UNIVERSIDAD DE SEVILLA

Departamento de Matemática Aplicada I

SUPERÁLGEBRAS DE LIE NILPOTENTES

Rosa María Navarro Olmo

Sevilla, 2001

UNIVERSIDAD DE SEVILLA
Departamento de Matemática Aplicada I

Superálgebras de Lie nilpotentes

Memoria presentada por Rosa María Navarro Olmo para optar al grado de Doctora en Matemáticas por la Universidad de Sevilla

Vº. Bº.
del Director,

Fdo. José Ramón Gómez Martín, Catedrático de Universidad del Departamento de Matemática Aplicada I de la Universidad de Sevilla.

Sevilla, Octubre 2001.

A Fer y Pablo.

La verdadera locura quizá no sea otra cosa que la sabiduría misma que, cansada de descubrir las vergüenzas del mundo, ha tomado la inteligente resolución de volverse loca.

ENRIQUE HEINE

Resumen

En este trabajo se aborda el estudio (que sepamos, por primera vez en España) de las superálgebras de Lie nilpotentes, resolviendo diversos problemas y planteando otros.

El primer problema que se trata es el de la determinación del nilíndice maximal, probando que se alcanza el máximo posible (una unidad menor a la suma de las dimensiones de la parte par e impar de la superálgebra de Lie) en determinados casos, pero que no es posible hacerlo siempre. En particular, se refuta la conjetura de que toda superálgebra de Lie de nilíndice maximal es filiforme.

Otro problema importante que se estudia es el de la determinación de bases "suficientemente buenas" (a las que se denominan bases adaptadas, por jugar un papel análogo al de las bases adaptadas de las álgebras de Lie). El conocimiento de estas bases nos permite obtener resultados teóricos en el caso de superálgebras de Lie con nilíndice elevado y nos sirve de base para la clasificación explícita de familias de superálgebras de Lie de nilíndice pequeño.

En particular, se dan clasificaciones explícitas en dimensión abstracta de familias de superálgebras de Lie nilpotentes que generalizan, en cierto sentido, a las álgebras de Heisenberg. Que sepamos, es la primera vez que se clasifican familias de superálgebras de Lie nilpotentes en dimensión cualquiera.

Se estudian también propiedades geométricas a partir de las correspon-

dientes superálgebras de derivaciones.

Agradecimientos

Quisiera agradecer en estas líneas a todas aquellas personas, que de algún u otro modo, han contibuido a la realización de esta memoria. Va a ser difícil acordarse de todos.

En primer lugar quiero dar las gracias al director de este trabajo, José Ramón Gómez Martín, sin él seguro que este trabajo nunca se hubiera realizado. Gracias por su entusiasmo, por su dedicación, por su apoyo...

En segundo lugar quiero dar las gracias al profesor Yusupdjan Khakimdjanov, de la universidad de Haute-Alsace de Mulhouse (Cédex-Francia) por acogerme durante mi estancia en la citada universidad, y por guiarme en la realización de esta tesis.

En tercer lugar quiero dar las gracias a mi amiga, y también compañera, Lisa por su apoyo tanto efectivo como afectivo en este trabajo, gracias.

Gracias a Isabel por su contribución y su ánimo, y al resto de integrantes del grupo de investigación, en particular a Jesús Mari y a Emi por sus palabras de aliento.

No puedo olvidarme de los miembros del departamento de Matemática Aplicada I de Sevilla, con los que he compartido muchos días de trabajo, en particular quiero dar las gracias a Juan Carlos Dana por sus consejos y por dejar que durante más de un año Lisa y yo le "invadiéramos" su despacho cuando sólo éramos C.H. Gracias también a Natalia, a Javier Cobos, a

Juanma,...

Quiero dar las gracias a mis compañeros de la Escuela Politécnica de Cáceres por el ánimo que he recibido de ellos.

En lo personal quiero agradecer a mi familia en general, padres y hermanos, la fuerza y el apoyo que siempre me han transmitido. Por último quiero dar las gracias a las dos personas, que sin saberlo, más me han ayudado a que finalizara este proyecto ya que siempre me han hecho sentir que no estaba sola y que éste era un trabajo de equipo, a mi marido y a mi hijo, Fer y Pablo.

Sin la ayuda de alguna de las personas anteriores quizás este trabajo nunca se hubiera realizado y sin el resto hubiera sido más difícil.

GRACIAS A TODOS.

Introducción

Sophus Lie (1842-1899) y Felix Klein (1849-1925) estudiaban juntos en Berlín cuando concibieron la idea de estudiar sistemas matemáticos desde la perspectiva del grupo de transformaciones que los deja invariantes. Así, Klein consideró el papel de los grupos finitos en el estudio de cuerpos regulares y en la teoría de ecuaciones algebraicas, mientras Lie desarrollaba su noción de grupo de transformaciones continuas y su papel en la teoría de ecuaciones diferenciales.

Así surge la teoría de Lie y, por consiguiente, la noción de álgebra de Lie, que hoy en día es de una utilidad fundamental en diversas áreas como el análisis, la geometría diferencial, la teoría de números, las ecuaciones diferenciales, la estructura atómica, la física de alta energía, los sistemas dinámicos, el sólido rígido, el campo electromagnético, la mecánica cuántica o la teoría de la relatividad, entre otras.

La teoría de las superálgebras de Lie es mucho más reciente y generaliza a la desarrolada por Lie: una superálgebra de Lie es, en particular, un álgebra $\mathbb{Z}_2$−graduada, $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{\bar{0}} \oplus \mathfrak{g}_{\bar{1}}$, donde la clase del cero $\mathfrak{g}_{\bar{0}}$ es ella misma un álgebra de Lie.

Luego las superálgebras de Lie contienen como casos particulares (o degenerados) a las álgebras de Lie teniendo, por tanto, un papel muy importante dentro de multitud de áreas.

En las últimas décadas la teoría de las superálgebras de Lie ha experimentado una notable evolución en matemáticas y en física. La primera noción de superálgebra de Lie, tal y como se conoce hoy en día, se debe a Corwin, Ne'eman y Sternberg [22] y es de 1974. La primera descripción comprensible matemáticamente se debe a Kac [33] en 1977, que establece la clasificación de las superálgebras de Lie simples (que, en particular, verifican que su cadena central descendente nunca se anula, siendo estable e igual a la superálgebra), de dimensión finita sobre un cuerpo algebraicamente cerrado de característica cero. Posteriormente, otros autores han estudiado las superálgebras de Lie semisimples y su cohomología [36], [37].

Sin embargo, existen muy pocos resultados acerca de las superálgebras de Lie nilpotentes [30] y [24], y son o bien para dimensiones concretas o bien para un tipo muy particular de superálgebras $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{\bar{0}} \oplus \mathfrak{g}_{\bar{1}}$, las llamadas "superálgebras de Lie filiformes" que son aquellas con invariante de Goze $(n-1, 1|m)$ (donde $n = dim(\mathfrak{g}_{\bar{0}})$ y $m = dim(\mathfrak{g}_{\bar{1}})$). Las superálgebras de Lie nilpotentes son aquellas en las que se anula la sucesión central descendente; a la posición del primer ideal nulo de la sucesión central descendente donde se anula se le llama nilíndice de la superálgebra de Lie.

El **primer problema** "natural" que aparece al estudiar las superálgebras de Lie nilpotentes es encontrar para cada par de dimensiones n y m, donde $n = dim(\mathfrak{g}_{\bar{0}})$ y $m = dim(\mathfrak{g}_{\bar{1}})$, cuál es el nilíndice mayor posible, $f(n, m)$, y encontrar las superálgebras que lo alcanzan. De la función que da el nilíndice maximal se conoce que es una función lineal en n y m, y que siempre tendrá como cota superior a $n + m$, $f(n, m) \leq n + m$.

Para cada par de dimensiones n y m, el conjunto de estas superálgebras de nilíndice maximal se notará mediante $\mathcal{M}^{n+m}$ y constituyen, en cierto sentido, la verdadera generalización de las álgebras de Lie filiformes (las álgebras de Lie de nilíndice maximal) para la teoría de las superálgebras de Lie. Juegan un papel primordial dentro de la variedad algebraica de todas las superálgebras de Lie nilpotentes $\mathcal{N}^{n+m}$, en particular, constituyen un abierto de dicha variedad para la topología de Zariski, aportando una valiosa información acerca de las componentes irreducibles de $\mathcal{N}^{n+m}$.

Que conozcamos, esta memoria constituye el primer trabajo que se realiza en este sentido.

Recientemente se ha introducido [24] en la teoría de las superálgebras de Lie el invariante de Goze o par de sucesiones características que generaliza al invariante usado en álgebras de Lie. Si $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{\bar{0}} \oplus \mathfrak{g}_{\bar{1}}$ es una superálgebra de lie se define invariante de Goze de $\mathfrak{g}$, y se denota $gz(\mathfrak{g})$, a

$$gz(\mathfrak{g}) = \left(\ \max gz_0(X_1) \mid \max gz_1(X_2)\ \right) \qquad \forall X_1, X_2 \in \mathfrak{g}_{\bar{0}} - [\mathfrak{g}_{\bar{0}}, \mathfrak{g}_{\bar{0}}]$$

donde $gz_i(X)$ representa a la sucesión característica, formada por las dimensiones de los bloques de Jordan, ordenadas de forma lexicográfica, de la matriz asociada al operador $ad(X)$ restringido a $\mathfrak{g}_{\bar{i}}$ $(i = 0, 1)$.

Se observa que el invariante de Goze no puede ser mayor que $(n-1, 1 \mid m)$ (caso en el que se tendría en particular que $\mathfrak{g}_{\bar{0}}$ es un álgebra de Lie filiforme). Surge en este momento una **conjetura**

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{\bar{0}} \oplus \mathfrak{g}_{\bar{1}} \in \mathcal{M}^{n+m} \Longrightarrow \mathfrak{g} \text{ tiene invariante de Goze } (n-1, 1 \mid m)$$

o lo que es lo mismo:

$$\mathcal{M}^{n+m} \subset \mathcal{F}^{n+m}$$

donde $\mathcal{F}^{n+m}$ denota a la variedad de las superálgebras de Lie de invariante de Goze $(n-1, 1 \mid m)$. A éstas últimas superálgebras, y como ya se ha indicado anteriormente, se las ha llamado superágebras de Lie filiformes (aunque, en algún sentido, no constituyan la verdadera generalización de las álgebras de Lie filiformes).

En este trabajo se determina el nilíndice maximal $f(2, m)$ con m impar y se encuentran cotas inferiores muy cercanas al valor de la función $f(n, m)$ para casi todos los valores posibles de n y m (siendo hoy en día una conjetura el que las cotas inferiores encontradas coincidan con la función nilíndice maximal), dejándose sin estudiar, por su extrema complejidad, sólo una cantidad finita de casos. Así mismo se determina totalmente la variedad $\mathcal{M}^{2+m}$, con m impar, probando que en este caso es cierta la conjetura $\mathcal{M}^{n+m} \subset \mathcal{F}^{n+m}$, esto es:

$$\mathcal{M}^{2+m} \subset \mathcal{F}^{2+m}, \quad \text{con m impar}$$

También es prueba que la conjetura **NO** se verifica para al menos $n = 3$ y m impar, esto es

$$\mathcal{M}^{3+m} \not\subset \mathcal{F}^{3+m}, \qquad \text{con m impar}$$

Se determina la variedad $\mathcal{M}^{2+m}$ con m impar que se prueba que coincide exactamente con la órbita de la superálgebra $K^{2,m}$, denotada así en honor al profesor Y. Khakimdjanov, órbita que a su vez se explicita como familia $\left(\frac{m-1}{2}\right)$ –paramétrica. Se obtiene, tras el estudio cohomologíco de esta superálgebra, que la variedad algebraica $\mathcal{N}^{2+1}$ es irreducible y que $\mathcal{N}^{2+m}$ con m impar y $m \geq 3$ tiene una componente irreducible, $\overline{\mathcal{O}(K^{2,m})}^{\mathcal{Z}}$, de dimensión mayor o igual a $m^2 + \frac{3-m}{2}$.

A lo largo del estudio anterior y como complemento del mismo se clasificarán una gran parte de las superálgebras de Lie nilpotentes de dimensión 5, todas las pertenecientes a $\mathcal{N}^{2+3}$ no filiformes.

Esto da pie a la introducción del **segundo problema** que se aborda en esta memoria: la clasificación. En cierto sentido, uno de los primeros problemas que se plantea al estudiar un cierto tipo de estructuras algebraicas es su clasificación. Para las álgebras de Lie, a pesar de haber sido planteado hace más de un siglo y de ser muchos los autores en atacar el problema: [21], [49], [38], [48], [39], [20], [3], [44] y [47], en la actualidad sólo se conoce la clasificación completa de las álgebras de Lie nilpotentes hasta dimensión 7. Por tanto, muchos autores se centran en las álgebras de Lie filiformes (Ancochea y Goze [2], y Gómez, Jiménez-Merchán y Khakimdjanov [26]) o en las $p-$filiformes que generalizan las anteriores (Cabezas y Gómez, solos o junto a Camacho y Navarro [12],[11], [9], [10], [14], [13] y [15]).

Con todo lo anterior se deduce que la clasificación de las superálgebras de Lie va a resultar un problema imposible de resolver. Que conozcamos, las clasificaciones que se presentan en esta memoria son las primeras clasificaciones que se presentan para superálgebras de Lie nilpotentes en dimensión arbitraria.

Dentro de las álgebras de Lie, y en el extremo opuesto a las álgebras de Lie filiformes (nilíndice $n-1$), se encuentran las álgebras de Lie de nilíndice 2 ó metabelianas (el caso de nilíndice 1 es trivial). Quizás las álgebras metabelianas más importantes sean las de Heisenberg, $\mathcal{H}_r$, que aparecen en cada dimensión impar $2r+1$, que son las únicas álgebras de Lie 2−nilpotentes y centro unidimensional y, además, juegan un papel relevante no sólo dentro de la teoría de Lie, sino dentro de otros campos como la física cuántica [45].

En este trabajo se generalizan las álgebras de Heisenberg a la teoría de las superálgebras de Lie, estudiándose las superálgebras de Lie con parte par el álgebra de Lie de Heisenberg. De todas las superálgebras de Lie de Heisenberg destacan las 2−nilpotentes, y dentro de éstas las de centro unidimensional, ya que éstas constituyen el verdadero "calco" algebraico y geométrico de las álgebras de Lie $\mathcal{H}_r$ en la teoría de superálgebras de Lie.

Se clasifican, determinándolas completamente, las superálgebras de Heisenberg con dimensión arbitraria de la parte par y dimensión de la parte impar menor o igual a 2. De las de dimensión de la parte impar igual a 3, se clasificarán las de invariante de Goze minimal $(2,1,\ldots,1|\ 1,1,1)$ y las de invariante de Goze maximal $(2,1,\ldots,1|\ 3)$. Del resto, es decir, las de invariante de Goze $(2,1,\ldots,1|\ 2,1)$, se presenta la familia genérica y se clasifican las 2−nilpotentes y, dentro de éstas, las de centro unidimensional.

Al mismo tiempo que se aborda el problema del nilíndice y de la clasificación se considera de forma subyacente el "**problema cero**" de las superálgebras de Lie que consiste en encontrar bases "suficientemente cómodas" (a las que se denominan bases adaptadas) para cada tipo de superálgebras que se trate en cada caso, enunciando y probando en esta memoria los teoremas de base adaptada para cada tipo de superálgebras que se estudia.

Como conclusión al trabajo y como aplicación de los resultados obtenidos, se presentan varias **conjeturas**, como son:

Conjetura 1: $\mathfrak{g} \in \mathcal{N}^{n+m}$ de invariante de Goze $(p_1, p_2, \ldots, p_k|\ q_1, q_2, \ldots, q_l)$, entonces su nilíndice será $\leq p_1 + q_1$.

Conjetura 2: $f(n,m)|_{\mathcal{F}^{n+m}} = f(n,m)|_{\mathcal{N}^{n+m}}$

Conjetura 3: $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{\bar{0}} \oplus \mathfrak{g}_{\bar{1}} \in \mathcal{M}^{n+m} \Longrightarrow \mathfrak{g}_{\bar{0}}$ filiforme.

A continuación se desglosará el contenido de los capítulos de esta memoria.

En el capítulo 1 se da una breve recopilación de resultados y definiciones que serán utilizados a lo largo de todo el trabajo.

En el capítulo 2 se presentan las superálgebras de Lie filiformes probando la existencia de base adaptada para ellas.

En el capítulo 3 se estudia la variedad de las superálgebras de Lie de nilíndice maximal para la variedad de las filiformes y generalizando estos resultados para toda la variedad de las superálgebras de Lie nilpotentes. Se clasifican, al mismo tiempo, todas las nilpotentes no filiformes para dimensión 2 de la parte par y dimensión 3 de la parte impar.

En el capítulo 4 se estudian propiedades geométricas de la familia de superálgebras de Lie $K^{2,m}$, que determina la variedad $\mathcal{M}^{2+m}$ para m impar. Este estudio se hará vía la determinación de la superálgebra de derivaciones correspondiente, encontrando una base y la dimensión del primer espacio de cohomología y la dimensión del espacio de cobordes pares de grado 2 y del espacio de las órbitas. Se obtienen propiedades acerca de las componentes irreducibles de $\mathcal{N}^{n+m}$.

En el capítulo 5 se estudian las superálgebras de Lie de Heisenberg con dimensión arbitraria de la parte par y dimensión de la parte impar menor o igual a tres. De éstas se clasificarán totalmente las de dimensión de la parte impar menor o igual a 2. De las de dimensión de la parte impar igual a 3, se clasificarán las de invariante de Goze minimal $(2,1,\ldots,1|\ 1,1,1)$ y las de invariante de Goze maximal $(2,1,\ldots,1|\ 3)$. De las de invariante de Goze $(2,1,\ldots,1|\ 2,1)$ se presenta la familia genérica y se clasifican las $2-$nilpotentes y, dentro de éstas, las de centro unidimensional.

Se termina la memoria con una recopilación de algunos de los problemas que surgen de esta memoria y que han quedado abiertos.

Notación. A lo largo de todo el trabajo, y por simplicidad, dada una superálgebra de Lie $\mathfrak{g}$ se notará a la clase del cero y a la clase del uno por $\mathfrak{g}_0$ y $\mathfrak{g}_1$ respectivamente, en lugar de $\mathfrak{g}_{\bar{0}}$ y $\mathfrak{g}_{\bar{1}}$. También se notará del mismo modo a los ideales graduados con los que se trabaje, en particular a los ideales de la sucesión central descendente: $\mathcal{C}^i(\mathfrak{g}) = \mathcal{C}^i(\mathfrak{g})_0 \oplus \mathcal{C}^i(\mathfrak{g})_1$.

Índice

Capítulo 1

Definiciones y terminología

A lo largo de este capítulo, así como en los siguientes, siempre se trabajará con $\mathbb{C}$-espacios vectoriales (y, por tanto, con álgebras) de dimensión finita.

1.1 Espacios vectoriales $\mathbb{Z}_2$-graduados y superálgebras

A lo largo de esta sección se verán algunas definiciones sobre ciertas estructuras algebraicas graduadas, en concreto $\mathbb{Z}_2$-graduadas. Para más detalles ver [7], [8].

Espacios vectoriales $\mathbb{Z}_2$-graduados

Un espacio vectorial V sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ se dice que está $\mathbb{Z}_2$-graduado si admite la siguiente descomposición en suma directa

$$V = V_0 \oplus V_1$$

A V_0 se le llama la parte par de V y se dice que sus elementos, X, son homogéneos de grado 0, lo que se notará como $deg(X) = d(X) = 0$, $X \in V_0$, así como a V_1 se le llama la parte impar de V y sus elementos, Y, se dice que son homogéneos de grado 1, $deg(Y) = d(Y) = 1$, $Y \in V_1$.

Aplicaciones lineales homogéneas

Sean V y W dos espacios vectoriales $\mathbb{Z}_2$-graduados, $V = V_0 \oplus V_1$ y $W = W_0 \oplus W_1$ y sea f una aplicación lineal entre ellos $f : V_0 \oplus V_1 \to W_0 \oplus W_1$. Se dice que f es una aplicación lineal homogénea de grado γ, $\gamma \in \mathbb{Z}_2$, entre V y W si $f(V_\alpha) \subset W_{\alpha+\gamma}$ para todo $\alpha \in \mathbb{Z}_2$. A γ se le notará, igualmente, por $deg(f)$ o simplemente por $d(f)$ cuando no haya lugar a confusión.

Superálgebras

Una superálgebra, por definición, no es más que un álgebra $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1$ $\mathbb{Z}_2$-graduada (esto es, tal que si se denota por $[\ ,\ ]$ su multiplicación se tiene que $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta] \subset \mathfrak{g}_{\alpha+\beta(mod2)}$ para cualesquiera valores α y β de $\mathbb{Z}_2$)

Nota 1.1.1 a) Las definiciones de subálgebra graduada, ideal graduado y de álgebra cociente graduada de $\mathfrak{g}$ son estándares.

b) En particular, el álgebra $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ es un ideal graduado de $\mathfrak{g}$.

c) Se va a suponer siempre que los homomorfismos (isomorfismos, automorfismos) de superálgebras son compatibles con la $\mathbb{Z}_2$-graduación, es decir, que son aplicaciones lineales homogéneas de grado 0.

1.2 Superálgebras de Lie

1.2.1 Álgebras de Lie

Un álgebra de Lie $(\mathfrak{g}, \mu)$ sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ es un espacio vectorial $\mathfrak{g}$ sobre $\mathbb{K}$ dotado de una aplicación bilineal $\mu : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$, llamada producto o ley del álgebra, que cumple las propiedades

$$\mu(x, x) = 0$$

y la identidad de Jacobi, que se expresa como

$$\mu(x, \mu(y, z)) + \mu(y, \mu(z, x)) + \mu(z, \mu(x, y)) = 0$$

para todos los elementos x, y, z de $\mathfrak{g}$.

Una representación del álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ sobre el espacio vectorial V es una aplicación lineal $\rho : \mathfrak{g} \longrightarrow End(V)$ tal que

$$\rho([X, Y]) = \rho(X) \circ \rho(Y) - \rho(Y) \circ \rho(X)$$

para todo $X, Y \in \mathfrak{g}$. En este caso se dirá que V es un $\mathfrak{g}$-módulo.

1.2.2 Definiciones de superálgebras de Lie

Una primera definición básica de superálgebra de Lie puede encontrarse en [46].

Definición 1.2.1 *Una* **superálgebra de Lie** *no es más que un espacio vectorial $\mathbb{Z}_2$-graduado, $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1$, dotado de un producto [,] que verifica:*

1. $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta] \subset \mathfrak{g}_{\alpha+\beta(mod2)} \qquad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{Z}_2$.

2. $[X, Y] = -(-1)^{\alpha \cdot \beta}[Y, X] \qquad \forall X \in \mathfrak{g}_\alpha, \forall Y \in \mathfrak{g}_\beta$.

3. $(-1)^{\gamma \cdot \alpha}[X, [Y, Z]] + (-1)^{\alpha \cdot \beta}[Y, [Z, X]] + (-1)^{\beta \cdot \gamma}[Z, [X, Y]] = 0$ *para todos los elementos* $X \in \mathfrak{g}_\alpha, Y \in \mathfrak{g}_\beta, Z \in \mathfrak{g}_\gamma$ *con* $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{Z}_2$.

Esta última propiedad se denomina **identidad de Jacobi graduada** o **super-relación de Jacobi** y se notará en lo sigue como $J_g(X, Y, Z)$.

Una segunda definición de superálgebra de Lie, en la que se pone de manifiesto la relación que existe entre superálgebras y álgebras de Lie, se puede encontrar en [5].

Definición 1.2.2 *Una* **superálgebra de Lie** *es un espacio vectorial* $\mathbb{Z}_2$*-graduado,* $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1$*, tal que:*

1. $\mathfrak{g}_0$ *es un álgebra de Lie (de ley* μ*).*

2. $\mathfrak{g}_1$ *es un* $\mathfrak{g}_0$*-módulo (de producto "*.*").*

3. *Existe una aplicación bilineal y simétrica* $B : \mathfrak{g}_1 \times \mathfrak{g}_1 \longrightarrow \mathfrak{g}_0$*, que verifica:*

   3.1. B *es* $\mathfrak{g}_0$*-invariante, esto es:*

   $$\mu(X, B(Y_1, Y_2)) = B(X.Y_1, Y_2) + B(Y_1, X.Y_2), \ \forall X \in \mathfrak{g}_0, \forall Y_1, Y_2 \in \mathfrak{g}_1.$$

   3.2. $B(Y_1, Y_2).Y_3 + B(Y_2, Y_3).Y_1 + B(Y_3, Y_1).Y_2 = 0, \ \forall Y_i \in \mathfrak{g}_1, \ 1 \leq i \leq 3.$

Nota 1.2.1 a) La propiedad 2 de la definición 1.2.2 equivale a la existencia de una aplicación bilineal o producto ".":$\mathfrak{g}_0 \times \mathfrak{g}_1 \rightarrow \mathfrak{g}_1$ (que se denota $(X, Y) \rightarrow X.Y$) que verifica la siguiente condición:

$$\mu(X_1, X_2).Y = X_1.X_2.Y - X_2.X_1.Y$$

(Para más detalles sobre $\mathfrak{g}_0$-módulos ver [31], Cap.2, Sec.6.1.)

b) En las condiciones de la definición 1.2.2 se define una nueva ley, [,], sobre $\mathfrak{g}$ como sigue:

$$\begin{array}{ll} [X_1, X_2] = \mu(X_1, X_2) & \text{si } X_1, X_2 \in \mathfrak{g}_0 \\ [X_1, Y_1] = -[Y_1, X_1] = X_1.Y_1 & \text{si } X_1 \in \mathfrak{g}_0, Y_1 \in \mathfrak{g}_1 \\ [Y_1, Y_2] = B(Y_1, Y_2) & \text{si } Y_1, Y_2 \in \mathfrak{g}_1 \end{array}$$

Gracias a esta ley, [,], de la superálgebra de Lie, la condición que se ha obtenido en a) junto con las condiciones 3.1 y 3.2 conforman la identidad de Jacobi graduada para todas las posibles elecciones de elementos homogéneos

X_i, Y_j, donde por comodidad a los elementos pares se les denota X_i y a los elementos impares Y_j. Con todo esto se sigue que las definiciones 1.2.1 y 1.2.2 son equivalentes.

Notación. A lo largo de todo el trabajo siempre que se hable de superálgebra de Lie, ésta se supondrá en las condiciones de la Definición 1.2.2 y dotada del producto o ley [,], que se ha definido en la Nota 1.2.1.b). En numerosas ocasiones en lugar de escribir "superálgebra(s) de Lie nilpotente(s)" se escribirá **S.A.L.**

Nota 1.2.2 Es frecuente llamar a las superálgebras de Lie, álgebras de Lie $\mathbb{Z}_2$-graduadas (aunque no sean álgebras de Lie).

1.2.3 Homomorfismos de superálgebras de Lie

Definición 1.2.3 *Sean $\mathfrak{g}$ y $\mathfrak{g}'$ dos superálgebras de Lie. Una aplicación lineal f de $\mathfrak{g}$ en $\mathfrak{g}'$ es un* **homomorfismo de superálgebras de Lie** *si:*

1. *f es una aplicación lineal que conserva la graduación (deg(f)=0).*

2. *$f([X,Y]) = [f(X), f(Y)]$ para todo $X, Y \in \mathfrak{g}$.*

Si además f es biyectiva se dice que es un **isomorfismo**.

1.2.4 Ejemplos de superálgebras de Lie

- Sea $\mathcal{A} = \mathcal{A}_0 \oplus \mathcal{A}_1$ una superálgebra asociativa. Sobre el espacio vectorial $\mathbb{Z}_2$-graduado $\mathcal{A}$ se define una nueva ley $<,>$ dada por:

  $$< A, B >= AB - (-1)^{\alpha\beta} BA$$

  $\forall A \in \mathcal{A}_\alpha, \forall B \in \mathcal{A}_\beta$ con $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}_2$. El álgebra que se obtiene es una superálgebra de Lie y se dice asociada con la superálgebra asociativa $\mathcal{A}$.

- Caso particular importante del anterior:

  Sea $V = V_0 \oplus V_1$ un espacio vectorial $\mathbb{Z}_2$-graduado. El álgebra $End(V)$ (que consiste en las aplicaciones $\mathbb{K}$-lineales de V en V), se convierte en una superálgebra asociativa si se define la $\mathbb{Z}_2$-graduación por:

  $$End(V)_\alpha = \{A \in End(V)/A(V_\beta) \subset V_{\alpha+\beta}, \beta \in \mathbb{Z}_2\} \qquad \forall \alpha \in \mathbb{Z}_2$$

  es fácil comprobar que $End(V)_0$ y $End(V)_1$ son las aplicaciones lineales homogéneas de grados 0 y 1 respectivamente. Si a la superálgebra asociativa que se acaba de obtener, $End(V) = End(V)_0 \oplus End(V)_1$, se le asocia el producto del ejemplo anterior $<,>$ se obtiene una superálgebra de Lie asociada a $End(V)$. La superálgebra así obtenida se denota $pl(V) = pl_0(V) \oplus pl_1(V)$, la superálgebra de Lie general lineal de V (que juega el mismo papel que gl(V) dentro de la teoría ordinaria de álgebras de Lie).

1.3 Derivaciones

Los ejemplos vistos en la sección anterior van a servir para introducir la noción de "derivación " de una superálgebra de Lie.

Supóngase que se tiene una superálgebra $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1$.

Sea $\mathcal{D}_\alpha(\mathfrak{g})$, $\alpha \in \mathbb{Z}_2$, el subespacio de todos los $f \in pl_\alpha(\mathfrak{g})$ tal que

$$f([X,Y]) = [f(X),Y] + (-1)^{\alpha\xi}[X,f(Y)] \qquad \forall X \in \mathfrak{g}_\xi, \forall Y \in \mathfrak{g},\ \xi \in \mathbb{Z}_2$$

- Si $\alpha = 0 \longrightarrow \mathcal{D}_0(\mathfrak{g})$= derivaciones pares de la superálgebra $\mathfrak{g}$.

- Si $\alpha = 1 \longrightarrow \mathcal{D}_1(\mathfrak{g})$= derivaciones impares o antiderivaciones de la superálgebra $\mathfrak{g}$.

Como se tiene que

$$\mathcal{D}(\mathfrak{g}) = \mathcal{D}_0(\mathfrak{g}) \oplus \mathcal{D}_1(\mathfrak{g})$$

$\mathcal{D}(\mathfrak{g})$ resulta ser una subálgebra graduada de $pl(\mathfrak{g})$. Los elementos de $\mathcal{D}(\mathfrak{g})$ se llaman **superderivaciones** de $\mathfrak{g}$, de aquí que $\mathcal{D}(\mathfrak{g})$ se denomine " la superálgebra de Lie de las superderivaciones de $\mathfrak{g}$".

Nota 1.3.1 El operador adjunto *ad* se define de modo análogo que para el caso de álgebras de Lie, verificando que adX es una derivación de $\mathfrak{g}$ para todo $X \in \mathfrak{g}$; en particular si X es un elemento homogéneo de grado 0 la aplicación adX será una derivación par, y si X es un elemento homogéneo de grado 1 entonces adX será una derivación impar o antiderivación. A este tipo de derivaciones se las conoce como derivaciones interiores. Al espacio de todas las derivaciones interiores de $\mathfrak{g}$ se le nota por $\mathcal{A}\lceil(\mathfrak{g})$ y, por lo anterior, se tiene que el subespacio par coincide con $\mathcal{A}\lceil(\mathfrak{g}_0)$ y el impar con $\mathcal{A}\lceil(\mathfrak{g}_1)$, luego se tiene que

$$\mathcal{A}\lceil(\mathfrak{g}) = \mathcal{A}\lceil(\mathfrak{g}_0) \oplus \mathcal{A}\lceil(\mathfrak{g}_1)$$

1.4 Superálgebras de Lie nilpotentes

En lo que sigue sea $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1$ una superálgebra de Lie. A la sucesión de ideales definidos mediante

$$\begin{cases} \mathcal{C}^0(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g}, & \\ \mathcal{C}^{k+1}(\mathfrak{g}) = [\mathfrak{g}, \mathcal{C}^k(\mathfrak{g})], & k \geq 0 \end{cases}$$

se le llama **sucesión central descendente** de $\mathfrak{g}$. Dicha sucesión verifica que

$$\mathfrak{g} = \mathcal{C}^0(\mathfrak{g}) \supseteq \mathcal{C}^1(\mathfrak{g}) \supseteq \cdots \supseteq \mathcal{C}^i(\mathfrak{g}) \cdots$$

Si existe un entero k para el que $\mathcal{C}^k(\mathfrak{g}) = \{0\}$ la superálgebra se dice **nilpotente**; en tal caso, al menor entero que cumpla dicha condición se le llama **índice de nilpotencia** o **nilíndice** de $\mathfrak{g}$.

De la propia definición resulta evidente que cada $\mathcal{C}^i(\mathfrak{g})$ es un ideal graduado de la superálgebra $\mathfrak{g}$. Luego cada $\mathcal{C}^i(\mathfrak{g})$ admite una descomposición en su parte par e impar, $\mathcal{C}^i(\mathfrak{g}) = \mathcal{C}^i(\mathfrak{g})_0 \oplus \mathcal{C}^i(\mathfrak{g})_1$, obteniendo dos nuevas cadenas decrecientes de ideales de $\mathfrak{g}_0$ y $\mathfrak{g}_1$ respectivamente.

$$\mathfrak{g}_0 = \mathcal{C}^0(\mathfrak{g})_0 \supseteq \mathcal{C}^1(\mathfrak{g})_0 \supseteq \cdots \supseteq \mathcal{C}^i(\mathfrak{g})_0 \cdots$$
$$\mathfrak{g}_1 = \mathcal{C}^0(\mathfrak{g})_1 \supseteq \mathcal{C}^1(\mathfrak{g})_1 \supseteq \cdots \supseteq \mathcal{C}^i(\mathfrak{g})_1 \cdots$$

Como $\mathcal{C}^k(\mathfrak{g}) = \{0\} \iff \mathcal{C}^{k_0}(\mathfrak{g})_0 = \{0\} \wedge \mathcal{C}^{k_1}(\mathfrak{g})_1 = \{0\}$, el nilíndice de $\mathfrak{g}$ será k si y sólo si existen dos enteros k_0, k_1 donde se estabilizan en 0 la cadena par y la impar respectivamente ($\mathcal{C}^{k_0}(\mathfrak{g})_0 = \{0\}$ y $\mathcal{C}^{k_1}(\mathfrak{g})_1 = \{0\}$) con $max\{k_0, k_1\} = k$.

No hay que confundir estas dos cadenas de ideales con las que se van a definir a continuación.

Sean $\mathcal{C}^k(\mathfrak{g}_0)$ y $\mathcal{C}^k(\mathfrak{g}_1)$ dos cadenas decrecientes de ideales tales que :

$$\begin{cases} \mathcal{C}^0(\mathfrak{g}_i) = \mathfrak{g}_i, \\ \mathcal{C}^{k+1}(\mathfrak{g}_i) = [\mathfrak{g}_0, \mathcal{C}^k(\mathfrak{g}_i)] \qquad k \geq 0 \end{cases}$$

con $i \in \{0, 1\}$. Se observa de la definición que en este caso en $\mathcal{C}^{k+1}(\mathfrak{g}_i)$ sólo se multiplica por $\mathfrak{g}_0$. Así resulta que $\mathcal{C}^k(\mathfrak{g}_0)$ es la sucesión central descendente del álgebra de Lie $\mathfrak{g}_0$ y $\mathcal{C}^k(\mathfrak{g}_1)$ irá dando una sucesión decreciente de ideales contenidos en $\mathfrak{g}_1$ que coinciden con la actuación de $\mathfrak{g}_0$ sobre los sub $\mathfrak{g}_0$-módulos $\mathcal{C}^k(\mathfrak{g}_1)$.

Nota 1.4.1 a) Se tienen las siguientes relaciones para cualquier valor natural de k:

$$\mathcal{C}^k(\mathfrak{g}_0) \subseteq \mathcal{C}^k(\mathfrak{g})_0 \quad \wedge \quad \mathcal{C}^k(\mathfrak{g}_1) = \mathcal{C}^k(\mathfrak{g})_1$$

de donde se sigue que si $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1$ es superálgebra de Lie nilpotente se tendrán dos enteros p y q donde se estabilicen en cero las cadenas $\mathcal{C}^k(\mathfrak{g}_0)$ y $\mathcal{C}^k(\mathfrak{g}_1)$.

b) En este caso la estabilización en cero de las dos cadenas de ideales anteriores será condición necesaria pero no suficiente de la nilpotencia de la superálgebra de Lie $\mathfrak{g}$, es decir, si $\mathfrak{g}$ es nilpotente de nilíndice k se tiene la existencia de p y q $(p, q \leq k)$ tales que

$$\mathcal{C}^k(\mathfrak{g}) = \{0\} \Longrightarrow \mathcal{C}^p(\mathfrak{g}_0) = \{0\} \ \wedge \ \mathcal{C}^q(\mathfrak{g}_1) = \{0\}$$

Definición 1.4.1 *[24] Sea $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1$ una superálgebra de Lie nilpotente. Se dirá que tiene super-nilíndice o s-nilíndice (p, q), con p y q enteros, si se verifican las siguientes condiciones:*

$$\begin{aligned} \mathcal{C}^{p-1}(\mathfrak{g}_0) &\neq 0 \\ \mathcal{C}^{p}(\mathfrak{g}_0) &= 0 \\ \mathcal{C}^{q-1}(\mathfrak{g}_1) &\neq 0 \\ \mathcal{C}^{q}(\mathfrak{g}_1) &= 0 \end{aligned}$$

1.4.1 El invariante de Goze

Definición 1.4.2 *[24] Para cada $X \in \mathfrak{g}_0$ el operador $ad(X)$ restringido a $\mathfrak{g}_i$ $(i = 0, 1)$ es un endomorfismo nilpotente de $\mathfrak{g}_i$. Se notará por $gz_i(X)$ la sucesión característica, formada por las dimensiones de los bloques de Jordan, ordenadas de forma lexicográfica, de la matriz asociada al operador $ad(X)$ restringido a $\mathfrak{g}_i$ $(i = 0, 1)$. Se define un invariante de la superálgebra de Lie como sigue*

$$gz(\mathfrak{g}) = \left(\ max\ gz_0(X_1) \ \middle| \ max\ gz_1(X_2) \ \right) \qquad \forall X_1, X_2 \in \mathfrak{g}_0 - [\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_0]$$

Este par de sucesiones se llamará **par de sucesiones características** *o* **invariante de Goze** *de la superálgebra de Lie nilpotente $\mathfrak{g}$.*

Nota 1.4.2 El invariante que se acaba de definir es una generalización del invariante de Goze para álgebras de Lie a las superálgebras de Lie.

De aquí las dos formas de tratar el problema del nilíndice en la variedad de las superálgebras de Lie nilpotentes $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1$ con $dim(\mathfrak{g}_0) = n$ y $dim(\mathfrak{g}_1) = m$:

1. Caso general, estudiar el **nilíndice** k de la superálgebra de Lie. En concreto, determinar cúal es el máximo posible, que hoy en día se desconoce, y qué familias de superálgebras lo alcanzan (estas familias serían la verdadera generalización de las álgebras filiformes dentro de la teoría de las superálgebras de Lie y al conjunto de todas ellas se denotará por $\mathcal{M}^{n+m}$).

2. Estudiar el **invariante de Goze** de la superálgebra de Lie. Se conoce el máximo valor posible dentro de toda la variedad de álgebras de Lie nilpotentes, y es $(n-1, 1|m)$ que se corresponderá con $\mathfrak{g}_0$ álgebra de Lie filiforme y $\mathfrak{g}_1$ un $\mathfrak{g}_0$-módulo filiforme. A éstas superálgebras se las llamará superálgebras filiformes y, al conjunto de todas ellas se notará por $\mathcal{F}^{n+m}$ aunque no sean la verdadera generalización de las álgebras de Lie filiformes.

En el caso general lo único que se puede asegurar, a priori, es que $\mathfrak{g}_0$ es nilpotente, lo que hace del problema de encontrar el nilíndice maximal k una tarea casi imposible de abordar. A lo largo del todo el trabajo aunque se comience fijando el invariante de Goze (si no completamente, al menos su primera sucesión característica) seguidamente se tratará el problema de encontar el nilíndice k de las superálgebras que estudiemos en cada caso. Particularmente, en el caso del nilíndice maximal se intentará encontrar $\mathcal{F}^{n+m} \cap \mathcal{M}^{n+m}$.

1.4.2 Teorema de Engel

El teorema de Engel para las álgebras de Lie de dimensión finita se extiende de forma natural para las superálgebras de Lie, así como los corolarios que se obtienen de éste. La demostración es análoga a la de las álgebras de Lie [6], [31], [32].

Teorema 1.4.1 (Teorema de Engel). *Una superálgebra de Lie $\mathfrak{g}$ es nilpotente si y sólo si adX es nilpotente para todo elemento homogéneo $X \in \mathfrak{g}$.*

Teorema 1.4.2 *Sea V un espacio vectorial de dimensión finita m y sea $\mathfrak{h}$ una subálgebra de Lie de $gl(V)$ formada por endomorfismos nilpotentes* *de V. Entonces existe una sucesión decreciente de subespacios vectoriales $V_m, \ldots, V_1, V_0$ de V, de dimensiones $m, m-1, \ldots 0$ tales que $h(V_{i+1}) \subseteq V_i$ $\forall h \in \mathfrak{h}$ $i = 0, 1, \ldots, m-1$.*

Nota 1.4.3 Para una superálgebra de Lie nilpotente $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1$, si se toma como espacio vectorial V el subyacente a $\mathfrak{g}_1$ y como $\mathfrak{h}$ el operador *ad* restringido a $\mathfrak{g}_0$, se verifican las hipótesis del teorema anterior, gracias a que los elementos de $\mathfrak{g}_0$ son homogéneos y por el teorema de Engel. Luego se tendría una sucesión estrictamente decreciente de subespacios $V = V_m \supset \ldots \supset V_1 \supset V_0$ tales que $[\mathfrak{g}_0, V_{i+1}] \subseteq V_i$.

1.5 Cohomología de superálgebras de Lie

En esta sección se estudia la cohomología para las superálgebras de Lie, que no es más que la "generalización" de la cohomología para álgebras de Lie. Una "generalización" que tiene en cuenta la $\mathbb{Z}_2-$graduación de las superálgebras y la paridad de los isomorfismos entre ellas (para más detalles ver [41], [24]). En particular este estudio se centra en las aplicaciones geométricas de los primeros espacios de cohomología.

Sea $V = V_0 \oplus V_1$ un espacio vectorial $\mathbb{Z}_2-$graduado y $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1$ una superálgebra de Lie. V es un $\mathfrak{g}-$módulo si existe una aplicación bilineal

$$\text{"."} : \mathfrak{g} \times V \to V$$

(que se denota $(X, v) \to X.v$) que verifica las siguientes condiciones:

1. $\mathfrak{g}_\alpha . V_\beta \subset V_{\alpha+\beta(mod2)} \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{Z}_2$
2. $[X, Y].v = X.(Y.v) - (-1)^{d(X)d(Y)} Y.(X.v) \quad \forall X, Y \in \mathfrak{g}, \ \forall v \in V$

1.5.1 El espacio de las cocadenas

El superespacio de las $j-$cocadenas, $j \geq 1$, de una superálgebra de Lie $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1$ con coeficientes en el $\mathfrak{g}-$módulo $V = V_0 \oplus V_1$ es el espacio:

$$C^j(\mathfrak{g}, V) = \bigoplus_{j_0+j_1=j} Hom(\bigwedge^{j_0} \mathfrak{g}_0 \otimes \bigvee^{j_1} \mathfrak{g}_1, V) \qquad j \geq 1$$

que a su vez tiene parte par e impar, $C_0^j(\mathfrak{g}, V)$ y $C_1^j(\mathfrak{g}, V)$ respectivamente, con

$$C_0^j(\mathfrak{g}, V) = \bigoplus_{\substack{j_0+j_1=j \\ j_1+r\equiv 0 (mod 2)}} Hom(\bigwedge^{j_0} \mathfrak{g}_0 \otimes \bigvee^{j_1} \mathfrak{g}_1, V_r) \qquad j \geq 1$$

$$C_1^j(\mathfrak{g}, V) = \bigoplus_{\substack{j_0+j_1=j \\ j_1+r\equiv 1 (mod 2)}} Hom(\bigwedge^{j_0} \mathfrak{g}_0 \otimes \bigvee^{j_1} \mathfrak{g}_1, V_r) \qquad j \geq 1$$

Una cocadena de $\mathfrak{g}$ es un elemento de $C^*(\mathfrak{g}, V) = \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} C^j(\mathfrak{g}, V)$.

1.5.2 El operador coborde

Sea $\mathfrak{g}$ una S.A.L. y sea V un $\mathfrak{g}-$módulo. Se llama operador coborde a la aplicación lineal $\mathrm{d} : C^*(\mathfrak{g}, V) \longrightarrow C^*(\mathfrak{g}, V)$, definida mediante

$$\begin{aligned}
&\mathrm{d}\Phi(X_1, \ldots, X_{j_0}, Y_1, \ldots, Y_{j_1}) \\
&= \sum_{1 \leq s \leq t \leq j_0} (-1)^{s+t-1} \Phi([X_s, X_t], X_1, \ldots, \hat{X}_s, \ldots, \hat{X}_t, \ldots, X_{j_0}, Y_1, \ldots, Y_{j_1}) \\
&+ \sum_{s=1}^{j_0} \sum_{t=1}^{j_1} (-1)^{s-1} \Phi(X_1, \ldots, \hat{X}_s, \ldots, X_{j_0}, [X_s, Y_t], Y_1, \ldots, \hat{Y}_t, \ldots, Y_{j_1})
\end{aligned}$$

$$+\sum_{1\leq s\leq t\leq j_1}\Phi([Y_s,Y_t],X_1,\ldots,X_{j_0},Y_1,\ldots,\hat{Y}_s,\ldots,\hat{Y}_t,\ldots,Y_{j_1})$$

$$+\sum_{s=1}^{j_0}(-1)^s(X_s\Phi)(X_1,\ldots,\hat{X}_s,\ldots,X_{j_0},Y_1,\ldots,Y_{j_1})$$

$$+(-1)^{j_0-1}\sum_{t=1}^{j_1}(Y_t\Phi)(X_1,\ldots,X_{j_0},Y_1,\ldots,\hat{Y}_t,\ldots,Y_{j_1})$$

donde $\Phi\in C^j(\mathfrak{g},V)$, $j\geq 1$, y $X_1,\ldots,X_{j_0}\in\mathfrak{g}_0$, $Y_1,\ldots,Y_{j_1}\in\mathfrak{g}_1$ con $j_0+j_1=j$.

Esta aplicación d envía $C^j(\mathfrak{g},V)$ a $C^{j+1}(\mathfrak{g},V)$; en particular, se tiene que $\mathrm{d}(C_0^j(\mathfrak{g},V))\subset C_0^{j+1}(\mathfrak{g},V)$ y $\mathrm{d}(C_1^j(\mathfrak{g},V))\subset C_1^{j+1}(\mathfrak{g},V)$. Esta restricción a $C^j(\mathfrak{g},V)$ se denota por d_j.

El operador coborde verifica que $\mathrm{d}^2=0$, de donde se sigue que tiene sentido considerar los correspondientes espacios de cohomología.

1.5.3 El espacio de cohomología

La restricción d_j del operador coborde d al espacio de las $j-$cocadenas $C^j(\mathfrak{g},V)$ de la superálgebra de Lie $\mathfrak{g}$ con valores en V, tiene un núcleo que se denota $Z^j(\mathfrak{g},V)$ cuyos elementos se llaman $j-$cociclos (o cociclos de grado j) con valores en V. En particular, si se considera d_j restringido a $C_0^j(\mathfrak{g},V)$ o a $C_1^j(\mathfrak{g},V)$, se obtienen $Z_0^j(\mathfrak{g},V)$ y $Z_1^j(\mathfrak{g},V)$ considerando los respectivos núcleos

$$Z^j(\mathfrak{g},V)=Z_0^j(\mathfrak{g},V)\oplus Z_1^j(\mathfrak{g},V)$$

Los elementos de la imagen de d_{j-1}, $B^j(\mathfrak{g},V)$, se llaman $j-$cobordes (o cobordes de grado j) con valores en V. Al igual que antes, si se considera la imagen mediante d_{j-1} de $C_0^j(\mathfrak{g},V)$ o de $C_1^j(\mathfrak{g},V)$, se obtienen $B_0^j(\mathfrak{g},V)$ y

$B_1^j(\mathfrak{g}, V)$ considerando las respectivas imágenes

$$B^j(\mathfrak{g}, V) = B_0^j(\mathfrak{g}, V) \oplus B_1^j(\mathfrak{g}, V)$$

Gracias a que $d^2 = 0$, se tiene que $B_i^j(\mathfrak{g}, V) \subset Z_i^j(\mathfrak{g}, V)$ para $0 \leq i \leq 1$, de donde se sigue que tiene sentido considerar los espacios cociente

$$H_0^j(\mathfrak{g}, V) = Z_0^j(\mathfrak{g}, V)/B_0^j(\mathfrak{g}, V) \quad \text{y} \quad H_1^j(\mathfrak{g}, V) = Z_1^j(\mathfrak{g}, V)/B_1^j(\mathfrak{g}, V)$$

que constituyen la parte par e impar del espacio de cohomología de $\mathfrak{g}$ de grado j con valores en V.

$$H^j(\mathfrak{g}, V) = H_0^j(\mathfrak{g}, V) \oplus H_1^j(\mathfrak{g}, V)$$

Si $j = 0$ se toma $B^0(\mathfrak{g}, V) = 0$, ya que no existen las (-1)$-$cocadenas. En este caso se tiene que $H^0(\mathfrak{g}, V) = Z^0(\mathfrak{g}, V)$.

Si se considera $\mathfrak{g}$ como el $\mathfrak{g}-$módulo V anterior, vía la representación adjunta, se puede identificar $Z^1(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}) = Z_0^1(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}) \oplus Z_1^1(\mathfrak{g}, \mathfrak{g})$ con el superespacio de derivaciones de $\mathfrak{g}$, $\mathcal{D}(\mathfrak{g}) = \mathcal{D}_0(\mathfrak{g}) \oplus \mathcal{D}_1(\mathfrak{g})$, y $B^1(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}) = B_0^1(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}) \oplus B_1^1(\mathfrak{g}, \mathfrak{g})$ con el de las derivaciones interiores $\mathcal{A}\lceil(\mathfrak{g}) = \mathcal{A}\lceil(\mathfrak{g}_0) \oplus \mathcal{A}\lceil(\mathfrak{g}_1)$ (en particular se tiene la igualdad en los pares, es decir, $Z_0^1(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}) = \mathcal{D}_0(\mathfrak{g})$ y $B_0^1(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}) = \mathcal{A}\lceil(\mathfrak{g}_0)$). Con todo esto surge una fácil interpretación de $H^1(\mathfrak{g}, \mathfrak{g})$; se puede identificar con el espacio de las derivaciones exteriores $\mathcal{O}\sqcap\sqcup(\mathfrak{g})$, que no es más que

$$\mathcal{O}\sqcap\sqcup(\mathfrak{g}) = \mathcal{D}_0(\mathfrak{g})/\mathcal{A}\lceil(\mathfrak{g}_0) \oplus \mathcal{D}_1(\mathfrak{g})/\mathcal{A}\lceil(\mathfrak{g}_1)$$

(para más detalles consultar [23], Cap.2, Sec.1.1).

Si se denota mediante $\mathcal{O}(\mathfrak{g})$ la órbita correspondiente a la ley de $\mathfrak{g}$ en la variedad de leyes de superálgebras de Lie, $\mathcal{L}^{n+m}$, inducida por la acción del grupo $G(V) = GL(n, \mathbb{C}) \oplus GL(m, \mathbb{C})$, como se explicitará a lo largo de este capítulo, se tiene que la dimensión de la óbita coincide con la dimensión del espacio de los 2$-$cobordes pares

$$dim(\mathcal{O}(\mathfrak{g})) = dim(B_0^2(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}))$$

y el plano tangente a $\mathfrak{g}$ coincide con el espacio de los 2$-$coclicos pares $Z_0^2(\mathfrak{g}, V)$.

Se recuerda que para álgebras de Lie se tiene que la dimensión de la órbita coincide con la de los 2$-$cobordes y el plano tangente coincide con el espacio de los 2$-$cociclos.

1.6 La variedad de superálgebras de Lie

Para más detalles sobre esta sección se puede consultar [28], [35].

Sobre el espacio vectorial $\mathbb{C}^{n+m}$ consideramos una $\mathbb{Z}_2-$ graduación fijada:

$$\mathbb{C}^{n+m} = V_0 \oplus V_1$$

Como se sabe, a cada vector X de V_0 se le dice homogéneo de grado 0 ($d(X) = 0$) y a cada vector Y de V_1 se le dice homogéneo de grado 1 ($d(Y) = 1$).

Por consiguiente, una superálgebra de Lie se puede considerar como una aplicación bilineal μ sobre $\mathbb{C}^{n+m}$ con valores en $\mathbb{C}^{n+m}$ que verifica:

1. $\mu(V_i, V_j) \subset V_{i+j(mod2)}$
2. $\mu(X,Y) = -(-1)^{d(X)d(Y)}\mu(Y,X)$ para todos X e Y homogéneos.
3. $(-1)^{d(X)d(Z)}\mu(X,\mu(Y,Z)) + (-1)^{d(Y)d(X)}\mu(Y,\mu(Z,X)) +$

   $+(-1)^{d(Z)d(Y)}\mu(Z,\mu(X,Y)) = 0$ para todos X, Y, Z homogéneos.

1.6.1 La variedad $\mathcal{L}^{n+m}$

Si se considera la graduación $\mathbb{C}^{n+m} = V_0 \oplus V_1$ fijada, con $dim(V_0) = n$ y $dim(V_1) = m$, se denotará $\mathcal{L}^{n+m}$ al conjunto de leyes de superálgebras de Lie sobre $\mathbb{C}^{n+m}$. Se notará, igualmente, $A^2_{n,m}$ a las aplicaciones bilineales $\varphi : \mathbb{C}^{n+m} \times \mathbb{C}^{n+m} \to \mathbb{C}^{n+m}$ que verifiquen las condiciones 1 y 2 anteriores.

Sea $\{X_0, X_1, \ldots, X_{n-1}, Y_1, \ldots, Y_m\}$ una base homogénea de $\mathbb{C}^{n+m}$ asociada a la graduación fijada. Para $\mu \in \mathcal{L}^{n+m}$ se sabe que

$$\mu(X_i, X_j) = \sum_{k=0}^{n-1} C_{ij}^k X_k \quad 0 \le i < j \le n-1$$

$$\mu(X_i, Y_j) = \sum_{k=1}^{m} D_{ij}^k Y_k \quad 0 \le i \le n-1, 1 \le j \le m$$

$$\mu(Y_i, Y_j) = \sum_{k=0}^{n-1} E_{ij}^k X_k \quad 1 \le i \le j \le m$$

Los elementos $\{C_{ij}^k, D_{ij}^k, E_{ij}^k\}_{i,j,k}$ se llaman **constantes de estructura** de la superálgebra de Lie con respecto a la base $\{X_0, X_1, \ldots, X_{n-1}, Y_1, \ldots, Y_m\}$.

Estas constantes de estructura verifican las restricciones $C_{ji}^k = -C_{ij}^k$ y $E_{ji}^k = E_{ij}^k$. La identidad de Jacobi graduada implica que han de verificarse, además, las restricciones

$$\begin{cases}
\displaystyle\sum_{l=0}^{n-1}(C_{ij}^l C_{kl}^s + C_{jk}^l C_{il}^s + C_{ki}^l C_{jl}^s) = 0 & 0 \le i < j < k \le n-1, \\
& s = 0, \ldots, n-1 \\
\displaystyle\sum_{l=1}^{m}(D_{jk}^l D_{il}^s - D_{jl}^s D_{ik}^l) - \sum_{l=0}^{n-1} C_{ij}^l D_{lk}^s = 0 & 0 \le i < j \le n-1, \\
& k = 1, \ldots, m, s = 1, \ldots, m \\
\displaystyle\sum_{l=1}^{m}(D_{ij}^l E_{lk}^s + D_{ik}^l E_{jl}^s) - \sum_{l=0}^{n-1} E_{jk}^l C_{il}^s = 0 & i = 0, \ldots, n-1, \\
& 1 \le j \le k \le m, s = 0, \ldots, n-1 \\
\displaystyle\sum_{l=0}^{n-1}(E_{ij}^l D_{lk}^s + E_{ik}^l D_{lj}^s + E_{jk}^l D_{li}^s) = 0 & 1 \le i \le j \le m, 0 \le k \le n-1 \\
& s = 1, \ldots, m
\end{cases}$$

Estas ecuaciones muestran que $\mathcal{L}^{n+m}$ está dotada de una estructura de variedad algebraica inmersa en $\mathbb{C}^N$ con $N = \frac{1}{2}[n^2(n-1) + 3nm^2 + nm]$, que es justamente el número de constantes de estructura que parametrizan la variedad anterior. Si se impone que $D_{ij}^k = E_{ij}^k = 0$, se obtiene una subvariedad algebraica de $\mathcal{L}^{n+m}$ isomorfa a la variedad $\mathcal{L}^n$ de leyes de álgebras de Lie sobre $\mathbb{C}^n$.

Topologías en $\mathcal{L}^{n+m}$.

Como un subconjunto de $\mathbb{C}^N$, $\mathcal{L}^{n+m}$ puede ser provista con la topología clásica para $\mathbb{C}^N$, esto es, la topología euclídea. También puede considerarse otra topología en $\mathcal{L}^{n+m}$ que resulta mucho más natural que la anterior, la topología de Zariski. Se recuerda que los cerrados para la topología de Zariski están definidos por un número finito de ecuaciones polinomiales, y que la topología de Zariski es menos fina que la euclídea.

En cada caso se especificará qué topología se está considerando.

1.6.2 Acción del grupo $G(V)$ sobre $\mathcal{L}^{n+m}$. Fibración por órbitas.

Sea $V = V_0 \oplus V_1$ un espacio vectorial $\mathbb{Z}_2$-graduado de dimensión n+m, con $dimV_0 = n$ y $dimV_1 = m$, y sea $G(V)$ el grupo de las aplicaciones lineales invertibles de la forma $f = f_0 + f_1$, tal que $f_0 \in GL(n, \mathbb{C})$ y $f_1 \in GL(m, \mathbb{C})$ (siguiendo la notación de [29]). Así $G(V) = GL(n, \mathbb{C}) \oplus GL(m, \mathbb{C})$. El grupo lineal $G(V)$ opera sobre la variedad $\mathcal{L}^{n+m}$ de la forma siguiente: dos leyes μ_1 y μ_2 son isomorfas si existe $f = f_0 + f_1 \in G(V)$, tal que

$$\mu_2(X, Y) = f_{\alpha+\beta}^{-1}(\mu_1(f_\alpha(X), f_\beta(Y))) \quad \forall X \in V_\alpha, \forall Y \in V_\beta$$

Visto desde el punto de vista tensorial, la ecuación anterior se corresponde con los cambios de bases y dos superálgebras de Lie serán isomorfas si tienen las mismas constantes de estructura en sus respectivas bases de $\mathbb{C}^{n+m}$.

Obsérvese que si $\alpha = \beta = 0$ entonces μ_2 restringida a V_0 es una ley de un álgebra de Lie isomorfa a la ley μ_1 restringida a V_0. Se notará $\mathcal{O}(\mu)$ la órbita de μ, en $\mathcal{L}^{n+m}$, correspondiente a esta acción, que resulta ser una variedad diferenciable.

Lema 1.6.1 *Para cada $\mu \in \mathcal{L}^{n+m}$ la órbita $\mathcal{O}(\mu)$ está provista de estructura de variedad diferenciable.*

Demostración: En efecto, $\mathcal{O}(\mu)$ es la imagen a través de la acción del grupo $G(V)$ en el punto μ. El subgrupo de isotropía de μ, i.e. el subgrupo de $G(V)$ definido por

$$Iso(\mu) = \{f \in G(V)/\mu(X,Y) = f^{-1}_{\alpha+\beta}(\mu(f_\alpha(X), f_\beta(Y))) \quad \forall X \in V_\alpha, \forall Y \in V_\beta\}$$

coincide con el grupo de automorfismos de μ. Por tanto, es un subgrupo cerrado y la órbita resulta isomorfa al espacio homogéneo $G(V)/Iso(\mu)$. Esto prueba el lema. $\square$

1.6.3 La dimensión de las órbitas

Sea $\mu \in \mathcal{L}^{n+m}$. La órbita $\mathcal{O}(\mu)$ se identifica con $G(V)/Aut(\mu)$, donde $Aut(\mu)$ es el grupo de isomorfismos de μ. Tenemos:

$$dim\mathcal{O}(\mu) = n^2 + m^2 - dim(\mathcal{D}_0(\mu))$$

Notemos que la superálgebra de Lie (álgebra de Lie) correspondiente al grupo $Aut(\mu)$ no es más que las derivaciones pares $\mathcal{D}_0(\mu)$ que eran todas las derivaciones compatibles con la $\mathbb{Z}_2$-graduación.

