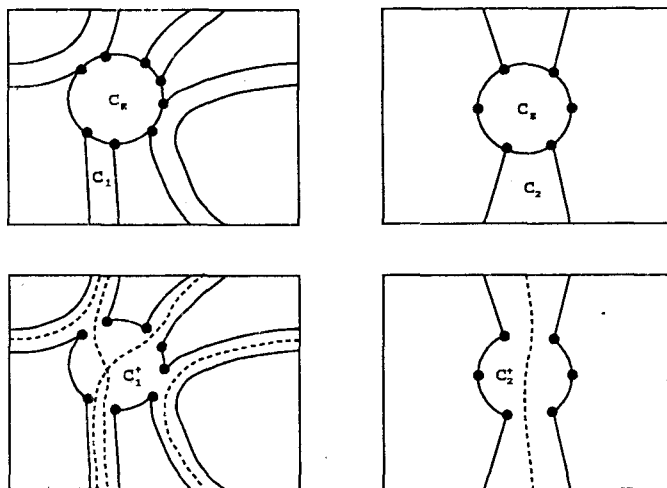


Figura 1.2: Diferentes curvas en la unión de una cara y la cara exterior.

Una curva simple y cerrada en el toro se llama habitualmente un *nudo tórico*,

que formalmente es un homeomorfismo $l: S^1 \rightarrow T^2$, donde por S^1 estamos denotando a la circunferencia unidad en \mathbf{R}^2 [24]. El conjunto de curvas homotópicas a l constituye una clase de equivalencia $[l]$ que es un elemento del grupo fundamental del toro $\pi_1(T^2)$ y como tal admite unas coordenadas $\langle p, q \rangle$ respecto de sus dos generadores. Geométricamente este par de enteros describe el número de paralelos y de meridianos por los que la curva gira. Más aún, el siguiente teorema muestra que p y q no pueden tomar cualquier valor.

Teorema 1.2.1. [24] *Un par de enteros $\langle p, q \rangle$ representa las coordenadas de la clase de homotopía de un nudo tórico $l: S^1 \rightarrow T^2$ en $\pi_1(T^2)$ si y sólo si, $p = q = 0$ o bien $m.c.d.(p, q) = 1$.*

A lo largo de esta sección sólo consideraremos nudos homotópicamente no nulos ($p, q \neq 0$), puesto que estos no serán relevantes para nuestra caracterización. Si fijamos inicialmente un sentido de recorrido para los paralelos y los meridianos (ver Figura 1.3) y restringimos nuestro estudio a valores positivos de p y q (por tanto $1 \leq p < q$), cualquier $p - q$ -nudo admite una representación ascendente en el toro, en el sentido de que su trayectoria siempre se recorre de izquierda a derecha y de abajo a arriba, tal y como muestra la Figura 1.4, en la que hemos situado un sistema de referencia en los márgenes superior y derecho del toro para numerar a los paralelos y los meridianos alrededor de los cuales gira el nudo.

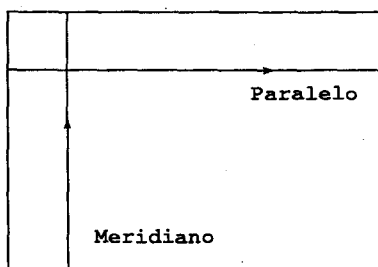


Figura 1.3: Fijamos un sentido de recorrido en los generadores del toro.

Es conocido que Zieschang et al. [71] establecieron la coincidencia entre las clases de homotopía y de isotopía ambiente de los nudos tóricos

homotópicamente no nulos, por lo que en lo que sigue trataremos con clases de isotopía de nudos.

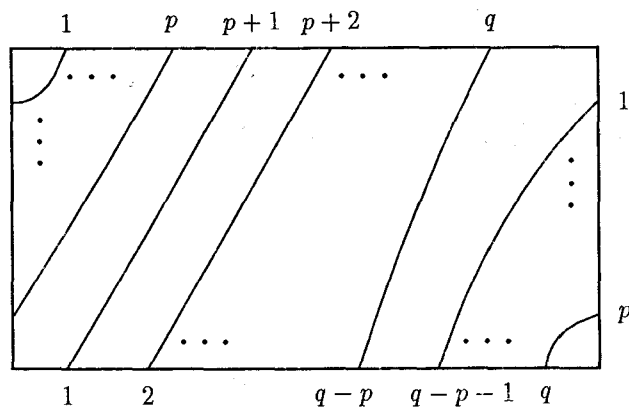


Figura 1.4: Trayectoria de un nudo en el toro.

Observemos que dos nudos tóricos que pertenezcan a la misma clase de isotopía ambiente en el toro pueden no ser ambiente isotópicos en una región R que los contenga, como ocurre en la Figura 1.5, en la que no es posible deformar continuamente l_1 en l_2 sin atravesar la frontera de R . Puesto que nuestro objetivo es asociar a cada cara C de una inmersión peritórica un polinomio que construiremos a partir de los nudos contenidos en la región C^+ , nos interesa considerar las clases de isotopía ambiente de los nudos en dicha región.

Mientras no exista confusión entenderemos por un nudo en una región R , $l: S^1 \rightarrow R \subseteq T^2$, cualquier elemento de su clase de isotopía ambiente en R y diremos que dos nudos son distintos en R si pertenecen a distintas clases de isotopía ambiente en R , aunque pertenezcan a la misma en T^2 . Además, si l gira alrededor de p paralelos y q meridianos con $1 \leq p < q$, diremos que l es un p - q -nudo.

Lema 1.2.1. *Sea C una cara de una inmersión peritórica $i: G \rightarrow T^2$. Si $C^+ = C \cup C_E$ contiene un $p_1 - q_1$ -nudo y un $p_2 - q_2$ -nudo, con $p_2 \leq p_1 < q_1 \leq q_2$, entonces C^+ también contiene un $p_1 - q_2$ -nudo.*

Demostración: Si la región C^+ contiene un $p_1 - q_1$ -nudo, puesto que

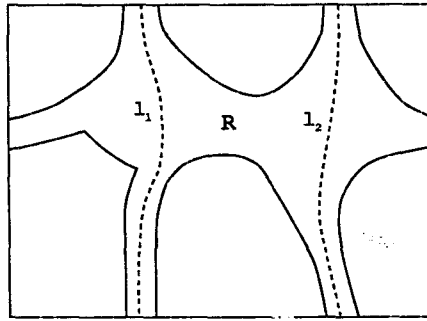


Figura 1.5: l_1 y l_2 son isotópicas en el toro pero no en la región R .

estamos considerando inmersiones 2-celulares, la cara C debe girar al menos alrededor de p_1 paralelos. Igualmente, como C^+ contiene un $p_2 - q_2$ -nudo, la cara C debe girar al menos alrededor de q_2 meridianos. Estos p_1 paralelos y q_2 meridianos alrededor de los cuales gira la cara C son precisamente los generadores del toro por los que gira el $p_1 - q_2$ -nudo buscado. \triangle

El resultado anterior nos permite dar la siguiente definición. Consideremos una cara C de una inmersión peritórica $i : G \rightarrow T^2$ y sean

$$p = \max\{p_i / C^+ \text{ contiene un } p_i - q_i \text{-nudo, con } q_i > p_i\} \text{ y}$$

$$q = \max\{q_i / C^+ \text{ contiene un } p - q_i \text{-nudo}\}.$$

Llamaremos al par (p, q) , el *par dominante* de la cara C y en virtud del Lema 1.2.1, este par está bien definido. Además, nos informa de la existencia de un $p - q$ -nudo en C^+ y de que cualquier otro $k - s$ -nudo en esta región recorre un número $k \leq p$ de paralelos y $s \leq q$ de meridianos.

Si C^+ contiene un $p - q$ -nudo, también debe contener a una banda cerrada que lo rodee (ver Figura 1.6) y por tanto la cara exterior C_E y la cara C se intersectan entre sí según unos de los tres casos dibujados en la Figura 1.7, es decir, el número de componentes conexas de $\partial(C_E) \cap \partial(C)$ puede ser dos, tres o cuatro. Dependiendo de este número de componentes, diremos que C es una *2-cara*, *3-cara* o *4-cara* de la inmersión, respectivamente.

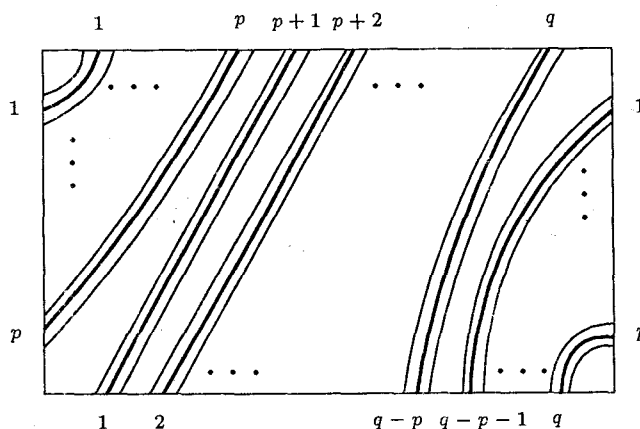


Figura 1.6: Banda que contiene a un nudo.

A lo largo de esta sección determinaremos todos los nudos contenidos en la región C^+ suponiendo conocido el par dominante de la cara C . Para ello distinguiremos tres casos, en función del tipo de cara que sea C .

Nudos en 4-caras.

Comenzamos esta sección estableciendo algunos resultados relativos a ciertas ecuaciones diofánticas que nos serán de utilidad más adelante. Recordemos en primer lugar que si p y q son primos entre sí, existen dos enteros α y β tales que $\alpha p + \beta q = 1$ (identidad de Bezout). Más aún, α' y β' también satisfacen la igualdad $\alpha' p + \beta' q = 1$ si y sólo si, $\alpha' = \alpha + nq$ y $\beta' = \beta - np$ para algún entero n .

Consideremos ahora las siguientes ecuaciones diofánticas donde $2 < p < q$:

$$kq = sp + 1 \quad (1.1)$$

$$kq = sp - 1 \quad (1.2)$$

$$kq = sp + 2 \quad (1.3)$$

$$kq = sp - 2 \quad (1.4)$$

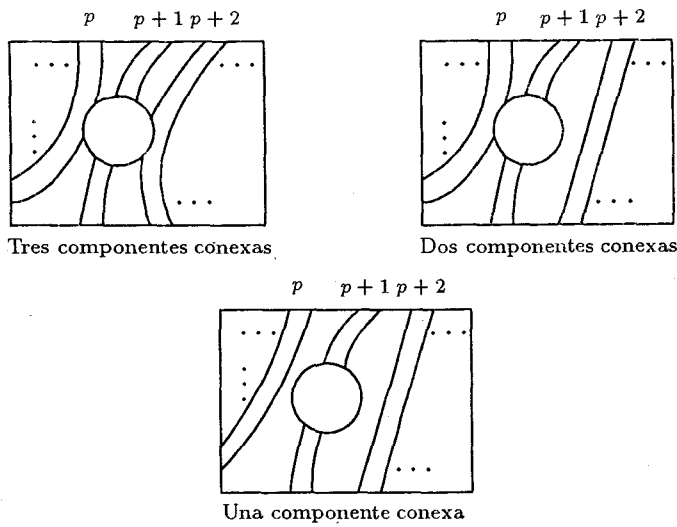


Figura 1.7: Tipos de cara según el número de componentes cónexas de $\partial(C_E) \cap \partial(C)$.

Lema 1.2.2. *Existe un único par (k_i, s_i) solución de la ecuación (1.i) con $1 \leq k_i \leq p$; $1 \leq s_i \leq q$; $k_i \leq s_i$, para $i = 1, \dots, 4$. En particular, $1 < s_i < q$ y $k_i < s_i$ para $i = 2, 4$. Además,*

$$a) k_1 < k_3 \iff k_3 = 2k_1$$

$$b) k_2 < k_4 \iff k_4 = 2k_2$$

$$c) k_3 \neq 2k_1 \iff k_4 = 2k_2$$

Demostración: Es trivial a partir de la identidad de Bezout, que todas las ecuaciones anteriores tienen infinitas soluciones.

Sea (k_0, s_0) una solución cualquiera de la ecuación 1.1; entonces, todas las demás soluciones son de la forma $(k, s) = (k_0 + np, s_0 + nq)$ con $n \in \mathbf{Z}$.

Veamos que existe un único valor de n para el cual k y s están en el intervalo requerido. Puesto que k_0 no es múltiplo de p (si $k_0 = hp$ con $h \in \mathbf{Z}$, entonces $s_0 = hq - \frac{1}{p} \in \mathbf{Z} \iff p = 1$), k_0 pertenece a algún intervalo entero

$(hp, (h+1)p) \cap \mathbf{Z}$ con $h \in \mathbf{Z}$ ($\implies s_0 = \frac{k_0 q - 1}{p} \in (hq - \frac{1}{p}, (h+1)q - \frac{1}{p}) \cap \mathbf{Z}$) y por tanto $k = k_0 + np \in ((h+n)p, (h+n+1)p) \cap \mathbf{Z}$. El valor $n = -h$ es el

único para el cual k está en el intervalo $(0, p) \cap \mathbf{Z}$, o equivalentemente, el único que hace que se verifique $1 \leq k < p$. Para $n = -h$, se obtiene que $0 \leq s < q$, pero si $s = 0$, debe ser $kq = 1$ para que se verifique la ecuación, y esto implicaría que $q = 1$, lo cual contradice nuestras hipótesis. Concluimos entonces que $1 \leq s < q$ y que el par (k, s) que verifica $kq = sp + 1$ con $1 \leq k < p$ y $1 \leq s < q$ es único.

Utilizando un razonamiento análogo al anterior se demuestra la existencia y unicidad de las soluciones (k_i, s_i) para $i = 2, 3, 4$ con $1 \leq k_i < p$ y $1 \leq s_i < q$.

Veamos ahora que $k_i \leq s_i$ para $i = 1, \dots, 4$.

- $k_1q = s_1p + 1 < s_1q + 1$ (ya que $2 < p < q$)
 $\implies k_1q < s_1q + 1 \implies (k_1 - s_1)q \leq 0 \implies k_1 - s_1 \leq 0 \implies k_1 \leq s_1$.
- $k_2q = s_2p - 1 < s_2q - 1 \implies (k_2 - s_2)q < -1 < 0 \implies k_2 < s_2$.
- $k_3q = s_3p + 2 < s_3q + 2 \implies (k_3 - s_3)q < 2 \implies (k_3 - s_3)q \leq 1$. Pero la igualdad no se da porque $q > 1$, luego $(k_3 - s_3)q \leq 0 \implies k_3 \leq s_3$.
- $k_4q = s_4p - 2 < s_4q - 2 \implies (k_4 - s_4)q < -2 < 0 \implies k_4 < s_4$.

Demostremos a continuación la segunda parte del resultado.

- a) Supongamos en primer lugar que $k_1 < k_3$; si restamos las ecuaciones 1.1 y 1.3 obtenemos la expresión $(k_3 - k_1)q = (s_3 - s_1)p + 1$. Por tanto el par $(k_3 - k_1, s_3 - s_1)$ es una solución de la ecuación 1.1 y además $1 \leq k_3 - k_1 \leq p$ y $1 \leq s_3 - s_1 \leq q$ por lo que, debido a la unicidad de solución se tiene que $k_3 = 2k_1$ y que $s_3 = 2s_1$. La condición suficiente se verifica de forma trivial ya que $k_3 = 2k_1 > k_1$.
- b) La demostración de este apartado es análoga a la del apartado anterior sin más que considerar las ecuaciones 1.2 y 1.4.
- c) Puesto que $k_1 \neq k_2$, supongamos $k_1 > k_2$; restando las ecuaciones 1.1 y 1.2 se obtiene la expresión $(k_1 - k_2)q = (s_1 - s_2)p + 2$. Por tanto el par $(k_1 - k_2, s_1 - s_2)$ es una solución de la ecuación 1.3 y además $1 \leq k_1 - k_2 \leq p$ y $1 \leq s_1 - s_2 \leq q$ por lo que debe coincidir con (k_3, s_3) y así, $k_3 = k_1 - k_2 < k_1 < 2k_1$ por lo que $k_3 < 2k_1$.

Veamos ahora que $k_4 = 2k_2$ o equivalentemente, por el apartado anterior, veamos que $k_2 < k_4$. Por reducción al absurdo, si suponemos $k_4 < k_2$ (la igualdad no puede darse), restando las ecuaciones 1.2 y 1.4 y razonando como antes, debe ser $k_1 = k_2 - k_4$ y $s_1 = s_2 - s_4$. Pero $k_1 < k_2 - k_4 < k_2$ y $k_2 < k_1$ por hipótesis, por lo que se llegaría a que $k_1 < k_1$ que es una contradicción.

De manera análoga se demuestra que si $k_1 < k_2$, entonces $k_4 \neq 2k_2$ y que $k_3 = 2k_1$.

△

En lo que sigue, denotaremos por (k_i, s_i) a la única solución de la ecuación 1.i, para $i = 1, \dots, 4$, que se encuentra en las condiciones del Lema 1.2.2, una vez fijados los valores de p y q .

El lema anterior nos ayudará a simplificar los cálculos para determinar los nudos contenidos en una 4-cara C de una inmersión peritórica $\phi : G \rightarrow T^2$ cuyo par dominante sea (p, q) con $2 < p < q$. Los casos $p = 1$ y $p = 2$ serán estudiados de forma particular al final de esta sección.

Si C es una 4-cara de una inmersión peritórica tal que C^+ contiene un $k-s$ -nudo, donde $1 \leq k \leq p$ y $1 \leq s \leq q$, este atravesará la cara exterior según alguna de las trayectorias que se muestran en la Figura 1.8. Las siguientes proposiciones son el resultado de distinguir esta casuística.

Proposición 1.2.1. *Sea C una 4-cara de una inmersión peritórica $\phi : G \rightarrow T^2$ cuyo par dominante es (p, q) , con $2 < p < q$. Entonces,*

C^+ contiene dos $k_1 - s_1$ -nudos¹ $\iff m.c.d.(k_1, s_1) = 1$.

Demostración: Consideremos una curva contenida en C^+ que atraviese la cara exterior según el Caso 1 de la Figura 1.8; esta curva girará alrededor de k paralelos y s meridianos con $1 \leq k \leq p$ y $1 \leq s \leq q$. Queremos ver qué condiciones deben verificar k y s para que tal curva exista y más aún, para

¹i.e., dos clases de isotopía ambiente de $k_1 - s_1$ -nudos en C^+

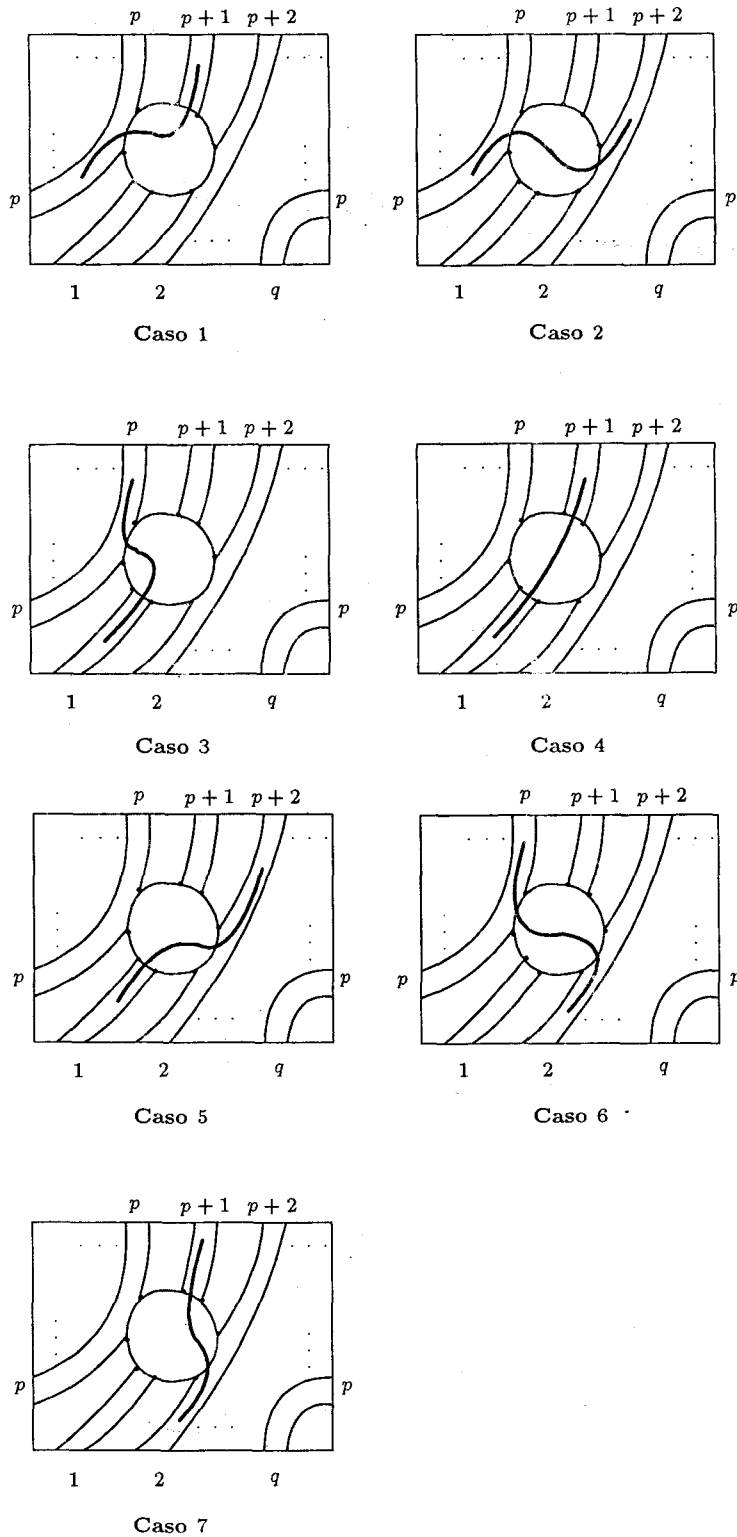


Figura 1.8: Posibles trayectorias al atravesar la cara exterior.

que sea una curva simple, o equivalentemente, un $k - s$ -nudo. Si establecemos el meridiano $1 + p$ como el primero por el que la curva gira (siendo por tanto el meridiano q el último que recorre), la siguiente permutación cíclica describe la trayectoria completa de la curva por meridianos:

$$(1 + p, 1 + 2p, \dots, h_1, h_1 + p, \dots, h_2, h_2 + p, \dots, h_{k-1}, \dots, h_{k-1} + r_k p)$$

donde

$$\begin{cases} h_0 = 1 \\ h_i = h_{i-1} + r_i p - q \quad i = 1, \dots, k - 1 \\ h_{k-1} + r_k p = q \end{cases}$$

Notemos que el número total de meridianos descritos por la curva es $s = h_1 + \dots + h_k$.

De las expresiones anteriores se obtiene:

$$q = h_{k-1} + r_k p = h_{k-2} + r_{k-1} p - q + r_k p = (r_k + r_{k-1})p - q + h_{k-2} = \dots = (r_k + \dots + r_1)p - (k - 1)q + 1 = sp + (k - 1)q + 1$$

y por tanto, la relación que deben verificar k y s es $kq = sp + 1$, con $1 \leq k \leq p$ y $1 \leq s \leq q$, es decir, el par (k, s) coincide con el anteriormente designado por (k_1, s_1) .

Esto demuestra que C^+ contiene una curva cerrada que recorre k_1 paralelos y s_1 meridianos, pero no tenemos asegurada aún su simplicidad. Desde luego, si la curva se corta a sí misma, el cruce debe producirse en la cara exterior de la inmersión peritórica. Nos preguntamos entonces si la curva, tras describir $k' < k_1$ paralelos y $s' < s_1$ meridianos, gira alrededor del meridiano denotado por 1 adentrándose en la cara exterior y provocando un cruce (el giro alrededor de este meridiano es el único que podría causar problemas, puesto que si la curva describe el meridiano denotado por 2 , el siguiente que recorre es el $2 + p$). Veamos qué condiciones deben cumplir k' y s' . Razonando de igual forma que antes, se tienen las relaciones siguientes:

$$\begin{cases} h_0 = 1 \\ h_i = h_{i-1} + r_i p - q \quad i = 1, \dots, k' - 1 \\ h_{k'-1} + r_{k'} p = 1 + q \end{cases}$$

donde ahora $r_1 + \dots + r_{k'} = s'$.

Deshaciendo las relaciones de recurrencia anteriores obtenemos

$$1 + q = h_{k'-1} + r_{k'}p = h_{k'-2} + r_{k'-1}p - q + r_{k'}p = (r_{k'} + r_{k'-1})p - q + h_{k'-2} = \dots = (r_{k'} + \dots + r_1)p - (k' - 1)q + 1 = s'p + (k' - 1)q + 1$$

y por tanto, la ecuación que k' y s' deben verificar es $k'q = s'p$. Puesto que p y q son primos entre sí y todos los términos de esta igualdad son estrictamente positivos, debe existir un natural $n \geq 1$ tal que $k' = np$ y $s' = nq$ de donde se deduce que $k' \geq p$ y $s' \geq q$. Esto demuestra que no existen k' y s' en las condiciones buscadas, es decir, la curva contenida en C^+ que describe k_1 paralelos y s_1 meridianos es cerrada y simple. Podemos concluir entonces que C^+ contiene una clase de isotopía ambiente de un $k_1 - s_1$ -nudo.

Si consideramos ahora una curva cerrada contenida en C^+ que atraviese la cara exterior según el Caso 5 de la Figura 1.8 y que gire alrededor de k paralelos y s meridianos con $1 \leq k \leq p$ y $1 \leq s \leq q$, las condiciones que deben verificar k y s para que tal curva exista vienen dadas por las igualdades siguientes:

$$\begin{cases} h_0 = 2 \\ h_i = h_{i-1} + r_i p - q & i = 1, \dots, k-1 \\ h_{k-1} + r_k p = q - p + 1 \end{cases}$$

donde $r_1 + \dots + r_k + 1 = s$. Nótese que hemos establecido el meridiano 1 como el primero de la trayectoria siendo por tanto el meridiano $q - p + 1$ el último que se recorre.

Desarrollando las expresiones anteriores se obtiene la ecuación que liga a k y s : $kq = sp + 1$, es decir, de nuevo el par (k, s) coincide con el ya designado por (k_1, s_1) . Al igual que en el caso anterior, nos preguntamos acerca de la simplicidad de esta curva cerrada contenida en C^+ que gira alrededor de k_1 paralelos y s_1 meridianos. ¿Puede ocurrir que, tras describir $k' < k_1$ paralelos y $s' < s_1$ meridianos, gire alrededor del meridiano denotado por 2 adentrándose en la cara exterior y provocando un cruce? Se puede comprobar de forma sencilla utilizando un argumento similar al del caso anterior, que no existen valores de k' y s' en las condiciones requeridas para que esta situación tenga lugar.

El único punto que queda por aclarar es si realmente los dos $k_1 - s_1$ -nudos contenidos en C^+ determinan distintas clases de isotopía ambiente. Esta cuestión ya ha quedado resuelta de forma implícita a lo largo de la demostración ya que mientras que el primero de los nudos no atraviesa en ningún momento el meridiano denotado como 1, el segundo de ellos sí lo hace y por tanto no es posible deformar continuamente un nudo en el otro sin atravesar la frontera de C^+ . △

Proposición 1.2.2. *Sea C una 4-cara de una inmersión peritórica $\phi : G \rightarrow T^2$ cuyo par dominante es (p, q) , con $2 < p < q$. Entonces,*

C^+ contiene dos $k_2 - s_2$ -nudos $\iff m.c.d.(k_2, s_2) = 1$.

Demostración: La demostración de este resultado es similar a la del anterior, simplemente considerando dos curvas cerradas que atraviesen la cara exterior de la inmersión peritórica según las posiciones 3 y 7 de la Figura 1.8. Si denotamos por k al número de paralelos que describen y por s al número de meridianos con $1 \leq k \leq p$ y $1 \leq s \leq q$, las condiciones para que tales curvas existan vienen dadas por las igualdades

$$\begin{cases} h_0 = 0 \\ h_i = h_{i-1} + r_i p - q & i = 1, \dots, k-1 \\ h_{k-1} + r_k p = q - p + 1 \end{cases}$$

con $r_1 + \dots + r_k + 1 = s$ para la curva que atraviesa la cara exterior según el Caso 3 de la Figura 1.8 y

$$\begin{cases} h_0 = 1 \\ h_i = h_{i-1} + r_i p - q & i = 1, \dots, k-1 \\ h_{k-1} + r_k p = q - p + 2 \end{cases}$$

con $r_1 + \dots + r_k + 1 = s$ para la curva que atraviesa la cara exterior según el Caso 7 de la Figura 1.8. Nótese que en el primero de los casos hemos establecido el meridiano 1 como el primero de la trayectoria (siendo por tanto el meridiano $q - p + 1$ el último que se recorre) y en el segundo caso hemos establecido el meridiano 2 como el primero de la trayectoria (siendo ahora el meridiano $q - p + 2$ el último sobre el que gira).

Desarrollando las expresiones anteriores se obtienen las ecuaciones que ligan a k y s y que coinciden en ambos casos, siendo $kq = sp - 1$, es decir, el par (k, s) coincide con el ya designado por (k_2, s_2) .

Al igual que antes se comprueba fácilmente que ambas curvas son simples y que los dos $k_2 - s_2$ -nudos determinan distintas clases de isotopía ambiente. \triangle

Proposición 1.2.3. *Sea C una 4-cara de una inmersión peritórica $\phi : G \rightarrow T^2$ cuyo par dominante es (p, q) , con $2 < p < q$. Entonces,*

- a) C^+ contiene un $k_3 - s_3$ -nudo $\iff k_3 \neq 2k_1$ y $m.c.d.(k_3, s_3) = 1$.
- b) C^+ contiene un $k_4 - s_4$ -nudo $\iff k_4 \neq 2k_2$ y $m.c.d.(k_4, s_4) = 1$.
- c) Las dos condiciones anteriores son mutuamente excluyentes, es decir, C^+ contiene un $k_3 - s_3$ -nudo $\iff C^+$ no contiene un $k_4 - s_4$ -nudo.

Demostración:

- a) Consideremos una curva cerrada contenida en C^+ que atraviese la cara exterior según el Caso 2 de la Figura 1.8 y que gire alrededor de k paralelos y s meridianos con $1 \leq k \leq p$ y $1 \leq s \leq q$. Si establecemos los meridianos $2 + p$ y q como el primero y el último de la trayectoria, respectivamente, se obtienen las siguientes relaciones:

$$\begin{cases} h_0 = 2 \\ h_i = h_{i-1} + r_i p - q & i = 1, \dots, k-1 \\ h_{k-1} + r_k p = q \end{cases}$$

con $r_1 + \dots + r_k = s$. La ecuación que liga a k y s en este caso es $kq = sp + 2$ luego el par (k, s) es el anteriormente denotado por (k_3, s_3) .

Nos preguntamos ahora si la curva, tras describir $k' < k_3$ paralelos y $s' < s_3$ meridianos, gira alrededor del meridiano denotado por 1 adentrándose en la cara exterior y provocando un cruce (ver Figura 1.9). Veamos qué condiciones deben cumplir k' y s' (otro posible cruce podría provocarse si la curva recorriera el meridiano

denotado por 2, pero se comprueba fácilmente que no existen valores de k' y s' en estas condiciones). Razonando de igual forma que antes, se tienen las igualdades siguientes:

$$\begin{cases} h_0 = 2 \\ h_i = h_{i-1} + r_i p - q & i = 1, \dots, k' - 1 \\ h_{k'-1} + r_{k'} p = 1 + q \end{cases}$$

donde $r_1 + \dots + r_{k'} = s'$. Desarrollando las relaciones de recurrencia

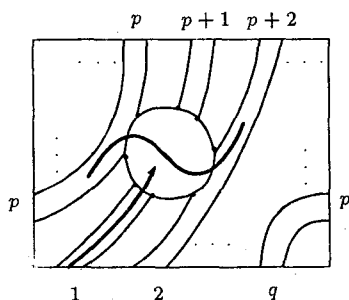


Figura 1.9: Cruce en la cara exterior en el Caso 2.

anteriores se deduce que k' y s' deben verificar la ecuación $k'q = s'p + 1$, es decir, el par (k', s') debe coincidir con el anteriormente denotado por (k_1, s_1) . Por tanto, la curva cerrada contenida en C^+ que gira alrededor de k_3 paralelos y s_3 meridianos es simple si y sólo si $k_1 > k_3$ (i.e. $s_1 > s_3$) y en virtud del Lema 1.2.2 (a) esta condición es equivalente a $k_3 \neq 2k_1$.

- b) Utilizando argumentos similares a los del apartado anterior para una curva cerrada que atravesase la cara exterior según el Caso 6 de la Figura 1.8, se demuestra que C^+ contiene una clase de isotopía ambiente de un $k_4 - s_4$ -nudo si y sólo si $k_4 > k_2$ y por el Lema 1.2.2 (b), esta condición es equivalente a $k_4 \neq 2k_2$.
- c) La demostración de este apartado es trivial utilizando el Lema 1.2.2 (c).

△

Nudos en 3-caras y 2-caras.

