R.25048 LBS 1313539 C 043/334

UNIVERSIDAD DE SEVILLA
Departamento de Matemática Aplicada I

UNIVERSIDAD DE SEVILLA
FACULTAD DE MATEMÁTICAS
BIBLIOTECA

Operaciones cohomológicas: Un enfoque combinatorial

UNIVERSIDAD DE SEVILLA
NEGOCIADO DE TESIS
Queda registrado este Título de Doctor al folio 82 número 113 del libro correspondiente.
Sevilla, 9 MAR. 2000
El Jefe del Negociado,

Memoria presentada por Rocío González Díaz para optar al grado de Doctora en Matemáticas por la Universidad de Sevilla

V°. B°.
del Director,

Fdo. Pedro Real Jurado, Profesor Titular del Departamento de Matemática Aplicada I de la Universidad de Sevilla.

Sevilla, marzo de 2000.

a la Chumba y al Minino

Agradecimientos

Gracias a todos los que me habéis ayudado en la realización de este trabajo.

Gracias grupo Chata: Pedro, Víctor, Loli, Mariajo, Andrés, Bea.

Gracias Mate–euitos: Isabel, Clari, Carlos, Carmen.

Gracias Mate–informáticos.

Gracias Felipe.

Gracias Alberto.

Gracias Juanma.

Gracias Denisee.

Gracias familia.

Luis, un beso.

Resumen

En esta memoria se establece un enfoque puramente combinatorio de las operaciones cohomológicas de Steenrod y Adem a nivel de cociclos. La principal motivación para este estudio es el intentar cubrir la falta de información que hay actualmente en la literatura sobre las estructuras combinatorias subyacentes en estas operaciones cohomológicas.

Trabajando en el contexto de la Topología Simplicial y haciendo uso de la Teoría de Perturbación Homológica, se diseña una maquinaria algebro-combinatorial para la generación de operaciones cohomológicas a partir de una contracción Eilenberg–Zilber. El resultado de esta técnica es la descripción simplicial normalizada de morfismos que operan a nivel de cociclos y que determinan estas operaciones. Finalmente, esta formulación explícita permite considerar este campo desde una óptica algorítmica.

Este trabajo ha sido parcialmente subvencionado por los proyectos de investigación de la DGES del Ministerio de Educación y Ciencia, PB97–1025–C02–02 y PB98–1621–C02–02 titulados ambos "Cálculo simbólico en Topología Algebraica y Álgebra Homológica: algoritmos y aplicaciones".

Introducción

A grandes rasgos, podemos decir que la Topología provee un lenguaje formal para las matemáticas cualitativas mientras que la Geometría lo hace, principalmente, para las cuantitativas. En Topología estudiamos relaciones de proximidad y cercanía sin usar distancias. Por ejemplo, una función entre espacios topológicos se llama continua si preserva la noción de proximidad. En Álgebra estudiamos aplicaciones que preservan estructuras multiplicativas. Más aún, unas de las más amplias áreas de crecimiento en matemáticas puras en el siglo XX ha sido la solución de problemas topológicos reduciéndolos a formas más simples por medio de grupos. Esta teoría se denomina Topología Algebraica. A principios del siglo XX, los teoremas en Topología Algebraica mostraban casi exclusivamente su naturaleza puramente cualitativa, es decir, afirmaban la existencia (o no) de objetos sin dar prácticamente ningún método para determinarlos explícitamente. Este panorama ha cambiado bastante en estos últimos 30 años pues se ha intentado establecer un marco totalmente algorítmico para los problemas de cálculo de invariantes en Topología Algebraica (véase, por ejemplo, [Ser87, Sch91]). En este sentido, el objetivo de este trabajo ha sido aportar nuestro granito de arena, dando métodos algorítmicos para calcular elementos de la cohomología de un espacio.

Pero antes de nada, situemos el problema que nos planteamos dentro del contexto apropiado de manera gradual. Un problema estándar en Topología es el de la clasificación de espacios salvo homeomorfismos (aplicaciones biyectivas, continuas y de inversa continua). Si existe un homeomorfismo entre dos espacios, se dirá que son topológicamente equivalentes. Esta tarea de clasificación se reveló rápidamente desesperanzadora. Motivado por esta imposibilidad, surge la Topología Algebraica, cuya filosofía consiste en asociar a los espacios topológicos objetos que son invariantes por homeomorfismos. Los primeros objetos que se asociaron a los espacios fueron números, como por ejemplo la característica de Euler, los números de Betti,...

Poincaré fue indudablemente el primer matemático que en forma efectiva logró asociar objetos algebraicos a objetos geométricos, de tal modo que propiedades geométricas se expresan por medio del objeto algebraico considerado. Así, en su estudio de variedades introdujo unos invariantes topológicos llamados grupos de homología. Los grupos de homología de una variedad V son una familia de grupos abelianos $\{H_q(V)\}_{q\geq 0}$ graduados en los enteros no negativos. Por ejemplo, el grupo $H_0(V)$ nos da información del número de componentes conexas de la variedad y $H_1(V)$ nos la da acerca del número de agujeros. Por tanto, los grupos de homología son capaces, por ejemplo, de distinguir una esfera de un toro. En general, los grupos de homología de una variedad se extienden a un espacio topológico y el grupo de coeficientes usados para definirlos puede considerarse un grupo abeliano arbitrario.

En forma análoga a la homología, se introducen unos nuevos invariantes que son los grupos de cohomología de un espacio X sobre un grupo G. Estos grupos abelianos se denotan por $H^q(X;G)$, para todo entero no negativo q y donde G es un grupo abeliano. Cada $H^q(X;G)$ es un grupo cociente, siendo, por tanto, sus elementos clases. Cada uno de los elementos que forman parte en una clase de cohomología constituye un cociclo representativo de dicha clase. Estos últimos grupos fueron definidos mucho más tarde que los grupos de homología. La razón no es difícil de comprender, ya que los grupos de cohomología son, geométricamente hablando, menos naturales que los grupos de homología, estando sus orígenes en el Álgebra más que en la Geometría; en un cierto sentido algebraico, ellos representan un concepto "dual" al de los grupos de homología. Es bien sabido que si los grupos de homología no son capaces de distinguir dos espacios, entonces los grupos de cohomología tampoco lo serán. Quizás la respuesta más concluyente ante la pregunta natural de porqué trabajar con cohomología y no simplemente con homología es que los grupos de cohomología tienen una estructura algebraica adicional: la de anillo, y este anillo permitirá distinguir espacios cuando los grupos de homología no puedan. La operación de multiplicación en este anillo se denomina producto cup y la descripción explícita de sus fórmulas fue dada por Čech y Whitney en los años treinta. Parecía bastante sorprendente que la "dualidad" algebraica que presentaban la homología y la cohomología se rompiera y que la estructura de anillo de la cohomología apareciera como un invariante más potente que la simple homología para discriminar dos espacios no homeomorfos.

El problema de nuevo aparece si nos encontramos con dos espacios con grupos de cohomología isomorfos y con un mismo comportamiento del producto cup en ambos anillos.

En [Ste47], Steenrod introdujo las operaciones cohomológicas, que son invariantes más finos que la cohomología o el producto cup. Steenrod fue capaz de definir tales operaciones de un grupo de cohomología en otro, de manera que generalizaba el producto cup.

Históricamente, este último concepto apareció ante el problema de clasificación de aplicaciones de un espacio de dimensión $n+1$ en la esfera S^n de dimensión n, para $n \geq 3$. Que este problema era de considerable complejidad lo evidenciaba el hecho de que dos insignes matemáticos de la época, Freudenthal y Pontrjagin, anunciaran soluciones del mismo que, más tarde, se descubrieron incorrectas.

Steenrod en [Ste47] dio solución a este problema trabajando con complejos simpliciales finitos e introduciendo una familia de operaciones Sq^i, llamadas posteriormente cuadrados de Steenrod, en el grupo de cohomología. En su trabajo, las descripciones de estas operaciones eran difíciles de manejar, como él mismo apuntó. En 1949, trabajando con la cohomología de Alexander–Spanier de un espacio, H. Cartan en [Car50] fue capaz de dar una presentación más simple de la construcción de Steenrod. Steenrod en [Ste52] anunció el descubrimiento de nuevas operaciones cohomológicas, las ahora llamadas potencias reducidas de Steenrod. Un hecho fundamental para que se produjera este descubrimiento fue la introducción de una nueva definición de los Sq^i haciendo uso de la definición de Lefschetz del producto cup. En esta definición, la conmutatividad fuertemente homotópica (medida en términos de ciertas aplicaciones $D_i : C_*^N(X) \to C_*^N(X) \otimes C_*^N(X)$ con $i \geq 0$) del producto cup juega un papel primordial. Sin embargo, no fue dada ninguna fórmula explícita general de las D_i, ya que Steenrod recurrió a la teoría de los modelos acíclicos [EM53a] para garantizar la existencia de estas aplicaciones. A grandes rasgos, podemos decir el método de los modelos acíclicos establece la existencia de morfismos y homotopías de cadenas dimensión a dimensión, usando el hecho de que los grupos de homología de ciertos "modelos" son cero. En el contexto de la Topología Simplicial este método puede considerarse un proceso constructivo, pero se obtienen así fórmulas con muy alto grado de recursividad para las D_i.

J. Adem, en [Ade52], usando de nuevo el método de los modelos acíclicos, dio un completo conjunto de relaciones entre los cuadrados de Steenrod. En la misma época, Serre en [Ser53] estableció una estrechísima relación entre los Sq^i y los grupos de cohomología de los espacios de Eilenberg–Mac Lane (ciertos espacios "primos" en la teoría de homotopía).

Es obvio que la composición y suma de cuadrados de Steenrod es de nuevo un cuadrado de Steenrod. En este sentido, dichas operaciones generan un álgebra de operaciones cohomológicas (donde el producto es la composición) llamada álgebra de Steenrod módulo 2. Esta álgebra ha sido ya estudiada en profundidad (ver [Woo98] y [Die89] para una lista de resultados no exhaustiva).

Sin embargo, en la literatura, las estructuras combinatoriales subyacentes en la definición de estas operaciones cohomológicas sólo aparece cubierta superficialmente por el método de los modelos acíclicos. En este trabajo pretendemos cubrir este vacío existente en el estudio de esta operaciones, creando una herramienta computacional que nos permita no sólo llegar a una descripción explícita de los morfismos D_i para los cuadrados y potencias reducidas de Steenrod, sino también establecer una maquinaria algebro-combinatoria general que produzca formulaciones simpliciales "económicas" de un gran número de operaciones cohomológicas. Asimismo, este profundo análisis combinatorial nos proporciona también la posibilidad de diseñar algoritmos para el cálculo de cociclos (vía estas fórmulas).

Concretando, el problema al que nos enfrentamos cuando comenzamos nuestro trabajo fue el siguiente:

> ¿Existe un algoritmo general y "tratable", computacionalmente hablando, cuyo dato de entrada sea un poliedro X, un cociclo c representativo de una clase de cohomología y un entero i; y cuyo dato de salida sea un cociclo representativo del cuadrado de Steenrod $Sq^i(c)$?

Es necesario precisar que **el algoritmo propósito de la memoria se diseñará a nivel de cociclos y no a nivel de clases de cohomológía**. De esta manera, cuando hablemos de calcular la fórmula explícita de una operación cohomológica, lo que querremos decir es que pretendemos obtener una expresión combinatorial de un cociclo representante de una clase de cohomología.

Evidentemente, como evitamos el aspecto cohomológico en este procedimiento, en principio no habrá ninguna respuesta a la pregunta de si un cociclo obtenido mediante una operación cohomológica es un representante de la clase de cohomología nula o no. No obstante, el paso hacia la cohomología en el paso finito o incluso localmente finito (finito en cada grado), se reduce a un problema de Algebra Lineal. En cualquier caso, este método nos provee de un primer algoritmo computacional general para detectar cociclos representantes de clases de cohomología posiblemente no nulas. Además, este algoritmo puede ser sustancialmente mejorado usando propiedades algebraicas bien conocidas de estas operaciones cohomológicas y técnicas de computación homológica basados en contracciones.

Para intentar resolver el problema que nos planteamos, nos movemos dentro del área de la Topología Simplicial [May67], donde los objetos básicos son conjuntos simpliciales. En general, un conjunto simplicial puede ser considerado como una generalización algebraica de un poliedro triangulado, aunque el primero conlleva una estructura combinatorial más rígida que el segundo. Más concretamente, los conjuntos simpliciales son conjuntos graduados dotados de dos tipos de operadores: de cara y degeneración satisfaciendo adecuadas relaciones de conmutatividad.

Debido a que los cuadrados de Steenrod pueden ser definidos usando los morfismos D_i, el problema que nos planteamos se traduce a encontrar una fórmula explícita de tales morfismos.

Trabajando dentro del campo de la Topología Simplicial, Real en [Rea96] encuentra esta formulación explícita en términos de los morfismos componentes (AW, EML, SHI) de una contracción Eilenberg–Zilber, un tipo especial de equivalencia de homotopía. Una idea vaga de cómo obtener esta formulación es construyendo un complejo, haciendo uso de los siguientes hechos: primero, la idempotencia del morfismo que transpone el orden de los elementos de $C_*^N(X)$ (el complejo canónicamente asociado a un conjunto simplicial X); y segundo, de refinadas técnicas de la Teoría de Perturbación Homológica [Shi62, Bro65, GLS91]. Esta idea no aparece en el artículo debido a que el complejo que se construye es relativamente "grande" y es más sencillo demostrar que las fórmulas que se obtienen determinan morfismos que miden la conmutatividad fuertemente homotópica del producto cup.