1.6.4 Estructura de las órbitas

Como ya se ha visto, $\mathcal{L}^{n+m}$ está dotada de estructura de variedad algebraica inmersa en $\mathbb{C}^N$, con $N = \dfrac{1}{2}[n^2(n-1) + 3nm^2 + nm]$. Se notará por μ_{n+m}

la superálgebra de Lie abeliana ($\mu_{n+m} \simeq \mathbb{C}^{n+m}$), que se corresponde con el punto $0 \in \mathbb{C}^{n+m} \subset \mathbb{C}^N$.

Se considera una órbita arbitraria $\mathcal{O}(\mu)$ en $\mathcal{L}^{n+m}$. Su clausura algebraica ${}^a\mathcal{O}(\mu)$ contiene a $\mathcal{O}(\mu)$ como abierto para la topología de Zariski (el análogo para álgebras de Lie se encuentra en [40], Cap. 3, Sec. 1.5.). Se denota por $\overline{\mathcal{O}}(\mu)$ la clausura de la órbita $\mathcal{O}(\mu)$ para la topología Euclídea. Al trabajar en $\mathbb{C}$ se tiene que el conjunto $\overline{\mathcal{O}}(\mu)$ coincide con ${}^a\mathcal{O}(\mu)$.

A continuación se va a probar que $\mu_{n+m} \in \overline{\mathcal{O}}(\mu)$ para cualquier superálgebra de Lie $\mu \in \mathcal{L}^{n+m}$ (la demostración es análoga al equivalente para álgebras de Lie, [42]). Si se considera la acción del operador lineal escalar t sobre $\mathcal{L}^{n+m}$, que consiste en multiplicar todas la constantes de estructura por t, esto es:

$$(t) * \{C_{ij}^k\} = \{t \cdot C_{ij}^k\}$$
$$(t) * \{D_{ij}^k\} = \{t \cdot D_{ij}^k\}$$
$$(t) * \{E_{ij}^k\} = \{t \cdot E_{ij}^k\}$$

(siguiendo una notación equivalente a [42]), se sigue, en particular, que una órbita arbitraria $\mathcal{O}(\mu)$, como variedad algebraica, es un cono sin el punto μ_{n+m}. Si hacemos tender $t \to 0$ se tiene que

$$(t) * \{C_{ij}^k\} \to 0$$
$$(t) * \{D_{ij}^k\} \to 0$$
$$(t) * \{E_{ij}^k\} \to 0$$

luego $\mu_{n+m} \in \overline{\mathcal{O}}(\mu)$. Usando términos de la teoría de deformaciones y contracciones (que es análoga a la teoría de deformaciones y contracciones de álgebras de Lie [43]), esto quiere decir que cualquier superálgebra de Lie puede ser contraída a una abeliana.

1.6.5 Superálgebras de Lie filiformes y de nilíndice maximal

En la teoria de álgebras de Lie nilpotentes juegan un papel muy importante las álgebras de Lie filiformes y, en particular, en el estudio de las componentes irreducibles de la variedad algebraica de leyes de álgebras de Lie nilpotentes para una dimensión dada, [1], [25], [26]. La familia análoga en el caso de superálgebras de lie serían las superálgebras de Lie de nilíndice, k, maximal (caso general); no obstante, se verá a continuación que también las superálgebras de Lie de invariante de Goze o s-nilíndice, (p, q), maximal (superálgebras de Lie filiformes) desempeñan un papel importante en el estudio de las componentes irreducibles de la variedad algebraica de leyes de superálgebras de Lie nilpotentes.

Capítulo 2

Superálgebras de Lie filiformes

2.1 La variedad de superálgebras de Lie filiformes

Se notará $\mathcal{N}_{p,q}^{n+m}$ al subconjunto de $\mathcal{L}^{n+m}$ constituido por las superálgebras de Lie nilpotentes de s-nilíndice (r,s) con $r \leq p$ y $s \leq q$.

Proposición 2.1.1 *El conjunto $\mathcal{N}_{p,q}^{n+m}$ es una subvariedad algebraica de $\mathcal{L}^{n+m}$.*

Demostración: El subconjunto $\mathcal{N}_{p,q}^{n+m}$ de $\mathcal{L}^{n+m}$ está definido por la restricciones $\mathcal{C}^p(\mathfrak{g}_0) = 0$ y $\mathcal{C}^q(\mathfrak{g}_1) = 0$, y estas dos condiciones se traducen en ecuaciones polinomiales para las constantes de estructura. Luego $\mathcal{N}_{p,q}^{n+m}$ es cerrado para la topología de Zariski y está dotado de estructura de subvariedad algebraica. Se designará igualmente $\mathcal{N}_{p,q}^{n+m}$ a la correspondiente variedad afín. $\square$

Notación. Obsérvese que el conjunto $\mathcal{N}_{n-1,m}^{n+m}$ representa la variedad de todas las superálgebras de Lie nilpotentes. Por simplicidad se escribirá $\mathcal{N}^{n+m}$ en lugar de $\mathcal{N}_{n-1,m}^{n+m}$.

2.1.1 Superálgebra de Lie filiforme

Definición 2.1.1 *Una superálgebra de Lie* $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1 \in \mathcal{N}^{n+m}$ *se dice filiforme si tiene s-nilíndice* $(n-1, m)$.

Definición 2.1.2 *Sea* $\mathfrak{g}$ *una S.A.L. nilpotente,* $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1 \in \mathcal{N}^{n+m}$. *Se dice que* $\mathfrak{g}_1$ *es un* $\mathfrak{g}_0$*-módulo filiforme si existe una fibración en su espacio vectorial subyacente* V, $V = V_m \supset \ldots \supset V_1 \supset V_0$, *de dimensiones* $m, m-1, \ldots 0$, *tales que* $[\mathfrak{g}_0, V_{i+1}] = V_i$.

Recuérdese que siempre existe una fibración del tipo anterior verificando $[\mathfrak{g}_0, V_{i+1}] \subseteq V_i$ gracias a la nota 1.4.3 al Teorema de Engel. En particular, si todas la contenciones anteriores son igualdades, $[\mathfrak{g}_0, V_{i+1}] = V_i$, la segunda coordenada del s-nilíndice será la máxima posible, m.

Corolario 2.1.2 *Si* $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1$ *es una superálgebra de Lie filiforme entonces la parte par,* $\mathfrak{g}_0$, *será un álgebra de Lie filiforme y la parte impar,* $\mathfrak{g}_1$, *será un* $\mathfrak{g}_0$*-módulo filiforme.*

Notación. Se notará $\mathcal{F}^{n+m}$ al subconjunto de $\mathcal{N}^{n+m}$ formado por todas las leyes filiformes.

Proposición 2.1.3 *Cada componente irreducible de la variedad algebraica* $\mathcal{F}^{n+m}$ *determina una componente irreducible de* $\mathcal{N}^{n+m}$.

Demostración: Como $\mathcal{F}^{n+m} = \mathcal{N}^{n+m} - (\mathcal{N}^{n+m}_{n-2,m} \cup \mathcal{N}^{n+m}_{n-1,m-1})$ será un conjunto abierto para la topología de Zariski de $\mathcal{N}^{n+m}$, de donde se sigue que cada componente irreducible de $\mathcal{F}^{n+m}$ determinará una componente irreducible de $\mathcal{N}^{n+m}$. □

Corolario 2.1.4 *Para cada* $\mu \in \mathcal{F}^{n+m}$ *la clausura de Zariski de* $\mathcal{O}(\mu)$, $\overline{\mathcal{O}(\mu)}^{\mathcal{Z}}$, *será una componente irreducible de* $\mathcal{N}^{n+m}$. *Pero no todas las componentes irreducibles tienen que ser de esta forma.*

2.2 Base adaptada

Tener una base adecuada en cualquier tipo de álgebras o superálgebras de Lie es primordial para poder realizar con ciertas garantías un estudio de las mismas. Así, a lo largo de esta sección se va a demostrar el siguiente teorema acerca de la existencia de una base adaptada para las superálgebras de Lie filiformes.

Teorema 2.2.1 *Si* $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1 \in \mathcal{F}^{n+m}$, *entonces siempre existe una base de* $\mathfrak{g}$ $\{X_0, X_1, \ldots, X_{n-1}, Y_1, \ldots, Y_m\}$, *con* $\{X_0, X_1, \ldots, X_{n-1}\}$ *base de* $\mathfrak{g}_0$ *e* $\{Y_1, \ldots, Y_m\}$ *base de* $\mathfrak{g}_1$, *tal que:*

$$\begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1} & 1 \leq i \leq n-2 \\ [X_0, X_{n-1}] = 0 & \\ [X_0, Y_j] = Y_{j+1} & 1 \leq j \leq m-1 \\ [X_0, Y_m] = 0 & \end{cases}$$

Definición 2.2.1 *A una base que verifique las hipótesis del teorema anterior se la llamará* **base adaptada** *y a* X_0 **vector característico** *de la superálgebra de Lie filiforme.*

Nota 2.2.1 Obsérvese que los conceptos que se acaban de definir no son más que una generalización para superálgebras de Lie de los conceptos de base adaptada y de vector característico de álgebras de Lie.

Nota 2.2.2 El hecho de que una familia de superálgebras de Lie tenga vector característico, que se notará siempre X_0, (como ocurre para las superálgebras filiformes) implica en el invariante de goze

$$gz(\mathfrak{g}) = \left(\max gz_0(X_1) \mid \max gz_1(X_2) \right) \qquad \forall X_1, X_2 \in \mathfrak{g}_0 - [\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_0]$$

que el máximo de la primera y de la segunda sucesión característica se alcanzan simultáneamente para el mismo vector y ese vector es X_0. Esto no ocurre siempre para cualquier familia de superálgebras de Lie.

Notación. En todo el trabajo cada Ψ_k actuando sobre un conjunto ordenado de vectores $\{v_1, v_2, \ldots, v_s\}$ representará una combinación lineal de los vectores $v_1, v_2, \ldots, v_s$.

Demostración del teorema: Al ser $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1$ una superálgebra de Lie filiforme, se tiene, en particular, que $\mathfrak{g}_0$ es un álgebra de Lie filiforme y para álgebras de Lie filiformes siempre podemos encontrar una base adaptada $\{X_0, X_1, \ldots, X_{n-1}\}$ con $[X_0, X_i] = X_{i+1}$, $1 \leq i \leq n-2$ y $[X_0, X_{n-1}] = 0$.

Por otro lado se tiene que $\mathfrak{g}_1$ es un $\mathfrak{g}_0$-módulo filiforme, luego ha de existir una fibración del subespacio vectorial subyacente a $\mathfrak{g}_1$ que se designará V_m, esto es,

$$0 \subset V_1 \subset \ldots \subset V_m \quad \text{con } dim(V_{i+1}/V_i) = 1$$

donde cada espacio V_i será el espacio vectorial generado por los vectores $\{Y_1, \ldots, Y_i\}$, $V_i =< Y_1, \ldots, Y_i >$, y tales que $[\mathfrak{g}_0, V_{i+1}] = V_i$. Luego se tiene que:

- $[\mathfrak{g}_0, V_1] = 0$ de donde sigue que $[X_i, Y_1] = 0\ \forall i$.

- $[\mathfrak{g}_0, V_2] = V_1$ con $V_2 =< Y_1, Y_2 >$ que, junto a lo anterior, implica la existencia de un escalar no nulo λ_{i_2} tal que $[X_{i_2}, Y_2] = \lambda_{i_2} Y_1$.

- $[\mathfrak{g}_0, V_3] = V_2$ con $V_3 =< Y_1, Y_2, Y_3 >$. Hasta ahora se tiene que $[\mathfrak{g}_0, Y_1] = 0$ y $[\mathfrak{g}_0, Y_2] =< Y_1 >$, luego tiene que existir un escalar no nulo, λ_{i_3}, tal que $[X_{i_3}, Y_3] = \lambda_{i_3} Y_2 + \Psi_3(Y_1)$.

Así, por inducción finita, se tiene un conjunto de escalares no nulos $\{\lambda_{i_2}, \lambda_{i_3}, \ldots, \lambda_{i_m}\}$ de índices $\{i_2, i_3, \ldots, i_m\} \subseteq \{0, 1, \ldots, n-1\}$, para los que se verifica

$$[X_{i_k}, Y_k] = \lambda_{i_k} Y_{k-1} + \Psi_k(Y_{k-2}, \ldots, Y_1), \quad 1 \leq k \leq m$$

con las interpretaciones ya vistas para los casos $k = 1$ y $k = 2$.

A continuación se va a probar por reducción al absurdo que, en particular, $\{i_2, \ldots, i_m\} \subseteq \{0, 1\}$. En efecto, si se supone que $\exists X_{i_k} = X_{j+1}$ para algún j

con $1 \leq j \leq n-2$, entonces se tendría que

$$[X_{j+1}, Y_k] = [X_{i_k}, Y_k] = \lambda_{i_k} Y_{k-1} + \Psi_k(Y_{k-2}, \ldots, Y_1) \quad \text{con } \lambda_{i_k} \neq 0 \qquad (2.1)$$

y, por $J_g(X_0, X_j, Y_k)$

$$[X_{j+1}, Y_k] = [[X_0, X_j], Y_k] = \underbrace{[X_0, \underbrace{[X_j, Y_k]}_{\subseteq V_{k-1}}]}_{\subseteq V_{k-2}} - \underbrace{[X_j, \underbrace{[X_0, Y_k]}_{\subseteq V_{k-1}}]}_{\subseteq V_{k-2}} \qquad (2.2)$$

Y de $[\mathfrak{g}_0, V_{i+1}] = V_i$ para $i = k$ y para $i = k-1$ se sigue que $[X_{j+1}, Y_k] \in V_{k-2}$. Se observa fácilmente que de (2.1) y de (2.2) se llega a que $Y_{k-1} \in V_{k-2}$ lo que está claramente en contradicción con la propia definición de los subespacios V_i.

Con todo lo anterior se llega a

$$\left\{ \begin{array}{ll} [X_j, Y_1] = 0 & j = 1, 2 \\ & \\ [X_0, Y_2] = \lambda_2 Y_1 & \\ [X_1, Y_2] = \delta_2 Y_1 & (\lambda_2, \delta_2) \neq (0,0) \\ & \\ [X_0, Y_3] = \lambda_3 Y_2 + \Psi_3(Y_1) & \\ [X_1, Y_3] = \delta_3 Y_2 + \Phi_3(Y_1) & (\lambda_3, \delta_3) \neq (0,0) \\ & \\ [X_0, Y_4] = \lambda_4 Y_3 + \Psi_4(Y_2, Y_1) & \\ [X_1, Y_4] = \delta_4 Y_3 + \Phi_4(Y_2, Y_1) & (\lambda_4, \delta_4) \neq (0,0) \\ \qquad \vdots & \\ [X_0, Y_m] = \lambda_m Y_{m-1} + \Psi_m(Y_{m-2}, \ldots, Y_1) & \\ [X_1, Y_m] = \delta_m Y_{m-1} + \Phi_m(Y_{m-2}, \ldots, Y_1) & (\lambda_m, \delta_m) \neq (0,0) \end{array} \right.$$

donde las funciones Φ_k son funciones lineales de los vectores sobre los que actúe en cada caso.

No habrá pérdida de generalidad en suponer que $\lambda_i \neq 0\ \forall i$, ya que si se considera el cambio de base genérico:

$$\left\{\begin{array}{lcll} X'_0 & = & X_0 + \gamma X_1 & \\ X'_1 & = & X_1 & \\ X'_{i+1} & = & [X'_0, X'_i] & 1 \leq i \leq n-2 \\ Y'_i & = & Y_i & \end{array}\right.$$

nos queda

$$\left\{\begin{array}{l} [X'_0, Y'_2] = [X_0 + \gamma X_1, Y_2] = (\lambda_2 + \gamma\delta_2)Y_1 \\ [X'_0, Y'_3] = (\lambda_3 + \gamma\delta_3)Y_2 + (\Psi_3 + \gamma\Phi_3)(Y_1) \\ [X'_0, Y'_4] = (\lambda_4 + \gamma\delta_4)Y_3 + (\Psi_4 + \gamma\Phi_4)(Y_2, Y_1) \\ \qquad\qquad \vdots \\ [X'_0, Y'_m] = (\lambda_m + \gamma\delta_m)Y_{m-1} + (\Psi_m + \gamma\Phi_m)(Y_{m-2}, \ldots, Y_1) \end{array}\right.$$

y así las nuevas constantes de estructura λ'_i quedan $\lambda'_i = \lambda_i + \gamma\delta_i$ y para que sean distintas de cero basta elegir cualquier γ tal que

$$\gamma \notin \left\{-\frac{\lambda_2}{\delta_2}, -\frac{\lambda_3}{\delta_3}, \ldots, -\frac{\lambda_m}{\delta_m}\right\}$$

(si para algún i se verifica que $\delta_i = 0$, el correspondiente $-\dfrac{\lambda_i}{\delta_i}$ no aparecería en el conjunto anterior).

Y ya haciendo el cambio de base

$$\left\{\begin{array}{ll} X''_i = X'_i & 0 \leq i \leq n-1 \\ Y''_m = Y'_m & \\ Y''_{m-j} = [X''_0, Y''_{m-j+1}] & 1 \leq j \leq m-1 \end{array}\right.$$

y renombrando los vectores $X_i = X''_i$ para $0 \leq i \leq n-1$ y $Y_j = Y''_{m-j+1}$ para todo j, $1 \leq j \leq m$ tendríamos demostrado el teorema. $\square$

Capítulo 3

Superálgebras de Lie de nilíndice maximal

3.1 La variedad de superálgebras de Lie de nilíndice maximal

Se va designar por $\mathcal{N}_k^{n+m}$ al subconjunto de $\mathcal{L}^{n+m}$ constituido por las superálgebras de Lie de nilíndice (general) menor o igual que k con dimensiones n y m de la parte par e impar respectivamente.

Proposición 3.1.1 *El conjunto $\mathcal{N}_k^{n+m}$ es una subvariedad algebraica de $\mathcal{L}^{n+m}$.*

Demostración: Este subconjunto está definido por

$$\mathcal{N}_k^{n+m} = \{\mu \in \mathcal{L}^{n+m}/\mu(X_1, \mu(X_2, \ldots, \mu(X_k, X_{k+1}))\ldots) = 0\}$$

para cualesquiera $X_1, \ldots, X_{k+1} \in \mathbb{C}^{n+m}$.

Si se fija una base de $\mathbb{C}^{n+m}$ las leyes de superálgebras de Lie se identifican con sus constantes de estructura, que verifican relaciones polinomiales tal y como se ha visto en la sección 1.6.1. Las leyes nilpotentes de nilíndice menor o igual a k, gracias a la definición anterior, también vienen dadas por relaciones polinomiales, luego $\mathcal{N}_k^{n+m}$ es un subconjunto cerrado para la topología de Zariski de $\mathcal{L}^{n+m}$ y tiene estructura de subvariedad algebraica. Se designará por $\mathcal{N}_k^{n+m}$ igualmente a la correspondiente variedad afín. $\square$

Nota 3.1.1 El nilíndice de una superálgebra de Lie $(n+m)$-dimensional y nilpotente no puede exceder de $n+m$. Así $\mathcal{N}_{n+m}^{n+m}$ contiene todas las leyes de superálgebras de Lie nilpotentes de dimensión $n+m$. Se tiene, por tanto, que

$$\mathcal{N}_{n+m}^{n+m} = \mathcal{N}^{n+m} = \mathcal{N}_{n-1,m}^{n+m}$$

Nota 3.1.2 Todo el estudio que sigue se supone restringido a la variedad $\mathcal{N}^{n+m}$ que, a su vez, puede ser dotada de la topología de Zariski o de la topología euclídea.

3.1.1 Superálgebras de Lie de nilíndice maximal

Definición 3.1.1 *Una superálgebra de Lie $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1 \in \mathcal{N}^{n+m}$ se dice de nilíndice maximal si su nilíndice, k, es el máximo posible para las dimensiones n y m dadas.*

Conocer el nilíndice maximal de cada familia, con n y m fijos, es aún un problema abierto. Para cada par de dimensiones n y m se puede designar el correspondiente nilíndice maximal, k, como $f(n,m)$, función lineal en n y m que verifica que $f(n,m) \leq n+m$.

Notación. Se designará por $\mathcal{M}^{n+m}$ al conjunto de leyes de superálgebras de Lie de $\mathcal{N}^{n+m}$ de nilíndice maximal $f(n,m)$.

Proposición 3.1.2 *Cada componente irreducible de la variedad algebraica $\mathcal{M}^{n+m}$ determina una componente irreducible de $\mathcal{N}^{n+m}$.*

Demostración: Como $\mathcal{M}^{n+m} = \mathcal{N}^{n+m} - \mathcal{N}^{n+m}_{f(n,m)-1}$ será un conjunto abierto para la topología de Zariski de $\mathcal{N}^{n+m}$, de donde se sigue el resultado. □

Corolario 3.1.3 *Para cada* $\mu \in \mathcal{M}^{n+m}$ *la clausura de Zariski de* $\mathcal{O}(\mu)$, $\overline{\mathcal{O}(\mu)}^{z}$, *será una componente irreducible de* $\mathcal{N}^{n+m}$. *Pero no todas las componentes irreducibles tienen que ser de esta forma.*

3.2 Base adaptada

Notación. En lo que sigue cuando se escriba que un vector pertenece a un producto corchete, $Y_i \in [X_j, Y_k]$, se estará expresando que en la combinación lineal de vectores a la que es igual el producto corchete aparece el vector Y_i con coeficiente distinto de cero, es decir, que la constante de estructura $D^i_{jk} \neq 0$. Análogamente $X_i \in [Y_j, Y_k] \Longleftrightarrow E^i_{jk} \neq 0$.

Como generalización a lo visto para el caso filiforme se tiene lo siguiente

Lema 3.2.1 *Sea* $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1 \in \mathcal{N}^{n+m}$ *con* $\mathfrak{g}_1$ *un* $\mathfrak{g}_0-$*módulo filiforme. Existe entonces una base* $\{X_0, X_1, \ldots, X_{n-1}, Y_1, \ldots, Y_m\}$ *con* $\{X_0, X_1, \ldots, X_{n-1}\}$ *base de* $\mathfrak{g}_0$ *e* $\{Y_1, \ldots, Y_m\}$ *base de* $\mathfrak{g}_1$ *tal que:*

$$\begin{cases} [X_0, X_i] = \varepsilon_i X_{i+1} & 1 \leq i \leq n-2, \ \varepsilon_i \in \{0,1\} \\ [X_0, X_{n-1}] = 0 \end{cases}$$

con X_0 *vector característico de* $\mathfrak{g}_0$. *Además, si* $Y_{j-1} \in [X_i, Y_j]$ *entonces* X_i *es un generador del álgebra de Lie* $\mathfrak{g}_0$.

Nota 3.2.1 Los vectores Y_j del lema anterior son los que provienen de la fibración de $\mathfrak{g}_1$ por ser éste $\mathfrak{g}_0-$módulo filiforme.

Nota 3.2.2 En las condiciones del lema no se puede afirmar que X_0 sea vector característico de la superálgebra como ocurría para las superálgebras de Lie filiformes (ver Nota 2.2.2). En este caso sólo será vector característico del álgebra de Lie $\mathfrak{g}_0$.

Demostración del Lema: La existencia de la base para $\mathfrak{g}_0$ verificando lo anterior es consecuencia del teorema de Engel para álgebras de Lie nilpotentes.

Como $\mathfrak{g}_1$ es $\mathfrak{g}_0-$módulo filiforme, se tiene la fibración del espacio vectorial subyacente $0 \subset V_1 \subset \ldots \subset V_m$ tal que, para $1 \leq i \leq m$ es $dim(V_{i+1}/V_i) = 1$, $V_i =< Y_1, \ldots, Y_i >$ y $[\mathfrak{g}_0, V_{i+1}] = V_i$.

Por tanto, se ha de verificar que

• $[\mathfrak{g}_0, V_1] = 0$ de donde sigue que $[X_i, Y_1] = 0 \; \forall i$.

• $[\mathfrak{g}_0, V_2] = V_1$ con $V_2 =< Y_1, Y_2 >$ que, junto a lo anterior, implica la existencia de un escalar no nulo λ_{i_2} con $[X_{i_2}, Y_2] = \lambda_{i_2} Y_1$.

• $[\mathfrak{g}_0, V_3] = V_2$ con $V_3 =< Y_1, Y_2, Y_3 >$. Se tiene hasta ahora que $[\mathfrak{g}_0, Y_1] = 0$ y $[\mathfrak{g}_0, Y_2] =< Y_1 >$ luego tiene que existir un escalar no nulo λ_{i_3} tal que $[X_{i_3}, Y_3] = \lambda_{i_3} Y_2 + \Psi_3(Y_1)$.

Así, por inducción finita, se tiene un conjunto de escalares no nulos $\{\lambda_{i_2}, \lambda_{i_3}, \ldots, \lambda_{i_m}\}$ de índices $\{i_2, i_3, \ldots, i_m\} \subseteq \{0, 1, \ldots, n-1\}$ para los que se verifica

$$[X_{i_k}, Y_k] = \lambda_{i_k} Y_{k-1} + \Psi_k(Y_{k-2}, \ldots, Y_1), \quad 1 \leq k \leq m$$

con las interpretaciones ya vistas para los casos $k = 1$ y $k = 2$.

A continuación se va a probar por reducción al absurdo que, en particular, $\{X_{i_2}, \ldots \ldots, X_{i_m}\} \subset \{X / X \notin [\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_0]\}$. En efecto, si se supone que $\exists X_{i_k}$ tal que $X_{i_k} = [X_j, X_h]$ para algún j y h, entonces

$$[X_{i_k}, Y_k] = \lambda_{i_k} Y_{k-1} + \Psi_k(Y_{k-2}, \ldots, Y_1) \quad \text{con } \lambda_{i_k} \neq 0 \tag{3.1}$$

y de $J_g(X_j, X_h, Y_k)$ se obtiene que

$$[[X_j, X_h], Y_k] = \underbrace{[X_j, \underbrace{[X_h, Y_k]}_{\subseteq V_{k-1}}]}_{\subseteq V_{k-2}} - \underbrace{[X_h, \underbrace{[X_j, Y_k]}_{\subseteq V_{k-1}}]}_{\subseteq V_{k-2}} \tag{3.2}$$

Se observa fácilmente que de (3.1) y de (3.2) se llega a que $Y_{k-1} \in V_{k-2}$ lo que está claramente en contradicción con la propia definición de los subespacios V_i. □

Recuérdese que para superálgebras filiformes siempre se puede hacer un cambio de base de vector característico X_0, introduciendo una combinación lineal arbitraria del resto de los generadores, quedándose en dicha combinación lineal totalmente libres los coeficientes del resto de los generadores, esto es, sin ninguna restricción entre ellos.

En general esto no siempre es posible, ya si se hace un cambio de vector característico X_0, para un álgebra de Lie $\mathfrak{g}_0$ no filiforme, se pueden obtener restricciones sobre los coeficientes del resto de los generadores, pudiéndose incluso anular alguno de éstos. De ahí que no se pueda asegurar que X_0, que da el máximo para la primera sucesión característica del invariante de Goze, de también el máximo para la segunda.

Con todo esto lo único que es posible asegurar para el caso general está enunciado en el teorema siguiente.

Teorema 3.2.2 *Si $\mathfrak{g}$ es una S.A.L. nilpotente, $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1 \in \mathcal{N}^{n+m}$, entonces existe una base $\{X_0, X_1, \ldots, X_{n-1}, Y_1, \ldots, Y_m\}$ de $\mathfrak{g}$, con $\{X_0, X_1, \ldots, X_{n-1}\}$ base de $\mathfrak{g}_0$ e $\{Y_1, \ldots, Y_m\}$ base de $\mathfrak{g}_1$, tal que:*

$$\begin{cases} [X_0, X_i] = \varepsilon_i X_{i+1} & 1 \leq i \leq n-2 \\ [X_0, X_{n-1}] = 0 & \\ [X_0, Y_j] = \delta_j Y_{j+1} + (1-\delta_j)\Psi_j(Y_{j+2}, \ldots, Y_m) & 1 \leq j \leq m-1 \\ [X_0, Y_m] = 0 & \varepsilon_i, \delta_j \in \{0, 1\} \end{cases}$$

donde X_0 es un vector característico del álgebra de Lie $\mathfrak{g}_0$.

Demostración: Si se toma como base de $\mathfrak{g}_0$ a cualquier base adaptada $\{X_0, X_1, \ldots, X_{n-1}\}$ (que existe como consecuencia del teorema de Engel para álgebras de Lie nilpotentes) y como base de $\mathfrak{g}_1$ a los vectores que proporciona la fibración de $\mathfrak{g}_1$ (por ser éste $\mathfrak{g}_0-$módulo), resulta evidente que se obtiene una base como la del teorema sin más que hacer cambios de escala para que $\delta_j \in \{0,1\}$ y, en el caso de ser distinto de cero, se puede conseguir anular Ψ_j tomado $Y'_{j+1} = \delta_j Y_{j+1} + \Psi_j(Y_{j+2}, \ldots, Y_m)$. □

3.3 Caso filiforme

A lo largo de esta sección se tratará el problema de encontrar la función $f(n,m)$ que da el nilíndice maximal de la variedad de leyes de superálgebras de Lie nilpotentes $\mathcal{N}^{n+m}$, para n y m fijos. Debido a la gran complejidad del problema se empezará abordándolo para las superálgebras de Lie filiformes, es decir, estudiando sólo el caso $f(n,m)|_{\mathcal{F}^{n+m}}$, siendo de gran importancia su determinación, tanto, que incluso hoy en día constituye un problema abierto el conocer si es cierta la igualdad $f(n,m)|_{\mathcal{F}^{n+m}} = f(n,m)|_{\mathcal{N}^{n+m}}$. A lo largo de esta sección se considerará $\mathfrak{g} \in \mathcal{F}^{n+m}$ de base adaptada $\{X_0, X_1, \ldots, X_{n-1}, Y_1, \ldots, Y_m\}$ y se notará, por abuso de notación, por $f(n,m)$ a $f(n,m)|_{\mathcal{F}^{n+m}}$.

Lema 3.3.1 $f(n,m) \leq n+m-1$.

Demostración: Basta probar que $X_0 \notin \mathcal{C}^1(\mathfrak{g})_0$ ya que, en tal caso, se verificaría que $dim(\mathcal{C}^1(\mathfrak{g})) \leq n+m-2$ ya que $Y_1 \notin \mathcal{C}^1(\mathfrak{g})_1 =< Y_2, \ldots Y_m >$. Además, los $\mathcal{C}^i(\mathfrak{g})$ constituyen una sucesión estrictamente decreciente, por nilpotencia, de donde se llegaría a que $\mathcal{C}^{n+m-1}(\mathfrak{g}) = \{0\}$, esto es, el nilíndice de $\mathfrak{g}$, $f(n,m)$, sería como mucho $n+m-1$.

Se va a hacer la demostración por reducción al absurdo, suponiendo que $X_0 \in \mathcal{C}^1(\mathfrak{g})_0$, distinguiendo a su vez dos casos (según que X_1 pertenezca o no a $\mathcal{C}^1(\mathfrak{g})_0$) llegando en cada uno de ellos a contradicción.

Caso a. Supóngase que $X_1 \notin \mathcal{C}^1(\mathfrak{g})_0$. En este caso es fácil ver, por nilpotencia, que la única posibilidad es $X_0 \in [Y_1, Y_1]$ ya que, en caso contrario, se tendría que

$$\begin{array}{l} \mathcal{C}^1(\mathfrak{g}) = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] =< X_0, X_2, \ldots, X_{n-1} > \oplus < Y_2, \ldots, Y_m > \\ \mathcal{C}^2(\mathfrak{g}) = [\mathcal{C}^1(\mathfrak{g}), \mathfrak{g}] =< X_0, X_2, \ldots, X_{n-1} > \oplus < Y_2, \ldots, Y_m > \end{array}$$

$$\Downarrow$$

$$\mathcal{C}^1(\mathfrak{g}) = \mathcal{C}^2(\mathfrak{g})$$

lo que es una contradicción.

Luego, queda $[Y_1, Y_1] = X_0 + \Psi(X_2, \ldots, X_{n-1})$, pero de $J_g(Y_1, Y_1, Y_1)$ se obtiene que

$$0 = [[Y_1, Y_1], Y_1] = \underbrace{[X_0, Y_1]}_{=Y_2} + \underbrace{[\Psi(X_2, \ldots, X_{n-1}), Y_1]}_{\subseteq < Y_3, \ldots, Y_m >}$$

llegándose a una contradicción.

Caso b. Supóngase que $X_1 \in \mathcal{C}^1(\mathfrak{g})_0$. Por nilpotencia $[Y_1, Y_1] \supseteq \Psi(X_0, X_1)$, con Ψ una aplicación lineal no nula, ya que en caso contrario $\mathcal{C}^1(\mathfrak{g}) = \mathcal{C}^2(\mathfrak{g})$. Por otro lado $\Psi(X_0, X_1) = aX_0 + bX_1$ con $ab \neq 0$, por la identidad de Jacobi graduada para Y_1, de donde también se deduce que $Y_2 \in [X_1, Y_1]$. Luego

$$\mathcal{C}^1(\mathfrak{g}) = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] =< X_0, X_1, X_2, \ldots, X_{n-1} > \oplus < Y_2, \ldots, Y_m >$$

teniéndose dos posibilidades para $\mathcal{C}^2(\mathfrak{g})$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{C}^2(\mathfrak{g}) =< X_0, X_2, \ldots, X_{n-1} > \oplus < Y_2, \ldots, Y_m > \\ \\ \text{o bien} \\ \\ \mathcal{C}^2(\mathfrak{g}) =< X_1, X_2, \ldots, X_{n-1} > \oplus < Y_2, \ldots, Y_m > \end{array} \right.$$

llegándose en cada una de ellas a que $\mathcal{C}^2(\mathfrak{g}) = \mathcal{C}^3(\mathfrak{g})$ lo que es una contradicción. □

Nota 3.3.1 En el lema anterior se excluye el caso $n = m = 1$ por considerarse trivial. Sin más que considerar la S.A.L. de base $\{X_0, Y\}$ y de único producto no nulo $[Y, Y] = X_0$ (único caso en el que $E_{11}^0 \neq 0$) se consigue nilíndice 2 $(= n + m)$. La S.A.L. anterior es en realidad un caso escindido, por lo tanto de ahora en adelante no se considerará este caso salvo que se diga lo contrario.

3.3.1 Teorema de existencia (nilíndice $n + m - 1$).

Se van a buscar superálgebras de Lie filiformes que alcancen el máximo para su familia, es decir, $\mathfrak{g} \in \mathcal{F}_{n+m-1}^{n+m}$, para saber si efectivamente existe algún caso para n y m en el que $f(n, m) = n + m - 1$. En primer lugar se verá un lema que será de utilidad en lo que sigue.

Lema 3.3.2 *Si $\mathfrak{g} \in \mathcal{F}^{n+m}$ con base adaptada $\{X_0, X_1, \ldots, X_{n-1}, Y_1, \ldots, Y_m\}$, se verifica que*

$$[X_i, Y_j] \subseteq < Y_{i+j}, \ldots, Y_m >, \quad 1 \leq i \leq n-1, 1 \leq j \leq m$$

Demostración: Véase lema 3.2.1. □

Ahora se busca la superálgebra más sencilla posible (y posteriormente su órbita) de nilíndice $n + m - 1$ imponiendo que $[Y_1, Y_m] = X_1$ (ya que el producto $[Y_1, Y_m]$ es el último en desaparecer en la sucesión decreciente de $\mathcal{C}^i(\mathfrak{g})$; como se verá más adelante, este método no siempre da resultado). Luego, se tiene $\mathfrak{g}$ con base adaptada $\{X_0, X_1, \ldots, X_{n-1}, Y_1, \ldots, Y_m\}$ que verifica:

$$\begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1} & 1 \leq i \leq n-2 \\ [X_0, Y_j] = Y_{j+1} & 1 \leq j \leq m-1 \\ [Y_1, Y_m] = X_1 \end{cases}$$

$$\mathcal{C}^1(\mathfrak{g}) = < X_1, \ldots, X_{n-1} > \oplus < Y_2, \ldots, Y_m >$$

Se va a determinar el resto de los productos de tal forma que $\mathfrak{g}$ sea una una superálgebra de Lie de nilíndice $n+m-1$. Obsérvese que $Y_2 \notin [X_1, Y_1]$ ya que, en ese caso, sería $\mathcal{C}^1(\mathfrak{g}) = \mathcal{C}^2(\mathfrak{g})$ siendo, además, éste el único producto que no contiene a X_0 y en el que puede aparecer Y_2, luego $Y_2 \notin [X_i, Y_j]$ $\forall i, j \geq 1$. $\mathcal{C}^2(\mathfrak{g})$ queda

$$\mathcal{C}^2(\mathfrak{g}) = < X_1, \ldots, X_{n-1} > \oplus < Y_3, \ldots, Y_m >$$

De igual modo se tiene que $Y_3 \notin [X_i, Y_j]$ $\forall i, j \geq 1$ pues, en otro caso, se tendría que $\mathcal{C}^2(\mathfrak{g}) = \mathcal{C}^3(\mathfrak{g})$. Resulta

$$\mathcal{C}^3(\mathfrak{g}) = < X_1, \ldots, X_{n-1} > \oplus < Y_4, \ldots, Y_m >$$

Por inducción finita se llega a que

$$\mathcal{C}^{m-1}(\mathfrak{g}) = < X_1, \ldots, X_{n-1} > \oplus < Y_m >$$

teniendo entonces, por nilpotencia, que $Y_m \notin [X_i, Y_j]$ $\forall i, j \geq 1$. En particular, se ha obtenido que $Y_k \notin [X_i, Y_j]$ $\forall i, j \geq 1, k \geq 2$, es decir $[X_k, Y_j] = 0$ $\forall j, k$ con $k \neq 0$. Así, se tiene que

$$\begin{array}{rcll}
\mathcal{C}^m(\mathfrak{g}) & = & < X_1, \ldots, X_{n-1} > & \oplus < 0 > \\
\mathcal{C}^{m+1}(\mathfrak{g}) & = & < X_2, \ldots, X_{n-1} > & \oplus < 0 > \\
\vdots & & \vdots & \\
\mathcal{C}^{m+n-2}(\mathfrak{g}) & = & < X_{n-1} > & \oplus < 0 > \\
\mathcal{C}^{m+n-1}(\mathfrak{g}) & = & < 0 > &
\end{array}$$

Queda la ley de la S.A.L. dada por

$$\left\{ \begin{array}{ll}
[X_0, X_i] = X_{i+1} & 1 \leq i \leq n-2 \\
[X_0, Y_j] = Y_{j+1} & 1 \leq j \leq m-1 \\
[Y_1, Y_m] = X_1 & \\
[X_k, Y_j] = 0 & 1 \leq j \leq m, \ 1 \leq k \leq n-1
\end{array} \right.$$

y sólo falta conocer el resto de productos $[X_i, X_j]$, $[Y_i, Y_j]$ tal que sea una superálgebra de Lie. No obstante, ya se ha probado que si existe una S.A.L. con la ley anterior su nilíndice tiene que ser $n + m - 1$.

De $J_g(X_0, Y_1, Y_m)$ se obtiene que $[X_0, [Y_1, Y_m]] = [Y_2, Y_m] = X_2$. De $J_g(X_0, Y_2, Y_m)$ se obtiene que $[X_0, [Y_2, Y_m]] = [Y_3, Y_m] = X_3$. Reiterando el proceso se obtiene que $[Y_k, Y_m] = X_k$.

Llegado a este punto, se observa que si $n-1 > m$ no queda totalmente determinada el álgebra de Lie $\mathfrak{g}_0$, por lo que a partir de este momento siempre se va a considerar $n-1 \leq m$. Así, el último producto que se obtiene en el proceso anterior es $[Y_{n-1}, Y_m] = X_{n-1}$, luego se tiene que $[Y_j, Y_m] = X_j$ para $1 \leq j \leq n-1$. Pero como $[X_k, Y_j] = 0$, $\forall j, k$ con $k \neq 0$, se sigue de $J_g(X_k, Y_j, Y_m)$ que $[X_k, [Y_j, Y_m]] = 0$, $\forall j, k$ con $k \neq 0$. Luego $[X_k, X_j] = 0$ para $1 \leq j, k \leq n-1$, es decir, se ha probado que

$$\{X_1, \ldots, X_{n-1}\} \subseteq Cent_{\mathfrak{g}_0}(< X_1, \ldots, X_{n-1} >) \Longrightarrow \mathfrak{g}_0 = L_{n-1}$$

con L_{n-1} el álgebra de Lie filiforme $n-$dimensional definida por

$$[X_0, X_i] = X_{i+1}, 1 \leq i \leq n-2$$

(siguiendo la notación de [26]) y $Cent_{\mathfrak{g}_0}$ denota al operador centralizador restringido al álgebra de Lie $\mathfrak{g}_0$ (para más detalles, definición y aplicaciones, ver [9], [14] y [17]).

• De $J_g(X_0, Y_1, Y_{m-1})$ se tiene que $[X_0, [Y_1, Y_{m-1}]] = [Y_2, Y_{m-1}] + [Y_1, Y_m]$ pero al ser $[Y_1, Y_m] = X_1$ y $X_1 \notin Im(adX_0)$ ha de ser

$$[Y_2, Y_{m-1}] = -X_1 + \Psi(X_2, \ldots, X_{n-1})$$

• De $J_g(X_0, Y_2, Y_{m-2})$ se tiene que $[X_0, [Y_2, Y_{m-2}]] = [Y_3, Y_{m-2}] + [Y_2, Y_{m-1}]$ y como $-X_1 \in [Y_2, Y_{m-1}]$ y $X_1 \notin Im(adX_0)$ se sigue que

$$[Y_3, Y_{m-2}] = X_1 + \Psi(X_2, \ldots, X_{n-1})$$

Así, por inducción finita y escogiendo el caso más sencillo, (con mayor número de productos nulos y con $\Psi = 0$), se tiene que para $i \leq j$ (los casos $i > j$ se tienen por simetría)

$$[Y_i, Y_j] = \begin{cases} (-1)^{i-1} X_1 & \text{si } i+j = m+1 \\ 0 & \text{si } i+j = m \end{cases}$$

con todo lo visto hasta ahora se tienen los siguientes productos

$$\begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1} & 1 \leq i \leq n-2 \\ [X_0, Y_j] = Y_{j+1} & 1 \leq j \leq m-1 \\ [Y_k, Y_{m-k}] = 0 & 1 \leq k \leq m-1 \\ [Y_l, Y_m] = X_l & 1 \leq l \leq n-1 \\ [Y_{1+r}, Y_{m-r}] = (-1)^r X_1 & \begin{cases} 1 \leq r \leq \frac{m-2}{2} & \text{si } m \text{ es par} \\ 1 \leq r \leq \frac{m-1}{2} & \text{si } m \text{ es impar} \end{cases} \end{cases}$$

cuando se intenta comprobar que los productos anteriores se pueden completar hasta constituir una superálgebra de Lie para dimensiones concretas de (n, m), m par, siempre se llega a contradicción de manera análoga que para $n > 2$, de ahí que surja el siguiente lema:

Lema 3.3.3 *Si* $\mathfrak{g} \in \mathcal{F}^{n+m}$*, de base adaptada* $\{X_0, X_1, \ldots, X_{n-1}, Y_1, \ldots, Y_m\}$*, entonces, si* $X_1 \in [Y_1, Y_m]$ *se tiene que* m *ha de ser impar y* $n \leq 2$*.*

Demostración: Supóngase m par. Se va a probar que siempre se llega a contradicción.

En efecto, ya que utilizando la identidad de Jacobi graduada junto con el hecho de que $X_1 \notin Im(adX_0)$ y por ser m par se tiene el producto:

$$[Y_{\frac{m}{2}}, Y_{\frac{m}{2}+1}] = (-1)^{\frac{m}{2}+1} X_1 + \Psi(X_2, \ldots, X_{n-1})$$

pero, de $[X_0, [Y_{\frac{m}{2}}, Y_{\frac{m}{2}}]] = 2[Y_{\frac{m}{2}}, Y_{\frac{m}{2}+1}]$, se llega a contradicción ya que se tiene $X_1 \notin Im(adX_0)$. Con esto queda probado que m tiene que ser impar.

A partir de ahora m será impar y $m \neq 1$ (el caso $m = 1$ resulta trivial como ya se verá en la siguiente sección). A continuación se va a probar, por reducción al absurdo, que $n \leq 2$, ya que si $n > 2$ entonces se tiene que $X_2 \in [Y_i, Y_j]$ con $i + j = m + 2$ y esto llevará a contradicción. En efecto, sea $n > 2$:

- A partir de $J_g(X_0, Y_2, Y_{m-1})$ se obtiene que

$$[X_0, [Y_2, Y_{m-1}]] = [X_0, -X_1] = -X_2 = [Y_3, Y_{m-1}] + [Y_2, Y_m]$$

pero, al ser $[Y_2, Y_m] = X_2$, ha de ser

$$[Y_3, Y_{m-1}] = -2X_2$$

- De $J_g(X_0, Y_3, Y_{m-2})$ se obtiene que

$$[X_0, [Y_3, Y_{m-2}]] = [Y_4, Y_{m-2}] + [Y_3, Y_{m-1}]$$

y como $[Y_3, Y_{m-1}] = -2X_2$, $[Y_3, Y_{m-2}] = X_1$ se sigue que

$$[Y_4, Y_{m-2}] = 3X_2$$

Así, por inducción finita, se llega a que

$$[Y_k, Y_{m-k+2}] = (-1)^k(k-1)X_2 \quad 1 \leq k \leq \frac{m+1}{2}$$

En el caso particular en que $k = \frac{m+1}{2}$ resulta

$$[Y_{\frac{m+1}{2}}, Y_{\frac{m+1}{2}+1}] = (-1)^{\frac{m+1}{2}}(\frac{m-1}{2})X_2$$

Por otra parte, al ser m impar, se tiene que $[Y_{\frac{m+1}{2}}, Y_{\frac{m+1}{2}}] = (-1)^{\frac{m-1}{2}}X_1$, de donde

$$[X_0, [Y_{\frac{m+1}{2}}, Y_{\frac{m+1}{2}}]] = 2[Y_{\frac{m+1}{2}}, Y_{\frac{m+1}{2}+1}]$$

resultando

$$(-1)^{\frac{m-1}{2}}X_2 = (-1)^{\frac{m+1}{2}}(m-1)X_2$$

lo que es una contradicción, pues $m \neq 1$. □

Como corolario del lema, es posible obtener una familia de S.A.L. filiformes de nilíndice maximal $n+m-1$.

Ejemplo. Se designa [1] mediante $K^{2,m}$, m impar, la familia de S.A.L. $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1$, donde $dim(\mathfrak{g}_0) = 2$ y $dim(\mathfrak{g}_1) = m$, tal que para cada valor de m

[1]Esta familia de S.A.L. se llama $K^{2,m}$ en agradecimiento al profesor Y. Khakimdyanov, sin cuyos consejos nunca hubiera sido posible encontrarla.

la ley se expresa, respecto de una cierta base adaptada $\{X_0, X_1, Y_1, \dots Y_m\}$, por

$$K^{2,m}: \begin{cases} [X_0, Y_i] = Y_{i+1} & 1 \leq i \leq m-1 \\ [Y_i, Y_{m+1-i}] = (-1)^{(i+1)} X_1 & 1 \leq i \leq \dfrac{m+1}{2} \end{cases}$$

Se puede enunciar, por tanto, el siguiente teorema de existencia, de gran importancia ya que proporciona la primera superálgebra de Lie de nilíndice maximal no sólo dentro de su clase, la clase de las filiformes, sino también dentro de toda la clase de las S.A.L. nilpotentes, como ya se verá en la siguiente sección.

Teorema 3.3.4 (de existencia).
Para cada dimensión m impar y $n = 2$ existe al menos una superálgebra de Lie, $K^{2,m}$, de nilíndice el máximo posible $n + m - 1 = m + 1$. Queda por tanto determinado el valor de la función $f(2, m)$ para cualquier valor m impar, $f(2, m) = m + 1$.

Demostración: Es una simple comprobación. □

Nota 3.3.2 $\mathcal{O}(K^{2,m})$ constituirá una familia de superálgebras de Lie de nilíndice $m + 1$. En la siguiente sección se probará que es la única familia de S.A.L. filiformes con este nilíndice.

3.3.2 Teorema de unicidad (nilíndice $n + m - 1$)

A lo largo de esta sección se va a probar que la única superálgebra de Lie filiforme, salvo isomorfismo, de dimensión de la parte par n y dimensión de la parte impar m y nilíndice $n + m - 1$ se presenta para $n = 2$ y m impar y es $K^{2,m}$.

Seguidamente se determina la órbita de $K^{2,m}$, $\mathcal{O}(K^{2,m})$, que será de gran importancia ya que su clausura en la topología de Zariski constituirá una componente irreducible de la variedad algebraica $\mathcal{N}^{2+m}$, tal y como se verá en la siguiente sección.

A continuación se prueban varios lemas que serán de gran utilidad en lo que sigue.

Lema 3.3.5 *Sea $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1$ una S.A.L. filiforme con $dim(\mathfrak{g}_0) = n$ y $dim(\mathfrak{g}_1) = m$. Si $X_k \in [Y_1, Y_m]$ con $X_l \notin B(\mathfrak{g}_1 \times \mathfrak{g}_1)$ para todo $0 \leq l < k$ (siguiendo la notación de 1.2.2) entonces m es impar y la única posibilidad para k es $k = n - 1$.*

Demostración: Sea $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1$ una S.A.L. filiforme con $dim(\mathfrak{g}_0) = n$ y $dim(\mathfrak{g}_1) = m$. Supongamos que $X_k \in [Y_1, Y_m]$ con $X_l \notin B(\mathfrak{g}_1 \times \mathfrak{g}_1)$ para todo $0 \leq l < k$. A continuación se probará que m es impar por reducción al absurdo. Luego supóngase m par:

- De $J_g(X_0, Y_1, Y_{m-1})$ se tiene que

$$[X_0, [Y_1, Y_{m-1}]] = [Y_2, Y_{m-1}] + [Y_1, Y_m]$$

con $X_k \in [Y_1, Y_m]$ y $X_k \notin [X_0, [Y_1, Y_{m-1}]]$ (ya que $X_{k-1} \notin [Y_1, Y_{m-1}]$), de donde se sigue que $X_k \in [Y_2, Y_{m-1}]$.

- De $J_g(X_0, Y_2, Y_{m-2})$ se tiene que

$$[X_0, [Y_2, Y_{m-2}]] = [Y_3, Y_{m-2}] + [Y_2, Y_{m-1}]$$

con $X_k \in [Y_2, Y_{m-1}]$ y $X_k \notin [X_0, [Y_2, Y_{m-2}]]$ (ya que $X_{k-1} \notin [Y_2, Y_{m-2}]$), de donde se sigue que $X_k \in [Y_3, Y_{m-2}]$.

- Así por inducción para m par se llega a $J_g(X_0, Y_{\frac{m}{2}}, Y_{\frac{m}{2}})$ de donde se tiene

$$[X_0, [Y_{\frac{m}{2}}, Y_{\frac{m}{2}}]] = 2[Y_{\frac{m}{2}}, Y_{\frac{m}{2}+1}]$$

con $X_k \in [Y_{\frac{m}{2}}, Y_{\frac{m}{2}+1}]$ y $X_k \notin [X_0, [Y_{\frac{m}{2}}, Y_{\frac{m}{2}}]]$ (ya que $X_{k-1} \notin [Y_{\frac{m}{2}}, Y_{\frac{m}{2}}]$) llegando por tanto a contradicción con el hecho de que m es par.

Luego m tiene que ser impar.

Seguidamente se va a probar que $k = n - 1$ por reducción al absurdo.

Sea, por tanto, $X_k \in [Y_1, Y_m]$ con $k \neq n - 1$, luego existe el vector X_{k+1}. No hay pérdida de generalidad en suponer que la constante de estructura $E_{1m}^k = 1$. De donde se seguirían, mediante las super-relaciones de Jacobi, los siguientes productos:

$$\begin{cases} [Y_2, Y_m] = X_{k+1} + \Psi_1(X_{k+2}, \ldots, X_{n-1}) \\ [Y_{1+i}, Y_{m-i}] = (-1)^i X_k + \Psi_{1+i}(X_{k+1}, \ldots, X_{n-1}) \quad 1 \leq i \leq \frac{m-1}{2} \end{cases}$$

• De $J_g(X_0, Y_2, Y_{m-1})$ se tiene que

$$[X_0, [Y_2, Y_{m-1}]] = [Y_3, Y_{m-1}] + [Y_2, Y_m]$$

con $-X_{k+1} \in [X_0, [Y_2, Y_{m-1}]]$ y $X_{k+1} \in [Y_2, Y_m]$ de donde se sigue que $[Y_3, Y_{m-1}] = -2X_{k+1} + \Psi_3'(X_{k+2}, \ldots, X_{n-1})$.

• De $J_g(X_0, Y_3, Y_{m-2})$ se tiene que

$$[X_0, [Y_3, Y_{m-2}]] = [Y_4, Y_{m-2}] + [Y_3, Y_{m-1}]$$

con $X_{k+1} \in [X_0, [Y_3, Y_{m-2}]]$ y $-2X_{k+1} \in [Y_3, Y_{m-1}]$ de donde se sigue que $[Y_4, Y_{m-2}] = 3X_{k+1} + \Psi_4'(X_{k+2}, \ldots, X_{n-1})$.

• Así, por inducción finita, se prueba que

$$[Y_k, Y_{m-k+2}] = (-1)^k (k-1) X_{k+1} + \Psi(X_{k+2}, \ldots, X_{n-1}), \quad 2 \leq k \leq \frac{m+1}{2}$$

En particular para $k = \frac{m+1}{2}$ quedaría

$$[Y_{\frac{m+1}{2}}, Y_{\frac{m+3}{2}}] = (-1)^{\frac{m+1}{2}} \frac{m-1}{2} X_{k+1} + \Psi(X_{k+2}, \ldots, X_{n-1})$$

De $J_g(X_0, Y_{\frac{m+1}{2}}, Y_{\frac{m+1}{2}})$ se llega a $[X_0, [Y_{\frac{m+1}{2}}, Y_{\frac{m+1}{2}}]] = 2[Y_{\frac{m+1}{2}}, Y_{\frac{m+3}{2}}]$ siendo el coeficiente del vector X_{k+1} igual a $(-1)^{\frac{m+3}{2}}$ en el primer miembro e igual a $(-1)^{\frac{m+1}{2}}(m-1)$ en el segundo miembro, llegando por tanto a contradicción.

Con esto se concluye la demostración del lema. $\square$

Lema 3.3.6 *Sea $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1$ una S.A.L. filiforme con $dim(\mathfrak{g}_0) = n$ y $dim(\mathfrak{g}_1) = m$. Para $n \geq 3$ y m impar si $X_1 \in [Y_i, Y_j]$ entonces $i+j$ es par y $2 \leq i+j \leq m-1$.*

Demostración: Se comenzará probando, mediante reducción al absurdo, que si $i+j$ es impar entonces $X_1 \notin [Y_i, Y_j]$.

• De $J_g(X_0, Y_i, Y_i)$ para $1 \leq i \leq m-1$ se sigue que $[Y_i, Y_{i+1}] = 1/2[X_0, [Y_i, Y_i]]$ y como $X_1 \notin Im(adX_0)$ se tiene que $X_1 \notin [Y_i, Y_{i+1}]$ con $1 \leq i \leq m-1$. Siguiendo un razonamiento análogo, con $J_g(X_0, Y_k, Y_m)$ para $1 \leq k \leq m-1$, se prueba que X_1 no puede aparecer en ningún corchete de la forma $[Y_2, Y_m]$, $[Y_3, Y_m], \ldots, [Y_m, Y_m]$.

• De $J_g(X_0, Y_{i-1}, Y_{i+1})$ para $2 \leq i \leq m-2$ se tiene que

$$[X_0, [Y_{i-1}, Y_{i+1}]] = [Y_i, Y_{i+1}] + [Y_{i-1}, Y_{i+2}]$$

gracias al punto anterior junto con el hecho de que $X_1 \notin Im(adX_0)$ se llega a que $X_1 \notin [Y_{i-1}, Y_{i+2}]$ para $2 \leq i \leq m-2$. luego se ha probado que $X_1 \notin [Y_i, Y_j]$ con $1 \leq i < j \leq m$ y tal que $j - i = 3$.

• De $J_g(X_0, Y_{i-2}, Y_{i+2})$ para $3 \leq i \leq m-3$ y siguiendo un razonamiento análogo al anterior se llega a que $X_1 \notin [Y_{i-2}, Y_{i+3}]$ para $3 \leq i \leq m-3$. Luego se tiene que $X_1 \notin [Y_i, Y_j]$ con $1 \leq i < j \leq m$ y tal que $j - i = 5$.

• Del mismo modo, a partir de $J_g(X_0, Y_{i-3}, Y_{i+3})$ para $4 \leq i \leq m-4$ y siguiendo un razonamiento análogo al anterior se prueba que $X_1 \notin [Y_i, Y_j]$ con $1 \leq i < j \leq m$ y tal que $j - i = 7$.

Por inducción se llega a que $X_1 \notin [Y_i, Y_j]$ con $j - i$ un número impar $(1 \leq i < j \leq m)$. Luego resta ver qué productos $[Y_i, Y_j]$ con $j - i$ una cantidad par pueden contener a X_1. Es fácil ver que la pertenencia de X_1 a estos últimos viene determinada por la pertenencia de X_1 a algún producto de la forma $[Y_1, Y_1], [Y_2, Y_2], \ldots, [Y_{m-1}, Y_{m-1}]$ (el producto $[Y_m, Y_m]$ ya ha sido estudiado con anterioridad).

En efecto, de $J_g(X_0, Y_1, Y_2)$ y del hecho de que $X_1 \notin Im(adX_0)$ se llega a que

$$X_1 \in [Y_2, Y_2] \longleftrightarrow X_1 \in [Y_1, Y_3]$$

del mismo modo se llega a

$$X_1 \in [Y_3, Y_3] \longleftrightarrow X_1 \in [Y_2, Y_4] \longleftrightarrow X_1 \in [Y_1, Y_5]$$

y, en general, para cualquiera de los productos $[Y_i, Y_i]$ con $1 \leq i \leq m$ se tiene

$$X_1 \in [Y_i, Y_i] \longleftrightarrow X_1 \in [Y_j, Y_k] \text{ con } j + k = 2i$$

Se reduce así el problema a estudiar los productos de la forma $[Y_i, Y_i]$ para $1 \leq i \leq m-1$.

• De $J_g(X_0, Y_j, Y_{m-1})$ para $2 \leq j \leq m-2$ se llega a que $X_1 \notin [Y_i, Y_{m-1}]$ con $3 \leq i \leq m-1$ (de éstos tengo nuevos $[Y_i, Y_{m-1}]$ con $4 \leq i \leq m-1$ e i par). En particular, para $i = m-1$, se tiene que $X_1 \notin [Y_{m-1}, Y_{m-1}]$.

• De $J_g(X_0, Y_j, Y_{m-2})$ para $4 \leq j \leq m-2$ con j par, se obtiene que el vector $X_1 \notin [Y_{j+1}, Y_{m-2}]$. Es decir $X_1 \notin [Y_i, Y_{m-2}]$ con $5 \leq i \leq m-2$ e i impar. En particular, para $i = m-2$, se tiene que $X_1 \notin [Y_{m-2}, Y_{m-2}]$.

• De $J_g(X_0, Y_j, Y_{m-3})$ para $5 \leq j \leq m-4$ con j impar se llega a que $X_1 \notin [Y_{j+1}, Y_{m-3}]$. Es decir $X_1 \notin [Y_i, Y_{m-3}]$ con $6 \leq i \leq m-3$ e i par. En particular, para $i = m-3$, se tiene que $X_1 \notin [Y_{m-3}, Y_{m-3}]$.

Así, por inducción finita, se llega a que $X_1 \notin [Y_{i+k}, Y_{m-i}]$ con $1 \leq i \leq$ $\leq (m-3)/2$ y $3 \leq k \leq m-2i$, obteniéndose, en particular, que $X_1 \notin [Y_i, Y_i]$ para $(m-3)/2 \leq i \leq m-1$.