Una vez que hemos determinado los nudos contenidos en C^+ cuando C es una 4-cara con par dominante (p, q) , $2 < p < q$, de una inmersión peritórica $\phi : G \rightarrow T^2$, el estudio para los casos de las 3-caras y las 2-caras es una consecuencia inmediata. Cuando consideramos una 3-cara, los nudos contenidos en C^+ sólo pueden atravesar la cara exterior según los Casos 1, 3 y 4 de la Figura 1.8 y si C es una 2-cara, el único nudo contenido en C^+ es el que atraviesa C_E de acuerdo al Caso 4 de la misma Figura 1.8, y corresponde al par dominante (p, q) que suponemos conocido. Esta reflexión nos lleva a enunciar la siguiente proposición.

Proposición 1.2.4. *Sea C una cara de una inmersión peritórica $\phi : G \rightarrow T^2$ cuyo par dominante es (p, q) , con $2 < p < q$; supongamos $m.c.d.(k_1, s_1) = 1$ y $m.c.d.(k_2, s_2) = 1$. Entonces,*

- a) *si C es una 3-cara de la inmersión, C^+ contiene un $k_1 - s_1$ -nudo, un $k_2 - s_2$ -nudo y un $p - q$ -nudo.*
- b) *si C es una 2-cara de la inmersión, C^+ sólo contiene un $p - q$ -nudo.*

Hemos dejado para el final de esta sección el estudio de los nudos contenidos en la región C^+ , cuando C es una cara de una inmersión peritórica cuyo par dominante es $(1, q)$ o $(2, q)$, con $1 < q$ y $2 < q$, respectivamente. La razón es que el Lema 1.2.2, que ha sido fundamental en nuestro estudio anterior, sólo se mantiene para valores de p y q verificando $2 < p < q$. Veamos que siguiendo un razonamiento similar a los utilizados sobre las trayectorias de los nudos, los casos $p = 1$ y $p = 2$ resultan ser muy simples.

Proposición 1.2.5. *Sea C una cara de una inmersión peritórica $\phi : G \rightarrow T^2$ cuyo par dominante es $(1, q)$ con $1 < q$. Entonces,*

- a) *si C es una 4-cara de la inmersión, C^+ contiene dos meridianos, dos $1 - (q - 1)$ -nudos, un $1 - (q - 2)$ -nudo y un $1 - q$ -nudo,*
- b) *si C es una 3-cara de la inmersión, C^+ contiene un meridiano, un $1 - (q - 1)$ -nudo y un $1 - q$ -nudo, y*

c) si C es una 2-cara de la inmersión, C^+ sólo contiene un $1 - q$ -nudo.

Demostración: Los apartados (b) y (c) serán una consecuencia del apartado (a), por lo que supongamos en primer lugar que C es una 4-cara de la inmersión con par dominante $(1, q)$.

Si consideramos una curva en C^+ atravesando la cara exterior como en el Caso 1 de la Figura 1.8, se observa fácilmente que esta curva recorre desde el meridiano denotado por 2 hasta el meridiano q , sucesivamente, por lo que C^+ contiene un $1 - (q - 1)$ -nudo. Lo mismo ocurre para una curva que atraviese la cara exterior según el Caso 5 de la misma Figura, sólo que ahora es el meridiano denotado por 2 el único que la curva no describe. Los Casos 3 y 7 de la Figura 1.8 proporcionan los dos meridianos contenidos en C^+ , ya que la curva atraviesa la cara exterior del meridiano 1 al $p = 1$ en el primer caso, y del meridiano 2 al $p + 1 = 2$ en el segundo.

Si una curva atraviesa la cara exterior como en el Caso 2 de la Figura 1.8, su recorrido comienza en el meridiano 3 y termina en el q , describiéndose todos los meridianos intermedios; como la curva nunca recorre los meridianos 1 y 2, no se puede cortar a sí misma y por tanto C^+ contiene un $1 - (q - 2)$ -nudo.

El Caso 6 de la Figura 1.8 no puede darse si $p = 1$, ya que inicialmente fijamos un sentido ascendente en el recorrido de los nudos y por tanto ninguno de ellos puede recorrer el meridiano denotado por 2 antes que el denotado por 1. Finalmente, el Caso 4 corresponde al par dominante de la cara C , $(1, q)$.

Los apartados (b) y (c) se deducen de considerar que si C es una 3-cara, los nudos contenidos en C^+ sólo pueden atravesar la cara exterior según los Casos 1, 3 y 4 de la Figura 1.8, y si es una 2-cara, sólo según el Caso 4. \triangle

Proposición 1.2.6. *Sea C una cara de una inmersión peritórica $\phi : G \rightarrow T^2$ cuyo par dominante es $(2, q)$ con $1 < q$. Entonces,*

a) si C es una 4-cara de la inmersión, C^+ contiene un meridiano, dos $1 - \frac{q-1}{2}$ -nudos, dos $1 - \frac{q+1}{2}$ -nudos y un $2 - q$ -nudo,

- b) si C es una 3-cara de la inmersión, C^+ contiene un $1 - \frac{q-1}{2}$ -nudo, un $1 - \frac{q+1}{2}$ -nudo y un $2 - q$ -nudo, y
- c) si C es una 2-cara de la inmersión, C^+ sólo contiene un $2 - q$ -nudo.

Demostración: Notemos en primer lugar que, como $2 = p < q$ y p y q son coprimos, entonces q debe ser impar. Al igual que en la proposición exterior, vamos a suponer que C es una 4-cara, ya que los apartados (b) y (c) se deducen de este caso.

Vamos a describir, utilizando permutaciones cíclicas, el recorrido por meridianos de una curva contenida en C^+ , dependiendo de cómo atraviese la cara exterior, atendiendo a cada uno de los casos representados en la Figura 1.8.

- a) Caso 1. $(3, 5, 7, 9, \dots, q)$
- b) Caso 5. $(1, 4, 6, 8, \dots, q - 1)$
- c) Caso 3. $(1, 2, 4, 6, \dots, q - 1)$
- d) Caso 7. $(2, 3, 5, 7, \dots, q)$
- e) Caso 2. $(4, 6, 8, \dots, q - 1, 1, \dots)$
- f) Caso 6. (2)
- g) Caso 4. $(1, 3, 5, \dots, q, 2, 4, \dots, q - 1)$

Basta contar ahora el número de paralelos y meridianos que describen dichas curvas. Es evidente que en los Casos 1 y 5, la curva describe 1 paralelo y $\frac{q-1}{2}$ meridianos; en los Casos 3 y 7, recorre 1 paralelo y $\frac{q+1}{2}$ meridianos; en el Caso 2, se observa que la curva recorre el meridiano denotado por 1 por lo que siempre se producirá un corte en la cara exterior y por tanto la curva no es simple. El Caso 6 corresponde a un meridiano y el Caso 4 al $2 - q$ -nudo que determina el par dominante de la cara. \triangle

1.2.2 El polinomio asociado a una cara.

Recordemos que el objetivo de este capítulo es asociar a cada inmersión peritórica un conjunto de polinomios (uno por cada cara de la inmersión) que la caractericen salvo isotopía ambiente, ya que conocer un sistema de rotación del grafo no era suficiente para este propósito.

Se define el *polinomio asociado* a una cara C de una inmersión peritórica como el siguiente polinomio de dos variables:

$$\mathcal{P}_C(x, y) = \sum_{\substack{0 \leq i, j \leq n \\ i, j \text{ coprimos}}} a_{ij} x^i y^j \quad \text{donde}$$

$$a_{10} = \begin{cases} r & \text{si } C^+ \text{ contiene } r \text{ paralelos} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

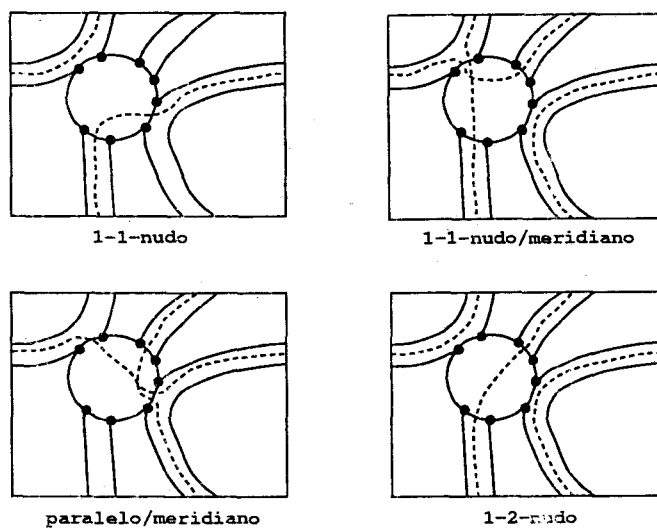
$$a_{01} = \begin{cases} r & \text{si } C^+ \text{ contiene } r \text{ meridianos} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$$a_{ij} = \begin{cases} r & \text{si } C^+ \text{ contiene } r \text{ i-j-nudos con } i, j \neq 0 \text{ coprimos} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Por ejemplo, el polinomio asociado a la cara C de la inmersión peritórica que aparece en la Figura 1.10 es $\mathcal{P}_C(x, y) = xy^2 + 2xy + x + 2y$ ya que C^+ contiene dos 1-1-nudos, dos meridianos, 1 paralelo y un 1-2-nudo. En virtud de los resultados demostrados en la sección anterior, podemos enunciar el siguiente teorema.

Teorema 1.2.2. *Sea $\phi : G \rightarrow T^2$ una inmersión peritórica y C una cara de la inmersión cuyo par dominante es (p, q) con $1 \leq p < q$. Entonces, el polinomio asociado a C es*

$$a) \mathcal{P}_C(x, y) = x^p y^q \text{ si } C \text{ es una } 2\text{-cara,}$$

Figura 1.10: Nudos contenidos en C^+ .

b)

$$\mathcal{P}_C(x, y) = \begin{cases} y + xy^{q-1} + xy^q & \text{si } p = 1 \\ xy^{\frac{q-1}{2}} + xy^{\frac{q+1}{2}} + x^2y^q & \text{si } p = 2 \\ x^{k_1}y^{s_1} + x^{k_2}y^{s_2} + x^p y^q & \text{si } p > 2 \end{cases}$$

si C es una 3-cara, y

c)

$$\mathcal{P}_C(x, y) = \begin{cases} 2y + xy^{q-2} + 2xy^{q-1} + xy^q & \text{si } p = 1 \\ y + 2xy^{\frac{q-1}{2}} + 2xy^{\frac{q+1}{2}} + x^2y^q & \text{si } p = 2 \\ 2x^{k_1}y^{s_1} + 2x^{k_2}y^{s_2} + x^p y^q + f_1(x, y) + f_2(x, y) & \text{si } p > 2 \end{cases}$$

si C es una 4-cara, donde

$$f_1(x, y) = \begin{cases} x^{k_3}y^{s_3} & \text{if } k_3 \neq 2k_1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$$f_2(x, y) = \begin{cases} x^{k_4}y^{s_4} & \text{if } k_4 \neq 2k_2 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Más aún, los sumandos $f_1(x, y)$ y $f_2(x, y)$ son mutuamente excluyentes, i.e.:

$$k_3 \neq 2k'_1 \iff k_4 = 2k_2$$

Sea $\phi : G \rightarrow T^2$ una inmersión peritórica; denotaremos por $\mathcal{P}(\phi)$ al conjunto formado por los polinomios asociados a sus caras. Veamos que este conjunto nos permite decidir cuándo dos inmersiones homeomorfas pertenecen a la misma clase de isotopía.

Teorema 1.2.3. Sean $\phi : G \rightarrow T^2$ y $\chi : G \rightarrow T^2$ dos inmersiones peritóricas homeomorfas de un grafo G . Entonces, ϕ y χ son isotópicas si y sólo si, $\mathcal{P}(\phi) = \mathcal{P}(\chi)$.

Demostración: Puesto que ϕ y χ son homeomorfas, cada cara C del ϕ se transforma bajo la acción del homeomorfismo en una cara C' de χ .

Si ϕ y χ son ambiente isotópicas, C y C' pueden deformarse continuamente la una en la otra y por tanto ambas contienen al mismo tipo de nudos, por lo que sus polinomios asociados coinciden.

Para demostrar la condición suficiente, supongamos que $\mathcal{P}_C(x, y) = \mathcal{P}_{C'}(x, y)$.

El número de monomios de \mathcal{P}_C nos indica si C y C' son 2-caras (un monomio), 3-caras (tres monomios) o 4-caras (cuatro monomios); por otra parte, el término de mayor grado en el polinomio (el par dominante de la inmersión) corresponde al nudo que gira alrededor del mayor número de paralelos y meridianos tanto en C^+ como en C'^+ y esto determina los generadores del toro alrededor de los cuales rota cada cara. Además, como el sistema de rotación del grafo es el mismo en ambas inmersiones, lo mismo ocurre con cada una de las intersecciones $\partial(C_E) \cap \partial C$ y $\partial(C'_E) \cap \partial C'$. Repitiendo este argumento para cada par de caras homeomorfas de ϕ y χ concluimos que son inmersiones ambiente isotópicas. \triangle

Observemos que en el teorema anterior, la hipótesis de equivalencia combinatoria entre las inmersiones es absolutamente necesaria para

determinar las intersecciones entre las fronteras de las caras y la cara exterior. Esto quiere decir que los polinomios asociados a las caras de una inmersión no caracterizan por sí solos a dicha inmersión salvo isotopía ambiente. Por ejemplo, si el polinomio asociado a una cara C de una inmersión es $\mathcal{P}_C(x, y) = x^2y^3 + xy + xy^2$, sabemos que C es una 3-cara y que su par dominante es el $(2, 3)$, es decir, que C gira alrededor de dos paralelos y tres meridianos (ver Figura 1.11). Pero no tenemos ninguna información acerca de cómo son las intersecciones entre $\partial(C_E)$ y $\partial(C)$ si no conocemos el sistema de rotación del grafo: ¿son homeomorfas a un punto o a un segmento?. Parece necesario entonces transformar el polinomio asociado a una cara en otra expresión que contenga la información relativa a estas intersecciones y que evite tener que recurrir al sistema de rotación del grafo.

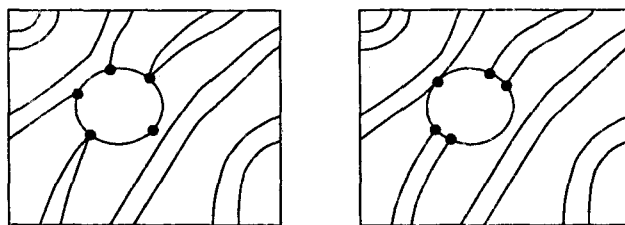


Figura 1.11 : Cara con polinomio asociado $\mathcal{P}_C(x, y) = x^2y^3 + xy + xy^2$.

Asociemos a cada $k - s$ -nudo contenido en C^+ un par ordenado (m_{ks}, n_{ks}) , su *par característico*, que indique si el nudo, en su recorrido ascendente, atraviesa la cara exterior desde un vértice y hacia un vértice ($m_{ks} = n_{ks} = 0$), desde un vértice y hacia un segmento ($m_{ks} = 0, n_{ks} = 2$), desde un segmento y hacia un segmento ($m_{ks} = 0, n_{ks} = 1$) o desde un segmento y hacia un vértice ($m_{ks} = 1, n_{ks} = 2$).

Dada una cara C de una inmersión peritórica, definimos su *polinomio característico* como el siguiente polinomio de tres variables:

$$\mathcal{Q}_C(x, y, z) = \sum_{\substack{0 \leq i, j \leq n \\ i, j \text{ coprimos}}} (-1)^{m_{ij}} a_{ij} x^i y^j z^{n_{ij}} \quad \text{donde}$$

(m_{ij}, n_{ij}) es el par característico del $i - j$ -nudo correspondiente al sumando en que aparece y a_{ij} se define de la misma forma en que lo hicimos para el polinomio asociado a C .

Sea $\phi : G \rightarrow T^2$ una inmersión peritórica; denotaremos por $\mathcal{Q}(\phi)$ al conjunto formado por los polinomios característicos de sus caras. Este conjunto nos permitirá caracterizar las clases de isotopía ambiente de inmersiones peritóricas sin necesidad de recurrir a la hipótesis de equivalencia combinatoria.

Teorema 1.2.4. *Sean $\phi : G \rightarrow T^2$ y $\chi : G \rightarrow T^2$ dos inmersiones peritóricas de un grafo G . Entonces, ϕ y χ son ambiente isotópicas si y sólo si $\mathcal{Q}(\phi) = \mathcal{Q}(\chi)$.*

Demostración: La demostración de este resultado es similar a la del Teorema 1.2.3, teniendo en cuenta que el polinomio característico recoge la información del polinomio asociado y de las intersecciones entre las fronteras de cada cara y la cara exterior de las inmersiones. \triangle

Volvamos de nuevo al ejemplo de la Figura 1.11, en el que aparecen dos inmersiones ϕ_1 y ϕ_2 que pertenecen a diferentes clases de isotopía ambiente y en las que sin embargo, existe una cara en cada una de ellas, que podemos denotar por C_1 y C_2 , respectivamente, que tienen el mismo polinomio asociado $\mathcal{P}_{C_1} = \mathcal{P}_{C_2} = xy + xy^2 + x^2y^3$.

Como vimos anteriormente, ambas caras contienen un $1 - 1$ -nudo, un $1 - 2$ -nudo y un $2 - 3$ -nudo. Sin embargo, el primero de ellos atraviesa la cara exterior de ϕ_1 en su recorrido ascendente desde un segmento a un vértice ($m_{11} = 1, n_{11} = 2$), mientras que en ϕ_2 lo hace desde un vértice y hacia un segmento ($m_{11} = 0, n_{11} = 2$). El $1 - 2$ -nudo atraviesa de vértice a segmento ($m_{12} = 0, n_{12} = 2$) en ϕ_1 y de segmento a vértice ($m_{12} = 1, n_{12} = 2$) en ϕ_2 . Por último, el $2 - 3$ -nudo atraviesa la cara exterior de ϕ_1 de vértice a vértice ($m_{23} = 0, n_{23} = 0$) y la de ϕ_2 de segmento a segmento ($m_{23} = 0, n_{23} = 1$).

Por lo tanto, los polinomios característicos de C_1 y C_2 son $\mathcal{Q}_{C_1} = x^2y^3 - xy^2z + xy^2z^2$ y $\mathcal{Q}_{C_2} = x^2y^3z + xyz^2 - xy^2z^2$, respectivamente. Hemos obtenido así una descripción combinatoria de cada una de las

inmersiones de la que podemos deducir que pertenecen a diferentes clases de isotopía ambiente.

1.3 Peritriangulaciones tóricas.

En esta sección nos centramos en un tipo particular de inmersiones de grafos en el toro, las triangulaciones de polígonos, y abordamos el problema de determinar si, dadas dos triangulaciones de un polígono topológico de n vértices en el toro, se pueden transformar la una en la otra mediante una secuencia de flips diagonales, o dicho de otra forma, nos planteamos la conexión del grafo de triangulaciones de un polígono de n vértices en el toro, desde un punto de vista topológico.

Esto generaliza a la superficie tórica la cuestión de la conexión del grafo de triangulaciones de un polígono en el plano, resuelta por Wagner [68] en 1963 y que recientemente ha sido también establecida para el plano proyectivo [17].

Recordemos que una triangulación de un polígono en una superficie se define como una inmersión de un grafo simple en ella, de forma que existe una cara 2-celular donde se encuentran todos los vértices y que por analogía con el caso plano llamamos cara exterior y en donde el resto de las caras son todas triangulares.

La operación de flip diagonal para triangulaciones de polígonos topológicos en superficies se define para aristas que no pertenezcan al borde de la cara exterior y consiste en cambiar una diagonal por otra en el cuadrilátero formado por la unión de dos caras triangulares (ver Figura 0.18).

Otra operación que fue definida en el capítulo de Preliminares y que nos será gran utilidad tanto en esta sección como en capítulos posteriores, es la de contracción de una arista de una peritriangulación. A diferencia del flip diagonal, esta operación sólo se aplica sobre aristas del borde de la cara exterior y consiste en identificar los vértices finales de dicha arista y reemplazar la arista doble que se forma por una arista simple (ver Figura 0.20).

Las dos operaciones anteriores sólo se realizarán si no se rompe la simplicidad del grafo, es decir, si no provocan la aparición de aristas múltiples o lazos, por lo que el grafo resultante de aplicar cualquiera de ellas a una triangulación de un polígono vuelve a ser una triangulación de un polígono.

Comenzaremos esta sección demostrando que cualquier triangulación de un polígono en el toro se puede transformar mediante una secuencia de flips diagonales y contracciones de aristas en la única triangulación que existe de un polígono de seis vértices, que resulta ser una inmersión tórica del grafo completo K_6 . Para ello veremos que cualquier triangulación de un polígono, o bien tiene una arista contractible, o bien admite una secuencia de flips diagonales que la transforma en otra triangulación que sí admite una arista contractible.

Puesto que las contracciones de arista disminuyen en una unidad el número de vértices del polígono, definiremos otra operación, la *inserción* de vértices de valencia 3, que nos permita “recuperar” en algún sentido estos vértices perdidos. A través de esta nueva operación y utilizando la única triangulación de un polígono de seis vértices demostraremos la conexión del grafo de triangulaciones de un polígono en el toro.

Por abreviar la nomenclatura, a lo largo de esta sección utilizaremos el término de *peritriangulación* para referirnos a una triangulación de un polígono topológico.

1.3.1 peritriangulaciones tóricas pseudo-minimales

Definimos en primer lugar un tipo particular de peritriangulaciones (i.e., triangulaciones de polígonos) en el toro.

Una peritriangulación tórica G es *pseudo-minimal* si no tiene aristas contractibles y ninguna secuencia de flips puede transformar a G en otra peritriangulación tórica con aristas contractibles.

Por ejemplo, K_6 es una peritriangulación tórica pseudo-minimal puesto que no tiene aristas contractibles y cualquier flip diagonal la transforma en un grafo que no es simple. A lo largo de esta sección denotaremos a la única

inmersión peri-triangular tórica de K_6 simplemente por K_6 (ver Figura 1.12).

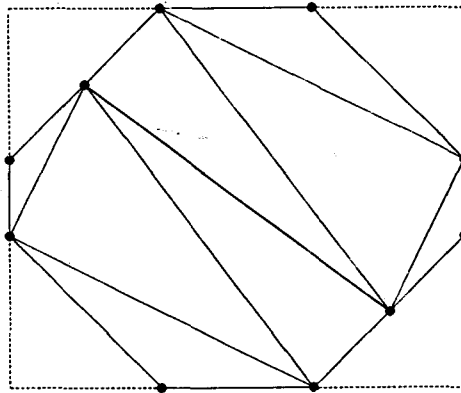


Figura 1.12: La única inmersión peri-triangular de K_6 en el toro.

Como ya hemos comentado anteriormente, nuestro primer objetivo es demostrar que cualquier peritriangulación tórica se puede transformar en K_6 mediante una secuencia de flips diagonales y contracciones de aristas. Para ello, es suficiente probar que la única peritriangulación tórica pseudo-minimal es K_6 ; veamos pues, que cualquier otra peritriangulación tórica no es pseudo-minimal. Este hecho será consecuencia de una serie de resultados que demostramos a continuación.

Lema 1.3.1. *Dada una peritriangulación tórica G con $|V(G)| \geq 7$ entonces G tiene un vértice de valencia a lo sumo cuatro.*

Demostración: Por la fórmula de Euler se tiene que

$$|V(G)| - |E(G)| + |F(G)| = 0.$$

Teniendo en cuenta que la cara exterior está acotada por un ciclo de longitud $|V(G)|$ y que el resto de las caras son triangulares, se obtiene de forma inmediata la relación

$$|V(G)| + 3(|F(G)| - 1) = 2|E(G)|.$$

Eliminando el término $|F(G)|$ en las dos igualdades anteriores, se llega a la expresión

$$2|E(G)| = 4|V(G)| + 6$$

Por tanto, la valencia media $\bar{d}(G)$ de G es

$$\bar{d}(G) = \frac{2|E(G)|}{|V(G)|} = 4 + \frac{6}{|V(G)|}$$

y puesto que $|V(G)| \geq 7$, se obtiene que $\bar{d}(G) < 5$ de lo que se deduce que G tiene un vértice de valencia a lo sumo 4. \triangle

Lema 1.3.2. *Si G es pseudo-minimal, entonces G no tiene vértices de valencia dos.*

Demostración: Supongamos que G tiene un vértice v de valencia 2 y denotemos por x e y a los vértices adyacentes a v ; la arista xy estará compartida por dos caras triangulares vxy y uxy . Después de reemplazar la arista xy por uv mediante un flip diagonal, es posible contraer vx en el grafo resultante G' ya que $xy \notin E(G')$ y esto es contrario a la pseudo-minimalidad de G . \triangle

Una arista $e = uv \in E(G - \partial(C_E))$ se dice que es *trivial* si e separa a G en una peritriangulación plana G_1 y en una peritriangulación tórica G_2 tales que $G_1 \cap G_2 = e$. En caso contrario se dirá que e es *esencial*. Si se contrae la cara exterior C_E de G a un vértice en el toro, el resultado es un grafo tórico \tilde{G} con un único vértice y muchos lazos. Las aristas triviales de G se habrán deformado a un lazo trivial en \tilde{G} mientras que las aristas esenciales serán lazos esenciales en \tilde{G} . Dos aristas $e_1, e_2 \in E(G - \partial(C_E))$ son *homotópicas* si e_1 y e_2 se han deformado a dos lazos homotópicos en el grafo \tilde{G} .

Lema 1.3.3. *Todas las aristas $e \in E(G - \partial(C_E))$ son esenciales si y sólo si G no tiene vértices de valencia dos.*

Demostración: Veamos en primer lugar que se tiene la condición necesaria. Si G tiene un vértice v de valencia 2 con vértices vecinos u_1 y u_2 , entonces u_1 y u_2 son adyacentes y el ciclo vu_1u_2 acota una cara de G . Es evidente por tanto que la arista u_1u_2 es trivial.

Para demostrar la condición suficiente, supongamos que G tiene una arista trivial $e = uv$. Entonces e separa a G en una peritriangulación plana G_1 y en una peritriangulación tórica G_2 tales que $G_1 \cap G_2 = e$. Es conocido que todo grafo periplano maximal, salvo K_3 , tiene dos vértices no adyacentes de valencia 2, por tanto G_1 tiene un vértice $w \in V(G_1) - \{u, v\}$ de valencia 2, que tendrá valencia 2 en G también. \triangle

El siguiente resultado es una consecuencia inmediata de los Lemas 1.3.2 y 1.3.3.

Lema 1.3.4. *Si G es pseudo-minimal entonces toda arista $e \in E(G - \partial(C_E))$ es esencial.*

Lema 1.3.5. *Si G es pseudo-minimal entonces G no tiene vértices de valencia tres.*

Demostración: Supongamos que G tiene un vértice v de valencia 3. Sean x, y, z los vecinos de v , donde $vx, vz \in E(\partial(C_E))$ y $vy \notin E(\partial(C_E))$. Consideremos una curva simple cerrada L a lo largo de vy y a través del centro de la cara exterior C_E ; por el Lema 1.3.4, L es esencial.

Puesto que la arista vx no es contractible, G tiene una arista $xz \notin E(\partial(C_E))$ (si $xz \in E(\partial(C_E))$ entonces $|V(G)| = 3$ y esto contradice nuestras hipótesis) y de nuevo por el Lema 1.3.4, xz es esencial. Consideremos ahora una curva simple L' a lo largo de xz y a través del centro de C_E ; puesto que L y L' se cruzan en un punto en el centro de C_E , cortando el toro a lo largo de L y L' éste se transforma en el rectángulo mostrado en la Figura 1.13; las dos líneas

gruesas entre y y x e y y z representan los caminos $yp_1\dots p_nx$ y $yq_1\dots q_mz$ respectivamente. Observemos que cada camino tiene longitud al menos 2, ya que sino, es posible encontrar aristas múltiples xy o yz .

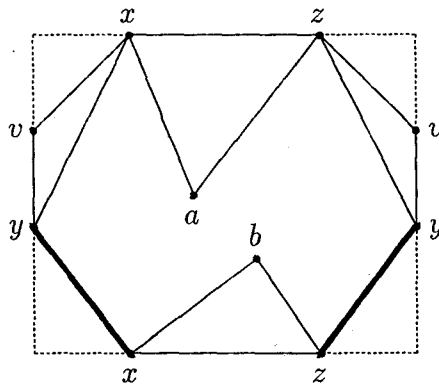


Figura 1.13: G cortado a lo largo de L y L' .

Denotemos $P = \{p_1, \dots, p_n\} \neq \emptyset$ y $Q = \{q_1, \dots, q_m\} \neq \emptyset$.

Por otra parte, la arista xz debe estar compartida por dos triángulos xza y xzb y además existe una arista entre a y b ya que, en otro caso, tras reemplazar xz por ab mediante un flip diagonal, la arista vx se podría contraer, y esto es contrario a la pseudo-minimalidad de G . Puesto que G es simple y todos los vértices aparecen en el borde $\partial(C_E)$ de C_E , tanto a como b coinciden con un vértice de $P \cup Q$. Por simetría, es suficiente considerar dos casos: $a, b \in P$ y $a \in P$ y $b \in Q$.

CASO 1. $a, b \in P$.

Supongamos en primer lugar que $a = p_i$ con $i \geq 3$; por Lema 1.3.4, en la región 2-celular acotada por $xyp_1\dots p_i$ se tiene que $p_s p_t \notin E(G - \partial(C_E))$ para todo s y t con $1 \leq s < t \leq i$ y por tanto $\delta(p_2) = \dots = \delta(p_{i-1}) = 3$. Puesto que y y p_3 son vértices distintos, la arista $p_1 p_2$ es contractible y así, o bien $a = p_1$ o bien $a = p_2$; utilizando de nuevo el Lema 1.3.4, se deduce que $b = p_n$ y como $ab \in E(\partial(C_E))$, $a = p_{n-1}$. Las Figuras 1.14 (a) y (b) muestran los casos en que $a = p_2$ y $a = p_1$, respectivamente. En el caso (a), puesto que $p_1 p_2$ no es contractible, $p_2 y \in E(G)$; reemplazando $p_2 x$ por $p_1 z$ y xz por $p_1 p_3$ mediante flips diagonales en este orden, se obtendría que la arista vx es contractible, lo cual es una contradicción. En el caso (b), sea $p_1 zc$ la otra

cara triangular que comparte la arista p_1z con la cara p_1zx ; entonces $c \in Q$ y así $c = q_i$ para algún i . Puesto que q_i y x no son adyacentes en G , aplicamos un flip diagonal a la arista p_1z y la reemplazamos por la arista xq_i , obteniendo un nuevo grafo \tilde{G} ; si en este grafo p_2 y q_i no son adyacentes, se puede reemplazar xz por p_2q_i y la arista vx es contractible, lo que contradice las hipótesis. El caso en que p_2 y q_i son adyacentes en \tilde{G} puede ser considerado como el caso en que $a \in Q$ y $b \in P$ y por simetría, trasladamos su demostración al punto siguiente.

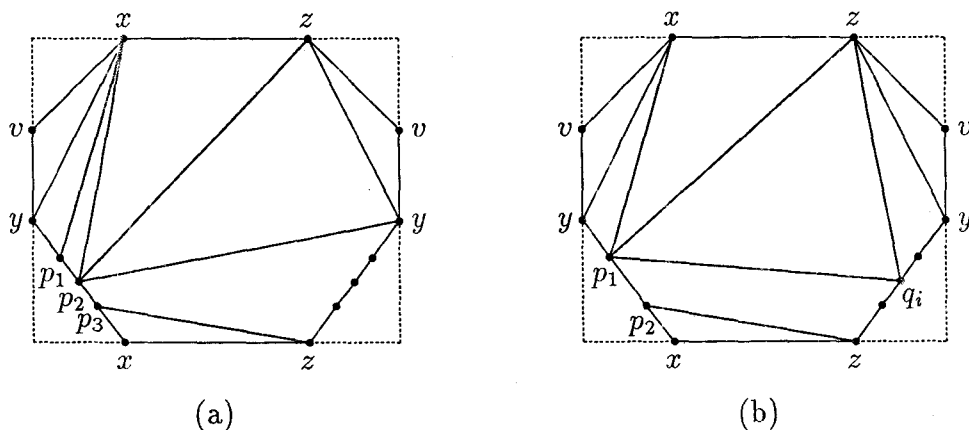


Figura 1.14: Caso en que $a, b \in P$.

CASO 2. $a \in P$ y $b \in Q$.

Siguiendo argumentos similares a los considerados en el Caso 1 se obtiene que o bien $a = p_1$ o bien $a = p_2$ y que $b = q_m$ y $ab \in E(G - \partial(C_E))$. Puesto que G no tiene aristas múltiples, $a \neq p_n$; además, si $a = p_i$ para algún $i \leq n - 2$, la arista $p_{n-1}p_n$ sería contractible como en el Caso 1, luego $a = p_{n-1}$. Aplicando el Lema 1.3.2 se deduce que p_n y q_m son adyacentes (ver Figura 1.15).