En esta descripción se veían involucrados los morfismos AW y SHI. La fórmula explícita de este último morfismo fue descubierta recientemente por Francis Sergeraert y Julio Rubio [Rub91]. De esta forma, obtenemos una formulación combinatorial explícita de los D_i. El problema es que el morfismo SHI viene determinado por "shuffles" (un tipo especial de permutación) de operadores de degeneración y, por tanto, el número de sumandos involucrados en su fórmula es muy elevado y consecuentemente lo es en la especificación de los D_i.

A causa de esto, la idea de simplificar estas fórmulas aparece de manera natural. Esta simplificación o normalización está basada en el hecho de que cualquier composición de operadores de cara y degeneración de un conjunto simplicial X puede ser expresado de manera "canónica". Trabajando de esta forma, obtenemos una expresión combinatorial de todos los morfismos D_i en términos únicamente de operadores de cara de un conjunto simplicial X.

Teniendo en cuenta el trabajo de Steenrod en [Ste47], nos atrevemos a decir que aquí redescubrimos la antigua definición dada para sus operaciones cohomológicas y la clarificamos en un contexto combinatorial general. Además, en [Ste47] sólo aparece la expresión combinatorial del morfismo D_1.

Posteriormente, haciendo uso de un esquema análogo al hecho en [Rea96], establecemos fórmulas de las potencias reducidas de Steenrod, $\mathcal{P}_i^p : H^q(X; \mathbb{F}_p) \to H^{pq-i}(X; \mathbb{F}_p)$, siendo p un primo impar; que son una generalización de los cuadrados de Steenrod en el anillo $\mathbb{F}_p$, en términos de los morfismos integrantes de una contracción Eilenberg–Zilber de $C_*^N(X \times \overset{p \text{ veces}}{\cdots} \times X)$ hacia $C_*^N(X) \otimes \overset{p \text{ veces}}{\cdots} \otimes C_*^N(X)$. En este ámbito, trabajar con las potencias reducidas cíclicas de Steenrod no supondría mayor esfuerzo.

A partir de este método general, continuamos el trabajo de normalización para potencias reducidas de Steenrod y presentamos una formulación combinatorial explícita para las operaciones $\mathcal{P}_i^p$, con $i = 1, 2$.

Ahora bien, la siguiente pregunta surge naturalmente:

> ¿Es posible expresar cualquier operación cohomológica vía una contracción Eilenberg–Zilber?

Para poder atacar este problema tenemos que introducirnos en la Teoría de Perturbación Homológica [Shi62, Bro65, GLS91].

Dentro de este contexto desarrollamos una técnica que permite "ver" todo el conjunto de las operaciones cohomológicas de Steenrod en forma de un "enorme" producto cup generalizado.

En [Hes99] se explica una versión simplificada del trabajo de May en términos de "poligebras" y se da un esquema de cómo derivar, por perturbación, operaciones de Steenrod en la sucesión espectral de Serre.

En nuestra aproximación no usamos poligebras, pero sí fibrados algebraicos, tomando como "base" el complejo de cocadenas normalizado del espacio clasificante de un grupo cíclico finito. El motivo de hacer uso de esta aproximación es seguir más de cerca el trabajo original de Steenrod y Adem. Más concretamente, usando técnicas de perturbación homológicas redescubrimos las fórmulas de las homotopías de Steenrod ya dadas anteriormente, con un enfoque mucho más global.

Es más, esta línea de acción posibilita atacar operaciones cohomológicas más generales, como las operaciones cohomológicas secundarias de Adem [Ade52, Ade58, Ade62]. Al mismo tiempo, esta maquinaria algebro–geométrica de generación de operaciones cohomológicas a nivel de cociclos, permite considerar este campo desde una perspectiva algorítmica. En este sentido, diseñamos algoritmos que calculan cociclos a partir de otros en complejos simpliciales, vía esta formulación explícita. Además, se realiza un primer estudio de su complejidad en términos de los operadores de cara involucrados.

En lo concerniente a aplicaciones prácticas de este trabajo, aparecen varias interacciones con campos tan dispares como la Topología Digital [ADFQ97, DFM93] y diseños y códigos combinatoriales [HL93].

En la teoría de diseño combinatorial, hay un interés reciente por la cohomología. La obtención de algoritmos eficientes para calcular n–cociclos en grupos representaría un resultado de gran utilidad en este campo. En lo concerniente a 2–cociclos, varios métodos para calcular cociclos representando clases de cohomología 2–dimensionales de grupos finitos han sido diseñados recientemente [EGL97, HL93, Lam97, AAFR99]. Sin embargo, en lo que se refiere a algoritmos para el cálculo de cociclos en dimensión superior, hay muy poco hecho en la literatura [AAFR99, GL00]. En la última sección del cuarto capítulo de esta tesis, esbozamos una primera aproximación al cálculo de n–cociclos en grupos finitos vía operaciones cohomológicas.

En otro ámbito, en el diseño asistido por ordenador (CAD) muchos diseños geométricos son triangulaciones, por ejemplo, los métodos de los elementos finitos usan triangulaciones 2–D y 3–D de sólidos. Las superficies paramétricas triangulables como las superficies de Bézier son ampliamente usadas en sistemas de modelización geométrica. En el diseño geométrico frecuentemente se construyen triangulaciones (bien usando el ordenador o bien a mano) y se modifican gradualmente en el proceso de diseño. Estas modificaciones pueden acarrear la adición de nuevos triángulos y tetraedros identificando lados, vértices, etc. Después de modificar un diseño deseamos saber si su topología ha sido alterada. Esta cuestión es muy difícil de solventar en la mayoría de los casos. Una forma de atacar este problema es buscando invariantes topológicos computables [DC91], entre los cuales se encuentran las operaciones cohomológicas. Como ya hemos indicado, un primer estudio de la calculabilidad de las operaciones de Steenrod en complejos simpliciales, se realiza en el último capítulo de esta memoria.

En el primer capítulo, damos todos los preliminares simpliciales y algebraicos que creemos hacen falta para la comprensión de este trabajo. Dedicamos una sección a varias definiciones clásicas de operaciones cohomológicas de Steenrod.

En un segundo capítulo, explicamos el trabajo realizado por Real en [Rea96] para productos i–cup. En una segunda parte, derivamos una expresión combinatorial normalizada para estos productos y para cuadrados de Steenrod a nivel de cociclos. En una tercera parte, generalizamos el trabajo [Rea96] a potencias reducidas de Steenrod. Y por último, en una cuarta sección, realizamos un detallado análisis combinatorial de las primeras potencias reducidas de Steenrod a nivel de cociclos.

En el tercer capítulo, enfocamos el problema de las operaciones cohomológicas usando técnicas de la Teoría de Perturbación Homológica y, a continuación, damos un método constructivo para obtener las potencias reducidas de Steenrod. Creemos que este método se puede generalizar al resto de las operaciones cohomológicas. Por ejemplo, siguiendo el mismo esquema, conseguimos obtener la fórmula de la operación cohomológica secundaria de Adem E_3, para, posteriormente, expresarla en términos de operadores de cara usando las técnicas de normalización ya estudiadas.

En el último capítulo, estudiamos la complejidad de las fórmulas combinatoriales calculadas en el segundo capítulo y diseñamos algoritmos para el cálculo de cociclos en complejos simpliciales.

Mencionemos que algunos de los temas que aquí se tratan han sido ya anteriormente presentados en foros especializados en forma de comunicaciones nacionales [GR98c, GR98d, GR99f] e internacionales [AAGR98, AGJR98, GR98a, GR98e, GR99c, GR99d, GR99e], y artículos nacionales [GR98b] e internacionales [GR99a, GR99b].

Contenido

1 Preliminares xv

1.1 Topología Simplicial 1

1.2 Álgebra Homológica 5

1.3 El concepto de contracción 22

1.4 Operaciones cohomológicas 26

2 Un método combinatorial para determinar operaciones de Steenrod 31

2.1 Determinación de una "mejor aproximación diagonal" 34

2.2 Una descripción combinatorial explícita de los productos i–cup 38

2.2.1 Demostración del teorema principal 41

2.3 Generalización a potencias reducidas de Steenrod 47

2.4 Mejora de las técnicas de "normalización" de fórmulas combinatoriales . 52

2.4.1 Fórmulas de los productos i–cup 56

2.4.2 Fórmula de la potencia reducida $\mathcal{P}_1^p$ 58

2.4.3 Generalización al resto de las potencias reducidas de Steenrod . . 63

3 TPH y operaciones cohomológicas 73

3.1 Teoría de Perturbación Homológica . . . 76

3.2 TPH y operaciones de Steenrod . . . 78

3.3 Operaciones cohomológicas secundarias . . . 83

3.4 Cuestiones relacionadas . . . 96

3.4.1 Operaciones de Steenrod y espacios de Eilenberg–Mac Lane . . . 96

3.4.2 El concepto de álgebra fuertemente homotópica de Munkholm . . 99

4 Diseño de algoritmos de cálculo de cociclos 101

4.1 Complejidad de cálculo de las fórmulas combinatoriales . . . 103

4.1.1 Complejidad de cálculo de los productos i–cup . . . 104

4.1.2 Complejidad de cálculo de $\mathcal{P}_1^p$ . . . 115

4.2 Algoritmos en complejos simpliciales . . . 118

4.3 Cuestiones relacionadas . . . 125

Capítulo 1.

Preliminares

Capítulo 1.

Preliminares

Este capítulo se dedicará a dar las definiciones generales y establecer la notación que se usará a lo largo de esta memoria.

Se divide el capítulo en tres secciones. En la primera, daremos conceptos básicos de la Topología Simplicial que nos va a permitir considerar espacios topológicos dados como objetos combinatoriales (conjuntos simpliciales), con una estructura geométrica susceptible de ser tratada de modo computacional. En la segunda, abordaremos el campo del Álgebra Homológica que aportará las estructuras algebraicas necesarias para poder afrontar los problemas que pretendemos resolver. Estudiaremos los conceptos de DG–módulo, álgebra y coálgebra, así como las relaciones existentes entre todas estas estructuras. Por último, en la tercera sección, definimos el concepto de operación cohomológica y damos dos definiciones, una axiomática y otra constructiva, de una operación cohomológica particular: los cuadrados de Steenrod.

La práctica totalidad de estos preliminares simpliciales y algebraicos se pueden encontrar, por ejemplo, en [May67, McL75, Wei94].

1.1 Topología Simplicial

De la necesidad de representar los espacios topológicos por modelos combinatoriales que nos faciliten su manipulación surge la Topología Simplicial. A continuación damos una colección de definiciones y resultados básicos de la Topología simplicial, que hemos extraídos de los textos [Cur71] y [May67].

Un *conjunto simplicial* X es un conjunto graduado con índices en los enteros no negativos, $X = \{X_0, X_1, \ldots, X_n, \ldots\}$, junto con dos familias de funciones

$$\partial_i : X_q \to X_{q-1} \text{ y } s_i : X_q \to X_{q+1}, \qquad 0 \le i \le q;$$

verificándose las identidades:

$$\partial_i \partial_j = \partial_{j-1} \partial_i, \text{ si } i < j,$$

$$s_i s_j = s_{j+1} s_i, \text{ si } i \le j,$$

$$\partial_i s_j = s_{j-1} \partial_i, \text{ si } i < j,$$

$$\partial_i s_j = s_j \partial_{i-1}, \text{ si } i > j+1,$$

$$\partial_j s_j = 1_X = \partial_{j+1} s_j.$$

Los elementos de X_q se llaman *q-símplices*. Las aplicaciones ∂_i y s_i se denominan *operadores de cara* y *degeneración*, respectivamente. Un símplice x se dice *degenerado* cuando $x = s_i z$, para algún símplice z y operador de degeneración s_i; en caso contrario, el símplice x se denomina *no degenerado*.

Por ejemplo, un triángulo sólido con tres vértices (0), (1), (2), tres lados $(0,1)$, $(0,2)$, $(1,2)$ y una cara $(0,1,2)$ puede ser descrito como un conjunto simplicial $T = \{T_n, \partial_i, s_i\}$, donde

- El conjunto de los n-símplices T_n es el conjunto de las $(n+1)$-secuencias crecientes $(a_0, \ldots, a_n)$ donde $0 \le a_0 \le \ldots \le a_n \le 2$, $a_i \in \{0,1,2\}$.
- La i-ésima cara $\partial_i \sigma$ del n-símplice $\sigma = (a_0, \ldots, a_n)$ se obtiene eliminando el i-ésimo vértice: $\partial_i(\sigma) = (a_0, \ldots, a_{i-1}, a_{i+1}, \ldots, a_n)$.
- Por contra, la i-ésima degeneración del mismo símplice se obtiene duplicando el i-ésimo vértice: $s_i(\sigma) = (a_0, \ldots, a_i, a_i, \ldots, a_n)$.