• A continuación se estudiarían los productos $[Y_1, Y_m]$, $[Y_2, Y_{m-1}]$, $[Y_3, Y_{m-2}]$, ..., $[Y_{\frac{m+1}{2}}, Y_{\frac{m+1}{2}}]$. Siguiendo un razonamiento análogo al anterior y mediante las super-relaciones de Jacobi se sigue que no hay pérdida de generalidad en estudiar sólo el caso $X_1 \notin [Y_1, Y_m]$. El resultado se sigue del lema 3.3.5 y del hecho de que $n \geq 3$.

En resumen, se ha probado que el vector X_1 no puede aparecer en ningún producto de la forma $[Y_i, Y_j]$ cuando $i + j$ es impar o par entre los valores $m + 1$ y $2m$ $(m + 1 \leq i + j \leq 2m)$.

Con esto queda probado el lema. $\square$

Nota 3.3.3 En las condiciones del lema anterior con m par y siguiendo un razonamiento análogo se llega a que si $X_1 \in [Y_i, Y_j]$ entonces $i + j$ es par y además cumple $2 \leq i + j \leq m$.

Nota 3.3.4 Si $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1$ es una S.A.L. filiforme con $dim(\mathfrak{g}_0) = 2$ y $dim(\mathfrak{g}_1) = m$ con m impar, entonces si $X_1 \in [Y_i, Y_j]$ se verifica que $i + j$ es par y $2 \leq i + j \leq m + 1$.

Teorema 3.3.7 (de nilíndice maximal).
El nilíndice maximal de la familia de superálgebras de Lie filiformes $\mathcal{F}^{n,m}$ es $n + m - 1$ y sólo se alcanza para $n = 1$ (caso escindido) y para $n = 2$ y m impar.

Demostración: Se estudiarán cinco casos:

$\boxed{\textbf{Caso n=1}}$

Este caso sin más que tener una base adaptada $[X_0, Y_j] = Y_{j+1}$ para $1 \leq j \leq m - 1$ es fácil comprobar que se consigue una superálgebra de nilíndice m $(= m + n - 1)$, pero este S.A.L. es en realidad un álgebra de Lie, de ahí que se considere un caso escindido. En lo anterior $m \geq 2$ (para $m = 1$ ver nota 3.3.1).

Caso m=1

El caso $n = 1$ está incluido en el caso anterior y el caso $n = 2$ se estudiará más adelante dentro del caso $n = 2$ y m impar. Resta estudiar todos los casos $n \geq 3$. Luego sea $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1$ una S.A.L. filiforme de dimensión $n+1$ ($dim(\mathfrak{g}_0) = n \geq 3$ y $dim(\mathfrak{g}_1) = 1$) y de base adaptada $\{X_0, X_1, \dots, X_{n-1}, Y\}$ con $\mathfrak{g}_0$ un álgebra de Lie filiforme. Con todo esto se tiene que

$$\mathcal{C}^1(\mathfrak{g}) =< [Y,Y], X_2, X_3, \dots, X_{n-1} > \oplus < 0 >$$

donde las constantes de estructura E_{11}^k se llamarán simplemente E^k, esto es $[Y,Y] = \sum_{k=0}^{n-1} E^k X_k$

- De $J_g(X_0, Y, Y)$ se sigue que $E^k = 0$ para $1 \leq k \leq n-2$.

- De $J_g(X_1, Y, Y)$ se sigue que $E^0 = 0$.

Luego $\mathcal{C}^1(\mathfrak{g}) =< X_2, X_3, \dots, X_{n-1} > \oplus < 0 >$, de donde se sigue que el nilíndice maximal de $\mathfrak{g}$ es, a lo sumo, $n-1$ $(= n+m-2)$.

Caso n≥ 3 y m impar

Si se quiere que la superálgebra tenga nilíndice $n+m-1$, es necesario que $X_1 \in \mathcal{C}^1(\mathfrak{g})$ y que $dim(\mathcal{C}^i(\mathfrak{g})/\mathcal{C}^{i+1}(\mathfrak{g})) = 1$ para $1 \leq i \leq n+m-2$. Gracias a los Jacobis y al lema 3.3.6 hay $\frac{m-1}{2}$ de productos en los que puede aparecer el vector X_1, que son

$$[Y_1, Y_1],\ [Y_2, Y_2],\ [Y_3, Y_3], \dots, [Y_{\frac{m-1}{2}}, Y_{\frac{m-1}{2}}]$$

$\star$ $\underline{X_1 \in [Y_{\frac{m-1}{2}}, Y_{\frac{m-1}{2}}]}$ En este caso, de $J_g(X_0, Y_{\frac{m-3}{2}}, Y_{\frac{m-1}{2}})$ se tiene que el vector $X_1 \in [Y_{\frac{m-3}{2}}, Y_{\frac{m+1}{2}}]$ sin más que tener en cuenta que $X_1 \notin Im(adX_0)$. De $J_g(X_0, Y_{\frac{m-5}{2}}, Y_{\frac{m+1}{2}})$ y gracias al paso anterior se tiene que $X_1 \in [Y_{\frac{m-5}{2}}, Y_{\frac{m+3}{2}}]$. No hay pérdida de generalidad en suponer que la constante de estructura $E^1_{\frac{m-1}{2}, \frac{m-1}{2}} = 1$. Así, por inducción, se tendrían los siguientes productos:

$$[Y_{\frac{m-1-2i}{2}}, Y_{\frac{m-1+2i}{2}}] = (-1)^i X_1 + \Psi_{\frac{m-1-2i}{2}}(X_2, \dots, X_{n-1}), \quad 0 \leq i \leq \frac{m-3}{2}$$

• De $J_g(X_0, Y_{\frac{m-1}{2}}, Y_{\frac{m-1}{2}})$ se tiene que $[Y_{\frac{m-1}{2}}, Y_{\frac{m+1}{2}}] = \frac{1}{2}X_2 + \frac{1}{2}\Psi_{\frac{m-1}{2}}(X_3, \ldots, X_{n-1})$.

• De $J_g(X_0, Y_{\frac{m-3}{2}}, Y_{\frac{m+1}{2}})$ y junto con el paso anterior se tiene que la constante de estructura $E^2_{\frac{m-3}{2}, \frac{m+3}{2}} = -\frac{3}{2}$.

• De $J_g(X_0, Y_{\frac{m-5}{2}}, Y_{\frac{m+3}{2}})$ y junto con el paso anterior se tiene que la constante de estructura $E^2_{\frac{m-5}{2}, \frac{m+5}{2}} = \frac{5}{2}$.

• Así, por inducción, se llega al siguiente valor para la constante de estructura $E^2_{1,m-1} = (-1)^{\frac{m-3}{2}} \left(\frac{m-2}{2}\right)$ y, en general,

$$E^2_{i,m-i} = (-1)^{\frac{m-1}{2}-i} \left(\frac{m}{2} - i\right) \quad \text{para} \quad i = 1, 3, 5, \ldots, \frac{m-3}{2}, \frac{m-1}{2}.$$

En particular se ha obtenido que $X_2 \in [Y_1, Y_{m-1}]$ y de todos los productos $[Y_1, Y_j]$ tal que $X_1 \in [Y_1, Y_j]$ el que tiene mayor j es $[Y_1, Y_{m-2}]$. Con todo esto, y si se quiere que la superálgebra tenga nilíndice maximal $(n + m - 1)$, tiene que tener la siguiente sucesión central descendente

$$\begin{array}{ll}
\mathcal{C}^1(\mathfrak{g}) & =< X_1, X_2, \ldots, X_{n-1} > \oplus < Y_2, \ldots, Y_m > \\
\mathcal{C}^2(\mathfrak{g}) & =< X_1, X_2, \ldots, X_{n-1} > \oplus < Y_3, \ldots, Y_m > \\
 & \vdots \\
\mathcal{C}^{m-3}(\mathfrak{g}) & =< X_1, X_2, \ldots, X_{n-1} > \oplus < Y_{m-2}, Y_{m-1}, Y_m > \\
\mathcal{C}^{m-2}(\mathfrak{g}) & =< X_1, X_2, \ldots, X_{n-1} > \oplus < Y_{m-1}, Y_m > \\
\mathcal{C}^{m-1}(\mathfrak{g}) & =< X_2, \ldots, X_{n-1} > \oplus < Y_{m-1}, Y_m > \\
\mathcal{C}^{m}(\mathfrak{g}) & =< X_2, \ldots, X_{n-1} > \oplus < Y_m > \\
 & \vdots
\end{array}$$

con $Y_{j+1} \notin Im(adX_1, \ldots, adX_j)$, $1 \leq j \leq m-3$ e $Y_{m-1} \notin Im(adX_2, \ldots, adX_{n-1})$. En particular se tendría que $Im(adX_2, \ldots, adX_{n-1}) \cap \mathfrak{g}_1 \subset < Y_m >$

A continuación se analizan todas las posibilidades para que el vector $Y_{m-1} \in \mathcal{C}^{m-1}(\mathfrak{g})$ llegándose en cada una de ellas a contradicción con lo que quedaría cerrado este caso. Estas posibilidades son

$$[X_1, Y_1], [X_1, Y_2], \ldots, [X_1, Y_{m-2}]$$

– 1. $Y_{m-1} \in [X_1, Y_k]$ con $2 \leq k \leq m-2$, de $J_g(X_0, X_1, Y_{k-1})$ se tiene

$$[X_2, Y_{k-1}] = [X_0, [X_1, Y_{k-1}]] - [X_1, Y_k]$$

y como $[X_0, [X_1, Y_{k-1}]] \subset < Y_m >$ (ya que $Im(adX_1) \subset < Y_{m-1}, Y_m >$) se sigue que $Y_{m-1} \in Im(adX_2)$ lo que es una contradicción.

– 2. $Y_{m-1} \in [X_1, Y_1]$. Se distinguen a continuación dos casos:

- 2.1. Si $\frac{m-1}{2}$ es par, entonces de $J_g(Y_1, Y_{\frac{m-1}{2}}, Y_{\frac{m-1}{2}})$ se llega a que $[Y_1, [Y_{\frac{m-1}{2}}, Y_{\frac{m-1}{2}}]] + 2[Y_{\frac{m-1}{2}}, [Y_1, Y_{\frac{m-1}{2}}]] = 0$. Por el lema 3.3.6 se tiene que $[Y_1, Y_{\frac{m-1}{2}}] \subset < X_2, \ldots, X_{n-1} >$, y como $Im(adX_2, \ldots, adX_{n-1}) \subset < Y_m >$, se sigue que $[Y_{\frac{m-1}{2}}, [Y_1, Y_{\frac{m-1}{2}}]] \subset < Y_m >$. Pero como estamos en el caso $X_1 \in [Y_{\frac{m-1}{2}}, Y_{\frac{m-1}{2}}]$ se tiene que $Y_{m-1} \in [Y_1, [Y_{\frac{m-1}{2}}, Y_{\frac{m-1}{2}}]]$ llegando por tanto a contradicción.

- 2.2. Si $\frac{m-1}{2}$ es impar, entonces de $J_g(Y_1, Y_{\frac{m-3}{2}}, Y_{\frac{m+1}{2}})$ se llega a que

$$[Y_1, [Y_{\frac{m-3}{2}}, Y_{\frac{m+1}{2}}]] + [Y_{\frac{m+1}{2}}, [Y_1, Y_{\frac{m-3}{2}}]] + [Y_{\frac{m-3}{2}}, [Y_1, Y_{\frac{m+1}{2}}]] = 0$$

análogamente al caso anterior se prueba que $[Y_{\frac{m+1}{2}}, [Y_1, Y_{\frac{m-3}{2}}]] \subset < Y_m >$ y $[Y_{\frac{m-3}{2}}, [Y_1, Y_{\frac{m+1}{2}}]] \subset < Y_m >$, pero $[Y_{\frac{m-3}{2}}, Y_{\frac{m+1}{2}}] = -X_1 + \Psi_{\frac{m-3}{2}}(X_2, \ldots, X_{n-1})$ de donde se sigue que $Y_{m-1} \in [Y_1, [Y_{\frac{m-3}{2}}, Y_{\frac{m+1}{2}}]]$ llegando nuevamente a contradicción.

Se prueba por tanto que para $X_1 \in [Y_{\frac{m-1}{2}}, Y_{\frac{m-1}{2}}]$ no existe niguna superálgebra de Lie filiforme con nilíndice $n+m-1$.

$\star$ $\underline{X_1 \in [Y_k, Y_k]}$ con $2 \leq k \leq \frac{m-3}{2}$.

Se supone que $X_1 \notin [Y_l, Y_l]$ para $l > k$ ya que en tal caso la demostración se haría según el caso $X_1 \in [Y_l, Y_l]$.

En este caso no hay pérdida de generalidad en suponer $E^1_{kk} = 1$, luego quedan los productos

$$[Y_{k-i}, Y_{k+i}] = (-1)^i X_1 + \Psi_{k-i}(X_2, \ldots, X_{n-1}), \quad 0 \leq i \leq k-1$$

• De $J_g(X_0, Y_k, Y_k)$ se tiene que $[Y_k, Y_{k+1}] = \frac{1}{2}X_2 + \frac{1}{2}\Psi_k(X_3, \ldots, X_{n-1})$.

• De $J_g(X_0, Y_{k-1}, Y_{k+1})$ y junto con el paso anterior se tiene que la constante de estructura $E^2_{k-1,k+2} = -\frac{3}{2}$.

• De $J_g(X_0, Y_{k-2}, Y_{k+2})$ y junto con el paso anterior se tiene que la constante de estructura $E^2_{k-2,k+3} = \frac{5}{2}$.

• Así, por inducción, se llega al siguiente valor para la constante de estructura $E^2_{1,2k} = (-1)^{k-1}\left(\frac{2k-1}{2}\right)$ y, en general,

$$E^2_{i,2k+1-i} = (-1)^{k-i}\left(\frac{2k+1}{2} - i\right) \quad \text{para} \quad i = 1, 2, \ldots, k-1, k.$$

En particular, se ha obtenido que $X_2 \in [Y_1, Y_{2k}]$ y de todos los productos $[Y_1, Y_j]$ tal que $X_1 \in [Y_1, Y_j]$ el que tiene mayor j es $[Y_1, Y_{2k-1}]$. Con todo esto, y si se quiere que la superálgebra tenga nilíndice maximal $(n + m - 1)$ se tiene que tener la siguiente sucesión central descendente

$$\begin{array}{ll}
\mathcal{C}^1(\mathfrak{g}) & =< X_1, X_2, \ldots, X_{n-1} > \oplus < Y_2, \ldots, Y_m > \\
\mathcal{C}^2(\mathfrak{g}) & =< X_1, X_2, \ldots, X_{n-1} > \oplus < Y_3, \ldots, Y_m > \\
 & \vdots \\
\mathcal{C}^{2k-2}(\mathfrak{g}) & =< X_1, X_2, \ldots, X_{n-1} > \oplus < Y_{2k-1}, \ldots, Y_m > \\
\mathcal{C}^{2k-1}(\mathfrak{g}) & =< X_1, X_2, \ldots, X_{n-1} > \oplus < Y_{2k}, \ldots, Y_m > \\
\mathcal{C}^{2k}(\mathfrak{g}) & =< X_2, \ldots, X_{n-1} > \oplus < Y_{2k}, \ldots, Y_m > \\
\mathcal{C}^{m}(\mathfrak{g}) & =< X_2, \ldots, X_{n-1} > \oplus < Y_{2k+1}, \ldots, Y_m > \\
 & \vdots
\end{array}$$

con $Y_j \notin Im(adX_1, \ldots, adX_{n-1})$, $2 \leq j \leq 2k-1$ e $Y_{2k} \notin Im(adX_2, \ldots, adX_{n-1})$. En particular se tendría que $Im(adX_2, \ldots, adX_{n-1}) \cap \mathfrak{g}_1 \subset < Y_{2k+1}, \ldots, Y_m >$.

A continuación se analizan todas las posibilidades para que $Y_{2k} \in \mathcal{C}^{2k}(\mathfrak{g})$ llegándose en cada una de ellas a contradicción con lo que quedaría cerrado este caso. Estas posibilidades son

$$[X_1, Y_1], [X_1, Y_2], \ldots, [X_1, Y_{2k-1}]$$

– 1. $Y_{2k} \in [X_1, Y_l]$ con $2 \leq l \leq 2k-1$, de $J_g(X_0, X_1, Y_{l-1})$ se tiene que

$$[X_2, Y_{l-1}] = [X_0, [X_1, Y_{l-1}]] - [X_1, Y_l]$$

y como $[X_0, [X_1, Y_{l-1}]] \subset < Y_{2k+1}, \ldots, Y_m >$ (ya que $Im(adX_1) \subset < Y_{2k}, \ldots, Y_m >$) se sigue que $Y_{2k} \in Im(adX_2)$ lo que es una contradicción.

– 2. $Y_{2k} \in [X_1, Y_1]$. Se distinguen a continuación dos casos:

- 2.1. Si k es par, entonces de $J_g(Y_1, Y_k, Y_k)$ se llega a que $[Y_1, [Y_k, Y_k]] + +2[Y_k, [Y_1, Y_k]] = 0$. Por el lema 3.3.6 $[Y_1, Y_k] \subset < X_2, \ldots, X_{n-1} >$, y como $Im(adX_2, \ldots, adX_{n-1}) \cap \mathfrak{g}_1 \subset < Y_{2k+1}, \ldots, Y_m >$, se sigue que el producto $[Y_k, [Y_1, Y_k]] \subset < Y_{2k+1}, \ldots, Y_m >$. Pero como estamos en el caso $X_1 \in [Y_k, Y_k]$ se tiene que $Y_{2k} \in [Y_1, [Y_k, Y_k]]$ llegando por tanto a contradicción.

- 2.2. Si k es impar. De $J_g(Y_1, Y_{k-1}, Y_{k+1})$ se tiene que

$$[Y_1, [Y_{k-1}, Y_{k+1}]] + [Y_{k+1}, [Y_1, Y_{k-1}]] + [Y_{k-1}, [Y_1, Y_{k+1}]] = 0$$

análogamente al caso anterior se llega a $[Y_{k-1}, [Y_1, Y_{k+1}]] \subset < Y_{2k+1}, \ldots, Y_m >$ y $[Y_{k+1}, [Y_1, Y_{k-1}]] \subset < Y_{2k+1}, \ldots, Y_m >$, pero como $[Y_{k-1}, Y_{k+1}] = -X_1 + +\Psi_{k-1}(X_2, \ldots, X_{n-1})$ se sigue que $Y_{2k} \in [Y_1, [Y_{k-1}, Y_{k+1}]]$ llegando nuevamente a contradicción.

Se ha probado, por tanto, que si $X_1 \in [Y_k, Y_k]$ con $2 \leq k \leq \frac{m-3}{2}$ no existe niguna superálgebra de Lie filiforme con nilíndice $n + m - 1$.

$\star$ $\underline{X_1 \in [Y_1, Y_1]}$ La demostración que sigue también es extensible al caso m par. Si la única constante de estructura de la forma E^1_{ij} distinta de cero es E^1_{11} y se quiere que la superálgebra tenga nilíndice $(n + m - 1)$ se tiene la siguiente sucesión central descendente

$$\begin{aligned} \mathcal{C}^1(\mathfrak{g}) &= < X_1, X_2, \ldots, X_{n-1} > \oplus < Y_2, \ldots, Y_m > \\ \mathcal{C}^2(\mathfrak{g}) &= < X_2, \ldots, X_{n-1} > \oplus < Y_2, Y_3, \ldots, Y_m > \\ &\vdots \end{aligned}$$

y la única posibilidad para que $Y_2 \in \mathcal{C}^2(\mathfrak{g})$ es $Y_2 \in [X_1, Y_1]$, hecho que es incompatible con $X_1 \in [Y_1, Y_1]$ sin más que tener en cuenta $J_g(Y_1, Y_1, Y_1)$ (pues $Y_2 \in 3[Y_1, [Y_1, Y_1]] = J_g(Y_1, Y_1, Y_1) = 0$).

Así pues, se ha probado que si X_1 pertenece sólo al producto $[Y_1, Y_1]$ el nilíndice de la superálgebra es $\leq n+m-2$.

Caso n$\geq$ 3 y m par

Gracias a la nota 3.3.3 y a los Jacobis sólo hay que estudiar si X_1 pertenece o no a los productos: $[Y_1, Y_1], [Y_2, Y_2], \ldots, [Y_{\frac{m}{2}}, Y_{\frac{m}{2}}]$.

$\star$ $\underline{X_1 \in [Y_{\frac{m}{2}}, Y_{\frac{m}{2}}]}$ No hay pérdida de generalidad en suponer que la constante de estructura $E^1_{\frac{m}{2},\frac{m}{2}} = 1$. Así, por inducción, y siguiendo un procedimiento análogo al caso m impar se tendrían los siguientes productos:

$$[Y_{\frac{m-2i}{2}}, Y_{\frac{m+2i}{2}}] = (-1)^i X_1 + \Psi_{\frac{m-2i}{2}}(X_2, \ldots, X_{n-1}), \quad 0 \leq i \leq \frac{m-2}{2}$$

• De $J_g(X_0, Y_{\frac{m}{2}}, Y_{\frac{m}{2}})$ se tiene que $[Y_{\frac{m}{2}}, Y_{\frac{m+2}{2}}] = \frac{1}{2}X_2 + \frac{1}{2}\Psi_{\frac{m}{2}}(X_3, \ldots, X_{n-1})$.

• De $J_g(X_0, Y_{\frac{m-2}{2}}, Y_{\frac{m+2}{2}})$ y junto con el paso anterior se tiene que la constante de estructura $E^2_{\frac{m-2}{2},\frac{m+4}{2}} = -\frac{3}{2}$.

• Así, por inducción, se llega al siguiente valor para la constante de estructura $E^2_{1,m} = (-1)^{\frac{m-2}{2}} \left(\frac{m-1}{2}\right)$ y, en general,

$$E^2_{i,m+1-i} = (-1)^{\frac{m}{2}-i}\left(\frac{m+1}{2} - i\right) \quad \text{para} \quad i = 1, 2, \ldots, \frac{m-2}{2}, \frac{m}{2}.$$

En particular se ha obtenido que $X_2 \in [Y_1, Y_m]$ y de todos los productos $[Y_1, Y_j]$ tal que $X_1 \in [Y_1, Y_j]$ el que tiene mayor j es $[Y_1, Y_{m-1}]$. Con todo esto, y si se quiere que la superálgebra tenga nilíndice maximal $(n+m-1)$ se tiene que tener la siguiente sucesión central descendente

$$\begin{aligned}
\mathcal{C}^1(\mathfrak{g}) &= < X_1, X_2, \ldots, X_{n-1} > \oplus < Y_2, \ldots, Y_m > \\
\mathcal{C}^2(\mathfrak{g}) &= < X_1, X_2, \ldots, X_{n-1} > \oplus < Y_3, \ldots, Y_m > \\
&\vdots
\end{aligned}$$

$$\begin{array}{ll} & \vdots \\ \mathcal{C}^{m-2}(\mathfrak{g}) & =< X_1, X_2, \ldots, X_{n-1} > \oplus < Y_{m-1}, Y_m > \\ \mathcal{C}^{m-1}(\mathfrak{g}) & =< X_1, X_2, \ldots, X_{n-1} > \oplus < Y_m > \\ \mathcal{C}^{m}(\mathfrak{g}) & =< X_2, \ldots, X_{n-1} > \oplus < Y_m > \\ \mathcal{C}^{m+1}(\mathfrak{g}) & =< X_2, \ldots, X_{n-1} > \oplus < 0 > \\ & \vdots \end{array}$$

con $Y_j \notin Im(adX_1, \ldots, adX_{n-1})$, $2 \leq j \leq m-1$ e $Y_m \notin Im(adX_2, \ldots, adX_{n-1})$. En particular se tendría que $Im(adX_2, \ldots, adX_{n-1}) \cap \mathfrak{g}_1 \subset< 0 >$

A continuación se analizan todas las posibilidades para que $Y_m \in \mathcal{C}^m(\mathfrak{g})$ llegándose en cada una de ellas a contradicción con lo que quedaría cerrado este caso. Éstas posibilidades son

$$[X_1, Y_1], [X_1, Y_2], \ldots, [X_1, Y_{m-1}]$$

– 1. $Y_{m-1} \in [X_1, Y_k]$ con $2 \leq k \leq m-1$, de $J_g(X_0, X_1, Y_{k-1})$ se tiene que

$$[X_2, Y_{k-1}] = [X_0, [X_1, Y_{k-1}]] - [X_1, Y_k]$$

y como $[X_0, [X_1, Y_{k-1}]] \subset< 0 >$ (ya que $Im(adX_1) \cap \mathfrak{g}_1 \subset< Y_m >$) se sigue que $Y_m \in Im(adX_2)$ lo que es una contradicción.

– 2. $Y_m \in [X_1, Y_1]$. Se distinguen a continuación dos casos:

- 2.1. Si $\frac{m}{2}$ es par, entonces de $J_g(Y_1, Y_{\frac{m}{2}}, Y_{\frac{m}{2}})$ se llega a que $[Y_1, [Y_{\frac{m}{2}}, Y_{\frac{m}{2}}]] + 2[Y_{\frac{m}{2}}, [Y_1, Y_{\frac{m}{2}}]] = 0$. Por el lema 3.3.6 se tiene $[Y_1, Y_{\frac{m}{2}}] \subset< X_2, \ldots, X_{n-1} >$, y como $Im(adX_2, \ldots, adX_{n-1}) \cap \mathfrak{g}_1 \subset< 0 >$, se sigue que $[Y_{\frac{m}{2}}, [Y_1, Y_{\frac{m}{2}}]] = 0$. Pero como estamos en el caso $X_1 \in [Y_{\frac{m}{2}}, Y_{\frac{m}{2}}]$ se tiene que $Y_m \in [Y_1, [Y_{\frac{m}{2}}, Y_{\frac{m}{2}}]]$ llegando por tanto a contradicción.

- 2.2. Si $\frac{m}{2}$ es impar, entonces de $J_g(Y_1, Y_{\frac{m-2}{2}}, Y_{\frac{m+2}{2}})$ se llega a que

$$[Y_1, [Y_{\frac{m-2}{2}}, Y_{\frac{m+2}{2}}]] + [Y_{\frac{m+2}{2}}, [Y_1, Y_{\frac{m-2}{2}}]] + [Y_{\frac{m-2}{2}}, [Y_1, Y_{\frac{m+2}{2}}]] = 0$$

de forma análoga al caso anterior se prueba que $[Y_{\frac{m+2}{2}}, [Y_1, Y_{\frac{m-2}{2}}]] = 0$ y $[Y_{\frac{m-2}{2}}, [Y_1, Y_{\frac{m+2}{2}}]] = 0$, pero como $[Y_{\frac{m-2}{2}}, Y_{\frac{m+2}{2}}] = -X_1 + \Psi_{\frac{m-2}{2}}(X_2, \ldots, X_{n-1})$ se sigue que $Y_m \in [Y_1, [Y_{\frac{m-2}{2}}, Y_{\frac{m+2}{2}}]]$ llegando nuevamente a contradicción.

Se ha probado, por tanto, que para $X_1 \in [Y_{\frac{m}{2}}, Y_{\frac{m}{2}}]$ no existe niguna superálgebra de Lie filiforme con nilíndice $n+m-1$.

$\star$ $\underline{X_1 \in [Y_k, Y_k]}$ con $2 \leq k \leq \frac{m-2}{2}$. Este caso es totalmente análogo al equivalente con m impar.

$\star$ $\underline{X_1 \in [Y_1, Y_1]}$ Este caso, al igual que el anterior, es totalmente análogo al equivalente con m impar.

Con esto se concluye este caso.

Caso n=2 y m par

En este caso se tienen S.A.L. filiformes $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1$ con $dim(\mathfrak{g}_0) = 2$ y $dim(\mathfrak{g}_1) = m$ con m par, admitiendo bases adaptadas $\{X_0, X_1, Y_1, \ldots, Y_m\}$. Este caso es sensiblemente diferente a los anteriores ya que no existe el vector X_2. Gracias a la nota 3.3.3 y a los Jacobis sólo hay que estudiar si X_1 pertenece o no a los siguientes productos:

$$[Y_1, Y_1], [Y_2, Y_2], \ldots, [Y_{\frac{m}{2}}, Y_{\frac{m}{2}}]$$

$\star$ $\underline{X_1 \in [Y_k, Y_k]}$ con $2 \leq k \leq \frac{m}{2}$.

En este caso no hay pérdida de generalidad en suponer $E_{kk}^1 = 1$, luego quedan los productos

$$[Y_{k-i}, Y_{k+i}] = (-1)^i X_1, \quad 0 \leq i \leq k-1$$

Si se quiere que la superálgebra tenga nilíndice maximal $(n+m-1)$ se tiene la siguiente sucesión central descendente

$$\begin{array}{ll}
\mathcal{C}^1(\mathfrak{g}) & =< X_1 > \oplus < Y_2, \ldots, Y_m > \\
\mathcal{C}^2(\mathfrak{g}) & =< X_1 > \oplus < Y_3, \ldots, Y_m > \\
 & \vdots \\
\mathcal{C}^{2k-2}(\mathfrak{g}) & =< X_1 > \oplus < Y_{2k-1}, \ldots, Y_m > \\
\mathcal{C}^{2k-1}(\mathfrak{g}) & =< X_1 > \oplus < Y_{2k}, \ldots, Y_m > \\
\mathcal{C}^{2k}(\mathfrak{g}) & =< 0 > \oplus < Y_{2k}, \ldots, Y_m > \\
\mathcal{C}^{2k+1}(\mathfrak{g}) & =< 0 > \oplus < Y_{2k+1}, \ldots, Y_m > \\
 & \vdots
\end{array}$$

con $Y_j \notin Im(adX_1)$ para $2 \leq j \leq 2k-1$. A continuación se analizan todas las posibilidades para que $Y_{2k} \in \mathcal{C}^{2k}(\mathfrak{g})$ llegándose en cada una de ellas a contradicción con lo que quedaría cerrado este caso. Éstas posibilidades son

$$[X_1, Y_1], [X_1, Y_2], \ldots, [X_1, Y_{2k-1}]$$

– 1. $Y_{2k} \in [X_1, Y_l]$ con $2 \leq l \leq 2k-1$, de $J_g(X_0, X_1, Y_{l-1})$ se tiene que

$$[X_0, [X_1, Y_{l-1}]] = [X_1, Y_l]$$

de donde se llegaría a $Y_{2k-1} \in [X_1, Y_{l-1}]$, lo que es una contradicción, ya que $Y_{2k-1} \notin Im(adX_1)$.

– 2. $Y_{2k} \in [X_1, Y_1]$. Se distinguen a continuación dos casos:

- 2.1. Si k es par, entonces de $J_g(Y_1, Y_k, Y_k)$ se llega a que $[Y_1, [Y_k, Y_k]] +$ $+2[Y_k, [Y_1, Y_k]] = 0$. Por el lema 3.3.6 se tiene que $[Y_1, Y_k] = 0$ pero como estamos en el caso $X_1 \in [Y_k, Y_k]$ se tiene que $Y_{2k} \in [Y_1, [Y_k, Y_k]]$ llegando por tanto a contradicción.

- 2.2. Si k es impar. De $J_g(Y_1, Y_{k-1}, Y_{k+1})$ se tiene que

$$[Y_1, [Y_{k-1}, Y_{k+1}]] + [Y_{k+1}, [Y_1, Y_{k-1}]] + [Y_{k-1}, [Y_1, Y_{k+1}]] = 0$$

de forma análoga al caso anterior se prueba que $[Y_{k+1}, [Y_1, Y_{k-1}]] = 0$ y $[Y_{k-1}, [Y_1, Y_{k+1}]] = 0$, pero como $[Y_{k-1}, Y_{k+1}] = -X_1$ se sigue que el vector $Y_{2k} \in [Y_1, [Y_{k-1}, Y_{k+1}]]$ llegando nuevamente a contradicción.

Se ha probado, por tanto, que para $X_1 \in [Y_k, Y_k]$ no existe niguna superálgebra de Lie filiforme con nilíndice $n + m - 1$.

$\star$ $\underline{X_1 \in [Y_1, Y_1]}$ Es totalmente análogo al del caso m impar.

Con esto se concluye este caso y la demostración del teorema ya que el único caso no estudiado sería $n = 2$ y m impar (en el resto de los casos se ha probado que nunca se obtiene nilíndice $n + m - 1$). Para $n = 2$ y m impar sí existen S.A.L. filiformes con nilíndice $n + m - 1$ según se vió en el teorema de existencia. $\square$

Lema 3.3.8 *Sea* $\mathfrak{g} \in \mathcal{F}^{2+m}$ *con* m *impar y sea* $\{X_0, X_1, Y_1, \ldots, Y_m\}$ *una base adaptada de* $\mathfrak{g}$. *Si la constante de estructura* $E_{1m}^1 \neq 0$ *entonces* $\mathfrak{g}$ *pertenece a la siguiente familia de S.A.L filiformes* $\mu(\alpha_1, \ldots, \alpha_{\frac{m-1}{2}})$ *que viene dada por*

$$\begin{cases} [X_0, Y_i] = Y_{i+1} & 1 \leq i \leq m-1 \\ [Y_i, Y_{m+1-i}] = (-1)^{i+1} X_1 & 1 \leq i \leq \frac{m+1}{2} \\ [Y_i, Y_{2k-i}] = (-1)^{i+1} \alpha_k X_1 & 1 \leq i \leq k, 1 \leq k \leq \frac{m-1}{2} \end{cases}$$

con $\alpha_k \in \mathbb{C}$ *para* $1 \leq k \leq \dfrac{m-1}{2}$.

Demostración: Sea $\mathfrak{g}$ en las condiciones del lema y de base adaptada $\{X_0, X_1, Y_1, \ldots, Y_m\}$. Si $E_{1m}^1 \neq 0$ no hay pérdida de generalidad en suponerla 1 (mediante un sencillo cambio de escala $X_1' = E_{1m}^1 X_1$), así se tiene el producto $[Y_1, Y_m] = X_1$. Con todo esto la sucesión central descendente será

$$\begin{array}{ll} \mathcal{C}^1(\mathfrak{g}) & =< X_1 > \oplus < Y_2, \ldots, Y_m > \\ \mathcal{C}^2(\mathfrak{g}) & =< X_1 > \oplus < Y_3, \ldots, Y_m > \\ & \vdots \\ \mathcal{C}^{m-2}(\mathfrak{g}) & =< X_1 > \oplus < Y_{m-1}, Y_m > \\ \mathcal{C}^{m-1}(\mathfrak{g}) & =< X_1 > \oplus < Y_m > \\ \mathcal{C}^{m}(\mathfrak{g}) & =< X_1 > \oplus < 0 > \\ \mathcal{C}^{m+1}(\mathfrak{g}) & =< 0 > \oplus < 0 > \\ & \vdots \end{array}$$

de donde se sigue que $Y_j \notin Im(adX_1)$ con $2 \leq j \leq m$, es decir, $[X_1, Y_i] = 0$ $\forall i$ $(1 \leq i \leq m)$. Por lo tanto sólo resta conocer el resto de productos de la forma $[Y_i, Y_j]$.

- De $J_g(X_0, Y_1, Y_{m-1})$ se obtiene $[Y_2, Y_{m-1}] = -X_1$.
- De $J_g(X_0, Y_2, Y_{m-2})$ se obtiene $[Y_3, Y_{m-2}] = X_1$.
- Así por inducción de $J_g(X_0, Y_i, Y_{m-i})$ para $1 \leq i \leq \frac{m-1}{2}$ se obtiene

$$[Y_i, Y_j] = (-1)^{i+1} X_1 \quad \text{si } i + j = m + 1, \ i \leq j$$

o lo que es lo mismo

$$[Y_i, Y_{m+1-i}] = (-1)^{i+1} X_1, \quad 1 \leq i \leq \frac{m+1}{2}$$

• De $J_g(X_0, Y_i, Y_i)$ para $1 \leq i \leq m-1$ se sigue que $[Y_i, Y_{i+1}] = 0$. Mediante Jacobis y utilizando un procedimiento análogo al anterior se obtiene que también son nulos todos los productos $[Y_j, Y_k]$ con $j+k$ impar (las posibilidades para $j+k$ son $3 \leq j+k \leq 2m-1$ que son todas las posibilidades para $2i+1$).

• De $J_g(X_0, Y_i, Y_m)$ para $1 \leq i \leq m-1$ se sigue que $[Y_{i+1}, Y_m] = 0$. Nuevamente mediante Jacobis y utilizando un procedimiento análogo al anterior se obtiene que también son nulos todos los productos cuyos índices sumen $i+1+m$, es decir $[Y_j, Y_k] = 0$ con $j+k$ par (los impares ya han sido contemplados en el punto anterior) y $m+3 \leq j+k \leq 2m$ (que son todas las posibilidades pares de $i+1+m$).

• Falta ver los productos $[Y_i, Y_j]$ con $i+j$ par y $2 \leq i+j \leq m-1$. Mediante los Jacobis que restan se obtienen relaciones entre los productos cuyo sumatorio de subíndices coincida, en particular se tiene que

$$[Y_i, Y_j] = (-1)^{i+1} \alpha_{\frac{i+j}{2}} X_1 \quad \text{si } i+j \text{ es par }, \ 2 \leq i+j \leq m-1, \ i \leq j$$

es decir

$$[Y_i, Y_{2k-i}] = (-1)^{i+1} \alpha_k X_1, \quad 1 \leq i \leq k, 1 \leq k \leq \frac{m-1}{2}$$

Con esto se concluye la demostración del lema. □

Nota 3.3.5 La familia de S.A.L. filfiformes $\mu(\alpha_1, \ldots, \alpha_{\frac{m-1}{2}})$ dentro de la variedad algebraica $\mathcal{F}^{2+m}$ con m impar es un **abierto** para la topología de Zariski ya que está determinado por $E^1_{1m} \neq 0$.

Nota 3.3.6 En la familia del lema anterior, y para cada m, si todos los parámetros son nulos, $\alpha_k = 0$ para $1 \leq k \leq \frac{m-1}{2}$, se obtiene la S.A.L. filiforme $K^{2,m}$.

Lema 3.3.9 *Para cada m impar, la familia $\left(\frac{m-1}{2}\right)$ −paramétrica $\mu(\alpha_1, \ldots, \alpha_{\frac{m-1}{2}})$ está contenida en la órbita de la superálgebra $K^{2,m}$.*

$$\mu(\alpha_1, \ldots, \alpha_{\frac{m-1}{2}}) \subseteq \mathcal{O}(K^{2,m})$$

Demostración: Hay que probar que cualquier $\mathfrak{g} \in \mu(\alpha_1, \ldots, \alpha_{\frac{m-1}{2}})$ es isomorfa a $K^{2,m}$.

Sea, por tanto $\mathfrak{g} \in \mu(\alpha_1, \ldots, \alpha_{\frac{m-1}{2}})$. Para probar que $\mathfrak{g}$ es isomorfa a $K^{2,m}$ se hace en $\mathfrak{g}$ un cambio de base genérico en la parte impar (cambiando las Y) y se observa que mediante una elección adecuada de los parámetros del cambio de base se pueden suponer nulos los α_i para $1 \leq i \leq \frac{m-1}{2}$ obteniendo por tanto, mediante un isomorfismo, la familia de superálgebras $K^{2,m}$. Luego sea $\mathfrak{g}$ tal que

$$\begin{cases} [X_0, Y_i] = Y_{i+1} & 1 \leq i \leq m-1 \\ [Y_i, Y_{m+1-i}] = (-1)^{i+1} X_1 & 1 \leq i \leq \frac{m+1}{2} \\ [Y_i, Y_{2k-i}] = (-1)^{i+1} \alpha_k X_1 & 1 \leq i \leq k, 1 \leq k \leq \frac{m-1}{2} \end{cases}$$

con $\alpha_k \in \mathbb{C}$ para $1 \leq k \leq \dfrac{m-1}{2}$.

Se considera en $\mathfrak{g}$ el siguiente cambio de base

$$\begin{cases} X_0' = X_0 & \\ X_1' = a_1^2 X_1 & a_1 \neq 0 \\ Y_1' = \displaystyle\sum_{i=1}^{m} a_i Y_i & \\ Y_j' = [X_0', Y_{j-1}'] = \displaystyle\sum_{i=1}^{m-j+1} a_i Y_{i+j-1}, & 2 \leq j \leq m \end{cases}$$

donde en principio hay $m-1$ parámetros libres a_i para $2 \leq i \leq m$. Por la elección del cambio de base se verifica

$$[Y_i', Y_{m+1-i}'] = (-1)^{i+1} X_1', \quad 1 \leq i \leq \frac{m+1}{2}$$

lo que coincide con la forma inicial de $\mathfrak{g}$, es decir, la nueva constante de estructura E^1_{1m} sigue siendo 1.

• A continuación se consideran los productos

$$[Y_i, Y_{m-1-i}] = (-1)^{i+1}\alpha_{\frac{m-1}{2}}X_1, \quad 1 \leq i \leq \frac{m-1}{2}$$

para calcular el nuevo valor de la constante de estructura $\alpha_{\frac{m-1}{2}}$ tras el cambio de base, $\alpha'_{\frac{m-1}{2}}$, se toma un producto en concreto (del resto se obtendría el mismo valor), así:

$$[Y'_1, Y'_{m-2}] = [a_1Y_1 + \ldots + a_mY_m, a_1Y_{m-2} + a_2Y_{m-1} + a_3Y_m] = \alpha'_{\frac{m-1}{2}}X'_1$$

al descomponer el producto anterior en sumas y tras sustituir y simplicar se observa que el coeficiente de a_2^2 es $[Y_2, Y_{m-1}] = -1$ por lo que $\alpha'_{\frac{m-1}{2}}$ puede ser considerado como un polinomio de segundo grado en la variable a_2 que tendrá, como tal, dos raíces complejas. Basta con asignar a a_2 el valor de una de las raíces anteriores para conseguir que $\alpha'_{\frac{m-1}{2}} = 0$.

• Repitiendo el mismo razonamiento para los productos

$$[Y_i, Y_{m-3-i}] = (-1)^{i+1}\alpha_{\frac{m-3}{2}}X_1, \quad 1 \leq i \leq \frac{m-3}{2}$$

se llega a que la nueva constante de estructura $\alpha'_{\frac{m-3}{2}}$ puede ser considerada como polinomio de segundo grado en la variable a_3 que tendrá, como tal, dos raíces complejas. Bastaría entonces con asignar a a_3 el valor de una de las raíces anteriores para conseguir $\alpha'_{\frac{m-3}{2}} = 0$.

• Así, por inducción, se llega a que las nuevas constantes de estructura α'_k para $1 \leq k \leq \frac{m-1}{2}$ pueden ser consideradas como polinomios de segundo grado en la variables $a_{\frac{m+3-2k}{2}}$ respectivamente. Cada uno de estos polinomios tiene dos raíces complejas. Basta entonces con asignar a cada $a_{\frac{m+3-2k}{2}}$ el valor de una de las raíces de su polinomio correspondiente para conseguir anular al mismo tiempo $\alpha'_1 = \alpha'_2 = \ldots = \alpha'_{\frac{m-1}{2}} = 0$ obteniéndose para cada m la superálgebra $K^{2,m}$.

Con esto se concluye la demostración del lema. □

Teorema 3.3.10 (de unicidad).
La única S.A.L. filiforme $\mathfrak{g} \in \mathcal{F}^{n+m}$, salvo isomorfismo, no trivial con nilíndice $n+m-1$ se presenta para $n=2$ y cada m impar, y es $K^{2,m}$.

Demostración: Gracias al Teorema de existencia, al Teorema de nilíndice maximal, y a los lemas 3.3.8, 3.3.9, lo único que resta probar es que si $n=2$ y m es impar y la constante de estructura $E^1_{1m}=0$ nunca se obtiene nilíndice $m+1$ $(=n+m-1)$.

Así, sea $\mathfrak{g} \in \mathcal{F}^{2+m}$ con m impar y de base adaptada $\{X_0, X_1, Y_1, \ldots, Y_m\}$, tal que $E^1_{1m}=0$, es decir $X_1 \notin [Y_1, Y_m]$. Se va a suponer que $\mathfrak{g}$ tiene nilíndice $m+1$ $(=n+m-1)$ y se va llegar a contradicción probándose así el resultado.

Gracias a la nota 3.3.4 sólo hay $\frac{m+1}{2}$ posibilidades para que $X_1 \in \mathcal{C}^1(\mathfrak{g})$ (condición indispensable para obtener nilíndice $m+1$ $(=n+m-1)$) y son

$$[Y_1, Y_1], [Y_2, Y_2], \ldots, [Y_{\frac{m+1}{2}}, Y_{\frac{m+1}{2}}]$$

El último caso ya está descartado al suponer que $X_1 \notin [Y_1, Y_m]$ (que es equivalente a $X_1 \notin [Y_{\frac{m+1}{2}}, Y_{\frac{m+1}{2}}]$). El primer caso también puede descartarse, ya que según se vio en la demostración del teorema de nilíndice maximal, si X_1 sólo pertenece a $[Y_1, Y_1]$ el nilíndice de la superálgebra es $\leq n+m-2$. Luego resta estudiar los casos $[Y_2, Y_2], \ldots, [Y_{\frac{m-1}{2}}, Y_{\frac{m-1}{2}}]$.

Sea $X_1 \in [Y_k, Y_k]$ con $2 \leq k \leq \frac{m-1}{2}$ tal que $X_1 \notin [Y_l, Y_l]$ con $l > k$. No hay pérdida de generalidad en suponer $E^1_{kk} = (-1)^{k+1}$, obteniéndose de la identidad de Jacobi graduada

$$[Y_i, Y_{2k-i}] = (-1)^{i+1} X_1, \quad 1 \leq i \leq k$$

de todos los productos de la forma $[Y_1, Y_j]$ en los que aparece X_1 el de mayor j es $[Y_1, Y_{2k-1}]$ luego se ha de tener la siguiente sucesión central descendente si se quiere tener nilíndice $m+1$ $(=n+m-1)$

$$\begin{array}{ll}
\mathcal{C}^1(\mathfrak{g}) & =< X_1 > \oplus < Y_2, \dots, Y_m > \\
\mathcal{C}^2(\mathfrak{g}) & =< X_1 > \oplus < Y_3, \dots, Y_m > \\
 & \vdots \\
\mathcal{C}^{2k-2}(\mathfrak{g}) & =< X_1 > \oplus < Y_{2k-1}, \dots, Y_m > \\
\mathcal{C}^{2k-1}(\mathfrak{g}) & =< X_1 > \oplus < Y_{2k}, \dots, Y_m > \\
\mathcal{C}^{2k}(\mathfrak{g}) & =< 0 > \oplus < Y_{2k}, \dots, Y_m > \\
\mathcal{C}^{2k+1}(\mathfrak{g}) & =< 0 > \oplus < Y_{2k+1}, \dots, Y_m >> \\
 & \vdots
\end{array}$$

con $Y_j \notin Im(adX_1)$ para $2 \le j \le 2k-1$. A continuación se analizan todas las posibilidades para que $Y_{2k} \in \mathcal{C}^{2k}(\mathfrak{g})$ llegándose en cada una de ellas a contradicción. Éstas posibilidades son

$$[X_1, Y_1], [X_1, Y_2], \dots, [X_1, Y_{2k-1}]$$

– 1. $Y_{2k} \in [X_1, Y_l]$ con $2 \le l \le 2k-1$, de $J_g(X_0, X_1, Y_{l-1})$ se tiene

$$[X_0, [X_1, Y_{l-1}]] = [X_1, Y_l]$$

de donde se llegaría a $Y_{2k-1} \in [X_1, Y_{l-1}]$ lo que es una contradicción ya que $Y_{2k-1} \notin Im(adX_1)$.

– 2. $Y_{2k} \in [X_1, Y_1]$. Se distinguen a continuación dos casos:

- 2.1. Si k es par, entonces de $J_g(Y_1, Y_k, Y_k)$ se llega a que $[Y_1, [Y_k, Y_k]]+$ $+2[Y_k, [Y_1, Y_k]] = 0$. Por el lema 3.3.6 se tiene que $[Y_1, Y_k] = 0$ pero como estamos en el caso $X_1 \in [Y_k, Y_k]$ se tiene que $Y_{2k} \in [Y_1, [Y_k, Y_k]]$ llegando por tanto a contradicción.

- 2.2. Si k es impar, entonces de $J_g(Y_1, Y_{k-1}, Y_{k+1})$ se llega a que

$$[Y_1, [Y_{k-1}, Y_{k+1}]] + [Y_{k+1}, [Y_1, Y_{k-1}]] + [Y_{k-1}, [Y_1, Y_{k+1}]] = 0$$

de forma análoga al caso anterior se prueba que $[Y_{k+1}, [Y_1, Y_{k-1}]] = 0$ y $[Y_{k-1}, [Y_1, Y_{k+1}]] = 0$, pero como $[Y_{k-1}, Y_{k+1}] = -X_1$ se sigue que el vector $Y_{2k} \in [Y_1, [Y_{k-1}, Y_{k+1}]]$ llegando nuevamente a contradicción.

Se prueba por tanto que para $X_1 \notin [Y_1, Y_m]$ no existe niguna superálgebra de Lie filiforme con nilíndice $n+m-1$. En particular, si $X_1 \notin [Y_1, Y_m]$ no existe niguna superálgebra de Lie filiforme que sea isomorfa a $K^{2,m}$. $\square$

Nota 3.3.7 Se ha probado que

$$\mu(\alpha_1, \ldots, \alpha_{\frac{m-1}{2}}) = \mathcal{O}(K^{2,m})$$

quedando totalmente determinada $\mathcal{O}(K^{2,m})$ que es un abierto para la topología de Zarisiki de $\mathcal{F}^{2+m}$ gracias a la nota 3.3.5.

3.3.3 Nilíndices maximales $\leq n+m-2$. Teoremas de existencia.

En las secciones anteriores se han estudiado las S.A.L. filiformes, $\mathfrak{g} \in \mathcal{F}^{n+m}$, de nilíndice $n+m-1$ que es el mayor posible, obteniéndose que este nilíndice sólo se alcanza para $n=2$ y m impar. Así para el resto de posibles dimensiones queda como el mayor nilíndice posible $n+m-2$.

A lo largo de esta sección se encontrarán pares de dimensiones n y m, distintas de $n=2$ y m impar, para los que se alcanza el nilíndice $n+m-2$ que sería el mayor posible en ese caso. Además se prueba que el nilíndice maximal para los casos $n \geq 2m+1$ es $n-1$.

Las S.A.L. que aparecen en los siguientes teoremas han sido fruto de numerosas operaciones y ensayos, similares a los que se hicieron para obtener la familia de S.A.L. $K^{2,m}$, operaciones que se han suprimido para hacer menos tedioso el trabajo y simplificar el estudio del nilíndice maximal.

Teorema 3.3.11 *Sea $\mathcal{F}^{n+m}$, la familia de superálgebras de Lie filiformes, y sea $f(n,m) = f(n,m)|_{\mathcal{F}^{n+m}}$ la función que da el nilíndice maximal para cada par de dimensiones (n,m). Entonces si el par (n,m) se encuentra en uno de* *los siguientes casos*

$$\begin{array}{rl} i) & n = 3, \ m \ impar \\ ii) & n \leq 4, \ m \ par \\ iii) & n = 4, \ m = 5 \end{array}$$

el nilíndice maximal $f(n,m)$ *es* $n + m - 2$.

Demostración: Gracias a las secciones anteriores bastará con encontrar al menos una S.A.L. filiforme con nilíndice $n + m - 2$ en cada uno de los casos anteriores.

Caso n=3 y m impar

Sea $K^{3,m} \in \mathcal{F}^{3+m}$ con m impar, de base adaptada $\{X_0, X_1, X_2, Y_1, Y_2, \ldots, Y_m\}$, tal que

$$\begin{cases} [X_0, X_1] = X_2 & \\ [X_0, Y_i] = Y_{i+1} & 1 \leq i \leq m-1 \\ [Y_i, Y_{m+1-i}] = (-1)^{i+1} X_2 & 1 \leq i \leq \dfrac{m+1}{2} \end{cases}$$

entonces, es una simple comprobación el hecho de que $K^{3,m}$ tenga nilíndice $m+1$ $(= n+m-2)$ y que sea realmente, para cada m, una S.A.L. filiforme. Se observa que $K^{3,m}$ es la generalización natural de $K^{2,m}$ para $n = 3$.

Caso n$\leq$ 4 y m par

Se recuerda que el caso $n = 1$ es siempre para las S.A.L. filiformes un caso escindido ya que se obtienen en realidad álgebras de Lie. Se distinguen a continuación tres subcasos:

Si $n = 2$ y m par Sin más que considerar la familia de superálgebras de Lie de base adaptada $\{X_0, X_1, Y_1, \ldots, Y_m\}$ y de productos no nulos

$$\begin{cases} [X_0, Y_i] = Y_{i+1} & 1 \leq i \leq m-1 \\ [Y_i, Y_{m-i}] = (-1)^{\frac{m-2i}{2}} X_1 & 1 \leq i \leq \dfrac{m}{2} \end{cases}$$

se obtiene una familia de S.A.L. de nilíndice m $(= n + m - 2)$. Esta familia de S.A.L. sería la "adaptación" de la familia $K^{2,m}$, con m impar, al caso m par.

Si $n = 3$ y m par Se considera la familia de superálgebras de Lie de base adaptada $\{X_0, X_1, X_2, Y_1, \ldots, Y_m\}$ y de productos no nulos

$$\begin{cases} [X_0, X_1] = X_2 & \\ [X_0, Y_i] = Y_{i+1} & 1 \le i \le m-1 \\ [Y_i, Y_{m-i}] = (-1)^{\frac{m-2i}{2}} X_1 & 1 \le i \le \frac{m}{2} \\ [Y_i, Y_{m+1-i}] = (-1)^{\frac{m-2i}{2}} \left(\dfrac{m-2i+1}{2}\right) X_2 & 1 \le i \le \frac{m}{2} \end{cases}$$

Es una simple comprobación ver que efectivamente es una S.A.L. de nilíndice $m + 1$ $(= n + m - 2)$.

Si $n = 4$ y m par Se considera la familia de superálgebras de Lie de base adaptada $\{X_0, X_1, X_2, X_3, Y_1, \ldots, Y_m\}$ y de productos no nulos

$$\begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1} & 1 \le i \le 2 \\ [X_0, Y_i] = Y_{i+1} & 1 \le i \le m-1 \\ [Y_i, Y_{m-i}] = (-1)^{\frac{m-2i}{2}} X_1 & 1 \le i \le \frac{m}{2} \\ [Y_i, Y_{m+1-i}] = (-1)^{\frac{m-2i}{2}} \left(\dfrac{m-2i+1}{2}\right) X_2 & 1 \le i \le \frac{m}{2} \\ [Y_i, Y_{m+2-i}] = (-1)^{\frac{m-2i+2}{2}} \left(\dfrac{(i-1)m-(i-1)^2}{2}\right) X_3 & 2 \le i \le \frac{m+2}{2} \end{cases}$$

Es una simple comprobación ver que efectivamente es una S.A.L. de nilíndice $m + 2$ $(= n + m - 2)$.

Caso $n = 4$ y $m = 5$

Se considera la superálgebra de Lie de base adaptada $\{X_0, X_1, X_2, X_3, Y_1, \ldots, Y_5\}$

y de productos no nulos

$$\begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1} & 1 \leq i \leq 2 \\ [X_0, Y_i] = Y_{i+1} & 1 \leq i \leq 4 \\ [X_1, Y_3] = Y_5 & \\ [X_2, Y_2] = -Y_5 & \\ [X_3, Y_1] = Y_5 & \\ [Y_1, Y_3] = -X_1 & \\ [Y_1, Y_4] = -\frac{3}{2}X_2 & \\ [Y_2, Y_2] = X_1 & \\ [Y_2, Y_3] = \frac{1}{2}X_2 & \\ [Y_2, Y_4] = -\frac{3}{2}X_3 & \\ [Y_3, Y_3] = 2X_3 & \end{cases}$$

Es una simple comprobación ver que efectivamente es una S.A.L. de nilíndice 7 $(= n + m - 2)$.

Con esto se concluye la demostración del teorema. $\square$

Nota 3.3.8 Se observa que en los casos anteriores la parte par $\mathfrak{g}_0$ es siempre el álgebra de Lie L_{n-1} (siguiendo la notación de [26]).

Teorema 3.3.12 *Sea $\mathcal{F}^{n+m}$, la familia de superálgebras de Lie filiformes, y sea $f(n,m) = f(n,m)|_{\mathcal{F}^{n+m}}$ la función que da el nilíndice maximal para cada par de dimensiones (n,m). Entonces se tiene lo siguiente*

$$m = 1 \begin{cases} n = 1 \longrightarrow f(1,1) = 2 & (\textit{ caso trivial }) \\ \\ n = 2 \longrightarrow f(2,1) = 2 & (n + m - 1) \\ \\ n \geq 3 \longrightarrow f(n,1) = n - 1 & (n + m - 2) \end{cases}$$

$$m=2\begin{cases} n=1 & \longrightarrow f(1,2)=2 & (\textit{ caso trivial })\\ 2\leq n\leq 4 & \longrightarrow f(n,2)=n & (n+m-2)\\ n\geq 5 & \longrightarrow f(n,2)=n-1 & (n+m-3)\end{cases}$$

$$m=3\begin{cases} n=1 & \longrightarrow f(1,3)=3 & (\textit{ caso trivial })\\ n=2 & \longrightarrow f(2,3)=4 & (n+m-1)\\ 3\leq n\leq 4 & \longrightarrow f(n,3)=n+1 & (n+m-2)\\ 5\leq n\leq 6\ ^* & \longrightarrow f(n,3)=n & (n+m-3)\\ n\geq 7 & \longrightarrow f(n,3)=n-1 & (n+m-4)\end{cases}$$

$$m=4\begin{cases} n=1 & \longrightarrow f(1,4)=4 & (\textit{ caso trivial })\\ 2\leq n\leq 4 & \longrightarrow f(n,4)=n+2 & (n+m-2)\\ 5\leq n\leq 6 & \longrightarrow f(n,4)=n+2 & (n+m-2)\\ 7\leq n\leq 8\ ^* & \longrightarrow f(n,4)=n & (n+m-4)\\ n\geq 9 & \longrightarrow f(n,4)=n-1 & (n+m-5)\end{cases}$$

$*$ *En estos casos además se encontrarán familias genéricas de S.A.L. filiformes con estos nilíndices.*

Demostración: Se distinguen cuatro casos:

Caso m=1

Para $n = 1$ y $n = 2$ ver la nota 3.3.1 y el teorema 3.4.1, respectivamente. Para $n \geq 3$ es una simple comprobación el hecho de que cualquier S.A.L. filiforme tiene nilíndice $n-1$ $(= n+m-2)$ por ser la parte par un álgebra de Lie filiforme.

En los siguientes casos para $n = 1$ es una simple comprobación el hecho de que cualquier superálgebra de Lie filiforme con base adaptada $\{X_0, Y_1, \ldots, Y_m\}$ $([X_0, Y_j] = Y_{j+1},\ 1 \leq j \leq m-1)$ tenga nilíndice m $(= n+m-1)$.

Caso m=2

Para los casos $2 \leq n \leq 4$ ver el teorema 3.3.11. Para $n \geq 5$ se tendrían S.A.L. filiformes $\mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1$ de base adaptada $\{X_0, X_1, \ldots, X_{n-1}, Y_1, Y_2\}$ con $\mathfrak{g}_0$ un álgebra de Lie filiforme y $[X_0, Y_1] = Y_2$. Se observa que siempre $E_{11}^1 = 0$ ya que en caso contrario de $J_g(X_0, Y_1, Y_1)$ y, posteriormente, de $J_g(X_0, Y_1, Y_2)$ se tendría que $E_{22}^3 \neq 0$, lo que estaría en contradicción con $J_g(X_0, Y_2, Y_2)$. Además, de este último Jacobi junto con los anteriores se obtendrían las siguientes condiciones

$$\begin{aligned}
&[Y_1, Y_1] \subseteq < X_{n-3}, X_{n-2}, X_{n-1} > \\
&[Y_1, Y_2] \subseteq < X_{n-2}, X_{n-1} > \\
&[Y_2, Y_2] \subseteq < X_{n-1} >
\end{aligned}$$

que darían la sucesión central descendente siguiente

$$\begin{array}{ll}
\mathcal{C}^1(\mathfrak{g}) & = < X_2, \ldots, X_{n-1} > \oplus < Y_2 > \\
\mathcal{C}^2(\mathfrak{g}) & = < X_3, \ldots, X_{n-1} > \oplus < 0 > \\
 & \vdots \\
\mathcal{C}^{n-2}(\mathfrak{g}) & = < X_{n-1} > \oplus < 0 > \\
\mathcal{C}^{n-1}(\mathfrak{g}) & = < 0 >
\end{array}$$

obteniéndose nilíndice $n-1$.

Caso m=3

Para el caso $n = 2$ ver el corolario 3.4.5 y el caso $n = 3$ está incluido en el teorema 3.3.11. Luego a continuación se estudiará el caso $n = 4$.