Nos planteamos ahora los casos en los que la arista $ab (= p_{n-1}q_m)$ admite un flip diagonal; puesto que los vecinos de p_n son $\{p_{n-1}, q_m, x\}$, el flip diagonal de $p_{n-1}q_m$ está prohibido sólo si se producen aristas múltiples entre p_n y x , pero aunque no conocemos la estructura completa del grafo G , sí se sabe que el vértice x no está contenido en la región delimitada por $zyq_1 \dots q_m p_{n-1}$ por lo que tal caso no puede darse y el flip de $p_{n-1}q_m$ siempre está permitido; reemplazamos después xz por $p_{n-1}q_m$ y en el grafo resultante la arista vx es

contractible, lo cual nos lleva de nuevo a una contradicción. \triangle

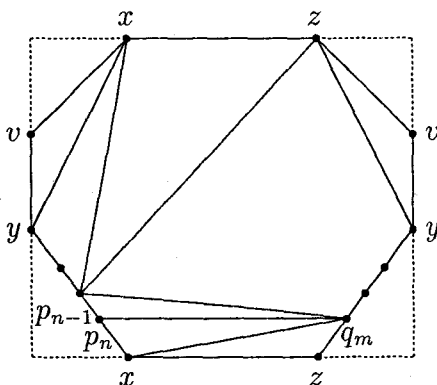


Figura 1.15: Caso en que $a \in P$ y $b \in Q$.

Lema 1.3.6. Si G es pseudo-minimal entonces G no tiene vértices de valencia cuatro.

Demostración: Supongamos que G tiene un vértice v de valencia 4 y sean x, y, z, w los vecinos de v en G en orden cíclico, donde $vx, vw \in E(\partial(C_E))$. Si $xz \notin E(G)$ o $yw \notin E(G)$, el flip diagonal de vy o vz respectivamente, reduce la valencia de v y se puede aplicar el Lema 1.3.5 por lo que $xz, yw \in E(G)$.

Consideremos dos casos, dependiendo de si la arista yz está o no en $\partial(C_E)$. Para cortar el toro y obtener una representación rectangular del mismo, debemos encontrar un par de curvas cerradas que se corten en un punto.

CASO 1. $yz \in E(\partial(C_E))$.

Sean L y L' dos curvas cerradas en el toro a lo largo de las aristas xz e yw respectivamente, que se cortan en la cara exterior C_E de G . Puesto que $yz \in E(\partial(C_E))$, la unión de las cuatro caras C_E , vxw , vyz y vzw forma un anillo en el toro por lo que los vértices x, w, z, y aparecen en $\partial(C_E)$ en este orden cíclico y así $xz, yw \notin E(\partial(C_E))$ y L y L' se cortan exactamente una vez en el centro de C_E .

Cortamos el toro a lo largo de L y L' como se muestra en la Figura 1.16 (a); las dos líneas gruesas entre z y w y entre y y x representan caminos de longitud al menos 2, denotados por $zp_1\dots p_nw$ e $yq_1\dots q_mx$. Sean $P = \{p_1, \dots, p_n\} \neq \emptyset$ y $Q = \{q_1, \dots, q_m\} \neq \emptyset$ y a, b los dos vértices (distintos de y y w) de las dos caras triangulares que comparten la arista yw (ver Figura 1.16 (a)). Por el Lema 1.3.5 podemos suponer que todos los vértices tienen valencia al menos 4. Si $a = x$, cada p_i tiene valencia 3 por el Lema 1.3.4, lo cual contradice nuestras hipótesis y por tanto $a = p_n$. Utilizando el mismo argumento se puede concluir que $b = q_1$ como se muestra en la Figura 1.16 (b). Puesto que $p_nq_1 \notin E(G)$, se puede aplicar un flip diagonal a vz después de haberlo hecho a wy . Esto disminuye la valencia de v y podemos utilizar el Lema 1.3.5 de nuevo.

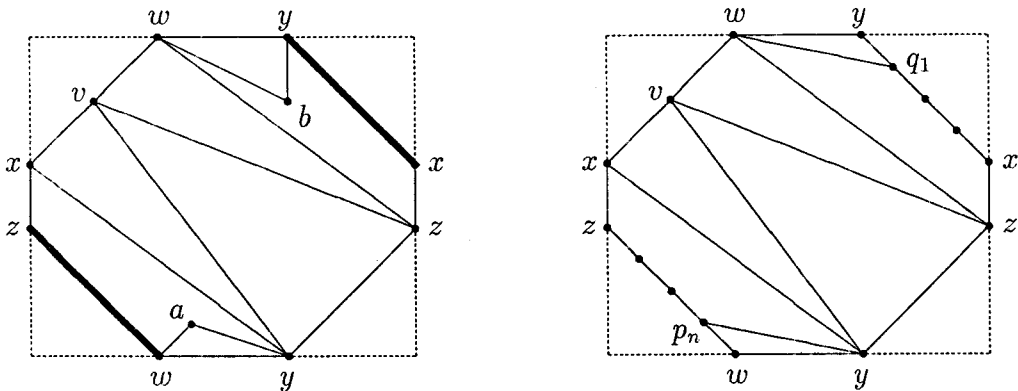


Figura 1.16: Caso en que $yz \in E(\partial(C_E))$.

CASO 2. $yz \notin E(\partial(C_E))$.

Consideremos ahora dos curvas cerradas D y D' en el toro a lo largo de las aristas xy y wz respectivamente, que se cortan en la cara exterior C_E de G . Puesto que $\delta_G(x) > 2$ y $\delta_G(w) > 2$, se tiene que $xy, wz \notin E(\partial(C_E))$. Si estas dos aristas fueran homotópicas en el toro, la arista yz sería trivial ya que $yz \notin E(\partial(C_E))$, y esto contradice el Lema 1.3.4; por tanto, xy y wz no son homotópicas y D y D' son un par de curvas cerradas esenciales no homotópicas que se cortan sólo en el centro de C_E . Cortemos el toro a lo largo de D y D' como se muestra en la Figura 1.17 (a). Las tres líneas gruesas entre y y w , z y x e y y z representan caminos $yp_1\dots p_nw$, $zq_1\dots q_mx$ y $yr_1\dots r_lz$, respectivamente. Sean $P = \{p_1, \dots, p_n\}$, $Q = \{q_1, \dots, q_m\}$ y $R = \{r_1, \dots, r_l\}$; desde luego, R es un conjunto no vacío ya que en otro caso

yz sería una arista múltiple. Puesto que la valencia de v no puede ser reducida, $yw, zx \in E(G)$. Si $P \neq \emptyset$ entonces y y w son adyacentes, pero en este caso, todos los vértices r_i tienen valencia 3 por el Lema 1.3.4 así que debe ser $P = \emptyset$. De la misma forma se prueba que $Q = \emptyset$.

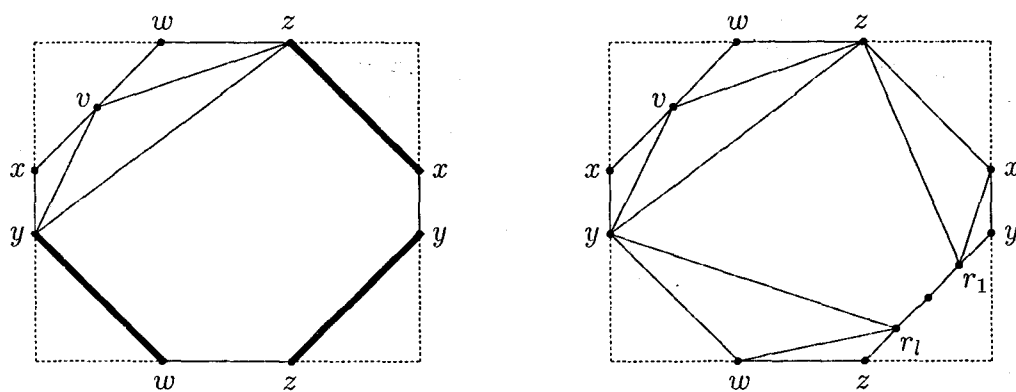


Figura 1.17: Caso en que $yz \in E(G - \partial(C_E))$.

Consideremos ahora las caras triangulares ayw y bxz incidentes con yw y zx , respectivamente; los vértices a y b han de coincidir con alguno de los r_i . Si $a = r_i$ para algún $i \leq l - 1$, entonces r_{i+1}, \dots, r_l tienen valencia 3 por el Lema 1.3.4, luego debe ser $a = r_l$ y de la misma forma se demuestra que $b = r_1$ (ver Figura 1.17 (b)). En esta situación, puesto que v y r_l no son adyacentes, la arista wz se puede reemplazar por vr_l mediante un flip diagonal. En el grafo que resulta, w tiene valencia 3, por lo que se puede aplicar el Lema 1.3.5. △

Los resultados anteriores nos conducen al siguiente Teorema:

Teorema 1.3.1. *Toda peritriangulación tórica se puede transformar en K_6 mediante una secuencia de flips diagonales y contracciones de aristas, salvo homeomorfismo.*

Demostración: De los Lemas 1.3.1 y 1.3.2 se deduce que si G es una peritriangulación tórica pseudo-minimal distinta de K_6 con al menos siete vértices, la valencia mínima de G ha de ser 3 ó 4, sin embargo esto contradice

los Lemas 1.3.5 y 1.3.6. Por tanto, el toro admite una única peritriangulación pseudo-minimal, K_6 , salvo homeomorfismo. Por la definición de pseudo-minimalidad, cualquier peritriangulación tórica distinta de K_6 se puede llevar mediante una secuencia de flips diagonales a otra que posea alguna arista contractible y puesto que cada contracción de arista disminuye en una unidad el número de vértices de la peritriangulación, se tiene el resultado. \triangle

El teorema anterior se sigue manteniendo incluso si imponemos una condición sobre la valencia mínima.

Teorema 1.3.2. *Toda peritriangulación tórica con valencia mínima al menos tres, se puede transformar en K_6 mediante una secuencia de flips diagonales y contracciones de aristas, preservando la valencia mínima al menos tres, salvo homeomorfismo.*

Demostración: Sea G una peritriangulación tórica con valencia mínima al menos tres y denotemos por $\partial(C_E)$ a la frontera de su cara exterior; supongamos que G se puede transformar en otra peritriangulación tórica G' por una contracción de arista o un flip diagonal. Por el Teorema 1.3.1 es suficiente demostrar que si la valencia mínima de G' es dos, es posible encontrar otra arista en G cuya contracción preserva la valencia mínima al menos tres. Sea entonces v un vértice de valencia dos en G' y x e y sus dos vecinos.

Consideremos en primer lugar el caso en que G' se obtiene de G por una contracción arista. Observemos que las aristas esenciales de G también son esenciales en G' y puesto que la valencia mínima de G es al menos tres, G no tiene aristas triviales por el Lema 1.3.3 y por tanto G' tampoco tiene ninguna arista trivial; esto demuestra que G' no tiene vértices de valencia 2.

Supongamos ahora que G' se obtiene de G mediante un flip diagonal aplicado en una arista vz de G , que es compartida por dos caras triangulares xvz e yvz . Puesto que la valencia de v en G' es dos, este vértice tenía valencia tres en G . Además, $\delta_G(x) \geq 3$, $\delta_G(y) \geq 3$ y $\delta_G(v) = 3$ por lo que $xz, vz, yz \notin E(\partial(C_E))$; estas aristas son esenciales en G por el Lema 1.3.4 y además la valencia de z en G es al menos cinco. En este caso, la contracción

de la arista vx es la adecuada en G ya que el grafo que resulta (lo denotamos por \tilde{G}) es simple puesto que $xy \notin E(G)$ (si $xy \in E(G)$, el flip diagonal de vz que transforma G en G' rompería la simplicidad). Además, la valencia de z en \tilde{G} es al menos cuatro, por lo que \tilde{G} es una peritriangulación tórica con valencia mínima al menos tres. \triangle

Los resultados obtenidos hasta ahora no son suficientes para demostrar que cualesquiera dos peritriangulaciones tóricas se pueden transformar entre sí mediante una secuencia de flips diagonales. Observemos que, mientras que un flip diagonal no altera el número de vértices de la peritriangulación, una contracción de aristas lo disminuye en una unidad. Necesitamos por tanto una operación que nos permita “recuperar” los vértices perdidos por contracciones de aristas. A ello nos dedicaremos en la siguiente sección.

1.3.2 Insertando vértices de valencia tres

En la sección anterior hemos demostrado que cualquier peritriangulación se puede transformar en K_6 mediante una secuencia de flips diagonales y contracciones de arista. Sin embargo, como ya hemos comentado, esta última operación hace que vayamos perdiendo vértices de la peritriangulación inicial. Con el objeto de “recuperar” de nuevo estos vértices perdidos, definimos una nueva operación sobre las peritriangulaciones tóricas.

Sea G una peritriangulación tórica y denotemos por $\partial(C_E)$ a la frontera de su cara exterior. Sea $xy \in E(\partial(C_E))$ y supongamos que xyz acota una cara de G ; subdividiendo la arista xy por un vértice v y añadiendo una arista vz se obtiene una nueva peritriangulación G' con $|V(G')| = |V(G)| + 1$. En este caso, decimos que G' se obtiene de G insertando un vértice de valencia tres en la arista xy . El siguiente resultado demuestra que un vértice de valencia tres insertado se puede mover a cualquier arista de la cara exterior mediante una secuencia de flips diagonales.

Lema 1.3.7. *Sea G una peritriangulación tórica con valencia mínima al menos tres; e y e' aristas de la frontera $\partial(C_E)$ de G . Si G_1 y G_2 se obtienen de G insertando un vértice de valencia tres en e y e' respectivamente,*

entonces G_1 y G_2 se pueden transformar la una en la otra mediante una secuencia de flips diagonales, preservando la valencia mínima al menos tres.

Demostración: Consideremos una arista $e = xy \in E(\partial(C_E))$ y sean a_1, \dots, a_p y b_1, \dots, b_q los vecinos de x e y en el mismo orden cíclico, donde $a_1xyb_q \subset \partial(C_E)$ y $a_p = b_1$. Supongamos que G_1 se obtiene de G insertando un vértice v de valencia tres en $e = xy$; aplicamos flips diagonales que reemplacen b_iy por $b_{i+1}v$ para $i = 1, \dots, q - 2$, en este orden. Ninguno de estos flips diagonales rompe la simplicidad del grafo ya que $x \neq b_i$ para todo i y cada b_i tiene valencia tres durante este proceso. La peritriangulación tórica que resulta, en la que y tiene valencia tres, puede considerarse como si se hubiera obtenido de G insertando un vértice y de valencia tres en la arista b_qv . Reiterando este proceso, la distancia entre e y e' se puede acortar tanto como se desee. \triangle

Sea G una peritriangulación tórica con valencia mínima al menos tres y sea xyz una cara de G tal que xy está en la frontera de la cara exterior $\partial(C_E)$ de G . Reemplazamos la arista xy por un camino $xv_1\dots v_my$ de longitud $m + 1$ y unimos v_i y z para $i = 1, \dots, m$. El grafo que resulta es una nueva peritriangulación que tiene el camino $v_1\dots v_m$ en $\partial(C_E)$ y tal que para cada i , $\delta(v_i) = 3$. Denotemos a esta nueva peritriangulación tórica por $G + \Sigma_m$. Por el Lema 1.3.7 esta notación está bien definida en el sentido de que es independiente, salvo por flips diagonales, de la elección de la arista subdividida por los m vértices de valencia tres.

En los siguientes tres resultados, G y T designarán dos peritriangulaciones tóricas con valencia mínima al menos tres.

Lema 1.3.8. *Si G se puede transformar en T por una contracción de arista, entonces para cualquier número natural k , $G + \Sigma_k$ se puede transformar en $T + \Sigma_{k+1}$ mediante una secuencia de flips diagonales, preservando la valencia mínima al menos tres.*

Demostración: Supongamos que G se transforma en T mediante una contracción de la arista xy . Puesto que en virtud del Lema 1.3.7, un vértice insertado de valencia tres se puede mover a cualquier arista de la frontera de la cara exterior mediante una secuencia de flips diagonales, podemos suponer

que en una peritriangulación fija $\tilde{G} = G + \Sigma_k$, los k vértices de valencias tres han sido insertados en una arista distinta de xy . Denotemos por \tilde{T} al grafo obtenido al contraer la arista xy en \tilde{G} y sean a_1, \dots, a_p y b_1, \dots, b_q los vecinos de x e y en \tilde{G} , respectivamente, en el mismo orden cíclico, donde $a_1xyb_q \subset \partial(C_E)$ y $a_p = b_1$. Puesto que xy es contractible en G , también lo es en \tilde{G} , por tanto $b_jx \notin E(G)$ para $j = 2, \dots, q-1$ (ya que en otro caso, la contracción de la arista xy produciría la aparición de aristas múltiples en \tilde{T}) y así, es posible reemplazar las aristas b_jy por $b_{j+1}x$ para $j = 1, \dots, q-2$ mediante flips diagonales en este orden, preservando en todo momento la simplicidad de los grafos y la valencia mínima al menos tres. Observemos que el grafo resultante es isomorfo a $\tilde{T} + \Sigma_1$ y además, por el Lema 1.3.7, \tilde{G} y $\tilde{T} + \Sigma_1$ se pueden transformar el uno en el otro mediante una secuencia de flips diagonales, de lo que se deduce que también pueden serlo $G + \Sigma_k$ y $T + \Sigma_{k+1}$. \triangle

Lema 1.3.9. *Si G se puede transformar en T por un flip diagonal, entonces para cualquier número natural k , $G + \Sigma_k$ se puede transformar en $T + \Sigma_k$ mediante una secuencia de flips diagonales, preservando la valencia mínima al menos tres.*

Demostración: Supongamos que G se transforma en T por la aplicación de un flip diagonal en una arista xy que es compartida por dos triángulos axy y byx en G . Consideremos una peritriangulación tórica fija $\tilde{G} = G + \Sigma_k$ y denotemos por \tilde{T} al grafo obtenido de \tilde{G} por el flip de la arista xy . Si en \tilde{G} , Σ_k está insertado en una arista que no forme parte del cuadrilátero $axby$, entonces \tilde{T} se puede obtener directamente; en caso contrario, el flip diagonal de la arista xy se aplicará tras mover Σ_k a una arista que no forme parte del cuadrilátero mencionado en virtud del Lema 1.3.7. \triangle

Lema 1.3.10. *Si G se puede transformar en T por una secuencia de flips diagonales y contracciones de aristas, preservando la valencia mínima al menos tres, entonces G se puede transformar en $T + \Sigma_m$ mediante una secuencia de flips diagonales, preservando la valencia mínima al menos tres, con $m = |V(G)| - |V(T)|$.*

Demostración: Denotemos por $G = H_1, \dots, H_l = T$ a la secuencia de peritriangulaciones tóricas que transforma G en T , donde cada H_i tiene

valencia mínima al menos tres y H_{i+1} se obtiene de H_i , bien por un flip diagonal, bien por una contracción de arista, para $i = 1, \dots, l - 1$.

Observemos que los flips diagonales preservan el número de vértices de las peritriangulaciones tóricas, mientras que las contracciones de aristas lo disminuyen en una unidad, por tanto el número $m = |V(G)| - |V(T)|$ coincide con el número de contracciones de aristas en la secuencia de G a T .

Cuando H_{i+1} se obtenga de H_i por una contracción de arista, aplicamos el Lema 1.3.8 y cuando se obtenga por un flip diagonal, aplicamos el Lema 1.3.9. De esta forma, la secuencia de peritriangulaciones tóricas H_1, \dots, H_l se transforma en otra $H_1, \dots, H_i + \Sigma_{|V(H_i)| - |V(H_l)|}, \dots, H_l + \Sigma_m$ en la que cada grafo se obtiene del anterior por una secuencia de flips diagonales. \triangle

Una vez que hemos resuelto el problema de la “pérdida” de vértices que ocasiona la operación de contracción de arista, nos disponemos a demostrar la conexión del grafo de peritriangulaciones tóricas de n vértices.

1.3.3 Flips en peritriangulaciones tóricas

Con los resultados anteriormente obtenidos estamos en condiciones de demostrar que cualesquiera dos peritriangulaciones tóricas con el mismo número de vértices se pueden transformar la una en la otra por una secuencia de flips diagonales, salvo homeomorfismo. Comenzaremos probando un resultado que es más elaborado con respecto a la valencia mínima del grafo. En general, la valencia mínima de una peritriangulación tórica es al menos dos, sin embargo, si dos peritriangulaciones tóricas tienen valencia mínima al menos tres, es posible preservar dicha valencia mínima en la secuencia de flips diagonales que las conecta, como se muestra en el siguiente teorema.

Teorema 1.3.3. *Cualesquiera dos peritriangulaciones tóricas con valencia mínima al menos tres e igual número de vértices, pueden ser transformadas la una en la otra mediante una secuencia de flips diagonales, salvo homeomorfismo, preservando la valencia mínima al menos tres.*

Demostración: Sea G una peritriangulación tórica con n vértices cuya valencia mínima es al menos tres; por el Teorema 1.3.2, G se puede

transformar en K_6 mediante una secuencia de flips diagonales y contracciones de aristas preservando la valencia mínima al menos tres, por lo que, en virtud del Lema 1.3.10, G se puede llevar en $K_6 + \Sigma_{n-6}$ mediante flips diagonales y preservando igualmente dicha valencia. Es claro entonces que cualesquiera dos peritriangulaciones tóricas con n vértices pueden ser transformadas la una en la otra mediante flips, preservando la valencia mínima al menos tres, via la forma $K_6 + \Sigma_{n-6}$. \triangle

Una vez demostrado que la aplicación de flips diagonales permite transformar unas peritriangulaciones tóricas en otras, bajo ciertas restricciones sobre la valencia mínima, el resultado general se deduce fácilmente como se muestra en el siguiente teorema.

Teorema 1.3.4. *Cualesquiera dos peritriangulaciones tóricas con igual número de vértices, pueden ser transformadas la una en la otra mediante una secuencia de flips diagonales, salvo homeomorfismo.*

Demostración: Para poder recurrir en nuestra demostración al Teorema 1.3.3, basta probar que cualquier peritriangulación tórica G que posea algún vértice de valencia dos se puede transformar, mediante flips diagonales, en otra con valencia mínima al menos tres.

Si G tiene un vértice de valencia dos, por el Lema 1.3.3 G tiene una arista trivial e que separa a G en una peritriangulación plana G_1 , que podemos suponer *maximal* (es decir, no existe ninguna otra peritriangulación plana G'_1 , separada de G por una arista trivial y que incluya a G_1 como subgrafo) y en una peritriangulación tórica G_2 .

Supongamos que $e = xy$ es compartida por dos caras triangulares vxy y uxy en G , donde $v \in V(G_1)$ y $u \in V(G_2)$; puesto que $uv \notin E(G)$, podemos aplicar un flip a $e = xy$ y la arista añadida uv es esencial en el grafo obtenido G' , por lo que el número de aristas triviales en G ha decrecido. Reiterando este proceso, podemos eliminar todas las aristas triviales de G y por tanto, todos los vértices de valencia dos. \triangle

También es posible considerar las versiones etiquetadas de los teoremas anteriores. Sean G_ρ y G'_ρ , dos peritriangulaciones tóricas con n vértices y

cuyas fronteras de la cara exterior están etiquetadas por $1234\dots n$ y $1324\dots n$, respectivamente. Puesto que los flips diagonales no mueven aristas de la frontera de la cara exterior, no es posible transformar G_ρ en G'_ρ , mediante una secuencia de flips diagonales de forma que los etiquetados de sus fronteras coincidan completamente. Por tanto, una condición necesaria para que dos peritriangulaciones tóricas etiquetadas se puedan transformar la una en la otra mediante una secuencia de flips diagonales es que los etiquetados de sus fronteras sean equivalentes, salvo permutación cíclica. El teorema siguiente establece que esta condición es también suficiente.

Teorema 1.3.5. *Dos peritriangulaciones tóricas etiquetadas con el mismo número de vértices se pueden transformar la una en la otra mediante una secuencia de flips diagonales, salvo homeomorfismo si y sólo si, los etiquetados de vértices de sus fronteras son equivalente salvo permutación cíclica.*

Demostración: Sean G y G' dos peritriangulaciones tóricas etiquetadas con n vértices tales que los etiquetados de sus fronteras son equivalentes salvo permutación cíclica. En virtud del Teorema 1.3.4, se pueden transformar la una en la otra mediante una secuencia de flips diagonales, via la forma $K_6 + \Sigma_{n-6}$. Por tanto, es suficiente demostrar que cualquier etiquetado fijo $R = 12\dots n$ de la frontera de $K_6 + \Sigma_{n-6}$ puede ser desplazado mediante flips diagonales, es decir, veamos que para cada i , es posible dar la etiqueta $i + 1$ al vértice etiquetado inicialmente por i , mediante una secuencia de flips diagonales, donde cada etiqueta se toma módulo n .

Si $n = 6$, entonces el automorfismo de K_6 que aplica un vértice etiquetado i en uno etiquetado $i + 1$, para cada i , puede realizarse mediante un homeomorfismo del propio toro. Podemos suponer entonces $n \geq 7$ y que las etiquetas $\{1, \dots, 6\}$ se asignan a los vértices de K_6 y $\{7, \dots, n\}$ a los vértices de valencia tres insertados. Mediante flips diagonales, disminuimos la valencia del vértice etiquetado como 1 de cinco a tres e incrementamos la valencia del vértice etiquetado como n de tres a cinco. De esta forma, en el grafo obtenido, el vértice etiquetado como 1 y los etiquetados como $7, \dots, n - 1$ tienen valencia tres. Reiterando este proceso, podemos conseguir un etiquetado de $K_6 + \Sigma_{n-6}$ de forma que se asignen las etiquetas $\{n, 1, \dots, 5\}$ a los vértices de K_6 y $\{6, \dots, n - 1\}$ a los vértices insertados de valencia tres. \triangle

La versión etiquetada del Teorema 1.3.3 también se mantiene, lo que nos proporciona el siguiente resultado.

Teorema 1.3.6. *Cualesquiera dos peritriangulaciones tóricas etiquetadas con valencia mínima al menos tres e igual número de vértices, pueden ser transformadas la una en la otra mediante una secuencia de flips diagonales salvo homeomorfismo, preservando la valencia mínima al menos tres, si y sólo si, los etiquetados de vértices de sus fronteras son equivalentes salvo permutación cíclica.*

Demostración: Para demostrar este resultado basta observar que en la secuencia de desplazamientos de etiquetas en $K_6 + \Sigma_{n-6}$ se preserva en todo momento la valencia mínima al menos tres. \triangle

1.4 Conclusiones y problemas abiertos

Con la primera sección de este capítulo hemos abierto una línea de investigación sobre las descripciones combinatorias de las clases de isotopía de inmersiones en superficies no planas. Por el hecho de disponer de una potente herramienta como es la clasificación de los nudos en el toro, hemos realizado nuestro estudio en esta superficie.

Queda abierto por tanto el encontrar una descripción similar a la dada de la clases de isotopía ambiente de inmersiones de grafos en otras superficies, bien obteniendo una clasificación de los nudos que admiten inmersiones en superficies distintas al toro, o bien buscando herramientas alternativas a los nudos en éstas otras superficies.

Por otra parte, en la segunda sección de este capítulo hemos demostrado la conexión del grafo de triangulaciones de un polígono topológico en el toro. Sería interesante ampliar este estudio y obtener resultados relativos a ciertas propiedades de este grafo, tales como el diámetro, centro, etc.

Capítulo 2

Flips en peritriangulaciones de la botella de Klein.

En este capítulo determinamos la lista completa de las triangulaciones de polígonos topológicos que son irreducibles en la botella de Klein y demostramos que cualesquiera dos triangulaciones de un polígono de n vértices en esta superficie se pueden transformar entre sí mediante una secuencia de flips diagonales, salvo homeomorfismo.

Esta es la generalización a la botella de Klein del resultado que establece la conexión del grafo de triangulaciones de un polígono convexo en el plano, resultado que también hemos obtenido para polígonos topológicos en la superficie tórica en el capítulo anterior.

2.1 Introducción

En este capítulo nos centramos en un tipo particular de inmersiones de grafos en la botella de Klein, las triangulaciones de polígonos topológicos, y abordamos el problema de determinar si, dadas dos triangulaciones de un mismo polígono, se pueden transformar la una en la otra mediante una secuencia de flips diagonales. En otras palabras, nos preguntamos acerca de

la conexión del grafo de peritriangulaciones de un polígono en esta superficie.

Este problema ya fue resuelto por Wagner [68] en el plano y recientemente por Edelman y Reiner [17] en el plano proyectivo. Puesto que en el capítulo anterior establecimos la conexión del grafo de triangulaciones de un polígono en el toro, trasladamos ahora el problema a la siguiente superficie no orientable: la botella de Klein.

Recordamos aquí que la operación de flip diagonal para triangulaciones de polígonos topológicos se define para aristas que no pertenezcan al borde de la cara exterior y consiste en cambiar una diagonal por otra en el cuadrilátero formado por la unión de dos caras triangulares (ver Figura 0.18).

Otra operación que fue definida en el capítulo de Preliminares y que nos será gran utilidad en este capítulo, es la de contracción de una arista en una triangulación. A diferencia del flip diagonal, esta operación sólo se aplica sobre aristas del borde de la cara exterior del polígono y consiste en identificar los vértices finales de dicha arista y reemplazar la arista doble que se forma por una arista simple (ver Figura 0.20).

El primer objetivo de este capítulo es el de determinar la lista completa de las triangulaciones de polígonos que son irreducibles en la botella de Klein, i.e., aquellas triangulaciones de polígonos que no admiten más contracciones de aristas.

Las listas completas de las triangulaciones irreducibles de la esfera, el plano proyectivo, el toro y la botella de Klein ya han sido determinadas en [63], [4], [34] y [35] y más aún, es conocido que el número de triangulaciones irreducibles de cualquier superficie F^2 es finito, salvo homeomorfismo [5, 6, 21, 42].

Comenzaremos estableciendo la relación existente entre las triangulaciones irreducibles de una superficie F^2 y las triangulaciones de polígonos en F^2 que son irreducibles y posteriormente utilizaremos este resultado para obtener un listado completo de estas últimas en la botella de Klein a partir de la lista de triangulaciones irreducibles de esta superficie dada por Lawrencenko y Negami en [35]. La lista anterior nos permitirá demostrar que cualesquiera dos de un polígono en la botella de Klein se pueden transformar entre sí mediante una secuencia de flips diagonales, salvo homeomorfismo, o

equivalentemente, estableceremos la conexión del grafo de peritriangulaciones en esta superficie.

Al igual que en el capítulo anterior, por abreviar la nomenclatura, utilizaremos el término “peritriangulación” para referirnos a las triangulaciones de polígonos.

2.2 Peritriangulaciones irreducibles de la botella de Klein.

Esta sección está dedicada a determinar la lista completa de las peritriangulaciones irreducibles de la botella de Klein.

Comenzaremos estudiando la relación que existe entre las triangulaciones irreducibles y las peritriangulaciones irreducibles de una superficie cerrada F^2 .

Recordemos que si G es una triangulación de una superficie y $e = ac$ es una arista compartida por dos caras triangulares abc y acd , la contracción de e consiste en identificar sus vértices finales y sustituir la aristas dobles $\{ba, bc\}$ y $\{da, dc\}$ por aristas simples (ver Figura 0.19). Si una triangulación no admite más contracciones de arista, es decir, si la contracción de cualquier arista provoca la aparición de lazos o aristas múltiples, se dice que es irreducible.

La contracción de una arista en una peritriangulación se define de manera similar, pero en este caso la operación sólo se aplica en aristas del borde de la cara exterior (Figura 0.20). Tanto si G es una triangulación como si es una peritriangulación de una superficie, denotaremos por G/e al grafo que resulta de contraer en G la arista e .

Lema 2.2.1. *Sea G una peritriangulación de una superficie cerrada F^2 distinta de la esfera y \tilde{G} la triangulación de F^2 que se obtiene de G poniendo un vértice v en la cara exterior de G y uniéndolo a todos los vértices de G . Denotemos por $\partial(C_E)$ y $\partial(\tilde{C}_E)$ a los bordes de sus respectivas caras*

exteriores. Entonces G es irreducible si y sólo si, \tilde{G} es irreducible.

Demostración: Demostramos en primer lugar la condición necesaria. Supongamos que G es irreducible; el conjunto de aristas de \tilde{G} se puede clasificar en las siguientes tres clases.

$$P = \{e \in E(\tilde{G}) : e \in E(\partial(C_E))\}$$

$$Q = \{e \in E(\tilde{G}) : e \in E(G - \partial(C_E))\}$$

$$R = \{e \in E(\tilde{G}) : e = vx \text{ para algún } x \in V(G)\}.$$

Claramente, para cualquier $e \in P$, la contracción de e rompe la simplicidad del grafo. Si $e = xy \in Q$, al contraer e , los vértices x e y quedan identificados y en el grafo resultante, vx y vy forman aristas múltiples y por tanto \tilde{G}/e tampoco es simple. Finalmente, consideremos el caso en que $e = vx \in R$. Puesto que G es irreducible, x tiene valencia al menos tres en G (si tuviera valencia dos, las dos aristas que lo tienen como vértice final serían contractibles) y por tanto existe una arista xc tal que $xc \notin E(\partial(C_E))$. Al contraer vx , las aristas vx y vc forman aristas múltiples. Queda entonces demostrado que para cualquier $e \in E(\tilde{G})$, \tilde{G}/e no es simple y por tanto que \tilde{G} es irreducible.