Es inmediato observar que en el ejemplo anterior, un símplice $\sigma = (a_0, \ldots, a_n)$ es no degenerado si, y sólo si, $0 \le a_0 < \ldots < a_n \le 2$.

Sean i, j don enteros no negativos. Denotamos por $\partial_i \cdots \partial_j$ (resp. $s_i \cdots s_j$) a la composición de operadores de cara consecutivos de ∂_i a ∂_j (resp. operadores de degeneración de s_i a s_j).

El siguiente lema será esencial en muchas demostraciones a lo largo de este trabajo.

Lema 1.1.1 *[May67] Toda composición $\mu : X_m \to X_n$ de operadores de cara y degeneración de un conjunto simplicial X se puede escribir de manera única en la* forma normalizada*:*

$$s_{j_t} \cdots s_{j_1} \partial_{i_1} \cdots \partial_{i_s},$$

donde $n > j_t > \cdots > j_1 \geq 0$, $m \geq i_s > \cdots > i_1 \geq 0$ *y* $n - t + s = m$.

Recordamos someramente la noción de categoría. Una *categoría* $\mathcal{C}$ es una terna constituida por:

- Una clase de objetos, denotada $\mathrm{Obj}(\mathcal{C})$.
- Una familia de conjuntos disjuntos, $Hom(A, B)$, uno por cada par de objetos $A, B \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$; conjuntos cuyos elementos denominamos morfismos.
- Un conjunto de aplicaciones, de modo que sobre cada terna de objetos A, B, C de $(\mathcal{C})$, resulta:

$$\begin{array}{rcl} Hom(B,C) \times Hom(A,B) & \to & Hom(A,C), \\ (\alpha, \beta) & \mapsto & \alpha\beta; \end{array}$$

verificando:

1. Para cada objeto $A \in \mathcal{C}$, existe el morfismo identidad $1_A \in Hom(A, A)$, de modo que para todo morfismo $\alpha \in Hom(A, B)$, se tiene que $\alpha 1_A = \alpha = 1_B \alpha$.
2. La ley de asociatividad de la composición: dados tres morfismos $\alpha \in Hom(C, D)$, $\beta \in Hom(B, C)$ y $\gamma \in Hom(A, B)$, se tiene que $\alpha(\beta\gamma) = (\alpha\beta)\gamma$.

Ejemplos de categorías los encontramos en todas las ramas de las matemáticas: la categoría de los conjuntos y aplicaciones entre conjuntos, la categoría de los grupos y homomorfismos de grupos, la categoría formada por los módulos y homomorfismos de módulos de un anillo dado, la categoría de los espacios topológicos y las aplicaciones continuas entre ellos,... Nosotros centraremos nuestra atención en los *objetos simpliciales* de las categorías anteriormente citadas. Así pues:

Sea X un conjunto simplicial y $\mathcal{C}$ una categoría. Si cada X_n y cada operador ∂_i y s_j están en la categoría $\mathcal{C}$, entonces X se denomina *objeto simplicial sobre* $\mathcal{C}$. De forma análoga, definimos el concepto de *morfismo simplicial* entre objetos simpliciales de $\mathcal{C}$. Si X e Y son ambos objetos simpliciales sobre $\mathcal{C}$ y $f : X \to Y$ es un morfismo entre conjuntos simpliciales, con cada f_n en $\mathcal{C}$; entonces f se denomina *morfismo simplicial sobre* $\mathcal{C}$.

Podemos hablar de módulos simpliciales y de morfismos entre módulos simpliciales, atendiendo a la categoría de los módulos y de los morfismos de módulos sobre un anillo dado. Otros ejemplos son los de Λ–álgebra simplicial y grupo simplicial, atendiendo a las categorías correspondientes.

Por ejemplo, si π es un grupo, existe un grupo simplicial asociado a él (denotado por π para simplificar) tal que $\pi_n = \pi$ y todos los operadores cara y degeneración son la identidad.

Una clase interesantes de conjuntos simpliciales son los conjuntos simpliciales con punto base.

Un *punto base* $*$ en un conjunto simplicial X es el subconjunto simplicial de X constituido por un elemento $*$ de X_0 y todas sus degeneraciones. De no haber lugar a confusión, se identificará el punto base con el elemento $*$ correspondiente de X_0.

Un *conjunto simplicial con punto base (o punteado)*, es un par $(X, *)$, donde X es un conjunto simplicial y $*$ es un punto base en X.

El concepto de conjunto simplicial con punto base nos dice que estamos destacando un 0–símplice sobre los demás. Por ejemplo, consideraremos a un grupo simplicial como conjunto simplicial punteado, con punto base el elemento neutro e_0 en dimensión cero; obsérvese que las degeneraciones de e_0 son los elementos neutros en los grados correspondientes, al ser, en este caso, homomorfismos de grupos los operadores s_i.

Dados dos conjuntos simpliciales X e Y, definimos el *producto simplicial* de ambos, $X \times Y$, de modo que en cada grado q, $(X \times Y)_q$ es el producto cartesiano $X_q \times Y_q$; viniendo dados los homomorfismos ∂_i y s_j por las expresiones:

$$\partial_i(a \times b) = \partial_i a \times \partial_i b, \quad s_j(a \times b) = s_j a \times s_j b,$$

con $a \in X_q$, $b \in Y_q$, $0 \leq i, j \leq q$. El producto simplicial $X \times \overset{n \text{ veces}}{\cdots} \times X$ será denotado por $X^{\times n}$.

Definamos el espacio clasificante de un grupo simplicial [May67, pp. 87–88]. Dado un grupo simplicial $(G,\cdot)$ no necesariamente conmutativo, el *espacio clasificante* de G, $\bar{W}(G)$, es el conjunto simplicial definido por:

$$\bar{W}_0(G) = (\,).$$

Para cada entero $n > 0$, se define

$$\bar{W}_n(G) = G_{n-1} \times G_{n-2} \times \cdots \times G_0.$$

Escribiremos los elementos de $\bar{W}_n(G)$ de la forma $(g_{n-1}, g_{n-2}, \ldots, g_0)$, $\quad g_i \in G_i$. Se definen los operadores de cara y degeneración en $\bar{W}(G)$ como sigue:

$$\begin{aligned}
&s_0((\,)) = (e_0),\\
&\partial_i(g_0) = (\,) \qquad \text{si } i = 0 \text{ ó } 1,\\
&\partial_0(g_n, g_{n-1}, \ldots, g_0) = (g_{n-1}, \ldots, g_0);\\
&\partial_{i+1}(g_n, \ldots, g_{n-i+1}, g_{n-i}, g_{n-i-1}, g_{n-i-2}, \ldots, g_0)\\
&\qquad\qquad = (\partial_i g_n, \ldots, \partial_1 g_{n-i+1}, g_{n-i-1} \cdot \partial_0 g_{n-i}, g_{n-i-2}, \ldots, g_0);\\
&s_0(g_{n-1}, \ldots, g_0) = (e_n, g_{n-1}, \ldots, g_0);\\
&s_{i+1}(g_{n-1}, \ldots, g_{n-i}, g_{n-i-1}, \ldots, g_0) = (s_i g_{n-1}, \ldots, s_0 g_{n-i}, e_{n-i}, g_{n-i-1}, \ldots, g_0).
\end{aligned}$$

donde e_i denota el elemento neutro de G en grado i.

Notemos que el conjunto simplicial $\bar{W}(G)$ es reducido.

Si G es un grupo simplicial conmutativo, entonces $\bar{W}(G)$ será también un grupo simplicial conmutativo con el producto:

$$(g_{n-1}, \ldots, g_0)(g'_{n-1}, \ldots, g'_0) = (g_{n-1} \cdot g'_{n-1}, \ldots, g_0 \cdot g'_0).$$

1.2 Álgebra Homológica

A lo largo de esta sección vamos a recopilar definiciones y enunciados que nos permitan adentrarnos en el estudio de las contracciones y perturbaciones homológicas. Todos estos resultados se pueden encontrar en los textos [Car56], [CE56], [Mac63], [HMS74] y [Wei94], entre otros.

En la teoría de módulos es indispensable fijar un anillo base; suele ser costumbre trabajar con un anillo conmutativo con elemento unidad distinto del elemento neutro (es decir, con $1 \neq 0$). En el desarrollo de nuestra memoria, asumimos este hecho y notamos por Λ a un anillo conmutativo con elemento unidad no nulo.

Un Λ*–módulo* M (por la izquierda) es un grupo abeliano aditivo, junto con una aplicación $p : \Lambda \times M \to M$, que se escribe $p(\lambda, m) = \lambda\, m$, tal que

$$\begin{aligned}(\lambda + \lambda')\, m &= \lambda\, m + \lambda\, m', \quad (\lambda\, \lambda')\, m = \lambda\, (\lambda'\, m),\\ \lambda\, (m + m') &= \lambda\, m + \lambda\, m', \quad 1\, m = m.\end{aligned}$$

De forma análoga, se definirán los Λ–módulos por la derecha. A partir de ahora, hablaremos de Λ–módulos sin precisar si son por la izquierda o por la derecha, salvo en los lugares en que puedan producirse confusiones.

El morfismo identidad de un módulo M se denotará por 1_M (a veces simplemente por 1 si en el contexto no hay posibilidad de confusión). Si $f : M \to M$ es un morfismo de módulos y n un entero positivo, la composición $f \circ \overset{n \text{ veces}}{\cdots} \circ f$ será denotada por f^n. Asimismo, a la hora de aligerar la notación, si f y g son dos morfismos que admiten ser compuestos, notaremos tal composición simplemente por fg. Si M, N, N' son tres módulos tal que $N' \subset N$ y $f : M \to N$ es un morfismo de módulos, entonces notamos por $f|^{N'}$ al morfismo de módulos verificando que $f|^{N'}(x) = f(x)$ si $f(x) \in N'$ y $f|^{N'}(x) = 0$ en otro caso.

Un Λ*–módulo libre* es un módulo constituido por una suma directa de copias isomorfas del módulo Λ. Más aún, dado un conjunto C, se define el *módulo libre de base* C (que notamos por $\Lambda[C]$), como el módulo que está formado por todas las combinaciones lineales finitas de elementos de C, con coeficientes en Λ.

Dados dos módulos M y N, se denota por $M \otimes N$ al módulo *producto tensorial*, que consiste en tomar clases por D en el módulo libre de base $M \times N$; donde D es el submódulo generado por los elementos de la forma:

$$(m + m', n) - (m, n) - (m', n), \qquad (m, n + n') - (m, n) - (m, n'),$$

$$(\lambda m, n) - \lambda(m, n), \qquad (m, \lambda n) - \lambda(m, n),$$

con $\lambda \in \Lambda$, $m, m' \in M$ y $n, n' \in N$. La clase de (m, n) se denota por $m \otimes n$.

El producto tensorial es asociativo y conmuta con sumas directas, es decir,

$$(\bigoplus_{i\in I} M_i) \otimes M \simeq \bigoplus_{i\in I}(M_i \otimes M),$$

según la identificación $(\oplus_{i\in I} m_i) \otimes m = \oplus_{i\in I}(m_i \otimes m)$.

Si dotamos a un módulo de una cierta estructura multiplicativa obtenemos un *álgebra*. Más concretamente, un álgebra A es un módulo dotado de dos morfismos de módulos,

$$\mu : A \otimes A \to A \qquad \text{y} \qquad \eta : \Lambda \to A;$$

verificándose las siguientes igualdades:

a) $\mu(\mu \otimes 1_A) = \mu(1_A \otimes \mu)$ (denominada *propiedad asociativa*);

b) $\mu(\eta \otimes 1_A) = 1_A = \mu(1_A \otimes \eta)$ (η es una *unidad bilateral* para μ).

Análogamente, queda definido el concepto de *coálgebra* : una coálgebra $\mathcal{C}$ es un módulo dotado de los siguientes dos morfismos de módulos:

$$\nabla : \mathcal{C} \to \mathcal{C} \otimes \mathcal{C} \qquad \text{y} \qquad \xi : \mathcal{C} \to \Lambda;$$

verificándose las igualdades:

a) $(\nabla \otimes 1_{\mathcal{C}})\nabla = (1_{\mathcal{C}} \otimes \nabla)\nabla$ (llamada *propiedad asociativa*);

b) $(\xi \otimes 1_{\mathcal{C}})\nabla = 1_{\mathcal{C}} = (1_{\mathcal{C}} \otimes \xi)\nabla$ (ξ es una *unidad bilateral* para ∇).

Intuitivamente, queda claro que un álgebra y una coálgebra no son más que módulos a los que se dota de una cierta estructura multiplicativa. De hecho, las aplicaciones μ y Δ se suelen denominar, en el campo de la teoría homológica, aplicaciones *producto* y *coproducto*, respectivamente, como veremos con posterioridad. Es obvio que un álgebra adquiere por sí misma, una estructura de anillo, con elemento unidad dado por $\theta = \eta(1)$, $1 \in \Lambda$.