Si $n = 4$

Se considera la superálgebra de Lie filiforme $\mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1$ de base adaptada $\{X_0, X_1, X_2, X_3, Y_1, Y_2, Y_3\}$ y de productos no nulos

$$\begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1} & 1 \le i \le 2 \\ [X_0, Y_i] = Y_{i+1} & 1 \le i \le 2 \\ [X_1, X_2] = -X_3 \\ [X_1, Y_2] = -Y_3 \\ [X_2, Y_1] = Y_3 \\ [Y_1, Y_1] = X_1 \\ [Y_1, Y_2] = \frac{1}{2}X_2 \\ [Y_1, Y_3] = \frac{1}{2}X_3 \end{cases}$$

se observa que $\mathfrak{g}_0$ es isomorfa a L_3 sin más que considerar el siguiente cambio de base para $\mathfrak{g}_0$

$$\begin{cases} X_0' = -X_0 \\ X_1' = X_0 + X_1 \end{cases}$$

Es una simple comprobación el hecho de que efectivamente $\mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1$ sea una S.A.L., filiforme lo es por construcción, y de nilíndice 5 $(= n + m - 2)$.

Si $5 \le n \le 6$ Se estudiará, por simplicidad y analogía, sólo el caso $n = 6$, para obtener "formalmente" de éste el caso $n = 5$ sólo hay que sustituir el vector X_5 por el vector nulo, el resto se mantiene. Luego sea $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1$ una S.A.L. filiforme de base adaptada $\{X_0, X_1, \ldots, X_5, Y_1, Y_2, Y_3\}$ ($[X_0, X_i] = X_{i+1}$, $1 \le i \le 4$ y $[X_0, Y_j] = Y_{j+1}$, $1 \le j \le 2$). Si se sustituye la constante de estructura E_{11}^1 por λ y E_{11}^i por E_i para $2 \le i \le 5$ queda

$$[Y_1, Y_1] = \lambda X_1 + E_2X_2 + E_3X_3 + E_4X_4 + E_5X_5$$

De $J_g(X_0, Y_1, Y_1)$ se tiene $[Y_1, Y_2] = \frac{1}{2}(\lambda X_2 + E_2X_3 + E_3X_4 + E_4X_5)$, de $J_g(X_0, Y_1, Y_2)$ se obtiene la condición

$$\frac{1}{2}(\lambda X_3 + E_2X_4 + E_3X_5) = [Y_2, Y_2] + [Y_1, Y_3]$$

si se multiplica la condición anterior por X_0 se llega a

$$\frac{1}{2}(\lambda X_4 + E_2X_5) = 2[Y_2, Y_3] + [Y_2, Y_3] = 3[Y_2, Y_3]$$

de donde se deduce que $[Y_2, Y_3] = \frac{1}{6}(\lambda X_4 + E_2X_5)$, y multiplicando por X_0 se tiene $[Y_3, Y_3] = \frac{\lambda}{6}X_5$. De $J_g(X_0, Y_2, Y_2)$ se obtiene

$$[Y_2, Y_2] = \frac{1}{3}(\lambda X_3 + E_2X_4) + E_{22}^5X_5$$

de este último producto junto con la condición anterior se llega a

$$[Y_1, Y_3] = \frac{1}{6}(\lambda X_3 + E_2X_4) + (\frac{E_3}{2} - E_{22}^5)X_5$$

En resumen

$$\begin{cases} [Y_1, Y_1] = \lambda X_1 + E_2X_2 + E_3X_3 + E_4X_4 + E_5X_5 \\ [Y_1, Y_2] = \frac{1}{2}(\lambda X_2 + E_2X_3 + E_3X_4 + E_4X_5) \\ [Y_1, Y_3] = \frac{1}{6}(\lambda X_3 + E_2X_4) + (\frac{E_3}{2} - E_{22}^5)X_5 \\ [Y_2, Y_2] = \frac{1}{3}(\lambda X_3 + E_2X_4) + E_{22}^5X_5 \\ [Y_2, Y_3] = \frac{1}{6}(\lambda X_4 + E_2X_5) \\ [Y_3, Y_3] = \frac{\lambda}{6}X_5 \end{cases}$$

se observa que si $\lambda = 0$ entonces $X_2 \notin Im(adY_2, adY_3)$ y $X_3 \notin Im(adY_3)$ obteniéndose la siguiente sucesión central descendente

$$\begin{aligned} \mathcal{C}^1(\mathfrak{g}) &=< X_2, \ldots, X_5 > \oplus < Y_2, Y_3 > \\ \mathcal{C}^2(\mathfrak{g}) &=< X_3, X_4, X_5 > \oplus < Y_3 > \\ \mathcal{C}^3(\mathfrak{g}) &=< X_4, X_5 > \oplus < 0 > \\ \mathcal{C}^4(\mathfrak{g}) &=< X_5 > \oplus < 0 > \\ \mathcal{C}^5(\mathfrak{g}) &=< 0 > \end{aligned}$$

obteniéndose nilíndice 5 ($= n-1$). Sin embargo para $\lambda \neq 0$ se obtiene nilíndice 6 ($= n$) ya que se tiene

$$\begin{array}{ll}
\mathcal{C}^1(\mathfrak{g}) & =< X_1, \dots, X_5 > \oplus < Y_2, Y_3 > \\
\mathcal{C}^2(\mathfrak{g}) & =< X_2, \dots, X_5 > \oplus < Y_3 > \\
\mathcal{C}^3(\mathfrak{g}) & =< X_3, X_4, X_5 > \oplus < 0 > \\
\mathcal{C}^4(\mathfrak{g}) & =< X_4, X_5 > \oplus < 0 > \\
\mathcal{C}^5(\mathfrak{g}) & =< X_5 > \oplus < 0 > \\
\mathcal{C}^6(\mathfrak{g}) & =< 0 >
\end{array}$$

En efecto, se observa que $Y_2 \notin \mathcal{C}^2(\mathfrak{g})$ ya que si $Y_2 \in \mathcal{C}^2(\mathfrak{g})$ la única posibilidad sería $Y_2 \in [X_1, Y_1]$, a su vez $X_1 \in [Y_1, Y_1]$ de donde se llegaría a que el vector $Y_2 \in [Y_1, [Y_1, Y_1]]$ lo que supone una contradicción con $J_g(Y_1, Y_1, Y_1)$. Por otro lado $Y_3 \notin \mathcal{C}^3(\mathfrak{g})$ ya que si perteneciera la única posibilidad sería $[X_2, Y_1] = D_{21}^3 Y_3$ con $D_{21}^3 \neq 0$, que junto con la sucesión anterior y $J_g(X_0, X_1, Y_1)$ llevaría a

$$\left\{ \begin{array}{l}
[X_1, Y_1] = D_{11}^3 Y_3 \\
[X_1, Y_2] = -D_{21}^3 Y_3 \\
[X_2, Y_1] = D_{21}^3 Y_3
\end{array} \right.$$

De $J_g(X_1, Y_1, Y_3)$ se tendría que

$$[X_1, [Y_1, Y_3]] = [X_1, \frac{1}{6}(\lambda X_3 + E_2 X_4) + (\frac{E_3}{2} - E_{22}^5) X_5] = D_{11}^3 [Y_3, Y_3] = D_{11}^3 \frac{\lambda}{6} X_5$$

de donde se deduciría que $[X_1, X_3] \subseteq < X_5 >$. Por otro lado de $J_g(X_1, Y_2, Y_2)$ se tendría que $X_4 \in [X_1, X_3]$ llegándose a contradicción, por lo que $D_{21}^3 = 0$.

Así, con todo lo anterior, y si se toma $\mathfrak{g}_0$ el álgebra de Lie filiforme L_4, se obtiene la siguiente familia de superálgebras de Lie filiformes con nilíndice maximal, n, para $n = 5$ y $m = 3$ y de base adaptada $\{X_0, X_1, \dots, X_4, Y_1, Y_2, Y_3\}$,

$$\left\{ \begin{array}{ll}
[X_0, X_i] = X_{i+1} & 1 \leq i \leq 3 \\
[X_0, Y_j] = Y_{j+1} & 1 \leq j \leq 2 \\
[Y_1, Y_1] = \lambda X_1 + E_2 X_2 + E_3 X_3 + E_4 X_4 & \lambda \neq 0 \\
[Y_1, Y_2] = \frac{1}{2}(\lambda X_2 + E_2 X_3 + E_3 X_4) & \\
[Y_1, Y_3] = \frac{1}{6}(\lambda X_3 + E_2 X_4) & \\
[Y_2, Y_2] = \frac{1}{3}(\lambda X_3 + E_2 X_4) & \\
[Y_2, Y_3] = \frac{1}{6}(\lambda X_4) &
\end{array} \right.$$

Del mismo modo con $\mathfrak{g}_0 = L_5$ se obtiene la siguiente familia de superálgebras de Lie filiformes con nilíndice maximal para $n = 6$ y $m = 3$, de base adaptada $\{X_0, X_1, \ldots, X_5, Y_1, Y_2, Y_3\}$,

$$\begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1} & 1 \leq i \leq 4 \\ [X_0, Y_j] = Y_{j+1} & 1 \leq j \leq 2 \\ [Y_1, Y_1] = \lambda X_1 + E_2X_2 + E_3X_3 + E_4X_4 + E_5X_5 & \lambda \neq 0 \\ [Y_1, Y_2] = \frac{1}{2}(\lambda X_2 + E_2X_3 + E_3X_4 + E_4X_5) & \\ [Y_1, Y_3] = \frac{1}{6}(\lambda X_3 + E_2X_4) + (\frac{E_3}{2} - E_{22}^5)X_5 & \\ [Y_2, Y_2] = \frac{1}{3}(\lambda X_3 + E_2X_4) + E_{22}^5X_5 & \\ [Y_2, Y_3] = \frac{1}{6}(\lambda X_4 + E_2X_5) & \\ [Y_3, Y_3] = \frac{\lambda}{6}X_5 & \end{cases}$$

Si $n \geq 7$ Entonces cualquier superálgebra de Lie filiforme de base adaptada $\{X_0, \ldots, X_{n-1}, Y_1, Y_2, Y_3\}$ tiene la siguiente sucesión central descendente

$$\begin{array}{ll} \mathcal{C}^1(\mathfrak{g}) & =< X_2, \ldots, X_{n-1} > \oplus < Y_2, Y_3 > \\ \mathcal{C}^2(\mathfrak{g}) & =< X_3, \ldots, X_{n-1} > \oplus < Y_3 > \\ \mathcal{C}^3(\mathfrak{g}) & =< X_4, \ldots, X_{n-1} > \oplus < 0 > \\ \mathcal{C}^4(\mathfrak{g}) & =< X_5, \ldots, X_{n-1} > \oplus < 0 > \\ & \vdots \\ \mathcal{C}^{n-2}(\mathfrak{g}) & =< X_{n-1} > \oplus < 0 > \\ \mathcal{C}^{n-1}(\mathfrak{g}) & =< 0 > \end{array}$$

teniendo por tanto nilíndice $n - 1$. En efecto, $X_1 \notin [Y_1, Y_1]$ ya que si $X_1 \in [Y_1, Y_1]$ de los Jacobis y siguiendo un razonamiento análogo al del apartado anterior se llegaría a que $X_5 \in [Y_3, Y_3]$, lo que sería contradictorio con $J_g(X_0, Y_3, Y_3)$. Además, del hecho de que $X_1 \notin [Y_1, Y_1]$ se sigue que $X_2 \notin Im(adY_2, adY_3)$ y que $X_3 \notin Im(adY_2, adY_3)$ confirmando la sucesión central y el nilíndice anteriores.

Con esto queda cerrado el caso $m = 3$.

Caso m=4

Todos los casos $n \leq 4$ ya han sido estudiados, luego resta estudiar $n \geq 5$ que se subdividirá en los casos que a continuación se detallan.

Si $n = 5$

Se considera la superálgebra de Lie filiforme $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1$ de base adaptada $\{X_0, \ldots, X_4, Y_1, \ldots, Y_4\}$ y de productos no nulos

$$\begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1} & 1 \leq i \leq 3 \\ [X_0, Y_i] = Y_{i+1} & 1 \leq i \leq 3 \\ [X_1, X_2] = -X_3 \\ [X_1, X_3] = -X_4 \\ [X_1, Y_2] = -Y_3 \\ [X_2, Y_1] = Y_3 \\ [Y_1, Y_1] = X_1 \\ [Y_1, Y_2] = \frac{1}{2}X_2 \\ [Y_1, Y_3] = \frac{1}{2}X_3 \\ [Y_1, Y_4] = \frac{1}{2}X_4 \end{cases}$$

se observa que $\mathfrak{g}_0$ es isomorfa a L_4 sin más que considerar el siguiente cambio de base para $\mathfrak{g}_0$

$$\begin{cases} X_0' = -X_0 \\ X_1' = X_0 + X_1 \end{cases}$$

Es una simple comprobación el hecho de que efectivamente $\mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1$ sea una S.A.L., filiforme lo es por construcción, y de nilíndice 7 $(= n + m - 2)$.

Si $n = 6$ Se considera la S.A.L. filiforme $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1$de base adaptada $\{X_0, \ldots, X_5, Y_1, \ldots, Y_4\}$ y de productos no nulos

$$\begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1} & 1 \leq i \leq 4 \\ [X_0, Y_i] = Y_{i+1} & 1 \leq i \leq 3 \\ [X_1, X_2] = -X_3 \\ [X_1, X_3] = -X_4 \\ [X_2, X_3] = -X_5 \\ [X_1, Y_2] = -Y_3 \\ [X_1, Y_3] = -Y_4 \\ [X_2, Y_1] = Y_3 \\ [X_3, Y_1] = Y_4 \\ [Y_1, Y_1] = X_1 \\ [Y_1, Y_2] = \frac{1}{2}X_2 \\ [Y_1, Y_3] = \frac{1}{2}X_3 \\ [Y_1, Y_4] = \frac{1}{2}X_4 \\ [Y_2, Y_4] = \frac{1}{2}X_5 \\ [Y_3, Y_3] = -\frac{1}{2}X_5 \end{cases}$$

se observa que $\mathfrak{g}_0$ tras el siguiente cambio de base

$$\begin{cases} X_0' = -X_0 \\ X_1' = X_0 + X_1 \end{cases}$$

quedaría

$$\begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1} & 1 \leq i \leq 4 \\ [X_1, X_4] = -X_5 \\ [X_2, X_3] = X_5 \end{cases}$$

que es el álgebra de Lie filiforme Q_5 (siguiendo la notación de [26]). Es una simple comprobación el hecho de que efectivamente $\mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1$ sea una S.A.L., filiforme lo es por construcción, y de nilíndice 8 ($= n + m - 2$).

Si $7 \leq n \leq 8$ Se estudiará, por simplicidad y analogía, sólo el caso $n = 8$, para obtener de éste el caso $n = 7$ sólo hay que sustituir el vector X_7 por el vector nulo, el resto se mantiene. Luego sea $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1$ una S.A.L. filiforme de base adaptada $\{X_0, X_1, \ldots, X_7, Y_1, \ldots, Y_4\}$ ($[X_0, X_i] = X_{i+1}$, $1 \leq i \leq 6$ y

$[X_0, Y_j] = Y_{j+1}$, $1 \leq j \leq 3$). Si se sustituye la constante de estructura E_{11}^1 por λ y E_{11}^i por α_i para $2 \leq i \leq 7$ queda

$$[Y_1, Y_1] = \lambda X_1 + \alpha_2 X_2 + \alpha_3 X_3 + \alpha_4 X_4 + \alpha_5 X_5 + \alpha_6 X_6 + \alpha_7 X_7$$

Si se sustituyen las constantes de estructura E_{22}^i por β_i para $4 \leq i \leq 7$, y mediante Jacobis se obtienen los siguientes productos donde ya han sido sustituidas por cero las constantes nulas

$$\begin{cases} [Y_1, Y_2] = \frac{1}{2}(\lambda X_2 + \alpha_2 X_3 + \alpha_3 X_4 + \alpha_4 X_5 + \alpha_5 X_6 + \alpha_6 X_7) \\ [Y_1, Y_3] = \frac{\lambda}{5} X_3 + (\frac{\alpha_2}{2} - \frac{3\alpha_2}{10}) X_4 + (\frac{\alpha_3}{2} - \beta_5) X_5 + (\frac{\alpha_4}{2} - \beta_6) X_6 + (\frac{\alpha_5}{2} - \beta_7) X_7 \\ [Y_1, Y_4] = \frac{\lambda}{20} X_4 + \frac{1}{2}[(\alpha_2 - \frac{9\alpha_2}{10}) X_5 + (\alpha_3 - 3\beta_5) X_6 + (\alpha_4 - 3\beta_6) X_7] \\ [Y_2, Y_2] = \frac{3\lambda}{10} X_3 + \frac{3\alpha_2}{10} X_4 + \beta_5 X_5 + \beta_6 X_6 + \beta_7 X_7 \\ [Y_2, Y_3] = \frac{1}{2}[\frac{3\lambda}{10} X_4 + \frac{3\alpha_2}{10} X_5 + \beta_5 X_6 + \beta_6 X_7] \\ [Y_2, Y_4] = \frac{\lambda}{20} X_5 + \frac{1}{2}[(\alpha_2 - \frac{9\alpha_2}{10}) X_6 + (\alpha_3 - 3\beta_5) X_7] \\ [Y_3, Y_3] = \frac{\lambda}{10} X_5 + \frac{1}{2}[(\frac{6\alpha_2}{5} - \alpha_2) X_6 + (4\beta_5 - \alpha_3) X_7] \\ [Y_3, Y_4] = \frac{\lambda}{20} X_6 + (\frac{3\alpha_2}{10} - \frac{\alpha_2}{4}) X_7 \\ [Y_4, Y_4] = \frac{\lambda}{20} X_7 \end{cases}$$

Al igual que ocurría para $m = 3$ y $5 \leq n \leq 6$, si $\lambda = 0$ se obtendría nilíndice $n-1$. Sin embargo, para $\lambda \neq 0$ se obtiene nilíndice 8 ($= n$) ya que se tiene

$$\begin{array}{ll} \mathcal{C}^1(\mathfrak{g}) & = < X_1, \ldots, X_7 > \oplus < Y_2, Y_3, Y_4 > \\ \mathcal{C}^2(\mathfrak{g}) & = < X_2, \ldots, X_7 > \oplus < Y_3, Y_4 > \\ \mathcal{C}^3(\mathfrak{g}) & = < X_3, \ldots, X_7 > \oplus < Y_4 > \\ \mathcal{C}^4(\mathfrak{g}) & = < X_4, \ldots, X_7 > \oplus < 0 > \\ & \vdots \\ \mathcal{C}^7(\mathfrak{g}) & = < X_7 > \oplus < 0 > \\ \mathcal{C}^8(\mathfrak{g}) & = < 0 > \end{array}$$

Así, con todo lo anterior, y si se toma $\mathfrak{g}_0 = L_6$, se obtiene la siguiente familia de S.A.L. filiformes con nilíndice maximal, en este caso n, para $n = 7$ y

$m = 4$ y de base adaptada $\{X_0, \ldots, X_6, Y_1, \ldots, Y_4\}$,

$$\begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1}, & 1 \leq i \leq 5 \\ [X_0, Y_j] = Y_{j+1}, & 1 \leq j \leq 3 \\ [Y_1, Y_1] = \lambda X_1 + \alpha_2 X_2 + \alpha_3 X_3 + \alpha_4 X_4 + \alpha_5 X_5 + \alpha_6 X_6, & \lambda \neq 0 \\ [Y_1, Y_2] = \frac{1}{2}(\lambda X_2 + \alpha_2 X_3 + \alpha_3 X_4 + \alpha_4 X_5 + \alpha_5 X_6) & \\ [Y_1, Y_3] = \frac{\lambda}{5} X_3 + (\frac{\alpha_2}{2} - \frac{3\alpha_2}{10}) X_4 + (\frac{\alpha_3}{2} - \beta_5) X_5 + (\frac{\alpha_4}{2} - \beta_6) X_6 & \\ [Y_1, Y_4] = \frac{\lambda}{20} X_4 + \frac{1}{2}[(\alpha_2 - \frac{9\alpha_2}{10}) X_5 + (\alpha_3 - 3\beta_5) X_6] & \\ [Y_2, Y_2] = \frac{3\lambda}{10} X_3 + \frac{3\alpha_2}{10} X_4 + \beta_5 X_5 + \beta_6 X_6 & \\ [Y_2, Y_3] = \frac{1}{2}[\frac{3\lambda}{10} X_4 + \frac{3\alpha_2}{10} X_5 + \beta_5 X_6] & \\ [Y_2, Y_4] = \frac{\lambda}{20} X_5 + \frac{1}{2}(\alpha_2 - \frac{9\alpha_2}{10}) X_6 & \\ [Y_3, Y_3] = \frac{\lambda}{10} X_5 + \frac{1}{2}(\frac{6\alpha_2}{5} - \alpha_2) X_6 & \\ [Y_3, Y_4] = \frac{\lambda}{20} X_6 & \end{cases}$$

Del mismo modo con $\mathfrak{g}_0 = L_7$ se obtiene la siguiente familia de S.A.L. filiformes con nilíndice maximal para $n = 8$ y $m = 4$ y de base adaptada $\{X_0, X_1, \ldots, X_7, Y_1, Y_2, Y_3, Y_4\}$,

$$\begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1}, & 1 \leq i \leq 6 \\ [X_0, Y_j] = Y_{j+1}, & 1 \leq j \leq 3 \\ [Y_1, Y_1] = \lambda X_1 + \alpha_2 X_2 + \alpha_3 X_3 + \alpha_4 X_4 + \alpha_5 X_5 + \alpha_6 X_6 + \alpha_7 X_7, & \lambda \neq 0 \\ [Y_1, Y_2] = \frac{1}{2}(\lambda X_2 + \alpha_2 X_3 + \alpha_3 X_4 + \alpha_4 X_5 + \alpha_5 X_6 + \alpha_6 X_7) & \\ [Y_1, Y_3] = \frac{\lambda}{5} X_3 + (\frac{\alpha_2}{2} - \frac{3\alpha_2}{10}) X_4 + (\frac{\alpha_3}{2} - \beta_5) X_5 + (\frac{\alpha_4}{2} - \beta_6) X_6 + (\frac{\alpha_5}{2} - \beta_7) X_7 & \\ [Y_1, Y_4] = \frac{\lambda}{20} X_4 + \frac{1}{2}[(\alpha_2 - \frac{9\alpha_2}{10}) X_5 + (\alpha_3 - 3\beta_5) X_6 + (\alpha_4 - 3\beta_6) X_7] & \\ [Y_2, Y_2] = \frac{3\lambda}{10} X_3 + \frac{3\alpha_2}{10} X_4 + \beta_5 X_5 + \beta_6 X_6 + \beta_7 X_7 & \\ [Y_2, Y_3] = \frac{1}{2}[\frac{3\lambda}{10} X_4 + \frac{3\alpha_2}{10} X_5 + \beta_5 X_6 + \beta_6 X_7] & \\ [Y_2, Y_4] = \frac{\lambda}{20} X_5 + \frac{1}{2}[(\alpha_2 - \frac{9\alpha_2}{10}) X_6 + (\alpha_3 - 3\beta_5) X_7] & \\ [Y_3, Y_3] = \frac{\lambda}{10} X_5 + \frac{1}{2}[(\frac{6\alpha_2}{5} - \alpha_2) X_6 + (4\beta_5 - \alpha_3) X_7] & \\ [Y_3, Y_4] = \frac{\lambda}{20} X_6 + (\frac{3\alpha_2}{10} - \frac{\alpha_2}{4}) X_7 & \\ [Y_4, Y_4] = \frac{\lambda}{20} X_7 & \end{cases}$$

Si $n \geq 9$ Se tienen superálgebras de Lie filiformes de base adaptada $\{X_0, X_1, \ldots, X_{n-1}, Y_1, Y_2, Y_3, Y_4\}$. Se prueba que $X_1 \notin \mathcal{C}^1(\mathfrak{g})$, ya que si $X_1 \in \mathcal{C}^1(\mathfrak{g})$ la única posibilidad es $E_{11}^1 \neq 0$ y en tal caso mediante los Jacobis se prueba que $E_{44}^7 \neq 0$ llegando a contradicción con $J_g(X_0, Y_4, Y_4)$. Del mismo modo se prueba que $X_2 \notin Im(adY_2, adY_3, adY_4)$ ya que si por ejemplo $X_2 \in Im(adY_4)$ se llega en cualquier caso a que existe un vector $X_k \in [Y_4, Y_4]$ con $k \leq n-2$ lo que es una contradicción con $J_g(X_0, Y_4, Y_4)$. Así también se prueba que $X_3 \notin Im(adY_3, adY_4)$ y que $X_4 \notin Im(adY_4)$.

Con todo lo anterior se tiene la siguiente sucesión central descendente

$$\begin{array}{ll}
\mathcal{C}^1(\mathfrak{g}) & =< X_2, \ldots, X_{n-1} > \oplus < Y_2, Y_3, Y_4 > \\
\mathcal{C}^2(\mathfrak{g}) & =< X_3, \ldots, X_{n-1} > \oplus < Y_3, Y_4 > \\
\mathcal{C}^3(\mathfrak{g}) & =< X_4, \ldots, X_{n-1} > \oplus < Y_4 > \\
\mathcal{C}^4(\mathfrak{g}) & =< X_5, \ldots, X_{n-1} > \oplus < 0 > \\
 & \vdots \\
\mathcal{C}^{n-2}(\mathfrak{g}) & =< X_{n-1} > \oplus < 0 > \\
\mathcal{C}^{n-1}(\mathfrak{g}) & =< 0 >
\end{array}$$

con lo que queda probado este caso.

Con todo lo anterior se concluye la demostración del teorema. $\square$

Se observa que gracias al teorema anterior quedan totalmente determinados los nilíndices maximales de la familia $\mathcal{F}^{n+m}$ para $m \leq 4$. Resta estudiar todos los casos $m \geq 5$.

Teorema 3.3.13 *Sea $\mathcal{F}^{n+m}$, la familia de superálgebras de Lie filiformes, y sea $f(n,m) = f(n,m)|_{\mathcal{F}^{n+m}}$ la función que da el nilíndice maximal para cada par de dimensiones (n,m). Entonces se tiene lo siguiente para dimensión $m \geq 5$.*

$$m\ par \begin{cases} n=1 & \longrightarrow f(1,m)=m & (\ caso\ trivial\ ) \\ 2\leq n\leq 4 & \longrightarrow f(n,m)=m+n-2 & (n+m-2) \\ m\leq n\leq m+2 & \longrightarrow f(n,m)=m+n-2 & (n+m-2) \\ n\geq 2m+1 & \longrightarrow f(n,m)=n-1 & (n-1) \end{cases}$$

$$m\ impar \begin{cases} n=1 & \longrightarrow f(1,m)=m & (\ caso\ trivial\ ) \\ n=2 & \longrightarrow f(2,m)=m+1 & (n+m-1) \\ n=3 & \longrightarrow f(3,m)=m+1 & (n+m-2) \\ m\leq n\leq m+1 & \longrightarrow f(n,m)=m+n-2 & (n+m-2) \\ n\geq 2m+1 & \longrightarrow f(n,m)=n-1 & (n-1) \end{cases}$$

Nota 3.3.9 Se observa que sólo queda por determinar la función $f(n,m)|_{\mathcal{F}^{n+m}}$ en los siguientes casos: si m es par para n con $5\leq n\leq m-1$ y con $m+3\leq n\leq 2m$; si m es impar para n con $4\leq n\leq m-1$ y con $m+2\leq n\leq 2m$.

Demostración del teorema: Gracias a los resultados anteriores para demostrar el teorema hay que distinguir sólo los casos que a continuación se estudian

Casos ($n=m$, m par) y ($n=m$, m impar).

En ambos casos se considera la S.A.L. filiforme $\mathfrak{g}=\mathfrak{g}_0\oplus\mathfrak{g}_1$, con $dim(\mathfrak{g}_0)=$ $=n$ y $dim(\mathfrak{g}_1)=m$, de base adaptada $\{X_0,X_1,\ldots,X_{m-1},Y_1,\ldots,Y_m\}$ y de productos no nulos

$$\begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1} & 1 \leq i \leq m-2 \\ [X_0, Y_j] = Y_{j+1} & 1 \leq j \leq m-1 \\ [X_1, X_k] = -X_{k+1} & 2 \leq k \leq m-2 \\ [X_1, Y_l] = -Y_{l+1} & 2 \leq l \leq m-1 \\ [X_l, Y_1] = Y_{l+1} & 2 \leq l \leq m-1 \\ [Y_1, Y_1] = X_1 & \\ [Y_1, Y_l] = \frac{1}{2} X_l & 2 \leq l \leq m-1 \end{cases}$$

se observa que $\mathfrak{g}_0$ tras un cambio de base, similar a uno ya utilizado en ocasiones anteriores

$$\begin{cases} X_0' = X_0 \\ X_1' = X_0 + X_1 \end{cases}$$

queda

$$\begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1} & 1 \leq i \leq m-2 \end{cases}$$

que es el álgebra de Lie filiforme L_{m-1} (siguiendo la notación de [26]). Es una simple comprobación el hecho de que efectivamente $\mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1$ sea una S.A.L., filiforme lo es por construcción, y de nilíndice $n + m - 2$.

<u>Casos $(n = m + 1,\ m$ par$)$ y $(n = m + 1,\ m$ impar$)$.</u>

En ambos casos se considera la S.A.L. filiforme $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1$, con $dim(\mathfrak{g}_0) = n$ y $dim(\mathfrak{g}_1) = m$, de base adaptada $\{X_0, X_1, \ldots, X_m, Y_1, \ldots, Y_m\}$ y de productos no nulos

$$\begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1} & 1 \leq i \leq m-1 \\ [X_0, Y_j] = Y_{j+1} & 1 \leq j \leq m-1 \\ [X_1, X_k] = -X_{k+1} & 2 \leq k \leq m-1 \\ [X_1, Y_l] = -Y_{l+1} & 2 \leq l \leq m-1 \\ [X_l, Y_1] = Y_{l+1} & 2 \leq l \leq m-1 \\ [Y_1, Y_1] = X_1 & \\ [Y_1, Y_r] = \frac{1}{2} X_r & 2 \leq r \leq m \end{cases}$$

se observa que $\mathfrak{g}_0$ tras el mismo cambio de base que en el caso anterior es el álgebra de Lie filiforme L_m (siguiendo la notación de [26]). Es una simple comprobación el hecho de que efectivamente $\mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1$ sea una S.A.L., filiforme lo es por construcción, y de nilíndice $n+m-2$.

Caso ($n = m+2$, m par).

En el caso que nos ocupa, se va a considerar la S.A.L. filiforme $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1$, con $dim(\mathfrak{g}_0) = n$ y $dim(\mathfrak{g}_1) = m$, con base adaptada $\{X_0, X_1, \ldots, X_{m+1}, Y_1, \ldots, Y_m\}$ y de productos no nulos

$$\left\{\begin{array}{ll} [X_0, X_i] = X_{i+1} & 1 \leq i \leq m \\ [X_0, Y_j] = Y_{j+1} & 1 \leq j \leq m-1 \\ [X_1, X_k] = -X_{k+1} & 2 \leq k \leq m-1 \\ [X_i, X_{m+1-i}] = (-1)^{i+1} X_{m+1} & 2 \leq i \leq \frac{m}{2} \\ [X_1, Y_j] = -Y_{j+1} & 2 \leq j \leq m-1 \\ [X_j, Y_1] = Y_{j+1} & " \\ [Y_1, Y_1] = X_1 & \\ [Y_1, Y_k] = \frac{1}{2} X_k & 2 \leq k \leq m \\ [Y_i, Y_{m+2-i}] = (-1)^i \frac{1}{2} X_{m+1} & 2 \leq i \leq \frac{m+2}{2} \end{array}\right.$$

se observa que $\mathfrak{g}_0$ tras el siguiente cambio de base

$$\left\{\begin{array}{l} X'_0 = -X_0 \\ X'_1 = X_0 + X_1 \end{array}\right.$$

queda

$$\left\{\begin{array}{ll} [X_0, X_i] = X_{i+1} & 1 \leq i \leq m \\ [X_i, X_j] = (-1)^i X_{m+1} & i < j,\ i+j = m+1 \end{array}\right.$$

que es el álgebra de Lie filiforme Q_{m+1} (siguiendo la notación de [26]). Es una simple comprobación el hecho de que efectivamente $\mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1$ sea una S.A.L., filiforme lo es por construcción, y de nilíndice $2m$ $(= n+m-2)$.

Casos ($n \geq 2m+1$, m par) y ($n \geq 2m+1$, m impar).

En ambos casos se tienen S.A.L. filiformes $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1$ de base adaptada $\{X_0, \ldots, X_{2m}, \ldots, X_{n-1}, Y_1, \ldots, Y_m\}$.

Una vez probado el hecho de que $X_i \notin Im(adY_i, \ldots adY_m)$ con $1 \leq i \leq m$ se sigue que $\mathfrak{g}$ tiene la siguiente sucesión central descendente

$$\begin{array}{ll}
\mathcal{C}^1(\mathfrak{g}) & =< X_2, \ldots, X_{2m}, \ldots, X_{n-1} > \oplus < Y_2, \ldots, Y_m > \\
\mathcal{C}^2(\mathfrak{g}) & =< X_3, \ldots, X_{2m}, \ldots, X_{n-1} > \oplus < Y_3, \ldots, Y_m > \\
 & \vdots \\
\mathcal{C}^{m-1}(\mathfrak{g}) & =< X_m, \ldots, X_{2m}, \ldots, X_{n-1} > \oplus < Y_m > \\
\mathcal{C}^m(\mathfrak{g}) & =< X_{m+1}, \ldots, X_{2m}, \ldots, X_{n-1} > \oplus < 0 > \\
 & \vdots \\
\mathcal{C}^{n-2}(\mathfrak{g}) & =< X_{n-1} > \oplus < 0 > \\
\mathcal{C}^{n-1}(\mathfrak{g}) & =< 0 >
\end{array}$$

de donde se llega a que $\mathfrak{g}$ tiene nilíndice $n-1$. Luego falta probar que efectivamente $X_i \notin Im(adY_i, \ldots adY_m)$ con $1 \leq i \leq m$. Primero se probará el siguiente resultado:

$$\left.\begin{array}{r} \text{Si } X_l \in [Y_i, Y_j] \\ i+j > l \end{array}\right\} \Longrightarrow X_{2m+l-i-j} \in [Y_m, Y_m]$$

Se prueba por inducción:

- Si $X_l \in [Y_i, Y_j]$, entonces X_{l+1} va a pertenecer a algún producto de la forma $[Y_l, Y_k]$ con $l + k = i + j + 1$ considerando simplemente el Jacobi $J_g(X_0, Y_i, Y_j)$.

- Repitiendo el paso anterior para $X_{l+1} \in [Y_l, Y_k]$ se obtiene que X_{l+2} va a pertenecer a algún producto de la forma $[Y_r, Y_s]$ con $r + s = i + j + 2$.

Así por inducción se llega a que $X_{l+(2m-i-j)} \in [Y_m, Y_m]$, ya que éste es el único producto $[Y_p, Y_q]$ con $p + q = i + j + (2m - i - j)$. Queda por tanto probado el resultado.

A continuación se prueba que $X_i \notin Im(adY_i, \ldots adY_m)$ con $1 \leq i \leq m$ por reducción al absurdo, ya que si ocurre lo contrario se tendrá en particular las hipótesis del resultado anterior obteniéndose, por tanto, que existe un vector $X_k \in [Y_m, Y_m]$ con $k \leq 2m-1$, lo que está en contradicción con $J_g(X_0, Y_m, Y_m)$.

Con esto queda probado el teorema. $\square$

3.4 Aplicación al caso general

Se ha estudiado hasta ahora la función $f(n,m)$ restringida a la variedad de las superálgebras de Lie filiformes, obteniendo que su máximo $n+m-1$ sólo se alcanza para $n=2$ y m impar, y en una única superálgebra de Lie para cada m impar, salvo isomorfismos, designada por $K^{2,m}$. A lo largo de esta sección se considerará la función f sin atender a ninguna restricción sobre su dominio, esto es, se considerará actuando sobre toda la variedad de S.A.L. nilpotentes y se intentará encontrar la función $f(2,m)$ para m impar.

En lo que sigue (salvo que se diga lo contrario) se supondrá $n=2$. Se estudiarán, en primer lugar, dimensiones concretas de m ($m=1$ y $m=3$), para posteriormente estudiar el caso m impar.

3.4.1 Caso $n=2$ y $m=1$.

Teorema 3.4.1 (de clasificación). *Sea $\mathfrak{g}$ cualquier superálgebra de Lie tal que $\mathfrak{g} \in \mathcal{N}^{2+1}$. Entonces es isomorfa a una de las dos superálgebras de lie siguientes, no isomorfas entre sí, dadas en una base adaptada $\{X_0, X_1, Y\}$ por*

$$\begin{array}{ll} -\mu_{2+1} = \mu_2 \oplus \mathbb{C} & \textit{(S.A.L. abeliana)} \\ -K^{2,1} : [Y,Y] = X_1 & \end{array}$$

donde se suponen nulos el resto de los productos y μ_2 es el álgebra de Lie abeliana de dimensión 2.

Corolario 3.4.2 $f(2,1) = 2$ $(= n+m-1)$.

Teorema 3.4.3 (de estructura). *$\mathcal{N}^{2,1}$ es irreducible, siendo su única componente $\overline{\mathcal{O}(K^{2,1})}^{\mathcal{Z}}$. Además, para $n = 2$ y $m = 1$ es cierta la* **conjetura** *$\mathcal{M}^{n+m} \subset \mathcal{F}^{n+m}$, esto es, $\mathcal{M}^{2+1} \subset \mathcal{F}^{2+1}$.*

Demostración de los teoremas 3.4.1 y 3.4.3. Sea $\mathfrak{g} \in \mathcal{N}^{2+1}$, luego $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1$, $dim(\mathfrak{g}_0) = 2$ y $dim(\mathfrak{g}_1) = 1$, y de base homogénea $\{X_0, X_1, Y\}$ (es trivial comprobar que, en este caso, toda base homogénea es también adaptada).

Al ser $\mathfrak{g}_0$ nilpotente y de dimensión 2, se sigue que $\mathfrak{g}_0$ es el álgebra de Lie abeliana de dimensión 2, μ_2, ($[X_0, X_1] = 0$). Como $\mathfrak{g}_1$ es $\mathfrak{g}_0-$módulo se tiene, en este caso, que $[X_0, Y] = [X_1, Y] = 0$. Se sigue, por tanto, que el único producto que puede ser no nulo es $[Y, Y]$, distinguiéndose dos casos:

a). Si $[Y, Y] = 0$, se tiene un caso degenerado ya que $\mathfrak{g}$ es la superálgebra de Lie abeliana μ_{2+1} (siguiendo la notación de la sección 1.6.4) que en realidad es el álgebra de Lie $\mu_{2+1} = \mu_2 \oplus \mathbb{C}$ suma directa del álgebra de Lie abeliana de dimensión dos con $\mathbb{C}$. En este caso $dim(\mathcal{C}^1(\mu_{2+1})) = 0$, esto es, μ_{2+1} tiene nilíndice 1 $(= n + m - 2)$.

b). Si $[Y, Y] = \Psi(X_0, X_1)$ con $\Psi \not\equiv 0$. En este caso todas la superálgebras de Lie son isomorfas a $K^{2,1}$. En efecto, mediante el cambio de base dado por $X_1' = \Psi(X_0, X_1)$ todas las S.A.L. anteriores serán isomorfas a aquella de único producto no nulo $[Y, Y] = X_1$ y de nilíndice 2 $(= n + m - 1)$, que no es más que la superálgebra de Lie $K^{2,1}$.

En definitiva, se observa que $f(2, 1) = 2$ $(= n + m - 1)$, y que salvo isomorfismo, sólo hay dos superálgebras de Lie distintas: μ_{2+1} y $K^{2,1}$ (serán no isomorfas ya que por ejemplo tienen nilíndice distinto). Ambas son S.A.L. filiformes (ya que la condición de filiformes se convierte en trivial),

$$\mathcal{F}^{2+1} = \mathcal{N}^{2+1}$$

Sólo $K^{2,1}$ tiene nilíndice maximal, esto es

$$\mathcal{M}^{2+1} = \mathcal{O}(K^{2,1})$$

luego $\mathcal{O}(K^{2,1})$ será abierto para la topología de Zariski, y su clausura de Zariski (que coincide con una componente irreducible de $\mathcal{N}^{2+1}$), coincide con todo el espacio $\mathcal{N}^{2+1}$.

$$\overline{\mathcal{O}(K^{2,1})}^{\mathcal{Z}} = \mathcal{N}^{2+1}$$

De donde se sigue que $\mathcal{N}^{2+1}$ es irreducible. $\square$

Nota 3.4.1 Según lo visto en la sección 1.6.4, la S.A.L. abeliana (álgebra de Lie) $\mu_{2+1} \in \overline{\mathcal{O}(K^{2,1})}$ (clausura euclídea), de donde se sigue que en este caso coinciden las clausuras para las dos topologías

$$\overline{\mathcal{O}(K^{2,1})}^{\mathcal{Z}} = \overline{\mathcal{O}(K^{2,1})} = \mathcal{N}^{2+1}$$

3.4.2 Caso $n = 2$ y $m = 3$.

Al aumentar la dimensión de m crece de forma exponencial la complejidad en la clasificación de las S.A.L. nilpotentes para $n = 2$.

Teorema 3.4.4 (de clasificación). *Sea $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1$ cualquier superálgebra de Lie $\mathfrak{g} \in \mathcal{N}^{2+3}$. Entonces, o bien es filiforme, o bien es isomorfa a una de las superálgebras de lie siguientes, no isomorfas entre sí, dadas en una base adaptada $\{X_0, X_1, Y_1, Y_2, Y_3\}$ por*

$-\mu_{2+3} = \mu_2 \oplus \mathbb{C}^3$ *(S.A.L. abeliana)*

$-B^{2,3} : [Y_i, Y_j] = b_{ij}^0 X_0 + b_{ij}^1 X_1, \quad \{b_{ij}^0, b_{ij}^1\}_{i,j} \subset \mathbb{C}, \ \exists b_{ij}^k \neq 0$ ($\mathfrak{g}_1$, $\mathfrak{g}_0$ *− módulo trivial)*

$-L_2 \oplus \mathbb{C}^2 : \ [X_0, Y_1] = Y_2$ *(L_2, A.L. filiforme)*

$-\mu^1 \ (\simeq \mu_2 \oplus_s \mathbb{C}^3) = \begin{cases} [X_0, Y_1] = Y_2 \\ [X_1, Y_1] = Y_3 \end{cases}$ *(A.L. metabeliana)*

$$-\mathcal{H}_2\ (\simeq \mu_2 \oplus_s \mathbb{C}^3) = \begin{cases} [X_0, Y_1] = Y_3 \\ [X_1, Y_2] = Y_3 \end{cases} \qquad \textit{(A.L. de Heisenberg)}$$

$$-\mu^2 = \begin{cases} [X_0, Y_1] = Y_2 \\ [Y_1, Y_1] = X_1 \end{cases} \qquad \textit{(Caso escindido, } \mathcal{N}^{\epsilon+\epsilon} \oplus \mathbb{C}\textit{)}$$

$$-\mu^3 = \begin{cases} [X_0, Y_1] = Y_3 \\ [X_1, Y_2] = -Y_3 \\ [Y_1, Y_1] = X_1 \\ [Y_1, Y_2] = \dfrac{1}{2} X_0 \end{cases}$$

$$-\mu^4 = \begin{cases} [X_0, Y_1] = Y_2 \\ [Y_1, Y_1] = X_1 \\ [Y_3, Y_3] = X_1 \end{cases}$$

$$-\mu^5 = \begin{cases} [X_0, Y_1] = Y_2 \\ [Y_1, Y_3] = X_1 \end{cases}$$

$$-\mu^6 = \begin{cases} [X_0, Y_1] = Y_2 \\ [Y_3, Y_3] = X_1 \end{cases}$$

Nota 3.4.2 Las superálgebras de Lie μ_{2+3}, $B^{2,3}$, $L_2 \oplus \mathbb{C}^2$, μ^1, $\mathcal{H}_2$ se considerarán **degeneradas** ya que no son propiamente superálgebras de Lie, sino, más bien, casos degenerados de éstas.

Así, $\mu_{2+3} = \mu_2 \oplus \mathbb{C}^3$ y $L_2 \oplus \mathbb{C}^2$ son álgebras de Lie, suma directa de un álgebra de Lie (la primera de dimensión 2 y la segunda de dimensión 3) con una potencia de $\mathbb{C}$. $B^{2,3}$ se corresponde con la estructura de $\mathfrak{g}_1$ como $\mathfrak{g}_0-$módulo trivial, esto es, el producto "." que dota a $\mathfrak{g}_1$ de estructura de $\mathfrak{g}_0-$módulo es idénticamente nulo ($[X_i, Y_j] = 0$), quedando cómo únicos productos no nulos los de la forma $[Y_i, Y_j]$, que no son más que la imagen de la aplicación bilineal y simétrica B (ver definición 1.2.2). Por último, μ^1, $\mathcal{H}_2$ se corresponden con álgebras de Lie de la forma $\mu_2 \oplus_s \mathbb{C}^3$ (suma semidirecta del A.L. abeliana μ_2 con $\mathbb{C}^3$), ambas son álgebras de Lie metabelianas: μ^1 de invariante de Goze (2,2,1) y el álgebra de Heisenberg de dimensión 5, $\mathcal{H}_2$, de invariante de Goze (2,1,1,1). Todas son claramente no isomorfas entre sí.

Nota 3.4.3 Sólo existen cuatro S.A.L. no degeneradas, no escindidas, y no isomorfas entre sí en la variedad $\mathcal{N}^{2+3} - \mathcal{F}^{2+3}$, que son μ^i con $3 \leq i \leq 6$.

Demostración del teorema: Es claro que las superálgebras del enunciado del teorema son S.A.L. nilpotentes del tipo $\mathcal{N}^{2+3}$ y no son isomorfas entre sí. En efecto, cualquier caso degenerado: μ_{2+3}, $B^{2,3}$, $L_2 \oplus \mathbb{C}^2$, μ^1 y $\mathcal{H}_2$ es no isomorfo a cualquier caso no degenerado μ^i para $2 \leq i \leq 6$. Los casos degenerados son no isomorfos entre sí gracias a la nota 3.4.2, y de los casos no degenerados la S.A.L. μ^2 es claramente no isomorfa al resto ya que es la única escindida. Para ver que μ^3, μ^4, μ^5 y μ^6 son no isomorfas véase la tabla siguiente.

	nilíndice	$dim(\mathcal{C}ent_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{g}_1))$	$dim[\mathcal{C}ent_{\mathfrak{g}_1}(\mathfrak{g}_0), \mathcal{C}ent_{\mathfrak{g}_1}(\mathfrak{g}_0)]$
μ^3	3	-	-
μ^4	2	2	1
μ^5	2	2	0
μ^6	2	3	-

Luego resta ver que las S.A.L. del enunciado son todas las que se obtienen en este caso. Por tanto, sea $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1 \in \mathcal{N}^{2+3}$, por el teorema 3.2.2 existe una base homogénea de $\mathfrak{g}$, asociada a su graduación, tal que

$$\begin{cases} [X_0, Y_1] = \delta_1 Y_2 + (1 - \delta_1)\Psi_1(Y_3) \\ \\ [X_0, Y_2] = \delta_2 Y_3 \end{cases}$$

con $\delta_1, \delta_2 \in \{0,1\}$, de donde se sigue que hay 6 posibilidades:

(1). $[X_0, Y_1] = 0$ y $[X_0, Y_2] = 0$.

(2). $[X_0, Y_1] = 0$ y $[X_0, Y_2] = Y_3$.

(3). $[X_0, Y_1] = Y_3$ y $[X_0, Y_2] = 0$ (previo cambio de escala $Y_3' = \Psi_1(Y_3)$ con $\Psi_1 \neq 0$).

(4). $[X_0, Y_1] = Y_3$ y $[X_0, Y_2] = Y_3$ (previo cambio de escala $Y_2' = \Psi_1(Y_2)$ e $Y_3' = \Psi_1(Y_3)$, con $\Psi_1 \neq 0$).

(5). $[X_0, Y_1] = Y_2$ y $[X_0, Y_2] = 0$.

(6). $[X_0, Y_1] = Y_2$ y $[X_0, Y_2] = Y_3$.

Se observa que el último caso corresponde con las S.A.L. filiformes ya que en este caso $\mathfrak{g}_1$ sería $\mathfrak{g}_0-$módulo filiforme. Luego resta estudiar los cinco primeros casos. Es trivial comprobar que siempre se puede tomar X_0 como vector característico de toda la superálgebra de Lie, de donde se sigue, en particular, que si $[X_0, Y_i] = Y_j$ entonces se verifica que $[X_1, Y_i] = \Psi(Y_j, Y_{j+1}, \ldots)$ e $Y_{j-1} \notin [X_1, Y_i]$. Así, queda

(1). $[X_0, Y_j] = 0$ y $[X_1, Y_j] = 0$, $1 \leq j \leq 2$.

(2). $[X_i, Y_1] = 0$, $[X_0, Y_2] = Y_3$ y $[X_1, Y_2] = D_{12}^3 Y_3$, $0 \leq i \leq 1$.

(3). $[X_0, Y_1] = Y_3$, $[X_1, Y_1] = D_{11}^3 Y_3$ y $[X_i, Y_2] = 0$, $0 \leq i \leq 1$.

(4). $[X_0, Y_1] = Y_3$, $[X_0, Y_2] = Y_3$, $[X_1, Y_1] = D_{11}^3 Y_3$ y $[X_1, Y_2] = D_{12}^3 Y_3$.

(5). $[X_0, Y_1] = Y_2$, $[X_1, Y_1] = D_{11}^2 Y_2 + D_{11}^3 Y_3$ y $[X_i, Y_2] = 0$, $0 \leq i \leq 1$.

A todos los casos anteriores habrá que adjuntar los productos de la forma $[Y_i, Y_j] = E_{ij}^0 X_0 + E_{ij}^1 X_1$ con $1 \leq i \leq j \leq 3$ (el resto se obtiene por simetría) e imponer que sean efectivamente superálgebras de Lie (nilpotentes ya salen automáticamente). Se irán obteniendo todas las superálgebras y familias de superálgebras del enunciado del teorema y, posteriormente, se probará que son dos a dos no isomorfas.

(1). En este caso habrá que distinguir dos subcasos: si $E_{ij}^k = 0 \ \forall i, j, k$, que dará lugar a la superálgebra de Lie abeliana μ_{2+3}, ó si $\exists E_{ij}^k \neq 0$ que dará lugar a $B^{2,3}$.

(2). Es fácil probar (mediante el cambio de base $X_1' = X_1 - D_{12}^3 X_0$) que no hay pérdida de generalidad en suponer $D_{12}^3 = 0$, luego queda

$$\begin{cases} [X_0, Y_2] = Y_3 \\ [Y_i, Y_j] = E_{ij}^0 X_0 + E_{ij}^1 X_1 \quad 1 \leq i \leq j \leq 3 \end{cases}$$

- De $J_g(X_0, Y_1, Y_2)$ se sigue que $[Y_1, Y_3] = 0$, esto es, $E_{13}^0 = E_{13}^1 = 0$.
- De $J_g(X_0, Y_2, Y_2)$ se sigue que $[Y_2, Y_3] = 0$, esto es, $E_{23}^0 = E_{23}^1 = 0$.
- De $J_g(X_0, Y_2, Y_3)$ se sigue que $[Y_3, Y_3] = 0$, esto es, $E_{33}^0 = E_{33}^1 = 0$.
- De $J_g(Y_1, Y_1, Y_2)$ se sigue que $E_{11}^0 = 0$.
- De $J_g(Y_1, Y_2, Y_2)$ se sigue que $E_{12}^0 = 0$.
- De $J_g(Y_2, Y_2, Y_2)$ se sigue que $E_{22}^0 = 0$.

El resto de los jacobis se verifican trivialmente, luego queda

$$\begin{cases} [X_0, Y_2] = Y_3 \\ [Y_i, Y_j] = E_{ij}^1 X_1 \quad 1 \leq i \leq j \leq 2 \end{cases}$$

sin ninguna restricción sobre las constantes de estructura E_{11}^1, E_{12}^1 y E_{22}^1. Habrá que distinguir dos casos:

(2.1). $E_{ij}^1 = 0$ con $1 \leq i \leq j \leq 2$, que dará lugar a la superálgebra de único producto no nulo $[X_0, Y_2] = Y_3$, que coincide con el álgebra de Lie L_2

suma directa con $\mathbb{C}^2$, o bien,

(2.2). $\exists E^1_{ij} \neq 0$ para algún par i, j con $1 \leq i \leq j \leq 2$. En tal caso renombraremos los Y_i mediante el cambio de base

$$\begin{cases} Y_1' = Y_2 \\ Y_2' = Y_3 \\ Y_3' = Y_1 \end{cases}$$

quedando

$$\begin{cases} [X_0, Y_1] = Y_2 \\ [Y_1, Y_1] = \alpha X_1 \\ [Y_1, Y_3] = \beta X_1 \\ [Y_3, Y_3] = \gamma X_1 \quad (\alpha, \beta, \gamma) \neq (0,0,0) \end{cases}$$

donde, por comodidad, se han llamado a las nuevas constantes de estructura por α, β y γ.

No habrá pérdida de generalidad en suponer que $\alpha \neq 0$, ya que si $\alpha = 0$; o bien $\beta \neq 0$, en cuyo caso bastaría tomar el cambio de base $Y_1' = Y_1 + aY_3$ con a no nulo y $a \neq -\dfrac{2\beta}{\gamma}$ para obtener una nueva constante de estructura $\alpha' \neq 0$ (se entiende que si $\gamma = 0$ la segunda restricción para a no aparecería), o bien $\beta = 0$ y $\gamma \neq 0$, en tal caso bastaría tomar cualquier cambio de base de la forma $Y_1' = Y_1 + aY_3$ con $a \neq 0$ para obtener, al igual que antes, una nueva constante de estructura $\alpha' \neq 0$.

Mediante el cambio de escala $X_1' = \alpha X_1$ se consigue $\alpha = 1$ dando lugar a la familia biparamétrica

$$\begin{cases} [X_0, Y_1] = Y_2 \\ [Y_1, Y_1] = X_1 \\ [Y_1, Y_3] = \beta X_1 \\ [Y_3, Y_3] = \gamma X_1 \end{cases}$$

con $\{\beta, \gamma\} \subset \mathbb{C}$. Distinguiéndose a continuación 4 subcasos:

(2.2.1). Si $\beta = \gamma = 0$. En tal caso la familia anterior queda en la S.A.L. μ^2, caso escindido.

(2.2.2). Si $\beta = 0$ y $\gamma \neq 0$. Mediante el cambio de escala dado por $Y_3' = \frac{1}{\sqrt{\gamma}} Y_3$ se obtiene la S.A.L. μ^4.

(2.2.3). Si $\beta \neq 0$ y $\gamma = 0$. Mediante el cambio de base dado por

$$\begin{cases} Y_1' = Y_1 - \frac{1}{2\beta} Y_3 \\ Y_3' = \frac{1}{\beta} Y_3 \end{cases}$$

se obtiene la S.A.L. μ^5.

(2.2.4). Si $\beta \neq 0$ y $\gamma \neq 0$. Mediante el cambio de base dado por

$$\begin{cases} Y_1' = Y_1 - \frac{\beta}{\gamma} Y_3 \\ Y_3' = \frac{1}{\sqrt{\gamma}} Y_3 \end{cases}$$

se obtiene la S.A.L. μ^6 en el caso que $\gamma = \beta^2$, en caso contrario $(\gamma \neq \beta^2)$ queda la familia paramétrica

$$\begin{cases} [X_0, Y_1] = Y_2 \\ [Y_1, Y_1] = \alpha X_1 \\ [Y_3, Y_3] = X_1 \end{cases}$$

con $\alpha \neq 0$, que tras el cambio de escala $Y_1' = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} Y_1$ se tranforma en μ^4.

(3). Es fácil probar (mediante el cambio de base $X_1' = X_1 - D_{11}^3 X_0$) que no hay pérdida de generalidad en suponer $D_{11}^3 = 0$, luego queda

$$\begin{cases} [X_0, Y_1] = Y_3 \\ [Y_i, Y_j] = E_{ij}^0 X_0 + E_{ij}^1 X_1 \quad 1 \leq i \leq j \leq 3 \end{cases}$$

- De $J_g(X_0, Y_1, Y_1)$ se sigue que $[Y_1, Y_3] = 0$, esto es, $E_{13}^0 = E_{13}^1 = 0$.

- De $J_g(X_0, Y_1, Y_2)$ se sigue que $[Y_2, Y_3] = 0$, esto es, $E_{23}^0 = E_{23}^1 = 0$.

- De $J_g(X_0, Y_1, Y_3)$ se sigue que $[Y_3, Y_3] = 0$, esto es, $E_{33}^0 = E_{33}^1 = 0$.

- De $J_g(Y_1, Y_1, Y_1)$ se sigue que $E_{11}^0 = 0$.

- De $J_g(Y_1, Y_1, Y_2)$ se sigue que $E^0_{12} = 0$.
- De $J_g(Y_1, Y_2, Y_2)$ se sigue que $E^0_{22} = 0$.

El resto de los jacobis se verifican trivialmente, luego queda

$$\begin{cases} [X_0, Y_1] = Y_3 \\ [Y_i, Y_j] = E^1_{ij} X_1 \quad 1 \leq i \leq j \leq 2 \end{cases}$$

sin ninguna restricción sobre las constantes de estructura E^1_{11}, E^1_{12} y E^1_{22}. Este caso es completamente análogo al anterior, se distinguen dos casos:

(3.1). $E^1_{ij} = 0$ con $1 \leq i \leq j \leq 2$, que dará lugar a la superálgebra de único producto no nulo $[X_0, Y_1] = Y_3$, que coincide con el álgebra de Lie L_2 suma directa con $\mathbb{C}^2$, o bien,

(3.2). $\exists E^1_{ij} \neq 0$ para algún par i, j con $1 \leq i \leq j \leq 2$. En tal caso renombraremos los Y_i mediante el cambio de base

$$\begin{cases} Y'_1 = Y_1 \\ Y'_2 = Y_3 \\ Y'_3 = Y_2 \end{cases}$$

quedando

$$\begin{cases} [X_0, Y_1] = Y_2 \\ [Y_1, Y_1] = \alpha X_1 \\ [Y_1, Y_3] = \beta X_1 \\ [Y_3, Y_3] = \gamma X_1 \quad (\alpha, \beta, \gamma) \neq (0,0,0) \end{cases}$$

que ya obteníamos en el caso (2.2) y, según lo visto, se obtienen las superálgebras de Lie μ^2, μ^4, μ^5 y μ^6.

(4). En este caso se tiene

$$\begin{cases} [X_0, Y_1] = Y_3 \\ [X_0, Y_2] = Y_3 \\ [X_1, Y_1] = D^3_{11} Y_3 \\ [X_1, Y_2] = D^3_{12} Y_3 \\ [Y_i, Y_j] = E^0_{ij} X_0 + E^1_{ij} X_1 \quad 1 \leq i \leq j \leq 3 \end{cases}$$

• De $J_g(X_0, Y_1, Y_1)$ se sigue que $[Y_1, Y_3] = 0$, esto es, $E^0_{13} = E^1_{13} = 0$.

• De $J_g(X_0, Y_1, Y_2)$ se sigue que $[Y_2, Y_3] = 0$, esto es, $E^0_{23} = E^1_{23} = 0$.

• De $J_g(X_0, Y_1, Y_3)$ se sigue que $[Y_3, Y_3] = 0$, esto es, $E^0_{33} = E^1_{33} = 0$.

• A partir de $J_g(Y_1, Y_1, Y_1)$, $J_g(Y_1, Y_1, Y_2)$, $J_g(Y_1, Y_2, Y_2)$ y de $J_g(Y_2, Y_2, Y_2)$ se obtienen las siguientes restricciones para las constantes de estructura

$$\begin{aligned} 0 &= E^0_{11} + E^1_{11} D^3_{11} && (3.3) \\ 0 &= E^0_{11} + E^1_{11} D^3_{12} + 2(E^0_{12} + E^1_{12} D^3_{11}) && (3.4) \\ 0 &= E^0_{22} + E^1_{22} D^3_{11} + 2(E^0_{12} + E^1_{12} D^3_{12}) && (3.5) \\ 0 &= E^0_{22} + E^1_{22} D^3_{12} && (3.6) \end{aligned}$$

El resto de los jacobis se verifican trivialmente.