Supongamos ahora que \tilde{G} es irreducible. Es suficiente demostrar que para cualquier arista $e \in E(\partial(C_E))$, G/e no es simple. Sea $e = xy$ una arista compartida por dos caras triangulares xyv y xyz en \tilde{G} . Puesto que \tilde{G} es irreducible, existe un vecino común, llamémoslo $p \neq v, z$, de x e y en \tilde{G} . Es evidente que $p \in V(G)$ y que las aristas px y py con múltiples en G/xy y esto implica que G es irreducible. △

En virtud del Lema 2.2.1, cada peritriangulación irreducible de la botella de Klein se obtiene eliminando un vértice de valencia $|V(G)| - 1$ de una de las triangulaciones irreducibles G de la botella de Klein. El listado completo de estas triangulaciones irreducibles se debe a Lawrencenko y Negami [35] y aparece en la Figura 2.1. Observemos que las triangulaciones denotadas por $Kc1, \dots, Kc4$ muestran una representación de la botella de Klein que no es la habitual; este tipo de representación, llamada “de tipo gorro cruzado”

(*crosscap*) se obtiene a partir de dos de las triangulaciones irreducibles del plano proyectivo que se pegan por una cara. En esta representación, cada par de vértices antipodales en la frontera de cada uno de los dos hexágonos, están identificados [35].

Para obtener a partir del listado de Lawrencenko y Negami, que denotaremos por $\{G_1, \dots, G_{25}\}$, las peritriangulaciones irreducibles de la botella de Klein, seguiremos el siguiente procedimiento.

Dos vértices $v, v' \in V(G_i)$ se dicen *simétricos* si existe un automorfismo de G_i que se realiza mediante un homeomorfismo de la botella de Klein y que lleva v en v' . Fijado un índice i , denotamos por Δ_i al conjunto maximal de pares de vértices no simétricos de G_i con valencia $|V(G_i)| - 1$. Para cada $i = 1, \dots, 25$ y para cada $v \in \Delta_i$, se construye $G_i - v$ y obtenemos las peritriangulaciones irreducibles que se muestran en las Figuras 2.2, 2.3, 2.4 y 2.5.

Observemos que las triangulaciones irreducibles de la botella de Klein tienen 8, 9, 10 y 11 vértices, respectivamente, y por tanto, las peritriangulaciones irreducibles tienen 7, 8, 9 y 10. Puesto que en la Figura 2.1, las triangulaciones irreducibles se denotan por $Kh1, \dots, Kh21, Kc1, \dots, Kc4$, en las Figuras 2.2, 2.3, 2.4 y 2.5 hemos denotado por Khi_a y por Kci_a a las peritriangulaciones obtenidas a partir de Khi y Kci , respectivamente, para cada i . Más aún, para algunos índices i , $Khi_a, Khib$, etc. (resp., $Kci_a, Kcib$, etc.) se obtienen a partir del mismo Khi (resp., Kci).

El razonamiento anterior demuestra el siguiente resultado.

Teorema 2.2.1. *Existen exactamente 33 peritriangulaciones irreducibles de la botella de Klein, salvo homeomorfismo, que se muestran en las Figuras 2.2, 2.3, 2.4 y 2.5.*

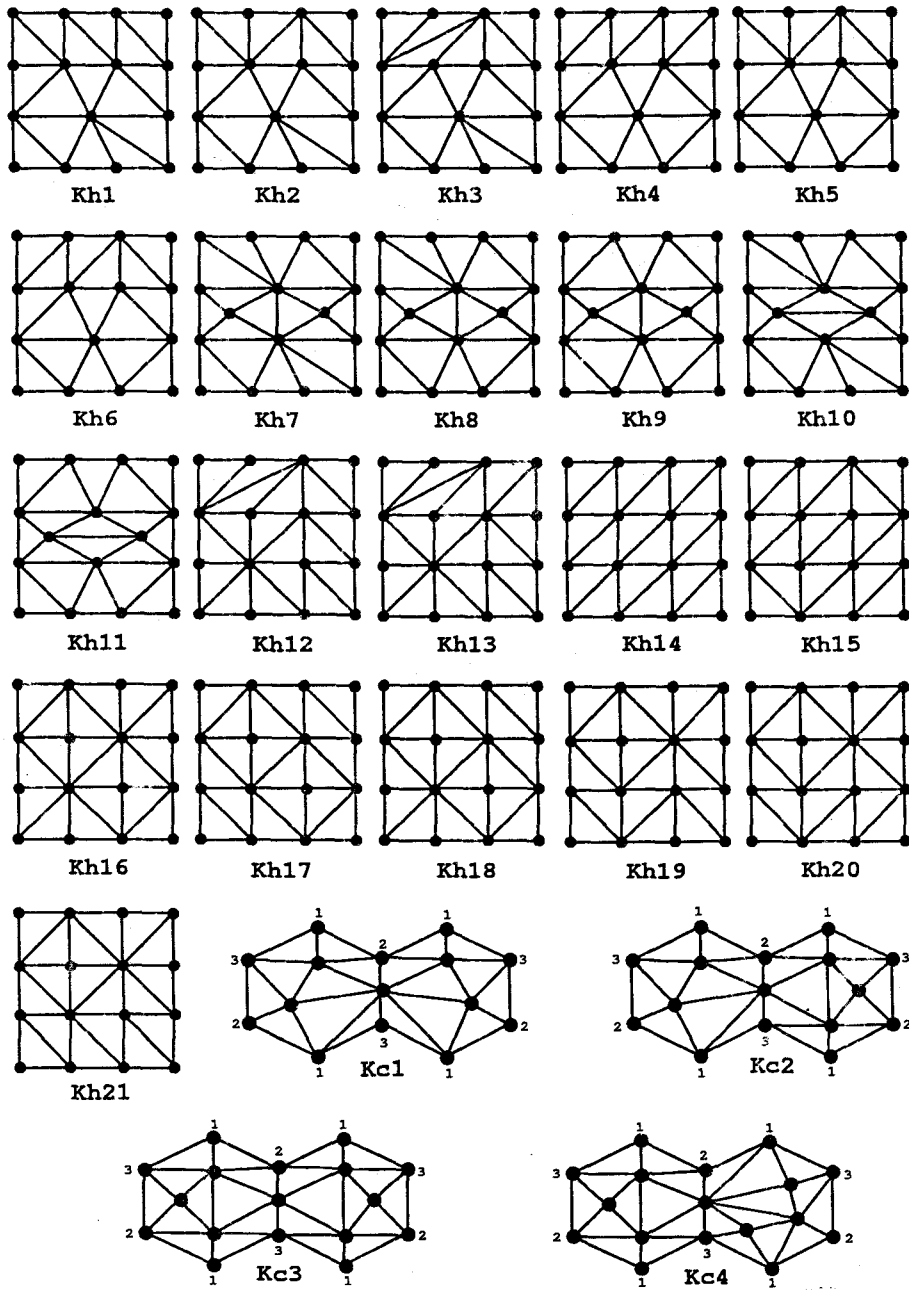


Figura 2.1: Triangulaciones irreducibles de la botella de Klein, dadas por Lawrencenko y Negami en [35].

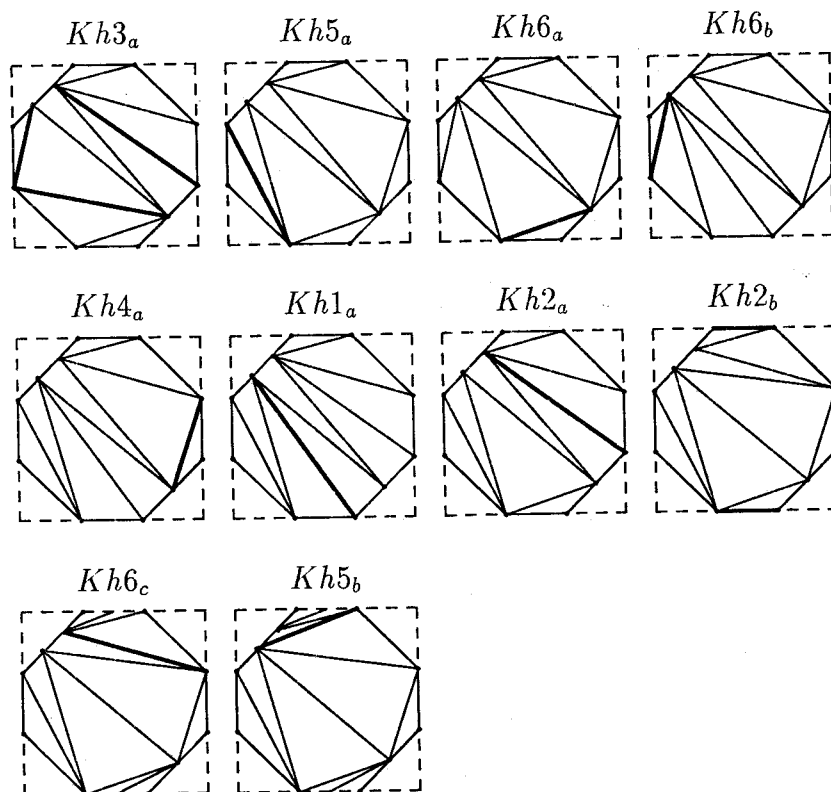


Figura 2.2: Peritriangulaciones irreducibles de la botella de Klein con siete vértices.

2.3 Flips diagonales en peritriangulaciones de la botella de Klein.

Tal y como dijimos en la introducción, esta sección está dedicada a demostrar que cualesquiera dos peritriangulaciones de la botella de Klein con el mismo número de vértices, se pueden transformar la una en la otra mediante una secuencia de flips diagonales, salvo homeomorfismo.

En primer lugar veremos que cualesquiera dos peritriangulaciones irreducibles con el mismo número de vértices se pueden transformar entre sí mediante una secuencia de flips diagonales. Posteriormente demostraremos que cualquier peritriangulación de la botella de Klein se puede llevar a una

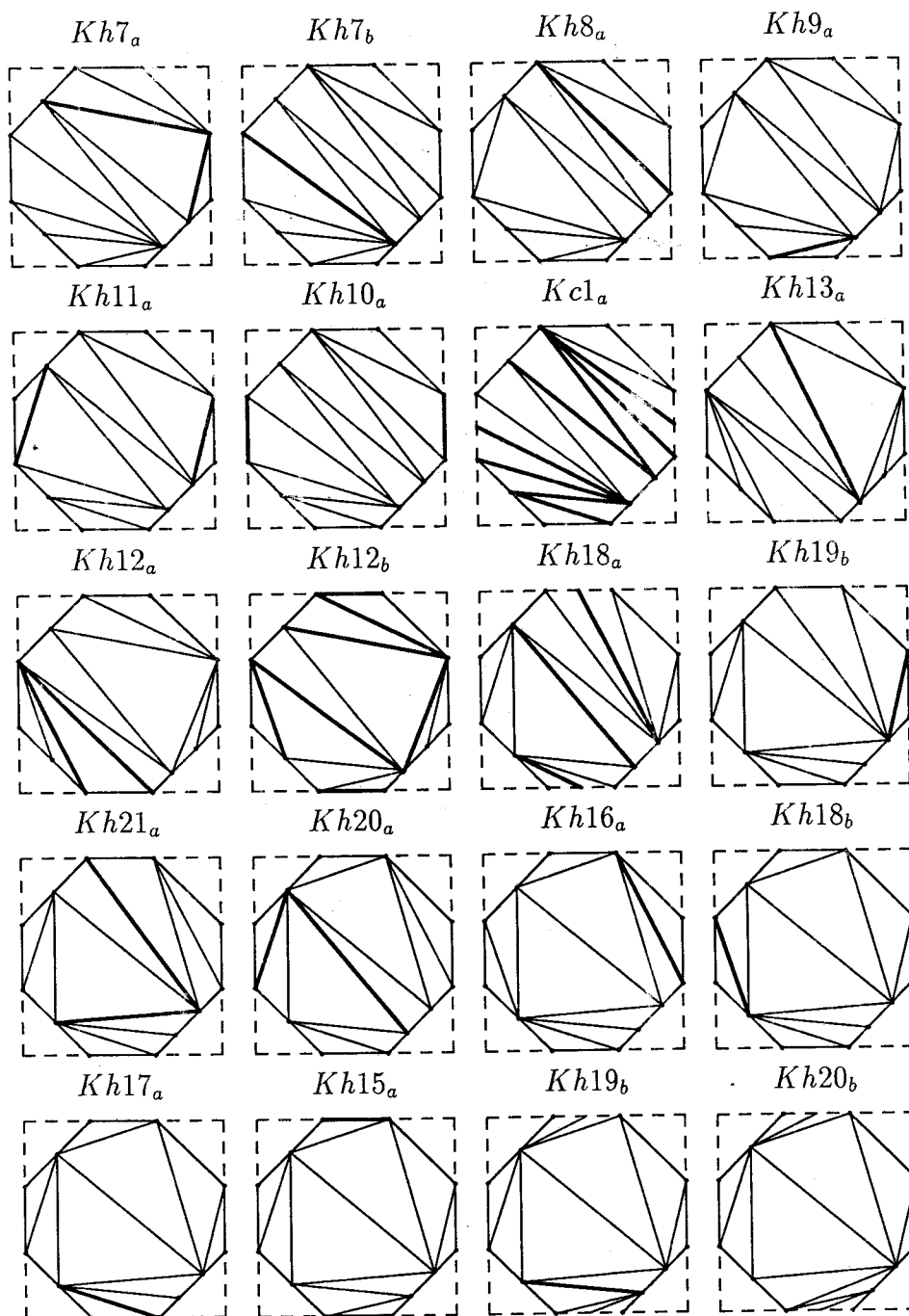


Figura 2.3: Peritriangulaciones irreducibles de la botella de Klein con ocho vértices.

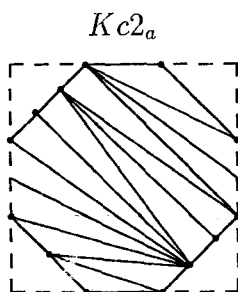


Figura 2.4 : La única peritriangulación irreducible de la botella de Klein con nueve vértices.

de las irreducibles por flips diagonales y contracciones de arista, sin embargo, puesto que las contracciones de arista disminuyen el número de vértices de una peritriangulación, habremos de recurrir a la operación de inserción de vértices, ya definida en el capítulo anterior, para establecer la conexión del grafo de peritriangulaciones.

Sea Q_i ($i = 7, 8, 9, 10$) el conjunto de peritriangulaciones irreducibles de la botella de Klein con exactamente i vértices.

Lema 2.3.1. *Cualesquiera dos peritriangulaciones irreducibles $G, G' \in Q_i$, $i = 7, 8, 10$, se pueden transformar la una en la otra mediante una secuencia de flips diagonales, salvo homeomorfismo. Más aún, cualquier $G \in Q_i$, $i = 8, 9, 10$, se puede transformar en una peritriangulación no irreducible mediante una secuencia de flips diagonales.*

Demostración: Las líneas que aparecen dibujadas más gruesas en las Figuras 2.2, 2.3, 2.4 y 2.5, muestran las aristas a las que se les tiene que aplicar un flip diagonal para transformar cada peritriangulación en la siguiente. Observemos que todos los flips diagonales preservan la simplicidad de los grafos y por tanto se tiene demostrada la primera afirmación del enunciado.

Para probar la segunda parte, basta encontrar una peritriangulación en cada Q_i que pueda ser transformada mediante una secuencia de flips diagonales en

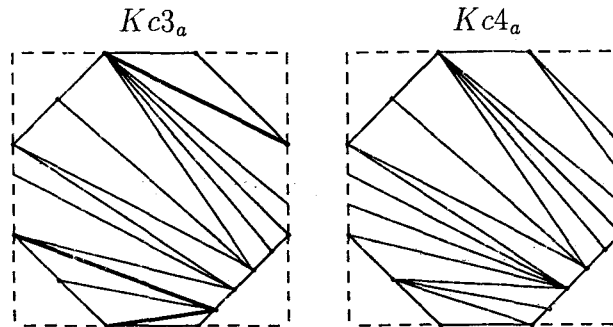


Figura 2.5: Peritriangulaciones de la botella de Klein con diez vértices.

otra que no sea irreducible. El caso (a) de la Figura 2.6 muestra este hecho para Q_8 ; se aplica un flip diagonal a la arista que aparece con trazo más grueso en el dibujo de la izquierda para transformar $Kh7_a$ en una peritriangulación de la botella de Klein no irreducible -la arista gruesa en el dibujo del centro se puede contraer-. Los casos (b) y (c) de esta Figura demuestran el resultado para Q_9 y Q_{10} , respectivamente. \triangle

Del lema anterior se deduce de forma inmediata el siguiente resultado.

Proposición 2.3.1. *Si $K \in Q_7$, entonces cualquier peritriangulación de la botella de Klein se puede transformar en K mediante una secuencia de flips diagonales y contracciones de aristas.*

Sea G una peritriangulación de la botella de Klein y $\partial(C_E)$ el borde de su cara exterior. Consideramos una arista $xy \in E(C)$ tal que xyz acota una cara en G . Subdividiendo xy por un vértice v y añadiendo la arista vz se obtiene otra peritriangulación de la botella de Klein G' con $|V(G')| = |V(G)| + 1$. En este caso diremos que G' se ha obtenido de G insertando un vértice de valencia 3 en la arista xy .

Esta operación ya fue definida para peritriangulaciones tóricas en la segunda sección del Capítulo 1 y se demostró que el vértice insertado v se puede mover a cualquier arista de la cara exterior mediante una secuencia de flips

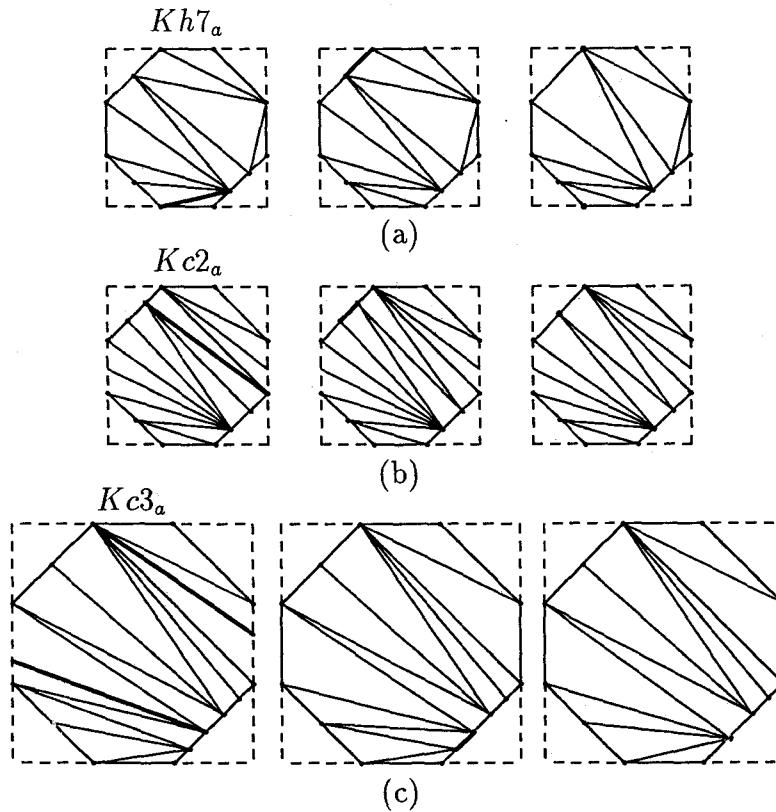


Figura 2.6: Peritriangulaciones no irreducibles en \mathcal{Q}_8 , \mathcal{Q}_9 y \mathcal{Q}_{10} .

diagonales. Este resultado también se mantiene para peritriangulaciones de la botella de Klein y puesto que su demostración es similar, no la incluimos de nuevo. Observemos que en el enunciado que presentamos a continuación y que recoge la adaptación del Lema 1.3.7 para la botella de Klein, hemos eliminado la condición sobre la valencia mínima de la peritriangulación, aunque la demostración dada anteriormente sigue siendo igualmente válida para este caso.

Lema 2.3.2. *Sea G una peritriangulación de la botella de Klein y e y e' dos aristas de la frontera C de G . Si G_1 y G_2 se obtienen de G insertando un vértice de valencia 3 en e y e' , respectivamente, entonces G_1 y G_2 se pueden transformar la una en la otra mediante una secuencia de flips diagonales.*

Sea G una peritriangulación de la botella de Klein con frontera C y xyz una cara de G tal que $xy \in E(C)$. Reemplazamos la arista xy por un camino $xv_1 \dots v_m y$ de longitud $m + 1$ y unimos v_i y z para $i = 1, \dots, m$. Es evidente que el grafo que resulta es una nueva peritriangulación de la botella de Klein, que denotaremos por $G + \Sigma_m$. En virtud del Lema 2.3.2, esta notación está bien definida salvo flips diagonales, es decir, es independiente de la elección de la arista en la que se insertan los vértices de valencia 3.

El siguiente resultado es la adaptación para la botella de Klein de los Lemas 1.3.8, 1.3.9 y 1.3.10 que aparecen en la segunda sección del Capítulo 1 para peritriangulaciones tóricas. De nuevo, las demostraciones son análogas a las dadas para el caso tórico y por tanto no las incluimos en este capítulo.

Lema 2.3.3. *Sean G y T dos peritriangulaciones de la botella de Klein.*

- a) *Si G se puede transformar en T mediante una contracción de arista, entonces para cualquier número natural k , $G + \Sigma_k$ se puede transformar en $T + \Sigma_{k+1}$ mediante una secuencia de flips diagonales.*
- b) *Si G se puede transformar en T mediante un flip diagonal, entonces para cualquier número natural k , $G + \Sigma_k$ se puede transformar en $T + \Sigma_k$ mediante una secuencia de flips diagonales.*
- c) *Si G se puede transformar en T mediante una secuencia de contracciones de aristas y flips diagonales, entonces G se puede transformar en $T + \Sigma_m$ mediante una secuencia de flips diagonales, donde $m = |V(G)| - |V(T)|$.*

Ahora estamos en condiciones de demostrar el resultado principal de este capítulo.

Teorema 2.3.1. *Cualesquiera dos peritriangulaciones de la botella de Klein con el mismo número de vértices, se pueden transformar la una en la otra mediante una secuencia de flips diagonales, salvo homeomorfismo.*

Demostración: Sea T_7 un elemento fijo de Q_7 ; por los Lemas 2.3.1 y 2.3.3 (c), cualquier peritriangulación se puede transformar en T_7 mediante una

secuencia de contracciones de arista y flips diagonales. Por tanto, cualesquiera dos peritriangulaciones de la botella de Klein G y G' con $|V(G)| = |V(G')| = n$ se pueden transformar la una en la otra mediante una secuencia de flips diagonales, salvo homeomorfismo, via la forma estándar $T_7 + \Sigma_m$, donde $m = n - |V(T_7)|$. \triangle

Al igual que en el caso tórico, también es posible considerar las versiones etiquetadas de los teoremas anteriores.

Teorema 2.3.2. *Cualesquiera dos peritriangulaciones etiquetadas de la botella de Klein con el mismo número de vértices se pueden transformar la una en la otra mediante una secuencia de flips diagonales, salvo homeomorfismo si y sólo si, los etiquetados de vértices de sus fronteras son equivalente salvo permutación cíclica.*

Demostración: La demostración de este resultado es similar a la dada en el Capítulo 1 para el Teorema 1.3.5, simplemente considerando, en lugar de la forma $K_6 + \Sigma_{n-6}$, las peritriangulaciones de la forma $T_7 + \Sigma_{n-|V(T_7)|}$, siendo T_7 cada una de las peritriangulaciones irreducibles de la botella de Klein con siete vértices. \triangle

Como ya hemos comentado anteriormente, a partir de una peritriangulación G con n vértices, es posible obtener una triangulación G' de la misma superficie con $n + 1$ vértices, uno de ellos de valencia n , simplemente poniendo un vértice en la cara exterior de G y uniéndolo con todos los vértices de G . Por tanto, el Teorema 2.3.1 implica el siguiente corolario, que es más fuerte que el resultado que se obtiene en [44] con respecto a la valencia máxima.

Corolario 2.3.1. *Sean G y G' dos triangulaciones de la botella de Klein con n vértices. Si la valencia máxima de G y G' es $n - 1$, entonces G y G' se pueden transformar la una en la otra mediante una secuencia de flips diagonales, preservando la valencia máxima $n - 1$.*

2.4 Conclusiones y problemas abiertos

En este capítulo hemos establecido la conexión del grafo de triangulaciones de un polígono en la botella de Klein, hecho que generaliza el resultado obtenido para polígonos planos por Wagner [68] y para el plano proyectivo por Edelman y Reiner [17].

Cabe ahora plantearse el estudio de otras propiedades del grafo de triangulaciones en esta superficie, siguiendo así la línea abierta en el plano, donde es conocido que el grafo de triangulaciones de un polígono es conexo [30], tiene diámetro lineal si el número de vértices es suficientemente alto [61] y que es hamiltoniano [38].

Capítulo 3

Flips en peritriangulaciones de superficies

En este capítulo demostramos que cualesquiera dos triangulaciones de un polígono en una superficie cerrada se pueden transformar entre sí mediante una secuencia de flips diagonales, salvo isotopía, si el polígono tiene un número suficientemente alto de vértices. En otras palabras, probamos que el grafo de triangulaciones de un polígono de n vértices es conexo en cualquier superficie cerrada, si n es suficientemente alto.

3.1 Introducción

Como comentamos en la introducción de esta memoria, las triangulaciones de polígonos topológicos en superficies generalizan el concepto plano de triangulación de un polígono convexo no etiquetado o desde un punto de vista topológico, de grafo periplano maximal. Recordemos que una triangulación de un polígono en una superficie cerrada F^2 es una inmersión de un grafo simple en F^2 en la que existe una cara 2 – *celular* donde se encuentran todos los vértices, llamada cara exterior (que denotamos por C_E) y tal que el resto de las caras son triangulares.

Así, la operación de flip diagonal en las triangulaciones de polígonos se define solamente para aristas que no están en el borde de la cara exterior y consiste en intercambiar una diagonal por otra en el cuadrilátero formado por la unión de dos caras triangulares adyacentes (Figura 0.18). Además, puesto que pretendemos mantener la simplicidad del grafo, no se aplicará un flip diagonal si con él se crea una arista doble, es decir, si la nueva diagonal es una arista que ya existía. De esta forma, el resultado de aplicar un flip diagonal a una triangulación de un polígono es de nuevo una triangulación del polígono. Esto nos permite definir el grafo de triangulaciones de un polígono de n vértices en una superficie F^2 , como el grafo cuyos vértices son las triangulaciones del polígono y tal que una arista une dos vértices si las correspondientes triangulaciones se transforman entre sí mediante un flip diagonal.

En el caso plano, se han estudiado múltiples propiedades sobre el grafo de triangulaciones de un polígono, tales como la conexión, la regularidad, el centro [30], el diámetro [61], etc. y en los Capítulos 1 y 2 de esta memoria hemos establecido la conexión del grafo de triangulaciones en el toro y la botella de Klein. En ambos casos, los argumentos utilizados dependen fuertemente de la topología de la superficie considerada, ya que recurrimos a triangulaciones de polígonos específicas de cada superficie: la única triangulación de un polígono de seis vértices en el toro y las triangulaciones de polígonos irreducibles en la botella de Klein.

En este capítulo abordamos la misma cuestión en una superficie cerrada genérica. La complejidad de este problema radica precisamente en la arbitrariedad de la superficie, ya que no podremos apoyarnos en la topología de la misma como hicimos en el caso tórico y en la botella de Klein.

En la primera sección recordamos el concepto de pseudo-triangulación de un polígono, que a grandes rasgos puede definirse como una triangulación de un polígono que no es necesariamente simple, i.e., puede tener lazos y aristas múltiples, y establecemos la conexión del grafo de pseudo-triangulaciones de un polígono de n vértices en cualquier superficie.

En la segunda sección, recordamos el concepto de triangulación de un polígono irreducible y enunciamos algunos resultados, ya demostrados en capítulos anteriores y que son fácilmente adaptables a una superficie genérica.

Finalmente, definimos una nueva operación sobre las aristas de una pseudo-triangulación de un polígono, la *extensión en banda*, que nos facilitará el paso de las pseudo-triangulaciones a las triangulaciones de polígonos.

Al igual que en los capítulos precedentes, por simplificar llamaremos *peritriangulaciones* y *pseudo-peritriangulaciones* a las triangulaciones y pseudo-triangulaciones de polígonos, respectivamente.

3.2 Pseudo-peritriangulaciones

Aunque para transformar una peritriangulación en otra mediante flips diagonales necesitamos garantizar la simplicidad de los grafos en los pasos intermedios, necesitamos recurrir en primer lugar a un tipo particular de peritriangulaciones, las pseudo-peritriangulaciones, que en general contendrán aristas múltiples y lazos.

Una *pseudo-peritriangulación* de una superficie cerrada F^2 es una inmersión fija de un grafo, posiblemente no simple, en F^2 tal que existe una cara específica, llamada *cara exterior*, acotada por un ciclo en el que aparecen todos los vértices y el resto de las caras son todas triangulares. El flip diagonal de una arista que no pertenezca al borde de la cara exterior de una pseudo-peritriangulación se define de la misma forma que para las peritriangulaciones, sólo que en este caso esta operación no tiene por qué preservar la simplicidad del grafo.

Sean G_1 y G_2 dos peritriangulaciones de una superficie cerrada F^2 con el mismo número de vértices. Denotemos por $\partial(C_1)$ y $\partial(C_2)$ a los bordes de las caras exteriores de G_1 y G_2 , respectivamente. El *número de cruce*, $cr(G_1, G_2)$, de G_1 y G_2 se define como el mínimo número de puntos de cruce entre las aristas de $\Phi(G_1) \cup G_2$, para toda isotopía $\Phi : F^2 \rightarrow F^2$ tal que:

- a) $\Phi(\partial(C_1)) = \partial(C_2)$ y
- b) cada par de aristas $e_1 \in E(G_1 - \partial(C_1))$ y $e_2 \in E(G_2 - \partial(C_2))$, o bien coinciden ($\Phi(e_1) = e_2$), o bien se cruzan transversalmente en un número finito de puntos, vía Φ .

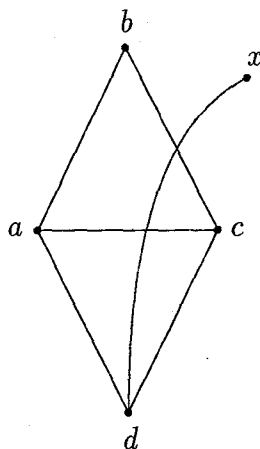
El siguiente resultado para pseudo-peritriangulaciones es similar al obtenido por Negami [43] para pseudo-triangulaciones (una *pseudo-triangulación* de una superficie F^2 es una inmersión de un multigrafo en F^2 en el que todas las caras son triangulares).

Teorema 3.2.1. *Sean P y P' dos pseudo-peritriangulaciones de una superficie cerrada F^2 con el mismo número de vértices. Entonces, se pueden transformar la una en la otra, salvo isotopía, mediante una secuencia de flips diagonales de longitud a lo sumo $cr(P, P')$.*

Demostración: Sean P y P' dos pseudo-peritriangulaciones de una superficie cerrada F^2 y denotemos a los bordes de sus caras exteriores por $\partial(C)$ y $\partial(C')$, respectivamente. Supongamos que P y P' tienen el mismo número de vértices y que sumergimos P y P' simultáneamente en la superficie haciendo que $\partial(C)$ y $\partial(C')$ coincidan. Podemos suponer entonces que los cruces entre P y P' se producen sólo en aristas internas y que ninguna isotopía puede disminuir este número de cruces, que denotaremos por X . Si existe un par de aristas $e \in E(P)$ y $e' \in E(P')$ que acotan una región digonal (esto es, una región homeomorfa a un disco abierto y cuyo borde lo forman dos aristas), entonces e' es la imagen por alguna isotopía de la arista e y podemos suponer por tanto que $e = e'$. Esto quiere decir que inicialmente, el valor de X coincide con $cr(P, P')$. Veamos que aplicando flips diagonales a las aristas interiores de P es posible eliminar los puntos de cruce entre P y P' y disminuir la diferencia simétrica $E(P) \Delta E(P')$.

Si P y P' todavía no coinciden, podemos encontrar una cara adc de P y una arista dx de P' que no es arista de P y que cruza a través de adc . Denotemos por abc al triángulo que comparte la arista ac con adc (ver Figura 3.1) y veamos en primer lugar que las caras abc y adc no son idénticas. Si lo fueran, podemos suponer que ac y ad coinciden. Si el sentido de recorrido de ac coincide con el de ad , entonces $\delta_P(a) = 1$ y la cara adc forma una región monogonal acotada por un lazo que se cierra en $d = c$ y en cuyo interior se encuentra la arista ad como se muestra en la Figura 3.2 (a), pero esta situación no puede darse ya que P es una pseudo-peritriangulación y no puede tener vértices de valencia 1.

Por otra parte, si el sentido de recorrido de ac coincide con el de da , entonces la cara adc forma un *gorro cruzado* (*crosscap*: banda de Möbius) acotado por

Figura 3.1: $abcd$ y dx .

un lazo que se cierra en $d = c$ (ver Figura 3.2 (b), en la que el símbolo “ \otimes ” representa un gorro cruzado y cada par de puntos antipodales en él están identificados). En este caso, la arista dx no terminaría en este plano proyectivo y cruzaría ac en un número infinito de puntos y esto es una contradicción. Por tanto, las caras abc y adc no son idénticas.