Sean (A, μ) y (A', μ') dos álgebras (resp. $(\mathcal{C}, \nabla)$ y $(\mathcal{C}', \nabla')$ dos coálgebras). Un morfismo $f : (A, \mu) \to (A', \mu)$ se dice que es *morfismo de álgebras* (resp. $g : (\mathcal{C}, \nabla) \to (\mathcal{C}', \nabla')$ es *morfismo de coálgebra*) si se verifica que:

$$f\,\mu = \mu'(f \otimes f) \qquad (\text{resp. } (g \otimes g)\nabla = \nabla' g\,).$$

A continuación enunciamos los conceptos de módulo graduado diferencial, aumentación y coaumentación; para acabar definiendo los DGA–módulos, las DGA–álgebras y las DGA–coálgebras.

Un *módulo graduado* es un módulo M que admite una representación como suma directa, con índices en los enteros, de una familia de submódulos suyos, $\{M_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$, es decir:

$$\bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} M_n = M.$$

Para denotar que M es un módulo graduado seguiremos una notación que haga referencia a la familia de submódulos que lo caracterizan: $M = \{M_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$.

Un elemento x de M se dice *homogéneo de grado* n cuando $x \in M_n$; en tal caso, escribiremos $|x| = n$.

Todos los módulos graduados que aparecen en esta memoria son nulos en grados negativos; es decir, $M_n = 0$ si $n < 0$.

Es obvio que el anillo Λ constituye, en sí mismo, un módulo graduado, siendo

$$\Lambda = \{\Lambda_n\}_{n\geq 0},$$

con $\Lambda_0 = \Lambda$ y $\Lambda_n = 0$ para $n > 0$.

Un *morfismo de módulos graduados de grado* p es un morfismo $f : M \to N$ entre módulos graduados de modo que $f(M_n) \subseteq N_{n+p}$, $\forall n \in \mathbb{Z}$. *El grado del morfismo* se denota como $|f| = p$.

Un módulo graduado M se dice *conexo* cuando $M_0 = \Lambda$. Por ejemplo, dado un módulo graduado M, podemos definir el módulo graduado conexo $\overline{M}$, con $\overline{M}_n = M_n$ para $n > 1$ y $\overline{M}_0 = 0$.

Además, dado $f : M \to N$ morfismo de módulos graduados conexos, se tiene un morfismo $\bar{f} : \bar{M} \to \bar{N}$ naturalmente asociado a f, según la relación $\bar{f}(a) = f(a)$.

Dados M y N sendos módulos graduados, queda definido un nuevo módulo graduado, que notamos $M \otimes N$, estableciendo:

$$(M \otimes N)_n = \bigoplus_{p+q=n} (M_p \otimes N_q).$$

Dado un módulo graduado M, se tienen las identificaciones canónicas siguientes:

$$M \otimes \Lambda \cong M, \qquad \text{y} \qquad \Lambda \otimes M \cong M.$$

En adelante, entenderemos que $M^0 = \Lambda$ y $M^{\otimes n} = M \otimes \overset{n \text{ veces}}{\cdots} \otimes M$.

A lo largo de esta memoria, adoptaremos la *convención de Koszul* que aligera la notación de los productos tensoriales de dos morfismos de módulos graduados:

Convención de Koszul: Sean $f : M \to M'$ y $g : N \to N'$ dos morfismos de módulos graduados; definimos el morfismo de módulos graduados producto,

$$f \otimes g : M \otimes N \longrightarrow M' \otimes N',$$

siendo $(f \otimes g)(x \otimes y) = (-1)^{|g||x|} f(x) \otimes g(y)$.

En particular, se tiene la siguiente fórmula de composición de productos tensoriales de morfismos:

$$(f \otimes g)(h \otimes k) = (-1)^{|g||h|}(fh \otimes gk).$$

Por tanto, si uno de los dos morfismos es de grado par, el signo desaparece.

En adelante, asumiremos la siguiente notación: dado $f : M \to N$ un morfismo de módulos graduados, notamos por $f^{\otimes n}$ al morfismo $f \otimes \overset{n \text{ veces}}{\cdots} \otimes f$.

Nos introducimos ahora en el ámbito del Álgebra Diferencial.

Sea M un módulo graduado y $d_M : M \to M$ un morfismo de módulos graduados. Se dice que d_M es una *diferencial* de M cuando $|d_M| = -1$ y $d_M d_M = 0$. En estas condiciones, M se denomina *DG–módulo* y se denota por (M, d_M).

En adelante, de no haber lugar a confusión, escribiremos d en lugar de d_M, y d_n en lugar de $d|_{M_n}$.

Es claro que exigir la nilpotencia de orden 2 en la diferencial equivale a exigir que $\operatorname{Im} d_{n+1} \subset \operatorname{Ker} d_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$; por tanto, tiene sentido plantear el siguiente concepto.

Sea (M, d) un DG–módulo. La *homología* de M, que se nota $H_*(M)$, queda definida como el módulo graduado $\{H_n(M)\}_{n \geq 0}$, donde:

$$H_n(M) = \operatorname{Ker} d_n / \operatorname{Im} d_{n+1}.$$

Si $n = 0$ debe entenderse $\operatorname{Ker} d_0 = M_0$.

Si un elemento x pertenece a $\operatorname{Ker} d_n$, para algún n, se llamará *ciclo*. De igual forma, si $x \in \operatorname{Im} d_n$, se llamará *borde*.

Análogamente, podemos definir el concepto de cohomología. Sea (M, d) un DG–módulo en un anillo Λ y G un grupo conmutativo. Se puede formar el módulo graduado $\operatorname{Hom}_\Lambda(M; G)$; tal que en cada grado n, sus elementos son los homomorfismos $f : M_n \to G$ llamados *cocadenas*. Podemos dotar a $\operatorname{Hom}_\mathbb{Z}(M; G)$ de un morfismo

$$\delta : \operatorname{Hom}_\mathbb{Z}(M; G) \to \operatorname{Hom}_\mathbb{Z}(M; G)$$

que aumenta un grado llamado *codiferencial*, de forma que, si $f \in \operatorname{Hom}(M_n, G)$ entonces $\delta^n(f) \in \operatorname{Hom}(M_{n+1}, G)$ se define por

$$(\delta^n f)(x) = f(d_{n+1}x), \qquad x \in M_{n+1}\,.$$

Como $\delta^n \delta^{n-1} = 0$, definimos la *cohomología* de M con coeficientes en el grupo G por la familia de módulos graduados, $H^*(M; G)$, tal que en grado n

$$H^*n(M; G) = \operatorname{Ker} \delta^n / \operatorname{Im} \delta^{n-1}\,.$$

Un elemento $f \in \operatorname{Hom}(M_n; G)$ se llama *cociclo* si $f \in \operatorname{Ker}\Delta^n$. Análogamente, f se llama *coborde* si $f \in \operatorname{Im} \delta^{n-1}$.

A partir de ahora, debido a que siempre trabajamos con grupos conmutativos, cuando hablemos de grupos nos estamos refiriendo a grupos conmutativos a no ser que se especifique lo contrario.

La noción de filtración nos proporciona una herramienta algebraica, que usaremos frecuentemente en próximas secciones.

Una *filtración* $F = \{F_p(M)\}_{p\in\mathbb{Z}}$ de un DG–módulo M es una familia de submódulos graduados, $F_p(M)$, tales que:

- son nulos en grados negativos, es decir, $F_p(M) = 0$, si $p < 0$,
- forman una cadena creciente,

$$0 = F_0 \subset \ldots \subset F_{p-1}(M) \subset F_p(M) \subset F_{p+1}(M) \subset \ldots, \tag{1.1}$$

- y $M = \bigcup_{p\geq 0} F_p(M)$.

Cada filtración F de M determina un *módulo graduado asociado*

$$G^F(M) = \{G_p^F(M)\}_{p\geq 0} = \{F_p(M)/F_{p-1}(M)\}_{p\geq 0},$$

consistente en todos los módulos cocientes sucesivos de la torre (1.1).

Sea M un módulo graduado. Se define la *suspensión* (resp., *desuspensión*) de M como el módulo graduado dado por:

$$S(M)_n = M_{n-1} \qquad (\text{resp.,}\ \ S^{-1}(M)_n = M_{n+1}).$$

Además, si M es un DG–módulo, entonces $S(M)$ y $S^{-1}(M)$ adquieren ambos la estructura de DG–módulos de forma natural, siendo su diferenciales $-d_M$ en ambos casos.

Dado $f : M \to N$ morfismo de módulos graduados, existe un morfismo de módulos graduados $S(f) : S(M) \to S(N)$, dado por $S(f)(a) = (-1)^{|a|} f(a)$.

Sea $f : M \to N$ un morfismo de DG–módulos de grado cero. Se puede definir a partir de él, un nuevo DG–módulo, denominado *cono* de f y denotado por $C(f)$, como

$$C(f)_n = S(M)_n \oplus N_n, \qquad d_{C(f)}(x,y) = (d_{S(M)}x,\ f(x) + d_N y)\,.$$

Se dice que un morfismo $f : (M, d_M) \longrightarrow (N, d_N)$ de módulos graduados de grado p es un *morfismo de DG–módulos de grado p* cuando se verifica que:

$$d_N f = (-1)^p f d_M.$$

Si $f : N \to M$ es un morfismo de DG–módulos y $F = \{F_j(M)\}$ es una filtración de M, por cada entero no negativo j escribiremos $f|^{F_j}$ en lugar de $f|^{F_j(M)}$.

Sea M un DG–módulo. Una *aumentación* (resp., *coaumentación*), es un morfismo de DG–módulos de grado cero:

$$\xi_M :\ M \longrightarrow \Lambda$$
$$(\text{resp.,}\ \eta_M : \Lambda \longrightarrow M\,)\,.$$

Es decir, una aumentación no es más que un morfismo de módulos graduados de modo que $\xi_M(M_n) = 0$ cuando n es distinto de cero (debido a la graduación considerada en Λ); y, además, $\xi_M d_1 = 0$, siendo $d_1 : M_1 \to M_0$ la diferencial de M en grado 1. De forma análoga, queda caracterizada una coaumentación.

Un *DGA–módulo* (M, d_M, ξ_M, η_M) es un DG–módulo (M, d_M) dotado de una aumentación ξ_M y de una coaumentación η_M, de modo que se verifica que $\xi_M \eta_M = 1_\Lambda$. En definitiva, se trata de un DG–módulo en el cual se "incrusta de manera natural" el anillo base (vía ξ y η, respetando la estructura diferencial existente). Un DGA–módulo M se dice que es *conexo* si como módulo graduado es conexo y su aumentación y coaumentación son ambas la identidad del anillo base Λ.

Con el propósito de facilitar la notación, nos referiremos a un DGA–módulo (M, d_M, ξ_M, η_M) escribiendo simplemente M o, en su caso, por (M, d_M), cuando no haya lugar a confusión.

Dados dos DGA–módulos M y N, definimos el *DGA–módulo producto tensorial*, $M \otimes N$, como el DGA–módulo establecido por los datos:

$$d_{M\otimes N} = d_M \otimes 1_N + 1_M \otimes d_N \,,$$

$$\xi_{M\otimes N} = \xi_M \otimes \xi_N \,,$$

$$\eta_{M\otimes N} = \eta_M \otimes \eta_N \,.$$

Sean M y N dos DGA–módulos. Se dice que un morfismo de DG–módulos $f : M \to N$ es un *morfismo de DGA–módulos* cuando se verifican las igualdades:

$$\xi_N f = \xi_M, \quad f \eta_M = \eta_N \,.$$

Cabe destacar por su importancia, el morfismo de DGA–módulos que intercambia las componentes de un producto tensorial,

$$T : M \otimes N \to N \otimes M \,,$$

denotado a veces por $T_{M\otimes N}$, y dado por:

$$T(x \otimes y) = (-1)^{|x||y|} y \otimes x \,.$$

Dados dos morfismos $f : M \to M$ y $g : N \to N$ se tiene que

$$T(f \otimes g) = (-1)^{|f||g|}(g \otimes f) \,.$$

Por tanto, si f ó g es de grado cero, el signo desaparece.

Una *DGA–álgebra* (A, μ_A) (resp., *DGA–coálgebra* $(\mathcal{C}, \nabla_{\mathcal{C}})$), es un DGA–módulo A (resp., $\mathcal{C}$), dotado de un morfismo de DGA–módulos de grado cero,

$$\mu_A : A \otimes A \longrightarrow A \quad (\text{producto})$$

$$(\text{resp.,}\ \ \nabla_{\mathcal{C}} : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C} \otimes \mathcal{C} \quad (\text{coproducto})),$$

verificando la *propiedad asociativa:*

$$\mu_A(1_A \otimes \mu_A) = \mu_A(\mu_A \otimes 1_A)$$

$$(\text{resp.,}\ \ (\nabla_{\mathcal{C}} \otimes 1_{\mathcal{C}})\nabla_{\mathcal{C}} = (1_{\mathcal{C}} \otimes \nabla_{\mathcal{C}})\nabla_{\mathcal{C}});$$

y para el cual, el morfismo η_A es *unidad bilateral:*

$$\mu_A(\eta_A \otimes 1_A) = \mu_A(1_A \otimes \eta_A) = 1_A$$

(resp., $\xi_{\mathcal{C}}$ es *unidad bilateral:*

$$(1_{\mathcal{C}} \otimes \xi_{\mathcal{C}})\nabla_{\mathcal{C}} = (\xi_{\mathcal{C}} \otimes 1_{\mathcal{C}})\nabla_{\mathcal{C}} = 1_{\mathcal{C}}).$$

Se dice que es *conmutativa* (resp., *coconmutativa*), cuando:

$$\mu_A T = \mu_A$$

$$(\text{resp.,}\ \ T\nabla_{\mathcal{C}} = \nabla_{\mathcal{C}}).$$

En definitiva, una DGA–álgebra (resp., DGA–coálgebra) consiste en un DGA–módulo que tiene, además, estructura de álgebra (resp., coálgebra). A partir de ahora, de no haber posibilidad de confusión, notaremos las DGA–álgebras y DGA–coálgebras por (A, μ_A) ó $(\mathcal{C}, \nabla_{\mathcal{C}})$, respectivamente; o bien, por A ó $\mathcal{C}$.