De (3.3) y (3.6) se despejan las constantes de estructura E^0_{11} y E^0_{22}, llamándolas por comodidad β_1 y β_2 respectivamente. Sustituyendo los valores que se acaban de obtener para E^0_{11} y E^0_{22} en las ecuaciones (3.4) y (3.5) se obtienen dos nuevas ecuaciones y, se tomará, por simplicidad, una cualquiera de ellas y su diferencia. Con todo esto, queda

$$\begin{cases} [X_0, Y_1] = Y_3 \\ [X_0, Y_2] = Y_3 \\ [X_1, Y_1] = \alpha_1 Y_3 \\ [X_1, Y_2] = \alpha_2 Y_3 \\ [Y_1, Y_1] = \beta_1(\alpha_1 X_0 - X_1) \\ [Y_1, Y_2] = \beta_3 X_0 + \beta_4 X_1 \qquad \beta_1(\alpha_1 - \alpha_2) + 2\beta_3 + 2\beta_4 \alpha_1 = 0 \\ [Y_2, Y_2] = \beta_2(\alpha_2 X_0 - X_1) \qquad (\alpha_1 - \alpha_2)(\beta_1 + \beta_2 + 2\beta_4) = 0 \end{cases}$$

donde se han llamado a las constantes de estructura D^3_{11}, D^3_{12}, E^1_{11}, E^1_{22}, E^0_{12} y E^1_{12}, respectivamente, por α_1, α_2, $-\beta_1$, $-\beta_2$, β_3 y β_4.

Se distinguen, a continuación, tres casos:

(4.1). $\beta_i = 0$ con $1 \leq i \leq 4$. En este caso mediante el cambio de base

$$\begin{cases} X_1' = X_1 - \alpha_2 X_0 \\ Y_2' = Y_2 - Y_1 \end{cases}$$

y renombrando a $(\alpha_1 - \alpha_2)$ por α se obtiene

$$\begin{cases} [X_0, Y_1] = Y_3 \\ [X_1, Y_1] = \alpha Y_3 \\ [X_1, Y_2] = -\alpha Y_3 \end{cases}$$

Se distinguen a continuación dos casos; si $\alpha = 0$ se obtiene $L_2 \oplus \mathbb{C}^2$ y , si $\alpha \neq 0$ mediante el cambio de base $X_1' = X_1 - \alpha X_0$ seguido del cambio de escala $X_1' = -\frac{1}{\alpha} X_1$ se llega al álgebra de Heisenberg $\mathcal{H}_2$.

(4.2). $\exists \beta_i \neq 0$ para algún i, con $1 \leq i \leq 4$, y $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$. En este caso las restricciones se reducen a $\beta_3 = -\beta_4 \alpha_1$ quedando la familia de superálgebras de la siguiente forma

$$\begin{cases} [X_0, Y_1] = Y_3 \\ [X_0, Y_2] = Y_3 \\ [X_1, Y_1] = \alpha Y_3 \\ [X_1, Y_2] = \alpha Y_3 \\ [Y_1, Y_1] = \beta_1(\alpha X_0 - X_1) & \qquad (\beta_1, \beta_2, \beta_4) \neq (0,0,0) \\ [Y_1, Y_2] = -\beta_4(\alpha X_0 - X_1) \\ [Y_2, Y_2] = \beta_2(\alpha X_0 - X_1) \end{cases}$$

mediante el cambio de base $X_1' = \alpha X_0 - X_1$, se tiene que

$$\begin{cases} [X_0, Y_1] = Y_3 \\ [X_0, Y_2] = Y_3 \\ [Y_1, Y_1] = \beta_1 X_1 & \qquad (\beta_1, \beta_2, \beta_4) \neq (0,0,0) \\ [Y_1, Y_2] = -\beta_4 X_1 \\ [Y_2, Y_2] = \beta_2 X_1 \end{cases}$$

No habrá pérdida de generalidad en suponer que $\beta_2 \neq 0$, ya que si $\beta_2 = 0$; bastaría tomar cualquier cambio de base $Y_2' = \frac{1}{1+a}Y_2 + \frac{a}{1+a}Y_1$ tal que $a \notin \{0, -1, \frac{2\beta_4}{\beta_1}\}$ para obtener una nueva constante de estructura $\beta_2' \neq 0$ (se entiende que si $\beta_1 = 0$ el valor $\frac{2\beta_4}{\beta_1}$ no aparecería en el conjunto anterior).

Mediante el cambio de escala $X_1' = \beta_2 X_1$ se tiene $\beta_2 = 1$. Mediante el cambio de base $Y_1' = Y_1 - Y_2$, y renombrando adecuadamente los vectores Y_i y los paramétros β_1 y β_4 se obtiene la familia biparamétrica del caso (2.2) que da lugar a μ^2, μ^4, μ^5 y μ^6.

(4.3). $\exists \beta_i \neq 0$ para algún i, con $1 \leq i \leq 4$, y $\alpha_1 \neq \alpha_2$. En este caso las ecuaciones de la familia quedan

$$\beta_4 = -\frac{1}{2}(\beta_1 + \beta_2) \quad \wedge \quad \beta_3 = \frac{1}{2}(\alpha_2\beta_1 + \alpha_1\beta_2)$$

llegando a la familia

$$\begin{cases} [X_0, Y_1] = Y_3 \\ [X_0, Y_2] = Y_3 \\ [X_1, Y_1] = \alpha_1 Y_3 \\ [X_1, Y_2] = \alpha_2 Y_3 \\ [Y_1, Y_1] = \beta_1(\alpha_1 X_0 - X_1) \\ [Y_1, Y_2] = \frac{1}{2}(\beta_1\alpha_2 + \alpha_1\beta_2)X_0 - \frac{1}{2}(\beta_1 + \beta_2)X_1 \\ [Y_2, Y_2] = \beta_2(\alpha_2 X_0 - X_1) \end{cases}$$

con $\alpha_1 \neq \alpha_2$ y $(\beta_1, \beta_2) \neq (0,0)$. Mediante el cambio de base $X_1' = \alpha_2 X_0 - X_1$ y renombrando $\alpha_2 - \alpha_1$ por α queda

$$\begin{cases} [X_0, Y_1] = Y_3 \\ [X_0, Y_2] = Y_3 \\ [X_1, Y_1] = \alpha Y_3 \\ [Y_1, Y_1] = \beta_1(-\alpha X_0 + X_1) \\ [Y_1, Y_2] = \dfrac{1}{2}((-\alpha\beta_2)X_0 + (\beta_1 + \beta_2)X_1) \\ [Y_2, Y_2] = \beta_2 X_1 \end{cases}$$

con $\alpha \neq 0$ y $(\beta_1, \beta_2) \neq (0,0)$. Siempre se puede suponer $\alpha = 1$ gracias al cambio de escala

$$\begin{cases} X_0' = \alpha X_0 \\ Y_3' = \alpha Y_3 \end{cases}$$

Mediante el cambio de base $X_0' = -X_0 + X_1$ se llega a

$$\begin{cases} [X_0, Y_2] = -Y_3 \\ [X_1, Y_1] = Y_3 \\ [Y_1, Y_1] = \beta_1 X_0 \\ [Y_1, Y_2] = \dfrac{1}{2}(\beta_2 X_0 + \beta_1 X_1) \\ [Y_2, Y_2] = \beta_2 X_1 \end{cases}$$

con $(\beta_1, \beta_2) \neq (0,0)$. Se distinguen a continuación 2 subcasos:

(4.3.1). Si $\beta_1 = 0$. En tal caso $\beta_2 \neq 0$ y mediante el cambio de escala $Y_i' = \frac{1}{\sqrt{\beta_2}} Y_i$, $1 \leq i \leq 3$, seguido del cambio de base

$$\begin{cases} Y_1' = Y_2 \\ Y_2' = Y_1 \\ Y_3' = -Y_3 \end{cases}$$

se llega a la superálgebra μ^3.

(4.3.2). Si $\beta_1 \neq 0$. Mediante el cambio de escala $Y_i' = \frac{1}{\sqrt{\beta_1}} Y_i$, $1 \leq i \leq 3$, y renombrando a $\frac{\beta_2}{\beta_1}$ por β_2 se obtiene

$$\begin{cases} [X_0, Y_2] = -Y_3 \\ [X_1, Y_1] = Y_3 \\ [Y_1, Y_1] = X_0 \\ [Y_1, Y_2] = \dfrac{1}{2}(\beta_2 X_0 + X_1) \\ [Y_2, Y_2] = \beta_2 X_1 \end{cases}$$

Si $\beta_2 = 0$ sin más que considerar el cambio de base

$$\begin{cases} X_0' = X_1 \\ X_1' = X_0 \end{cases}$$

se obtiene la S.A.L. μ^3. Si $\beta_2 \neq 0$ mediante el cambio de escala

$$\begin{cases} X_0' = \beta_2^2 X_0 \\ X_1' = \beta_2 X_1 \\ Y_1' = \beta_2 Y_1 \\ Y_2' = Y_2 \\ Y_3' = \beta_2^2 Y_3 \end{cases}$$

seguido del cambio de base

$$\begin{cases} X_0' = X_0 - X_1 \\ Y_1' = Y_1 - Y_2 \end{cases}$$

se llega nuevamente a la superálgebra μ^3 sin más que considerar el cambio

$$\begin{cases} Y_1' = Y_2 \\ Y_2' = Y_1 \\ Y_3' = -Y_3 \end{cases}$$

(5). En este caso se tiene que

$$\begin{cases} [X_0, Y_1] = Y_2 \\ [X_1, Y_1] = D_{11}^2 Y_2 + D_{11}^3 Y_2 \\ [Y_i, Y_j] = E_{ij}^0 X_0 + E_{ij}^1 X_1 \quad 1 \leq i \leq j \leq 3 \end{cases}$$

• De $J_g(X_0, Y_1, Y_1)$ se sigue que $[Y_1, Y_2] = 0$, esto es, $E_{12}^0 = E_{12}^1 = 0$.

• De $J_g(X_0, Y_1, Y_2)$ se sigue que $[Y_2, Y_2] = 0$, esto es, $E_{22}^0 = E_{22}^1 = 0$.

• De $J_g(X_0, Y_1, Y_3)$ se sigue que $[Y_2, Y_3] = 0$, esto es, $E_{23}^0 = E_{23}^1 = 0$.

• A partir de $J_g(X_1, Y_1, Y_1)$, $J_g(X_1, Y_1, Y_3)$, $J_g(Y_1, Y_1, Y_1)$, $J_g(Y_1, Y_1, Y_3)$ y de $J_g(Y_1, Y_3, Y_3)$ se obtienen las siguientes ecuaciones para las constantes de estructura

$$
\begin{aligned}
0 &= E_{13}^0 D_{11}^3 && (3.7)\\
0 &= E_{13}^1 D_{11}^3 && (3.8)\\
0 &= E_{33}^0 D_{11}^3 && (3.9)\\
0 &= E_{33}^1 D_{11}^3 && (3.10)\\
0 &= E_{11}^0 + E_{11}^1 D_{11}^2 && (3.11)\\
0 &= E_{11}^1 D_{11}^3 && (3.12)\\
0 &= E_{13}^0 + E_{13}^1 D_{11}^2 && (3.13)\\
0 &= E_{33}^0 + E_{33}^1 D_{11}^2 && (3.14)
\end{aligned}
$$

El resto de los jacobis se verifican trivialmente. Se distinguen dos casos:

(5.1). $D_{11}^3 \neq 0$. De las ecuaciones anteriores se deduce que $E_{ij}^k = 0$ para todos los valores posibles de i, j, k. Mediante el cambio de base

$$
\begin{cases}
X_1' = X_1 - D_{11}^2 X_0 \\
Y_3' = D_{11}^3 Y_3
\end{cases}
$$

se llega al álgebra de Lie μ^1.

(5.2). $D_{11}^3 = 0$. Sólo quedan las ecuaciones (3.11), (3.13), y (3.14), de donde se despejan las constantes de estructura E_{11}^0, E_{13}^0 y E_{33}^0 en función del resto. Así mismo, se denotará por $\alpha = -E_{11}^1$, $\beta = -E_{13}^1$ y $\gamma = -E_{33}^1$, luego

$$\begin{cases} [X_0, Y_1] = Y_2 \\ [X_1, Y_1] = D_{11}^2 Y_2 \\ [Y_1, Y_1] = \alpha(D_{11}^2 X_0 - X_1) \\ [Y_1, Y_3] = \beta(D_{11}^2 X_0 - X_1) \\ [Y_3, Y_3] = \gamma(D_{11}^2 X_0 - X_1) \end{cases}$$

Mediante el cambio de base $X_1' = D_{11}^2 X_0 - X_1$ se tiene

$$\begin{cases} [X_0, Y_1] = Y_2 \\ [Y_1, Y_1] = \alpha X_1 \\ [Y_1, Y_3] = \beta X_1 \\ [Y_3, Y_3] = \gamma X_1 \end{cases}$$

Distinguiéndose dos casos, si $(\alpha, \beta, \gamma) = (0, 0, 0)$ se obtiene $L_2 \oplus \mathbb{C}^2$ y, si $(\alpha, \beta, \gamma) \neq (0, 0, 0)$ se llega a la misma familia que para el caso (2.2).

Con esto queda probado el teorema. $\square$

Corolario 3.4.5 $f(2, 3) = 4$ $(= n + m - 1)$

Teorema 3.4.6 (de estructura). *Para* $n = 2$ *y* $m = 3$ *es cierta la* **conjetura** $\mathcal{M}^{n+m} \subset \mathcal{F}^{n+m}$, *esto es,* $\mathcal{M}^{2+3} \subset \mathcal{F}^{2+3}$. *Además* $\mathcal{M}^{2+3} = \mathcal{O}(K^{2,3})$.

Demostración: Se sigue del teorema de clasificación, donde se observa que cualquier $\mathfrak{g} \in \mathcal{N}^{2+3} - \mathcal{F}^{2+3}$ tiene nilíndice ≤ 3, junto con el hecho de que el nilíndice máximal para la familia $\mathcal{F}^{2+3}$ sea $4 = (n + m - 1)$ (teorema de existencia) y que además la única superálgebra con este nilíndice sea $\mathcal{O}(K^{2,3})$ (teorema de unicidad). $\square$

Se deja para un estudio posterior el cálculo de las componentes irreducibles de la variedad $\mathcal{N}^{2+3}$.

3.4.3 Caso $n = 2$ y m impar.

Para el caso $n = 2$ y m impar se va a generalizar lo obtenido para las dimensiones $m = 1$ y $m = 3$, obteniéndose el mismo valor de la función f que para el caso filiforme, $f(2,m) = m + 1$ $(= n + m - 1)$ y la veracidad de la conjetura $\mathcal{M}^{2+m} \subset \mathcal{F}^{2+m}$. En este caso no se clasifican las S.A.L. debido a la gran complejidad del problema.

Lema 3.4.7 *$f(2,m) = m + 1$, con m impar.*

Demostración: Se va a demostrar el lema por reducción al absurdo, suponiendo que $f(2,m) = m+2$, (el máximo posible) y llegando a contradicción. Como ya se sabe que $K^{2,m} \in \mathcal{N}^{2+m}$ tiene nilíndice $m+1$, se seguiría el resultado.

Sea $\mathfrak{g} \in \mathcal{N}^{2+m}_{n+m}$ de base $\{X_0, X_1, Y_1, \ldots, Y_m\}$ con

$$\begin{cases} [X_0, Y_j] = \delta_j Y_{j+1} + (1-\delta_j)\Psi_j(Y_{j+2}, \ldots, Y_m) & 1 \le j \le m-1 \\ [X_0, Y_m] = 0 & \varepsilon_i, \delta_j \in \{0,1\} \end{cases}$$

Por tener nilíndice $n + m$ se tiene que

$$\mathcal{C}^1(\mathfrak{g}) = < X_0, X_1 > \oplus < Y_2, \ldots, Y_m >$$

con $dim(\mathcal{C}^i(\mathfrak{g})/\mathcal{C}^{i+1}(\mathfrak{g})) = 1, \quad 0 \le i \le n+m-1$. Al ser $\mathfrak{g}_0$ abeliana es admisible cualquier cambio de base de la forma $X_0' = X_0 + \gamma X_1$, de donde se sigue que siempre se podrá considerar X_0 vector característico, luego $[X_0, Y_1] = Y_2$. Para $\mathcal{C}^2(\mathfrak{g})$ habrá que considerar dos casos:

<u>Caso a.</u> Si $\mathcal{C}^2(\mathfrak{g}) = < X_1 > \oplus < Y_2, \ldots, Y_m >$, la única posibilidad para X_0 es el producto $[Y_1, Y_1] = aX_0 + bX_1$, con $a \neq 0$ y para X_1 ha de verificarse que

$$\exists\ (j,k) \neq (1,1)/[Y_j, Y_k] = X_1$$

De $J_g(Y_1, Y_1, Y_1)$ se tiene que

$$0 = [[Y_1, Y_1], Y_1] = a[X_0, Y_1] + b[X_1, Y_1] \Longrightarrow [X_1, Y_1] = \lambda Y_2,\ \lambda \neq 0$$

De $J_g(Y_1, Y_j, Y_k)$ se tiene que

$$[Y_1, [Y_j, Y_k]] + [Y_k, [Y_1, Y_j]] + [Y_j, [Y_k, Y_1]] = 0$$

como el primer sumando vale $-\lambda Y_2$, forzosamente tiene que aparecer Y_2 en alguno de los otros dos sumandos , es decir, ha de ser $j = 1$ ó $k = 1$.

Por ejemplo, para $j = 1$ (el caso $k = 1$ es análogo) queda

$$2[Y_1, [Y_1, Y_k]] + [Y_k, [Y_1, Y_1]] = 0$$

es decir,

$$-2\lambda Y_2 + [Y_k, aX_0 + bX_1] = 0$$

por lo que ha de ser $k = 1$, lo que es una contradicción.

Caso b. Si $\mathcal{C}^2(\mathfrak{g}) =< X_0 > \oplus < Y_2, \ldots, Y_m >$, se tiene que $[Y_1, Y_1] = aX_1 + bX_0$ con $a \neq 0$, y para X_0 ha de verificarse

$$\exists\ (j, k) \neq (1, 1)/[Y_j, Y_k] = X_0$$

Como $[Y_1, [Y_j, Y_k]] + [Y_k, [Y_1, Y_j]] + [Y_j, [Y_k, Y_1]] = 0$ con $[Y_1, [Y_j, Y_k]] = -Y_2$, tiene que aparecer Y_2 en alguno de los otros dos sumandos, es decir, ha de ser $j = 1$ ó $k = 1$.

Por ejemplo para $j = 1$ queda

$$2[Y_1, [Y_1, Y_k]] + [Y_k, [Y_1, Y_1]] = 0$$

es decir,

$$-2Y_2 + [Y_k, aX_0 + bX_1] = 0$$

y, de nuevo, ha de ser $k = 1$, lo que es una contradicción.

Con esto se concluye la demostración del lema. $\square$

Teorema 3.4.8 (de estructura). *Para $n = 2$ y m impar es cierta la* **conjetura** $\mathcal{M}^{n+m} \subset \mathcal{F}^{n+m}$, *esto es,* $\mathcal{M}^{2+m} \subset \mathcal{F}^{2+m}$. *Además se cumple*

$$\mathcal{M}^{2+m} = \mathcal{O}(K^{2,m}) = \mu(\alpha_1, \ldots, \alpha_{\frac{m-1}{2}})$$

donde $\mu(\alpha_1, \ldots, \alpha_{\frac{m-1}{2}})$ *viene dada por los productos*

$$\begin{cases} [X_0, Y_i] = Y_{i+1} & 1 \leq i \leq m-1 \\ [Y_i, Y_{m+1-i}] = (-1)^{i+1} X_1 & 1 \leq i \leq \frac{m+1}{2} \\ [Y_i, Y_{2k-i}] = (-1)^{i+1} \alpha_k X_1 & 1 \leq i \leq k, 1 \leq k \leq \frac{m-1}{2} \end{cases}$$

con $\alpha_k \in \mathbb{C}$ *para* $1 \leq k \leq \dfrac{m-1}{2}$.

Nota 3.4.4 Gracias al teorema anterior queda totalmente determinada la variedad algebraica $\mathcal{M}^{2+m}$ para m impar, confirmándose como abierto no sólo de la variedad algebraica de todas las S.A.L. nilpotentes $\mathcal{N}^{2+m}$, sino también como abierto de $\mathcal{F}^{2+m}$ para la topología de Zariski inducida (recuérdese que $\mu(\alpha_1, \ldots, \alpha_{\frac{m-1}{2}})$ dentro de $\mathcal{F}^{2+m}$ está definida por $E^1_{1m} \neq 0$).

Demostración del teorema: Gracias al lema 3.4.7, junto al teorema de nilíndice maximal y al de unicidad vistos en la sección anterior, falta ver que cualquier $\mathfrak{g} \in \mathcal{N}^{2+m} - \mathcal{F}^{2+m}$ tiene nilíndice $\leq m$ $(= n + m - 2)$. En la demostración no se impondrá ninguna restricción sobre m, luego será válida tanto para el caso m par como para m impar. El resultado seguirá de imponer $dim(\mathcal{C}^1(\mathfrak{g})) = m$ (condición necesaria para alcanzar nilíndice $m+1$). Mediante un razonamiento análogo al seguido en lema 3.4.7 se tiene que $dim(\mathcal{C}^1(\mathfrak{g})_0) < 2$) que implica $dim(\mathcal{C}^1(\mathfrak{g})_1) = m - 1$.
En estas condiciones se va a probar que la S.A.L. $\mathfrak{g}$ es un caso degenerado ($[Y_i, Y_j] = 0 \ \forall i, j$), es decir, es en realidad un álgebra de Lie que nunca da nilíndice maximal. Para $m = 3$ sólo hay un álgebra de este tipo y se corresponde con μ^1.

Por tanto, sea $\mathfrak{g} \in \mathcal{N}^{2+m} - \mathcal{F}^{2+m}$ con $dim(\mathcal{C}^1(\mathfrak{g})) = m$ y $m \geq 5$, se verá que $\mathfrak{g}$ tiene nilíndice $\leq m$ $(= n + m - 2)$ (es trivial ver que siempre puede considerarse X_0 vector característico de la S.A.L.). En este caso $\mathfrak{g}$ tiene invariante de Goze $(1, 1 \mid m - p_1, p_2, \ldots, p_r)$ con $\sum_{i=1}^r p_i = m$, $m - p_1 \geq p_2 \geq \ldots \geq p_r$ y con algún p_i no nulo.

Al ser X_0 vector característico, en la demostración que sigue no habrá pérdida de generalidad en suponer que $\mathfrak{g}$ tiene los siguientes productos con X_0

$$\begin{cases} [X_0, Y_{j_1}] = Y_{j_1+1} & 1 \leq j_1 \leq m - p_1 - 1 \\ [X_0, Y_{m-p_1+j_2}] = Y_{m-p_1+j_2+1} & 1 \leq j_2 \leq p_2 - 1 \\ [X_0, Y_{m-p_1+p_2+j_3}] = Y_{m-p_1+p_2+j_3+1} & 1 \leq j_3 \leq p_3 - 1 \\ \quad \vdots & \\ [X_0, Y_{m-p_1+p_2+\ldots+p_{r-1}+j_r}] = Y_{m-p_1+p_2+\ldots+p_{r-1}+j_r+1} & 1 \leq j_r \leq p_r - 1 \end{cases}$$

Ya se sabe que $dim(\mathcal{C}^1(\mathfrak{g})_0) < 2$, pero en particular se puede probar que X_0 no aparece en la derivada, esto es, $E^0_{ij} = 0$ para todos los i,j con $1 \leq i \leq j \leq m$ (el resto se obtiene por simetría). Este hecho seguirá de que se puede suponer que el único producto en el que aparece Y_2 es $[X_0, Y_1]$ (ya que si ocurriera $[X_1, Y_1] = \lambda Y_2 + \Psi(Y_3, \ldots, Y_m)$ con $\lambda \neq 0$, mediante el cambio de base $X_1' = X_1 - \lambda X_0$ se conseguiría $\lambda = 0$) .

Se va a probar entonces la nulidad de las constantes de estructura anteriormente mencionadas por reducción al absurdo. Luego, supóngase que existen i,j con $1 \leq i \leq j \leq m$ tales que $E^0_{ij} \neq 0$.

• De $J_g(Y_1, Y_i, Y_j)$ se tiene que $[Y_1, [Y_i, Y_j]] + [Y_j, [Y_1, Y_i]] + [Y_i, [Y_j, Y_1]] = 0$ con $Y_2 \in [Y_1, [Y_i, Y_j]]$, de donde se sigue que tiene que aparecer Y_2 en alguno de los otros dos sumandos, es decir, ha de ser $i = 1$ ó $j = 1$.

Por ejemplo, si $i = 1$ (el caso $j = 1$ es análogo) queda

$$2[Y_1, [Y_1, Y_j]] + [Y_j, [Y_1, Y_1]] = 0$$

con lo que Y_2 tiene que aparecer en $[Y_j, [Y_1, Y_1]]$, de donde se sigue que $j = 1$. Así, la única posibilidad para X_0 es $[Y_1, Y_1]$, es decir, $E^0_{11} \neq 0$.

• De $J_g(Y_1, Y_1, Y_1)$ se sigue que $Y_2 \in [Y_1, [Y_1, Y_1]] = 0$ lo que es, evidentemente, una contradicción.

Así, se tiene que $E^0_{ij} = 0$ para todos los i,j con $1 \leq i \leq j \leq m$.

Si se quiere que la S.A.L. tenga nilíndice $m+1$ $(= m+n-1)$, se tendrá como condición necesaria que $dim(\mathcal{C}^1(\mathfrak{g})) = m$, en particular

$$\begin{cases} \mathcal{C}^1(\mathfrak{g})_0 = < X_1 > \\ \mathcal{C}^1(\mathfrak{g})_1 = < Y_2, Y_3, \ldots, Y_m > \end{cases}$$

De donde se sigue que tienen que existir i, j tales que $E^1_{ij} \neq 0$, con $1 \leq i \leq j \leq m$ y que los $(r-1)$ vectores que no aparecen en $Im(adX_0)$, que son

$$\{Y_{m-p_1+1}, Y_{m-p_1+p_2+1}, Y_{m-p_1+p_2+p_3+1}, \ldots, Y_{m-p_1+p_2+\ldots+p_{r-1}1}, \}$$

tienen que aparecer en la $Im(adX_1)$. Más concretamente, para estos $(r-1)$ vectores sólo hay $(r-1)$ posibilidades:

$$\begin{cases} [X_1, Y_1] \\ [X_1, Y_{m-p_1+1}] \\ \quad \vdots \\ [X_1, Y_{m-p_1+p_2+\ldots+p_{r-2}+1}] \end{cases}$$

En efecto, ya que si uno cualquiera de los vectores anteriores, por ejemplo Y_{m-p_1+1}, (con cualquier otro todo se haría análogo) perteneciese a un corchete de la forma $[X_1, Y_{j+1}]$ donde $[X_0, Y_j] = Y_{j+1}$ (es decir, el vector $Y_{j+1} \in Im(adX_0)$) de $J_g(X_0, X_1, Y_j)$ se tendría que

$$0 = [[X_0, X_1], Y_j] = [Y_{j+1}, X_1] - [[X_1, Y_j], X_0]$$

lo que implica que $Y_{m-p_1+1} \in Im(adX_0)$ llegando claramente a contradicción.

En particular, por nilpotencia, el vector Y_{m-p_1+1} sólo puede pertenecer al primer corchete, es decir, la única posibilidad para el vector Y_{m-p_1+1} es $Y_{m-p_1+1} \in [X_1, Y_1]$. Se verá, a continuación, que de este hecho se deduce que $E^1_{ij} = 0$ para todo i, j con $1 \leq i \leq j \leq m$ (el resto serían tambien nulos por simetría).

Siguiendo un razonamiento análogo al utilizado para las constantes de estructura E^0_{ij}, se probarán la nulidad de las constantes E^1_{ij} por reducción al absurdo. Luego, supongamos que existen i, j tales que $E^1_{ij} \neq 0$, con $1 \leq i \leq j \leq m$.

• De $J_g(Y_1, Y_i, Y_j)$ se tiene que $[Y_1, [Y_i, Y_j]] + [Y_j, [Y_1, Y_i]] + [Y_i, [Y_j, Y_1]] = 0$ con $Y_{m-p_1+1} \in [Y_1, [Y_i, Y_j]]$, de donde se sigue que tiene que aparecer Y_{m-p_1+1} en alguno de los otros dos sumandos, es decir, ha de ser $i = 1$ ó $j = 1$.

Por ejemplo, si $i = 1$ (el caso $j = 1$ es análogo) queda

$$2[Y_1, [Y_1, Y_j]] + [Y_j, [Y_1, Y_1]] = 0$$

y, al igual que antes, Y_{m-p_1+1} tiene que aparecer en $[Y_j, [Y_1, Y_1]]$ de donde se sigue que $j = 1$. Así, la única posibilidad para X_1 es $[Y_1, Y_1]$, es decir, $E_{11}^1 \neq 0$.

• De $J_g(Y_1, Y_1, Y_1)$ se sigue que $Y_{m-p_1+1} \in [Y_1, [Y_1, Y_1]] = 0$ lo que es, evidentemente, una contradicción.

Así, se tiene que $E_{ij}^0 = E_{ij}^1 = 0$ para cualquiera que sean i, j, tales que $1 \leq i \leq j \leq \leq m$, llegando por tanto a una S.A.L. escindida ya que realmente es un álgebra de Lie y nunca dará nilíndice maximal (es fácil comprobar que $dim(\mathcal{C}^{i+1}(\mathfrak{g})/\mathcal{C}^i(\mathfrak{g}) \geq 2$, al menos para $i = 1, 2$, de donde se seguiría que el nilíndice es $\leq m - 1 (= n + m - 3))$.

Con esto se concluye la demostración del teorema. □

3.4.4 Caso $n = 3$ y m impar.

En este caso se encontrará una superálgebra de Lie no filiforme, en particular de invariante de Goze $(1, 1, 1|\ m)$ que alcanza el nilíndice maximal de las filiformes para este caso. Como consecuencia, sigue que en este caso **no** se verifica la conjetura: $\mathcal{M}^{n+m} \subset \mathcal{F}^{n+m}$.

Teorema 3.4.9 *La conjetura:*

$$\mathcal{M}^{n+m} \subset \mathcal{F}^{n+m}$$

no es cierta, al menos para $n = 3$ y m impar.

Demostración: Basta con tener en cuenta la siguiente superálgebra, cuya ley viene expresada, en una cierta base adaptada $\{X_0, X_1, X_2, Y_1, \ldots, Y_m\}$, por

$$\begin{cases} [X_0, Y_i] = Y_{i+1}, & 1 \le i \le m-1 \\ [Y_j, Y_{2k-j}] = (-1)^j (X_1 - kX_2), & 1 \le j \le k, \ 1 \le k \le \dfrac{m+1}{2} \end{cases}$$

con invariante de Goze $(1,1,1|\ m)$ y con nilíndice $m+1$ $(= n+m-2)$ que es el nilíndice maximal de la variedad $\mathcal{F}^{3+m}$ con m impar. □

3.4.5 Cotas inferiores de $f(n,m)$.

En las secciones anteriores se ha determinado la función nilíndice maximal restringida a las S.A.L. filiformes, $f(n,m)|_{\mathcal{F}^{n+m}}$, para casi todas las posibilidades de n y m. Los valores obtenidos de la función constituyen cotas inferiores de $f(n,m) = f(n,m)|_{\mathcal{N}^{n+m}}$, muy cercanas al valor de la función, siendo incluso una conjetura el hecho de que

$$f(n,m)|_{\mathcal{F}^{n+m}} = f(n,m)|_{\mathcal{N}^{n+m}}$$

Lema 3.4.10 *Si el par (n,m) se encuentra en uno de los siguientes casos*

$$\begin{array}{rl} i) & n=3, \ m \text{ impar} \\ ii) & n \le 4, \ m \text{ par} \\ iii) & n=4, \ m=5 \end{array}$$

se verifica que el nilíndice maximal $f(n,m) \ge n+m-2$.

Lema 3.4.11

$$m=1\begin{cases} n=1 & \longrightarrow f(1,1)\geq 2 & (\textit{ caso trivial }) \\ n=2 & \longrightarrow f(2,1)=2 & (=n+m-1) \\ n\geq 3 & \longrightarrow f(n,1)\geq n-1 & (\geq n+m-2) \end{cases}$$

$$m=2\begin{cases} n=1 & \longrightarrow f(1,2)\geq 2 & (\textit{ caso trivial }) \\ 2\leq n\leq 4 & \longrightarrow f(n,2)\geq n & (\geq n+m-2) \\ n\geq 5 & \longrightarrow f(n,2)\geq n-1 & (\geq n+m-3) \end{cases}$$

$$m=3\begin{cases} n=1 & \longrightarrow f(1,3)\geq 3 & (\textit{ caso trivial }) \\ n=2 & \longrightarrow f(2,3)=4 & (=n+m-1) \\ 3\leq n\leq 4 & \longrightarrow f(n,3)\geq n+1 & (\geq n+m-2) \\ 5\leq n\leq 6 & \longrightarrow f(n,3)\geq n & (\geq n+m-3) \\ n\geq 7 & \longrightarrow f(n,3)\geq n-1 & (\geq n+m-4) \end{cases}$$

$$m = 4 \begin{cases} n = 1 & \longrightarrow f(1,4) \geq 4 & (\text{ caso trivial }) \\ 2 \leq n \leq 4 & \longrightarrow f(n,4) \geq n+2 & (\geq n+m-2) \\ 5 \leq n \leq 6 & \longrightarrow f(n,4) \geq n+2 & (\geq n+m-2) \\ 7 \leq n \leq 8 & \longrightarrow f(n,4) \geq n & (\geq n+m-4) \\ n \geq 9 & \longrightarrow f(n,4) \geq n-1 & (\geq n+m-5) \end{cases}$$

Lema 3.4.12 *Se tiene lo siguiente para cada dimensión $m \geq 5$.*

$$m \text{ par} \begin{cases} n = 1 & \longrightarrow f(1,m) \geq m & (\text{ caso trivial }) \\ 2 \leq n \leq 4 & \longrightarrow f(n,m) \geq m+n-2 & (\geq n+m-2) \\ m \leq n \leq m+2 & \longrightarrow f(n,m) \geq m+n-2 & (\geq n+m-2) \\ n \geq 2m+1 & \longrightarrow f(n,m) \geq n-1 & (\geq n-1) \end{cases}$$

$$m \text{ impar} \begin{cases} n = 1 & \longrightarrow f(1,m) \geq m & (\text{ caso trivial }) \\ n = 2 & \longrightarrow f(2,m) = m+1 & (= n+m-1) \\ n = 3 & \longrightarrow f(3,m) \geq m+1 & (\geq n+m-2) \\ m \leq n \leq m+1 & \longrightarrow f(n,m) \geq m+n-2 & (\geq n+m-2) \\ n \geq 2m+1 & \longrightarrow f(n,m) \geq n-1 & (\geq n-1) \end{cases}$$

Demostración de los lemas 3.4.10, 3.4.10 y 3.4.10: es una consecuencia de lo visto en secciones anteriores. □

Capítulo 4

Superálgebra de derivaciones y aplicaciones

Se aborda en esta sección el estudio de algunas propiedades geométricas de la familia de S.A.L. $K^{2,m}$ con m impar, familia de una gran importancia como ya se ha visto en capítulos anteriores. Se va a proceder a encontrar una base y la dimensión del primer espacio de cohomología y la dimensión del espacio de cobordes pares de grado 2 y del espacio de las órbitas. Este estudio se hará vía la determinación de la superálgebra de derivaciones correspondiente

$$\mathcal{D}(K^{2,m}) = \mathcal{D}_0(K^{2,m}) \oplus \mathcal{D}_1(K^{2,m})$$

donde $\mathcal{D}_0(K^{2,m})$ son las derivaciones pares y $\mathcal{D}_1(K^{2,m})$ las derivaciones impares o antiderivaciones de la superálgebra $K^{2,m}$, para cada m impar.

4.1 Derivaciones

• Se recuerda que las derivaciones pares son aplicaciones lineales f de $K^{2,m}$ en $K^{2,m}$ compatibles con la $\mathbb{Z}_2$−graduación, esto es, de grado 0:

$$f(K_0^{2,m}) \subset K_0^{2,m} \quad \text{y} \quad f(K_1^{2,m}) \subset K_1^{2,m}$$

que, además, verifican la siguiente condición

$$f([X,Y]) = [f(X),Y] + [X,f(Y)] \qquad \forall X,Y \in K^{2,m}$$

• Por otro lado, las derivaciones impares son aplicaciones lineales f de $K^{2,m}$ en $K^{2,m}$ de grado 1

$$f(K_0^{2,m}) \subset K_1^{2,m} \quad \text{y} \quad f(K_1^{2,m}) \subset K_0^{2,m}$$

que, además, verifican

$$\begin{cases} f([X_1,X_2]) = [f(X_1),X_2] + [X_1,f(X_2)] & \text{si } X_1,X_2 \in K_0^{2,m} \\ f([X_1,Y_1]) = [f(X_1),Y_1] + [X_1,f(Y_1)] & \text{si } X_1 \in K_0^{2,m},\ Y_1 \in K_1^{2,m} \\ f([Y_1,Y_2]) = [f(Y_1),Y_2] - [Y_2,f(Y_1)] & \text{si } Y_1,Y_2 \in K_1^{2,m} \end{cases}$$

Para el cálculo efectivo tanto de las derivaciones pares como de las impares, se generaliza un método ya utilizado para las álgebras de Lie (para más detalles ver [16], [27]) que consiste en encontrar una graduación de cada S.A.L. $K^{2,m}$ y calcular las derivaciones homogéneas asociadas a la graduación, ya que éstas generan toda la superálgebra de derivaciones.

En todo lo que sigue se considera la familia de S.A.L. $K^{2,m}$ con m impar, $m \geq 3$, de base adaptada $\{X_0, X_1, Y_1, \ldots, Y_m\}$ y de productos no nulos

$$K^{2,m} \begin{cases} [X_0,Y_i] = Y_{i+1} & 1 \leq i \leq m-1 \\ [Y_i, Y_{m+1-i}] = (-1)^{i+1}X_1 & 1 \leq i \leq \dfrac{m+1}{2} \end{cases}$$

La graduación asociada a $K^{2,m}$ es la que sigue

$$K^{2,m} =< X_0 > \oplus < 0 > \oplus < Y_m > \oplus < Y_{m-1} > \oplus \cdots \oplus < Y_1 > \oplus < X_1 >$$

es decir,

$$K^{2,m} = \bigoplus_{i=-1}^{m+1} \mathfrak{g}_i$$

donde

$$\begin{array}{lcll} \mathfrak{g}_{-1} & = & < X_0 > & \\ \mathfrak{g}_0 & = & < 0 > & \\ \mathfrak{g}_i & = & < Y_{m+1-i} > & 1 \leq i \leq m \\ \mathfrak{g}_{m+1} & = & < X_1 > & \end{array}$$

Para calcular el espacio de derivaciones pares (respectivamente, las impares), $\mathcal{D}_0(K^{2,m})$ (resp. $\mathcal{D}_1(K^{2,m})$), se tendrá en cuenta que si $\overline{d} \in \mathcal{D}_0(K^{2,m})$ (resp. $\overline{d} \in \mathcal{D}_1(K^{2,m})$), entonces

$$\overline{d} = \sum_{j \in \mathbb{Z}} d_j$$

donde $d_j \in \mathcal{D}_0(K^{2,m})$ (resp. $d_j \in \mathcal{D}_1(K^{2,m})$) y $d_j(\mathfrak{g}_i) \subset \mathfrak{g}_{i+j}$, siendo $\mathfrak{g}_k = 0$ para $k < -1$ ó $k > m+1$. En otras palabras, cada d_j pertenece al subespacio de las derivaciones homogéneas pares (resp. impares) de orden j.

Como $d_{m+2}(\mathfrak{g}_{-1}) \subset \mathfrak{g}_{m+1}$ y $d_{-m-2}(\mathfrak{g}_{m+1}) \subset \mathfrak{g}_{-1}$, tanto si son pares como impares, se deduce que $d_j = 0$ para $j > m+2$ y $j < -m-2$ y, por tanto, se cumple que $\overline{d} = \sum_{j=-m-2}^{m+2} d_j$.

Se expresará cada d_j par (análogo impar), $-m-2 \leq j \leq m+2$, como una combinación lineal de un cierto conjunto, B_j, $-m-2 \leq j \leq m+2$, de derivaciones linealmente independientes de $K^{2,m}$, cumpliéndose que

$$\bigcup_{j=-m-2}^{m+2} B_i$$

es una base de $\mathcal{D}_0(K^{2,m})$ (resp. de $\mathcal{D}_1(K^{2,m})$) con lo que, evidentemente,

$$dim(\mathcal{D}_0(K^{2,m})) = \sum_{j=-m-2}^{m+2} dim < B_j >$$

En los cálculos se tendrá en cuenta que los ideales de la sucesión central descendente, $\mathcal{C}^i(K^{2,m}) = \mathcal{C}^i(K^{2,m})_0 \oplus \mathcal{C}^i(K^{2,m})_1$, $0 \leq i \leq m+1$, son característicos, es decir estables para cualquier derivación. En particular, si d_j es una derivación par verifica que

$$d_j(\mathcal{C}^i(K^{2,m})_0) \subset \mathcal{C}^i(K^{2,m})_0 \text{ y } d_j(\mathcal{C}^i(K^{2,m})_1) \subset \mathcal{C}^i(K^{2,m})_1, \qquad 0 \leq i \leq m+1$$

mientras que, si d_j es una derivación impar, se tiene que

$$d_j(\mathcal{C}^i(K^{2,m})_0) \subset \mathcal{C}^i(K^{2,m})_1 \text{ y } d_j(\mathcal{C}^i(K^{2,m})_1) \subset \mathcal{C}^i(K^{2,m})_0, \qquad 0 \leq i \leq m+1$$

Se recuerda que los endomorfismos de la forma adX con X un elemento homogéneo de la superálgebra son siempre derivaciones, si X es de grado 0 adX es una derivación par y si X es de grado 1 adX es una derivación impar.

Nota 4.1.1 Es trivial probar que los endomorfismos de $K^{2,m}$ denotados mediante t_0^1, t_0^2, t_1, t_3, t_5, ..., t_{m-2}, y definidos por

$$t_0^1(X_0) = X_0,\ t_0^1(X_1) = (m-1)X_1,\ t_0^1(Y_i) = (i-1)Y_i, \quad 2 \leq i \leq m;$$

$$t_0^2(X_1) = 2X_1,\ t_0^2(Y_i) = Y_i, \quad 1 \leq i \leq m;$$

$$t_1(X_0) = X_1$$

$$t_k(Y_i) = Y_{i+k}, \quad 1 \leq i \leq m-k, \text{ con } k \text{ impar y } 3 \leq k \leq m-2$$

son derivaciones pares de $K^{2,m}$.

Nota 4.1.2 adX_0 es una derivación par de $K^{2,m}$ (adX_1 es la derivación nula) y adY_1, adY_2, ..., adY_m son derivaciones impares de $K^{2,m}$.

En el siguiente teorema se prueba que las derivaciones de las notas 4.1.1 y 4.1.2 constituyen una base de $\mathcal{D}(K^{2,m})$.

Teorema 4.1.1 *Con la notaciones de la nota 4.1.1, se tiene que,*

$$\{adX_0, t_0^1, t_0^2, t_1, t_3, t_5, \ldots, t_{m-2}, adY_1, adY_2, \ldots, adY_m\}$$

constituyen una base de $\mathcal{D}(K^{2,m}) = \mathcal{D}_0(K^{2,m}) \oplus \mathcal{D}_1(K^{2,m})$, *con* $\{adX_0$, t_0^1, t_0^2, t_1, t_3, $t_5, \ldots, t_{m-2}\}$ *una base de* $\mathcal{D}_0(K^{2,m})$ *y* $\{adY_1, adY_2, \ldots, adY_m\}$ *una base de* $\mathcal{D}_1(K^{2,m})$.

Nota 4.1.3 Todas las derivaciones impares son "interiores".

Demostración del teorema: Se va a probar que los endomorfismos citados constituyen una base de los espacios de derivaciones correspondientes, por lo que se calcularán por separado $\mathcal{D}_0(K^{2,m})$ y $\mathcal{D}_1(K^{2,m})$.

$\underline{\mathcal{D}_0(K^{2,m})}.$ Si $\overline{d} \in \mathcal{D}_0(K^{2,m})$, entonces $\overline{d} = \sum_{j=-m-2}^{m+2} d_j$, con cada d_j una derivación homogénea par de grado j.

Como los ideales de la sucesión central descendente

$$\begin{array}{ll} \mathcal{C}^0(\mathfrak{g}) & =< X_0, X_1 > \oplus < Y_1, Y_2, \ldots, Y_m > \\ \mathcal{C}^1(\mathfrak{g}) & =< X_1 > \oplus < Y_2, \ldots, Y_m > \\ \mathcal{C}^2(\mathfrak{g}) & =< X_1 > \oplus < Y_3, \ldots, Y_m > \\ & \vdots \\ \mathcal{C}^{m-1}(\mathfrak{g}) & =< X_1 > \oplus < Y_m > \\ \mathcal{C}^m(\mathfrak{g}) & =< X_1 > \oplus < 0 > \\ \mathcal{C}^{m+1}(\mathfrak{g}) & =< 0 > \end{array}$$

son característicos, resultan ser nulas las derivaciones d_j, $1 \leq j \leq m-1$. También son nulas las derivaciones d_m y d_{m+1} pues no contienen derivaciones pares.

*** Cálculo de d_0**

Como $d_0(\mathfrak{g}_i) \subset \mathfrak{g}_i$ $\forall i$, se puede suponer que

$$d_0 : \left\{ \begin{array}{lll} X_0 & \longrightarrow & \alpha_0 X_0 \\ X_1 & \longrightarrow & \alpha_1 X_1 \\ Y_i & \longrightarrow & \beta_i Y_i, \quad 1 \leq i \leq m \end{array} \right.$$

Al exigir que d_0 sea derivación par, se obtiene que

• De $d_0([X_0, Y_i]) = [d_0(X_0), Y_i] + [X_0, d_0(Y_i)]$, para $1 \leq i \leq m-1$, se tiene que $\alpha_0 + \beta_i = \beta_{i+1}$, $1 \leq i \leq m-1$. Mediante un proceso de inducción finita se tiene que $\beta_i = (i-1)\alpha_0 + \beta_1$ para $2 \leq i \leq m$.

• De $d_0([Y_1, Y_m]) = [d_0(Y_1), Y_m] + [Y_1, d_0(Y_m)]$ se tiene que $\alpha_1 = \beta_1 + \beta_m$ que junto con el punto anterior llevan a $\alpha_1 = (m-1)\alpha_0 + 2\beta_1$.

• De $d_0([Y_2, Y_{m-1}]) = [d_0(Y_2), Y_{m-1}] + [Y_2, d_0(Y_{m-1})]$ se tiene que $\alpha_1 = \beta_2 + \beta_{m-1}$ pero al sustituir β_2 y β_{m-1} se obtiene la misma relación que en el punto anterior.

En consecuencia, se verifica que

$$d_0 : \left\{ \begin{array}{lll} X_0 & \longrightarrow & \alpha_0 X_0 \\ X_1 & \longrightarrow & [(m-1)\alpha_0 + 2\beta_1]X_1 \\ Y_1 & \longrightarrow & \beta_1 Y_1 \\ Y_i & \longrightarrow & [(i-1)\alpha_0 + \beta_1]Y_i, \qquad 2 \leq i \leq m \end{array} \right.$$

No hay más restricciones sobre los parámetros y, por tanto, se pueden tomar como parámetros libres α_0 y β_1. Una base de $< B_0 >$ vendrá dada por $\{t_0^1, t_0^2\}$.

*** Cálculo de d_{m+2}**

Ahora se ha de verificar que

$$d_{m+2}(X_0) = \alpha_0 X_1$$

sin niguna restricción sobre α_0 y, por tanto, una base de $< B_{m+2} >$ puede ser $\{t_1\}$.

*** Cálculo de d_{-1}**

Como $d_{-1}(\mathfrak{g}_i) \subset \mathfrak{g}_{i-1}\ \forall i$, se puede suponer que

$$d_{-1}(Y_i) = \alpha_i Y_{i+1}, \quad 1 \leq i \leq m-1$$

• De $d_{-1}([X_0, Y_i]) = [d_{-1}(X_0), Y_i] + [X_0, d_{-1}(Y_i)]$ para $1 \leq i \leq m-2$ se tiene que $\alpha = \alpha_i = \alpha_{i+1}$, $1 \leq i \leq m-2$.

En consecuencia, se verifica que

$$d_{-1}(Y_i) = \alpha Y_{i+1}, \quad 1 \leq i \leq m-1$$

No hay más restricciones sobre el parámetro α y, por tanto, se puede tomar como base de $< B_{-1} >$ a $\{adX_0\}$.

* **Cálculo de** d_{-k}, k par y $2 \leq k \leq m-1$.

En estos casos se puede suponer que

$$d_{-k}(Y_i) = \alpha_i Y_{i+k}, \quad 1 \leq i \leq m-k$$

con k par y $2 \leq k \leq m-1$.

• De $d_{-k}([X_0, Y_i]) = [d_{-k}(X_0), Y_i] + [X_0, d_{-k}(Y_i)]$ para $1 \leq i \leq m-k-1$ se tiene que $\alpha^k = \alpha_i = \alpha_{i+1}$, $1 \leq i \leq m-k-1$.

• De $d_{-k}([Y_1, Y_{m-k}]) = [d_{-k}(Y_1), Y_{m-k}] + [Y_1, d_{-k}(Y_{m-k})]$ se tiene que $0 = \alpha^k[Y_{1+k}, Y_{m-k}] + \alpha^k X_1$ y al ser $1+k$ y $m-k$ impares se llega a $0 = 2\alpha^k X_1$ de donde se sigue que $\alpha^k = 0$ k, par y $2 \leq k \leq m-1$, y por tanto todas las derivaciones homogéneas pares de la forma d_{-k} con k par y $2 \leq k \leq m-1$ son nulas.

* **Cálculo de** d_{-k}, k impar y $3 \leq k \leq m-2$.

En estos casos se puede suponer que

$$d_{-k}(Y_i) = \alpha_i Y_{i+k}, \quad 1 \leq i \leq m-k$$

con k impar y $3 \leq k \leq m-2$.

• De $d_{-k}([X_0, Y_i]) = [d_{-k}(X_0), Y_i] + [X_0, d_{-k}(Y_i)]$ para $1 \leq i \leq m-k-1$ se tiene que $\alpha^k = \alpha_i = \alpha_{i+1}$, $1 \leq i \leq m-k-1$.

• De $d_{-k}([Y_1, Y_{m-k}]) = [d_{-k}(Y_1), Y_{m-k}] + [Y_1, d_{-k}(Y_{m-k})]$ se tiene que $0 = \alpha^k[Y_{1+k}, Y_{m-k}] + \alpha^k X_1$ pero en este caso $1+k$ y $m-k$ son pares de donde se llega a $0 = (-\alpha^k + \alpha^k)X_1$ lo que se verifica trivialmente.

En consecuencia, se tiene que

$$d_{-k}(Y_i) = \alpha^k Y_{i+1}, \quad 1 \leq i \leq m-k$$

para cada k impar con $3 \leq k \leq m-2$. No hay más restricciones sobre cada parámetro α^k y, por tanto, se pueden tomar como una base de cada $< B_{-k} >$ a $\{t_k\}$, k impar y $3 \leq k \leq m-2$.

* Se observa que d_{-m} y d_{-m-1} son nulas ya que no contienen derivaciones pares. Así d_{-m-2} también es nula, pues verifica $d_{-m-2}(X_1) = \alpha X_0$ pero de $d_{-m-2}([Y_1, Y_m])$ se deduce que $\alpha = 0$ y, por tanto, también es nula la derivación d_{-m-2}.

$\underline{\mathcal{D}_1(K^{2,m})}$. Si $\overline{d} \in \mathcal{D}_1(K^{2,m})$, entonces $\overline{d} = \sum_{j=-m-2}^{m+2} d_j$, donde cada d_j es una derivación homogénea impar de grado j.

Como los ideales de la sucesión central descendente

$$\begin{array}{ll}
\mathcal{C}^0(\mathfrak{g}) & =< X_0, X_1 > \oplus < Y_1, Y_2, \ldots, Y_m > \\
\mathcal{C}^1(\mathfrak{g}) & =< X_1 > \oplus < Y_2, \ldots, Y_m > \\
\mathcal{C}^2(\mathfrak{g}) & =< X_1 > \oplus < Y_3, \ldots, Y_m > \\
 & \vdots \\
\mathcal{C}^{m-1}(\mathfrak{g}) & =< X_1 > \oplus < Y_m > \\
\mathcal{C}^{m}(\mathfrak{g}) & =< X_1 > \oplus < 0 > \\
\mathcal{C}^{m+1}(\mathfrak{g}) & =< 0 >
\end{array}$$

son característicos, resultan ser nulas las derivaciones d_j, $-m \leq j \leq -1$. También son nulas las derivaciones d_{m+2} y d_{-m-2} pues no contienen derivaciones impares. De todas las derivaciones de la forma d_j con $j < 0$ sólo resta ver d_{-m-1}, pero esta derivación viene dada por $d_{-m-1}(Y_1) = \alpha X_0$ y de $0 = d_{-m-1}([Y_1, Y_2]) = [\alpha X_0, Y_2] = \alpha Y_3$ se sigue que $\alpha = 0$ y, por tanto, también es nula la derivación d_{-m-1}. Se observa que para el caso $m = 1$ la aplicación $d_{-2}(Y_1) = \alpha X_0$ sí es derivación, ya que en este caso es el único caso en el que el vector X_0 es central (esta derivación se notará por h).

También es nula la derivación d_{m+1}, ya que viene dada por la relación $d_{m+1}(X_0) = \alpha Y_1$ pero de $d_{m+1}([X_0, Y_m]) = \alpha X_1$ se sigue que tanto el parámetro α como la derivación son nulas.

*** Cálculo de d_1**

Se puede suponer que $d_1(Y_1) = \alpha X_1$. No hay restricciones sobre el parámetro α y, por tanto, se pueden tomar como una base de $< B_1 >$ a $\{adY_m\}$.

*** Cálculo de** d_{2k}, $1 \leq k \leq \dfrac{m-1}{2}$.

En estos casos se puede suponer que

$$d_{2k} : \left\{ \begin{array}{lll} X_0 & \longrightarrow & \alpha^k Y_{m+2-2k} \\ & & \\ Y_{2k} & \longrightarrow & \beta^k X_1 \qquad \text{con } 1 \leq k \leq \dfrac{m-1}{2} \end{array} \right.$$

• De $d_{2k}([X_0, Y_{2k-1}]) = [d_{2k}(X_0), Y_{2k-1}] + [X_0, d_{2k}(Y_{2k-1})]$ para $1 \leq k \leq$ $\leq \dfrac{m-1}{2}$ se tiene que $\beta^k X_1 = \alpha^k [Y_{m+2-2k}, Y_{2k-1}]$ donde $m+2-2k$ y $2k-1$ son impares, luego se llega a $\beta^k = \alpha^k$, $1 \leq k \leq \dfrac{m-1}{2}$.

No hay más restricciones sobre los parámetros y, por tanto, se pueden tomar como una base de cada $< B_{2k} >$ a $\{adY_{m+1-2k}\}$, $1 \leq k \leq \dfrac{m-1}{2}$.

*** Cálculo de** d_{2k+1}, $1 \leq k \leq \dfrac{m-1}{2}$.

En estos casos se puede suponer que

$$d_{2k+1} : \left\{ \begin{array}{lll} X_0 & \longrightarrow & \alpha^k Y_{m+1-2k} \\ & & \\ Y_{2k+1} & \longrightarrow & \beta^k X_1 \qquad \text{con } 1 \leq k \leq \dfrac{m-1}{2} \end{array} \right.$$

• De $d_{2k+1}([X_0, Y_{2k}]) = [d_{2k+1}(X_0), Y_{2k}] + [X_0, d_{2k+1}(Y_{2k})]$ para $1 \leq k \leq$ $\leq \dfrac{m-1}{2}$ se tiene que $\beta^k X_1 = \alpha^k [Y_{m+1-2k}, Y_{2k}]$ donde $m+1-2k$ y $2k$ son pares, luego se llega a $\beta^k = -\alpha^k$, $1 \leq k \leq \dfrac{m-1}{2}$.

No hay más restricciones sobre los parámetros y, por tanto, se pueden tomar como una base de cada $< B_{2k+1} >$ a $\{adY_{m-2k}\}$, $1 \leq k \leq \dfrac{m-1}{2}$.

Con esto se concluye la demostración del teorema. $\square$

Teorema 4.1.2 *Con la notaciones de la nota 4.1.1 para el caso* $m = 1$ *, se tiene que,* $\{t_0^1, t_0^2, t_1, adY_1, h\}$ *constituyen una base de la superálgebra de derivaciones* $\mathcal{D}(K^{2,1}) = \mathcal{D}_0(K^{2,1}) \oplus \mathcal{D}_1(K^{2,1})$*, con* $\{t_0^1,\ t_0^2,\ t_1\}$ *una base de* $\mathcal{D}_0(K^{2,1})$ *y* $\{adY_1, h\}$ *una base de* $\mathcal{D}_1(K^{2,1})$*; siendo la aplicación lineal* h *la definida mediante* $h(Y_1) = X_0$.

Demostración: La demostración de este teorema es totalmente análoga a la del teorema anterior, incorporando la derivación h que aparece en este caso como base de las derivaciones homogéneas impares de grado $-2 = -m - 1$.

$\square$

4.2 Cohomología

Corolario 4.2.1 *Para* m *impar y* $m \geq 3$ *se verifica que*

$$dim(B^1(K^{2,m}, K^{2,m})) = m + 1,$$

$$dim(H^1(K^{2,m}, K^{2,m})) = \frac{m+3}{2}$$

Demostración: Se obtienen estos dos resultados trivialmente, sin más que tener en cuenta, al ser $adX_1 = 0$, que

$$\begin{aligned} dim(B^1(K^{2,m}, K^{2,m})) &= dim(\mathcal{A}\lceil(K_0^{2,m})) + dim(\mathcal{A}\lceil(K_1^{2,m})) = \\ &= dim < adX_0 > + dim < adY_1, \ldots, adY_m > \end{aligned}$$

y que al ser todas las derivaciones impares interiores se tiene que el espacio cociente $Z_1^1(K^{2,m}, K^{2,m})/B_1^1(K^{2,m}, K^{2,m})$ es la clase nula, de donde se sigue que

$$\begin{aligned} dim(H^1(K^{2,m}, K^{2,m})) &= dim(H_0^1(K^{2,m}, K^{2,m})) = \\ &= dim(\mathcal{D}_0(K^{2,m})) - dim(\mathcal{A}\lceil(K_0^{2,m})) = \frac{m+5}{2} - 1 \end{aligned}$$

□

Nota 4.2.1 Obsérvese que, en realidad, se podría dar fácilmente la descripción de $H^1(K^{2,m}, K^{2,m}) = H_0^1(K^{2,m}, K^{2,m}) \oplus H_1^1(K^{2,m}, K^{2,m})$ ya que al ser el subespacio impar $H_1^1(K^{2,m}, K^{2,m})$ de dimensión nula se tiene que el primer espacio de cohomología coincide con el subespacio par $H_0^1(K^{2,m}, K^{2,m})$ y, en el caso par, se obtiene la identidad con el espacio cociente

$$H_0^1(K^{2,m}, K^{2,m}) = \mathcal{D}_0(K^{2,m})/\mathcal{A}\lceil(K_0^{2,m})$$

Corolario 4.2.2 *Para m impar y $m \geq 3$ se verifica que*

$$dim(\mathcal{O}(K^{2,m})) = dim(B_0^2(K^{2,m}, K^{2,m})) = m^2 + \frac{3-m}{2}$$

Demostración: Basta recordar que se cumple que

$$dim(\mathcal{O}(K^{2,m})) = 2^2 + m^2 - dim(\mathcal{D}_0(K^{2,m}))$$

□

Corolario 4.2.3 *Para $m = 1$ se verifica que*

$$dim(B^1(K^{2,1}, K^{2,1})) = 1,$$

$$dim(H^1(K^{2,1}, K^{2,1})) = 4$$

Demostración: Se obtienen estos dos resultados trivialmente, sin más que tener en cuenta, al ser $adX_0 = adX_1 = 0$, que

$$\begin{aligned} dim(B^1(K^{2,1}, K^{2,1})) &= dim(\mathcal{A}\lceil(K_0^{2,1})) + dim(\mathcal{A}\lceil(K_1^{2,1})) = \\ &= 0 + dim < adY_1 >= 1 \end{aligned}$$

y en el primer espacio de cohomología se tiene que

$$\begin{aligned} dim(H^1(K^{2,1}, K^{2,1})) &= dim(H_0^1(K^{2,1}, K^{2,1})) + dim(H_1^1(K^{2,1}, K^{2,1})) = \\ &= dim(\mathcal{D}_0(K^{2,1})) - dim(\mathcal{A}\lceil(K_0^{2,1})) + \\ &\qquad + dim(\mathcal{D}_1(K^{2,1})) - dim(\mathcal{A}\lceil(K_1^{2,1})) = \\ &= 3 - 0 + 2 - 1 = 4 \end{aligned}$$

□

Corolario 4.2.4 *Para $m = 1$ se verifica que*

$$dim(\mathcal{O}(K^{2,1})) = dim(B_0^2(K^{2,1}, K^{2,1})) = 2$$

Demostración: Es análoga a la del caso $m \geq 3$. □

4.3 Sobre las componentes de la variedad $\mathcal{N}^{2+m}$ con m impar

Como ya se ha visto a lo largo de los capítulos anteriores la superálgebra de Lie $K^{2,m}$ que se obtiene para cada m impar es una S.A.L. de nilíndice maximal, $K^{2,m} \in \mathcal{M}^{2+m}$ y se verifica que $\overline{\mathcal{O}(K^{2,m})}^{\mathcal{Z}}$ es una componente irreducible de $\mathcal{N}^{2+m}$. Del mismo modo, pero por otra razón completamente distinta, todas las álgebras que aparecen en la sección 3.3.3, simplemente por el hecho de ser S.A.L. filiformes y al ser $\mathcal{F}^{n+m}$ un abierto de $\mathcal{N}^{n+m}$, verifican que la clausura de Zariski de sus respectivas órbitas constituyen una componente irreducible de la correspondiente variedad $\mathcal{N}^{n+m}$.