Si dx termina en b en el cuadrilátero $abcd$, entonces el flip diagonal de ac puede eliminar el único punto de cruce en dx y así $db = dx$. En caso contrario, podemos suponer que dx cruza bc después de cruzar ac . Tras aplicar un flip diagonal a la arista ac , aplicamos de nuevo esta operación a la arista bc y denotemos por bfc al triángulo que comparte la arista bc con la cara abc . Veamos que las caras bfc y bdc son también distintas. Si no lo fueran, o bien $bd = bc$ o bien $cd = cb$. El primer caso no puede darse puesto que bd es una nueva arista que ha aparecido tras aplicar un flip diagonal a ac , mientras que bc es una arista que existía inicialmente.

En el segundo caso, puesto que ni ac ni bd son aristas de la cara exterior, dx no puede terminar en un gorro cruzado como en el caso anterior y esto contradice nuestras hipótesis.

La Figura 3.3 muestra los segmentos de aristas de P' que cruzan a través del cuadrilátero $abcd$ en P . Sean X_a , X_b y X_c el número de segmentos de P' alrededor de las esquinas en a , b y c , respectivamente y X_{dx} el número de cruces de dx inicialmente. Consideremos el efecto de aplicar un flip diagonal

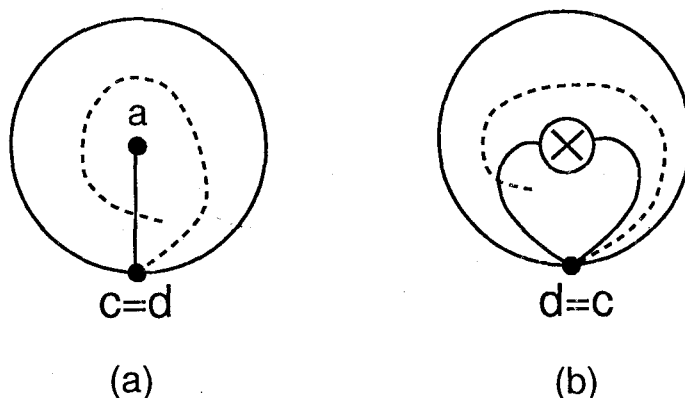


Figura 3.2: Una región monogonal y un gorro cruzado acotado por un lazo.

a ac en P sobre el número de cruces.

Si aplicamos un flip diagonal a ac , desaparecen $X_a + X_c$ puntos de cruce y aparecen X_b nuevos en db . Si $X_a + X_c > X_b$, el número total de cruces ha disminuído con este flip, pero esta desigualdad no es cierta en general y puede que, en el peor de los casos, se haya incrementado el número total de cruces con X_b nuevos, a los que llamaremos en lo que resta de demostración, puntos de cruce *surplus*. Puesto que las dos caras bfc y bdc son distintas tras el flip diagonal de ac , podemos aplicar un flip diagonal a bc e intercambiarla por df en el cuadrilátero $bfgd$ de forma que los X_b puntos de cruce en bc alrededor de b desaparezcan. Denotemos por X_f al valor análogo alrededor de f ; podemos contar los X_b puntos de cruce como si no fueran de surplus y considerar los X_f nuevos puntos de cruce en df como los nuevos puntos de cruce surplus.

Si dx termina en el vértice f (i.e., dx coincide con df) en el cuadrilátero $bfgd$, entonces $X_f = 0$, es decir, no hay puntos de cruce surplus; en caso contrario, reiteramos el proceso anterior. Este argumento finalizará cuando la arista en P a la que se le aplica un flip diagonal coincida con dx . Es importante que a lo largo del proceso los puntos de cruce surplus aparezcan solamente en la última arista a la que se le ha aplicado el flip. Cuando el

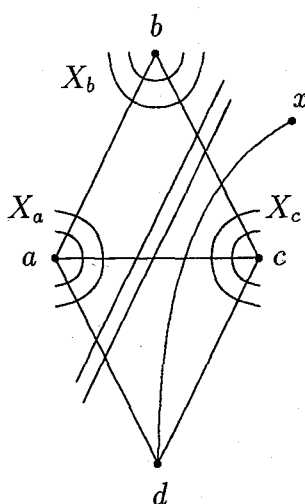


Figura 3.3: Eliminando puntos de cruce mediante un flip diagonal.

algoritmo llega a su fin, han desaparecido todos los puntos de cruce surplus y el número total de puntos de cruce no excede de $X - X_{dx}$ puesto que la secuencia de flips diagonales elimina todos los cruces de dx uno por uno. Observemos que el número total de flips es exactamente X_{dx} .

Podemos reiterar este proceso hasta que P coincida con P' y la secuencia de flips diagonales de longitud X_{dx} en cada paso no incrementa el número de cruces sobre otras aristas distintas de dx y sin embargo disminuye el número total en al menos X_{dx} cruces. Por tanto, la longitud de la secuencia completa de flips diagonales no excede del valor inicial de X . \triangle

Una arista *auto-incidente* e de una pseudo-peritriangulación es una arista interior tal que existe una cara triangular en cuyo ciclo frontera e aparece dos veces. La demostración del algoritmo anterior garantiza que para transformar una pseudo-peritriangulación en otra, no es necesario aplicar ningún flip diagonal a aristas auto-incidentes, hecho que será utilizado más adelante.

En la siguiente sección recordamos el concepto de peritriangulación irreducible, demostramos la finitud de su número en cualquier superficie y recogemos la adaptación de algunos resultados demostrados en capítulos anteriores para una superficie genérica.

3.3 Peritriangulaciones irreducibles

Recordemos que si G es una triangulación de una superficie cerrada F^2 y abc y acd son dos de sus caras, que comparten la arista $e = ac$, la contracción de e consiste en identificar los vértices finales a y c de e y reemplazar las aristas múltiples $\{ab, ad\}$ y $\{cb, cd\}$ por dos aristas simples (Figura 0.19). Una triangulación es irreducible si no posee aristas contractibles, es decir, si la contracción de cualquier arista provoca la pérdida de la simplicidad del grafo.

Es bien conocido que el número de triangulaciones irreducibles de una superficie cerrada es finito, salvo homeomorfismo. Este hecho se deduce de la solución a la conjetura de Wagner dada por Robertson y Seymour [54]. Existen diversos trabajos [5, 6, 17] que prueban directamente la finitud del número de triangulaciones irreducibles acotando su número de vértices, aunque actualmente, la mejor cota conocida es la dada por Nakamoto y Ota que se recoge en el siguiente teorema.

Teorema 3.3.1. [42] *Sea F^2 una superficie cerrada y simple (distinta de la esfera) con característica de Euler $\chi(F^2)$. Si G es una triangulación irreducible de F^2 , entonces $|V(G)| \leq 171(2 - \chi(F^2)) - 72$.*

La contracción de arista en las peritriangulaciones se define sólo para aristas de la frontera de la cara exterior (Figura 3.4) y al igual que para las triangulaciones esta operación sólo se permite si al realizarla no se pierde la simplicidad del grafo.

Veamos que el número de peritriangulaciones irreducibles de una superficie cerrada es siempre finito, salvo homeomorfismo.

Proposición 3.3.1. *Existe un número finito de peritriangulaciones irreducibles de cualquier superficie cerrada, salvo homeomorfismo.*

Demostración: La demostración de este resultado es una consecuencia inmediata del Teorema 3.3.1 y el Lema 2.2.1: si G es una peritriangulación irreducible de una superficie cerrada F^2 se tiene

$$|V(G)| \leq (171r - 72) - 1 = 171r - 73. \quad \triangle$$

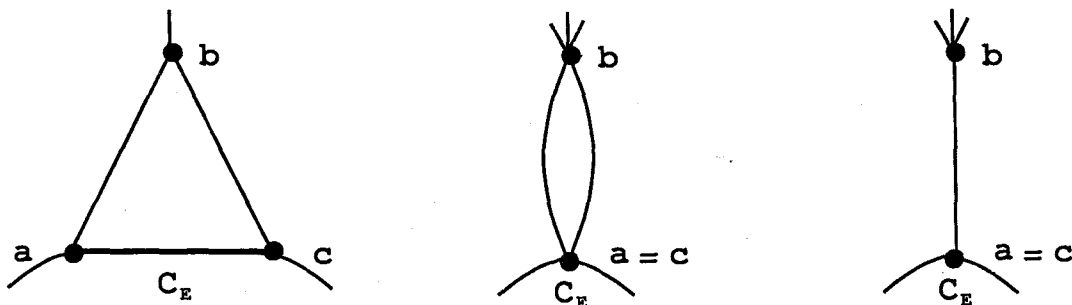


Figura 3.4: La contracción de una arista en una peritriangulación.

Sea G una peritriangulación de una superficie cerrada F^2 y sea xyz una cara de G tal que la arista xy pertenece a la frontera de la cara exterior. Subdividimos la arista xy por un vértice v y añadimos la arista vz ; de esta forma obtenemos una nueva peritriangulación G' con $|V(G')| = |V(G)| + 1$ y decimos que G' se obtiene de G insertando un vértice de valencia 3 en la arista xy .

Esta operación ya fue definida para peritriangulaciones tóricas en el Capítulo 1 y posteriormente para peritriangulaciones de la botella de Klein y se demostró que el vértice insertado v se puede mover a cualquier arista de la cara exterior mediante una secuencia de flips diagonales. Este resultado también se mantiene para peritriangulaciones de una superficie arbitraria y puesto que su demostración es análoga, no la incluimos de nuevo. Observemos que en el enunciado que presentamos a continuación y que recoge la adaptación del Lema 1.3.7 hemos añadido una condición de isotopía, aunque la demostración dada en el Capítulo 1 sigue siendo igualmente válida para este caso.

Lema 3.3.1. *Sea G una peritriangulación de una superficie cerrada F^2 , $\partial(C)$ el borde de su cara exterior y $e, e' \in E(\partial(C))$. Sea G_e (resp., $G_{e'}$) la peritriangulación de F^2 obtenida de G insertando un vértice de valencia 3 en e (resp., e'). Entonces G_e y $G_{e'}$ se pueden transformar entre sí mediante una*

secuencia de flips diagonales, salvo isotopía.

Denotemos por $G + \Sigma_m$ a la peritriangulación obtenida de G añadiendo m vértices de valencia 3 (ver Figura 3.5). Por el lema anterior, puesto que cualquier vértice de valencia 3 insertado se puede mover mediante flips a cualquier otra arista externa, cualesquiera dos peritriangulaciones con la notación $G + \Sigma_m$ se pueden transformar entre sí mediante una secuencia de flips diagonales y por tanto esta notación está bien definida, salvo flips diagonales (i.e., es independiente de la elección de las aristas subdivididas por los m vértices de valencia 3).

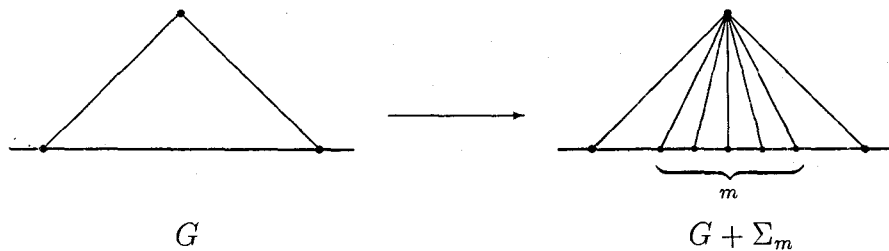


Figura 3.5: Insertando m vértices de valencia 3.

El siguiente resultado es la adaptación para la botella de Klein del Lema 1.3.10 que aparece en el Capítulo 1 para peritriangulaciones tóricas. De nuevo, la demostración es análoga a la dada para el caso tórico y por tanto no la incluimos de nuevo.

Lema 3.3.2. Sean G y T dos peritriangulaciones de una superficie cerrada F^2 . Si G es contractible a T , entonces G se puede transformar en $T + \Sigma_m$, salvo isotopía, mediante una secuencia de flips diagonales, donde $m = |V(G)| - |V(T)|$.

La finitud del conjunto de peritriangulaciones irreducibles así como los resultados anteriores serán determinantes para establecer la conexión del grafo de peritriangulaciones de n vértices de una superficie, pero antes es necesario introducir una nueva operación que actuará sobre las aristas de una pseudo-peritriangulación.

3.4 De las pseudo-peritriangulaciones a las peritriangulaciones

Sea P una pseudo-peritriangulación de una superficie cerrada F^2 , $\partial(C_E)$ el borde de su cara exterior y $e = uv \notin E(\partial(C_E))$ una arista de P . Vamos a construir una nueva pseudo-peritriangulación a partir de P y para ello definimos la siguiente operación sobre la arista e .

Consideremos por un momento la cara exterior de P como un agujero de F^2 , es decir, como si $\partial(C_E)$ fuera la frontera de F^2 y denotemos a esta superficie agujereada por \tilde{F}^2 . Ahora cortamos \tilde{F}^2 a lo largo de $e = uv$ desde v hasta u , y denotamos por e_R y por e_L a las copias de e que quedan a la derecha y la izquierda, respectivamente, de lo que era la arista e (tiene sentido hablar de la derecha y la izquierda de e por ser una arista que divide a la superficie en dos componentes). La frontera de la superficie obtenida es $C \cup e_R \cup e_L$ y podría no ser conexa. Supongamos que e_R (resp., e_L) comienza en un vértice v_R (resp., v_L) y termina en un vértice u_R (resp., u_L). Unimos v_R y v_L (resp., u_R y u_L) por un camino $v_R v_1 v_2 v_L$ de longitud 3 (resp., $u_R u_1 u_2 u_L$) y añadimos aristas $v_1 u_1$ y $v_2 u_2$ considerando los 4 - ciclos $v_R u_R u_1 v_1$, $v_1 u_1 u_2 v_2$ y $v_2 u_2 u_L v_L$ como regiones cuadrangulares en cada una de las cuales, finalmente, añadimos una diagonal (ver Figura 3.6). Observemos que la inmersión que resulta es también una pseudo-peritriangulación de F^2 .

Llamaremos a esta operación la *extensión en banda* de la arista e ; a la unión de las cuatro regiones cuadrangulares correspondientes a e , la *banda* asociada a e , que denotaremos por \tilde{e} y a las copias e_R y e_L de e las llamaremos las *alas* de la banda \tilde{e} . El conjunto de las aristas internas incluidas en la banda \tilde{e} será denotado por $E(\tilde{e})$.

Observemos que cualquier arista $l \in E(\tilde{e})$ que no sea una ala de \tilde{e} , no es ni un lazo ni forma parte de una arista múltiple en el nuevo grafo, incluso aunque e sí sea un lazo o forme parte de una arista múltiple en P .

Definimos el *grafo enladrillado* de una pseudo-peritriangulación P y lo denotaremos por $B(P)$, a la pseudo-peritriangulación que se obtiene de aplicar la extensión en banda a todas las aristas que no pertenezcan a la frontera de la cara exterior de P . En la Figura 3.7 se muestra el grafo

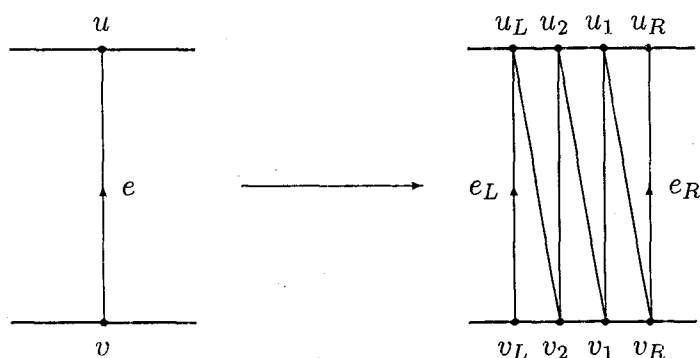


Figura 3.6: Extensión en banda de la arista e .

enladrillado que se obtiene a partir de una pseudo-peritriangulación de cinco vértices en el toro.

El siguiente lema demuestra que en realidad $E(P)$ es una peritriangulación de la superficie, es decir, no tiene aristas dobles ni lazos.

Lema 3.4.1. *Dada una pseudo-peritriangulación P de una superficie cerrada F^2 , el grafo enladrillado $B(P)$ es una peritriangulación (i.e., es un grafo simple).*

Demostración: Supongamos que $B(P)$ tiene un lazo $l \in E(\tilde{L})$, donde L es una arista interna de P ; observemos que en $E(\tilde{L})$ únicamente pueden ser lazos las alas de \tilde{L} pero si esto ocurriera, entonces L acotaría una región monogonal en P y esto es contrario a que P sea una pseudo-peritriangulación.

Supongamos ahora que $B(P)$ tiene dos aristas simples x e y uniendo el mismo par de vértices a y b . Siguiendo el mismo razonamiento anterior, x e y deben ser las alas de dos bandas distintas \tilde{X} , \tilde{Y} correspondientes a dos aristas internas distintas X , Y de P , respectivamente (la arista y podría ser una arista de la cara exterior de $B(P)$), pero en este caso se razona de forma

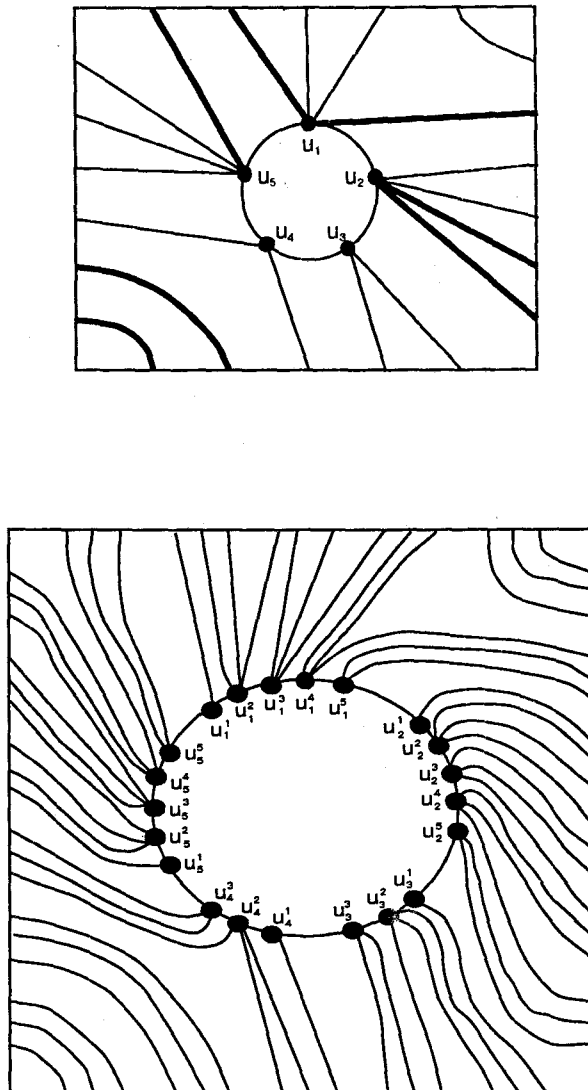


Figura 3.7: El grafo enladrillado que se obtiene de una pseudo-peritriangulación de cinco vértices en el toro.

similar). Sin embargo, esto sólo ocurre si $X \cup Y$ acota una cara digonal en P y esto es una contradicción. \triangle

Lema 3.4.2. *Sea G una peritriangulación de una superficie cerrada F^2 . Entonces, el grafo enladrillado $B(G)$ es contractible a G .*

Demostración: La demostración es trivial simplemente observando que si e es una arista interna de G , la peritriangulación que se obtiene de G al extender en banda e es claramente contractible a G . \triangle

Sean G y G' dos peritriangulaciones de una superficie cerrada F^2 ; cuando G y G' se puedan transformar entre sí mediante una secuencia de flips diagonales, salvo isotopía, manteniéndose en todos los grafos intermedios la simplicidad de los grafos (i.e., en la secuencia de flips diagonales que transforma G en G' en ningún momento se obtiene una pseudo-peritriangulación), escribiremos simplemente $G \sim_f G'$.

De los Lemas 3.3.2 y 3.4.2 se obtiene el siguiente resultado.

Lema 3.4.3. *Sea F^2 una superficie cerrada con característica de Euler $\chi(F^2)$ y sea G una peritriangulación de F^2 con n vértices. Entonces,*

$$B(G) \sim_f G + \Sigma_{6(n-3\chi(F^2)+3)}.$$

Demostración: Por la fórmula de Euler se tiene que $|E(G)| = 2|V(G)| - 3(2 - r) + 3$, por tanto, el número de aristas interiores de G es

$$|E(G)| - |V(G)| = |V(G)| - 3\chi(F^2) + 3.$$

Puesto que cada extensión en banda proporciona seis nuevos vértices, tenemos

$$|V(B(G))| - |V(G)| = 6(|V(G)| - 3\chi(F^2) + 3).$$

Por el Lema 3.4.2, $B(G)$ es contractible a G y aplicando el Lema 3.3.2 se obtiene que $B(G) \sim_f G + \Sigma_{6(n-3\chi(F^2)+3)}$. \triangle

Lema 3.4.4. Sean P y P' dos pseudo-peritriangulaciones de una superficie cerrada F^2 tal que P' se obtiene de P mediante un flip de arista. Entonces,

$$B(P) + \Sigma_6 \sim_f B(P') + \Sigma_6.$$

Demostración: Sea $Q = abcd$ un cuadrilátero en P formado por dos caras triangulares abd y bcd . Supongamos que P' se obtiene de P aplicando un flip diagonal a la arista bd . Puesto que la construcción de los grafos enladrillados $B(P)$ y $B(P')$ está fuertemente relacionada con las aristas internas de P y de P' , respectivamente, la demostración debería subdividirse en cuatro casos, dependiendo del número de aristas internas que haya en el cuadrilátero $abcd$. Vamos a suponer que todas las aristas de Q son internas ya que la demostración para los demás casos se realiza de forma análoga.

Etiquetamos los vértices de $B(P)$ correspondientes a a , b , c y d como en la Figura 3.8. El dibujo (a) representa la estructura local de $B(P) + \Sigma_6$ que corresponde a la cara $Q = abcd$ en P . Por el Lema 3.3.1, podemos suponer que a_3, a_4, a_5, c_4, c_5 y c_6 son los vértices de valencia 3 insertados. Como mencionamos tras la prueba del Teorema 3.2.1, no aplicamos flips diagonales a aristas auto-incidentes y por tanto podemos suponer que las caras abd y bcd son distintas en P y como consecuencia, los vértices.

$a_1, \dots, a_8, b_1, \dots, b_8, c_1, \dots, c_8, d_1, \dots, d_8$ son todos distintos. Entonces, la secuencia de flips diagonales que transforma la Figura 3.8 (a) en la Figura 3.8 (b) mantiene en todo momento la simplicidad de los grafos. Aplicamos ahora flips en la Figura 3.8 (b) en las regiones acotadas por $a_3a_4a_5a_6b_6b_5b_4b_3$ y por $d_3d_4d_5d_6c_6c_5c_4c_3$, respectivamente y obtenemos aristas a_3b_i y b_6a_i para $i = 3, 4, 5, 6$ y aristas d_3c_i y c_6d_i para $i = 3, 4, 5, 6$. El grafo que resulta puede ser fácilmente transformado en $B(P') + \Sigma_6$ por una secuencia de flips diagonales análoga a la que transforma (a) en (b) en la Figura 3.8. \triangle

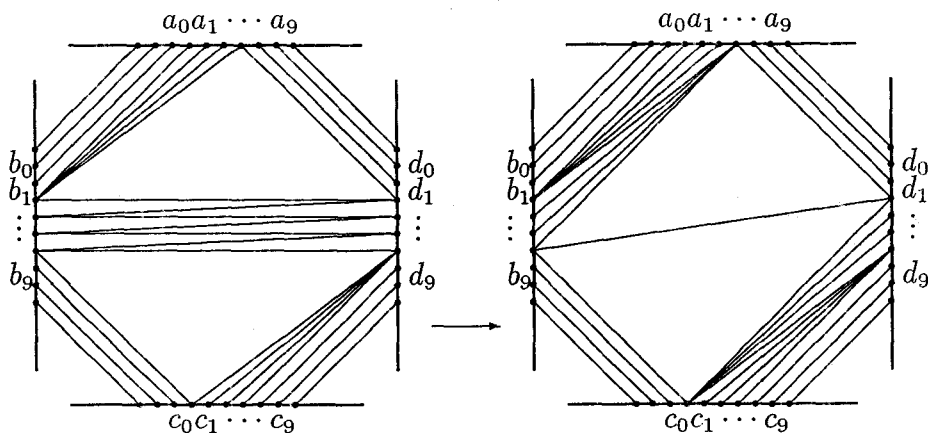


Figura 3.8: Una secuencia de flips diagonales en $B(P) + \Sigma_6$.

Lema 3.4.5. Sea F^2 una superficie cerrada con característica de Euler $\chi(F^2)$ y sean G y G' dos peritriangulaciones de F^2 con $|V(G)| = |V(G')|$. Entonces,

$$G + \Sigma_{6(|V(G)| - 3\chi(F^2) + 4)} \sim_f G' + \Sigma_{6(|V(G')| - 3\chi(F^2) + 4)}.$$

Demostración: En virtud del Teorema 3.2.1, si no mantenemos la simplicidad en los grafos intermedios, G y G' se pueden transformar entre sí mediante una secuencia de flips diagonales salvo isotopía, es decir, existe una secuencia $G = T_0, T_1, \dots, T_k = G'$ tal que

- T_0 y T_k son peritriangulaciones (i.e., simples),
- para $i = 1, \dots, k - 1$, T_i es una pseudo-peritriangulación, y
- para $j = 0, \dots, k - 1$, T_{j+1} se obtiene de T_j por un flip diagonal.

Insertamos ahora seis vértices de valencia 3 en cada uno de los grafos enladrillados de T_0, \dots, T_k , esto es, $B(T_0) + \Sigma_6, \dots, B(T_k) + \Sigma_6$; entonces, por el Lema 3.4.1, $B(T_i)$ es simple y también lo es $B(T_i) + \Sigma_6$ con $i = 0, \dots, k$. Más aún, por el Lema 3.4.4 se tiene que $B(T_i) + \Sigma_6 \sim_f B(T_{i+1}) + \Sigma_6$ para $i = 0, \dots, k - 1$. Por otra parte, en virtud del Lema 3.4.3,

$B(T_0) \sim_f T_0 + \Sigma_6(|V(T_0)|-3\chi(F^2)+3)$ y $B(T_k) \sim_f T_k + \Sigma_6(|V(T_k)|-3\chi(F^2)+3)$ y por lo tanto, $B(T_0) + \Sigma_6 \sim_f T_0 + \sigma_6(|V(T_0)|-3\chi(F^2)+4)$ y

$B(T_k) + \Sigma_6 \sim_f T_k + \sigma_6(|V(T_k)|-3\chi(F^2)+4)$. Tenemos entonces la siguiente secuencia de equivalencias que demuestra nuestro resultado,

$$G + \Sigma_6(|V(G)|-3\chi(F^2)+4) \sim_f B(T_0) + \Sigma_6 \sim_f \dots \sim_f B(T_k) + \Sigma_6 \sim_f \\ \sim_f G' + \Sigma_6(|V(G')|-3\chi(F^2)+4).$$

△

Llegados a este punto del capítulo estamos en condiciones de demostrar la conexión del grafo de peritriangulaciones de n vértices en cualquier superficie, si n es suficientemente grande.

Teorema 3.4.1. *Para cualquier superficie cerrada F^2 , existe un número natural $N(F^2)$ tal que cualesquiera dos peritriangulaciones G y G' de F^2 con $|V(G)| = |V(G')| \geq N(F^2)$ se pueden transformar entre sí mediante una secuencia de flips diagonales, salvo isotopía.*

Demostración: La Proposición 3.3.1 nos asegura la finitud del conjunto de peritriangulaciones irreducibles de F^2 , por lo que podemos describir este conjunto como $\{\tilde{I}_1, \dots, \tilde{I}_p\}$, donde las peritriangulaciones están consideradas salvo homeomorfismo. Para cada $j = 1, \dots, p$, fijamos \tilde{I}_j en F^2 y denotamos por I_j a la imagen isotópica de \tilde{I}_j en F^2 . Observemos que aunque cualquier peri-triangulación G es contractible a una del conjunto $\{I_1, \dots, I_p\}$, salvo homeomorfismo, G podría no serlo a ninguna de ellas, salvo isotopía.

Sin pérdida de generalidad, podemos suponer

$$|V(I_1)| \geq |V(I_2)| \geq \dots \geq |V(I_p)| \text{ y denotamos } m_i = |V(I_1)| - |V(I_j)| \text{ y } \\ I'_j = I_j + \Sigma_{m_j} \text{ para } j = 1, \dots, p.$$

Por el Lema 3.4.5, puesto que $|V(I'_1)| = \dots = |V(I'_p)|$, tenemos

$$I'_1 + \Sigma_6(|V(I'_1)|-3\chi(F^2)+4) \sim_f I'_2 + \Sigma_6(|V(I'_2)|-3\chi(F^2)+4) \sim_f \dots \sim_f \\ I'_p + \Sigma_6(|V(I'_p)|-3\chi(F^2)+4).$$

Más aún, por el mismo resultado, para cualquier $j \in \{1, \dots, p\}$ y cualquier homeomorfismo $h : F^2 \rightarrow F^2$ se tiene

$$h(I_j) + \Sigma_{6(|V(I_j)|-3\chi(F^2)+4)} \sim_f h'(I_j) + \Sigma_{6(|V(I_j)|-3\chi(F^2)+4)}.$$

Definimos el número natural $N(F^2)$ de nuestro enunciado como $N(F^2) = |V(I'_1)| + 6(|V(I'_1)| - 3\chi(F^2) + 4) = 7|V(I'_1)| - 18\chi(F^2) + 24$, y denotamos $k_i = N(F^2) - |V(I_i)|$ para $i = 1, \dots, p$.

Sea G una peritriangulación de F^2 con $|V(G)| \geq N(F^2)$. Puesto que G es contractible a una de las peritriangulaciones irreducibles, podemos suponer que G es contractible a una imagen homeomorfa de I_t , que denotamos por $h(I_t)$. Por el Lema 3.3.2 se tiene que $G \sim_f h(I_t) + \Sigma_m$, donde $m = |V(G)| - |V(I_t)|$. Como $|V(G)| \geq N(F^2)$ entonces

$$m \geq k_t = 7|V(I_t)| - 18\chi(F^2) + 24 - |V(I_t)| \geq 6(|V(I_t)| - 3\chi(F^2) + 4).$$

Si definimos $m' = m - k_t$, los Lemas 3.3.1 y 3.3.2 nos llevan a la siguiente secuencia de equivalencias,

$$G \sim_f h(I_t) + \Sigma_m \sim_f I_t + \Sigma_m \sim_f I_t + \Sigma_{k_t} + \Sigma_{m'} \sim_f I_1 + \Sigma_{k_1} + \Sigma_{m'} \sim_f I_1 + \Sigma_{k_1+m'}.$$

Por un razonamiento similar se deduce que si G' es otra peritriangulación de F^2 con $|V(G')| = |V(G)| \geq N(F^2)$ entonces, $G' \sim_f I_1 + \Sigma_{k_1+m'}$ y podemos concluir que G y G' son equivalentes. \triangle

Si bien el Teorema 3.4.1 nos asegura que cualesquiera dos triangulaciones de un polígono en una superficie F^2 se pueden transformar entre sí mediante una secuencia de flips diagonales si el polígono tiene un número de vértices suficientemente alto, este teorema no nos informa sobre el valor de este mínimo número de vértices. Sin embargo, como consecuencia de los resultados anteriores, podemos obtener una cota superior para dicho número.

Corolario 3.4.1. *Sea $N(F^2)$ el mínimo valor que hace el Teorema 3.4.1 válido. Entonces, $N(F^2) \leq 1921 - 1215\chi(F^2)$.*

Demostración: En la demostración del Teorema 3.4.1 teníamos que $N(F^2) = 7|V(I_1')| - 18\chi(F^2) + 24$ y el número $|V(I_1')| = |V(I_1)|$ puede ser acotado por $|V(I_1)| \leq 171(2 - \chi(F^2)) - 71$ (esta desigualdad fue obtenida en la demostración de la Proposición 3.3.1). Por tanto,
$$N(F^2) \leq 7(171(2 - \chi(F^2)) - 71) - 18\chi(F^2) + 24 = 1921 - 1215\chi(F^2). \quad \triangle$$

3.5 Conclusiones y problemas abiertos

En este capítulo hemos demostrado la conexión del grafo de triangulaciones de un polígono en cualquier superficie, para polígonos con un número de vértices suficientemente alto.

Sería interesante obtener un resultado más general para polígonos con cualquier número de vértices, o en su defecto, obtener cotas más ajustadas para el valor $N(F^2)$ definido en el Teorema 3.4.1.

Por otra parte, habría que considerar la posibilidad de estudiar más propiedades del grafo de triangulaciones, tales como el diámetro o el ser hamiltoniano, si bien parece complicado abordar estos problemas debido a la arbitrariedad de la superficie.

Capítulo 4

Triangulaciones métricas de superficies

El objetivo de este trabajo es, como dijimos en la Introducción, generalizar los conceptos de triangulación de nubes de puntos y de polígonos a superficies distintas al plano. Parece lógico entonces dedicar un capítulo a la generalización más directa de estos dos conceptos, esto es, una generalización en la que se tenga en cuenta la métrica de cada una de las superficies.

En este Capítulo tratamos fundamentalmente el problema de la conexión del grafo de triangulaciones de nubes de puntos y de polígonos desde un punto de vista métrico en diferentes superficies.

4.1 Introducción

En este capítulo consideramos triangulaciones de nubes de puntos y de polígonos sobre la esfera, el cilindro y el toro utilizando las métricas que se definieron para estas superficies en Preliminares.