Sean (A, μ_A) y $(A', \mu_{A'})$ dos DGA–álgebras (resp., $(\mathcal{C}, \nabla_{\mathcal{C}})$ y $(\mathcal{C}', \nabla_{\mathcal{C}'})$ dos DGA–coálgebras). Queda definida la DGA–álgebra producto tensorial $A \otimes A'$ (resp., la DGA–coálgebra producto tensorial $\mathcal{C} \otimes \mathcal{C}'$), añadiendo a la estructura de DGA–módulo del producto tensorial de ambas el morfismo de grado cero siguiente:

$$\mu_{A \otimes A'} = (\mu_A \otimes \mu_{A'})(1_A \otimes T \otimes 1_{A'})$$

$$(\text{resp.,}\ \ \nabla_{\mathcal{C} \otimes \mathcal{C}'} = (1_{\mathcal{C}} \otimes T \otimes 1_{\mathcal{C}'})(\nabla_{\mathcal{C}} \otimes \nabla_{\mathcal{C}'})).$$

Dado un DG–módulo graduado (M, d_M) podemos construir el DGA–módulo tensorial de M, que se nota $T(M)$ (no debemos de confundir con el morfismo T, definido anteriormente), de la siguiente manera:

$$T(M) = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} M^{\otimes n} ;$$

Un elemento del tipo $a_1 \otimes \cdots \otimes a_n$ se dice homogéneo cuando cada a_i es un elemento homogéneo de M. La *graduación tensorial de* $T(M)$, $|\ |_t$, viene dada por la expresión:

$$|a_1 \otimes \cdots \otimes a_n|_t = \sum_{1\leq i\leq n} |a_i| .$$

La *diferencial tensorial*, $d_t : T(M) \longrightarrow T(M)$, viene determinada, actuando sobre elementos homogéneos, de la siguiente manera:

$$(d_t)_n(a_1 \otimes \cdots \otimes a_n) = \sum_{1\leq i\leq n} (-1)^{|[a_1|\cdots|a_{i-1}]|_t} a_1 \otimes \cdots \otimes d_M a_i \otimes \cdots \otimes a_n . \tag{1.2}$$

La aumentación $\xi_{T(M)}$ y la coaumentación $\eta_{T(M)}$ son, respectivamente, la "proyección a" e "inclusión en" $M^0 = \Lambda$; así, abusando del lenguaje, se puede decir que ambos morfismos coinciden con 1_Λ.

En estas circunstancias, sobre $T(M)$ se pueden definir un producto y un coproducto, notados $\mu_{T(M)}$ y $\nabla_{T(M)}$, respectivamente.

1. El producto de $T(M)$ actúa por yuxtaposición sobre elementos homogéneos y se extiende por linealidad:

$$\mu_{T(M)}((a_1 \otimes \cdots \otimes a_n) \otimes (a_{n+1} \otimes \cdots \otimes a_{n+p})) = a_1 \otimes \cdots \otimes a_n \otimes a_{n+1} \otimes \ldots \otimes a_{n+p} .$$

2. El coproducto viene dado por la expresión:

$$\nabla_{T(M)}(a_1 \otimes \cdots \otimes a_n) = \sum_{0\leq i\leq n} (a_1 \otimes \cdots \otimes a_i) \otimes (a_{i+1} \otimes \cdots \otimes a_n) .$$

El producto y el coproducto son ambos morfismos de DGA–módulos, son asociativos y admiten por unidad a $\eta_{T(M)}$ y por counidad a $\xi_{T(M)}$, respectivamente; por lo que tenemos definidas en $T(M)$ sendas estructuras de DGA–álgebra y DGA–coálgebra. En este sentido, escribiremos $T^a(M)$ cuando consideremos el módulo tensorial como DGA–álgebra; y $T^c(M)$ cuando lo consideremos como DGA–coálgebra.

Lema 1.2.1 *Todo morfismo de DG–módulos $f : M \to N$ induce un morfismo de DGA–módulos $T(f) : T(M) \to T(N)$, que actúa sobre elementos homogéneos del siguiente modo:*

$$T(f)(a_1 \otimes \cdots \otimes a_n) = f^{\otimes n}(a_1 \otimes \cdots \otimes a_n).$$

Se dice que $f : (A, \mu_A) \to (A', \mu_{A'})$ constituye un *morfismo de DGA–álgebras* (resp., $f : (\mathcal{C}, \nabla_{\mathcal{C}}) \to (\mathcal{C}', \nabla_{\mathcal{C}'})$ *morfismo de DGA–coálgebras*), cuando se trata de un morfismo de DGA–módulos verificando:

$$\mu_{A'}(f \otimes f) = f\mu_A \qquad (\text{resp.,} \quad (f \otimes f)\nabla_{\mathcal{C}} = \nabla_{\mathcal{C}'} f\,).$$

Definamos ahora lo que es una derivación.

Definición 1.2.2 Sean (A, μ_A) una DGA–álgebra y $\delta : A \to A$ un morfismo de módulos graduados de grado -1. Se dice que el morfismo δ es una *derivación* cuando verifica las condiciones siguientes:

$$\delta\mu_A = \mu_A(1 \otimes \delta + \delta \otimes 1)\,, \qquad \xi_A\delta = 0\,.$$

De ser posible alguna confusión, especificaremos el producto con respecto al cual es δ una derivación.

Existe una noción que une las estructuras de DGA–álgebra y DGA–coálgebra: es la denominada *DGA–álgebra de Hopf*. Podemos definir este concepto desde tres puntos de vista:

1. Una DGA–álgebra de Hopf (A, μ_A, ∇_A) es una DGA–álgebra (A, μ_A) dotada de un homomorfismo de DGA–álgebras $\nabla_A : A \longrightarrow A \otimes A$, que la convierte en DGA–coálgebra.

2. Recíprocamente, una DGA–álgebra de Hopf es una DGA–coálgebra (A, ∇_A) provista de un homomorfismo de DGA–coálgebras $\mu_A : A \otimes A \longrightarrow A$, que la dota de estructura de DGA–álgebra.

3. A su vez, se puede definir como DGA–álgebra de Hopf a todo DG–módulo que tenga las estructuras de álgebra y coálgebra y cuyos morfismos producto y coproducto verifiquen la relación de compatibilidad siguiente:

$$\nabla_A\mu_A = (\mu_A \otimes \mu_A)(1 \otimes T \otimes 1)(\nabla_A \otimes \nabla_A). \tag{1.3}$$

Ahora, vamos a introducir un nuevo concepto: la construcción Bar normalizada asociada a una DGA–álgebra dada. Veamos someramente en qué consiste tal construcción.

Dada una DGA–álgebra A, se puede construir una DGA–coálgebra concreta asociada a A, que se llama la *construcción Bar normalizada* de A, y notaremos por $\bar{B}(A)$, que no es más que la DGA–coálgebra $T^c(S(\mathrm{Ker}\,\xi_A))$, donde a su diferencial hay que añadirle una nueva diferencial llamada simplicial. Veamos esto más detenidamente.

A nivel de módulos, $\bar{B}(A)$ coincide con $T(S(\mathrm{Ker}\,\xi_A))$. Un elemento $\bar{a} = Sa_1 \otimes \cdots \otimes Sa_n$ de $S(\mathrm{Ker}\,\xi_A)^{\otimes n}$ lo escribiremos de la forma $\bar{a} = [a_1|\cdots|a_n]$. Un tal elemento se dice homogéneo cuando a_i es un elemento homogéneo de A, para todo $1 \leq i \leq n$. Notaremos $[\,] = 1 \in \Lambda$.

Aparte de la graduación tensorial existente en $\bar{B}(A)$ debemos considerar aquí la *graduación simplicial* $|\ |_s$, que se define como:

$$|\bar{a}|_s = |[a_1|\cdots|a_n]|_s = n\,.$$

El grado total de $\bar{a}$ viene dado por $|\bar{a}|_{\bar{B}} = |\bar{a}|_t + |\bar{a}|_s$.

La *diferencial simplicial* viene dada por la fórmula:

$$d_s([a_1|\cdots|a_n]) \;=\; \sum_{1\leq i\leq n-1} (-1)^{e_i}[a_1|\cdots|\mu_A(a_i,a_{i+1})|\cdots|a_n]$$

donde $e_i = i+|a_1|+\cdots+|a_i|$. Entonces, el morfismo $d_{\bar{B}} = d_t+d_s$ actuando sobre el módulo graduado $\bar{B}(A)$ constituye una diferencial, por lo que $\bar{B}(A)$ adquiere la estructura de DG–módulo. Recordamos que la diferencial d_t ha sido definida previamente en (1.2).

Además, si A es una DGA–álgebra conmutativa entonces sobre $\bar{B}(A)$ se puede definir un producto, llamado producto shuffle que denotaremos por $\star$ y le confiere a $\bar{B}(A)$ estructura de DGA–álgebra conmutativa. Veamos esto último con más detenimiento.

Si p y q son dos enteros no negativos, un (p,q)–*shuffle* (α,β) es una partición del conjunto de enteros $\{0,1,\ldots,p+q-1\}$ en dos subconjuntos disjuntos, $\alpha_1<\alpha_2<\cdots<\alpha_p$ y $\beta_1<\beta_2<\cdots<\beta_q$, de p y q enteros respectivamente. La signatura de un shuffle (α,β) se define como $\mathrm{sig}(\alpha,\beta) = \sum_{1\leq i\leq p}\alpha_i-(i-1)$. El *producto shuffle*, $\star : \bar{A}\to\bar{A}$, viene dado por

$$[a_1|\cdots a_p]\star[b_1|\cdots|b_q] = \sum_{(\alpha,\beta)}(-1)^{\epsilon(\pi,a,b)}[c_1|\cdots|c_{p+q}]\,,$$

donde (α, β) recorren los (p,q)–shuffles, π es la permutación que los determina, $(c_{\pi(1)}, \ldots, c_{\pi(p+q)}) = (a_1, \ldots, a_p, b_1, \ldots, b_q)$ y el exponente

$$\epsilon(\pi, a, b) = \sum_{\pi(i)>\pi(p+j)} |a_i|_B |b_j|_B .$$

Sea $(\mathcal{C}, \nabla)$ una DGA–coálgebra y (A, μ) una DGA–álgebra. Una *cocadena de torsión* o *cocadena de Brown* es un morfismo de grado -1, $\psi : \mathcal{C}_* \to A_{*-1}$, tal que

$$d_A\psi + \psi d_{\mathcal{C}} + \mu(\psi \otimes \psi)\nabla = 0\,, \qquad \xi_A\psi = 0\,, \qquad \psi\eta_{\mathcal{C}} = 0\,.$$

Una álgebra A se dice que *opera a derecha* sobre un módulo M si existe un morfismo $\nu : M \otimes A \to M$ tal que

$$\nu(x, e_q) = x\,, \qquad \nu(\nu(x, g_1), g_2) = \nu(x, g_1 \cdot g_2)\,.$$

En tal caso se dice que ν es una *acción* de A sobre M.

Sea (A, μ) una DGA–álgebra que opera a la derecha sobre un DG–módulo M (llamemos ν a la acción). Sea $(\mathcal{C}, \nabla)$ una DGA–coálgebra y $\psi : \mathcal{C} \to A$ una cocadena de torsión. Entonces el morfismo

$$d_\psi : M \otimes \mathcal{C} \to M \otimes \mathcal{C}\,,$$

definido por

$$d_\psi(x \otimes y) = (d + \psi\cap)(x \otimes y) = (d + (\nu \otimes 1_{\mathcal{C}})(1_M \otimes \psi \otimes 1_{\mathcal{C}})(1_M \otimes \nabla))(x \otimes y)\,,$$

es una diferencial. El módulo graduado $M \otimes \mathcal{C}$ dotado de la diferencial d_ψ es un DG–módulo que será denotado por $M \otimes_\psi \mathcal{C}$ y se llamará *producto tensorial torcido* por la cocadena de torsión ψ.

Por ejemplo, si A es una DGA–álgebra, un ejemplo de producto tensorial torcido es $A \otimes_\theta \bar{B}(A)$, donde la cocadena de torsión θ viene dada por

$$\theta([a_1|\cdots|a_n]) = \begin{cases} a_1 & \text{si } n = 1, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

De ahora en adelante, esta cocadena de torsión particular será llamada *la cocadena de torsión trivial* sobre A.

Damos ahora varios ejemplos más de DGA–álgebras que utilizaremos con posterioridad a lo largo de esta memoria. Todas ellas serán conexas (excepto la primera), conmutativas y con diferencial trivial.