En particular, para $n = 2$ y m impar, se tiene que

Teorema 4.3.1 *La variedad $\mathcal{N}^{2+m}$, con $m \geq 3$ y m impar, tiene una componente irreducible de dimensión mayor o igual a* $m^2 + \dfrac{3-m}{2}$.

Demostración: Basta con tener en cuenta como componente irreducible $\overline{\mathcal{O}(K^{2,m})}^{\mathcal{Z}}$ y gracias al corolario 4.2.2 se sigue el teorema. □

Teorema 4.3.2 *La variedad $\mathcal{N}^{2+1}$ es irreducible, siendo su única componente $\overline{\mathcal{O}(K^{2,1})}^{\mathcal{Z}}$, de dimensión mayor o igual a 2.*

Demostración: Se sigue del teorema 3.4.3 (de estrutura) y del corolario 4.2.4.

Nota 4.3.1 Se deja para un posterior estudio el cálculo de la dimensión de las órbitas, vía la determinación del álgebra de derivaciones, de cada una de las S.A.L. filiformes $\mathfrak{g}$ que aparece en la sección 3.3.3. Se obtendrá, en tal caso , una cota inferior de la dimensión de la componente irreducible $\overline{\mathcal{O}(\mathfrak{g})}^{\mathcal{Z}}$ de la variedad $\mathcal{N}^{n+m}$ que corresponda en cada caso.

Capítulo 5

Superálgebras de Heisenberg

Hasta ahora se han estudiado las S.A.L. de nilíndice alto, es decir, las "menos" nilpotentes de todas. A partir de este momento el estudio se centra en las S.A.L. "más" nilpotentes de todas, es decir, en las de nilíndice 2, que es el menor posible.

Por tanto, se aborda en este capítulo el estudio de las superálgebras de Lie 2$-$nilpotentes, $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1$ tal que $\mathcal{C}^2(\mathfrak{g})_0 = \mathcal{C}^2(\mathfrak{g})_1 = 0$.

En la teoría de álgebras de Lie se encuentran las álgebras de Lie de Heisenberg $\mathcal{H}_r$, en cada dimensión impar $2r + 1$, como las únicas álgebras de Lie 2$-$nilpotentes con centro unidimensional. Además, juegan un papel relevante no sólo dentro de la teoría de Lie sino dentro de otros campos como la física cuántica.

En este capítulo se busca la generalización de las álgebras de Lie de Heisenberg a la teoría de las superálgebras de Lie, definiéndose las superálgebras de Lie de Heisenberg (S.A.H.) como las superálgebras de Lie con parte par el álgebra de Lie de Heisenberg.

De todas las S.A.H. definidas de esta forma destacan las 2$-$nilpotentes, y dentro de éstas las de centro unidimensional, ya que éstas ultimas constituyen el verdadero "calco" algebraico y geométrico del álgebra de Lie $\mathcal{H}_r$ en la teoría de las superálgebras de Lie.

En este capítulo se dan las familias de todas las S.A.H. con dimensión de la parte par $2r+1$, r natural cualquiera, y dimensión de la parte impar menor o igual a 3. De éstas se clasificarán, determinándolas completamente, las S.A.H. 2−nilpotentes y, como casos particulares, las que además tienen centro unidimensional. También se clasificarán totalmente las de invariante de Goze minimal $(2,1,\ldots,1|\ 1,1,1)$ y las de invariante de Goze maximal $(2,1,\ldots,1|\ 3)$ y se estudiará el caso restante de invariante de Goze $(2,1,\ldots,1|\ 2,1)$.

En estas clasificaciones se pondrá de manifiesto la complejidad que supone, en muchos casos, encontrar isomorfismos de S.A.L. cuando se trabaja en dimensión genérica. Es por ello que en algunos casos se utiliza el apoyo del paquete de cálculo simbólico *Mathematica*4.0.

A continuación, tras dar la definición de S.A.H., se comenzará probando los teoremas que darán la existencia de bases adaptadas para las S.A.H., esenciales para poder realizar un estudio de las mismas.

Definición 5.0.1 *Sea $\mathfrak{g}$ una superálgebra de Lie, ($\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1$), $\mathfrak{g}$ es una superálgebra de Lie de Heisenberg (S.A.H.) si $\mathfrak{g}_0 = \mathcal{H}_r$, donde $\mathcal{H}_r$ es el álgebra de Lie de Heisenberg de dimensión $2r+1$ y ley*

$$[X_{2i}, X_{2i+1}] = X_{2r}, \qquad 0 \leq i \leq r-1$$

en una cierta base denotada por $\{X_0, X_1, \ldots, X_{2r}\}$.

5.1 Base adaptada para SAH con $dim(\mathfrak{g}_1) \leq 3$

En esta sección se estudiará la existencia de bases adaptadas para las superálgebras de Lie de Heisenberg con dimensión de la parte impar menor o igual a tres, [19].

Nota 5.1.1 En el caso $dim(\mathfrak{g}_1) = 1$ se obtiene una base adaptada de $\mathfrak{g}$, $\{X_0, X_1, \ldots, X_{2r}, Y_1\}$ tal que

$$\left\{ [X_{2i}, X_{2i+1}] = X_{2r}, \qquad 0 \leq i \leq r-1 \right.$$

Teorema 5.1.1 *Si $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1$ es una superálgebra de Lie de Heisenberg con $dim(\mathfrak{g}_0) = 2r+1$ y $dim(\mathfrak{g}_1) = 2$, entonces existe una base adaptada de $\mathfrak{g}$, $\{X_0, X_1, \ldots, X_{2r}, Y_1, Y_2\}$, con $\{X_0, X_1, \ldots, X_{2r}\}$ base adaptada de $\mathfrak{g}_0$ e $\{Y_1, Y_2\}$ una base de $\mathfrak{g}_1$, tal que*

$$\left\{ \begin{array}{ll} [X_{2i}, X_{2i+1}] = X_{2r}, & 0 \leq i \leq r-1 \\ [X_0, Y_1] = \epsilon Y_2, & \epsilon \in \{0,1\} \end{array} \right.$$

Demostración: Sea $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1$ una S.A.H., entonces $\mathfrak{g}_0$ es el álgebra de Heisenberg de dimensión $2r+1$, luego existirá una base adaptada de $\mathfrak{g}_0$. Sea, por tanto, $\{X_0, X_1, \ldots, X_{2r}\}$ una base adaptada de $\mathfrak{g}_0$, que verifica lo siguiente

$$[X_{2i}, X_{2i+1}] = X_{2r}, \quad 0 \leq i \leq r-1$$

Además, se tiene que $\mathfrak{g}_1$ es un $\mathfrak{g}_0$-módulo con $\mathfrak{g}_0$ un álgebra de Lie nilpotente y, de acuerdo con el teorema de Engel, existe una fibración de $\mathfrak{g}_1$ (tomando $\mathfrak{g}_1$ como espacio vectorial), V_2, tal que

$$V_0 = 0 \subset V_1 \subset V_2, \qquad dim\,(V_i/V_{i-1}) = 1, \quad \text{y} \quad [\mathfrak{g}_0, V_i] \subseteq V_{i-1}, \quad 1 \leq i \leq 2$$

Sean $\{Y_2\}$ e $\{Y_1, Y_2\}$, respectivamente, la base de los espacios vectoriales V_1 y V_2. Por tanto, se tiene que

$$\left\{ \begin{array}{l} [X_i, Y_2] = 0, \\ [X_i, Y_1] = D_{i1}^2 Y_2, \quad 0 \leq i \leq 2r \end{array} \right.$$

Así, se pueden considerar dos casos:

a) Si para todo i, $0 \leq i \leq 2r$, es $D_{i1}^2 = 0$, entonces, se obtiene la base adaptada del teorema para $\epsilon = 0$.

b) Si existe i, $0 \leq i \leq 2r$, tal que $D^2_{i1} \neq 0$, se puede suponer que $D^2_{01} \neq 0$. En otro caso, si existe i, $1 \leq i \leq 2r-1$, con $D^2_{i1} \neq 0$ (si $i = 2r$ de $J_{\mathfrak{g}}(X_0, X_1, Y_1)$ se llega a contradicción), haciendo un simple cambio de base se obtiene $D^2_{01} \neq 0$.

Finalmente, se obtiene la base adaptada del teorema para $\epsilon = 1$, previo cambio de escala. □

Teorema 5.1.2 *Si $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1$ es una superálgebra de Lie de Heisenberg con $dim(\mathfrak{g}_0) = 2r+1$ y $dim(\mathfrak{g}_1) = 3$, entonces existe una base adaptada de $\mathfrak{g}$, $\{X_0, X_1, \ldots, X_{2r}, Y_1, Y_2, Y_3\}$, con $\{X_0, X_1, \ldots, X_{2r}\}$ base adaptada de $\mathfrak{g}_0$ e $\{Y_1, Y_2, Y_3\}$ una base de $\mathfrak{g}_1$, tal que*

$$(*)\begin{cases} [X_{2i}, X_{2i+1}] = X_{2r}, & 0 \leq i \leq r-1 \\ [X_0, Y_1] = \epsilon_1 Y_2 & \\ [X_0, Y_2] = \epsilon_1\epsilon_2 Y_3, & \epsilon_1, \epsilon_2 \in \{0, 1\} \end{cases}$$

o,

$$(**)\begin{cases} [X_{2i}, X_{2i+1}] = X_{2r}, & 0 \leq i \leq r-1 \\ [X_0, Y_1] = Y_3 & \\ [X_0, Y_2] = Y_3 & \end{cases}$$

Demostración: Sea $\{X_0, X_1, \ldots, X_{2r}\}$ base adaptada de $\mathfrak{g}_0$ e $\{Y_1, Y_2, Y_3\}$ una base de $\mathfrak{g}_1$. Análogamente al caso $dim(\mathfrak{g}_1) = 2$ y usando el hecho de que $[X_{2r}, Y_j] \subset \ < Y_{j+2}, \ldots, Y_m > = < Y_3 >$ (de $J_{\mathfrak{g}}(X_0, X_1, Y_j)$ e inducción finita en j), se obtiene una base $\{X_0, \ldots, X_{2r}, Y_1, Y_2, Y_3\}$ tal que

$$\begin{cases} [X_{2i}, X_{2i+1}] = X_{2r}, & 0 \leq i \leq r-1 \\ [X_j, Y_1] = D^2_{j,1} Y_2 + D^3_{j,1} Y_3 & 0 \leq j \leq 2r-1 \\ [X_{2r}, Y_1] = D^3_{2r,1} Y_3 & \\ [X_j, Y_2] = D^3_{j,2} Y_3 & 0 \leq j \leq 2r-1 \end{cases}$$

En este punto se van a considerar diferentes casos dependiendo de la nulidad de las constantes de estructura.

Caso 1: $D^3_{j,2} = 0$ para todo j, $0 \leq j \leq 2r-1$. De $J_g(X_0, X_1, Y_1)$ se tiene que $D^3_{2r,1} = 0$.

1.1. $D^3_{j,1} = 0$ para todo j, $0 \leq j \leq 2r-1$.

1.1.1. $D^2_{j,1} = 0$, $0 \leq j \leq 2r-1$. Entonces $\mathfrak{g}_1$ es un $\mathfrak{g}_0$-módulo trivial, es decir, en términos de la definición 1.2.2, el producto que nos da la actuación de $\mathfrak{g}_0$ sobre $\mathfrak{g}_1$ ".": $\mathfrak{g}_0 \times \mathfrak{g}_1 \longrightarrow \mathfrak{g}_1$ es idénticamente nulo. Se obtiene de este modo la base $(*)$ con $\epsilon_1 = \epsilon_2 = 0$.

1.1.2. Existe j, $0 \leq j \leq 2r-1$, tal que $D^2_{j,1} \neq 0$. En este caso es posible obtener la base $(*)$ con $\epsilon_1 = 1$, $\epsilon_2 = 0$ (mediante un cambio de base sencillo y un cambio de escala).

1.2. Existe j, $0 \leq j \leq 2r-1$, tal que $D^3_{j,1} \neq 0$.

1.2.1. $D^2_{k,1} = 0$ para todo k, $0 \leq k \leq 2r-1$, se trataría del caso 1.1.2. (por un simple cambio de base).

1.2.2. Existe k, $0 \leq k \leq 2r-1$, tal que $D^2_{k,1} \neq 0$ (k puede ser igual o distinto de j). Mediante el cambio de base $Y_2' = D^2_{k,1}Y_2 + D^3_{k,1}Y_3$ y renombrando de forma adecuada los vectores X_i, $0 \leq i \leq 2r-1$, se obtiene la misma base del caso 1.1.2.

Caso 2: Existe j, $0 \leq j \leq 2r-1$, tal que $D^3_{j,2} \neq 0$.

2.1. $D^2_{j,1} = 0$ para todo j, $0 \leq j \leq 2r-1$, entonces de $J_g(X_0, X_1, Y_1)$ se llega a que $D^3_{2r,1} = 0$. Mediante el cambio de base dado por $Y_1' = Y_2$, $Y_2' = Y_1$, mediante un sencillo cambio de escala y renombrando de forma adecuada los vectores X_i, $0 \leq i \leq 2r-1$, se obtiene que

$$\begin{cases} [X_0, Y_1] = Y_3 \\ [X_0, Y_2] = D^3_{0,2}Y_3 \end{cases}$$

Un sencillo cambio de escala permite obtener la base $(**)$.

2.2. Existe j, $0 \leq j \leq 2r-1$, tal que $D^2_{j,1} \neq 0$

2.2.1. Existe i, $0 \leq i \leq 2r-1$ tal que $D^3_{i,2} \neq 0$ y $D^2_{i,1} \neq 0$, por un cierto cambio de base se obtiene que

$$\begin{cases} [X_0, Y_1] = Y_2 \\ [X_0, Y_2] = Y_3 \end{cases}$$

que corresponde a la base $(*)$ con $\epsilon_1 = \epsilon_2 = 1$. En este caso $\mathfrak{g}_1$ se llama $\mathfrak{g}_0-$módulo filiforme.

2.2.2. Existe $(j,k) \in \{(2i, 2i+1), (2i+1, 2i)\}$, $0 \leq i \leq r-1$, con $D^3_{j,2} \neq 0$ y $D^2_{k,1} \neq 0$, mediante un cambio de base de la forma $X'_{2i} = X_{2i} + \lambda X_{2i+1}$ con $\lambda \in \mathbb{C}$, junto con otros simples cambios de base se llega al caso anterior.

2.2.3. En cualquier otro caso, o bien se puede obtener la base $(**)$, o bien se llega a que

$$\begin{cases} [X_0, Y_1] = Y_2 \\ [X_0, Y_2] = 0 \end{cases}$$

que es la base $(*)$ con $\epsilon_1 = 1$ y $\epsilon_2 = 0$. □

5.2 Tratamiento Computacional

El problema de la clasificación salvo isomorfismo de la familia de S.A.L. considerada se reduce a encontrar las constantes de estructura de las superálgebras no isomorfas entre sí. Puesto que las constantes de estructura dependen de la base, es conveniente encontrar una base en la cual exista el mayor número posible de constantes igual a cero. Se puede considerar las bases encontradas en el teorema 5.1.1.

En primer lugar, para la clasificación de las superálgebras de Heisenberg es necesario calcular todas las identidades de Jacobi graduadas. Es aquí donde se usa el programa que a continuación se detalla, elaborado con el paquete de cálculo simbólico *Mathematica*4.0, (para ver otras aplicaciones del *Mathematica* consultar [18]).

El programa se puede separar en tres partes:

1. Se introducen algunas condiciones sobre $\mathfrak{g}$, es decir, $\mathfrak{g}_0$ es un álgebra de Lie y $\mathfrak{g}_1$ es un $\mathfrak{g}_0$-módulo. (como ejemplo, se hace para dimensión de la parte par cinco y dimensión de la parte impar dos).

```
r1 = 2;
dim = 2 r1 + 1;
dim1 = 2;
basemu0 = Table[x[i], {i, 0, dim}];
basemu1 = Table[y[j], {j, 1, dim1}];

d[i_, j_] := Subscript[D, i, j];
e[i_, j_, k_] := Superscript[Subscript[e, i, j], k];

(*mu0, \'{a}lgebra de Lie *)

mu0[0, x_] := 0;
mu0[x_, 0] := 0;
mu0[x_, x_] := 0;
mu0[x_, y_] := Simplify[-mu0[y, x]] /; OrderedQ[{y, x}];
mu0[x_ + y_, z_] := Simplify[mu0[x, z] + mu0[y, z]];
mu0[z_, x_ + y_] := Simplify[mu0[z, x] + mu0[z, y]];
mu0[x_, a_ y_] := a mu0[x, y];
mu0[a_ x_, y_] := a mu0[x, y];

(*mu1*)

mu1[0, x_] := 0;
mu1[x_, 0] := 0;
mu1[x_, y_] := Simplify[mu1[y, x]] /; OrderedQ[{y, x}];
mu1[x_ + y_, z_] := Simplify[mu1[x, z] + mu1[y, z]];
mu1[z_, x_ + y_] := Simplify[mu1[z, x] + mu1[z, y]];
mu1[x_, a_ y_] := a mu1[x, y];
mu1[a_ x_, y_] := a mu1[x, y];
```

```
(*mu2*)

mu2[0, x_] := 0;
mu2[x_, 0] := 0;
mu2[x_, y_] := Simplify[-mu2[y, x]] /; OrderedQ[{y, x}];
mu2[x_ + y_, z_] := Simplify[mu2[x, z] + mu2[y, z]];
mu2[z_, x_ + y_] := Simplify[mu2[z, x] + mu2[z, y]];
mu2[x_, a_ y_] := a mu2[x, y];
mu2[a_ x_, y_] := a mu2[x, y];
```

2. Se introduce la expresión de los productos de las posibles superálgebras (como ejemplo se tomará la ley de una superálgebra con dimensión de parte impar dos; modificando las expresiones de los productos se hace para dimensión de la parte impar tres). En este estudio aún no se sabe si la ley corresponde o no a una superálgebra de Lie.

```
(*La familia H_r*)

For[i = 0, i <= r1 - 1, i++,
    mu0[x[2i], x[2i + 1]] = x[2r1]];
mu0[x[i_], x[j_]] := 0;

(*el resto de productos corchetes*)

For[i = 0, i <= 2r1 - 1, i++,
    mu2[x[i], y[1]] = d[i, 1] y[2]];

If[i > 2r1 - 1, mu2[x[i], y[1]] = 0];

For[i = 0, i <= 2r1, i++,
    mu2[x[i], y[2]] = 0];

For[i = 1, i <= dim1, i++,

  For[j = 1, j <= dim1, j++,
    mu1[y[i], y[j]] =\sum_{k=0}^{k=2r}e[i, j, k] x[k]];
```

3. Se calculan las identidades de Jacobi graduadas y se obtienen restricciones entre las constantes de estructura.

```
    (*Identidad de Jacobi graduada*)

jac0[i_Integer, j_Integer, k_Integer] := Collect[
      mu0[x[i], mu0[x[j], x[k]]] + mu0[x[j], mu0[x[k], x[i]]] +
          mu0[x[k], mu0[x[i], x[j]]], basemu0];

jac1[i_Integer, j_Integer, k_Integer] := Collect[
      mu2[y[i], mu1[y[j], y[k]]] + mu2[y[j], mu1[y[k], y[i]]] +
          mu2[y[k], mu1[y[i], y[j]]], basemu1];

jac2[i_Integer, j_Integer, k_Integer] := Collect[
      mu2[x[i], mu2[x[j], y[k]]] - mu2[mu0[x[i], x[j]], y[k]] -
          mu2[x[j], mu2[x[i], y[k]]], basemu1];

jac3[i_Integer, j_Integer, k_Integer] := Collect[
      mu0[x[i], mu1[y[j], y[k]]] - mu1[mu2[x[i], y[j]], y[k]] -
          mu1[y[j], mu2[x[i], y[k]]], basemu0];

Jacobimu0 := Module[{i, j, k},
      For[i = 0, i <= dim - 3, i++,
        For[j = i + 1, j <= dim - 2, j++,
                For[k = j + 1, k <= dim - 1, k++,

            If[jac0[i, j, k] == 0,
              Print["JAC-0(", i, j, k")->", jac0[i, j, k]], {},
              Print["JAC-0(", i, j, k")->", jac0[i, j, k]]]]]]];


Jacobimu1 := Module[{i, j, k},
      For[i = 1, i <= dim1, i++,
        For[j = 1, j <= dim1, j++,
                For[k = 1, k <= dim1, k++,
```

```
            If[jac1[i, j, k] == 0,
              Print["JAC-1(", i, j, k")->", jac1[i, j, k]], {},
              Print["JAC-1(", i, j, k")->", jac1[i, j, k]]]]]]];

JacobimuOmu2 := Module[{i, j, k},
      For[i = 0, i <= dim - 2, i++,
        For[j = i + 1, j <= dim - 1, j++,
                For[k = 1, k <= dim1, k++,

            If[jac2[i, j, k] == 0,
              Print["JAC-2(", i, j, k")->", jac2[i, j, k]], {},
              Print["JAC-2(", i, j, k")->", jac2[i, j, k]]]]]]];


JacobimuOmu1mu2 := Module[{i, j, k},
      For[i = 0, i <= dim - 1, i++,
        For[j = 1, j <= dim1, j++,
                For[k = 1, k <= dim1, k++,

            If[jac3[i, j, k] == 0,
              Print["JAC-3(", i, j, k")->", jac3[i, j, k]], {},
              Print["JAC-3(", i, j, k")->", jac3[i, j, k]]]]]]];

lista0 = Select[
      Flatten[Table[
          Coefficient[jac0[i, j, k], basemu0],
          {i, 0, dim - 3}, {j, i + 1, dim - 2},
          {k, j + 1, dim - 1}]], ! NumberQ[#] &];

lista1 = Select[
      Flatten[Table[
          Coefficient[jac1[i, j, k], basemu1],
          {i, 1, dim1}, {j, 1, dim1},
          {k,1, dim1}]], ! NumberQ[#] &];

lista2 = Select[
      Flatten[Table[
```

```
          Coefficient[jac2[i, j, k], basemul],
          {i, 0, dim - 2}, {j, i + 1,dim - 1},
          {k, 1, dim1}]], ! NumberQ[#] &];

lista3 = Select[
      Flatten[Table[
          Coefficient[jac3[i, j, k], basemu0],
          {i, 0, dim - 1}, {j, 1,dim1},
          {k, 1, dim1}]], ! NumberQ[#] &];

lista = Join[lista0, lista1, lista2, lista3];

ecuaciones =Map[(#== 0) &, lista]
```

Nota 5.2.1 Este programa permite obtener las relaciones entre las constantes de estructura para dimensiones concretas. Por inducción se pueden calcular las relaciones para superálgebras de Lie en dimensión arbitraria.

Con ayuda del programa se obtiene la clasificación para dimensiones concretas. Luego, se inducen las expresiones para el caso general y, finalmente, se prueba el resultado general.

5.3 Clasificación de $\mathcal{H}_r \oplus < Y_1 >$

En esta sección se presenta la clasificación de las superálgebras de Lie de Heisenberg con dimensión de la parte par arbitraria $2r+1$, r natural cualquiera, y dimensión de la parte impar uno.

Teorema 5.3.1 *Si $\mathfrak{g}$ es una S.A.H. no degenerada, con dimensión de la parte par arbitraria $2r+1$ y dimensión de la parte impar uno, entonces es isomorfa a la superálgebra que se denota $\mathfrak{g}^1$ y que se expresa, en una cierta* *base adaptada* $\{X_0, X_1, \ldots, X_{2r}, Y_1\}$, *por*

$$\mathfrak{g}^1 \left\{ \begin{array}{ll} [X_{2i}, X_{2i+1}] = X_{2r} & 0 \leq i \leq r-1 \\ [Y_1, Y_1] = X_{2r} & \end{array} \right.$$

Demostración: Se ha probado la existencia de una base adaptada para $\mathfrak{g}$, $\{X_0, X_1, \ldots, X_{2r}, Y_1\}$, tal que

$$[X_{2i}, X_{2i+1}] = X_{2r}, \qquad 0 \leq i \leq r-1$$

Además, $[\mathfrak{g}_0, Y_1] = 0$ y como $J_{\mathfrak{g}}(X_i, Y_1, Y_1) = 0$ para todo i, $0 \leq i \leq 2r$, se tiene que $[Y_1, Y_1] \subset \mathcal{Z}(\mathfrak{g}_0)$. De aquí que la familia a clasificar sea:

$$\left\{ \begin{array}{ll} [X_{2i}, X_{2i+1}] = X_{2r} & 0 \leq i \leq r-1 \\ [Y_1, Y_1] = E_{11}^{2r} X_{2r} & \end{array} \right.$$

obteniéndose el álgebra de Lie de Heisenberg $\mathcal{H}_r$ si $E_{11}^{2r} = 0$ (caso degenerado) y la S.A.L. (no escindida) $\mathfrak{g}^1$ si $E_{11}^{2r} \neq 0$. □

5.4 Clasificación de $\mathcal{H}_r \oplus < Y_1, Y_2 >$

En esta sección se presenta la clasificación de las superálgebras de Lie de Heisenberg con dimensión de la parte par arbitraria $2r+1$ y dimensión de la parte impar dos.

Teorema 5.4.1 *Si* $\mathfrak{g}$ *es una S.A.H. no degenerada, con dimensión de la parte par arbitraria* $2r+1$ *y dimensión de la parte impar dos, entonces es isomorfa a una de las superálgebras denotadas por* $\mathfrak{g}^1 \oplus \mathbb{C}$, $\mathfrak{g}_1^2$, $\mathfrak{g}_2^2$ *y* $\mathfrak{g}_3^2$, *dos a dos no isomorfas, cuyas leyes pueden ser expresadas en una cierta base* *adaptada,* $\{X_0, X_1, \ldots, X_{2r}, Y_1, Y_2\}$, *por*

$\mathfrak{g}^1 \oplus \mathbb{C}$:

$$\begin{cases} [X_{2i}, X_{2i+1}] = X_{2r} & 0 \leq i \leq r-1 \\ [Y_1, Y_1] = X_{2r} \end{cases}$$

$\mathfrak{g}_1^2$:

$$\begin{cases} [X_{2i}, X_{2i+1}] = X_{2r} & 0 \leq i \leq r-1 \\ [Y_1, Y_2] = X_{2r} \end{cases}$$

$\mathfrak{g}_2^2$:

$$\begin{cases} [X_{2i}, X_{2i+1}] = X_{2r} & 0 \leq i \leq r-1 \\ [X_0, Y_1] = Y_2 \\ [Y_1, Y_1] = X_{2r} \end{cases}$$

$\mathfrak{g}_3^2$:

$$\begin{cases} [X_{2i}, X_{2i+1}] = X_{2r} & 0 \leq i \leq r-1 \\ [X_0, Y_1] = Y_2 \\ [Y_1, Y_1] = 2X_1 \\ [Y_1, Y_2] = X_{2r} \end{cases}$$

Demostración: Es evidente que $\mathfrak{g}^1 \oplus \mathbb{C}$, $\mathfrak{g}_1^2$, $\mathfrak{g}_2^2$ y $\mathfrak{g}_3^2$ son S.A.L. con parte par el álgebra de Heisenberg, de dimensión $2r+1$, y parte impar de dimensión dos. Que son no isomorfas dos a dos sigue de la tabla siguiente junto con el hecho de que $\mathfrak{g}^1 \oplus \mathbb{C}$ no es isomorfa al resto por ser la única escindida.

Superálgebras	$dim(\mathcal{Z}(\mathfrak{g}))$	$dim(\mathcal{C}^1(\mathfrak{g}))$
$\mathfrak{g}_1^2$	1	1
$\mathfrak{g}_2^2$	2	2
$\mathfrak{g}_3^2$	1	3

Resta ver que, efectivamente, las cuatro S.A.H. anteriores son todas las que se obtienen en este caso. Así, del teorema 5.1.1, se pueden considerar dos casos.

Caso 1: $\epsilon = 0$.

En este caso, se tiene que $[\mathfrak{g}_0, Y_1] = 0$ ($\mathfrak{g}_1$ es un $\mathfrak{g}_0$-módulo trivial).

Es fácil ver que $[Y_i, Y_j] \subset \mathcal{Z}(\mathfrak{g}_0)$. En efecto, pues en caso contrario, si existe k tal que $X_k \in [Y_i, Y_j]$, $0 \leq k \leq 2r-1$, de $J_g(Y_i, Y_j, X_{k+1})$ o $J_g(Y_i, Y_j, X_{k-1})$, dependiendo de si k es par o impar, se obtiene que $X_{2r} = 0$, lo que es una contradicción.

Por tanto, la familia de leyes a clasificar queda

$$\begin{cases} [X_{2i}, X_{2i+1}] = X_{2r}, & 0 \leq i \leq r-1 \\ [Y_1, Y_1] = E_{11}^{2r} X_{2r} \\ [Y_1, Y_2] = E_{12}^{2r} X_{2r} \\ [Y_2, Y_2] = E_{22}^{2r} X_{2r} \end{cases}$$

Siempre se puede suponer que $E_{22}^{2r} = 0$. En efecto,

- Si $E_{11}^{2r} = 0$, se hace el cambio $Y_1' = Y_2$, $Y_2' = Y_1$.
- Si $E_{11}^{2r} \neq 0$, se hace el cambio $Y_1' = Y_1$, $Y_2' = cY_1 + Y_2$, con

$$c = \frac{-E_{12}^{2r} \pm \sqrt{(E_{12}^{2r})^2 - E_{11}^{2r} E_{22}^{2r}}}{E_{11}^{2r}}$$

Así, se obtiene la familia

$$\begin{cases} [X_{2i}, X_{2i+1}] = X_{2r}, & 0 \leq i \leq r-1 \\ [Y_1, Y_1] = E_{11}^{2r} X_{2r} \\ [Y_1, Y_2] = E_{12}^{2r} X_{2r} \end{cases}$$

- Si $E_{12}^{2r} = 0$, entonces se verifica que $E_{11}^{2r} \neq 0$ ya que en caso contrario se tendría un álgebra de Lie (caso degenerado). Se obtiene en este caso la superálgebra $\mathfrak{g}^1 \oplus \mathbb{C}$ que constituye en esta dimensión un caso escindido.
- Si $E_{12}^{2r} \neq 0$, se hace el cambio de base $Y_1' = \dfrac{1}{E_{12}^{2r}} Y_1 - \dfrac{E_{11}^{2r}}{2(E_{12}^{2r})^2} Y_2$, $Y_2' = Y_2$ y se obtiene $\mathfrak{g}_1^2$

Caso 2: $\epsilon = 1$.

- De $J_g(X_0, Y_1, Y_1)$ se tiene que
$$[Y_1, Y_2] \subset Im\ ad(X_0) =< X_{2r} >$$
- De $J_g(X_0, Y_1, Y_2)$ se tiene que
$$[Y_2, Y_2] = 0$$

Entonces, la familia de leyes a clasificar resulta

$$\begin{cases} [X_{2i}, X_{2i+1}] = X_{2r}, & 0 \leq i \leq r-1 \\ [X_0, Y_1] = Y_2 & \\ [X_i, Y_1] = D^2_{i,1} Y_2, & 1 \leq i \leq 2r-1 \\ [Y_1, Y_1] = \sum_{k=0}^{2r} E^k_{11} X_k & \\ [Y_1, Y_2] = E^{2r}_{12} X_{2r} & \end{cases}$$

A continuación se calculan las identidades de Jacobi graduadas.

- De $J_g(Y_1, Y_1, Y_1)$ se obtiene que
$$E^0_{11} + \sum_{k=1}^{2r-1} E^k_{11} D^2_{k,1} = 0$$
- De $J_g(X_{2i}, Y_1, Y_1)$, con $0 \leq i \leq r-1$, se obtiene que
$$\begin{array}{ll} E^{2i+1}_{11} = 2D^2_{2i,1} E^{2r}_{12}, & 1 \leq i \leq r-1 \\ E^1_{11} = 2E^{2r}_{12}, & i = 0 \end{array}$$
- De $J_g(X_{2i+1}, Y_1, Y_1)$, con $0 \leq i \leq r-1$, se obtiene que
$$E^{2i}_{11} = -2D^2_{2i+1,1} E^{2r}_{12}, \qquad 0 \leq i \leq r-1$$

Se puede suponer que $D^2_{2i+1,1} = 0,\ 0 \leq i \leq r-1$. En efecto, ya que para cada i, con $1 \leq i \leq r-1$, tal que $D^2_{2i,1} \neq 0$ el siguiente cambio de base

$$\begin{cases} X'_{2i} = \dfrac{1}{D^2_{2i,1}} X_{2i} \\ X'_{2i+1} = D^2_{2i,1} X_{2i+1} - D^2_{2i+1,1} X_{2i} \end{cases}$$

permite suponer que $D^2_{2i+1,1} = 0$ y $D^2_{2i,1} = 1$. Si $D^2_{2i,1} = 0$ se hace el siguiente cambio de base

$$\begin{cases} X'_{2i} = -X_{2i+1} \\ X'_{2i+1} = X_{2i} \end{cases}$$

y se consigue, nuevamente, $D^2_{2i+1,1} = 0$. Para el caso $i = 0$ se puede suponer $D^2_{11} = 0$, haciendo el cambio dado por

$$\begin{cases} X'_0 = X_0 \\ X'_1 = X_1 - D^2_{11}X_0 \end{cases}$$

Entonces, por las restricciones, se tiene que $E^{2i}_{11} = 0, \ 0 \leq i \leq r-1$, con lo que la familia queda

$$\begin{cases} [X_{2i}, X_{2i+1}] = X_{2r}, & 0 \leq i \leq r-1 \\ [X_0, Y_1] = Y_2 & \\ [X_{2i}, Y_1] = D^2_{2i,1}Y_2, & 1 \leq i \leq r-1 \\ [Y_1, Y_1] = 2E^{2r}_{12}\left(X_1 + \sum\limits_{i=1}^{r-1} D^2_{2i,1}X_{2i+1}\right) + E^{2r}_{11}X_{2r} & \\ [Y_1, Y_2] = E^{2r}_{12}X_{2r} & \end{cases}$$

2.1. $D^2_{2i,1} = 0$, para todo i, $1 \leq i \leq r-1$. Resulta

$$\begin{cases} [X_{2i}, X_{2i+1}] = X_{2r}, & 0 \leq i \leq r-1 \\ [X_0, Y_1] = Y_2 & \\ [Y_1, Y_1] = 2E^{2r}_{12}X_1 + E^{2r}_{11}X_{2r} & \\ [Y_1, Y_2] = E^{2r}_{12}X_{2r} & \end{cases}$$

2.1.1. $E^{2r}_{12} = 0$, la familia de leyes queda

$$\begin{cases} [X_{2i}, X_{2i+1}] = X_{2r}, & 0 \leq i \leq r-1 \\ [X_0, Y_1] = Y_2 & \\ [Y_1, Y_1] = E^{2r}_{11}X_{2r} & \end{cases}$$

y se obtiene $\mathfrak{g}^2_2$ al ser $E^{2r}_{11} \neq 0$, ya que si no se tendría un álgebra de Lie.

2.1.2. $E_{12}^{2r} \neq 0$, haciendo el cambio de base dado por

$$\begin{cases} Y_1' = \dfrac{1}{\sqrt{E_{12}^{2r}}} Y_1 - \dfrac{E_{11}^{2r}}{2\sqrt{(E_{12}^{2r})^3}} Y_2 \\ Y_2' = \dfrac{1}{\sqrt{E_{12}^{2r}}} Y_2 \end{cases}$$

se obtiene $\mathfrak{g}_3^2$.

2.2. Existe i, $1 \leq i \leq r-1$, tal que $D_{2i,1}^2 \neq 0$. Por simetría se puede suponer que $D_{2,1}^2 \neq 0$ y, además, se puede suponer que $D_{2,1}^2 = 1$ por el cambio de escala

$$\begin{cases} X_2' = \dfrac{1}{D_{2,1}^2} X_2 \\ X_3' = D_{2,1}^2 X_3 \end{cases}$$

El cambio de base dado por

$$\begin{cases} X_3' = X_3 + \sum\limits_{i=2}^{r-1} D_{2i,1}^2 X_{2i+1} & \\ X_{2j}' = X_{2j} - D_{2j,1}^2 X_2 & 2 \leq j \leq r-1 \end{cases}$$

permite suponer que $D_{2i,1}^2 = 0$ para $2 \leq i \leq r-1$.

Entonces, se tiene que $E_{11}^{2i+1} = 0$ para todo i, $2 \leq i \leq r-1$ (por las restricciones), ahora la familia es

$$\begin{cases} [X_{2i}, X_{2i+1}] = X_{2r}, & 0 \leq i \leq r-1 \\ [X_0, Y_1] = Y_2 & \\ [X_2, Y_1] = Y_2 & \\ [Y_1, Y_1] = 2E_{12}^{2r}(X_1 + X_3) + E_{11}^{2r} X_{2r} & \\ [Y_1, Y_2] = E_{12}^{2r} X_{2r}. & \end{cases}$$

Así, el siguiente cambio de base reduce este caso al anterior.

$$\begin{cases} X_1' = X_1 + X_3 \\ X_2' = -X_0 + X_2 \end{cases}$$

Con esto se concluye la demostración del teorema. □

5.5 Clasificación de $\mathcal{H}_r \oplus < Y_1, Y_2, Y_3 >$

En esta sección se aborda el problema de la clasificación de las S.A.H. con dimensión de la parte par $2r+1$ y dimensión de la parte impar igual a 3. De éstas se clasificarán las de invariante de Goze minimal $(2,1,\ldots,1|\ 1,1,1)$ y maximal $(2,1,\ldots,1|\ 3)$; de las de invariante de Goze $(2,1,\ldots,1|\ 2,1)$ se da la familia genérica y la lista de las $2-$nilpotentes (lista que se clasificará en la siguiente sección).

Gracias a la demostración del teorema 5.1.2 el problema de la clasificación de las S.A.H. con dimensión de la parte impar 3 se reduce al estudio de tres casos y cuatro subfamilias como sigue. A partir de este momento todas las S.A.H. que se consideren se supondrán en una cierta base adaptada $\{X_0, X_1, \ldots, X_{2r-1}, X_{2r}, Y_1, Y_2, Y_3\}$ con X_0 vector característico de la superálgebra.

Es claro que las superálgebras que se obtengan de casos distintos son no isomorfas entre sí por tener distinto invariante de Goze.

Caso 1. Invariante de Goze $(2,1,\ldots,1|\ 1,1,1)$

$$\begin{cases} [X_{2i}, X_{2i+1}] = X_{2r}, & 0 \leq i \leq r-1 \\ [X_i, Y_j] = 0, & 0 \leq i \leq 2r,\ 1 \leq j \leq 3 \\ [Y_i, Y_j] = \sum\limits_{k=0}^{2r} E_{ij}^k X_k, & 1 \leq i,j \leq 3, (i,j) \neq (3,3) \\ [Y_3, Y_3] = E_{33}^{2r} X_{2r} & \end{cases}$$

Caso 2. Invariante de Goze $(2,1,\ldots,1|\ 2,1)$

2.1. Con base adaptada $[X_0, Y_1] = Y_2$ y $[X_0, Y_2] = 0$.

$$\begin{cases} [X_{2i}, X_{2i+1}] = X_{2r}, & 0 \leq i \leq r-1 \\ [X_0, Y_1] = Y_2 & \\ [X_0, Y_2] = 0 & \\ [X_j, Y_1] = D^2_{j,1}Y_2 + D^3_{j,1}Y_3, & 1 \leq j \leq 2r-1 \\ [X_{2r}, Y_1] = D^3_{2r,1}Y_3 & \\ [X_j, Y_2] = D^3_{j,2}Y_3, & 1 \leq j \leq 2r-1 \\ [Y_i, Y_j] = \sum\limits_{k=0}^{2r} E^k_{ij}X_k, & 1 \leq i,j \leq 3, (i,j) \neq (3,3) \\ [Y_3, Y_3] = E^{2r}_{33}X_{2r}. & \end{cases}$$

sujeta a las restricciones

$$\begin{cases} D^2_{j,1}D^3_{j,2} = 0 & 1 \leq j \leq 2r-1 \\ D^2_{j,1}D^3_{j+1,2} = 0 & 1 \leq j \leq 2r-2 \\ D^2_{j,1}D^3_{j-1,2} = 0 & 2 \leq j \leq 2r-1 \end{cases}$$

2.2. Con base adaptada $[X_0, Y_1] = Y_3$ y $[X_0, Y_2] = Y_3$.

$$\begin{cases} [X_{2i}, X_{2i+1}] = X_{2r}, & 0 \leq i \leq r-1 \\ [X_0, Y_1] = Y_3 & \\ [X_0, Y_2] = Y_3 & \\ [X_j, Y_1] = D^3_{j,1}Y_3, & 1 \leq j \leq 2r \\ [X_j, Y_2] = D^3_{j,2}Y_3, & 1 \leq j \leq 2r-1 \\ [Y_i, Y_j] = \sum\limits_{k=0}^{2r} E^k_{ij}X_k, & 1 \leq i,j \leq 3, (i,j) \neq (3,3) \\ [Y_3, Y_3] = E^{2r}_{33}X_{2r}. & \end{cases}$$

Caso 3. Invariante de Goze $(2,1,\ldots,1|\ 3)$

$$\begin{cases} [X_{2i},X_{2i+1}]=X_{2r}, & 0\le i\le r-1\\ [X_0,Y_1]=Y_2 & \\ [X_0,Y_2]=Y_3 & \\ [X_j,Y_1]=D^2_{j,1}Y_2+D^3_{j,1}Y_3, & 1\le j\le 2r-1\\ [X_{2r},Y_1]=D^3_{2r,1}Y_3 & \\ [X_j,Y_2]=D^3_{j,2}Y_3, & 1\le j\le 2r-1\\ [Y_i,Y_j]=\sum\limits_{k=0}^{2r}E^k_{ij}X_k, & 1\le i,j\le 3,(i,j)\neq(3,3)\\ [Y_3,Y_3]=E^{2r}_{33}X_{2r}. & \end{cases}$$

Notación. A las superálgebras que se obtengan del caso 1 se las notará como $\mathfrak{g}^3_{(1,i)}$; a las del caso 2 mediante $\mathfrak{g}^3_{(2,i)}$, con $1\le i\le 10$, y mediante $\overline{\mathfrak{g}}^{3,\alpha,\beta}_{(2,11)}$, $\overline{\mathfrak{g}}^{3,\alpha}_{(2,12)}$, $\overline{\mathfrak{g}}^{3}_{(2,13)}$, $\overline{\mathfrak{g}}^{3,\alpha,\beta}_{(2,14)}$, $\overline{\mathfrak{g}}^{3,\alpha}_{(2,15)}$ y $\overline{\mathfrak{g}}^{3}_{(2,16)}$; a las del caso 3 por $\mathfrak{g}^3_{(3,i)}$, $i\ge 1$. En particular sólo existe una superálgebra no degenerada ni escindida en el caso 1 luego, por simplicidad, se notará a $\mathfrak{g}^3_{(1,1)}$ simplemente por $\mathfrak{g}^3_1$.

5.5.1 Invariante de Goze minimal $(2,1,\ldots,1|\ 1,1,1)$

Teorema 5.5.1 *Si $\mathfrak{g}$ es una S.A.H. no degenerada, con dimensión de la parte par arbitraria $2r+1$, dimensión de la parte impar tres y de invariante de Goze $(2,1,\ldots,1|\ 1,1,1)$, entonces es isomorfa a una de las siguientes tres superálgebras, dos a dos no isomorfas, cuyas leyes pueden ser expresadas en una cierta base adaptada $\{X_0,X_1,\ldots,X_{2r-1},X_{2r},Y_1,Y_2,Y_3\}$, por*

$\mathfrak{g}^1\oplus\mathbb{C}^2$:

$$\begin{cases} [X_{2i},X_{2i+1}]=X_{2r} & 0\le i\le r-1\\ [Y_1,Y_1]=X_{2r} & \end{cases}$$

$\mathfrak{g}^2_1\oplus\mathbb{C}$:

$$\begin{cases} [X_{2i},X_{2i+1}]=X_{2r} & 0\le i\le r-1\\ [Y_1,Y_2]=X_{2r} & \end{cases}$$

$\mathfrak{g}^3_1$:

$$\begin{cases} [X_{2i},X_{2i+1}]=X_{2r} & 0\le i\le r-1\\ [Y_1,Y_1]=X_{2r} & \\ [Y_2,Y_3]=X_{2r} & \end{cases}$$

Demostración: Es claro que las superálgebras anteriores son S.A.H. no degeneradas, con dimensión de la parte par arbitraria $2r+1$, dimensión de la parte impar tres y de invariante de Goze $(2, 1, \ldots, 1|\ 1, 1, 1)$. Además, son no isomorfas entre sí; las escindidas $\mathfrak{g}^1 \oplus \mathbb{C}^2$ y $\mathfrak{g}_1^2 \oplus \mathbb{C}$ son claramente no isomorfas y sólo hay una no escindida $\mathfrak{g}_1^3$. Resta probar que, efectivamente, las tres superálgebras anteriores son todas las que se tienen en este caso.

Se considera, por tanto, la siguiente familia de S.A.L.

$$\begin{cases} [X_{2i}, X_{2i+1}] = X_{2r}, & 0 \le i \le r-1 \\ [X_i, Y_j] = 0, & 0 \le i \le 2r,\ 1 \le j \le 3 \\ [Y_i, Y_j] = \sum_{k=0}^{2r} E_{ij}^k X_k, & 1 \le i,j \le 3, (i,j) \neq (3,3) \\ [Y_3, Y_3] = E_{33}^{2r} X_{2r} \end{cases}$$

• De $J_g(X_{2k}, Y_i, Y_j),\ 0 \le k \le r-1,\ 1 \le i,j \le 3$, se sigue que

$$[X_{2k}, \sum_{l=0}^{2r} E_{ij}^l X_l] = 0$$

de donde se tiene que

$$E_{ij}^{2k+1} = 0,\ 0 \le k \le r-1,\ 1 \le i,j \le 3$$

• De $J_g(X_{2k+1}, Y_i, Y_j),\ 0 \le k \le r-1,\ 1 \le i,j \le 3$, se sigue que

$$[X_{2k+1}, \sum_{l=0}^{2r} E_{ij}^l X_l] = 0$$

de donde se tiene que

$$E_{ij}^{2k} = 0,\ 0 \le k \le r-1,\ 1 \le i,j \le 3$$

Por tanto, queda la familia de leyes

$$\begin{cases} [X_{2i}, X_{2i+1}] = X_{2r}, & 0 \le i \le r-1 \\ [Y_i, Y_j] = E_{ij}^{2r} X_{2r}, & 1 \le i,j \le 3 \end{cases}$$

además, siempre se puede suponer que $E_{33}^{2r} = 0$. En efecto,

- Si $E_{22}^{2r} = 0$, basta efectuar el cambio $Y_2' = Y_3,\ Y_3' = Y_2$.
- Si $E_{22}^{2r} \neq 0$, basta efectuar el cambio $Y_2' = Y_2,\ Y_3' = cY_2 + Y_3$, siendo c solución de la ecuación $E_{22}^{2r}c^2 + 2E_{23}^{2r}c + E_{33}^{2r} = 0$.

También se puede suponer que $E_{22}^{2r} = 0$. En efecto,

- Si $E_{11}^{2r} = 0$, basta efectuar el cambio $Y_1' = Y_2,\ Y_2' = Y_1$.
- Si $E_{11}^{2r} \neq 0$, basta efectuar el cambio $Y_1' = Y_1,\ Y_2' = cY_1 + Y_2$, siendo c solución de la ecuación $E_{11}^{2r}c^2 + 2E_{12}^{2r}c + E_{22}^{2r} = 0$.

Por tanto, se tiene la familia de leyes

$$\left\{\begin{array}{l}
[X_{2i}, X_{2i+1}] = X_{2r}, \quad 0 \leq i \leq r-1 \\
[Y_1, Y_1] = E_{11}^{2r}X_{2r} \\
[Y_1, Y_2] = E_{12}^{2r}X_{2r} \\
[Y_1, Y_3] = E_{13}^{2r}X_{2r} \\
[Y_2, Y_3] = E_{23}^{2r}X_{2r}
\end{array}\right.$$

Análogamente, se puede suponer que $E_{13}^{2r} = 0$. En efecto,

- Si $E_{12}^{2r} = 0$, basta efectuar el cambio $Y_1' = Y_1,\ Y_2' = Y_3,\ Y_3' = Y_2$.
- Si $E_{12}^{2r} \neq 0$:
  - Si $E_{23}^{2r} \neq 0$, efectuando el cambio dado por $Y_1' = Y_1 - \frac{E_{13}^{2r}}{E_{23}^{2r}}Y_2 - \frac{E_{12}^{2r}}{E_{23}^{2r}}Y_3$, se verifica que $[Y_1', Y_2'] = [Y_1', Y_3'] = 0$
  - Si $E_{23}^{2r} = 0$, efectuando el cambio dado por $Y_3' = Y_3 - \frac{E_{13}^{2r}}{E_{12}^{2r}}Y_2$, se verifica que $[Y_1', Y_3'] = 0$

resultando la familia de leyes

$$\left\{\begin{array}{l}
[X_{2i}, X_{2i+1}] = X_{2r}, \quad 0 \leq i \leq r-1 \\
[Y_1, Y_1] = E_{11}^{2r}X_{2r} \\
[Y_1, Y_2] = E_{12}^{2r}X_{2r} \\
[Y_2, Y_3] = E_{23}^{2r}X_{2r}
\end{array}\right.$$

Caso 1: $E_{23}^{2r} = 0$, en este caso la familia resulta

$$\left\{ \begin{array}{l} [X_{2i}, X_{2i+1}] = X_{2r}, \quad 0 \le i \le r-1 \\ [Y_1, Y_1] = E_{11}^{2r} X_{2r} \\ [Y_1, Y_2] = E_{12}^{2r} X_{2r} \end{array} \right.$$

- Si $E_{12}^{2r} = 0$, entonces $E_{11}^{2r} \neq 0$ (ya que en caso contrario se tendría un álgebra de Lie) obteniéndose la superálgebra $\mathfrak{g}^1 \oplus \mathbb{C}^2$ que, a su vez, constituye un caso escindido.
- Si $E_{12}^{2r} \neq 0$, se puede suponer que $E_{11}^{2r} = 0$, efectuando el cambio de base dado por $Y_1' = Y_1 - \frac{E_{11}^{2r}}{2E_{12}^{2r}} Y_2$, obteniéndose nuevamente una S.A.L. escindida, $\mathfrak{g}_1^2 \oplus \mathbb{C}$.

Caso 2: $E_{23}^{2r} \neq 0$, ahora se puede suponer que $E_{12}^{2r} = 0$, efectuando el cambio de base dado por $Y_1' = Y_1 - \frac{E_{12}^{2r}}{E_{23}^{2r}} Y_3$, quedando

$$\left\{ \begin{array}{l} [X_{2i}, X_{2i+1}] = X_{2r}, \quad 0 \le i \le r-1 \\ [Y_1, Y_1] = E_{11}^{2r} X_{2r} \\ [Y_2, Y_3] = E_{23}^{2r} X_{2r} \end{array} \right.$$

Ahora bien, si $E_{11}^{2r} = 0$ se obtiene $\mathfrak{g}_1^2 \oplus \mathbb{C}$ mediante el cambio de base dado por $Y_1' = Y_2$, $Y_2' = Y_3$, $Y_3' = Y_1$. En el caso que $E_{11}^{2r} \neq 0$, se obtiene $\mathfrak{g}_1^3$ mediante un sencillo cambio de escala .

Con esto se concluye la demostración del teorema. □

5.5.2 Invariante de Goze $(2, 1, \ldots, 1|\ 2, 1)$

En este caso se tienen dos subfamilias de S.A.L., una con base adaptada $[X_0, Y_1] = Y_2$, $[X_0, Y_2] = 0$ y otra con $[X_0, Y_2] = Y_3$, $[X_0, Y_2] = Y_3$. La primera se clasificará en su totalidad obteniéndose 10 S.A.H. no escindidas y no degeneradas, $\mathfrak{g}_{(2,i)}^3$ para $1 \le i \le 10$; de la segunda subfamilia se obtendrá la familia genérica y se dará la lista (lista que será clasificada en la siguiente sección) de todas las de nilíndice 2.

Teorema 5.5.2 *Si $\mathfrak{g}$ es una S.A.H. no degenerada, con dimensión de la parte par arbitraria $2r+1$, dimensión de la parte impar tres, de invariante de Goze $(2,1,\ldots,1|\,2,1)$ y tal que admite una base adaptada $\{X_0, X_1, \ldots, X_{2r-1}, X_{2r}, Y_1, Y_2, Y_3\}$ con $[X_0, Y_1] = Y_2$ y $[X_0, Y_2] = 0$, entonces es isomorfa a una de las siguientes superálgebras, dos a dos no isomorfas, cuyas leyes pueden ser expresadas mediante*

$\mathfrak{g}_2^2 \oplus \mathbb{C}$:

$$\begin{cases} [X_{2i}, X_{2i+1}] = X_{2r} & 0 \le i \le r-1 \\ [X_0, Y_1] = Y_2 \\ [Y_1, Y_1] = X_{2r} \end{cases}$$

$\mathfrak{g}_3^2 \oplus \mathbb{C}$:

$$\begin{cases} [X_{2i}, X_{2i+1}] = X_{2r} & 0 \le i \le r-1 \\ [X_0, Y_1] = Y_2 \\ [Y_1, Y_1] = 2X_1 \\ [Y_1, Y_2] = X_{2r} \end{cases}$$

$\mathfrak{g}^3_{(2,1)}$:

$$\begin{cases} [X_{2i}, X_{2i+1}] = X_{2r} & 0 \le i \le r-1 \\ [X_0, Y_1] = Y_2 \\ [X_1, Y_1] = Y_3 \\ [Y_1, Y_1] = X_{2r} \end{cases}$$

$\mathfrak{g}^3_{(2,2)}$:

$$\begin{cases} [X_{2i}, X_{2i+1}] = X_{2r} & 0 \le i \le r-1 \\ [X_0, Y_1] = Y_2 \\ [X_3, Y_1] = Y_3 \\ [Y_1, Y_1] = X_{2r} \end{cases}$$

$\mathfrak{g}^3_{(2,3)}$:

$$\begin{cases} [X_{2i}, X_{2i+1}] = X_{2r} & 0 \le i \le r-1 \\ [X_0, Y_1] = Y_2 \\ [X_3, Y_1] = Y_3 \\ [Y_1, Y_1] = X_1 - 2X_2 \\ [Y_1, Y_2] = \frac{1}{2}X_{2r} \\ [Y_1, Y_3] = X_{2r} \end{cases}$$

$\mathfrak{g}^3_{(2,4)}$:

$$\begin{cases} [X_{2i}, X_{2i+1}] = X_{2r} & 0 \le i \le r-1 \\ [X_0, Y_1] = Y_2 \\ [X_3, Y_1] = Y_3 \\ [Y_1, Y_1] = -2X_2 \\ [Y_1, Y_3] = X_{2r} \end{cases}$$

$\mathfrak{g}^3_{(2,5)}$:

$$\begin{cases} [X_{2i}, X_{2i+1}] = X_{2r} & 0 \le i \le r-1 \\ [X_0, Y_1] = Y_2 \\ [Y_1, Y_1] = X_1 \\ [Y_1, Y_2] = \frac{1}{2}X_{2r} \\ [Y_1, Y_3] = X_{2r} \end{cases}$$

$\mathfrak{g}^3_{(2,6)}$:

$$\begin{cases} [X_{2i}, X_{2i+1}] = X_{2r} & 0 \le i \le r-1 \\ [X_0, Y_1] = Y_2 \\ [Y_1, Y_1] = X_1 \\ [Y_1, Y_2] = \frac{1}{2}X_{2r} \\ [Y_3, Y_3] = X_{2r} \end{cases}$$

$\mathfrak{g}^3_{(2,7)}$:

$$\begin{cases} [X_{2i}, X_{2i+1}] = X_{2r} & 0 \leq i \leq r-1 \\ [X_0, Y_1] = Y_2 \\ [Y_1, Y_1] = X_{2r} \\ [Y_1, Y_3] = X_1 \\ [Y_2, Y_3] = X_{2r} \end{cases}$$

$\mathfrak{g}^3_{(2,8)}$:

$$\begin{cases} [X_{2i}, X_{2i+1}] = X_{2r} & 0 \leq i \leq r-1 \\ [X_0, Y_1] = Y_2 \\ [Y_1, Y_3] = X_{2r} \end{cases}$$

$\mathfrak{g}^3_{(2,9)}$:

$$\begin{cases} [X_{2i}, X_{2i+1}] = X_{2r} & 0 \leq i \leq r-1 \\ [X_0, Y_1] = Y_2 \\ [Y_1, Y_3] = X_1 \\ [Y_2, Y_3] = X_{2r} \end{cases}$$

$\mathfrak{g}^3_{(2,10)}$:

$$\begin{cases} [X_{2i}, X_{2i+1}] = X_{2r} & 0 \leq i \leq r-1 \\ [X_0, Y_1] = Y_2 \\ [Y_3, Y_3] = X_{2r} \end{cases}$$

Demostración:

Es claro que las superálgebras anteriores son, efectivamente, S.A.H. no degeneradas, con dimensión de la parte par arbitraria $2r+1$, dimensión de la parte impar tres, de invariante de Goze $(2,1,\ldots,1|\ 2,1)$ y expresadas en una cierta base adaptada $\{X_0, X_1, \ldots, X_{2r-1}, X_{2r}, Y_1, Y_2, Y_3\}$ tal que $[X_0, Y_1] = Y_2$ y $[X_0, Y_2] = 0$.

Además, las superálgebras anteriores son dos a dos no isomorfas entre sí. Para ello basta tener en cuenta que las superálgebras $\mathfrak{g}^3_{(2,6)}$, $\mathfrak{g}^3_{(2,7)}$ y $\mathfrak{g}^3_{(2,9)}$ son no isomorfas mediante cambios de base genéricos y observar la tabla que sigue a continuación, donde $\mathcal{C}$ denota al operador centralizador.

	$dim(\mathcal{Z}(\mathfrak{g}))$	$dim(\mathcal{C}^1(\mathfrak{g}))$	$dim(\mathcal{C}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{g}_1))$	$dim[\mathcal{C}_{\mathfrak{g}_0}(\mathcal{C}_{\mathfrak{g}_0}(\mathfrak{g}_1)),\mathcal{C}_{\mathfrak{g}_0}(\mathcal{C}_{\mathfrak{g}_0}(\mathfrak{g}_1))]$
$\mathfrak{g}^3_{(2,1)}$	3	3	2r+1	1
$\mathfrak{g}^3_{(2,2)}$	3	3	2r+1	0
$\mathfrak{g}^3_{(2,3)}$	1	4	-	-
$\mathfrak{g}^3_{(2,4)}$	2	4	2r	-
$\mathfrak{g}^3_{(2,5)}$	1	3	2r+1	-
$\mathfrak{g}^3_{(2,6)}$	1	3	2r	-
$\mathfrak{g}^3_{(2,7)}$	1	3	2r	-
$\mathfrak{g}^3_{(2,8)}$	2	2	2r+1	-
$\mathfrak{g}^3_{(2,9)}$	1	3	2r	-
$\mathfrak{g}^3_{(2,10)}$	2	2	2r+2	-

Por tanto, resta ver, para concluir la demostración del teorema, que las superálgebras anteriores son, efectivamente, todas las que se obtienen en este caso.