Como ya comentamos en la Introducción de esta memoria, el concepto de triangulación métrica aparece frecuentemente en los trabajos de Geometría

Computacional [18, ?, 14, 25], referido sobre todo a triangulaciones de polígonos y de nubes de puntos. En ambos casos, el principal objetivo que se persigue es el de encontrar triangulaciones óptimas según algún criterio preestablecido, tales como maximizar el mínimo ángulo [20] o la valencia máxima en los vértices [9], para utilizarlas en problemas de interpolación.

Tan importante como hallar una buena triangulación, tanto de un polígono como de una nube de puntos, es disponer de una operación que nos permita transformar dos triangulaciones entre sí. De esta forma, partiendo de cualquier triangulación y aplicando la operación definida sucesivamente siguiendo algún criterio, podremos obtener una triangulación óptima.

Las triangulaciones de nubes de puntos y de polígonos en el plano han sido objeto de múltiples estudios, tanto por su belleza intrínseca como por su aplicación a diversos problemas tales como procesamiento de imágenes [60], generación de mallados para el método de los elementos finitos [7, 31, 41, 65], interpolación de datos [50] y muchos otros como informática gráfica, modelado de sólidos y sistemas de información geográfica [1, 9, 22, 46, 57, 59, 66, 69, 70].

También se han estudiado diversas propiedades del grafo de triangulaciones tanto de polígonos como de nubes de puntos en el plano y así es conocido que el grafo de triangulaciones de un polígono es conexo [9, 20, 23, 33, 36, 46] y que tiene diámetro a lo sumo cuadrático [30]. También está establecida la conexión del grafo de triangulaciones de una nube de puntos en el plano mediante un simple algoritmo voraz que transforma cualquier triangulación del conjunto en la triangulación de Delaunay [20].

En este capítulo nos planteamos el problema de transformación de polígonos y de nubes de puntos en diferentes superficies mediante la operación de flip diagonal, ya que, como es bien sabido, la mayoría de los problemas prácticos no pueden modelizarse mediante el uso de la superficie plana, sino que requieren la utilización de otras superficies.

Comenzamos en la primera sección abordando el problema anterior para nubes de puntos y polígonos sobre la esfera. Es conocido [26] que la envolvente convexa de una nube de puntos sobre la esfera es la propia superficie si los puntos están en posición no euclídea, o algún subdominio de ésta, en caso contrario. Nos centraremos aquí en el primero de los casos, ya

que si los puntos están en posición euclídea, la mayoría de los algoritmos de triangulación de nubes de puntos en el plano pueden ser aplicados y demostramos que el grafo de triangulaciones de una nube de puntos sobre la esfera en estas condiciones es conexo.

Con respecto a los polígonos esféricos, veremos que es posible adaptar ciertos resultados sobre polígonos planos a la superficie esférica y esto nos permitirá obtener también la conexión del grafo de triangulaciones de un polígono de n vértices sobre esta superficie.

En cuanto al cilindro, es de destacar que si bien la envolvente convexa de una nube de puntos sobre la esfera es la propia superficie si los puntos están en posición no euclídea [26], esto no siempre ocurre así en el cilindro, ya que si los puntos no están comprendidos entre dos generatrices diametralmente opuestas, la envolvente convexa del conjunto es una banda no necesariamente cerrada [26] y por lo tanto, una triangulación (conjunto maximal de segmentos) de la nube no triangulará a dicha envolvente. El cilindro presenta además otro tipo de peculiaridades, como que la región a triangular no tiene por qué estar unívocamente determinada y que la triangulación óptima no es la dual del diagrama de Voronoi.

Como veremos más adelante, este comportamiento tan particular de las triangulaciones de nubes de puntos en el cilindro, impondrá un marco más restringido que en el caso plano al considerar el problema de la transformación mediante flips diagonales y más aún, nos obligará a buscar técnicas alternativas a las usadas en el plano para resolverlo.

Con respecto a los polígonos en el cilindro, utilizaremos dos generalizaciones diferentes del concepto de polígono plano para esta superficie, atendiendo a que estén acotados por una línea poligonal trivial (*polígono euclídeo*) o por dos líneas poligonales esenciales (*polígonos esenciales*). Grima demostró en [26] que todo polígono (euclídeo o esencial) en el cilindro admite una triangulación y en este capítulo abordamos el problema de la conexión del grafo de triangulaciones de ambos tipos de polígonos.

Por último, en la Sección 3 nos detendremos en las múltiples peculiaridades que presenta la superficie tórica al tratar con triangulaciones de nubes de puntos y polígonos.

Veremos que, al igual que en el cilindro, una triangulación de un conjunto de puntos en posición no cilíndrica sobre la superficie tórica no tiene por qué dividir a la envolvente convexa en regiones triangulares e incluso existen nubes de puntos para las cuales existen conjuntos maximales de aristas que no delimitan ninguna cara triangular.

Nos detendremos también en comprobar que la existencia de triangulaciones no es independiente de la elección de los segmentos iniciales, esto es, si fijamos una arista uniendo dos puntos del conjunto, puede ocurrir que no se pueda completar un conjunto maximal de segmentos que triangule a la envolvente convexa, aunque la nube de puntos sí admita otra triangulación en estas condiciones.

Con respecto a los polígonos en la superficie tórica, que definimos como la región homeomorfa a un disco acotada por una línea poligonal cerrada y simple, la superficie tórica también muestra un comportamiento insólito. Obtenemos ejemplos de polígonos que no admiten ninguna diagonal, por lo que cualquier razonamiento de tipo inductivo similar a los usados en otras superficies para probar la conexión del grafo de triangulaciones falla en este punto.

4.2 Triangulaciones en la esfera

En esta sección consideramos el problema de la conexión del grafo de triangulaciones tanto de nubes de puntos como de polígonos sobre la esfera. Como ya hemos comentado en la Introducción de este capítulo, este problema ya ha sido resuelto en el plano tanto para triangulaciones de nubes de puntos [20] como de polígonos [9, 20, 23, 33, 36, 46].

4.2.1 Triangulaciones de polígonos esféricos

Un *polígono esférico* P se define como el conjunto de puntos de S^2 que se obtiene de una combinación finita de intersecciones y/o uniones de hemisferios H_i de S^2 . La combinación de intersecciones y/o uniones de los

respectivos semiespacios \hat{H}_i es un poliedro en \mathbf{R}^3 , que denotamos por \hat{P} ; de hecho, \hat{P} es el cono $\hat{P} = \{\hat{x} \in \mathbf{R}^3 : \hat{x} = \alpha \hat{y}, \alpha \geq 0, \hat{y} \in P\}$. Dado un polígono esférico con vértices $\{v_1, \dots, v_n\}$, el ángulo en v_i es el ángulo entre los vectores tangentes en v_i a las geodésicas definidas por $v_{i-1}v_i$ y $v_i v_{i+1}$. Este ángulo es igual al ángulo diedro entre las caras $Ov_i v_{i-1}$ y $Ov_i v_{i+1}$ del triedro $Ov_{i-1}v_i v_{i+1}$ (ver Figura 4.1).

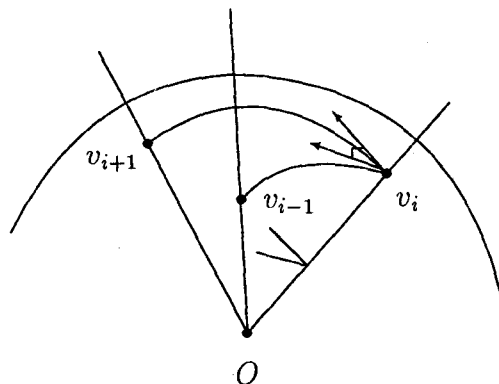


Figura 4.1: Ángulo en v_i .

Observemos que en el plano, el interior de un polígono queda perfectamente determinado al fijar la frontera del mismo, al ser la única región acotada de las dos en las que el plano queda dividido por la línea poligonal. Sin embargo, en la esfera, una “línea poligonal” (los segmentos aquí son arcos de geodésicas) cerrada y simple divide a la superficie en dos regiones acotadas, por lo que habremos de especificar cuál de ellas consideramos como interior del polígono.

Al igual que un polígono convexo en \mathbf{R}^2 , podemos definir un *polígono convexo* en la esfera como aquel en el que para cualquier par de puntos, el menor arco de círculo máximo pasando por ellos está inmerso en el polígono. Se verifica que un polígono esférico P es convexo si y sólo si, el cono \hat{P} es convexo en el sentido usual de \mathbf{R}^3 [2, 25] y es evidente entonces que la intersección de polígonos esféricos convexos es convexa.

Notemos que con las definiciones anteriores, podríamos tener polígonos en la esfera cuyos ángulos fueran todos cóncavos. Desde luego, si este caso se da,

los vértices del polígono están en posición euclídea, ya que su complementario en la superficie es un polígono convexo de igual frontera y el círculo máximo que pasa por dos vértice adyacentes lo deja contenido en un hemisferio. Debido al escaso interés que presentan este tipo de polígonos (ya que todos los segmentos uniendo vértices no adyacentes son exteriores al mismo), no serán considerados en esta sección. Observemos que al haber excluído este tipo de polígonos de nuestro estudio, se tiene que todo polígono esférico tiene al menos un vértice estrictamente convexo.

Llamamos *diagonal* de un polígono esférico a todo segmento interior a dicho polígono uniendo dos vértices del mismo.

Lema 4.2.1. *Todo polígono esférico de cuatro o más vértices admite una diagonal.*

Demostración: La demostración de este resultado es una adaptación a la esfera de la que O'Rourke da en su libro [47] del Lema de Meister [40], que asegura que cualquier polígono en el plano con cuatro o más vértices tiene una diagonal.

Sea v un vértice estrictamente convexo, cuya existencia está garantizada por el lema anterior y sean a y b los vértices adyacentes a v . Si ab es una diagonal del polígono P , el resultado queda demostrado. Así que, supongamos que ab no es una diagonal. Entonces, o bien ab intersecta a $\partial(P)$ (Figura 4.2 (a)), o bien ab es exterior a P , en cuyo caso el polígono está contenido enteramente en un hemisferio (Figura 4.2 (b)).

En cualquiera de los dos casos, puesto que P tiene más de tres vértices, el triángulo Δavb contiene al menos a un vértice de P distinto de a , b y v .

Denotemos por C_{ab} al círculo máximo pasando por a y b y consideremos como ecuador E de la esfera al círculo máximo pasando por v ortogonalmente a C_{ab} . Sea ahora C_v el círculo máximo pasando por v ortogonalmente a E . Es evidente que C_{ab} y C_v se cortan en dos puntos, que llamaremos *polo norte* y *polo sur* y que denotaremos por PN y PS , respectivamente (Figura 4.3).

Si llamamos x al primer vértice de P que encuentra un círculo máximo L con polos en PN y PS que se desplaza desde C_v hacia C_{ab} , entonces veamos que

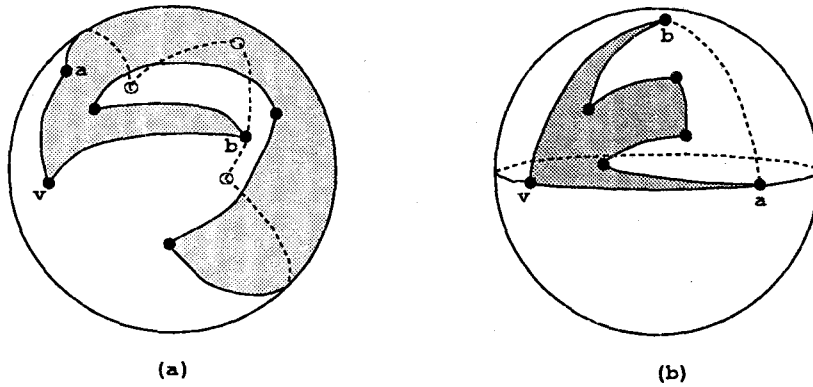


Figura 4.2: (a) ab intersecta a $\partial(P)$; (b) ab es exterior a P .

vx es una diagonal del polígono.

Desde luego, el interior de la región que resulta al intersectar $\triangle avb$ y el huso delimitado por los círculos máximos L y C_v no contiene puntos de P y tampoco puede ocurrir que vx intersecte a una arista p_1p_2 de $\partial(P)$ de forma que p_1 y p_2 estén fuera de esta región, ya que esta arista debe estar estrictamente contenida en la intersección de $\triangle avb$ con el huso determinado por los círculos máximos C_{p_1} y C_{p_2} que pasan por p_1 y p_2 , respectivamente y tienen a PN y PS como polos, por ser esa intersección un conjunto convexo en la esfera. \triangle

A partir de este resultado, obtenemos un corolario de gran importancia, tanto desde el punto de vista teórico como desde el práctico.

Corolario 4.2.1. *Todo polígono sobre la esfera admite una triangulación.*

Una vez que hemos demostrado que todo polígono esférico admite una triangulación, nos planteamos si dos triangulaciones cualesquiera de un mismo polígono se pueden transformar entre sí mediante una secuencia de flips diagonales.

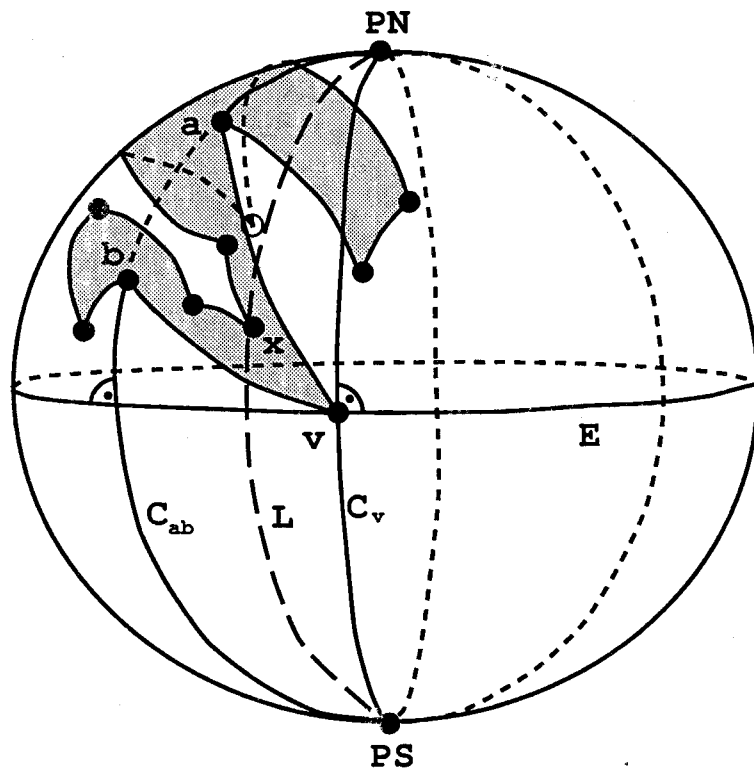


Figura 4.3: vz debe ser una diagonal.

Es inmediato demostrar que el grafo dual de una triangulación de un polígono esférico es un árbol, al igual que ocurre en el plano, y como consecuencia se puede obtener una versión esférica del Teorema de las Dos Orejas de Meister [47, 40]. A partir de este hecho, cualquiera de las demostraciones que se basan en este resultado para demostrar la conexión del grafo de triangulaciones de un polígono plano [30] se puede adaptar con facilidad a esta otra superficie. Se tiene por tanto el siguiente resultado.

Teorema 4.2.1. *El grafo de triangulaciones de un polígono esférico es conexo.*

4.2.2 Triangulaciones de nubes de puntos

La mayoría de los problemas clásicos que han sido abordados en la esfera para un conjunto de puntos, tienen un comportamiento diferente dependiendo de si los puntos están o no en posición euclídea (ver Preliminares), como ocurre, por ejemplo, con la envolvente convexa esférica [26], que consiste en la propia superficie, si los puntos no están en posición euclídea, o en algún subdominio de la superficie, en el caso contrario. La mayor parte de los algoritmos para conjuntos de puntos en el plano son válidos para conjuntos de puntos en la esfera que están en posición euclídea, por lo tanto, en esta sección nos vamos a centrar en conjuntos de puntos que no estén en posición euclídea.

Veamos en primer lugar algunos resultados que caracterizan a los conjuntos de puntos en posición euclídea.

Proposición 4.2.1. *Dado un conjunto V_n de n puntos en la esfera, los puntos están en posición euclídea si y sólo si la envolvente convexa $3D$, $\mathcal{CH}(V_n)$ no contiene en su interior al origen de la esfera.*

Demostración: Supongamos que los puntos están en posición euclídea, es decir, están todos sobre un mismo hemisferio H que es intersección de S^2 con un semiespacio asociado a un plano que pasa por el origen de la esfera; $\mathcal{CH}(V_n)$ es un poliedro convexo que están en el mismo semiespacio que los puntos y por tanto, no contiene en su interior al origen. Recíprocamente, si la

envolvente convexa $3D$ no contiene al origen, consideremos uno de sus planos soporte, H , que deja a $\mathcal{CH}(V_n)$ en uno de los dos semiespacios cerrados que acota. Un plano paralelo a H pasando por el origen de la esfera, intersecta a S^2 definiendo un hemisferio en el que se encuentran todos los puntos. \triangle

Proposición 4.2.2. *Un conjunto de $n \geq 5$ puntos en la esfera está en posición no euclídea si y sólo si cuatro de ellos no están en posición euclídea.*

Demostración: Es evidente que la condición suficiente se verifica.

Supongamos entonces que tenemos un conjunto de $n \geq 5$ puntos en posición no euclídea; es conocido que su envolvente convexa tridimensional puede tetraedralizarse trazando aristas desde un vértice a todos los demás [12] y puesto que suponemos que no hay pares de puntos antipodales y el poliedro debe contener al origen de la esfera, dicho punto debe estar contenido en uno de los tetraedros. Los vértices de este tetraedro son los cuatro puntos que no están en posición euclídea. \triangle

Sea $V_n = \{v_1, \dots, v_n\}$ una nube de puntos en la esfera. Recordemos que una *triangulación* de V_n es un conjunto maximal de segmentos (arcos de geodésicas en la superficie) uniendo a los puntos del conjuntos de dos en dos y de forma que no se intersequen entre sí, salvo a lo más, en sus puntos finales. El hecho de que toda triangulación de una nube de puntos en posición no euclídea sobre la esfera divide a la superficie en regiones triangulares es una consecuencia de que todo polígono esférico admite una diagonal, resultado que demostramos en la sección anterior.

Llamaremos a los elementos de V_n , *vértices* de la triangulación; al triángulo con vértices v_i , v_j y v_k , lo denotamos por T_{ijk} y a la *arista* (arco de geodésica) uniendo v_i y v_j por e_{ij} .

Veamos en primer lugar un algoritmo incremental de orden $O(n \log n)$ para construir una triangulación de una nube de n puntos sobre la esfera. Como ya hemos comentado anteriormente, si los puntos están en posición euclídea, cualquier algoritmo de triangulación para una nube de puntos en el plano [14, 18] puede ser utilizado, por lo que nos centramos en el caso en que los puntos estén en posición no euclídea y procedemos como se describe a continuación.

Seleccionemos en primer lugar cuatro puntos que estén en posición no euclídea, que existen por el Lema 4.2.2 (esto puede hacerse en tiempo lineal como se demuestra en [58]). Estos cuatro puntos forman una triangulación inicial de la superficie que consta de cuatro triángulos esféricos. Los restantes $n - 4$ puntos son secuencialmente añadidos modificando la triangulación actual del siguiente modo. Si $q = v_i$ es el siguiente punto a insertar, entonces q está en el interior de un triángulo que ya existe, digamos T_{123} (observemos que q no está sobre una arista ya que suponemos que no hay tres puntos en un mismo círculo máximo). Reemplazamos este triángulo por otros tres, T_{12i} , T_{23i} y T_{31i} , que resultan de unir el punto v_i a los vértices v_1 , v_2 y v_3 extremos del triángulo T_{123} . El proceso continúa hasta que todos los puntos han sido insertados.

El procedimiento anterior nos proporciona un algoritmo incremental $O(n \log n)$ para construir una triangulación de n puntos sobre la esfera que estén en posición no euclídea. Como ya hemos comentado anteriormente, si los puntos están en posición euclídea, cualquier algoritmo de triangulación de una nube de puntos en el plano puede ser utilizado [14, 18]. Por último, decidir si un conjunto puntos sobre la esfera está o no en posición euclídea puede hacerse estudiando la separabilidad del conjunto de puntos respecto del centro de la esfera y para ello puede usarse el algoritmo lineal de [39]. Tenemos por tanto el siguiente resultado.

Teorema 4.2.2. *Es posible calcular una triangulación T de un conjunto V_n de n puntos en la esfera en tiempo $O(n \log n)$.*

Si bien en [45] utilizan la técnica anterior de triangulación para un método de interpolación de datos sobre la esfera, en este trabajo no justifican su uso ni aportan ninguna referencia del mismo, por lo que hemos decidido incluir la demostración aquí. Veamos ahora algunas propiedades del grafo de triangulaciones de una nube de puntos sobre la esfera.

La conexión del grafo de triangulaciones en la esfera.

Recordemos que dada una triangulación T de una nube de puntos en la esfera, una arista e de T admite un *flip diagonal* (o el flip diagonal de e es

realizable) si es adyacente a dos triángulos cuya unión en un cuadrilátero convexo C . La operación de flip diagonal consiste en eliminar e y reemplazarla por la otra diagonal de C (ver Figura 0.18). De esta forma obtenemos una nueva triangulación T' de la nube de puntos y diremos que T' se ha obtenido de T mediante un flip diagonal.

Dada una colección de puntos $V_n = \{v_1, \dots, v_n\}$ sobre la esfera, el *grafo de triangulaciones* de V_n , $G_T(V_n)$, se definía como el grafo cuyos vértices son las triangulaciones de V_n y donde dos triangulaciones son adyacentes si una se puede obtener de otra mediante un flip diagonal.

Puesto que la mayoría de los resultados obtenidos para el grafo de triangulaciones de una nube de puntos en el plano (conexión, diámetro, etc.) son válidos para conjuntos de puntos en posición euclídea sobre la esfera, en esta sección limitaremos nuestro estudio a conjuntos de puntos en posición no euclídea. Comenzamos dando algunas definiciones que necesitaremos más adelante.

La *triangulación de Delaunay* de un conjunto de n puntos en posición no euclídea sobre la esfera se define, al igual que en el plano, como el dual de su diagrama de Voronoi. Esta triangulación se caracteriza por ser la única tal que los casquetes delimitados por cada uno de los triángulos no contienen otros puntos en su interior, criterio que equivale al del circunciclo vacío en el plano.

Es conocido que, dado un conjunto de puntos sobre la esfera en posición no euclídea, la proyección central sobre la esfera de la envolvente convexa tridimensional de los puntos es la triangulación esférica de Delaunay [11]. Este hecho será fundamental para resolver el problema de la conexión del grafo de triangulaciones de un conjunto de puntos en posición no euclídea sobre la esfera.

Teorema 4.2.3. *Toda triangulación esférica de una nube de puntos en posición no euclídea se puede transformar mediante flips diagonales en la triangulación esférica de Delaunay.*

Demostración: Sea T una triangulación esférica de una nube de puntos en posición euclídea y denotemos por P_T al poliedro que resulta de “estirar” las

aristas de T en \mathbf{R}^3 . Transformar T en la triangulación esférica de Delaunay mediante una secuencia de flips diagonales es similar a transformar P_T en la envolvente convexa 3D del conjunto de puntos mediante alguna operación sobre las aristas que sea equivalente al flip diagonal en la esfera.

Pretendemos transformar cada arista cóncava \hat{e} del poliedro en una arista convexa, como muestra la Figura 4.4 y para ello debemos probar que este "flip tridimensional" es realizable sobre la esfera, es decir, si $\hat{e} = 23$ es compartida por dos triángulos \hat{T}_{123} y \hat{T}_{234} en el poliedro y cambiamos \hat{e} por $\hat{e}' = 14$, ¿podemos aplicar un flip diagonal a la correspondiente arista de la triangulación esférica $e = 23$ e intercambiarla por la $e' = 14$?

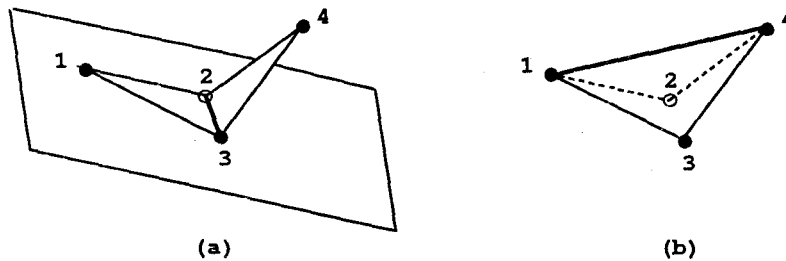


Figura 4.4: (a) Una arista cóncava en P_T ; (b) una arista convexa en P_T .

Consideremos los casquetes esféricos que pasan a través de los vértices 123 y 234, respectivamente; su intersección es una región convexa en la esfera (ver Figura 4.5) por lo que los arcos de geodésica que unen los vértices 2 y 3, y 1 y 4, respectivamente, son interiores a ella y por lo tanto el flip de la arista e es realizable en la esfera. \triangle

Del resultado anterior obtenemos un corolario inmediato.

Corolario 4.2.2. *El grafo de triangulaciones de una nube de puntos en la esfera es conexo.*

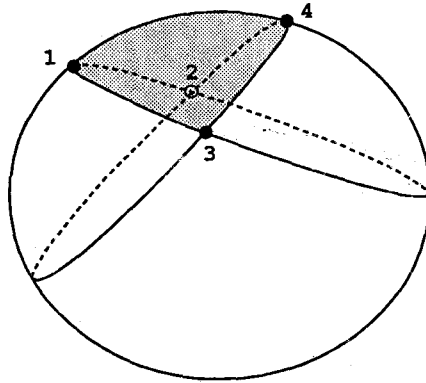


Figura 4.5: La intersección de los dos casquetes esféricos es una región convexa.

Demostración: Si los puntos de la nube están en posición euclídea, cualquier demostración de este resultado en el plano es válida para este caso. Si los puntos no están en posición euclídea, en virtud del Teorema anterior, cualesquiera dos triangulaciones de la nube de puntos se pueden transformar entre sí mediante una secuencia de flips diagonales, via la triangulación esférica de Delaunay. \triangle

4.3 Triangulaciones en el cilindro

En esta sección abordamos el problema de la conexión del grafo de triangulaciones de nubes de puntos y de polígonos en el cilindro. Consideraremos dos generalizaciones del concepto de polígono plano en esta superficie, atendiendo a que estén acotados por una línea poligonal trivial o por dos líneas poligonales esenciales.

4.3.1 Triangulaciones de polígonos

Definimos un *polígono euclídeo* en el cilindro como la región acotada por una poligonal trivial y *polígono esencial* como la región acotada por dos poligonales esenciales que no se intersectan entre sí. En cualquiera de los casos, a los extremos de los segmentos que intervienen en las poligonales los llamaremos *vértices* del polígono. Observemos que si los vértices de la poligonal trivial que acota un polígono euclídeo P están en posición euclídea sobre el cilindro, el estudio de las triangulaciones de P es similar al estudio de las triangulaciones de un polígono plano, puesto que en ese caso, todos los segmentos uniendo a cualquier par de vértices de la poligonal estará contenido entre las dos generatrices diametralmente opuestas entre las que se encuentra P . Supondremos entonces, cuando tratemos con polígonos euclídeos, que los vértices de la poligonal trivial que lo acota están en posición euclídea.

Comenzamos ahora abordando el problema de la conexión del grafo de triangulaciones de un polígono tanto euclídeo como esencial, en el cilindro.

Polígonos euclídeos

En esta sección vamos a demostrar que cualesquiera dos triangulaciones de un polígono euclídeo de n vértices se pueden transformar entre sí mediante una secuencia de flips diagonales. Este hecho ya fue demostrado por Hurtado y Noy [30] para el caso de polígonos planos y es posible adaptar su demostración para polígonos euclídeos en el cilindro, aunque nosotros presentamos aquí un argumento distinto.

Recordemos que si T es una triangulación de un polígono P , decimos que T tiene una *oreja* en el vértice v si el segmento ab que une a sus vértices adyacentes a y b es una diagonal de la triangulación T .

En [26], Grima prueba que todo polígono euclídeo de cuatro o más vértices en el cilindro posee una diagonal adaptando al cilindro la demostración que da O'Rourke en su libro [47] del Lema de Meister. Utilizando argumentos similares, también es posible adaptar al cilindro el Lema de las dos Orejas,

que se debe al mismo autor y que también se recoge en el texto anteriormente citado, obteniendo por tanto, que toda triangulación de un polígono euclídeo con $n \geq 4$ vértices posee al menos dos orejas que no se solapan. Este hecho será fundamental para la demostración del siguiente resultado.

Teorema 4.3.1. *Cualesquiera dos triangulaciones de un polígono euclídeo de n vértices se pueden transformar entre sí mediante una secuencia de flips diagonales.*

Demostración: Sea P un polígono euclídeo en el cilindro con vértices $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$; denotemos por T_1 y T_2 a dos triangulaciones de P . Realizaremos la demostración del resultado por inducción en el número de vértices. El caso $n = 4$ es trivial de demostrar, así que comenzamos suponiendo $n \geq 5$.

Supongamos que T_1 tiene en v_1 un oreja; si T_2 también tiene una oreja en este vértice, la diagonal $v_n v_2$ es común a las dos triangulaciones, podemos eliminar el vértice v_1 en ambas (ver Figura 4.6) y por hipótesis de inducción se tiene que $T_1 - \{v_1\}$ y $T_2 - \{v_2\}$ se pueden transformar entre sí mediante una secuencia de flips diagonales, de donde se deduce fácilmente la misma equivalencia para T_1 y T_2 .

Si T_2 no tiene una oreja en v_1 , existe otro vértice v_i , $i \neq 1$, donde sí la tiene (Figura 4.7 (a)). Consideramos ahora $T_2 - \{v_i\}$, que es la triangulación de un polígono de $n - 1$ vértices y por hipótesis de inducción se puede transformar mediante una secuencia de flips diagonales en otra triangulación $T'_2 - \{v_i\}$ que tenga una oreja en el vértice v_1 (Figura 4.7 (b) y (c)). De esta forma, conseguimos llevar, mediante flips, la triangulación T_2 en otra, T'_2 , que tiene una oreja en el vértice v_1 (Figura 4.7 (d)). Entonces, la diagonal $v_n v_2$ es común a T_1 y T'_2 y por el razonamiento anterior, podemos transformar una triangulación en otra. Por tanto, $T_1 \sim_f T'_2 \sim T_2$.

△

El resultado anterior prueba la conexión del grafo de triangulaciones de un polígono euclídeo en el cilindro. Una conclusión equivalente se obtendrá más adelante para polígonos esenciales, como consecuencia de un resultado

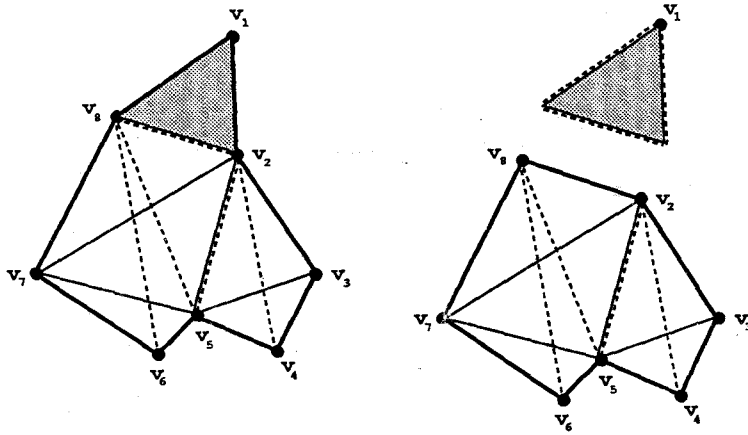


Figura 4.6: Eliminando una oreja en T_1 y T_2 .

similar para nubes de puntos en el cilindro. Pasemos, por tanto, a tratar este último problema.

4.3.2 Triangulaciones de nubes de puntos

Recordemos, en primer lugar, que una *triangulación* de un conjunto de n puntos en el plano es un conjunto maximal de segmentos uniendo a dichos puntos de dos en dos y de forma que no se intersequen entre sí, salvo, a lo más, en sus puntos finales y que podemos generalizar directamente esta definición al cilindro considerando como segmentos las geodésicas que dan la mínima longitud entre dos puntos sobre la superficie.