- La Λ–álgebra libre generada por el grupo π es una DGA–álgebra de Hopf conmutativa y coconmutativa, denotada $\Lambda[\pi]$, por medio de la 5–terna

$$\{\Lambda[\pi], \mu, \nabla, \eta, \xi\}, \text{ donde:}$$

  - los elementos no nulos de $\Lambda[\pi]$ están únicamente en grado 0, y son combinaciones lineales finitas $\sum m_x x$, tal que $m_x \in \Lambda$, $x \in \pi$;
  - el producto viene definido por

$$\mu((\sum m_x x) \otimes (\sum m'_y y)) = \sum m_x m'_y (x + y);$$

  - el coproducto viene dado por

$$\nabla(\sum m_x x) = \sum m_x (x \otimes x);$$

  - la coaumentación

$$\eta : \Lambda \to \Lambda[\pi]$$

  se define por

$$\eta(m) = m\,0, \text{ donde 0 es la unidad aditiva del grupo conmmutativo } \pi;$$

  - y la aumentación es

$$\xi(\sum m_x x) = \sum m_x.$$

Veamos, a modo de ejemplo, la construcción Bar normalizada $\bar{B}(\Lambda[\pi])$ de la DGA–álgebra $\Lambda[\pi]$. Como módulo graduado,

$$\bar{B}_0(\Lambda[\pi]) = \Lambda \qquad \text{y} \qquad \bar{B}_n(\Lambda[\pi]) = \Lambda[\pi]^{\otimes n}, \quad \forall n > 0\,.$$

El elemento de $\bar{B}_0(\Lambda[\pi])$ que se corresponde con el elemento identidad de Λ, lo denotaremos por $[\,]$ y el elemento $a_{\otimes} \cdots \otimes a_n \in \bar{B}(\Lambda[\pi])$ se denotará por $[a_1|\cdots|a_n]$. La diferencial en $\bar{B}(\Lambda[\pi])$ se define por

$$d([a_1|\cdots|a_n]) = \sum_{1 \leq i \leq n-1} [a_1|\cdots|a_{i-1}|\mu(a_i \otimes a_{i+1}|a_{i+2}|\cdots|a_n]\,.$$

Además, la aumentación y coaumentación de $\bar{B}(\Lambda[\pi])$ coinciden con la identidad en Λ.

Consideremos una filtración que llamaremos *filtración trivial* de $\bar{B}(\Lambda[\pi])$ y que usaremos posteriormente:

$$\mathcal{F}(\pi) = \{\mathcal{F}_j(\pi)\}_{j \in \mathbb{Z}}$$

tal que

$$\mathcal{F}_j(\pi) = \{x \in \bar{B}(\Lambda[\pi]) : \ |x| \leq j\}\,.$$

En particular $\mathcal{F}_0(\pi) = \Lambda$.

- La *DGA–álgebra polinomial* $P(u, 2n)$, donde n es un entero positivo y u es un generador de grado $2n$. La aumentación y la coaumentación coinciden con la identidad en el anillo base. El producto de esta DGA–álgebra se define según la regla $u^i u^j = u^{i+j}$ con $i, j \geq 0$.

- La *DGA–álgebra exterior* $E(u, 2n+1)$, $n \geq 0$, que consiste en la DGA–álgebra libre con generadores 1 y u; con u de grado $2n+1$ y $u^2 = 0$. La aumentación y la coaumentación vienen dadas por la identidad en el anillo base. Además, el morfismo
$$\nabla_E : E(u, 2n+1) \longrightarrow E(u, 2n+1) \otimes E(u, 2n+1)$$
definido por
$$\nabla_E(u) = u \otimes 1 + 1 \otimes u ,$$
convierte a $E(u, 2n+1)$ en una DGA–álgebra de Hopf conmutativa y coconmutativa.

- La *DGA–álgebra polinomial dividida* $\Gamma(u, 2n)$, $n \geq 1$, que es la DGA–álgebra libre con generadores
$$\gamma_0(u) = 1,\ \gamma_1(u) = u,\ \gamma_2(u),\ \ldots,\ \gamma_k(u),\ \ldots, \quad \text{con} \quad |\gamma_k(u)| = 2n .$$
El producto viene definido por la expresión:
$$\gamma_k(u)\gamma_h(u) = \frac{(k+h)!}{k!h!}\gamma_{k+h}(u) ;$$
el elemento $\gamma_1(u) = u$ se conoce como el generador del álgebra polinomial modificada. La aumentación y la coaumentación son la identidad en el anillo base. Además, el morfismo
$$\nabla_\Gamma : \Gamma(u, 2n) \longrightarrow \Gamma(u, 2n) \otimes \Gamma(u, 2n) ,$$
definido por
$$\nabla_\Gamma(\gamma_k(u)) = \sum_{i+j=k} \gamma_i(u) \otimes \gamma_j(u) ,$$
convierte a $\Gamma(u, 2n)$ en una DGA–álgebra de Hopf conmutativa y coconmutativa.

Los siguientes conceptos y resultados que vamos a introducir son los que nos conecta la Topología Simplicial con el Álgebra Homológica.

Sea X un conjunto simplicial. El Λ–*módulo simplicial libre generado por* X queda definido como el módulo simplicial dado por

$$\Lambda[X]_n = \Lambda[X_n]\,,$$

siendo sus operadores ∂_i y s_i los morfismos de Λ-módulos inducidos por los operadores de X. Además, si L es un módulo simplicial entonces $\{L, d\}$, con d definida en grado n por $d_n = \sum_{0\leq i\leq n}(-1)^i\partial_i$, constituye un DG–módulo, llamado el *DG–módulo asociado a* L.

Todo morfismo de módulos simpliciales $f : L \to L'$ da lugar a un morfismo entre los DG–módulos asociados, de forma natural.

Sea X un conjunto simplicial. Definimos el *complejo de cadenas asociado a* X, y lo denotamos por $C_*(X) = \{C_n(X), d_n\}$, al DG–módulo asociado a $\Lambda[X]$.

Nota 1.2.3 Tengamos en cuenta que si $(X, *)$ es un conjunto simplicial punteado, entonces están bien definidos los morfismos:

$$\xi_X(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \in X_0, \\ 0, & \text{en otro caso;} \end{cases}$$

y η_X definida linealmente a partir de la imagen de la unidad,

$$\eta_X(1) = *\,,$$

que constituyen la aumentación y coaumentación, respectivamente, del DGA-módulo $C_*(X)$.

Un hecho importante, que va da lugar al concepto de complejo normalizado, es que si denotamos por L a un módulo simplicial y por $s(L)$ al submódulo engendrado por todos los símplices degenerados. Entonces se verifica que

$$d_n(s(L))_n \subset (s(L))_{n-1};$$

por tanto, el par $\{L/s(L), d\}$ es un DG–módulo, que denominamos *submódulo normalizado* de L y notamos por L^N. También se satisface que todo morfismo de módulos simpliciales $f : K \to L$ da lugar a un morfismo de DG–módulos $f : K^N \to L^N$ entre los normalizados, de forma obvia.

Definamos ahora el *complejo de cadenas normalizado* de un conjunto simplicial X, denotado por $C_*^N(X)$, como el normalizado del módulo simplicial asociado a X, $C_*(X)$.

Por ejemplo, si π es un grupo, entonces el complejo de cadenas normalizado $C_*^N(\pi)$ es cero en cada grado excepto

$$C_0^N(\pi) = \Lambda[\pi] = \left\{ \sum_{x\in A} m_x x : \ m_x \in \Lambda,\ A \text{ es un subconjunto finito de } \pi \right\}.$$

Es decir, $C_*^N(\pi)$ coincide con la Λ–álgebra libre generada por el grupo π y que habíamos denotado por $\Lambda[\pi]$ en la página 18.

Denotemos por Λ al anillo base, sea X un conjunto simplicial y G un grupo. El *complejo de cocadenas asociado a* X con coeficientes en G,

$$C^*(X;G) = \{ \operatorname{Hom}(C_*^N(X);G), \delta\}$$

es un Λ–módulo graduado en los enteros no negativos tal que en grado n

$$C^n(X;\, G) = \operatorname{Hom}(C_n^N(X);G)\,;$$

junto con la codiferencial

$$\delta : \ \operatorname{Hom}(C_n^N(X);G) \to \operatorname{Hom}(C_{n+1}^N(X);G)$$

definida en la página 1.2.

Observar que $c(x) = 0$ si el grado de la cocadena c es distinto al grado del elemento x.

La homología y la cohomología de X se definen como las familias de Λ–módulos

$$H_n(X) = H_n(C_*^N(X)) \text{ Ker } d_n/ \text{ Im } d_{n+1}$$

y

$$H^n(X;G) = H^n(C^*(X;G)) = \text{ Ker } \delta_n/ \text{ Im } \delta_{n-1},$$

respectivamente.

Definamos varios morfismos de DG–módulos que usaremos en este trabajo. Por simplificación omitiremos en la notación su dependencia de p. El *morfismo diagonal*

$$\Delta : \ C_*^N(X) \to C_*^N(X^{\times p}),$$

se define como $\Delta(x) = (x, \overset{p \text{ veces}}{\ldots}, x)$. Los siguientes automorfismos llamados *permutaciones cíclicas* que son:

$$t : C_*^N(X^{\times p}) \to C_*^N(X^{\times p}),$$

tal que $t(x_1, x_2, \ldots, x_p) = (x_2, \ldots, x_p, x_1)$ y

$$T : C_*^N(X)^{\otimes p} \to C_*^N(X)^{\otimes p}$$

se define como $T(x_1 \otimes x_2 \otimes \cdots \otimes x_p) = (-1)^{|x_1|(|x_2|+\cdots+|x_p|)} x_2 \otimes \cdots \otimes x_p \otimes x_1$. Y es fácil ver que para todo entero k con $1 \leq k \leq p$ se tiene que

$$T^k(x_1 \otimes \cdots \otimes x_p) = (-1)^{(|x_1|+\cdots+|x_k|)(|x_{k+1}|+\cdots+|x_p|)}(x_{k+1} \otimes \cdots \otimes x_p \otimes x_1 \otimes \cdots \otimes x_k).$$

Obtenemos el siguiente lema que usaremos posteriormente.

Lema 1.2.4 *Sea X un conjunto simplicial y sean n, k y ℓ enteros tal que $1 \leq \ell \leq n-k$. Si $x_1 \otimes \cdots \otimes x_{n+1} \in C_*^N(X)^{\otimes n+1}$. Entonces*

$$\begin{aligned}&(1^{\otimes n-k} \otimes T^k)(1^{\otimes n-k-1} \otimes T^k \otimes 1) \cdots (1^{\otimes n-k-\ell} \otimes T^k \otimes 1^{\otimes \ell})(x_1 \otimes \cdots \otimes x_{n+1})\\ &= (1^{\otimes n-k-\ell} \otimes T^k)(x_1 \otimes \cdots \otimes x_{n+1}).\end{aligned}$$

Demostración

$$\begin{aligned}&(1^{\otimes n-k} \otimes T^k)(1^{\otimes n-k-1} \otimes T^k \otimes 1) \cdots (1^{\otimes n-k-\ell} \otimes T^k \otimes 1^{\otimes \ell})(x_1 \otimes \cdots \otimes x_{n+1})\\ =\ & (-1)^{(|x_{n-k-\ell+1}|+\cdots+|x_{n-\ell}|)|x_{n-\ell+1}|} \ldots (-1)^{(|x_{n-k-\ell+1}|+\cdots+|x_{n-\ell}|)|x_{n+1}|}\\ & x_1 \otimes \cdots \otimes x_{n-k-\ell} \otimes x_{n-\ell+1} \otimes \cdots \otimes x_{n+1} \otimes x_{n-k-\ell+1} \otimes \cdots \otimes x_{n-\ell}\\ =\ & (-1)^{(|x_{n-k-\ell+1}|+\cdots+|x_{n-\ell}|)(|x_{n-\ell+1}|+|x_{n-\ell+2}|+\cdots+|x_{n+1}|)}\\ & x_1 \otimes \cdots \otimes x_{n-k-\ell} \otimes x_{n-\ell+1} \otimes \cdots \otimes x_{n+1} \otimes x_{n-k-\ell+1} \otimes \cdots \otimes x_{n-\ell}\\ =\ & (1^{\otimes n-k-\ell} \otimes T^k)(x_1 \otimes \cdots \otimes x_{n+1}).\end{aligned}$$

□

1.3 El concepto de contracción

Una contracción [EM53b] entre dos DG–módulos es un tipo particular de equivalencia de homotopía. Es una herramienta muy útil en el cálculo de la homología ya que permite relacionar un DG–módulo con otro de menor número de generadores en cada grado, de modo que se preserva la homología. Constituye pues, una importante técnica algebraica que reduce el problema del cálculo homológico.