Así, se considera la siguiente familia de S.A.L.

$$\left\{\begin{array}{ll}
[X_{2i},X_{2i+1}]=X_{2r}, & 0\le i\le r-1\\
[X_0,Y_1]=Y_2 & \\
[X_0,Y_2]=0 & \\
[X_j,Y_1]=D^2_{j,1}Y_2+D^3_{j,1}Y_3, & 1\le j\le 2r-1\\
[X_{2r},Y_1]=D^3_{2r,1}Y_3 & \\
[X_j,Y_2]=D^3_{j,2}Y_3, & 1\le j\le 2r-1\\
[Y_i,Y_j]=\sum\limits_{k=0}^{2r}E^k_{ij}X_k, & 1\le i,j\le 3,(i,j)\neq(3,3)\\
[Y_3,Y_3]=E^{2r}_{33}X_{2r} &
\end{array}\right.$$

sujeta a las restricciones

$$\begin{cases} D^2_{j,1} D^3_{j,2} = 0 & 1 \le j \le 2r-1 \\ D^2_{j,1} D^3_{j+1,2} = 0 & 1 \le j \le 2r-2 \\ D^2_{j,1} D^3_{j-1,2} = 0 & 2 \le j \le 2r-1 \end{cases}$$

Se puede suponer que $D^2_{j,1} = 0, \ 1 \le j \le 2r-1$, sin más que efectuar el cambio de base dado por

$$\begin{cases} X'_1 = -D^2_{1,1} X_0 + X_1 - \sum_{k=1}^{r-1} D^2_{2k+1,1} X_{2k} + \sum_{k=1}^{r-1} D^2_{2k,1} X_{2k+1} & \\ X'_j = -D^2_{j,1} X_0 + X_j & 2 \le j \le 2r-1 \end{cases}$$

La familia queda de leyes queda

$$\begin{cases} [X_{2i}, X_{2i+1}] = X_{2r}, & 0 \le i \le r-1 \\ [X_0, Y_1] = Y_2 & \\ [X_0, Y_2] = 0 & \\ [X_j, Y_1] = D^3_{j,1} Y_3, & 1 \le j \le 2r-1 \\ [X_{2r}, Y_1] = D^3_{2r,1} Y_3 & \\ [X_j, Y_2] = D^3_{j,2} Y_3, & 1 \le j \le 2r-1 \\ [Y_i, Y_j] = \sum_{k=0}^{2r} E^k_{ij} X_k, & 1 \le i, j \le 3, (i,j) \ne (3,3) \\ [Y_3, Y_3] = E^{2r}_{33} X_{2r} & \end{cases}$$

- De $J_g(X_0, X_1, Y_1)$ se tiene que

$$D^3_{2r,1} = -D^3_{12}$$

- De $J_g(X_0, X_j, Y_1)$, $2 \le j \le 2r-1$, se tiene que

$$D^3_{j,2} = 0, \quad 2 \le j \le 2r-1$$

- De $J_g(X_0, Y_1, Y_1)$ se tiene que

$$[Y_1, Y_2] = \frac{1}{2} E^1_{11} X_{2r}$$

- De $J_g(X_0, Y_1, Y_2)$ se tiene que

$$[Y_2, Y_2] = 0$$

- De $J_g(X_0, Y_1, Y_3)$ se tiene que

$$[Y_2, Y_3] = E_{13}^1 X_{2r}$$

- De $J_g(X_{2i}, X_{2i+1}, Y_1)$, $1 \leq i \leq 2r-1$, se tiene que

$$D_{2r,1}^3 = 0$$

Teniendo esto en cuenta, la familia queda reducida a

$$\begin{cases} [X_{2i}, X_{2i+1}] = X_{2r}, & 0 \leq i \leq r-1 \\ [X_0, Y_1] = Y_2 & \\ [X_0, Y_2] = 0 & \\ [X_j, Y_1] = D_{j,1}^3 Y_3, & 1 \leq j \leq 2r-1 \\ [Y_1, Y_1] = \displaystyle\sum_{k=0}^{2r} E_{11}^k X_k & \\ [Y_1, Y_2] = \frac{1}{2} E_{11}^1 X_{2r} & \\ [Y_1, Y_3] = \displaystyle\sum_{k=0}^{2r} E_{13}^k X_k & \\ [Y_2, Y_3] = E_{13}^1 X_{2r} & \\ [Y_3, Y_3] = E_{33}^{2r} X_{2r} & \end{cases}$$

A continuación, se calculan el resto de relaciones.

- De $J_g(X_1, Y_1, Y_1)$ se tiene que

$$\begin{cases} D_{1,1}^3 E_{13}^k = 0, & 0 \leq k \leq 2r-1 \\ E_{11}^0 + 2D_{11}^3 E_{13}^{2r} = 0 & \end{cases}$$

- De $J_g(X_1, Y_1, Y_3)$ se tiene que

$$E_{13}^0 + D_{11}^3 E_{33}^{2r} = 0$$

• De $J_g(X_{2i}, Y_1, Y_1)$, $1 \leq i \leq r-1$, se tiene que

$$\begin{cases} D^3_{2i,1} E^k_{13} = 0, & 0 \leq k \leq 2r-1 \\ E^{2i+1}_{11} - 2D^3_{2i,1} E^{2r}_{13} = 0 & 1 \leq i \leq r-1 \end{cases}$$

• De $J_g(X_{2i}, Y_1, Y_3)$, $1 \leq i \leq r-1$, se tiene que

$$E^{2i+1}_{13} - D^3_{2i,1} E^{2r}_{33} = 0, \quad 1 \leq i \leq r-1$$

• De $J_g(X_{2i+1}, Y_1, Y_1)$, $1 \leq i \leq r-1$, se tiene que

$$\begin{cases} D^3_{2i+1,1} E^k_{13} = 0, & 0 \leq k \leq 2r-1 \\ E^{2i}_{11} + 2D^3_{2i+1,1} E^{2r}_{13} = 0 & 1 \leq i \leq r-1 \end{cases}$$

• De $J_g(X_{2i+1}, Y_1, Y_3)$, $1 \leq i \leq r-1$, se tiene que

$$E^{2i}_{13} + D^3_{2i+1,1} E^{2r}_{33} = 0, \quad 1 \leq i \leq r-1$$

• De $J_g(Y_1, Y_1, Y_1)$ se tiene que

$$\begin{cases} E^0_{11} = 0 \\ \sum_{k=1}^{2r-1} D^3_{k,1} E^k_{11} = 0 \end{cases}$$

• De $J_g(Y_1, Y_1, Y_3)$ se tiene que

$$\begin{cases} E^0_{13} = 0 \\ \sum_{k=1}^{2r-1} D^3_{k,1} E^k_{13} = 0 \end{cases}$$

Del resto de las super-relaciones no se obtiene nada.

Manipulando las restricciones anteriores, la familia queda

$$\begin{cases} [X_{2i}, X_{2i+1}] = X_{2r}, & 0 \leq i \leq r-1 \\ [X_0, Y_1] = Y_2 & \\ [X_j, Y_1] = D^3_{j,1} Y_3, & 1 \leq j \leq 2r \\ [Y_1, Y_1] = \sum\limits_{k=1}^{2r-1} E^k_{11} X_k + E^{2r}_{11} X_{2r} & \\ [Y_1, Y_2] = \frac{1}{2} E^1_{11} X_{2r} & \\ [Y_1, Y_3] = E^1_{13} X_1 + E^{2r}_{13} X_{2r} & \\ [Y_2, Y_3] = E^1_{13} X_{2r} & \\ [Y_3, Y_3] = E^{2r}_{33} X_{2r} & \end{cases}$$

con las restricciones

$$\begin{array}{ll} \sum\limits_{k=1}^{2r-1} E^k_{11} D^3_{k,1} = 0 & \\ E^{2i}_{11} + 2D^3_{2i+1,1} E^{2r}_{13} = 0, & 1 \leq i \leq r-1 \\ E^{2i+1}_{11} - 2D^3_{2i,1} E^{2r}_{13} = 0, & 1 \leq i \leq r-1 \\ D^3_{j,1} E^{2r}_{33} = 0, & 1 \leq j \leq 2r-1 \\ D^3_{j,1} E^k_{13} = 0, & 1 \leq j \leq 2r-1,\ 1 \leq k \leq 2r-1 \\ D^3_{1,1} E^{2r}_{33} = D^3_{1,1} E^{2r}_{13} = 0 & \end{array}$$

Siempre se puede suponer que $D^3_{2i,1} = 0$, $1 \leq i \leq r-1$ y, por tanto, que $E^{2j+1}_{11} = 0$ con $1 \leq j \leq r-1$. En efecto,

- Para cada k, $1 \leq k \leq r-1$ tal que $D^3_{2k+1,1} \neq 0$ se hace el cambio

$$\begin{cases} X'_{2k} = D^3_{2k+1,1} X_{2k} - D^3_{2k,1} X_{2k+1} \\ X'_{2k+1} = \dfrac{1}{D^3_{2k+1,1}} X_{2k+1} \end{cases}$$

- Para cada k, $1 \leq k \leq r-1$ tal que $D^3_{2k+1,1} = 0$ se hace el cambio

$$\begin{cases} X'_{2k} = -X_{2k+1} \\ X'_{2k+1} = X_{2k} \end{cases}$$

La familia de leyes se reduce ahora a

$$\begin{cases} [X_{2i}, X_{2i+1}] = X_{2r}, & 0 \leq i \leq r-1 \\ [X_0, Y_1] = Y_2 & \\ [X_{2j+1}, Y_1] = D^3_{2j+1,1} Y_3, & 0 \leq j \leq r-1 \\ [Y_1, Y_1] = E^1_{11} X_1 - 2E^{2r}_{13} \sum_{k=1}^{r-1} D^3_{2k+1,1} X_{2k} + E^{2r}_{11} X_{2r} & \\ [Y_1, Y_2] = \frac{1}{2} E^1_{11} X_{2r} & \\ [Y_1, Y_3] = E^1_{13} X_1 + E^{2r}_{13} X_{2r} & \\ [Y_2, Y_3] = E^{2r}_{13} X_{2r} & \\ [Y_3, Y_3] = E^{2r}_{33} X_{2r} & \end{cases}$$

con las restricciones

$$\begin{array}{ll} D^3_{11} E^1_{11} = D^3_{11} E^{2r}_{13} = 0 & \\ D^3_{2j+1,1} E^1_{13} = 0, & 0 \leq j \leq r-1 \\ D^3_{2j+1,1} E^{2r}_{33} = 0, & 0 \leq j \leq r-1 \end{array}$$

Caso 1: $E^1_{13} = 0$, resulta la familia de leyes

$$\begin{cases} [X_{2i}, X_{2i+1}] = X_{2r}, & 0 \leq i \leq r-1 \\ [X_0, Y_1] = Y_2 & \\ [X_{2j+1}, Y_1] = D^3_{2j+1,1} Y_3, & 0 \leq j \leq r-1 \\ [Y_1, Y_1] = E^1_{11} X_1 - 2E^{2r}_{13} \sum_{k=1}^{r-1} D^3_{2k+1,1} X_{2k} + E^{2r}_{11} X_{2r} & \\ [Y_1, Y_2] = \frac{1}{2} E^1_{11} X_{2r} & \\ [Y_1, Y_3] = E^{2r}_{13} X_{2r} & \\ [Y_3, Y_3] = E^{2r}_{33} X_{2r} & \end{cases}$$

con las restricciones

$$\begin{array}{ll} D^3_{11} E^{2r}_{13} = D^3_{11} E^1_{11} = 0 & \\ D^3_{2j+1,1} E^{2r}_{33} = 0, & 0 \leq j \leq r-1 \end{array}$$

1.1. $E_{11}^1 = 0$, en tal caso queda

$$\begin{cases} [X_{2i}, X_{2i+1}] = X_{2r}, & 0 \le i \le r-1 \\ [X_0, Y_1] = Y_2 \\ [X_{2j+1}, Y_1] = D_{2j+1,1}^3 Y_3, & 0 \le j \le r-1 \\ [Y_1, Y_1] = -2E_{13}^{2r} \sum_{k=1}^{r-1} D_{2k+1,1}^3 X_{2k} + E_{11}^{2r} X_{2r} \\ [Y_1, Y_3] = E_{13}^{2r} X_{2r} \\ [Y_3, Y_3] = E_{33}^{2r} X_{2r} \end{cases}$$

con las restricciones

$$\begin{array}{l} D_{11}^3 E_{13}^{2r} = 0 \\ D_{2j+1,1}^3 E_{33}^{2r} = 0, \quad 0 \le j \le r-1 \end{array}$$

1.1.1. $E_{33}^{2r} = 0$, queda

$$\begin{cases} [X_{2i}, X_{2i+1}] = X_{2r}, & 0 \le i \le r-1 \\ [X_0, Y_1] = Y_2 \\ [X_{2j+1}, Y_1] = D_{2j+1,1}^3 Y_3, & 0 \le j \le r-1 \\ [Y_1, Y_1] = -2E_{13}^{2r} \sum_{k=1}^{r-1} D_{2k+1,1}^3 X_{2k} + E_{11}^{2r} X_{2r} \\ [Y_1, Y_3] = E_{13}^{2r} X_{2r} \end{cases}$$

con la restricción

$$D_{11}^3 E_{13}^{2r} = 0$$

1.1.1.1. $E_{13}^{2r} = 0$, en tal caso se tiene que

$$\begin{cases} [X_{2i}, X_{2i+1}] = X_{2r}, & 0 \le i \le r-1 \\ [X_0, Y_1] = Y_2 \\ [X_{2j+1}, Y_1] = D_{2j+1,1}^3 Y_3, & 0 \le j \le r-1 \\ [Y_1, Y_1] = E_{11}^{2r} X_{2r}. \end{cases}$$

Se observa que $E_{11}^{2r} \neq 0$, ya que en caso contrario se tendría un álgebra de Lie. Mediante un sencillo cambio de escala se consigue $E_{11}^{2r} = 1$.

• Si $D_{2j+1,1}^3 = 0$, $0 \le j \le r-1$, se obtiene la superálgebra escindida $\mathfrak{g}_2^2 \oplus \mathbb{C}$.

• Si $\exists k \in \{0, \ldots, r-1\}$ / $D_{2k+1,1}^3 \neq 0$, se pueden considerar dos subcasos:

– Si $D^3_{11} = 0$, se puede suponer que $D^3_{3,1} \neq 0$ y el cambio de escala dado por $X'_2 = D^3_{3,1}X_2$, $X'_3 = \frac{1}{D^3_{3,1}}X_3$ permite suponer que $D^3_{3,1} = 1$, mientras que el cambio de base dado por:

$$\begin{cases} X'_2 = X_2 + \sum_{k=2}^{r-1} D^3_{2k+1,1}X_{2k} \\ X'_{2j+1} = X_{2j+1} - D^3_{2j+1,1}X_3 \quad 2 \leq j \leq r-1 \end{cases}$$

permite suponer que $D^3_{2j+1,1} = 0$ para todo j, $2 \leq j \leq r-1$, obteniéndose la superálgebra $\mathfrak{g}^3_{(2,2)}$.

– Si $D^3_{11} \neq 0$ el cambio de escala dado por $Y'_3 = D^3_{11}Y_3$ permite suponer que $D^3_{11} = 1$, obteniéndose la superálgebra $\mathfrak{g}^3_{(2,1)}$ en el caso en que $D^3_{2i+1,1} = 0$ para todo $i \geq 1$; y en el caso que exista $i \geq 1$ tal que $D^3_{2i+1,1} \neq 0$, por simetría se puede suponer $D^3_{3,1} \neq 0$ y haciendo el mismo razonamiento anterior, se obtiene la S.A.L. de ley

$$\begin{cases} [X_{2i}, X_{2i+1}] = X_{2r}, \quad 0 \leq i \leq r-1 \\ [X_0, Y_1] = Y_2 \\ [X_1, Y_1] = Y_3 \\ [X_3, Y_1] = Y_3 \\ [Y_1, Y_1] = X_{2r} \end{cases}$$

si se hace ahora el cambio de base dado por $X'_0 = X_0 + X_2$, $X'_3 = X_3 - X_1$, se obtiene nuevamente la superálgebra $\mathfrak{g}^3_{(2,1)}$.

1.1.1.2. $E^{2r}_{13} \neq 0$, en este caso se tiene que $D^3_{1,1} = 0$. El cambio de base dado por $Y'_1 = Y_1 - \frac{E^{2r}_{11}}{2E^{2r}_{13}}Y_3$ permite suponer que $E^{2r}_{11} = 0$, obteniéndose

$$\begin{cases} [X_{2i}, X_{2i+1}] = X_{2r}, & 0 \leq i \leq r-1 \\ [X_0, Y_1] = Y_2 & \\ [X_{2j+1}, Y_1] = D^3_{2j+1,1}Y_3, & 0 \leq j \leq r-1 \\ [Y_1, Y_1] = -2E^{2r}_{13} \sum_{k=1}^{r-1} D^3_{2k+1,1}X_{2k} & \\ [Y_1, Y_3] = E^{2r}_{13}X_{2r} & \end{cases}$$

• Si $D^3_{2j+1,1} = 0,\ 1 \leq j \leq r-1$, previo cambio de escala se obtiene $\mathfrak{g}^3_{(2,8)}$

• Si $\exists k \in \{1,\ldots,r-1\}\ /\ D^3_{2j+1,1} \neq 0$, por simetría se puede suponer que $D^3_{31} \neq 0$ y, entonces, efectuando el cambio de base dado por

$$\left\{\begin{array}{ll} X'_2 = \sum\limits_{k=1}^{r-1} D^3_{2k+1,1}X_{2k} & \\ X'_3 = \frac{1}{D^3_{3,1}}X_3 & \\ X'_{2i} = \frac{1}{D^3_{3,1}}X_{2i}, & 2 \leq i \leq r-1 \\ X'_{2i+1} = -D^3_{2i+1,1}X_3 + D^3_{3,1}X_{2i+1}, & 2 \leq i \leq r-1 \\ X'_{2r} = E^{2r}_{23}X_{2r} & \end{array}\right.$$

se tiene la superálgebra $\mathfrak{g}^3_{(2,4)}$

1.1.2. $E^{2r}_{33} \neq 0$, en este caso se tiene que $D^3_{2j+1,1} = 0,\ 0 \leq j \leq r-1$, de donde se llega a

$$\left\{\begin{array}{l} [X_{2i}, X_{2i+1}] = X_{2r}, \quad 0 \leq i \leq r-1 \\ [X_0, Y_1] = Y_2 \\ [Y_1, Y_1] = E^{2r}_{11}X_{2r} \\ [Y_1, Y_3] = E^{2r}_{13}X_{2r} \\ [Y_3, Y_3] = E^{2r}_{33}X_{2r} \end{array}\right.$$

Ahora se puede suponer que $E^{2r}_{11} = 0$ y $E^{2r}_{33} = 1$, sin más que efectuar el cambio de base dado por $Y'_1 = Y_1 + aY_3,\ Y'_3 = \frac{1}{E^{2r}_{33}}Y_3$, con a raíz del polinomio $E^{2r}_{33}C^2 + 2E^{2r}_{13}C + E^{2r}_{11} = 0$. Si $E^{2r}_{13} = 0$ se obtiene la superálgebra $\mathfrak{g}^3_{(2,10)}$ y si $E^{2r}_{13} \neq 0$, previo cambio de escala, se obtiene

$$\left\{\begin{array}{l} [X_{2i}, X_{2i+1}] = X_{2r}, \ 0 \leq i \leq r-1 \\ [X_0, Y_1] = Y_2 \\ [Y_1, Y_3] = X_{2r} \\ [Y_3, Y_3] = X_{2r} \end{array}\right.$$

que tras realizar el cambio de base dado por $Y'_1 = Y_1 - Y_3$ se transforma nuevamente en $\mathfrak{g}^3_{(2,10)}$.

1.2. $E_{11}^1 \neq 0$, en este caso se tiene que $D_{1,1}^3 = 0$ y la familia de leyes queda

$$\begin{cases} [X_{2i}, X_{2i+1}] = X_{2r}, & 0 \leq i \leq r-1 \\ [X_0, Y_1] = Y_2 & \\ [X_{2j+1}, Y_1] = D_{2j+1,1}^3 Y_3, & 1 \leq j \leq r-1 \\ [Y_1, Y_1] = E_{11}^1 X_1 - 2E_{13}^{2r} \sum_{k=1}^{r-1} D_{2k+1,1}^3 X_{2k} + E_{11}^{2r} X_{2r} & \\ [Y_1, Y_2] = \frac{1}{2} E_{11}^1 X_{2r} & \\ [Y_1, Y_3] = E_{13}^{2r} X_{2r} & \\ [Y_3, Y_3] = E_{33}^{2r} X_{2r} & \end{cases}$$

con $D_{2j+1,1}^3 E_{33}^{2r} = 0,\ 1 \leq j \leq r-1$.

1.2.1. $D_{2j+1,1}^3 = 0$ para todo j. El cambio de base dado por

$$\begin{cases} X_1' = X_1 + \frac{E_{11}^{2r}}{E_{11}^1} X_{2r} & \\ Y_i' = \frac{1}{\sqrt{E_{11}^1}} Y_i, & 1 \leq i \leq 3 \end{cases}$$

permite suponer que $E_{11}^{2r} = 0$ y $E_{11}^1 = 1$. La familia a clasificar es ahora

$$\begin{cases} [X_{2i}, X_{2i+1}] = X_{2r}, \quad 0 \leq i \leq r-1 \\ [X_0, Y_1] = Y_2 \\ [Y_1, Y_1] = X_1 \\ [Y_1, Y_2] = \frac{1}{2} X_{2r} \\ [Y_1, Y_3] = E_{13}^{2r} X_{2r} \\ [Y_3, Y_3] = E_{33}^{2r} X_{2r} \end{cases}$$

1.2.1.1. $E_{33}^{2r} = 0$, en este caso si $E_{13}^{2r} = 0$, mediante un sencillo cambio de escala, se obtiene la superálgebra escindida $\mathfrak{g}_3^2 \oplus \mathbb{C}$ y si $E_{13}^{2r} \neq 0$, previo cambio de escala, se tiene $\mathfrak{g}_{(2,5)}^3$.

1.2.1.2. $E_{33}^{2r} \neq 0$. Siempre se puede suponer que $E_{13}^{2r} = 0$ y $E_{33}^{2r} = 1$, mediante el cambio de base dado por

$$\begin{cases} X_1' = X_1 - \frac{(E_{13}^{2r})^2}{E_{33}^{2r}} X_{2r} \\ Y_1' = Y_1 - \frac{E_{13}^{2r}}{E_{33}^{2r}} Y_3 \\ Y_3' = \frac{1}{\sqrt{E_{33}^{2r}}} Y_3 \end{cases}$$

obteniéndose $\mathfrak{g}^3_{(2,6)}$.

1.2.2. Existe $D^3_{2j+1,1} \neq 0$ con $1 \leq j \leq r-1$, esto implica que $E^{2r}_{33} = 0$. Por simetría se puede suponer $D^3_{3,1} \neq 0$.

1.2.2.1. $E^{2r}_{13} = 0$, resulta la familia de leyes

$$\begin{cases} [X_{2i}, X_{2i+1}] = X_{2r}, & 0 \leq i \leq r-1 \\ [X_0, Y_1] = Y_2 & \\ [X_3, Y_1] = D^3_{3,1} Y_3 & \\ [X_{2j+1}, Y_1] = D^3_{2j+1,1} Y_3, & 2 \leq j \leq r-1 \\ [Y_1, Y_1] = E^1_{11} X_1 + E^{2r}_{11} X_{2r} & \\ [Y_1, Y_2] = \frac{1}{2} E^1_{11} X_{2r} & \end{cases}$$

Mediante el cambio de base dado por

$$\begin{cases} X'_1 = X_1 + \frac{E^{2r}_{11}}{E^1_{11}} X_{2r} & \\ X'_2 = D^3_{3,1} X_2 + \sum\limits_{k=2}^{r-1} D^3_{2k+1,1} X_{2k} & \\ X'_3 = \frac{1}{D^3_{31}} X_3 & \\ X'_{2j} = \frac{1}{D^3_{31}} X_{2j} & 2 \leq j \leq r-1 \\ X'_{2j+1} = D^3_{31} X_{2j+1} - D^3_{2j+1,1} X_3 & 2 \leq j \leq r-1 \\ Y'_i = \frac{1}{\sqrt{E^1_{11}}} Y_i & 1 \leq i \leq 3 \end{cases}$$

se obtiene la ley

$$\begin{cases} [X_{2i}, X_{2i+1}] = X_{2r}, & 0 \leq i \leq r-1 \\ [X_0, Y_1] = Y_2 & \\ [X_3, Y_1] = Y_3 & \\ [Y_1, Y_1] = X_1 & \\ [Y_1, Y_2] = \frac{1}{2} X_{2r} & \end{cases}$$

que se puede ver que es isomorfa a la ley de la superálgebra $\mathfrak{g}^3_{(2,4)}$ sin más que hacer el cambio de base dado por

$$\begin{cases} X'_0 = X_3 \\ X'_1 = -X_2 \\ X'_2 = -X_1 \\ X'_3 = X_0 \\ Y'_1 = \sqrt{2} Y_1 \end{cases}$$

1.2.2.2. $E_{13}^{2r} \neq 0$, la familia de leyes se reduce a

$$\begin{cases} [X_{2i}, X_{2i+1}] = X_{2r}, & 0 \leq i \leq r-1 \\ [X_0, Y_1] = Y_2 & \\ [X_3, Y_1] = D_{3,1}^3 Y_3 & \\ [X_{2j+1}, Y_1] = D_{2j+1,1}^3 Y_3, & 2 \leq j \leq r-1 \\ [Y_1, Y_1] = E_{11}^1 X_1 - 2E_{13}^{2r} \sum_{k=1}^{r-1} D_{2k+1,1}^3 X_{2k} + E_{11}^{2r} X_{2r} & \\ [Y_1, Y_2] = \frac{1}{2} E_{11}^1 X_{2r} & \\ [Y_1, Y_3] = E_{13}^1 X_{2r} & \end{cases}$$

con $D_{3,1}^3 E_{11}^1 E_{13}^{2r} \neq 0$.

Mediante el cambio de base dado por

$$\begin{cases} X'_2 = \sum_{k=1}^{r-1} D_{2k+1,1}^3 X_{2k} - \frac{E_{11}^{2r}}{2E_{13}^{2r}} X_{2r} & \\ X'_3 = \frac{1}{D_{31}^3} X_3 & \\ X'_{2j} = \frac{1}{D_{31}^3} X_{2j} & 2 \leq j \leq r-1 \\ X'_{2j+1} = D_{31}^3 X_{2j+1} - D_{2j+1,1}^3 X_3 & 2 \leq j \leq r-1 \\ Y'_i = \frac{1}{\sqrt{E_{13}^{2r}}} Y_i & 1 \leq i \leq 3 \end{cases}$$

se llega a la siguiente familia

$$\begin{cases} [X_{2i}, X_{2i+1}] = X_{2r}, & 0 \leq i \leq r-1 \\ [X_0, Y_1] = Y_2 \\ [X_3, Y_1] = Y_3, \\ [Y_1, Y_1] = E_{11}^1 X_1 - 2X_2 \\ [Y_1, Y_2] = \frac{1}{2} E_{11}^1 X_{2r} \\ [Y_1, Y_3] = X_{2r} \end{cases}$$

con $E_{11}^1 \neq 0$.

Un sencillo cambio de escala permite obtener $\mathfrak{g}_{(2,3)}^3$.

Caso 2: $E_{13}^1 \neq 0$, en este caso se tiene que $D_{2j+1,1}^3 = 0$, $0 \leq j \leq r-1$. Efectuando el cambio de base dado por

$$\begin{cases} X_1' = E_{13}^1 X_1 + E_{13}^{2r} X_{2r} \\ X_{2k+1}' = E_{13}^1 X_{2k+1}, & 1 \leq k \leq r-1 \\ X_{2r}' = E_{13}^{2r} X_{2r} \end{cases}$$

se tiene la familia

$$\begin{cases} [X_{2i}, X_{2i+1}] = X_{2r}, & 0 \leq i \leq r-1 \\ [X_0, Y_1] = Y_2 \\ [Y_1, Y_1] = E_{11}^1 X_1 + E_{11}^{2r} X_{2r} \\ [Y_1, Y_2] = \frac{1}{2} E_{11}^1 X_{2r} \\ [Y_1, Y_3] = X_1 \\ [Y_2, Y_3] = X_{2r} \\ [Y_3, Y_3] = E_{33}^{2r} X_{2r} \end{cases}$$

Siempre se puede suponer que $E_{11}^1 = 0$, sin más que efectuar el cambio de base dado por $X_1' = X_1 - \frac{1}{2} E_{11}^1 E_{33}^{2r} X_{2r}$, $Y_1' = Y_1 - \frac{1}{2} E_{11}^1 Y_3$, resultando la familia de leyes

$$\begin{cases} [X_{2i}, X_{2i+1}] = X_{2r}, \quad 0 \leq i \leq r-1 \\ [X_0, Y_1] = Y_2 \\ [Y_1, Y_1] = E_{11}^{2r} X_{2r} \\ [Y_1, Y_3] = X_1 \\ [Y_2, Y_3] = X_{2r} \\ [Y_3, Y_3] = E_{33}^{2r} X_{2r} \end{cases}$$

finalmente, el cambio de base dado por $Y_3' = Y_3 - \frac{1}{2}E_{33}^{2r}Y_2$ permite suponer que $E_{33}^{2r} = 0$, que determina las superálgebras $\mathfrak{g}_{(2,9)}^3$ y $\mathfrak{g}_{(2,7)}^3$ según sea $E_{11}^{2r} = 0$ ó $E_{11}^{2r} \neq 0$.

Con esto se concluye la demostración del teorema. □

Lema 5.5.3 *Si $\mathfrak{g}$ es una S.A.H. no degenerada, con dimensión de la parte par arbitraria $2r+1$, dimensión de la parte impar tres, de invariante de Goze $(2,1,\ldots,1|2,1)$ y tal que admite una base adaptada $\{X_0, X_1, \ldots, X_{2r}, Y_1, Y_2, Y_3\}$ con $[X_0, Y_1] = Y_3$ y $[X_0, Y_2] = Y_3$, entonces pertenece a la familia siguiente de superálgebras dada por*

$$\begin{cases} [X_{2i}, X_{2i+1}] = X_{2r}, & 0 \leq i \leq r-1 \\ [X_0, Y_1] = Y_3 & \\ [X_0, Y_2] = Y_3 & \\ [X_1, Y_2] = D_{12}^3 Y_3 & \\ [X_2, Y_2] = \varepsilon Y_3, & \varepsilon \in \{0,1\} \\ [Y_1, Y_1] = E_{11}^1 X_1 + E_{11}^{2r} X_{2r} & \\ [Y_1, Y_2] = -\dfrac{1}{2} D_{12}^3 E_{11}^1 X_0 + E_{12}^1 X_1 + \dfrac{\varepsilon}{2} E_{11}^1 X_3 + E_{12}^{2r} X_{2r} & \\ [Y_1, Y_3] = \dfrac{1}{2} E_{11}^1 X_{2r} & \\ [Y_2, Y_2] = D_{12}^3 (E_{11}^1 - 2E_{12}^1) X_0 + (-E_{11}^1 + 2E_{12}^1) X_1 + 2\varepsilon(-\dfrac{1}{2} E_{11}^1 + E_{12}^1) X_3 + E_{22}^{2r} X_{2r} & \\ [Y_2, Y_3] = (-\dfrac{1}{2} E_{11}^1 + E_{12}^1) X_{2r} & \end{cases}$$

Demostración: En este caso ya se ha visto que se tiene la siguiente familia de leyes de superálgebras

$$\begin{cases} [X_{2i}, X_{2i+1}] = X_{2r}, & 0 \leq i \leq r-1 \\ [X_0, Y_1] = Y_3 & \\ [X_0, Y_2] = Y_3 & \\ [X_j, Y_1] = D_{j,1}^3 Y_3, & 1 \leq j \leq 2r \\ [X_j, Y_2] = D_{j,2}^3 Y_3, & 1 \leq j \leq 2r-1 \\ [Y_i, Y_j] = \sum_{k=0}^{2r} E_{ij}^k X_k, & 1 \leq i,j \leq 3, (i,j) \neq (3,3) \\ [Y_3, Y_3] = E_{33}^{2r} X_{2r} & \end{cases}$$

con ciertas restricciones. Siguiendo un razonamiento análogo al caso anterior se obtiene la familia genérica de superálgebras del enunciado donde ya han sido sustituidas las restricciones que se obtienen de las super-relaciones de Jacobi. $\square$

Lema 5.5.4 *Si $\mathfrak{g}$ pertenece a la familia genérica de S.A.H. del lema anterior y tiene nilíndice 2, entonces es isomorfa a una de las siguientes superálgebras, o pertenece a alguna de las familias paramétricas de superálgebras siguientes*

$\overline{\mathfrak{g}}_{(2,11)}^{3,\alpha,\beta}$:

$$\begin{cases} [X_{2i}, X_{2i+1}] = X_{2r} & 0 \leq i \leq r-1 \\ [X_0, Y_1] = Y_3 & \\ [X_0, Y_2] = Y_3 & \\ [X_1, Y_2] = Y_3 & \\ [Y_1, Y_1] = X_{2r} & \\ [Y_1, Y_2] = \alpha X_{2r}, & \alpha \in \mathbb{C} \\ [Y_2, Y_2] = \beta X_{2r}, & \beta \in \mathbb{C} \end{cases}$$

$\overline{\mathfrak{g}}_{(2,12)}^{3,\alpha}$:

$$\begin{cases} [X_{2i}, X_{2i+1}] = X_{2r} & 0 \leq i \leq r-1 \\ [X_0, Y_1] = Y_3 & \\ [X_0, Y_2] = Y_3 & \\ [X_1, Y_2] = Y_3 & \\ [Y_1, Y_2] = X_{2r} & \\ [Y_2, Y_2] = \alpha X_{2r}, & \alpha \in \mathbb{C} \end{cases}$$

$\overline{\mathfrak{g}}^{3}_{(2,13)}$:

$$\begin{cases} [X_{2i}, X_{2i+1}] = X_{2r} & 0 \leq i \leq r-1 \\ [X_0, Y_1] = Y_3 & \\ [X_0, Y_2] = Y_3 & \\ [X_1, Y_2] = Y_3 & \\ [Y_2, Y_2] = X_{2r} & \end{cases}$$

$\overline{\mathfrak{g}}^{3,\alpha,\beta}_{(2,14)}$:

$$\begin{cases} [X_{2i}, X_{2i+1}] = X_{2r} & 0 \leq i \leq r-1 \\ [X_0, Y_1] = Y_3 & \\ [X_0, Y_2] = Y_3 & \\ [X_2, Y_2] = Y_3 & \\ [Y_1, Y_1] = X_{2r} & \\ [Y_1, Y_2] = \alpha X_{2r}, & \alpha \in \mathbb{C} \\ [Y_2, Y_2] = \beta X_{2r}, & \beta \in \mathbb{C} \end{cases}$$

$\overline{\mathfrak{g}}^{3,\alpha}_{(2,15)}$:

$$\begin{cases} [X_{2i}, X_{2i+1}] = X_{2r} & 0 \leq i \leq r-1 \\ [X_0, Y_1] = Y_3 & \\ [X_0, Y_2] = Y_3 & \\ [X_2, Y_2] = Y_3 & \\ [Y_1, Y_2] = X_{2r} & \\ [Y_2, Y_2] = \alpha X_{2r}, & \alpha \in \mathbb{C} \end{cases}$$

$\overline{\mathfrak{g}}^{3}_{(2,16)}$:

$$\begin{cases} [X_{2i}, X_{2i+1}] = X_{2r} & 0 \leq i \leq r-1 \\ [X_0, Y_1] = Y_3 & \\ [X_0, Y_2] = Y_3 & \\ [X_2, Y_2] = Y_3 & \\ [Y_2, Y_2] = X_{2r} & \end{cases}$$

Demostración: Se distinguen cuatro casos en la familia genérica del lema anterior

$$\begin{cases} D^3_{12} = 0 \begin{cases} \varepsilon = 0 & \text{(Caso 1)} \\ \varepsilon = 1 & \text{(Caso 2)} \end{cases} \\ D^3_{12} \neq 0 \begin{cases} \varepsilon = 0 & \text{(Caso 3)} \\ \varepsilon = 1 & \text{(Caso 4)} \end{cases} \end{cases}$$

En el caso 1, sin más que hacer el cambio de base dado por $Y_1' = Y_1 - Y_2$ y renombrando adecuadamente los vectores Y_i

$$\begin{cases} Y_1' = Y_2 \\ Y_2' = Y_3 \\ Y_3' = Y_1 \end{cases}$$

se obtiene una familia de superálgebras comprendida en las de base adaptada $[X_0, Y_1] = Y_2$ y $[X_0, Y_2] = 0$, que ya han sido clasificadas en el teorema anterior.

El caso 4 se reduce al caso 3 sin más que considerar el cambio de base dado por

$$\begin{cases} X_0' = D_{12}^3 X_0 - X_3 \\ X_2' = D_{12}^3 X_2 - X_1 \\ X_{2i}' = D_{12}^3 X_{2i}, & 2 \le i \le r \\ Y_3' = D_{12}^3 Y_3 \end{cases}$$

Luego restan estudiar los casos 2 y 3.

Caso 2. $D_{12}^3 = 0$, $\varepsilon = 1$.

Si se distinguen las siguientes posibilidades para las constantes de estructura E_{11}^1, E_{12}^1, E_{11}^{2r}, E_{12}^{2r}, y mediante sencillos cambios de base se obtienen las familias de S.A.L. $\overline{\mathfrak{g}}_{(2,14)}^{3,\alpha,\beta}$ y $\overline{\mathfrak{g}}_{(2,15)}^{3,\alpha}$, y la S.A.L. $\overline{\mathfrak{g}}_{(2,16)}^{3}$.

$$E_{11}^1 = E_{12}^1 = 0 \begin{cases} E_{11}^{2r} = 0 \begin{cases} E_{12}^{2r} = 0 \Longrightarrow E_{22}^{2r} \neq 0 & \overline{\mathfrak{g}}_{(2,16)}^{3} \\ E_{12}^{2r} \neq 0 \Longrightarrow \overline{\mathfrak{g}}_{(2,15)}^{3,\alpha} \end{cases} \\ E_{11}^{2r} \neq 0 \Longrightarrow \overline{\mathfrak{g}}_{(2,14)}^{3,\alpha,\beta} \end{cases}$$

Es una simple comprobación el hecho de que las superálgebras anteriores tengan nilíndice 2 y que cualquier otra posibilidad para las constantes de estructura dan siempre superálgebras de nilíndice 3.

Caso 3. $D_{12}^3 \neq 0$, $\varepsilon = 0$.

Si se distinguen las siguientes posibilidades para las constantes de estructura E_{11}^1, E_{12}^1, E_{11}^{2r}, E_{12}^{2r}, y mediante sencillos cambios de base se obtienen las familias de S.A.L. $\overline{\mathfrak{g}}_{(2,11)}^{3,\alpha,\beta}$ y $\overline{\mathfrak{g}}_{(2,12)}^{3,\alpha}$, y la S.A.L. $\overline{\mathfrak{g}}_{(2,13)}^{3}$.

$$E_{11}^1 = E_{12}^1 = 0 \begin{cases} E_{11}^{2r} = 0 \begin{cases} E_{12}^{2r} = 0 \Longrightarrow E_{22}^{2r} \neq 0 & \overline{\mathfrak{g}}^3_{(2,13)} \\ E_{12}^{2r} \neq 0 \Longrightarrow \overline{\mathfrak{g}}^{3,\alpha}_{(2,12)} \end{cases} \\ E_{11}^{2r} \neq 0 \Longrightarrow \overline{\mathfrak{g}}^{3,\alpha,\beta}_{(2,11)} \end{cases}$$

Es una simple comprobación el hecho de que las superálgebras anteriores tengan nilíndice 2 y que cualquier otra posibilidad para las constantes de estructura dan siempre superálgebras de nilíndice 4. □

5.5.3 Invariante de Goze maximal $(2, 1, \ldots, 1|\ 3)$

Teorema 5.5.5 *Si $\mathfrak{g}$ es una S.A.H. no degenerada, con dimensión de la parte par arbitraria $2r+1$, dimensión de la parte impar tres y de invariante de Goze $(2, 1, \ldots, 1|\ 3)$, entonces es isomorfa a una de las siguientes superálgebras, dos a dos no isomorfas, cuyas leyes pueden ser expresadas mediante*

$\mathfrak{g}^3_{(3,1)}$:

$$\begin{cases} [X_{2i}, X_{2i+1}] = X_{2r}, & 0 \le i \le r-1 \\ [X_0, Y_1] = Y_2 \\ [X_0, Y_2] = Y_3 \\ [X_1, Y_1] = Y_3 \\ [Y_1, Y_1] = X_{2r} \end{cases}$$

$\mathfrak{g}^3_{(3,2)}$:

$$\begin{cases} [X_{2i}, X_{2i+1}] = X_{2r}, & 0 \le i \le r-1 \\ [X_0, Y_1] = Y_2 \\ [X_0, Y_2] = Y_3 \\ [X_1, Y_1] = Y_3 \\ [Y_1, Y_1] = X_1 \\ [Y_1, Y_2] = \frac{1}{2}X_{2r} \end{cases}$$

$\mathfrak{g}^3_{(3,3)}$:

$$\begin{cases} [X_{2i}, X_{2i+1}] = X_{2r}, & 0 \le i \le r-1 \\ [X_0, Y_1] = Y_2 \\ [X_0, Y_2] = Y_3 \\ [X_3, Y_1] = Y_3 \\ [Y_1, Y_1] = X_{2r} \end{cases}$$

$\mathfrak{g}^3_{(3,4)}$:

$$\begin{cases} [X_{2i}, X_{2i+1}] = X_{2r}, & 0 \le i \le r-1 \\ [X_0, Y_1] = Y_2 \\ [X_0, Y_2] = Y_3 \\ [X_3, Y_1] = Y_3 \\ [Y_1, Y_1] = X_1 \\ [Y_1, Y_2] = \frac{1}{2}X_{2r} \end{cases}$$

$\mathfrak{g}^3_{(3,5)}$:

$$\begin{cases} [X_{2i}, X_{2i+1}] = X_{2r}, & 0 \leq i \leq r-1 \\ [X_0, Y_1] = Y_2 \\ [X_0, Y_2] = Y_3 \\ [X_3, Y_1] = -\frac{1}{2}Y_3 \\ [Y_1, Y_1] = X_2 \\ [Y_1, Y_3] = X_{2r} \\ [Y_2, Y_2] = -X_{2r} \end{cases}$$

$\mathfrak{g}^3_{(3,6)}$:

$$\begin{cases} [X_{2i}, X_{2i+1}] = X_{2r}, & 0 \leq i \leq r-1 \\ [X_0, Y_1] = Y_2 \\ [X_0, Y_2] = Y_3 \\ [Y_1, Y_1] = X_{2r} \end{cases}$$

$\mathfrak{g}^3_{(3,7)}$:

$$\begin{cases} [X_{2i}, X_{2i+1}] = X_{2r}, & 0 \leq i \leq r-1 \\ [X_0, Y_1] = Y_2 \\ [X_0, Y_2] = Y_3 \\ [Y_1, Y_1] = X_1 \\ [Y_1, Y_2] = \frac{1}{2}X_{2r} \end{cases}$$

$\mathfrak{g}^3_{(3,8)}$:

$$\begin{cases} [X_{2i}, X_{2i+1}] = X_{2r}, & 0 \leq i \leq r-1 \\ [X_0, Y_1] = Y_2 \\ [X_0, Y_2] = Y_3 \\ [Y_1, Y_1] = X_1 \\ [Y_1, Y_2] = \frac{1}{2}X_{2r} \\ [Y_1, Y_3] = X_{2r} \\ [Y_2, Y_2] = -X_{2r} \end{cases}$$

$\mathfrak{g}^3_{(3,9)}$:

$$\begin{cases} [X_{2i}, X_{2i+1}] = X_{2r}, & 0 \leq i \leq r-1 \\ [X_0, Y_1] = Y_2 \\ [X_0, Y_2] = Y_3 \\ [Y_1, Y_3] = X_{2r} \\ [Y_2, Y_2] = -X_{2r} \end{cases}$$

Demostración: Es claro que las S.A.L. anteriores son, efectivamente, S.A.H. no degeneradas, con dimensión de la parte par arbitraria $2r+1$, dimensión de la parte impar tres y de invariante de Goze $(2, 1, \ldots, 1|\ 3)$. Además, son, dos a dos, no isomorfas entre sí, para ello basta observar la tabla siguiente

	$dim(\mathcal{Z}(\mathfrak{g}))$	$dim(\mathcal{C}^1(\mathfrak{g}))$	$dim(\mathcal{C}_\mathfrak{g}(\mathfrak{g}_1))$	$dim[\mathcal{C}_{\mathfrak{g}_0}(\mathcal{C}_{\mathfrak{g}_0}(\mathfrak{g}_1)), \mathcal{C}_{\mathfrak{g}_0}(\mathcal{C}_{\mathfrak{g}_0}(\mathfrak{g}_1))]$
$\mathfrak{g}^3_{(3,1)}$	2	3	2r+1	1
$\mathfrak{g}^3_{(3,2)}$	2	4	2r	1
$\mathfrak{g}^3_{(3,3)}$	2	3	2r+1	0
$\mathfrak{g}^3_{(3,4)}$	2	4	2r	0
$\mathfrak{g}^3_{(3,5)}$	1	3	2r-1	-
$\mathfrak{g}^3_{(3,6)}$	2	3	2r+2	-
$\mathfrak{g}^3_{(3,7)}$	2	4	2r+1	-
$\mathfrak{g}^3_{(3,8)}$	1	4	2r	-
$\mathfrak{g}^3_{(3,9)}$	1	3	2r	-

Resta ver, entonces, que las superálgebras $\mathfrak{g}^3_{(3,i)}$ para $1 \le i \le 9$ son todas las que se obtienen verificando las hipótesis del teorema.

Como ya se ha visto, en este caso se tiene la siguiente familia de S.A.L.

$$
\left\{
\begin{array}{ll}
[X_{2i}, X_{2i+1}] = X_{2r}, & 0 \le i \le r-1 \\
[X_0, Y_1] = Y_2 & \\
[X_0, Y_2] = Y_3 & \\
[X_j, Y_1] = D^2_{j,1}Y_2 + D^3_{j,1}Y_3, & 1 \le j \le 2r-1 \\
[X_{2r}, Y_1] = D^3_{2r,1}Y_3 & \\
[X_j, Y_2] = D^3_{j,2}Y_3, & 1 \le j \le 2r-1 \\
[Y_i, Y_j] = \sum\limits_{k=0}^{2r} E^k_{ij}X_k, & 1 \le i,j \le 3, (i,j) \ne (3,3) \\
[Y_3, Y_3] = E^{2r}_{33}X_{2r} &
\end{array}
\right.
$$

Siempre se puede suponer que $D_{j,2}^3 = 0,\ 1 \leq j \leq 2r-1$, sin más que efectuar el cambio de base dado por

$$\begin{cases} X_1' = -D_{12}^3 X_0 + X_1 - \sum\limits_{k=1}^{r-1} D_{2k+1,2}^3 X_{2k} + \sum\limits_{k=1}^{r-1} D_{2k,2}^3 X_{2k+1} & \\ X_j' = -D_{j,2}^3 X_0 + X_j & 2 \leq j \leq 2r-1 \end{cases}$$

Además, se debe verificar que

- De $J_g(X_0, X_1, Y_1)$ se tiene que

$$D_{11}^2 = D_{2r,1}^3$$

- De $J_g(X_0, X_j, Y_1)$, $2 \leq j \leq 2r-1$, se tiene que

$$D_{j,1}^2 = 0, \quad 2 \leq j \leq 2r-1$$

Por tanto, se tiene la familia de leyes

$$\begin{cases} [X_{2i}, X_{2i+1}] = X_{2r}, & 0 \leq i \leq r-1 \\ [X_0, Y_1] = Y_2 & \\ [X_0, Y_2] = Y_3 & \\ [X_1, Y_1] = D_{1,1}^2 Y_2 + D_{11}^3 Y_3 & \\ [X_j, Y_1] = D_{j,1}^3 Y_3, & 1 \leq j \leq 2r-1 \\ [X_{2r}, Y_1] = D_{11}^2 Y_3 & \\ [Y_i, Y_j] = \sum\limits_{k=0}^{2r} E_{ij}^k X_k, & 1 \leq i,j \leq 3, (i,j) \neq (3,3) \\ [Y_3, Y_3] = E_{33}^{2r} X_{2r} & \end{cases}$$

Por otro lado y usando las super-relaciones de Jacobi, se tiene que

- De $J_g(X_0, Y_1, Y_1)$ se tiene que

$$[Y_1, Y_2] = \frac{1}{2} E_{11}^1 X_{2r}$$

- De $J_g(X_0, Y_2, Y_2)$ se tiene que

$$[Y_2, Y_3] = \frac{1}{2} E_{22}^1 X_{2r}$$

- De $J_g(X_0, Y_2, Y_3)$ se tiene que

$$[Y_3, Y_3] = 0$$

- De $J_g(X_0, Y_1, Y_2)$ se tiene que

$$[Y_2, Y_2] = -[Y_1, Y_3]$$

- De $J_g(X_0, Y_1, Y_3)$ se tiene que

$$[X_0, [Y_1, Y_3]] = \frac{1}{2} E_{22}^1 X_{2r}$$

Usando adecuadamente esas relaciones, se obtiene que $E_{22}^1 = 0$ y, puesto que $[Y_2, Y_2] = -[Y_1, Y_3]$, también se tiene que $E_{13}^1 = 0$. La familia, por tanto, queda reducida a

$$\begin{cases}
[X_{2i}, X_{2i+1}] = X_{2r}, & 0 \leq i \leq r-1 \\
[X_0, Y_1] = Y_2 & \\
[X_0, Y_2] = Y_3 & \\
[X_1, Y_1] = D_{11}^2 Y_2 + D_{11}^3 Y_3 & \\
[X_j, Y_1] = D_{j,1}^3 Y_3, & 1 \leq j \leq 2r-1 \\
[X_{2r}, Y_1] = D_{11}^2 Y_3 & \\
[Y_1, Y_1] = \displaystyle\sum_{k=0}^{2r} E_{11}^k X_k & \\
[Y_1, Y_2] = \frac{1}{2} E_{11}^1 X_{2r} & \\
[Y_1, Y_3] = E_{13}^0 X_0 + \displaystyle\sum_{k=2}^{2r} E_{13}^k X_k & \\
[Y_2, Y_2] = -E_{13}^0 X_0 - \displaystyle\sum_{k=2}^{2r} E_{13}^k X_k &
\end{cases}$$

A continuación, aplicamos las super-relaciones de Jacobi

- De $J_g(X_1, Y_1, Y_1)$ se tiene que

$$\begin{cases} D^3_{11}E^k_{13} = 0, & 0 \leq k \leq 2r-1 \\ E^0_{11} + D^2_{11}E^1_{11} + 2D^3_{11}E^{2r}_{13} = 0 & \end{cases}$$

- De $J_g(X_1, Y_1, Y_2)$ se tiene que

$$D^2_{11}E^k_{13} = 0, \quad k \in \{0, 2, 3, \ldots, 2r\}$$

- De $J_g(X_1, Y_1, Y_3)$ se tiene que

$$E^0_{13} = 0$$

- De $J_g(X_j, Y_1, Y_1)$, $2 \leq j \leq 2r-1$, se tiene que

$$\begin{cases} D^3_{j,1}E^k_{13} = 0, & 2 \leq k \leq 2r-1 \\ E^{2i+1}_{11} - 2D^3_{2i,1}E^{2r}_{13} = 0 & j = 2i \\ E^{2i}_{11} + 2D^3_{2i+1,1}E^{2r}_{13} = 0 & j = 2i+1 \end{cases}$$

- De $J_g(X_j, Y_1, Y_3)$, $2 \leq j \leq 2r-1$, se tiene que

$$E^k_{13} = 0, \quad 2 \leq k \leq 2r-1$$

- De $J_g(X_{2i}, X_{2i+1}, Y_1)$, $1 \leq i \leq r-1$, se tiene que

$$D^2_{11} = 0$$

- De $J_g(Y_1, Y_1, Y_1)$ se tiene que

$$\begin{cases} E^0_{11} = 0 \\ \displaystyle\sum_{k=1}^{2r-1} D^3_{k,1}E^k_{11} = 0 \end{cases}$$

Del resto de las super-relaciones no se obtiene nada.

Ha resultado la familia de leyes

$$\left\{\begin{array}{ll} [X_{2i}, X_{2i+1}] = X_{2r}, & 0 \leq i \leq r-1 \\ [X_0, Y_1] = Y_2 & \\ [X_0, Y_2] = Y_3 & \\ [X_j, Y_1] = D^3_{j,1} Y_3, & 1 \leq j \leq 2r-1 \\ [Y_1, Y_1] = \sum_{k=1}^{2r} E^k_{11} X_k & \\ [Y_1, Y_2] = \frac{1}{2} E^1_{11} X_{2r} & \\ [Y_1, Y_3] = E^{2r}_{13} X_{2r} & \\ [Y_2, Y_2] = -E^{2r}_{13} X_{2r} & \end{array}\right.$$

sujeta a las siguientes restricciones

$$\left\{\begin{array}{ll} D^3_{11} E^{2r}_{13} = 0 & \\ E^{2i+1}_{11} - 2D^3_{2i,1} E^{2r}_{13} = 0, & 1 \leq i \leq r-1 \\ E^{2i}_{11} + 2D^3_{2i+1,1} E^{2r}_{13} = 0, & 1 \leq i \leq r-1 \\ \sum_{k=1}^{2r-1} D^3_{k,1} E^k_{11} = 0 & \end{array}\right.$$

$\boxed{\textbf{Caso } D^3_{11} = 0}$

En este caso se puede suponer que $D^3_{2i,1} = 0$, $1 \leq i \leq r-1$ y, como consecuencia, que $E^{2i+1}_{11} = 0$. En efecto,

- Para cada k, tal que $D^3_{2k+1,1} \neq 0$, se hace el cambio de base dado por

$$\left\{\begin{array}{l} X'_{2k} = D^3_{2k+1,1} X_{2k} - D^3_{2k,1} X_{2k+1} \\ X'_{2k+1} = \dfrac{1}{D^3_{2k+1,1}} X_{2k+1} \end{array}\right.$$

- Para cada k, tal que $D^3_{2k+1,1} = 0$, se hace el cambio de base dado por

$$\left\{\begin{array}{l} X'_{2k} = -X_{2k+1} \\ X'_{2k+1} = X_{2k} \end{array}\right.$$

Con esto, la familia anterior queda reducida a

$$\begin{cases} [X_{2i}, X_{2i+1}] = X_{2r}, & 0 \leq i \leq r-1 \\ [X_0, Y_1] = Y_2 & \\ [X_0, Y_2] = Y_3 & \\ [X_{2i+1}, Y_1] = D^3_{2i+1,1} Y_3, & 1 \leq i \leq r-1 \\ [Y_1, Y_1] = E^1_{11} X_1 + E^2_{11} X_2 + E^4_{11} X_4 + \ldots + E^{2r}_{11} X_{2r} & \\ [Y_1, Y_2] = \frac{1}{2} E^1_{11} X_{2r} & \\ [Y_1, Y_3] = E^{2r}_{13} X_{2r} & \\ [Y_2, Y_2] = -E^{2r}_{13} X_{2r} & \end{cases}$$

sujeta a la restricción $E^{2i}_{11} + 2D^3_{2i+1,1} E^{2r}_{13} = 0$, $1 \leq i \leq r-1$.

Caso 1: $E^{2r}_{13} = 0$. En este caso se tiene que $E^{2i}_{11} = 0$, $1 \leq i \leq r-1$.

Queda la familia

$$\begin{cases} [X_{2i}, X_{2i+1}] = X_{2r}, & 0 \leq i \leq r-1 \\ [X_0, Y_1] = Y_2 & \\ [X_0, Y_2] = Y_3 & \\ [X_{2j+1}, Y_1] = D^3_{2j+1,1} Y_3, & 1 \leq j \leq r-1 \\ [Y_1, Y_1] = E^1_{11} X_1 + E^{2r}_{11} X_{2r} & \\ [Y_1, Y_2] = \frac{1}{2} E^1_{11} X_{2r} & \end{cases}$$

1.1. $D^3_{2i+1,1} = 0$, $1 \leq i \leq r-1$, la familia se reduce a

$$\begin{cases} [X_{2i}, X_{2i+1}] = X_{2r}, & 0 \leq i \leq r-1 \\ [X_0, Y_1] = Y_2 & \\ [X_0, Y_2] = Y_3 & \\ [Y_1, Y_1] = E^1_{11} X_1 + E^{2r}_{11} X_{2r} & \\ [Y_1, Y_2] = \frac{1}{2} E^1_{11} X_{2r} & \end{cases}$$

1.1.1. $E^1_{11} = 0$. En este caso siempre se tiene que $E^{2r}_{11} \neq 0$ (ya que en caso contrario se tendría un caso degenerado, un álgebra de Lie) obteniéndose, previo cambio de escala, la S.A.L. $\mathfrak{g}^3_{(3,6)}$.

1.1.2. $E^1_{11} \neq 0$. En este caso, haciendo el cambio de base dado por

$$\begin{cases} X'_1 = E^1_{11} X_1 + E^{2r}_{11} X_{2r} & \\ X'_{2k+1} = E^1_{11} X_{2k+1}, & 1 \leq k \leq r-1 \\ X'_{2r} = E^1_{11} X_{2r} & \end{cases}$$

se puede suponer que $E_{11}^{2r} = 0$ y se obtiene $\mathfrak{g}^3_{(3,7)}$.

1.2. Existe i, $1 \leq i \leq r-1$ tal que $D^3_{2i+1,1} \neq 0$. En este caso, siempre se puede suponer que $D^3_{3,1} \neq 0$ (en caso contrario se haría un intercambio de vectores). El cambio de base dado por

$$\begin{cases} X_2' = D^3_{31} X_2 \\ X_3' = \frac{1}{D^3_{31}} X_3 \end{cases}$$

permite suponer que $D^3_{31} = 1$, mientras que los cambios de bases dados por

$$\begin{cases} X_2' = X_2 + \sum\limits_{k=2}^{r-1} D^3_{2k+1,1} X_{2k} \\ X_{2j+1}' = X_{2j+1} - D^3_{2j+1,1} X_3 \end{cases}$$

con $2 \leq j \leq r-1$ y tal que $D^3_{2j+1,1} \neq 0$, permiten suponer que $D^3_{2j+1,1} =$ $= 0$ para todo $2 \leq j \leq r-1$. Por tanto, la familia se reduce a

$$\begin{cases} [X_{2i}, X_{2i+1}] = X_{2r}, & 0 \leq i \leq r-1 \\ [X_0, Y_1] = Y_2 \\ [X_0, Y_2] = Y_3 \\ [X_3, Y_1] = Y_3 \\ [Y_1, Y_1] = E^1_{11} X_1 + E^{2r}_{11} X_{2r} \\ [Y_1, Y_2] = \frac{1}{2} E^1_{11} X_{2r} \end{cases}$$

1.2.1. $E^1_{11} = 0$. En este caso siempre se tiene que $E^{2r}_{11} \neq 0$ (ya que en caso contrario se tendría un caso degenerado, un álgebra de Lie) obteniéndose, previo cambio de escala, la S.A.L. $\mathfrak{g}^3_{(3,3)}$.

1.2.2. $E^1_{11} \neq 0$, en este caso el cambio de base dado por

$$\begin{cases} X_1' = E^1_{11} X_1 + E^{2r}_{11} X_{2r}, \\ X_{2k+1}' = E^1_{11} X_{2k+1}, & 1 \leq k \leq r-1 \\ X_{2r}' = E^1_{11} X_{2r} \end{cases}$$

permite suponer que $E^{2r}_{11} = 0$ y se obtiene $\mathfrak{g}^3_{(3,4)}$.

Caso 2: $E_{13}^{2r} \neq 0$. La familia que resulta ahora es

$$\begin{cases} [X_{2i}, X_{2i+1}] = X_{2r}, & 0 \leq i \leq r-1 \\ [X_0, Y_1] = Y_2 & \\ [X_0, Y_2] = Y_3 & \\ [X_{2i+1}, Y_1] = -\frac{E_{11}^{2i}}{2E_{13}^{2r}} Y_3, & 1 \leq i \leq r-1 \\ [Y_1, Y_1] = E_{11}^1 X_1 + E_{11}^2 X_2 + E_{11}^4 X_4 + \ldots + E_{11}^{2r} X_{2r} & \\ [Y_1, Y_2] = \frac{1}{2} E_{11}^1 X_{2r} & \\ [Y_1, Y_3] = E_{13}^{2r} X_{2r} & \\ [Y_2, Y_2] = -E_{13}^{2r} X_{2r} & \end{cases}$$

2.1. $E_{11}^1 = 0$.