Dado un conjunto de puntos C en el cilindro, llamamos *triangulación* de C a todo conjunto maximal de segmentos uniendo a dichos puntos de dos en dos y de forma que no se intersequen entre sí, salvo a lo más en sus puntos finales. Con esta definición, si los puntos de C están en posición euclídea sobre el cilindro, el estudio de las triangulaciones de C es similar al estudio de las triangulaciones de un conjunto de puntos en el plano, puesto que si C está en posición euclídea, todos los segmentos uniendo a cualquier par de

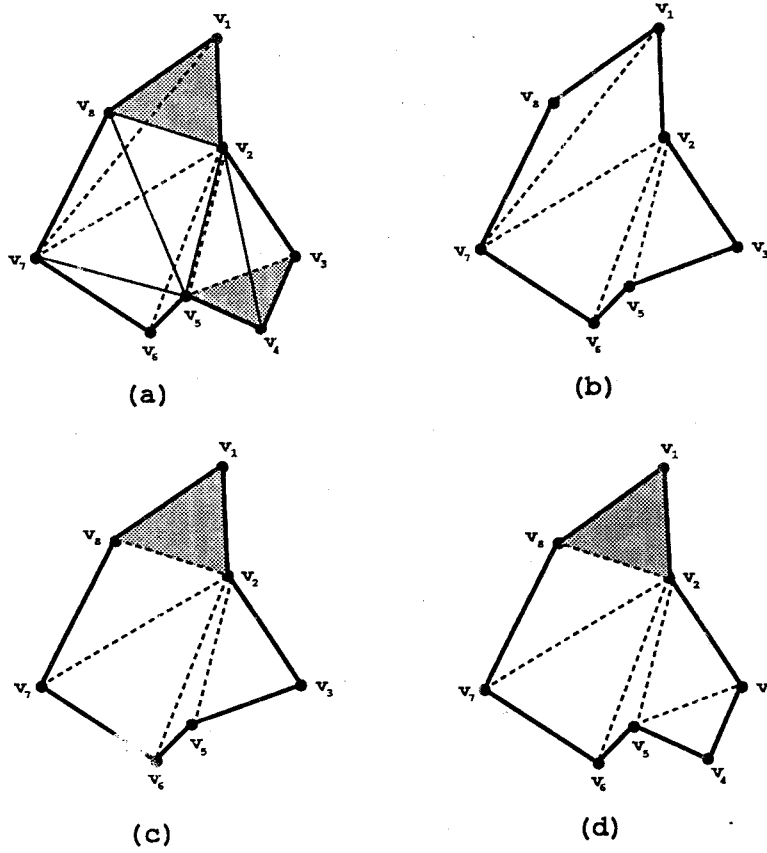


Figura 4.7: (a) T_1 y T_2 . (b) $T_2 - \{v_4\}$. (c) $T'_2 - \{v_4\}$. (d) T'_2 .

puntos de este conjunto estarán contenidos entre las dos generatrices diametralmente opuestas entre las que se encuentra C , la envolvente convexa de C será como en el plano y por lo tanto, cualquier triangulación de C será una triangulación de su envolvente convexa.

Supongamos entonces que tenemos un conjunto C de n puntos en posición no euclídea sobre el cilindro y T una triangulación del mismo.

Una *poligonal esencial* en C es una poligonal con vértices en C homotópicamente no nula en el cilindro, es decir, que divide al cilindro en dos componentes no acotadas. En el conjunto de las poligonales esenciales en C se puede definir una relación de orden parcial como sigue: "si P_1 y P_2 son dos poligonales esenciales, diremos que $P_1 \leq P_2$ si la intersección de cualquier generatriz del cilindro con P_1 tiene menor o igual ordenada que la intersección de la misma generatriz con P_2 (ver Figura 4.8).

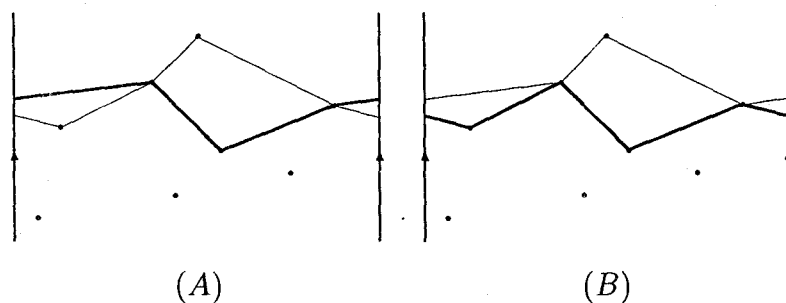


Figura 4.8: Si llamamos P_1 a la poligonal en trazo grueso y P_2 a la de trazo fino, en la Figura (a), tenemos que estas poligonales no están relacionadas; y en la Figura (b), tenemos que $P_1 < P_2$.

Se dice que una poligonal esencial P es una *poligonal superior* (resp. *inferior*) en C cuando no exista ninguna poligonal en dicho conjunto mayor (resp. menor) que P .

Grima demostró en [26] que cualquier triangulación de un conjunto de tres o más puntos en posición no euclídea sobre el cilindro define sobre esta superficie dos caras no acotadas, delimitadas por una poligonal superior y

una poligonal inferior, respectivamente y que de hecho, la región triangulada no coincide en general con la envolvente convexa de la nube de puntos (ver Figura 4.3.2), a diferencia de lo que ocurre en el caso plano, en donde una triangulación de un conjunto de puntos es una subdivisión del mismo cumpliendo, entre otras propiedades, que tiene una única cara no acotada, que además coincide con el complementario de la envolvente convexa de la nube.

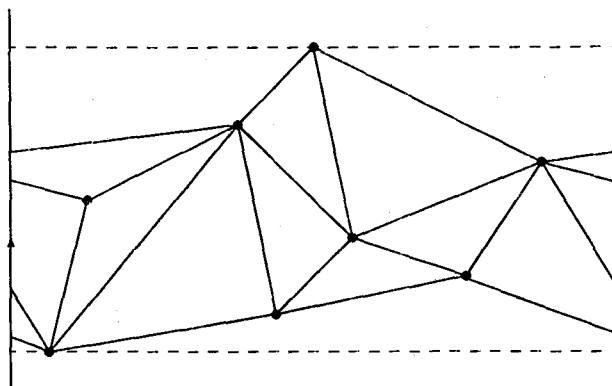


Figura 4.9: Esta triangulación no triangula la envolvente convexa del conjunto que en este caso sería la banda definida por los círculos discontinuos en la figura.

Más aún, en el cilindro ni siquiera existe unicidad respecto de la región que se triangula, es decir, existen triangulaciones distintas de una misma nube de puntos que triangulan diferentes regiones del cilindro, como se muestra en la Figura 4.10, ejemplo que hemos recogido del trabajo mencionado anteriormente. Sin embargo, estos mismos autores encontraron al menos un punto en el que el cilindro se comporta como el plano: todas las caras acotadas de una triangulación en el cilindro son triángulos, es decir, sus bordes son 3-ciclos. Este hecho, que a primera vista puede resultar simple de demostrar, requiere la adaptación al cilindro de varios resultados sobre triangulaciones de polígonos planos.

Las grandes diferencias existentes entre las triangulaciones de nubes de puntos en el plano y en el cilindro, nos permiten destacar un hecho

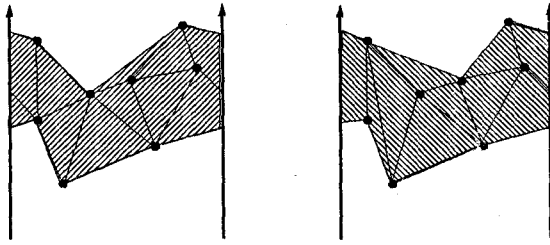


Figura 4.10: Dos triangulaciones distintas del mismo conjunto de puntos que triangulan distintas regiones sobre el cilindro.

importante sobre el grafo de triangulaciones de n puntos en el cilindro: su no conexión. Como ya hemos comentado anteriormente, existen ejemplos de nubes de puntos que admiten distintas triangulaciones las cuales delimitan distintas regiones en el cilindro, es decir, regiones que poseen diferentes poligonales superiores e inferiores. Puesto que la operación de flip diagonal nunca afecta a aristas que estén en el borde de la región triangulada, ya que sólo se aplica sobre aristas compartidas por dos caras triangulares, esta operación nunca cambia las poligonales superiores e inferiores que delimitan la región triangulada y por tanto el grafo de triangulaciones de n puntos en el cilindro no es conexo.

Nos vamos a restringir entonces a triangulaciones de nubes de puntos delimitadas por la misma poligonal superior e inferior y nos planteamos el problema de si, en estas condiciones, dos triangulaciones de una nube de puntos pueden ser transformadas entre sí mediante una secuencia de flips diagonales.

Podríamos pensar en adaptar el razonamiento utilizado en el plano para demostrar que dos triangulaciones de una nube de puntos se pueden transformar la una en la otra mediante una secuencia de flips diagonales, via la triangulación de Delaunay. Recordemos que la triangulación de Delaunay se define como el dual del diagrama de Voronoi de la nube de puntos; desafortunadamente, como nos muestra la Figura 4.11, el dual del diagrama de Voronoi no tiene por qué ser ni siquiera una triangulación en el cilindro.

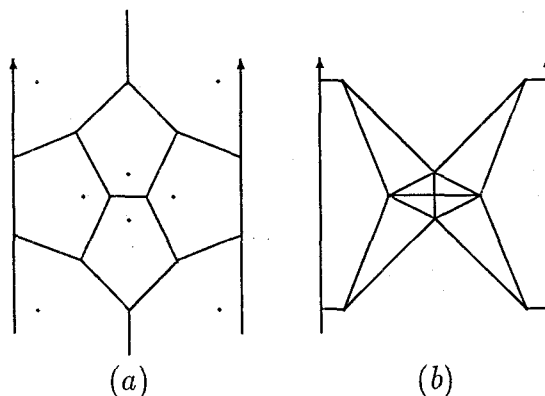


Figura 4.11: (a) Un conjunto de 8 puntos en el cilindro y su diagrama de Voronoi. (b) Dual del diagrama de Voronoi; las aristas unen puntos cuyas regiones de Voronoi son vecinas.

Puesto que la triangulación de Delaunay en el plano cumple, entre otras propiedades, la de maximizar el mínimo ángulo y existen algoritmos que la construyen siguiendo este criterio [20], también se podría intentar adaptar este argumento al cilindro e intentar transformar cualquier triangulación en aquella que maximiza el mínimo ángulo aplicando flips diagonales que siempre mejoren los ángulos. Sin embargo la Figura 4.12 muestra una situación en la que no es posible aplicar este método.

No se puede aplicar ningún flip diagonal en la triangulación de la Figura 4.12 (a) que mejore los ángulos, ya que la diagonal en trazo grueso no es intercambiable por la diagonal en trazo discontinuo, puesto que esta última no es un segmento en el cilindro, es decir, esta triangulación es localmente óptima porque no hay ningún flip diagonal que mejore sus ángulos, sin embargo, la triangulación en (b) mejora los ángulos respecto a la triangulación en (a), y aunque sí podemos hacer flips diagonales para llegar a ella desde (a), éstos no son positivos, en el sentido que acabamos de decir.

Siguiendo el paralelismo con el estudio de triangulaciones de un conjunto de puntos en el plano y pensando en utilizar una adaptación del concepto de triangulación de Delaunay como triangulación base a la que se puede reducir cualquier otra triangulación de la nube de puntos en el cilindro, intentamos ahora seguir un razonamiento análogo al que propuso Brown para la esfera en su tesis doctoral y que fue descrito en la sección anterior. Recordemos,

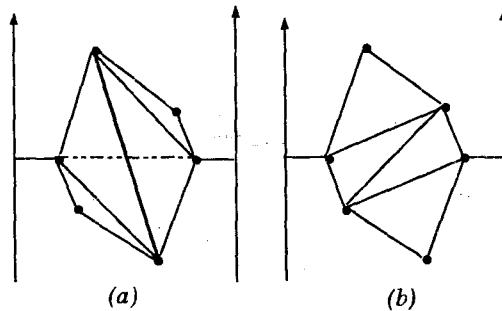


Figura 4.12: No es posible aplicar ningún flip diagonal en (a) que mejore los ángulos y sin embargo (b) es localmente óptima.

que partiendo de una nube de puntos en la esfera, Brown calculaba la envolvente convexa 3D del conjunto de puntos y demostraba que las proyecciones centrales de las aristas de la envolvente tridimensional sobre la esfera, definían una triangulación del conjunto de puntos inicial sobre esta superficie que maximizaba el mínimo ángulo. Este triangulación particular nos servía como vía para demostrar que cualesquiera dos triangulaciones de la misma nube de puntos en la esfera se pueden transformar entre sí mediante una secuencia de flips diagonales.

Sin embargo, esta línea de razonamiento de nuevo falla cuando la intentamos trasladar a la superficie cilíndrica, ya que existen ejemplos de nubes de puntos en el cilindro, cuyas proyecciones (ortogonales desde el eje del cilindro) de la envolvente convexa 3D no determinan una triangulación de la nube y recíprocamente, triangulaciones cuya proyección en \mathbf{R}^3 no es un poliedro (ver Figura 4.13). Llegados a este punto, parece que cualquier intento por adaptar al cilindro los razonamientos utilizados en el plano resulta fallido; sin embargo, como veremos a continuación, un argumento inductivo en el número de vértices de la nube nos permitirá demostrar que cualesquiera dos triangulaciones de una nube de n puntos en el cilindro, encerrada entre dos líneas poligonales con vértices en la nube, se pueden transformar entre sí mediante una secuencia de flips diagonales. Como corolario, podremos establecer la conexión del grafo de triangulaciones de una nube de n puntos, cuando éstas están delimitadas por las mismas poligonales superior e inferior.

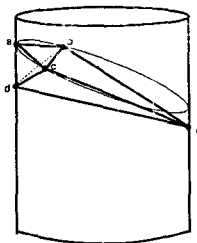


Figura 4.13: Proyección de una triangulación cilíndrica en \mathbf{R}^3 que no es un poliedro.

Teorema 4.3.2. *Cualesquiera dos triangulaciones de un conjunto de n puntos en el cilindro delimitado por las mismas líneas poligonales, se pueden transformar la una en la otra mediante una secuencia de flips diagonales.*

Demostración: Sean T_1 y T_2 dos triangulaciones de una nube de n puntos en el cilindro delimitadas por las mismas poligonales. Haremos la demostración de este resultado por inducción en el número de puntos de la nube.

Caso 1: $n = 6$

Si $n = 6$, todos los puntos de la nube se encuentran repartidos entre las poligonales superior e inferior; exactamente tienen tres vértices cada una y no existe ningún punto comprendido entre ellas; los denotamos por v_1, v_2, v_3 y w_1, w_2, w_3 , respectivamente.

Veamos en primer lugar que si existe una diagonal $v_i w_j$, $i, j = 1, 2, 3$, común a las dos triangulaciones, siempre se puede transformar T_1 en T_2 mediante una secuencia de flips diagonales. Supongamos que es $v_1 w_1$ esta diagonal común; entonces, o bien $v_1 w_2$ es común a T_1 y T_2 , o bien es la diagonal $w_1 v_2$ la que es común a ambas, o bien en T_1 aparece una de ellas y en T_2 la otra, en cuyo caso un flip de arista las puede hacer coincidir (ver Figura 4.14). En cualquiera de los casos se puede reiterar este mismo razonamiento a partir de las diagonales coincidentes y obtenemos que T_1 y T_2 se pueden transformar entre sí mediante una secuencia de flips diagonales.

Demostramos ahora que T_1 y T_2 tienen al menos una diagonal común, con lo

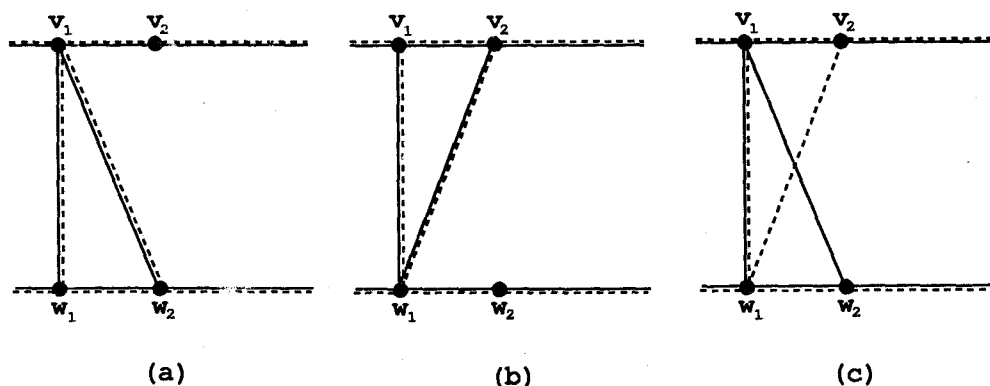


Figura 4.14: (a) v_1w_2 diagonal común a T_1 y T_2 . (b) w_1v_2 diagonal común a T_1 y T_2 . (c) v_1w_2 diagonal de T_1 y w_1v_2 diagonal de T_2 .

que tendremos probado nuestro resultado. Denotemos por $d_{T_i}(x)$, al número de diagonales que parten del vértice x en la triangulación T_i . Es evidente que $1 \leq d_{T_i}(x) \leq 3$, para cualquier vértice x de la nube de puntos. Puesto que todos los vértices juegan un papel simétrico, detallaremos la casuística que puede darse para el vértice v_1 , dependiendo del número de diagonales en las que aparece en cada una de las triangulaciones. Observemos que si $d_{T_i}(v_1) = 3$ para $i = 1$ ó 2 , necesariamente T_1 y T_2 tienen alguna diagonal en común y que por tanto, los únicos casos a considerar son los siguientes:

a) $d_{T_1}(v_1) = d_{T_2}(v_1) = 1$

Supongamos que en T_1 existe la diagonal v_1w_1 y en T_2 la diagonal v_1w_2 ; esto obliga a la existencia de los triángulos $v_1w_1v_2$, $v_1w_1v_3$ en T_1 y $v_1w_2v_2$, $v_1w_2v_3$ en T_2 y por lo tanto las diagonales v_3w_1 y v_2w_2 son comunes a ambas triangulaciones (ver Figura 4.15 (a)).

b) $d_{T_1}(v_1) = 1; d_{T_2}(v_1) = 2$

Supongamos que existen las diagonales v_1w_2 en T_1 y v_1w_1 , v_1w_3 en T_2 ; la primera de ellas determina en T_1 los triángulos $v_1w_2v_2$ y $v_1w_2v_3$ y por tanto, $d_{T_1}(w_2) = 3$, por lo que también existe la diagonal v_3w_1 en

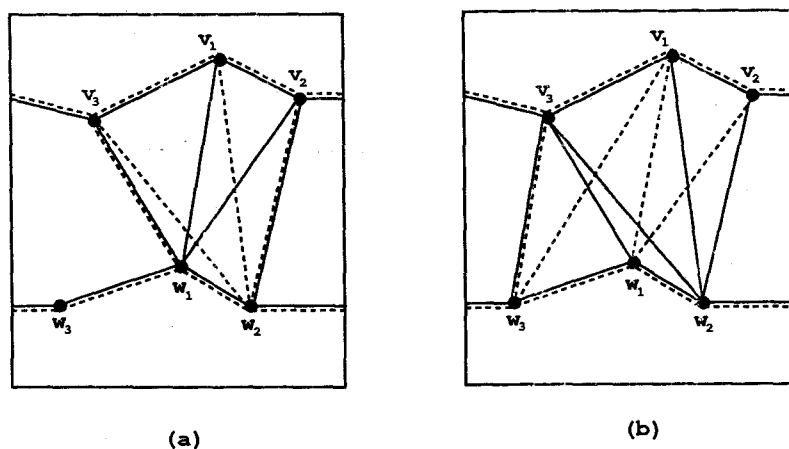


Figura 4.15: (a) $d_{T_1}(v_1) = d_{T_2}(v_1) = 1$. (b) $d_{T_1}(v_1) = 1; d_{T_2}(v_1) = 2$

T_1 (ver Figura 4.15). La diagonales v_1w_1 y v_1w_3 en T_2 determinan los triángulos $v_1w_1v_2$, $v_1w_1w_3$ y $v_1w_3v_3$. La diagonal v_2w_1 no puede ser común a T_1 y T_2 ya que se producirían cruces entre las aristas de T_1 . Por tanto, el triángulo $v_3w_3w_1$ existe en T_1 y la diagonal v_3w_3 está en ambas triangulaciones.

c) $d_{T_1}(v_1) = d_{T_2}(v_1) = 2$

Es evidente en este caso que que al menos una de las dos diagonales que parten de v_1 en T_1 es común a las dos triangulaciones.

Caso 2: $n > 6$

Supongamos ahora un conjunto de $n > 6$ puntos y denotemos por v_1, \dots, v_p y w_1, \dots, w_q a los vértices de las poligonales superior e inferior de las triangulaciones, respectivamente.

Si existe un vértice v_i (resp. w_i) euclídeo convexo en la poligonal superior (resp. inferior), mediante una secuencia de flips diagonales, T_1 y T_2 se pueden transformar en sendas triangulaciones \tilde{T}_1 y \tilde{T}_2 que tienen una oreja común en el vértice v_i (resp. w_i). Por la hipótesis de inducción, las triangulaciones

$\tilde{T}_1 - \{v_i\}$ y $\tilde{T}_2 - \{v_i\}$ (resp. $\tilde{T}_1 - \{w_i\}$ y $\tilde{T}_2 - \{w_i\}$) se pueden llevar la una en la otra mediante flips diagonales y del mismo modo puede hacerse para T_1 y T_2 (ver Figura 4.16).

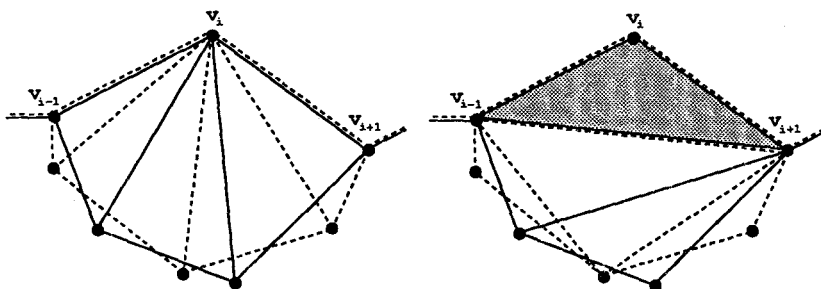


Figura 4.16: v_i euclídeo convexo.

Si no existe ningún vértice euclídeo convexo en las poligonales, sea v_i un vértice cualquiera de la poligonal superior cuyos vecinos en orden cíclico son $\{v_{i-1}a_1a_2\dots a_rv_{i+1}\}$ en T_1 y $\{v_{i-1}b_1b_2\dots b_s v_{i+1}\}$ en T_2 , respectivamente, donde quizás alguno de los a_j o b_j pertenecen a la poligonal inferior (Figura 4.17 (a)). Consideramos el polígono P' cuyo conjunto de vértices es el formado por $\{v_{i-1}, a_1, a_2, \dots, a_r, b_1, b_2, \dots, b_s, v_{i+1}\}$ y donde dos vértices son adyacentes si son consecutivos al barrer con una semirrecta de origen v_i en sentido positivo. Observemos que algunas aristas de este polígono son diagonales de T_1 ó T_2 .

Si P' encierra en su interior a algún punto x de la nube (Figura 4.17 (b)), definimos un nuevo polígono P que tenga por vértices a x y a todos los de P' y donde dos vértices son adyacentes si son consecutivos al barrer con una semirrecta de origen v_i en sentido positivo, como muestra la Figura 4.17 (c); si no se diera esta situación, continuaríamos la demostración con el polígono inicial P' .

Definimos ahora dos nuevas triangulaciones de la nube de puntos \tilde{T}_i , $i = 1, 2$, de forma que (ver Figura 4.18):

- las aristas del polígono P son diagonales de \tilde{T}_i , $i = 1, 2$,

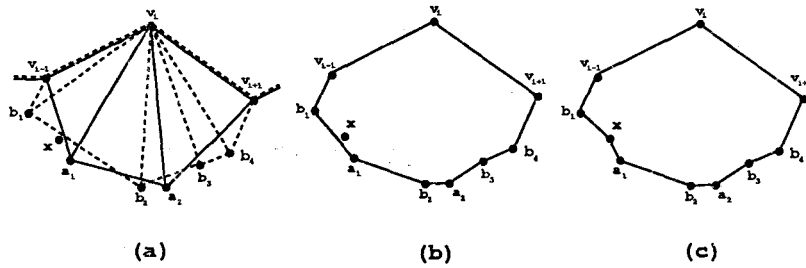


Figura 4.17: (a) T_1 y T_2 . (b) Polígono P' . (c) Polígono P .

- las diagonales de T_1 (resp. T_2) que son interiores al polígono P , aparecen como diagonales de \tilde{T}_1 (resp. de \tilde{T}_2),
- el resto de las aristas que completan una triangulación de la nube son elegidas arbitrariamente, tanto en \tilde{T}_1 como en \tilde{T}_2 (aparecen con un trazo discontinuo más grueso en la Figura 4.18).

Las triangulaciones $T_1 - \{v_i\}$ y $\tilde{T}_1 - \{v_i\}$ (resp. T_2 y $\tilde{T}_2 - \{v_i\}$) tienen $n - 1$ vértices y las mismas poligonales superior e inferior, por lo que, aplicando la hipótesis de inducción, se pueden transformar entre sí mediante una secuencia de flips diagonales; volviendo a añadir a cada una de ellas el vértice v_i , se obtiene que $T_1 \sim_f \tilde{T}_1$ (resp. $T_2 \sim_f \tilde{T}_2$).

Por otra parte, si denotamos por \tilde{T}'_i , $i = 1, 2$, a las triangulaciones que resultan de eliminar de \tilde{T}_i , $i = 1, 2$, el vértice v_i y todas las diagonales internas al polígono P , estas triangulaciones también tienen las mismas poligonales superior e inferior y $n - 1$ vértices, por lo que, aplicando de nuevo la hipótesis de inducción, tenemos que \tilde{T}'_1 y \tilde{T}'_2 se pueden transformar entre sí mediante una secuencia de flips diagonales. Además, puesto que P es un polígono euclídeo, es posible aplicar flips a las diagonales de \tilde{T}'_1 que lo triangulan y transformarlas en las diagonales que lo triangulan en \tilde{T}'_2 , de donde obtenemos que \tilde{T}'_1 y \tilde{T}'_2 se pueden transformar entre sí por flips.

Tenemos entonces las siguientes equivalencias, que prueban nuestro resultado:

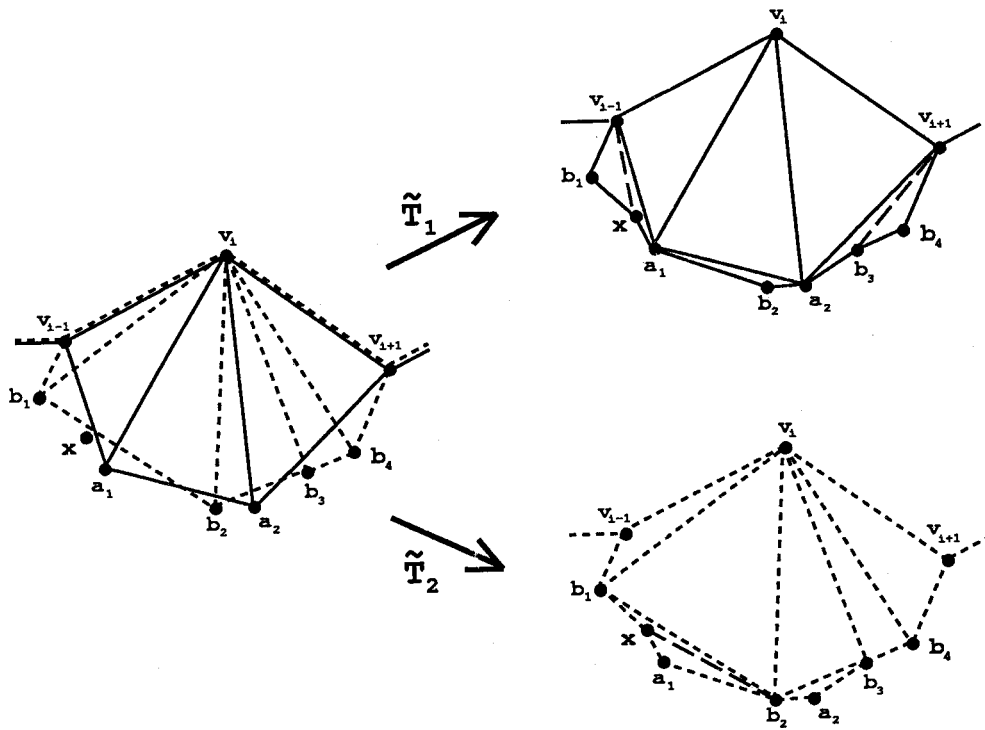


Figura 4.18: Construcción de \tilde{T}_1 y \tilde{T}_2 a partir de T_1 y T_2 .

$$T_1 \sim_f \tilde{T}_1 \sim_f \tilde{T}_2 \sim_f T_2$$

△

Observemos que las triangulaciones consideradas en el resultado anterior no se ajustan a la definición dada de triangulación de una nube de n puntos en el cilindro, en el sentido de ser un conjunto maximal de aristas, ya que las líneas poligonales entre las que se encuentra comprendida la nube no tienen por qué ser poligonales superiores e inferiores de la misma. De hecho, el resultado que hemos obtenido es más general y podemos obtener como corolario la conexión del grafo de triangulaciones de una nube de n puntos en el cilindro, cuando éstas están delimitadas por las mismas poligonales superior e inferior.

Corolario 4.3.1. *Cualesquiera dos triangulaciones de un conjunto de n puntos en el cilindro delimitado por las mismas poligonales superior e inferior, se pueden transformar la una en la otra mediante una secuencia de flips diagonales.*

Demostración: La demostración es una consecuencia inmediata del resultado anterior, simplemente observando que las poligonales superior e inferior son un tipo particular de líneas poligonales que encierran a la nube. △

Otra consecuencia que se obtiene del Teorema 4.3.2 es la conexión del grafo de triangulaciones de un polígono esencial. Recordemos que cuando consideramos en la sección anterior las triangulaciones de polígonos pospusimos la demostración de este resultado hasta haber tratado las triangulaciones de nubes de puntos. Observemos, que un polígono esencial puede ser considerado como una nube de puntos delimitada por las mismas líneas poligonales y con interior vacío, es decir, todos los puntos de la nube se encuentran distribuidos en las líneas poligonales. Obtenemos, por tanto, el siguiente corolario.

Corolario 4.3.2. *Cualesquiera dos triangulaciones de un polígono esencial en el cilindro se pueden transformar entre sí mediante una secuencia de flips diagonales.*

En la siguiente sección estudiaremos otra propiedad del grafo de triangulaciones de los polígonos esenciales.

4.3.3 El diámetro del grafo de triangulaciones

En esta sección veremos que existen polígonos esenciales para los cuales su grafo de triangulaciones tiene diámetro cuadrático.

Teorema 4.3.3. *Existen polígonos esenciales cuyo grafo de triangulaciones tiene diámetro cuadrático en el número de vértices.*

Demostración: Consideremos el polígono esencial R_n con $2n + 2$ vértices $\{t_1, t'_1, a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n\}$ tal que:

- a) La línea poligonal que lo limita superiormente tiene por vértices a $\{t_1, a_1, \dots, a_n\}$ en este orden cíclico; t_1 es un vértice no euclídeo convexo y todos los a_i son vértices euclídeos cóncavos.
- b) La línea poligonal que lo limita inferiormente tiene por vértices a $\{t'_1, b_1, \dots, b_n\}$ en este orden cíclico; t'_1 es un vértice no euclídeo convexo y todos los b_j son vértices euclídeos cóncavos (ver Figura 4.19).

Veamos ahora que existen dos triangulaciones de R_n tales que para transformar una en otra se requiere un número cuadrático de flips diagonales.

Consideremos cualquier triangulación T de R_n y le asignamos un código como sigue: cada triángulo T_i de T tiene dos vértices en $\{t_1, a_1, \dots, a_n\}$ o bien, dos vértices en $\{t'_1, b_1, \dots, b_n\}$. En el primero de los casos, asignamos un 1 a T_i ; en el segundo, se le asigna un 0.

Observemos que la diagonal $t_1 t'_1$ está en cualquier triangulación de R_n por ser ambos vértices no euclídeos convexos. Si leemos los números asignados a los triángulos de T de izquierda a derecha y comenzando siempre por el triángulo a la derecha de la diagonal $t_1 t'_1$, obtenemos una secuencia de 0's y

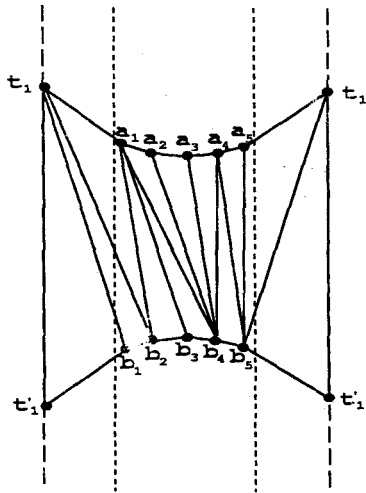


Figura 4.19: R_5 y una triangulación con código 001001110110.

1's; esta secuencia es el código asignado a T . La triangulación presentada en la Figura 4.19, recibe el código 001001110110.