Una *contracción* de un DG–módulo N sobre otro DG–módulo M, es un triple (f, g, ϕ) tal que $f : N_* \to M_*$ que se llama *proyección*, $g : M_* \to N_*$ que se llama *inclusión* son morfismos de DGA–módulos y $\phi : N_* \to N_{*+1}$ que se llama *operador de homotopía* es un morfismo de módulos graduados. Además han de verificarse las siguientes relaciones:

$$\textbf{(c1)}\ f\,g = 1_M\,, \qquad \textbf{(c2)}\ \phi\, d_N + d\,\phi_N + g\,f = 1_N\,,$$

$$\textbf{(c3)}\ \phi\, g = 0\,, \qquad \textbf{(c4)}\ f\,\phi = 0\,, \qquad \textbf{(c5)}\ \phi\,\phi = 0\,.$$

Una contracción será denotada por $c = (f, g, \phi) : N \Rightarrow M$ ó, simplemente por $N \overset{c}{\Rightarrow} M$.

Si $c_i = (f_i, g_i, \phi_i) : N_i \Rightarrow M$, $i = 1, 2$, son dos contracciones entre dos DG–módulos, podemos construir las siguientes contracciones (ver [EM53b]):

- La *contracción producto tensorial*

$$c_1 \otimes c_2 = (f_1 \otimes f_2,\ g_1 \otimes g_2,\ \phi_1 \otimes g_2\, f_2 + 1_{N_1} \otimes \phi_2) :\ N_1 \otimes N_2 \Rightarrow M_1 \otimes M_2\,.$$

- Si $N_2 = M_1$, la *contracción composición*

$$c_2\, c_1 = (f_2\, f_1,\ g_1\, g_2,\ \phi_1 + g_1\, \phi_2\, f_1) :\ N_1 \Rightarrow M_2\,.$$

Dada una contracción de DGA–módulos $c = (f, g, \phi) : N \Rightarrow M$, podemos construir la *contracción suspensión* de c, denotada por $S(c)$, que consiste en tomar los DGA–módulos suspensión de los dados:

$$S(c) = (S(f), S(g), -\phi) : S(N) \Rightarrow S(M).$$

Describiremos a continuación una equivalencia de homotopía muy importante en Topología Algebraica. Esta contracción nos refleja que el complejo de cadenas normalizado $C_*^N(X \times Y)$ se reduce al complejo de cadenas producto tensorial $C_*^N(X)$ y $C_*^N(Y)$.

Sea $\gamma = \{\gamma_1, \ldots, \gamma_r\}$ el conjunto finito de enteros y sea a otro entero. De ahora en adelante, $\gamma + a$ denota el conjunto $\{\gamma_1 + a, \ldots, \gamma_r + a\}$ y s_γ denota la composición de operadores de degeneración $s_{\gamma_r} \cdots s_{\gamma_1}$.

Una *contracción Eilenberg–Zilber* [EZ59] se define por una contracción de $C_*^N(X\times Y)$ en $C_*^N(X)\otimes C_*^N(Y)$, donde X e Y son dos conjuntos simpliciales dados. Un ejemplo de este tipo de equivalencia de homotopía es $c_{EZ} = (AW,\ EML,\ SHI)$ dado por:

- El operador Alexander–Whitney, $AW : C_*^N(X\times Y) \longrightarrow C_*^N(X)\otimes C_*^N(Y)$, se define por:
$$AW((a,\,b)) = \sum_{0\leq i\leq m} \partial_{i+1}\cdots\partial_m a\otimes\partial_0\cdots\partial_{i-1}b\,,$$
donde $a, b\in C_m^N(X)$.

  Si $X = Y$, se puede considerar a AW como una "aproximación simplicial" a la diagonal y este operador nos proporciona un método para construir el producto cup en cohomología. Si intercambiamos los factores a y b en la formula de AW, obtenemos una aproximación diferente. Estudiando la comparación de estas dos aproximaciones diferentes a la diagonal, aparecen unas operaciones cohomológicas fundamentales: los cuadrados de Steenrod.

- El operador Eilenberg–Mac Lane, $EML : C_*^N(X)\otimes C_*^N(Y) \longrightarrow C_*^N(X\times Y)$, se define por:
$$EML(a\otimes b) = \sum_{(\alpha,\beta)\in\{(p,q)\text{-shuffles}\}} (-1)^{\operatorname{sig}(\alpha,\beta)}(s_\beta a,\ s_\alpha b)\,,$$
donde $a\in C_p^N(X)$ y $b\in C_q^N(X)$.

  Este operador puede verse como un proceso de "triangulación" en el producto simplicial $X\times Y$.

- Y el operador Shih $SHI : C_*^N(X\times Y)\longrightarrow C_{*+1}^N(X\times Y)$ definido por:

$$SHI((a,\,b)) = 0 \qquad \text{si } |a| = |b| = 0\,;$$

$$\begin{aligned}&SHI((a,\,b))\\ &= \textstyle\sum_{T(m)}(-1)^{\bar m+\operatorname{sig}(\alpha,\beta)+1}(s_{\beta+\bar m}s_{\bar m-1}\partial_{m-q+1}\cdots\partial_m a,\ s_{\alpha+\bar m}\partial_{\bar m}\cdots\partial_{m-q-1}b)\,,\end{aligned}$$

si $|a| = |b| = m$ y donde $\bar m = m-p-q$, $\operatorname{sig}(\alpha,\beta) = \sum_{1\leq i\leq p+1}\alpha_i - (i-1)$,

$$T(m) = \{0\leq p\leq m-q-1\leq m-1, (\alpha,\beta)\in\{(p+1,q)\text{-shuffles}\}\,.$$

Una fórmula recursiva para el operador SHI fue dada por Eilenberg y Mac Lane en [EM54]. La fórmula explícita que aquí exponemos fue conjeturada por Rubio en [Rub91] y probada por Morace en el apéndice de [Rea93]. Aunque existen profundos estudios en la literatura sobre los operadores AW y EML, resulta sorprendente la falta de interés demostrada hasta ahora en el estudio del operador de homotopía que aparece en una contracción Eilenberg–Zilber, no sólo desde el punto de vista de obtener su fórmula explícita, sino también el de obtener resultados de preservación de estructuras algebraicas de este operador concerniente a la estructura de coálgebra subyacente en $C_*^N(X \times X)$.

Una propiedad importante es que el morfismo inyección EML conmuta con las permutaciones cíclicas, es decir $t\ EML = EML\ T$. Veámoslo: sean $a, b \in C_*^N(X)$ tal que $|a| = p$ y $|b| = q$, entonces

$$\begin{aligned} t\ EML(a \otimes b) &= \sum_{(\alpha,\beta)\in\{(p,q)\text{-shuffles}\}} (-1)^{\mathrm{sig}(\alpha,\beta)} s_\alpha b \times s_\beta a \\ &= \sum_{(\beta,\alpha)\in\{(q,p)\text{-shuffles}\}} (-1)^{\mathrm{sig}(\alpha,\beta)+\mathrm{sig}(\beta,\alpha)} (-1)^{\mathrm{sig}(\beta,\alpha)} s_\alpha b \times s_\beta a \\ &= (-1)^{pq} EML(b \otimes a) = EML\ T(a \otimes b)\,. \end{aligned}$$

En la última igualdad sólo falta ver que sig$(\alpha, \beta)+$ sig$(\beta, \alpha) = pq$. Probemos esto:

$$\begin{aligned} \mathrm{sig}(\alpha,\beta) + \mathrm{sig}(\beta,\alpha) &= \sum_{1\le i\le p} (\alpha_i - (i-1)) + \sum_{1\le j\le q} (\beta_j - (j-1)) \\ &= \sum_{1\le i\le p} \alpha_i + \sum_{1\le j\le q} \beta_j - \sum_{1\le i\le p} (i-1) - \sum_{1\le j\le q} (j-1) \\ &= \sum_{1\le k\le p+q} (k-1) - \sum_{1\le i\le p} (i-1) - \sum_{1\le j\le q} (j-1) \\ &= \sum_{1\le k\le q} (p+k-1) - \sum_{1\le j\le q} (j-1) \\ &= pq\,. \end{aligned}$$

Dado un conjunto simplicial X y un entero positivo p, podemos formar una contracción de $C_*^N(X^{\times p})$ en $C_*^N(X)^{\otimes p}$ componiendo apropiadamente contracciones Eilenberg–Zilber. Ocasionalmente y si no hay lugar a confusión, los morfismos componentes de tal contracción será denotado por (AW, EML, SHI).

Otra contracción explícita que usaremos es la siguiente. Sean π un grupo. Entonces, existe una contracción $c_{\bar{B}} = (f_{\bar{B}}, g_{\bar{B}}, \phi_{\bar{B}})$ de $\bar{B}(\Lambda[\pi \times \pi])$ en $\bar{B}(\Lambda[\pi]) \otimes \bar{B}(\Lambda[\pi])$.

Las fórmulas explícitas y detalladas de esta contracción aparecen en [EM53b].

Denotemos por $\bar{0}$ al elemento neutro del grupo π. El morfismo proyección $f_{\bar{B}}$ queda caracterizado por su actuación sobre los elementos de la forma $[(x_1, y_1)|\cdots|(x_n, y_n)]$ de

$\bar{B}(\Lambda[\pi \times \pi])$, con $x_i, y_i \in \pi$, de la siguiente manera:

$$f_B([(x_1,y_1)|\cdots|(x_n,y_n)])$$
$$= \sum_{0\leq i\leq n} \xi(x_1\cdots x_i)\xi(y_{i+1}\cdots y_n)[x_1|\cdots|x_i]\otimes[y_{i+1}|\cdots|y_n],$$

donde para $i = 0$ el término $[x_1|\cdots|x_i] = [\ ]$; y análogamente, para $i = n$, $[y_{i+1}|\cdots|y_n] = [\ ]$.

Es fácil comprobar que $\bar{B}(\Lambda[\pi])$ queda identificada como subálgebra de $\bar{B}(\Lambda[\pi \times \pi])$ siendo:

$$u = [x_1|\cdots|x_n] = [(x_1,\bar{0})|\cdots|(x_n,\bar{0})] \quad \text{y} \quad v = [y_1|\cdots|y_n] = [(\bar{0},y_1)|\cdots|(\bar{0},y_n)].$$

De este modo, el morfismo inyección g_B queda definido por la fórmula:

$$g_B(u\otimes v) = u \star v,$$

siendo $\star$ el producto shuffle.

1.4 Operaciones cohomológicas

En esta sección, primero definimos el producto cup, que provee a la cohomología de una estructura adicional de anillo. Después, definimos el concepto con el que más trabajaremos en toda esta memoria, el de operación cohomológica. También damos dos definiciones, una axiomática y otra constructiva, de unas operaciones cohomológicas particulares, los cuadrados de Steenrod.

Es posible dotar a la cohomología de un conjunto simplicial, de un producto asociativo llamado producto cup. Esta estructura multiplicativa provee a la cohomología de una estructura más rica que la esencialmente aditiva.

Dado un grupo G y un conjunto simplicial X, el *producto cup*, $\smile$: $C^*(X;G)\otimes C^*(X;G) \to C^*(X;G)$ queda definido como sigue: sean $c \in C^i(X;G)$ y $c' \in C^j(X;G)$ dos cocadenas y $x \in C^N_{i+j}(X)$, entonces el producto cup de c y c' aplicado sobre un elemento x es:

$$\begin{aligned} c\smile c'(x) &= \mu(c\otimes c')(AW\,\Delta\, x) \\ &= \mu(c(\partial_{i+1}\cdots\partial_{i+j}x)\otimes c'(\partial_0\cdots\partial_{i-1}x)), \end{aligned}$$

donde μ es el producto inducido por la operación en G.

Aparte del producto cup, otras estructuras algebraicas que sean funtoriales se pueden introducir en la cohomología. Un ejemplo de esta estructura algebraica adicional son las transformaciones naturales de un funtor de cohomología en otro, que se llaman *operaciones cohomológicas*. En esta sección, introducimos el concepto de operación cohomológica y definimos sendos conjuntos particulares de estas operaciones llamadas cuadrados de Steenrod y potencias reducidas de Steenrod.

Sean p y q dos enteros y G y G' dos grupos. Una *operación cohomológica* α del tipo (p, q, π, π') es una transformación natural del funtor $H^p(\ ;\pi)$ en el funtor $H^q(\ ;\pi')$.

Por ejemplo, para cualquier p y q, existe una operación α_p del tipo (q, pq, π, π') llamada operación p–ésima, definida por

$$\vartheta_p(u) = u^p, \qquad u \in H^q(\mathcal{T};\pi)$$

donde $\mathcal{T}$ es un espacio topológico y u^p se define como $u^p = u^{p-1} \smile u$ siendo $u^1 = u$.

Una operación α del tipo (p, q, π, π') se llama aditiva si $\alpha : H^p(\mathcal{T};\pi) \to H^q(\mathcal{T};\pi')$ es un homomorfismo para cualquier espacio topológico $\mathcal{T}$.

En [Ste47], Steenrod introdujo ciertas operaciones cohomológicas aditivas del tipo $(q, q+i, \mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_2)$ para cualquier q, sobre el anillo $\mathbb{F}_2$. Estas operaciones estaban definidas en términos de cociclos en el complejo de cocadenas de un conjunto simplicial X, modificando la fórmula de Alexander–Whitney para la construcción del producto cup que más tarde se llamaron los *cuadrados de Steenrod*.