2.1.1. $E_{11}^{2i} = 0$ para todo i, $1 \leq i \leq r-1$. Resulta la familia

$$\begin{cases} [X_{2i}, X_{2i+1}] = X_{2r}, & 0 \leq i \leq r-1 \\ [X_0, Y_1] = Y_2 & \\ [X_0, Y_2] = Y_3 & \\ [Y_1, Y_1] = E_{11}^{2r} X_{2r} & \\ [Y_1, Y_3] = E_{13}^{2r} X_{2r} & \\ [Y_2, Y_2] = -E_{13}^{2r} X_{2r} & \end{cases}$$

Se puede suponer que $E_{11}^{2r} = 0$ pues, caso contrario, se haría el cambio de base dado por $Y_1' = Y_1 - \frac{E_{11}^{2r}}{2E_{13}^{2r}} Y_3$.

Se obtiene, previo cambio de escala, la superálgebra $\mathfrak{g}_{(3,9)}^3$.

2.1.2. Existe i, con $1 \leq i \leq r-1$ tal que $E_{11}^{2i} \neq 0$, se puede suponer que E_{11}^2 es distinto de cero. En este caso, el cambio de base dado por

$$\begin{cases} X_0' = \frac{1}{\sqrt{E_{13}^{2r}}} X_0 & \\ X_1' = \sqrt{E_{13}^{2r}} X_1 & \\ X_2' = E_{11}^2 X_2 + E_{11}^4 X_4 + \ldots + E_{11}^{2r} X_{2r} & \\ X_3' = \frac{1}{E_{11}^2} X_3 & \\ X_{2i}' = \frac{1}{E_{11}^2} X_{2i} & 2 \leq i \leq r-1 \\ X_{2i+1}' = -E_{11}^{2i} X_3 + E_{11}^2 X_{2i+1} & 2 \leq i \leq r-1 \end{cases}$$

permite obtener la superálgebra $\mathfrak{g}^3_{(3,5)}$.

2.2. $E^1_{11} \neq 0$.

2.2.1. $E^{2i}_{11} = 0$ para todo i, $1 \leq i \leq r-1$. Resulta la familia de leyes

$$\begin{cases} [X_{2i}, X_{2i+1}] = X_{2r}, & 0 \leq i \leq r-1 \\ [X_0, Y_1] = Y_2 \\ [X_0, Y_2] = Y_3 \\ [Y_1, Y_1] = E^1_{11} X_1 \\ [Y_1, Y_2] = \frac{1}{2} E^1_{11} X_{2r} \\ [Y_1, Y_3] = E^{2r}_{13} X_{2r} \\ [Y_2, Y_2] = -E^{2r}_{13} X_{2r} \end{cases}$$

con $E^1_{11} E^{2r}_{13} \neq 0$. El cambio de escala dado por

$$\begin{cases} X'_0 = \frac{E^1_{11}}{E^{2r}_{13}} X_0 \\ X'_1 = \frac{E^{2r}_{13}}{E^1_{11}} X_1 \\ Y'_1 = \frac{\sqrt{E^{2r}_{13}}}{E^1_{11}} Y_1 \end{cases}$$

permite obtener $\mathfrak{g}^3_{(3,8)}$.

2.2.2. Existe i, con $1 \leq i \leq r-1$ tal que $E^{2i}_{11} \neq 0$, se puede suponer que E^2_{11} es distinto de cero. En este caso, el cambio de base dado por

$$\begin{cases} X'_0 = \frac{E^1_{11}}{E^{2r}_{13}} X_0 \\ X'_1 = \frac{E^{2r}_{13}}{E^1_{11}} X_1 \\ X'_2 = \frac{E^{2r}_{13}}{(E^1_{11})^2} (E^2_{11} X_2 + E^4_{11} X_4 + \ldots + E^{2r}_{11} X_{2r}) \\ X'_3 = \frac{(E^1_{11})^2}{E^2_{11} E^{2r}_{13}} X_3 \\ X'_{2i} = \frac{1}{E^2_{11}} X_{2i} & 2 \leq i \leq r-1 \\ X'_{2i+1} = -E^{2i}_{11} X_3 + E^2_{11} X_{2i+1} & 2 \leq i \leq r-1 \\ Y'_1 = \frac{\sqrt{E^{2r}_{13}}}{E^1_{11}} Y_1 \end{cases}$$

seguido de otros sencillos cambios de base, llevan a la superálgebra $\mathfrak{g}^3_{(3,5)}$.

Caso $D^3_{11} \neq 0$

En este caso, se tiene que $E^{2r}_{13} = 0$, y por tanto la familia a clasificar viene dada por

$$\begin{cases} [X_{2i}, X_{2i+1}] = X_{2r}, & 0 \leq i \leq r-1 \\ [X_0, Y_1] = Y_2 & \\ [X_0, Y_2] = Y_3 & \\ [X_j, Y_1] = D^3_{j,1} Y_3, & 1 \leq j \leq 2r-1 \\ [Y_1, Y_1] = E^1_{11} X_1 + E^{2r}_{11} X_{2r} & \\ [Y_1, Y_2] = \frac{1}{2} E^1_{11} X_{2r} & \end{cases}$$

con $D^3_{11} \neq 0$.

Siempre se puede suponer que $D^3_{2i,1} = 0$, $1 \leq i \leq r-1$. En efecto,

- Para cada k, tal que $D^3_{2k+1,1} \neq 0$, se hace el cambio de base dado por

$$\begin{cases} X'_{2k} = D^3_{2k+1,1} X_{2k} - D^3_{2k,1} X_{2k+1} \\ X'_{2k+1} = \dfrac{1}{D^3_{2k+1,1}} X_{2k+1} \end{cases}$$

- Para cada k, tal que $D^3_{2k+1,1} = 0$, se hace el cambio de base dado por

$$\begin{cases} X'_{2k} = -X_{2k+1} \\ X'_{2k+1} = X_{2k} \end{cases}$$

Además, el cambio de base dado por

$$\begin{cases} X'_0 = D^3_{11} X_0 + \sum\limits_{i=1}^{r-1} D^3_{2i+1,1} X_{2i} & \\ X'_1 = \frac{1}{D^3_{11}} X_1 & \\ X'_{2j} = \frac{1}{D^3_{11}} X_{2j} & 1 \leq j \leq r-1 \\ X'_{2j+1} = D^3_{11} X_{2j+1} - D^3_{2j+1,1} X_1 & 1 \leq j \leq r-1 \end{cases}$$

permite suponer que $D^3_{2j+1,1} = 0$, $1 \leq j \leq r-1$.

Caso 1: $E^1_{11} = 0$. En este caso siempre se tiene que $E^{2r}_{11} \neq 0$ (ya que en caso contrario se tendría un caso degenerado, un álgebra de Lie). Mediante el cambio de escala dado por

$$\begin{cases} X'_0 = \sqrt[3]{D^3_{11}} X_0 \\ X'_1 = \frac{1}{\sqrt[3]{D^3_{11}}} X_1 \\ Y'_1 = \frac{1}{\sqrt{E^{2r}_{11}}} Y_1 \end{cases}$$

se obtiene la superálgebra $\mathfrak{g}^3_{(3,1)}$.

Caso 2: $E^1_{11} \neq 0$. En este caso siempre se puede suponer $E^{2r}_{11} = 0$ gracias al cambio de base dado por

$$\begin{cases} X'_0 = \sqrt[3]{D^3_{11}} X_0 \\ X'_1 = \frac{1}{\sqrt[3]{D^3_{11}}} X_1 \\ Y'_1 = \frac{1}{\sqrt{E^1_{11} \sqrt[3]{D^3_{11}}}} Y_1 - \frac{E^{2r}_{11}}{E^1_{11} \sqrt{E^1_{11} \sqrt[3]{D^3_{11}}}} Y_2 \end{cases}$$

obteniéndose la superálgebra $\mathfrak{g}^3_{(3,2)}$.

Con esto se concluye la demostración del teorema. □

5.6 S.A.L. 2–nilpotentes

En esta sección se van a clasificar todas las superálgebras de Heisenberg 2–nilpotentes con dimensión de la parte par arbitraria $2r+1$ y dimensión de la parte impar menor o igual a 3. Dentro de las anteriores se explicitarán las que además tengan centro unidimensional.

Se observa que los casos $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1$ de dimensión de la parte impar $dim(\mathfrak{g}_1) \in \{1, 2\}$ ya han sido estudiados en las secciones 5.3 y 5.4.

Teorema 5.6.1 *Si $\mathfrak{g}$ es una S.A.H. 2−nilpotente, no degenerada, con dimensión de la parte par arbitraria $2r+1$ y dimensión de la parte impar menor o igual a tres, entonces es isomorfa a una de las siguientes superálgebras, dos a dos no isomorfas, cuyas leyes pueden ser expresadas en una cierta base adaptada por*

- *Si* $dim(\mathfrak{g}_1) = 1$: $\mathfrak{g}^1$, *con*

$$\mathfrak{g}^1 \begin{cases} [X_{2i}, X_{2i+1}] = X_{2r} & 0 \leq i \leq r-1 \\ [Y_1, Y_1] = X_{2r} \end{cases}$$

- *Si* $dim(\mathfrak{g}_1) = 2$: $\mathfrak{g}^1 \oplus \mathbb{C}$, $\mathfrak{g}_1^2$ *y* $\mathfrak{g}_2^2$, *con*

$\mathfrak{g}_1^2$:

$$\begin{cases} [X_{2i}, X_{2i+1}] = X_{2r} & 0 \leq i \leq r-1 \\ [Y_1, Y_2] = X_{2r} \end{cases}$$

$\mathfrak{g}_2^2$:

$$\begin{cases} [X_{2i}, X_{2i+1}] = X_{2r} & 0 \leq i \leq r-1 \\ [X_0, Y_1] = Y_2 \\ [Y_1, Y_1] = X_{2r} \end{cases}$$

- *Si* $dim(\mathfrak{g}_1) = 3$: $\mathfrak{g}^1 \oplus \mathbb{C}^2$, $\mathfrak{g}_1^2 \oplus \mathbb{C}$, $\mathfrak{g}_2^2 \oplus \mathbb{C}$, $\mathfrak{g}_1^3$ *y* $\mathfrak{g}_{(2,i)}^3$ *con* $i \in \{1,2,8,10,11,12,13,14\}$, *donde*

$\mathfrak{g}_1^3$:

$$\begin{cases} [X_{2i}, X_{2i+1}] = X_{2r} & 0 \leq i \leq r-1 \\ [Y_1, Y_1] = X_{2r} \\ [Y_2, Y_3] = X_{2r} \end{cases}$$

$\mathfrak{g}_{(2,1)}^3$:

$$\begin{cases} [X_{2i}, X_{2i+1}] = X_{2r} & 0 \leq i \leq r-1 \\ [X_0, Y_1] = Y_2 \\ [X_1, Y_1] = Y_3 \\ [Y_1, Y_1] = X_{2r} \end{cases}$$

$\mathfrak{g}_{(2,2)}^3$:

$$\begin{cases} [X_{2i}, X_{2i+1}] = X_{2r} & 0 \leq i \leq r-1 \\ [X_0, Y_1] = Y_2 \\ [X_3, Y_1] = Y_3 \\ [Y_1, Y_1] = X_{2r} \end{cases}$$

$\mathfrak{g}_{(2,8)}^3$:

$$\begin{cases} [X_{2i}, X_{2i+1}] = X_{2r} & 0 \leq i \leq r-1 \\ [X_0, Y_1] = Y_2 \\ [Y_1, Y_3] = X_{2r} \end{cases}$$

$\mathfrak{g}^3_{(2,10)}$:

$$\begin{cases} [X_{2i}, X_{2i+1}] = X_{2r} & 0 \leq i \leq r-1 \\ [X_0, Y_1] = Y_2 \\ [Y_3, Y_3] = X_{2r} \end{cases}$$

$\mathfrak{g}^3_{(2,11)}$:

$$\begin{cases} [X_{2i}, X_{2i+1}] = X_{2r} & 0 \leq i \leq r-1 \\ [X_0, Y_1] = Y_3 \\ [X_0, Y_2] = Y_3 \\ [X_1, Y_2] = Y_3 \\ [Y_1, Y_1] = X_{2r} \end{cases}$$

$\mathfrak{g}^3_{(2,12)}$:

$$\begin{cases} [X_{2i}, X_{2i+1}] = X_{2r} & 0 \leq i \leq r-1 \\ [X_0, Y_1] = Y_3 \\ [X_0, Y_2] = Y_3 \\ [X_1, Y_2] = Y_3 \\ [Y_1, Y_2] = X_{2r} \end{cases}$$

$\mathfrak{g}^3_{(2,13)}$:

$$\begin{cases} [X_{2i}, X_{2i+1}] = X_{2r} & 0 \leq i \leq r-1 \\ [X_0, Y_1] = Y_3 \\ [X_0, Y_2] = Y_3 \\ [X_2, Y_2] = Y_3 \\ [Y_1, Y_1] = X_{2r} \end{cases}$$

$\mathfrak{g}^3_{(2,14)}$:

$$\begin{cases} [X_{2i}, X_{2i+1}] = X_{2r} & 0 \leq i \leq r-1 \\ [X_0, Y_1] = Y_3 \\ [X_0, Y_2] = Y_3 \\ [X_2, Y_2] = Y_3 \\ [Y_1, Y_2] = X_{2r} \end{cases}$$

Nota 5.6.1 Se observa que las superálgebras anteriores $\mathfrak{g}^3_{(2,i)}$, $11 \leq i \leq 14$, se corresponden con

$$\begin{aligned} \mathfrak{g}^3_{(2,11)} &= \overline{\mathfrak{g}}^{3,0,0}_{(2,11)} \\ \mathfrak{g}^3_{(2,12)} &= \overline{\mathfrak{g}}^{3,0}_{(2,12)} \\ \mathfrak{g}^3_{(2,13)} &= \overline{\mathfrak{g}}^{3,0,0}_{(2,14)} \\ \mathfrak{g}^3_{(2,14)} &= \overline{\mathfrak{g}}^{3,0}_{(2,15)} \end{aligned}$$

Demostración del teorema: Los casos $dim(\mathfrak{g}_1) = 1$ y $dim(\mathfrak{g}_1) = 2$ es una simple comprobación del nilíndice en las S.A.L. obtenidas en las clasificaciones correspondientes, ver secciones 5.3 y 5.4.

Para el caso $dim(\mathfrak{g}_1) = 3$, es una simple comprobación el hecho de las S.A.L. del enunciado son, efectivamente, S.A.H. 2−nilpotentes, no degeneradas, con dimensión de la parte par arbitraria $2r + 1$ y dimensión de la parte impar tres. Que son dos a dos no isomorfas sigue de la tabla siguiente, donde $*$ denota a $[\mathcal{C}_{\mathfrak{g}_0}(\mathcal{C}_{\mathfrak{g}_0}(\mathfrak{g}_1)), \mathcal{C}_{\mathfrak{g}_0}(\mathcal{C}_{\mathfrak{g}_0}(\mathfrak{g}_1))]$.

	$dim(\mathcal{Z}(\mathfrak{g}))$	$dim(\mathcal{C}^1(\mathfrak{g}))$	$dim(\mathcal{C}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{g}_1))$	$dim(\mathcal{C}_{\mathfrak{g}_0}(\mathfrak{g}_1))$	$dim(*)$
$\mathfrak{g}^3_{(2,1)}$	3	3	2r+1	-	1
$\mathfrak{g}^3_{(2,2)}$	3	3	2r+1	-	0
$\mathfrak{g}^3_{(2,8)}$	2	2	2r+1	2r	-
$\mathfrak{g}^3_{(2,10)}$	2	2	2r+2	-	-
$\mathfrak{g}^3_{(2,11)}$	2	2	2r+1	2r-1	1
$\mathfrak{g}^3_{(2,12)}$	2	2	2r	-	1
$\mathfrak{g}^3_{(2,13)}$	2	2	2r+1	2r-1	0
$\mathfrak{g}^3_{(2,14)}$	2	2	2r	-	0

Resta ver, por tanto, que las superálgebras anteriores son todas las que se obtienen en este caso. Se observa que sólo las superálgebras de Lie de Heisenberg con invariante de Goze $(2, 1, \ldots, 1|\ 1, 1, 1)$ o $(2, 1, \ldots, 1|\ 2, 1)$ pueden tener nilíndice 2. Es fácil ver, por la estructura de las mismas, que las álgebras con invariante de Goze $(2, 1, \ldots, 1|\ 3)$ tienen nilíndice mayor o igual a 3.

Por otro lado, la única S.A.L. no escindida y de invariante de Goze $(2, 1, \ldots, 1|\ 1, 1, 1)$ es $\mathfrak{g}^3_1$ que tiene nilíndice 2. Mientras que con invariante de Goze $(2, 1, \ldots, 1|\ 2, 1)$ y nilíndice 2, no escindidas, quedan las superálgebras

$\mathfrak{g}^3_{(2,1)}$, $\mathfrak{g}^3_{(2,2)}$, $\mathfrak{g}^3_{(2,8)}$, $\mathfrak{g}^3_{(2,10)}$ junto con $\overline{\mathfrak{g}}^{3,\alpha,\beta}_{(2,11)}$, $\overline{\mathfrak{g}}^{3,\alpha}_{(2,12)}$, $\overline{\mathfrak{g}}^{3}_{(2,13)}$, $\overline{\mathfrak{g}}^{3,\alpha,\beta}_{(2,14)}$, $\overline{\mathfrak{g}}^{3,\alpha}_{(2,15)}$ y $\overline{\mathfrak{g}}^{3}_{(2,16)}$, alguna de estas últimas son incluso familias paramétricas o biparamétricas de superálgebras.

Así con todo esto, para concluir la demostración del teorema, resta ver que cualquier superálgebra del tipo $\overline{\mathfrak{g}}^{3,\alpha,\beta}_{(2,11)}$, $\overline{\mathfrak{g}}^{3,\alpha}_{(2,12)}$, $\overline{\mathfrak{g}}^{3}_{(2,13)}$, $\overline{\mathfrak{g}}^{3,\alpha,\beta}_{(2,14)}$, $\overline{\mathfrak{g}}^{3,\alpha}_{(2,15)}$ ó $\overline{\mathfrak{g}}^{3}_{(2,16)}$, es isomorfa a una del conjunto $\{\mathfrak{g}^3_{(2,11)}, \mathfrak{g}^3_{(2,12)}, \mathfrak{g}^3_{(2,13)}, \mathfrak{g}^3_{(2,14)}\}$.

Resta estudiar, por tanto, seis casos

Caso 1: $\mathfrak{g} \in \overline{\mathfrak{g}}^{3,\alpha,\beta}_{(2,11)}$. Se observa que $\overline{\mathfrak{g}}^{3,0,0}_{(2,11)} = \mathfrak{g}^3_{(2,11)}$, luego faltan por estudiar los siguientes subcasos

1.1. $\mathfrak{g} \in \overline{\mathfrak{g}}^{3,\alpha,0}_{(2,11)}$, $\alpha \neq 0$. En este caso, $\mathfrak{g}$ viene dada por la familia uniparamétrica

$$\begin{cases} [X_{2i}, X_{2i+1}] = X_{2r} & 0 \le i \le r-1 \\ [X_0, Y_1] = Y_3 & \\ [X_0, Y_2] = Y_3 & \\ [X_1, Y_2] = Y_3 & \\ [Y_1, Y_1] = X_{2r} & \\ [Y_1, Y_2] = \alpha X_{2r} & \alpha \neq 0 \end{cases}$$

este caso se estudiará dentro del subcaso 1.2.3.

1.2. $\mathfrak{g} \in \overline{\mathfrak{g}}^{3,\alpha,\beta}_{(2,11)}$, con $\alpha\beta \neq 0$. Entonces $\mathfrak{g}$ viene dada por la familia biparamétrica siguiente

$$\begin{cases} [X_{2i}, X_{2i+1}] = X_{2r} & 0 \le i \le r-1 \\ [X_0, Y_1] = Y_3 & \\ [X_0, Y_2] = Y_3 & \\ [X_1, Y_2] = Y_3 & \\ [Y_1, Y_1] = X_{2r} & \\ [Y_1, Y_2] = \alpha X_{2r} & \alpha \neq 0 \\ [Y_2, Y_2] = \beta X_{2r} & \beta \neq 0 \end{cases}$$

la familia anterior de superálgebras se divide en tres subfamilias, $\overline{\mathfrak{g}}^{3,\beta}_{(2,11,1)}$, $\overline{\mathfrak{g}}^{3,\beta}_{(2,11,2)}$ y $\overline{\mathfrak{g}}^{3,\alpha,\lambda}_{(2,11,3)}$ como sigue.

1.2.1. $\mathfrak{g} \in \overline{\mathfrak{g}}^{3,\beta}_{(2,11,1)}$, entonces pertenecerá a la siguiente familia uniparamétrica

$$\begin{cases} [X_{2i}, X_{2i+1}] = X_{2r} & 0 \leq i \leq r-1 \\ [X_0, Y_1] = Y_3 \\ [X_0, Y_2] = Y_3 \\ [X_1, Y_2] = Y_3 \\ [Y_1, Y_1] = X_{2r} \\ [Y_1, Y_2] = \sqrt{\beta} X_{2r} & \beta \neq 0 \\ [Y_2, Y_2] = \beta X_{2r} \end{cases}$$

obtenida de $\overline{\mathfrak{g}}^{3,\alpha,\beta}_{(2,11)}$, con $\alpha\beta \neq 0$, mediante la relación $\alpha = \sqrt{\beta}$. En esta ocasión se observa que cualquier superálgebra de la familia anterior, obtenida al fijar un valor del parámetro β distinto de cero, es isomorfa a $\mathfrak{g}^3_{(2,11)}$. En efecto, ya que de $\mathfrak{g}^3_{(2,11)}$ mediante el cambio de base dado por

$$\begin{cases} X'_0 = X_0 - \sqrt{\beta} X_1 \\ Y'_2 = \sqrt{\beta} Y_1 + Y_2 \end{cases}$$

con β cualquiera distinto de cero, se llega a la S.A.L. de la familia $\overline{\mathfrak{g}}^{3,\beta}_{(2,11,1)}$ para el valor tomado de β.

1.2.2. $\mathfrak{g} \in \overline{\mathfrak{g}}^{3,\beta}_{(2,11,2)}$, entonces pertenecerá a la siguiente familia uniparamétrica

$$\begin{cases} [X_{2i}, X_{2i+1}] = X_{2r} & 0 \leq i \leq r-1 \\ [X_0, Y_1] = Y_3 \\ [X_0, Y_2] = Y_3 \\ [X_1, Y_2] = Y_3 \\ [Y_1, Y_1] = X_{2r} \\ [Y_1, Y_2] = -\sqrt{\beta} X_{2r} & \beta \neq 0 \\ [Y_2, Y_2] = \beta X_{2r} \end{cases}$$

obtenida de $\overline{\mathfrak{g}}^{3,\alpha,\beta}_{(2,11)}$, con $\alpha\beta \neq 0$, mediante la relación $\alpha = -\sqrt{\beta}$. En esta ocasión se observa que cualquier superálgebra de la familia anterior, obtenida al fijar un valor del parámetro β distinto de cero, es isomorfa a $\mathfrak{g}^3_{(2,11)}$. En efecto, ya que de $\mathfrak{g}^3_{(2,11)}$ mediante el cambio de base dado por

$$\begin{cases} X_0' = -X_0 - \sqrt{\beta} X_1 \\ X_1' = -X_1 \\ Y_1' = -Y_1 \\ Y_2' = \sqrt{\beta} Y_1 - Y_2 \end{cases}$$

con β cualquiera distinto de cero, se llega a la S.A.L. de la familia $\overline{\mathfrak{g}}^{3,\beta}_{(2,11,2)}$ para el valor tomado de β.

1.2.3. $\mathfrak{g} \in \overline{\mathfrak{g}}^{3,\alpha,\lambda}_{(2,11,3)}$, entonces pertenecerá a la siguiente familia biparamétrica

$$\begin{cases} [X_{2i}, X_{2i+1}] = X_{2r} & 0 \leq i \leq r-1 \\ [X_0, Y_1] = Y_3 & \\ [X_0, Y_2] = Y_3 & \\ [X_1, Y_2] = Y_3 & \\ [Y_1, Y_1] = X_{2r} & \\ [Y_1, Y_2] = \alpha X_{2r} & \alpha \neq 0 \\ [Y_2, Y_2] = ((\alpha)^2 + \lambda) X_{2r} & \lambda \neq 0 \end{cases}$$

obtenida de $\overline{\mathfrak{g}}^{3,\alpha,\beta}_{(2,11)}$, con $\alpha\beta \neq 0$, mediante la relación $(\alpha)^2 \neq \beta$, además se ha suprimido la restricción $\lambda \neq -((\alpha)^2)$ para que englobe así a la familia de superálgebras $\overline{\mathfrak{g}}^{3,\alpha,0}_{(2,11)}$, con $\alpha \neq 0$, del caso 1.1.

En esta ocasión se observa que cualquier superálgebra de la familia anterior, obtenida al fijar un par de valores (α, λ) ambos distintos de cero, es isomorfa a la superálgebra de la familia $\overline{\mathfrak{g}}^{3,0,\beta}_{(2,11)}$, con $\beta \neq 0$, correspondiente al valor del paramétro $\beta = \lambda$. En efecto, ya que de cada superálgebra de la familia $\overline{\mathfrak{g}}^{3,0,\beta}_{(2,11)}$ obtenida al fijar un valor de $\beta \neq 0$, mediante el cambio de base dado por

$$\begin{cases} X_0' = X_0 - \alpha X_1 \\ \\ Y_2' = \alpha Y_1 + Y_2 \end{cases}$$

con α cualquiera distinto de cero, se llega a la S.A.L. de la familia $\overline{\mathfrak{g}}^{3,\alpha,\lambda}_{(2,11,3)}$ para $\lambda = \beta$ y para el valor tomado de α en el cambio de base.

Como ya se verá en el caso que sigue, cualquier superálgebra de la familia $\overline{\mathfrak{g}}^{3,0,\beta}_{(2,11)}$, con $\beta \neq 0$, es a su vez isomorfa a $\mathfrak{g}^{3}_{(2,12)}$, de donde se sigue que cualquier superálgebra de la subfamilia $\overline{\mathfrak{g}}^{3,\alpha,\lambda}_{(2,11,3)}$ es isomorfa a $\mathfrak{g}^{3}_{(2,12)}$.

1.3. $\mathfrak{g} \in \overline{\mathfrak{g}}^{3,0,\beta}_{(2,11)}$, con $\beta \neq 0$. Entonces $\mathfrak{g}$ viene dada por la familia uniparamétrica siguiente

$$\begin{cases} [X_{2i}, X_{2i+1}] = X_{2r} & 0 \leq i \leq r-1 \\ [X_0, Y_1] = Y_3 & \\ [X_0, Y_2] = Y_3 & \\ [X_1, Y_2] = Y_3 & \\ [Y_1, Y_1] = X_{2r} & \\ [Y_2, Y_2] = \beta X_{2r} & \beta \neq 0 \end{cases}$$

se observa que cualquier superálgebra de la familia anterior, obtenida al fijar un valor del parámetro β distinto de cero, tras realizar el cambio de base dado por

$$\begin{cases} X'_0 = -2i\sqrt{\beta}X_1 & \\ X'_1 = X_0 - (i\sqrt{\beta}+1)X_1 & \\ X'_{2j} = 2i\sqrt{\beta}X_{2j} & 1 \leq j \leq r \\ Y'_1 = i\sqrt{i}(\beta)^{\frac{1}{4}}Y_1 + \sqrt{i}(\beta)^{-\frac{1}{4}}Y_2 & \\ Y'_2 = -i\sqrt{i}(\beta)^{\frac{1}{4}}Y_1 + \sqrt{i}(\beta)^{-\frac{1}{4}}Y_2 & \\ Y'_3 = -2i\sqrt{i}(\beta)^{\frac{1}{4}}Y_3 & \end{cases}$$

para el valor fijado de β, es isomorfa a $\mathfrak{g}^{3}_{(2,12)}$.

Caso 2: $\mathfrak{g} \in \overline{\mathfrak{g}}^{3,\alpha}_{(2,12)}$. Se observa que $\overline{\mathfrak{g}}^{3,0}_{(2,12)} = \mathfrak{g}^{3}_{(2,12)}$, luego falta por estudiar sólo el caso $\mathfrak{g} \in \overline{\mathfrak{g}}^{3,\alpha}_{(2,12)}$, con $\alpha \neq 0$.

En este caso, $\mathfrak{g}$ viene dada por la familia uniparamétrica siguiente

$$\begin{cases} [X_{2i}, X_{2i+1}] = X_{2r} & 0 \leq i \leq r-1 \\ [X_0, Y_1] = Y_3 & \\ [X_0, Y_2] = Y_3 & \\ [X_1, Y_2] = Y_3 & \\ [Y_1, Y_2] = X_{2r} & \\ [Y_2, Y_2] = \alpha X_{2r} & \alpha \neq 0 \end{cases}$$

en esta ocasión se observa que cualquier superálgebra de la familia anterior, obtenida al fijar un valor del parámetro α distinto de cero, es isomorfa a $\mathfrak{g}^3_{(2,12)}$. En efecto, ya que de $\mathfrak{g}^3_{(2,12)}$, mediante el cambio de base dado por

$$\begin{cases} X_0' = X_0 + (1-\alpha)X_1 & \\ X_1' = 2X_1 & \\ X_{2j}' = 2X_{2j} & 1 \leq j \leq r \\ Y_1' = 2Y_1 & \\ Y_2' = \alpha Y_1 + Y_2 & \\ Y_3' = 2Y_3 & \end{cases}$$

con α cualquiera distinto de cero, se llega a la S.A.L. de la familia $\overline{\mathfrak{g}}^{3,\alpha}_{(2,12)}$ para el valor tomado de α.

Caso 3: $\mathfrak{g} = \overline{\mathfrak{g}}^3_{(2,13)}$, entonces viene dada por los productos

$$\begin{cases} [X_{2i}, X_{2i+1}] = X_{2r} & 0 \leq i \leq r-1 \\ [X_0, Y_1] = Y_3 & \\ [X_0, Y_2] = Y_3 & \\ [X_1, Y_2] = Y_3 & \\ [Y_2, Y_2] = X_{2r} & \end{cases}$$

y tras el cambio de base dado por

$$\begin{cases} X_0' = X_0 & \\ X_1' = X_0 - X_1 & \\ X_{2j}' = -X_{2j} & 1 \leq j \leq r \\ Y_1' = iY_2 & \\ Y_2' = iY_1 & \\ Y_3' = iY_3 & \end{cases}$$

se obtiene la superálgebra $\mathfrak{g}^3_{(2,11)}$.

Caso 4: $\mathfrak{g} \in \overline{\mathfrak{g}}^{3,\alpha,\beta}_{(2,14)}$. Se observa que $\overline{\mathfrak{g}}^{3,0,0}_{(2,14)} = \mathfrak{g}^3_{(2,13)}$, luego faltan por estudiar los siguientes subcasos

4.1. $\mathfrak{g} \in \overline{\mathfrak{g}}^{3,\alpha,0}_{(2,14)}$, $\alpha \neq 0$. En este caso, $\mathfrak{g}$ viene dada por la familia uniparamétrica

$$\begin{cases} [X_{2i}, X_{2i+1}] = X_{2r} & 0 \leq i \leq r-1 \\ [X_0, Y_1] = Y_3 & \\ [X_0, Y_2] = Y_3 & \\ [X_2, Y_2] = Y_3 & \\ [Y_1, Y_1] = X_{2r} & \\ [Y_1, Y_2] = \alpha X_{2r} & \alpha \neq 0 \end{cases}$$

este caso se estudiará dentro del subcaso 4.2.3.

4.2. $\mathfrak{g} \in \overline{\mathfrak{g}}^{3,\alpha,\beta}_{(2,14)}$, con $\alpha\beta \neq 0$. Entonces $\mathfrak{g}$ viene dada por la familia biparamétrica siguiente

$$\begin{cases} [X_{2i}, X_{2i+1}] = X_{2r} & 0 \leq i \leq r-1 \\ [X_0, Y_1] = Y_3 & \\ [X_0, Y_2] = Y_3 & \\ [X_2, Y_2] = Y_3 & \\ [Y_1, Y_1] = X_{2r} & \\ [Y_1, Y_2] = \alpha X_{2r} & \alpha \neq 0 \\ [Y_2, Y_2] = \beta X_{2r} & \beta \neq 0 \end{cases}$$

la familia anterior de superálgebras se divide en tres subfamilias, $\overline{\mathfrak{g}}^{3,\beta}_{(2,14,1)}$, $\overline{\mathfrak{g}}^{3,\beta}_{(2,14,2)}$ y $\overline{\mathfrak{g}}^{3,\alpha,\lambda}_{(2,14,3)}$ como sigue.

4.2.1. $\mathfrak{g} \in \overline{\mathfrak{g}}^{3,\beta}_{(2,14,1)}$, entonces pertenecerá a la siguiente familia uniparamétrica

$$\left\{\begin{array}{ll} [X_{2i}, X_{2i+1}] = X_{2r} & 0 \leq i \leq r-1 \\ [X_0, Y_1] = Y_3 & \\ [X_0, Y_2] = Y_3 & \\ [X_2, Y_2] = Y_3 & \\ [Y_1, Y_1] = X_{2r} & \\ [Y_1, Y_2] = \sqrt{\beta} X_{2r} & \beta \neq 0 \\ [Y_2, Y_2] = \beta X_{2r} & \end{array}\right.$$

obtenida de $\overline{\mathfrak{g}}^{3,\alpha,\beta}_{(2,14)}$, con $\alpha\beta \neq 0$, mediante la relación $\alpha = \sqrt{\beta}$. En esta ocasión se observa que cualquier superálgebra de la familia anterior, obtenida al fijar un valor del parámetro β distinto de cero, es isomorfa a $\mathfrak{g}^3_{(2,13)}$. En efecto, ya que de $\mathfrak{g}^3_{(2,13)}$ mediante el cambio de base dado por

$$\left\{\begin{array}{l} X_0' = X_0 - \sqrt{\beta} X_2 \\ X_3' = X_3 + \sqrt{\beta} X_1 \\ Y_2' = \sqrt{\beta} Y_1 + Y_2 \end{array}\right.$$

con β cualquiera distinto de cero, se llega a la S.A.L. de la familia $\overline{\mathfrak{g}}^{3,\beta}_{(2,14,1)}$ para el valor tomado de β.

4.2.2. $\mathfrak{g} \in \overline{\mathfrak{g}}^{3,\beta}_{(2,14,2)}$, entonces pertenecerá a la siguiente familia uniparamétrica

$$\left\{\begin{array}{ll} [X_{2i}, X_{2i+1}] = X_{2r} & 0 \leq i \leq r-1 \\ [X_0, Y_1] = Y_3 & \\ [X_0, Y_2] = Y_3 & \\ [X_2, Y_2] = Y_3 & \\ [Y_1, Y_1] = X_{2r} & \\ [Y_1, Y_2] = -\sqrt{\beta} X_{2r} & \beta \neq 0 \\ [Y_2, Y_2] = \beta X_{2r} & \end{array}\right.$$

obtenida de $\overline{\mathfrak{g}}^{3,\alpha,\beta}_{(2,14)}$, con $\alpha\beta \neq 0$, por la relación $\alpha = -\sqrt{\beta}$. En esta ocasión se observa que cualquier superálgebra de la familia anterior, obtenida al fijar un valor del parámetro β distinto de cero, es isomorfa a $\mathfrak{g}^3_{(2,13)}$. En efecto, ya que de $\mathfrak{g}^3_{(2,13)}$ mediante el cambio de base dado por

$$\begin{cases} X_0' = -X_0 + (2+\sqrt{\beta})X_2 \\ X_1' = -X_1 \\ X_3' = X_3 + (2+\sqrt{\beta})X_1 \\ Y_1' = -Y_1 \\ Y_2' = \sqrt{\beta}Y_1 + Y_2 \end{cases}$$

con β cualquiera distinto de cero, se llega a la S.A.L. de la familia $\overline{\mathfrak{g}}^{3,\beta}_{(2,14,2)}$ para el valor tomado de β.

4.2.3. $\mathfrak{g} \in \overline{\mathfrak{g}}^{3,\alpha,\lambda}_{(2,14,3)}$, entonces pertenecerá a la siguiente familia biparamétrica

$$\begin{cases} [X_{2i}, X_{2i+1}] = X_{2r} & 0 \leq i \leq r-1 \\ [X_0, Y_1] = Y_3 & \\ [X_0, Y_2] = Y_3 & \\ [X_2, Y_2] = Y_3 & \\ [Y_1, Y_1] = X_{2r} & \\ [Y_1, Y_2] = \alpha X_{2r} & \alpha \neq 0 \\ [Y_2, Y_2] = ((\alpha)^2 + \lambda)X_{2r} & \lambda \neq 0 \end{cases}$$

obtenida de $\overline{\mathfrak{g}}^{3,\alpha,\beta}_{(2,14)}$, con $\alpha\beta \neq 0$, mediante la relación $(\alpha)^2 \neq \beta$, además se ha suprimido la restricción $\lambda \neq -((\alpha)^2)$ para que englobe así a la familia de superálgebras del caso 4.1.

En esta ocasión se observa que cualquier superálgebra de la familia anterior, obtenida al fijar un par de valores (α, λ) ambos distintos de cero, es isomorfa a la superálgebra de la familia $\overline{\mathfrak{g}}^{3,0,\beta}_{(2,14)}$, con $\beta \neq 0$, correspondiente al valor del paramétro $\beta = \lambda$. En efecto, ya que de cada superálgebra de la familia $\overline{\mathfrak{g}}^{3,0,\beta}_{(2,14)}$ obtenida al fijar un valor de $\beta \neq 0$, mediante el cambio de base dado por

$$\begin{cases} X_0' = X_0 - \alpha X_2 \\ X_3' = X_3 + \alpha X_1 \\ Y_2' = \alpha Y_1 + Y_2 \end{cases}$$

con α cualquiera distinto de cero, se llega a la S.A.L. de la familia $\overline{\mathfrak{g}}^{3,\alpha,\lambda}_{(2,14,3)}$ para $\lambda = \beta$ y para el valor tomado de α en el cambio de base.

Como ya se verá en el caso que sigue, cualquier superálgebra de la familia $\overline{\mathfrak{g}}^{3,0,\beta}_{(2,14)}$, con $\beta \neq 0$, es a su vez isomorfa a $\mathfrak{g}^3_{(2,14)}$, de donde se sigue que cualquier superálgebra de la subfamilia $\overline{\mathfrak{g}}^{3,\alpha,\lambda}_{(2,14,3)}$ es isomorfa a $\mathfrak{g}^3_{(2,14)}$.

4.3. $\mathfrak{g} \in \overline{\mathfrak{g}}^{3,0,\beta}_{(2,14)}$, con $\beta \neq 0$. Entonces $\mathfrak{g}$ viene dada por la familia uniparamétrica siguiente

$$\begin{cases} [X_{2i}, X_{2i+1}] = X_{2r} & 0 \leq i \leq r-1 \\ [X_0, Y_1] = Y_3 \\ [X_0, Y_2] = Y_3 \\ [X_2, Y_2] = Y_3 \\ [Y_1, Y_1] = X_{2r} \\ [Y_2, Y_2] = \beta X_{2r} & \beta \neq 0 \end{cases}$$

se observa que cualquier superálgebra de la familia anterior, obtenida al fijar un valor del parámetro β distinto de cero, tras realizar el cambio de base dado por

$$\begin{cases} X_0' = -2i\sqrt{\beta}X_2 \\ X_1' = -\dfrac{1}{2i\sqrt{\beta}}X_3 - \dfrac{(i\sqrt{\beta}+1)}{2i\sqrt{\beta}}X_1 \\ X_2' = X_0 - (i\sqrt{\beta}+1)X_2 \\ X_3' = X_1 \\ Y_1' = \dfrac{i}{\sqrt{2}}Y_1 + \dfrac{1}{\sqrt{2\beta}}Y_2 \\ Y_2' = -\dfrac{i}{\sqrt{2}}Y_1 + \dfrac{1}{\sqrt{2\beta}}Y_2 \\ Y_3' = -i\sqrt{2}Y_3 \end{cases}$$

se obtiene la superálgebra $\mathfrak{g}^3_{(2,14)}$.

Caso 5: $\mathfrak{g} \in \overline{\mathfrak{g}}^{3,\alpha}_{(2,15)}$. Se observa que $\overline{\mathfrak{g}}^{3,0}_{(2,15)} = \mathfrak{g}^{3}_{(2,14)}$, luego falta por estudiar sólo el caso $\mathfrak{g} \in \overline{\mathfrak{g}}^{3,\alpha}_{(2,15)}$, con $\alpha \neq 0$.

En este caso, $\mathfrak{g}$ viene dada por la familia uniparamétrica siguiente

$$\begin{cases} [X_{2i}, X_{2i+1}] = X_{2r} & 0 \leq i \leq r-1 \\ [X_0, Y_1] = Y_3 & \\ [X_0, Y_2] = Y_3 & \\ [X_2, Y_2] = Y_3 & \\ [Y_1, Y_2] = X_{2r} & \\ [Y_2, Y_2] = \alpha X_{2r} & \alpha \neq 0 \end{cases}$$

en esta ocasión se observa que cualquier superálgebra de la familia anterior, obtenida al fijar un valor del parámetro α distinto de cero, es isomorfa a $\mathfrak{g}^{3}_{(2,14)}$. En efecto, ya que de $\mathfrak{g}^{3}_{(2,14)}$, mediante el cambio de base dado por

$$\begin{cases} X_0' = X_0 + (3-2\alpha)X_2 \\ X_1' = X_1 \\ X_2' = 4X_2 \\ X_3' = \dfrac{1}{4}X_3 - \dfrac{(3-2\alpha)}{4}X_1 \\ Y_1' = 2Y_1 \\ Y_2' = \alpha Y_1 + \dfrac{1}{2}Y_2 \\ Y_3' = 2Y_3 \end{cases}$$

con α cualquiera distinto de cero, se llega a la S.A.L. de la familia $\overline{\mathfrak{g}}^{3,\alpha}_{(2,15)}$ para el valor tomado de α.

Caso 6: $\mathfrak{g} = \overline{\mathfrak{g}}^{3}_{(2,16)}$, entonces viene dada por los productos

$$\begin{cases} [X_{2i}, X_{2i+1}] = X_{2r} & 0 \leq i \leq r-1 \\ [X_0, Y_1] = Y_3 & \\ [X_0, Y_2] = Y_3 & \\ [X_2, Y_2] = Y_3 & \\ [Y_2, Y_2] = X_{2r} & \end{cases}$$

y tras el cambio de base dado por

$$\begin{cases} X_0' = X_0 \\ X_1' = X_1 + X_3 \\ X_2' = X_0 - X_2 \\ X_3' = -X_3 \\ Y_1' = Y_2 \\ Y_2' = Y_1 \end{cases}$$

se obtiene la superálgebra $\mathfrak{g}^3_{(2,13)}$.

Con esto se concluye la demostración del teorema. $\square$

Nota 5.6.2 Se observa que la condición de 2–nilpotencia para una S.A.L. $\mathfrak{g}$ es equivalente a que $\mathcal{C}^1(\mathfrak{g}) \subseteq \mathcal{Z}(\mathfrak{g})$ (donde $\mathcal{Z}(\mathfrak{g})$ denota el centro de la superálgebra $\mathfrak{g}$). Por tanto, las superálgebras obtenidas en el teorema anterior son todas las S.A.H. $\mathfrak{g}$ con $\mathcal{C}^1(\mathfrak{g}) \subseteq \mathcal{Z}(\mathfrak{g})$, en particular las no escindidas son las que verifican $\mathcal{C}^1(\mathfrak{g}) = \mathcal{Z}(\mathfrak{g})$ y las escindidas $\mathcal{C}^1(\mathfrak{g}) \subset \mathcal{Z}(\mathfrak{g})$.

Se recuerda, dentro de las álgebras de Lie, que las álgebras de Heisenberg son las únicas álgebras de Lie, salvo isomorfismo, que verifican $\mathcal{C}^1(\mathfrak{g}) = \mathcal{Z}(\mathfrak{g})$ y $dim(\mathcal{Z}(\mathfrak{g})) = 1$.

Luego, parece lógico determinar primero las S.A.H. con $\mathcal{C}^1(\mathfrak{g}) = \mathcal{Z}(\mathfrak{g})$ y $dim(\mathcal{Z}(\mathfrak{g})) = 1$, para después probar que son las únicas superálgebras de Lie, salvo isomorfismo, que verifican $\mathcal{C}^1(\mathfrak{g}) = \mathcal{Z}(\mathfrak{g})$ y $dim(\mathcal{Z}(\mathfrak{g})) = 1$.

Teorema 5.6.2
Si $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1$ es una S.A.H. no degenerada, con $dim(\mathfrak{g}_1) \leq 3$ y, tal que $\mathcal{Z}(\mathfrak{g}) = \mathcal{C}^1(\mathfrak{g})$ y $dim(\mathcal{Z}(\mathfrak{g})) = 1$, entonces es isomorfa a $\mathfrak{g}^1$ (si $dim(\mathfrak{g}_1) = 1$) o a $\mathfrak{g}^2_1$ (si $dim(\mathfrak{g}_1) = 2$) o a $\mathfrak{g}^3_1$ (si $dim(\mathfrak{g}_1) = 3$).

$\mathfrak{g}^1$:

$$\begin{cases} [X_{2i}, X_{2i+1}] = X_{2r} & 0 \leq i \leq r-1 \\ [Y_1, Y_1] = X_{2r} \end{cases}$$

$\mathfrak{g}_1^2$

$$\begin{cases} [X_{2i}, X_{2i+1}] = X_{2r} & 0 \leq i \leq r-1 \\ [Y_1, Y_2] = X_{2r} \end{cases}$$

$\mathfrak{g}_1^3$:

$$\begin{cases} [X_{2i}, X_{2i+1}] = X_{2r} & 0 \leq i \leq r-1 \\ [Y_1, Y_1] = X_{2r} \\ [Y_2, Y_3] = X_{2r} \end{cases}$$

Demostración: Basta con tener en cuenta el teorema anterior y el hecho de que la condición $\mathcal{Z}(\mathfrak{g}) = \mathcal{C}^1(\mathfrak{g})$ es equivalente a 2−nilpotente no escindida. Lo que sigue es una comprobación. $\square$

Teorema 5.6.3
Si $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1$ es una S.A.L no degenerada, con $dim(\mathfrak{g}_1) \leq 3$ y, tal que $\mathcal{Z}(\mathfrak{g}) = \mathcal{C}^1(\mathfrak{g})$ y $dim(\mathcal{Z}(\mathfrak{g})) = 1$, entonces es isomorfa a $\mathfrak{g}^1$ (si $dim(\mathfrak{g}_1) = 1$) o a $\mathfrak{g}_1^2$ (si $dim(\mathfrak{g}_1) = 2$) o a $\mathfrak{g}_1^3$ (si $dim(\mathfrak{g}_1) = 3$).

$\mathfrak{g}^1$:

$$\begin{cases} [X_{2i}, X_{2i+1}] = X_{2r} & 0 \leq i \leq r-1 \\ [Y_1, Y_1] = X_{2r} \end{cases}$$

$\mathfrak{g}_1^2$

$$\begin{cases} [X_{2i}, X_{2i+1}] = X_{2r} & 0 \leq i \leq r-1 \\ [Y_1, Y_2] = X_{2r} \end{cases}$$

$\mathfrak{g}_1^3$:

$$\begin{cases} [X_{2i}, X_{2i+1}] = X_{2r} & 0 \leq i \leq r-1 \\ [Y_1, Y_1] = X_{2r} \\ [Y_2, Y_3] = X_{2r} \end{cases}$$

Demostración: Con las condiciones del teorema la única posibilidad para $\mathcal{C}^1(\mathfrak{g})$, $\mathcal{C}^1(\mathfrak{g}) = \mathcal{C}^1(\mathfrak{g})_0 \oplus \mathcal{C}^1(\mathfrak{g})_1$, es $\mathcal{C}^1(\mathfrak{g}) =< Z > \oplus < 0 >$ y $< Z >= \mathcal{Z}(\mathfrak{g})$, ya que si se tuviera $\mathcal{C}^1(\mathfrak{g}) =< 0 > \oplus < Z >$ se tendría que todos los productos de la forma $[Y_i, Y_j]$ serían nulos, de donde siempre se tendría un álgebra de Lie (caso degenerado).

Se observa que que al ser $\mathcal{C}^1(\mathfrak{g})_1 =< 0 >$, $\mathfrak{g}_1$ es el $\mathfrak{g}_0$−módulo trivial, es decir, todos los productos de la forma $[X_i, Y_j]$ son nulos, así la superálgebra tendría invariante de Goze $(\ldots \mid 1, 1, 1, \ldots, 1)$.

Con todo lo anterior los únicos productos no nulos para la superálgebra serían

$$\left\{ \begin{array}{ll} [X_i, X_j] = \varepsilon_{ij} Z & 0 \leq i < j \leq n-1 \\ \\ [Y_i, Y_j] = \delta_{ij} Z & 1 \leq i \leq j \leq m \end{array} \right.$$

con ε_{ij}, $\delta_{ij} \in \{0, 1\}$.

Si todos los ε_{ij} o todos los δ_{ij} fueran nulos se tendrían casos degenerados, luego $\exists \varepsilon_{ij} \neq 0$ y $\exists \delta_{ij} \neq 0$.

Se prueba a continuación por reducción al absurdo que $\mathfrak{g}_0$ es un álgebra de Lie con $\mathcal{C}^1(\mathfrak{g}_0) = \mathcal{Z}(\mathfrak{g}_0)$ y $dim(\mathcal{Z}(\mathfrak{g}_0)) = 1$. Para ello se supone que $\exists X \in$ $\in \mathcal{Z}(\mathfrak{g}_0)$ tal que $X \notin \mathcal{C}^1(\mathfrak{g}_0) =< Z >$, de donde se tiene que $[X, X_i] = 0 \ \forall i$, pero también se tiene $[X, Y_j] = 0 \ \forall j$ de donde se sigue $dim(\mathcal{Z}(\mathfrak{g})) \geq 2$, llegándose por tanto a contradicción.

Se acaba de probar que $\mathfrak{g}_0$ es isomorfa al álgebra de Lie de Heisenberg $\mathcal{H}_r$, luego $\mathfrak{g}$, por tanto, es una superálgebra de Lie de Heisenberg S.A.H. con $\mathcal{C}^1(\mathfrak{g}) = \mathcal{Z}(\mathfrak{g})$ y $dim(\mathcal{Z}(\mathfrak{g})) = 1$, esto junto con el teorema anterior prueba el resultado. $\square$

Problemas abiertos

Entre otros, se pueden proponer los siguientes problemas abiertos:

- Siguiendo un razonamiento análogo al ya utilizado para $n = 2$ y $m = 3$, obtener clasificaciones de superálgebras de Lie en dimensiones concretas.

- Determinar completamente la función nilíndice maximal $f(n, m)$ para todos los posibles valores de n y m.

- El cálculo de la dimensión de las órbitas, vía la determinación del álgebra de derivaciones, de cada una de las S.A.L. filiformes $\mathfrak{g}$ que aparece en la sección 3.3.3. Obteniéndose, en tal caso , una cota inferior de la dimensión de la componente irreducible $\overline{\mathcal{O}(\mathfrak{g})}^{\mathcal{Z}}$ de la variedad $\mathcal{N}^{n+m}$ que corresponda en cada caso.

- Completar la clasificación de las superálgebras de Lie de Heisenberg con dimension de la parte impar igual a 3. Para ello basta con finalizar la clasificación de las de invariante de Goze $(2, 1, \ldots, 1|\ 2, 1)$

- Implementar nuevos métodos [18] para el cálculo de la superálgebra de derivaciones.

- Probar o refutar, al igual que se ha hecho en esta memoria para la conjetura $\mathcal{M}^{n+m} \subset \mathcal{F}^{n+m}$, para el resto de conjeturas presentas ya en la introducción:

Conjetura 1: $\mathfrak{g} \in \mathcal{N}^{n+m}$ de invariante de Goze $(p_1, p_2, \ldots, p_k | \, q_1, q_2, \ldots, q_l)$, entonces su nilíndice será $\leq p_1 + q_1$.

Conjetura 2: $f(n,m)|_{\mathcal{F}^{n+m}} = f(n,m)|_{\mathcal{N}^{n+m}}$

Conjetura 3: $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{\bar{0}} \oplus \mathfrak{g}_{\bar{1}} \in \mathcal{M}^{n+m} \Longrightarrow \mathfrak{g}_{\bar{0}}$ filiforme.

Referencias

[1] J.M. Ancochea, J.R. Gómez, M. Goze, G. Valeiras, *Sur le composantes irréductibles de la variété des lois nilpotentes.* Jour. of Pure and App. Alg. 106, 11-22, 1996.

[2] J.M. Ancochea-Bermúdez, M. Goze, *Classification des algèbres de Lie filiformes de dimension 8.* Arch. Math., 50, 511-525, 1998.

[3] J.M. Ancochea-Bermúdez, M. Goze, *Classification des algèbres de Lie nilpotentes de dimension 7.* Arch. Math., 52:2, 175-185, 1989.

[4] G.G.A. Bäuerle, E.A. De Kerf, *Lie Algebras Part 1.* Studies in Mathematical Physics I. Elsevier, 1990.

[5] K. Bauwens, L. Le Bruyn, *Some remarks on solvable Lie superalgebras.* Jour. of Pure and App. Alg. 99, 113-134, 1995.

[6] N. Bourbaki, *Groupes et algèbres de Lie.*
Chap. I; Hermann, Paris, 1960.

[7] N. Bourbaki, *Algèbre.* Chap. II, 3. edition; Hermann, Paris, 1962.

[8] N. Bourbaki, *Algèbre.* Chap. III; Hermann, Paris, 1971.

[9] J.M. Cabezas, L.M. Camacho, J.R. Gómez, R.M. Navarro, *A class of nilpotent Lie algebras* Communications in algebra, 28:9, 4489-4499, 2000.

[10] J.M. Cabezas, J.R. Gómez, *Las álgebras de Lie* $(n-3)$*-filiformes como extensiones por derivaciones,* Extracta Mathematicae, 13:3, 383-391, 1998.

[11] J.M. Cabezas, J.R. Gómez, *$(n-4)$-filiform Lie algebras,* Comunications in Algebra, 27:10, 4803-4819, 1999.

[12] J.M. Cabezas, J.R. Gómez, A. Jiménez-Merchán, *Family of p-filiform Lie algebras,* Algebra and Operator Theory. Kluwer Academic Publishers, 93-102, 1998.

[13] L.M. Camacho, *Álgebras de Lie p-filiformes,* PhD tesis, Universidad de Sevilla, 2000.

[14] L.M. Camacho, J.R. Gómez, R.M. Navarro, *3-filiform Lie algebras of dimension 8* Ann. Math. Blaise Pascal, 6:2, 1-13, 1999.

[15] L.M. Camacho, J.R. Gómez, R.M. Navarro, *Family of laws of $(n-6)$-filiform Lie algebras,* SAGA V Meeting León, 1999.

[16] L.M. Camacho, J.R. Gómez, R.M. Navarro, *Cohomology of some Nilpotent Lie Algebras* Extracta Mathematicae, 15:1, 155-174, 2000.

[17] L.M. Camacho, J.R. Gómez, R.M. Navarro, *Quasifiliform Lie algebras of dimension 8 with minimal derived,* I Colloquium on Lie Theory and Applications. Vigo (Spain), 2000.

[18] L.M. Camacho, J.R. Gómez, R.M. Navarro, I. Rodríguez, *Effective computation of algebra of derivations of Lie algebras,* Computer Algebra in Scientific Computing CASC, Springer, 101-111 , 2000.

[19] L.M. Camacho, J.R. Gómez, R.M. Navarro, I. Rodríguez, *Mathematica and Nilpotent Lie Superalgebras,* Computer Algebra in Scientific Computing CASC, Springer, ???? , 2001.

[20] A. Cerezo, *Les algèbres de Lie nilpotentes réelles et complexes de dimension 6,* Preprint N. 27, Université de Nice, 1984.

[21] J. Dixmier, *Sur les representations unitaires des groupes de Lie nilpotents III,* Canad. J. Math., 10, 321-348, 1958.

[22] L. Corwin, Y. Ne'eman, and S. Sternberg, Rev. Mod. Phys. 47 , 573, 1975.

[23] Feigin, B.L., Fuks, D.B., *Cohomology of Lie Groups and Lie Algebras.* Itogi Nauki Tekh. Ser. Sovrem. Probl. Mat. Fundam. Napravleniya 21, 121-209. Zbl. 653.17008, 1988.

[24] M. Gilg, *Super-algèbres* . PhD thesis, Mulhouse, 2000.

[25] J.R. Gómez, A. Jiménez-Merchán and Y. Khakimdjanov, *On the variety of Nilpotent lie Algebra Laws of Dimension 11.* Rendiconti Cagliari, 66, 137-142, 1996.

[26] J.R. Gómez, A. Jiménez-Merchán and Y. Khakimdjanov, *Low-dimensional filiform Lie algebras* Jour. of Pure and App. Alg. 130, 133-158, 1998.

[27] J.R. Gómez, R.M. Navarro, *Espacios de derivaciones de álgebras de Lie con Mathematica.* Proc. of IV Encuentro de Álgebra Computacional y Aplicaciones. EACA, Sigüenza,1998.

[28] M. Goze, *Perturbations des superalgèbres de Lie.* Jour. of Geometry and Physics. 6:4, 583-593, 1989.

[29] M. Goze, You. B. Hakimjanov (Khakimdjanov), *Nilpotent Lie Algebras.* Kluwer Academic Publishers, 1996.

[30] A. Hegazi, *Classification of nilpotent Lie superalgebras of dimension five. I.* International Journal of Theoretical Physics, 38:6, 1735-1739, 1999.

[31] James E. Humphreys, *Introduction to Lie Algebras and Representation Theory.* 2. edition, Springer-Verlag New York, Heidelberg, Berlin, 1972.

[32] N. Jacobson, *Lie algebras.* Interscience Publishers, Wiley, New York, 1962.

[33] V.G. Kac, *Lie Superalgebras.* Advances in Mathematics 26, 8-96, 1977.

[34] B. Kostant, *Graded manifolds, graded Lie theory, and prequantization.* Lecture Notes in Math. 570, Springer-Verlag, 177-306, 1977.

[35] D.A. Leites, *Introduction to the theory of Supermanifolds.* Uspekhi Mat. Nauk 35:1, 3-57, 1980.

[36] D.A. Leites, *Lie superalgebras.* JOSMAR, 30:6, 2481-2513, 1984.

[37] D.A. Leites, *Towards classification of simple Lie superalgebras.* In: Chan L-L., Nahm W. (eds.) Differential geometric methods in theorical physics (Davis, CA, 1988) NATO Adv. Sci. Inst. Ser. B Phys., 245, Plenum, New York, 633-651, 1990.

[38] V. Morozov, *Classification of nilpotent Lie algebras of sixth order.* Izv. Vysch. U. Zaved. Mat., 4:5, 161-171, 1958.

[39] O.A. Nielsen, *Unitary representations and coadjoint orbits of low-dimensional nilpotent Lie groups.* Queen's Papers in Pure and Appl. Math., 63, 1983.

[40] A.L. Onischik and E.B. Vinberg, *Lie Groups and Algebraic Groups.* Springer New York, Heidelberg,(1990). Russian version: Seminar on Lie groups and algebraic groups. Moscow: Nauka 1988. Zbl. 648.22009, Zbl. 722.22004.

[41] A.L. Onischik and E.B. Vinberg (Eds), *Lie Groups and Lie Algebras II. Discrete Subgroups of Lie Groups and Cohomologies of Lie Groups and Lie Algebras.* Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2000.

[42] A.L. Onischik and E.B. Vinberg (Eds), *Lie Groups and Lie Algebras III. Structure of Lie Groups and Lie Algebras.* Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1994.

[43] G. Rauch, *Effacement et déformation.* Ann. Ins. Fourier 22, 239-269, 1972. Zbl. 219,117.

[44] M. Romdhani, *Classification of real and complex nilpotent Lie algebras of dimension 7.* Linear and Multilinear Algebra, 24, 167-189, 1989.

[45] D.H. Sattinger, O.L. Weaver, *Lie Groups and Algebras with Applications to Physics, Geometry, and Mechanics.* Springer-Verlag New York Inc., 1986.

[46] M. Scheunert, *The Theory of Lie Superálgebras.* Lecture Notes in Math. 716, 1979.

[47] C. Seeley, *Seven-dimensional nilpotent Lie algebras over the complex numbers*. PhD. Tesis, Chicago, 1988.

[48] M. Vergne, *Variété des algèbres de Lie nilpotentes*. PhD. Tesis, París, 1966.

[49] G. Vranceanu, *Classificarea grupurilor lui Lie de rang zero*. Acad. Rep. Pop. Rom., Stud. Cerc. Mat., 1, 40-86, 1950.