Es evidente que a cada triangulación de R_n se le asigna una secuencia que contiene exactamente $n + 1$ 0's y $n + 1$ 1's y que cada secuencia de $n + 1$ 0's y $n + 1$ 1's define también una única triangulación de R_n ; tenemos por tanto, una correspondencia biyectiva entre el conjunto de triangulaciones de R_n y el conjunto de secuencias binarias que contienen $n + 1$ 0's y $n + 1$ 1's. Las aristas que admiten un flip diagonal en estas triangulaciones son fácilmente identificables dentro de la codificación. Una arista interna de una triangulación T admite un flip diagonal si los triángulos que la contienen tienen asignados en la codificación un 1 y un 0, respectivamente. Más aún, el flip diagonal de una arista de T corresponde a una transposición de un 0 y un 1 consecutivos en la codificación de T . Consideremos ahora las triangulaciones T_1 y T_2 de R_n (ver Figura 4.20) que reciben los códigos siguientes:

$$T_1 \longrightarrow 1, \underbrace{0, \dots, 0}_{(n+1)}, \underbrace{1, \dots, 1}_{(n+1)}, 0$$

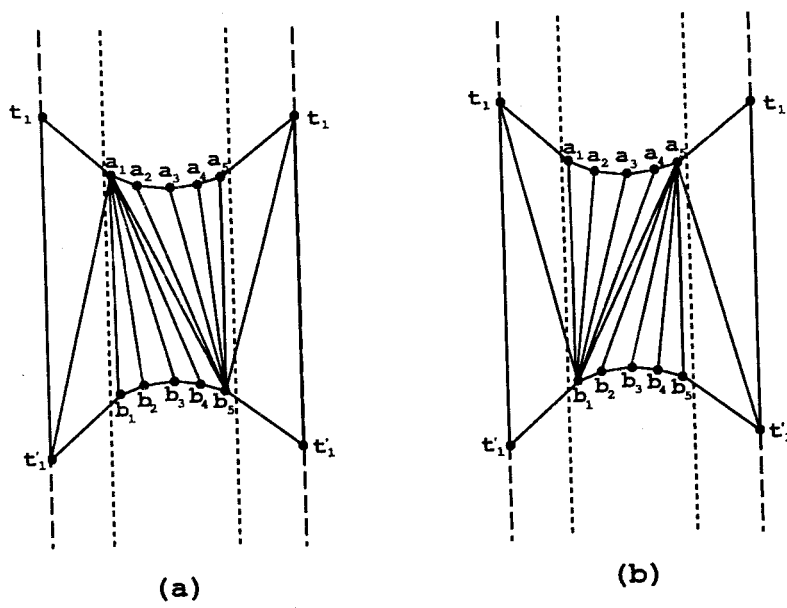


Figura 4.20: R_5 y dos triangulaciones con códigos (a) 100000111110 y (b) 011111000001.

$$T_2 \longrightarrow 0, \underbrace{1, \dots, 1}_{(n+1)}, \underbrace{0, \dots, 0}_{(n+1)}, 1$$

Es evidente que para transformar una en otra se requiere un número cuadrático de transposiciones, lo cual demuestra nuestro resultado.

△

4.4 Triangulaciones en el toro

En esta sección nos detenemos a examinar las grandes peculiaridades que presenta la superficie del toro al considerar en ella triangulaciones de nubes de puntos y de polígonos.

4.4.1 Triangulaciones de nubes de puntos

Dado un conjunto C de puntos en el toro, llamamos *triangulación* de C a todo conjunto maximal de segmentos uniendo a dichos puntos de dos en dos y de forma que no se intersequen entre sí salvo, a lo más, en sus puntos finales. Con esta definición y tal como ya habíamos comentado en la Introducción de este capítulo, si los puntos de C están en posición cilíndrica sobre el toro (esto es, comprendidos entre dos paralelos o dos meridianos diametralmente opuestos), el estudio de las triangulaciones de C se reduce al caso estudiado en la sección anterior.

Al tratar con nubes de puntos en el toro, la primera cuestión que surge de forma natural es la de si todo conjunto maximal de segmentos que no se intersecten entre sí salvo, a lo sumo, en sus puntos finales, triangula a la envolvente convexa del conjunto, como ocurre en el caso plano. Desde luego, la respuesta general a esta cuestión es negativa, ya que este hecho no es cierto en la superficie cilíndrica, como vimos en la sección anterior y por tanto no puede ser cierto en el toro si consideramos un conjunto de puntos en posición cilíndrica.

Más aún, la coincidencia entre estas dos definiciones ni siquiera se tiene si nos restringimos a nubes de puntos en posición no cilíndrica sobre el toro, tal y como muestra la Figura 4.21, en la que el conjunto maximal de segmentos no define ninguna cara triangular en la superficie, y más aún, una de sus caras ni siquiera es 2-celular.

Sin embargo, sí existen nubes de puntos que admiten triangulaciones que dividen a la envolvente convexa, el propio toro, en regiones triangulares (ver Figura 4.22).

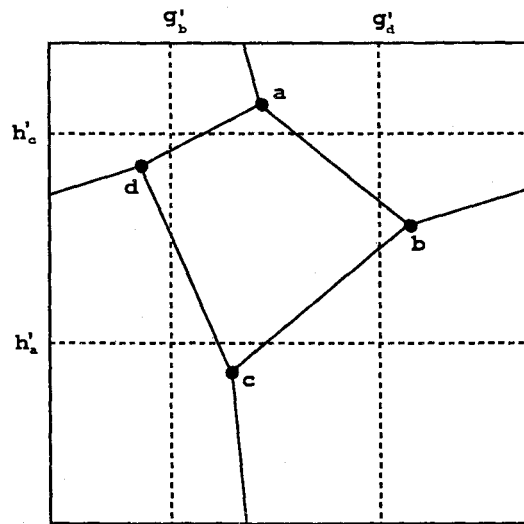


Figura 4.21: Triangulación de una nube de puntos en el toro que no posee ninguna cara triangular.

Esto nos hace pensar si existe alguna condición sobre las nubes de puntos que determine cuándo admiten o no una triangulación que subdivida a la envolvente convexa en regiones triangulares. Grima demostró en [26] que la envolvente convexa en el toro de tres puntos en posición no cilíndrica es la propia superficie y que la envolvente convexa en el cilindro de tres puntos en posición no euclídea contiene a la banda delimitada por los círculos máximos que pasan por los puntos de mayor y menor altura, respectivamente. Por tanto, para que la envolvente convexa de tres puntos sobre el toro delimite una región acotada por un 3-ciclo, los puntos deben estar en posición

euclídea. Si definimos un *cuadrante* en el toro como la región comprendida entre dos paralelos y dos meridianos diametralmente opuestos, se tiene el siguiente resultado.

Proposición 4.4.1. *Sea C una nube de puntos sobre el toro en posición no cilíndrica. Si existe un cuadrante en la superficie que no contenga puntos del conjunto en su interior, entonces ninguna triangulación de C divide a su envolvente convexa en regiones triangulares.*

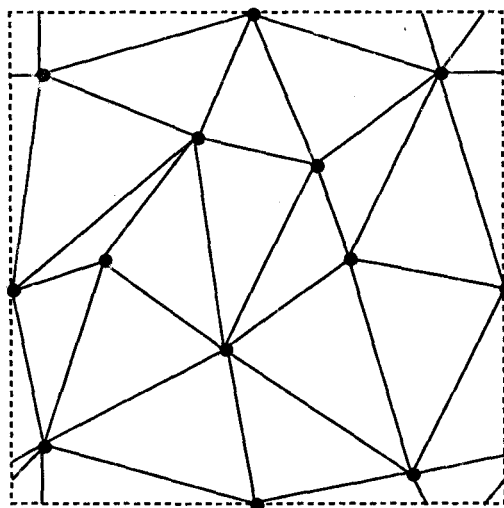


Figura 4.22: Triangulación de una nube de puntos en el toro con todas las caras triangulares.

Demostración: Supongamos, por reducción al absurdo, que T es una triangulación de C que tiene todas sus caras triangulares; denotemos por H al cuadrante del toro que no contiene puntos de C en su interior (que aparece sombreado en gris en la Figura 4.23) y por P al centro de H , que es un punto de la superficie tórica que no pertenece al conjunto C .

Puesto que T es una triangulación del toro, existe un triángulo $v_1v_2v_3$ con vértices en C en cuyo interior se encuentra P . Supongamos que v_1 es el punto de menor abscisa y v_2 el de mayor ordenada del triángulo y sean g_1 y h_2 el meridiano y el paralelo que contienen a v_1 y v_2 , respectivamente y g'_1 y h'_2 sus diametralmente opuestos. Denotemos por H' al cuadrante que delimitan estos pares de meridianos y paralelos.

Los cuadrantes H y H' tienen intersección no vacía ya que el punto P es interior al triángulo $v_1v_2v_3$. Además, $v_3 \in H' - H$ porque está unido a v_1 y v_2 y H no contiene puntos de la nube. Por tanto v_3 está localizado en la zona rayada de la Figura 4.23, en cuyo caso el triángulo $v_1v_2v_3$ no puede contener al punto P y esto contradice nuestras hipótesis. \triangle

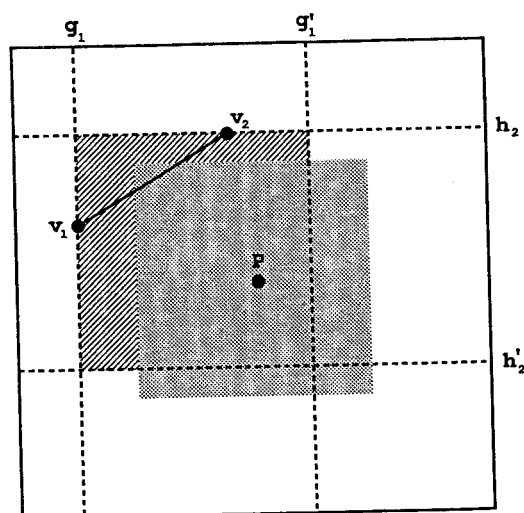


Figura 4.23:

El resultado anterior nos proporciona una condición suficiente para que una triangulación de una nube de puntos sobre el toro en posición no cilíndrica divida a su envolvente convexa en regiones triangulares. Sin embargo, ésta no es una condición necesaria: existen nubes de puntos sobre el toro que no dejan ningún cuadrante vacío y triangulaciones de las mismas que no dividen a la superficie tórica en regiones acotadas por 3-ciclos. Un ejemplo de este

hecho se muestra en la Figura 4.24; en ella, g'_a y g'_c denotan a los meridianos diametralmente opuestos a los que contienen a los puntos a y c , respectivamente y h'_b y h'_d a los paralelos diametralmente opuestos de los que contienen a los puntos c y d , respectivamente. La región sombreada no admite ninguna diagonal y está acotada por un 4-ciclo.

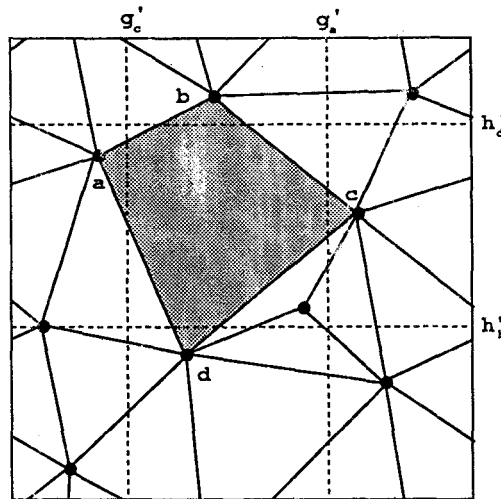


Figura 4.24: Una triangulación de una nube de puntos en posición no cilíndrica que no deja ningún cuadrante vacío y en la que existe una región acotada por un 4-ciclo.

Pero las triangulaciones de nubes de puntos en el toro presentan peculiaridades todavía más espectaculares que las mencionadas anteriormente: una misma nube de puntos puede admitir una triangulación que divida a la superficie tórica en regiones triangulares y otra que no lo haga. La Figura 4.24 mostraba un ejemplo de una triangulación de una nube con una región acotada por un 4-ciclo. Sin embargo, esa misma nube de puntos admite otra triangulación que sí divide al toro en regiones triangulares (ver Figura 4.25).

La cuestión es que en el toro, la construcción de una triangulación de una nube de puntos depende de los segmentos añadidos en los pasos anteriores. Aunque una situación similar se da en las poligonales superior e inferior que delimitan una triangulación de una nube de puntos sobre el cilindro, una vez

fijadas dichas poligonales, siempre es posible obtener una triangulación de la región que queda entre ellas, independientemente de cuáles sean los segmentos de partida, hecho que, como hemos comprobado, no ocurre en la superficie tórica.

Por ejemplo, en la triangulación de la Figura 4.24, la existencia de los segmentos ab , bc , cd y da determina que las diagonales ac y bd sean exteriores a la región sombreada; sin embargo, en la Figura 4.25, al evitar el segmento cd , pueden construirse las diagonales ea y eb , proporcionando una triangulación con todas las regiones acotadas por 3-ciclos.

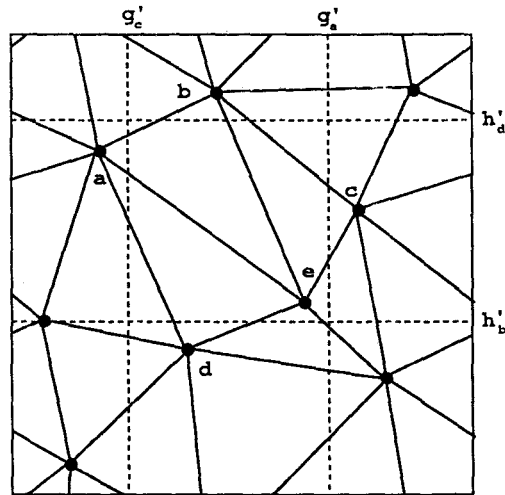


Figura 4.25: Una triangulación de la nube de puntos de la Figura 4.24 que divide al toro en regiones triangulares.

De los ejemplos anteriores se deduce que el número de aristas de una triangulación de una nube de puntos en el toro no es constante y por lo tanto, puesto que la operación de flip diagonal no altera el número de aristas de una triangulación, podemos concluir que el grafo de triangulaciones de una nube de puntos en el toro no es conexo.

En nuestro intento por encontrar otro marco más restringido en el que plantear la cuestión anterior nos preguntamos ahora si, dada una nube de

puntos, existe una cota superior para el número de regiones que quedan sin triangular y de nuevo el comportamiento de la superficie tórica nos sorprende, ya que la respuesta es negativa. Veamos cómo se puede construir una triangulación de una nube de puntos en el toro en la que queden tantas regiones acotadas por 4-ciclos como queramos.

Consideremos el ejemplo de la Figura 4.26; en ella, h_i y g_i denotan el paralelo y el meridiano que contienen a v_i , respectivamente, y h'_i y g'_i a sus diametralmente opuestos. La región que aparece sombreada no admite ninguna diagonal interior ya que w_2 está a la derecha del meridiano diametralmente opuesto al que pasa por v_1 y w_1 está por debajo del paralelo diametralmente opuesto al que contiene a v_2 . Además, los segmentos v_1v_2 y w_1w_2 pueden hacerse arbitrariamente pequeños, por lo que es posible añadir tantas regiones de estas características como se quiera.

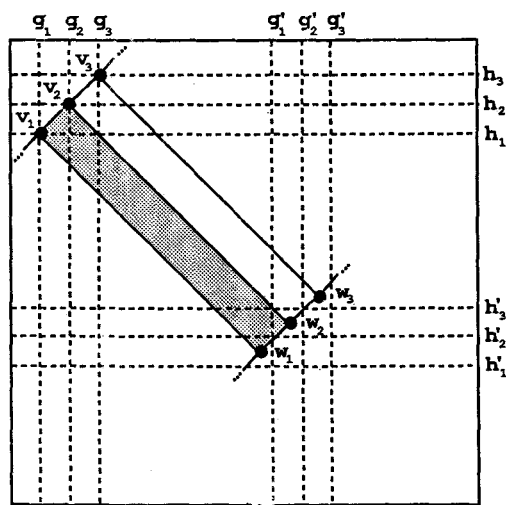


Figura 4.26: Los segmentos $v_i v_{i+1}$ y $w_i w_{i+1}$ se pueden hacer arbitrariamente pequeños.

Tampoco es posible dar una cota superior para el número de vértices que aparecen en la frontera de una región que no pueda ser triangulada. La Figura 4.27 muestra un ejemplo de este hecho; h'_a y h'_c denotan los paralelos diametralmente opuestos a los que pasan por a y c , respectivamente, y g'_b y g'_d los meridianos diametralmente opuestos a los que contienen a b y d . Desde

luego, las diagonales ac y bd son exteriores a la región sombreada y es evidente que por la posición de los vértices v_i , ninguno de los segmentos av_i y bv_i , $i = 1, \dots, n$, son interiores a la misma. Además, los ángulos internos a la región en cada uno de los v_i son mayores que 180° y por tanto, cualquier segmento de la forma cv_j ó dv_j es exterior a ella.

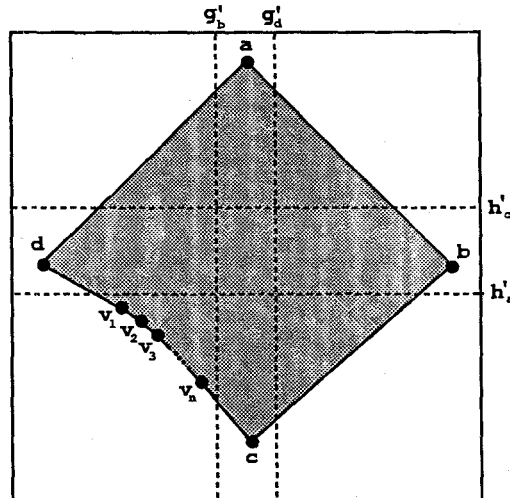


Figura 4.27: Una región que no admite ninguna diagonal acotada por un ciclo de longitud arbitrariamente grande.

Veamos en la siguiente sección que todas estas peculiaridades que presentan las triangulaciones de nubes de puntos en el toro también se tienen al tratar con polígonos en esta superficie.

4.4.2 Triangulaciones de polígonos.

Como ya comentamos en una sección anterior, el interior de un polígono en el plano queda perfectamente determinado por su frontera, ya que ésta divide al plano en una región no acotada y en otra que sí lo está, siendo esta última el interior del polígono. Lo mismo ocurriría cuando tratamos con polígonos euclídeos en el cilindro. Sin embargo, en la esfera vimos que es necesario

especificar cuál de las dos regiones en que queda dividida la esfera por una línea poligonal cerrada y simple se considera como interior del polígono.

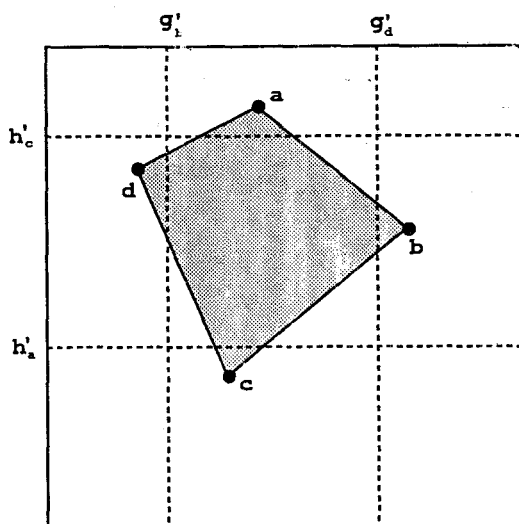


Figura 4.28: Un polígono en el toro que no admite ninguna diagonal.

Llamamos *polígono* en el toro a toda región homeomorfa a un disco que esté acotada por una línea poligonal cerrada y simple; a los extremos de los segmentos de dicha poligonal los llamamos *vértices* del polígono. Observemos que una línea poligonal cerrada y simple en el toro que no sea esencial, divide a la superficie en dos regiones, una homeomorfa a un disco abierto y otra homeomorfa al *wedge* de dos circunferencias (i.e., dos circunferencias unidas por un punto), y con la definición anterior estamos especificando cuál de estas dos regiones es el interior del polígono.

Si en la sección anterior quedó claro que las triangulaciones de nubes de puntos en el toro tenían un comportamiento bastante anómalo con respecto a otras superficies, veamos que las triangulaciones de polígonos también presentan grandes peculiaridades en esta superficie. La primera anomalía que encontramos es que existen polígonos que no admiten ninguna diagonal, como el que se muestra en la Figura 4.28.

Al igual que ocurre con las nubes de puntos en el toro, la elección de una

diagonal en un polígono puede determinar la existencia o no de una triangulación del mismo, como se muestra en la Figura 4.29; en el caso (a), la diagonal cd impide la existencia de cualquier otra diagonal y por tanto la región $abcd$ no puede ser triangulada, en cambio, el caso (b) muestra una triangulación del mismo polígono.

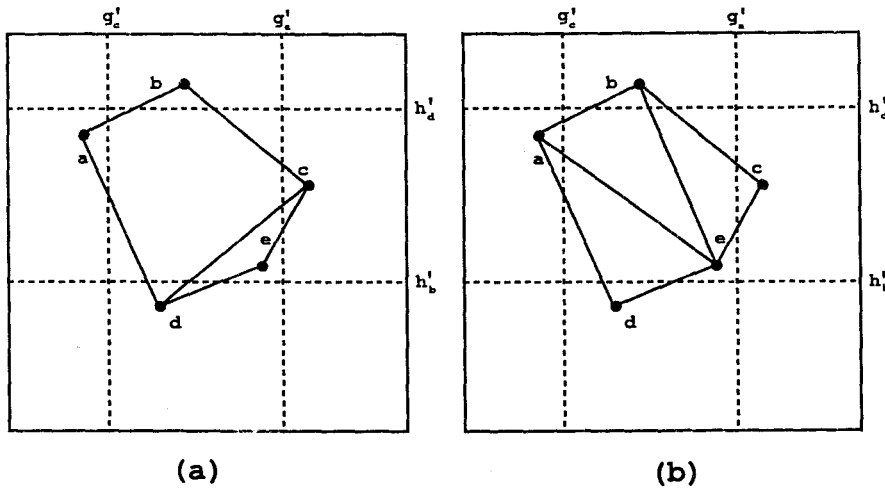


Figura 4.29: Dos triangulaciones de un polígono, una que no lo divide en regiones triangulares (a) y otra que sí lo hace (b).

Para finalizar, observemos que los ejemplos anteriores demuestran que tampoco tiene sentido en este marco tan general el problema de la conexión del grafo de triangulaciones de un polígono, ya que existen polígonos para los cuales no tenemos asegurada la existencia de una triangulación, e incluso aunque la posean, este hecho no es independiente de la elección de las diagonales.

Incluso si nos restringimos a polígonos que admitan triangulaciones, el problema de la conexión tendría que ser tratado de forma absolutamente diferente a como se ha hecho en otras superficies, ya que todas las demostraciones conocidas para este problema en el plano, la esfera o el cilindro siguen un razonamiento inductivo en el que se hace uso de que todo polígono admite una diagonal, hecho que falla, como ya hemos visto, en el caso tórico.

Referencias

- [1] E. Arkin, M. Held, J. Mitchell y S. Skiena. Hamiltonian triangulations for fast rendering. In ed J. van Leeuwen, editor, *Algorithms-ESA '94*, vol. LNCS 855, pages 36–47. Springer-Verlag, 1994.
- [2] J. M. Augenbaum y C. S. Peskin. On the construction of the Voronoi Mesh on the Sphere. *Journal of Computational Physics*, 59 (1985) 177–192.
- [3] D. Avis. Generating rooted triangulations without repetitions. *Algorithmica*, 16 (1996) 618–632.
- [4] D. W. Barnette. Generating the triangulations of the projective plane. *J. Combin. Theory Ser. B*, 33 (1982) 222–230.
- [5] D. W. Barnette y A. L. Edelson. All orientable 2-manifolds have finitely many minimal triangulations. *Israel J. Math.*, 62 (1988) 90–98.
- [6] D. W. Barnette y A. L. Edelson. All 2-manifolds have finitely many minimal triangulations. *Israel J. Math.*, 67 (1989) 123–128.
- [7] R. E. Barnhill. *Representation and approximation of images*, vol. 3 of *Mathematical Software III*. J. Rice, ed, 1993.
- [8] M. Berger. *Geometry II*. Springer-Verlag, 1987.
- [9] M. Bern y D. Eppstein. Mesh generation and optimal triangulation. In *Computing in Euclidean Geometry*, pages 23–90. D. Z. Du and F. K. Hwang, World Scientific, 1992.
- [10] B. Bollobas. *Graph Theory*. Graduate texts in Mathematics. Springer-Verlag, 1979.

- [11] K. Q. Brown. *Geometric transforms for fast geometric algorithms*. PhD thesis, Carnegie-Mellon University, Pittsburgh, 1979.
- [12] B. Chazelle y N. Shouraboura. Bounds on the size of tetrahedralizations. In *Proceedings 10th. Annu. ACM Sympos. Comput. Geom.*, pages 231–239, 1994.
- [13] C. Cortés y A. Nakamoto. Diagonal flips in outer-torus triangulations. Por aparecer en *Discrete Mathematics*.
- [14] M. de Berg, M. van Kreveld, M. Overmars y O. Schwarzkopf. *Computational Geometry: algorithms and applications*. Springer-Verlag, 1997.
- [15] A. K. Dewdney. Wagner's theorem for the torus graphs. *Discrete Math.*, 4 (1973) 139–149.
- [16] M. P. do Carmo. *Geometría diferencial de curvas y superficies*. Alianza Universidad Textos, 1976.
- [17] P. H. Edelman y V. Reiner. Catalan triangulations of the Möbius band. *Graphs and Combinatorics*, 13 (1997) 231–243.
- [18] H. Edelsbrunner. *Algorithms in Combinatorial Geometry*. Springer-Verlag, 1987.
- [19] J. Edmonds. A combinatorial representation for polyhedral surfaces. *Notices Amer. Math. Soc.*, 7(646).
- [20] S. Fortune. Voronoi diagrams and Delaunay triangulations. In *Computing in Euclidean Geometry*, pages 193–234. D. Z. Du and F. K. Hwang, World Scientific, 1992.
- [21] Z. Gao, L. B. Richmond y C. Thomassen. Irreducible triangulations and triangular embeddings on a surface. CORR 91-07, University of Waterloo.
- [22] G. Garequet y M. Sharir. Piecewise-linear interpolation between polygonal slices. In *Proceedings of the 10th ACM Symposium on Computational Geometry*, pages 93–102.
- [23] C. D. Gelatt, S. Kirkpatrick y M. P. Vecchi. Optimization by simulated annealing. *Science*, 220 (1983) 671–680.

- [24] N. D. Gilbert y T. Porter. *Knots and Surfaces*. Oxford Science Publications, 1994.
- [25] J. E. Goodman y J. O'Rourke. *Handbook of Discrete and Computational Geometry*. CRC Press, 1997.
- [26] C. Grima. *Geometría Computacional en Superficies no planas*. PhD thesis, Univ. Sevilla, 1998.
- [27] L. Gross y W. Tucker. *Topological Graph Theory*. Wiley Interscience Publication, 1987.
- [28] F. Harary. *Graph Theory*. Addison Wesley. Reading Mass., 1969.
- [29] H. Hopf y W. Rinow. Über den Begriff der vollständigen differential-geometrischen Fläche. *Comentarii. Math. Helvetici*, 3 (1931) 209–225.
- [30] F. Hurtado y M. Noy. The graph of triangulations of a convex polygon and tree of triangulations. Por aparecer en *Computational Geometry: Theory and Applications*.
- [31] F. Hurtado y M. Noy. Triangulations, visibility graphs and reflex vertices of a simple polygon. Por aparecer en *Computational Geometry: Theory and Applications*.
- [32] L. Christine Kinsey. *Topology of Surfaces*. Springer-Verlag, 1991.
- [33] P. J. M. Van Laarhoven y E. H. L. Aarts. *Simulated Annealing: Theory and Practice*. Kluwer Academic Publ., 1987.
- [34] S. Lawrencenko. The irreducible triangulations of the torus. *Ukrain. Geom. Sb.*, 30 (1987) 52–62. in Russian.
- [35] S. Lawrencenko y S. Negami. Irreducible triangulations of the Klein bottle. *J. Combin. Theory Ser. B*, 70 (1997) 265–291.
- [36] C. L. Lawson. Software for c1 surface interpolation. In ed. J. Rice, editor, *Mathematicas Software III*, pages 161–194. Academic Press, 1977.
- [37] C. E. Leiserson. *Area efficient VLSI computation*. PhD thesis, Carnegie-Mellon University, Pittsburgh, 1981.

- [38] J. Lucas, D. Roelants van Baronaigien y F. Ruskey. On rotations and the generation of binary trees. *J. Algorithms*, 15 (1993) 343–366.
- [39] N. Meggido. Linear-time algorithms for linear programming in \mathbf{R}^3 and related problems. *SIAM J. Comput.*, 12 (1983) 759–776.
- [40] G. H. Meister. Polygons have ears. *Amer. Math. Monthly*, 82 (1975) 648–651.
- [41] N. Meshkat, L. R. Nackman, F. Srinivasan y J. M. Tang. Automatic mesh generation using the symmetric axis transformation of polygonal domains. In *Proceedings of the IEEE*, vol. 80(9), pages 1485–1501.
- [42] A. Nakamoto y K. Ota. Note on irreducible triangulations of surfaces. *J. Graph Theory*, 20 (1995) 227–233.
- [43] S. Negami. Diagonal flips in triangulations of surfaces. *Discrete Math.*, 135 (1994) 225–232.
- [44] S. Negami y S. Watanabe. Diagonal transformations of triangulations on surfaces. *Tsukuba J. Math.*, 14 (1990) 155–166.
- [45] M. Nielson y R. Ramaraj. Interpolation over a sphere based upon a minimum norm network. *Computer Aided Geometric Design*, 4 (1987) 41–57.
- [46] A. Okabe, B. Boots y K. Sugihara. *Spatial Tessellations: Concepts and Applications of Voronoi Diagrams*. John Wiley and Sons, 1992.
- [47] J. O'Rourke. *Computational Geometry in C*. Cambridge University Press, 1994.
- [48] M. Pocchiola y G. Vegter. Computing the visibility graph via pseudo-triangulations. In *Proceedings of the 11th. ACM Symp. on Comp. Geometry*, pages 248–257, 1996.
- [49] F. P. Preparata y M. I. Shamos. *Computational Geometry*. Springer-Verlag, 1985.
- [50] E. Quak y L. L. Schumaker. Cubic spline fitting using data dependent triangulations. *Computer Aided Geometric Design*, 7 (1990) 811–830.
- [51] G. Ringel y B. W. Jackson. Coloring island maps. *Bull. Austral. Math. Soc.*, (29) (1984) 151–165.

- [52] G. Ringel y B. W. Jackson. Heawood's empire problem on the plane. *J. Reine Angew. Math.*, (347) (1984) 148–153.
- [53] G. Ringel y B. W. Jackson. Heawood's empire problem. *J. Combin. Theory Ser.*, B(38) (1985) 168–178.
- [54] N. Robertson y P. D. Seymour. Wagner's conjecture. Por aparecer en Graph Minors XVI.
- [55] D. F. Robinson y I. Janjic. The constructability of floorplans with given outerplanar adjacency and rooms areas. *Ars Combinatoria*, 20-B (1985) 133–142.
- [56] D. Rolfsen. *Knots and Links*. Publish or Perish, Inc., 1976.
- [57] A. Saalfeld. Joint triangulations and triangulated maps. In *Proceedings of the 3rd Annual ACM Symposium in Computational Geometry*, pages 195–204, 1987.
- [58] V. Sacristán. *Optimización Geométrica y Aplicaciones en Visibilidad*. PhD thesis, Universidad Politécnica de Cataluña, 1997.
- [59] W. Schroeder y M. Shephard. Geometry-based fully automatic mesh generation and the delaunay triangulation. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 24 (1988) 2503–2515.
- [60] M. Shapira y A. Rappoport. Shape blending using the star-skeleton representation. Por aparecer en *IEEE Computer Graphics and Applications*.
- [61] D. D. Sleator, R. E. Tarjan y W. P. Thurston. Rotations distance, triangulations and hyperbolic geometry. *J. Am. Math. Soc.*, 1 (1988) 647–682.
- [62] S. Stahl. Generalized embeddings schemes. *J. Graph Theory*, 2(41-52) (1978) 113,136.
- [63] E. Steinitz y H. Rademacher. *Vorlesungen über die theorie der polyeder*. Springer. Berlin.
- [64] R. E. Tarjan. Data structures and network algorithms. In *CBMS-NSF Regional Conference Series in Applied Mathematics*, vol. 44. Society for Industrial Applied Mathematics, 1983.

- [65] R. L. Taylor y O. C. Zienkiewicz. *The Finite Element Method*. McGraw-Hill, 1989.
- [66] G. T. Toussaint. New results in computational geometry relevant to pattern recognition in practice. In E. S. Gelsema y eds L. N. Kanal, editors, *Pattern Recognition in Practice II*, pages 135–146, North-Holland, 1986.
- [67] L. G. Valiant. Universality considerations in vlsi circuits. *IEEE Trans. Comput.*, C-30 (1981) 135–140.
- [68] K. Wagner. Bemerkungen zum vierfarbenproblem. *J. der Deut. Math.*, 46(1) (1963) 26–32.
- [69] D. F. Watson y F. M. Philips. Systematic triangulations. *Computer Vision, Graphics and Image Processing*, 26 (1984) 217–223.
- [70] P. Yoeli. Compiltaion of data for computer-assisted relief cartography. In J. Davis y eds M. McCullagh, editors, *Display and Analysis of Spatial Data*. Wiley, 1975.
- [71] H. Zieschang, E. Vogt y H. D. Coldewey. *Surfaces and planar discontinuous groups*. Springer-Verlag, 1980.

FMA C 043/348

* 5 0 1 3 2 6 0 6 6 *



Carmen Cortés Parejo
"Triangulaciones en Superficies"

laude (por unanimidad) Sobresaliente cum
13 Julio 99

Francisco Serrano

Pedro A. Ramos

[Signature]

[Signature]

[Signature]

[Signature]