En un trabajo posterior, Steenrod en [Ste52], usando el método de los modelos acíclicos, determinó que existe una sucesión infinita de morfismos $\{D_i\}$, llamada una *mejor aproximación diagonal*, que "mide" la falta de conmutatividad del producto cup. Más precisamente, existe una secuencia de homomorfismos graduados

$$D_i : C_*^N(X) \to C_*^N(X) \otimes C_*^N(X)$$

de grado i tal que:

$$\begin{aligned} D_0 &= AW\,\Delta \\ d_\otimes\, D_{i+1} + (-1)^i D_{i+1}\, d &= T\, D_i + (-1)^{i+1} D_i, \end{aligned} \tag{1.4}$$

donde d y $d_\otimes$ son las diferenciales de $C_*^N(X)$ y $C_*^N(X) \otimes C_*^N(X)$, respectivamente.

Además, cada morfismo D_i puede ser expresado de la forma $D_i = h_i\ \Delta$, donde $h_i : C_*^N(X \times X) \to C_*^N(X) \otimes C_*^N(X)$ es un homomorfismo de grado i.

Es más, si $\{D_i\}$ y $\{D'_i\}$ son dos secuencias de homomorfismos que satisfacen las anteriores relaciones, entonces existe una secuencia de homomorfismos

$$F_i : C_*^N(X) \to C_*^N(X \times X)$$

de grado i verificando que

$$d_\otimes F_{i+1} = D_i - D'_i - \alpha_i Fi + (-1)^{i+1} E_{i+1} d\,. \tag{1.5}$$

Una familia de automorfismos verificando (1.4) se usa para la construcción de los productos i–cup y los cuadrados de Steenrod. En particular, fijado un anillo Λ, un grupo G y un conjunto simplicial X, la definición de un producto i–cup de dos cocadenas $c \in C^p(X;G)$ y $c' \in C^q(X;G)$ es una nueva cocadena denotada por $c \smile_i c' \in C^{p+q-i}(X;G)$ tal que aplicada sobre un elemento $x \in C_{p+q-i}^N(X)$ se define como:

$$c \smile_i c'(x) = \mu(c \otimes c')D_i(x)$$

siendo μ el producto inducido por la operación en G.

En [Ste47] aparece una relación entre productos i-cup. Sea c una p–cocadena, c' una q–cocadena e i un entero no negativo. Entonces

$$\delta(c \smile_i c') = (-1)^{p+q-i} c \smile_{i-1} c' + (-1)^{pq+p+q} c' \smile_{i-1} c + \delta c \smile_i c' + c \smile_i \delta c'\,. \tag{1.6}$$

Y si $c = c'$ es un cociclo entonces

$$\delta(c \smile_i c) = ((-1)^{p+q-i} + (-1)^{pq+p+q}) c \smile_{i-1} c = 0 \quad \mod 2\,.$$

Los cuadrados de Steenrod

$$Sq^k : H^p(X; \mathbb{F}_2) \to H^{p+k}(X; \mathbb{F}_2)$$

se definen como:

$$Sq^k(c) = \begin{cases} c \smile_{p-k} c, & \text{si } k \leq p, \\ 0, & \text{si } k > p, \end{cases} \tag{1.7}$$

donde $c \in C^p(X; \mathbb{F}_2)$ es un cociclo.

El método de los modelos acíclicos fue desarrollado en un principio por Eilenberg y Mac Lane en [EM53a] y posteriormente por Dold [Dol61]. Puede considerarse, en el contexto simplicial como un proceso constructivo; pero se obtienen así fórmulas extremadamente recursivas para los morfismos D_i.

Por otra parte, en [Car50], H. Cartan obtuvo una fórmula para evaluar un cuadrado de Steenrod aplicado al producto cup de dos clases de cohomología f y g:

$$Sq^n(f \smile g) = \sum_{0 \leq r \leq n} Sq^r(f) \smile Sq^{n-r}(g).$$

Wu en [Wu50, Wu52] conjeturó ciertas relaciones acerca de los cuadrados de Steenrod que demostró Adem en [Ade52, Ade58] y son llamadas relaciones de Adem:

$$Sq^i Sq^j = \sum_{0 \leq k \leq \lfloor i/2 \rfloor} \binom{j-k-1}{i-2k} Sq^{i+j-k} Sq^k;$$

para todo $0 < i < 2j$ y donde $\lfloor i/2 \rfloor$ denota el mayor entero que sea menor o igual que $i/2$ y los coeficientes binomiales son mod 2.

El álgebra de Steenrod $\mathcal{A}$ puede ser definido formalmente como el álgebra graduada asociativa con coeficientes en $\mathbb{F}_2$, generada por los símbolos Sq^k, para todo $k \geq 0$, sujetos a las relaciones de Adem y $Sq^0 = 1$.

Serre, en su trabajo sobre la cohomología de los espacios Eilenberg–Mac Lane para un grupo de orden 2 [Ser53], dio un método para derivar las relaciones de Adem en términos de cierta representación de $\mathcal{A}$ en la cohomología de un producto infinito de espacios proyectivos reales. Sea $W = \mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_n, \ldots]$ el álgebra polinomial sobre los enteros con un número infinito numerable de variables x_i que conmutan entre ellas. Denotemos por $W \otimes R$ al álgebra polinomial $R[x_1, \ldots, x_n, \ldots]$ sobre un anillo conmutativo R. Sea $W(n)$ el subálgebra de W generada por las primeras n variables y W_d el subgrupo abeliano de polinomios homogéneos de grado d.

El hecho de que el anillo de cohomología de un producto infinito de infinitos espacios proyectivos es isomorfo a $W \otimes \mathbb{F}_2$, da la clave para enlazar el desarrollo puramente algebraico del álgebra de Steenrod y la siguiente caracterización de los cuadrados de Steenrod por su acción en los polinomios:

Lema 1.4.1 *Los cuadrados de Steenrod están unívocamente determinados por las siguientes condiciones*

(1) $Sq^k : W_d \otimes \mathbb{F}_2 \to W_{d+k} \otimes \mathbb{F}_2$ *son transformaciones lineales.*

(2) Sq^0 *es la identidad.*

(3) $Sq^i(x_i) = x_i^2$ *para* $i > 0$ *y* $Sq^k(x_i) = 0$ *para* $k > i$.

(4) $Sq^n(fg) = \sum_{0 \leq r \leq n} Sq^r(f) Sq^{n-r}(g)$ *para polinomios* f *y* g.

Capítulo 2.

Un método combinatorial para determinar operaciones de Steenrod

Capítulo 2.

Un método combinatorial para determinar operaciones de Steenrod

El objetivo de este capítulo es encontrar fórmulas simpliciales para las operaciones de Steenrod a nivel de cociclos. De esta manera, en el caso en que trabajemos con un conjunto simplicial finito, obtenemos una completa descripción de la operación cohomológica $\mathcal{O}$ en términos de operadores cara que nos permite el cálculo real del cociclo $\mathcal{O}(c)$, a partir de otro cociclo c. Evidentemente, al evitar el aspecto cohomológico en este método, en principio, no obtenemos respuesta a la pregunta de si $\mathcal{O}(c)$ es un coborde o no. Sin embargo, esta organización combinatorial nos da un primer método de cálculo general para detectar cociclos representativos (posiblemente no nulos) de los grupos de cohomología de X. Además, este algoritmo es susceptible de ser sustancialmente mejorado combinándolo con propiedades algebraicas bien conocidas de estas operaciones. Precisemos pues que cada vez que digamos que disponemos de una formulación de una operación cohomológica, queremos significar que esta descripción se hará a nivel de cociclos representativos de clases.

Recientemente, muchos autores han intentado reformular varios conceptos de la Topología Algebraica, consiguiendo métodos que nos proporcionan algoritmos de cálculo en este área. Uno de estos conceptos son los cuadrados de Steenrod. La definición original dada por Steenrod [Ste47] no era muy conveniente para el estudio de sus propiedades. Cincuenta años después, las operaciones de Steenrod son unos de los más importantes conceptos en Topología Algebraica y da una idea de la maravillosa visión de Steenrod. En este capítulo establecemos una conexión entre las fórmulas del operador Alexander–Whitney y la definición más antigua de los cuadrados de Steenrod. De esta forma, establecemos una relación profunda entre los resultados "teóricos" conocidas desde hace mucho tiempo para los cuadrados de Steenrod y trabajos concretos recientes sobre Topología Algebraica Computacional.

En la primera sección de este capítulo, exponemos el trabajo hecho en [Rea96], donde se desarrolla un método para dar, de forma explícita, las fórmulas generales de una mejor aproximación diagonal (D_i) trabajando con conjuntos simpliciales. Concretamente, estas fórmulas son establecidas en términos de los morfismos componentes de una contracción Eilenberg–Zilber dada. En estas fórmulas, aparece siempre involucrado el operador de homotopía de la contracción, que hace que la complejidad de los D_i aplicado sobre un elemento de grado n, medida en términos del número de sumandos sea, al menos, de orden 2^n. De todas formas, en el caso en que el conjunto simplicial X es finito en cada dimensión, obtenemos un algoritmo (aunque de complejidad muy alta) para calcular cocadenas de X usando los cuadrados de Steenrod.

En la segunda sección, siguiendo un proceso de normalización, simplificamos las fórmulas de [Rea96] en términos, únicamente, de los operadores cara de un conjunto simplicial dado y de esta forma, eliminamos la complejidad exponencial que aparecía antes en la fórmula explícita de los D_i.

En la tercera sección, siguiendo el mismo esquema que en la primera, damos fórmulas explícitas de las potencias reducidas de Steenrod a nivel de cociclos.

Por último, en la cuarta sección, describimos un proceso de normalización más potente que el usado en la segunda sección, simplificamos la fórmula de la primera y la segunda potencia reducida de Steenrod y damos un esquema del método que podríamos seguir para intentar conseguir plasmar una completa descripción combinatorial de todas las operaciones cohomológicas de Steenrod.

2.1 Determinación de una "mejor aproximación diagonal"

En vista de la enorme cantidad de literatura existente acerca de los métodos para definir los cuadrados de Steenrod (ver [Woo98] para obtener una lista no exhaustiva), nos parece necesario señalar que la presentación que se hace en [Rea96] y que aquí mostraremos, puede ser útil para una mejor comprensión de las estructuras subyacentes que nos permiten determinar el tipo de homotopía de los espacios, a la vez que es nuestro punto de partida, como veremos posteriormente, para aproximarnos algorítmicamente a las operaciones cohomológicas.

Es bien conocido que no es posible construir una contracción Eilenberg–Zilber con el morfismo proyección AW conmutativo (ver, por ejemplo, [Mas80, Sec. 8.5]), es decir, asumiendo que $X = Y$, entonces $AWt \neq AW$.

Por otra parte, este operador determina el producto cup (definido en la página 26) en cohomología.

En esta sección, comentaremos pues el trabajo de [Rea96] donde se establece una nueva relación entre la falta de conmutatividad del operador Alexander–Whitney y la construcción de un "mejor coproducto" que nos permita definir los cuadrados de Steenrod y las potencias reducidas de Steenrod. Obtenemos este resultado haciendo uso del siguiente teorema:

Teorema 2.1.1 *[Rea96] Sean A y B dos DG–módulos y sea $c = (f, g, \phi) : A \Rightarrow B$ una contracción de A en B. Sea $h : A \to A$ un morfismo idempotente de DG–módulos. Supongamos que la siguiente relación se cumple:*

$$\phi h g = 0 \tag{2.1}$$

Entonces, existe una secuencia de morfismos $\{f_i : A \to B\}_{i \geq 0}$ de grado i, tal que

$$h_0 = f, \qquad d_B h_i + (-1)^{i+1} h_i d_A = h' h_{i-1} + (-1)^i h_{i-1} h \qquad \forall i \geq 1, \tag{2.2}$$

donde $h' = fhg$.

Además, una fórmula explícita de los morfismo h_i es

$$h_i = f(h\phi)^i, \qquad \forall i \geq 0. \tag{2.3}$$

Demostración

Para demostrar este resultado, probemos primero que se verifica la siguiente condición:

$$\phi d_A h \phi h \phi = -\phi h \phi h\, d_A \phi. \tag{2.4}$$

Usando la propiedad (c2) de la definición de contracción y la idempotencia del morfismo h, tenemos que

$$h(gf - d_A\phi - \phi d_A)h = 1_A;$$

y, componiendo a izquierda a ambos miembros de la igualdad con el operador de homotopía ϕ, obtenemos

$$\phi hgfh\phi - \phi hd_A\phi h\phi - \phi h\phi d_A h\phi = \phi\phi.$$

Como h es un morfismo de DG-módulos y teniendo en cuenta las relaciones (2.1) y (c5), concluimos que

$$\phi d_A h\phi h\phi = -\phi h\phi hd_A\phi.$$

De (2.4) podemos fácilmente deducir la igualdad:

$$\phi d_A(h\phi)^i = (-1)^{i-1}(\phi h)^i d_A\phi, \qquad \forall i \geq 1; \tag{2.5}$$

y esta última relación nos permite demostrar la relación (2.2). Veamos esto último.

Si $i = 1$, entonces hay que demostrar que

$$d_B fh\phi + fh\phi d_A = fhgf - fh\,. \tag{2.6}$$

Usando la propiedad (c2) de la definición de contracción, tenemos que

$$d_B fh\phi + fh\phi d_A = d_B fh\phi + fh(gf - 1_A - d_A\phi)$$

(como f y g son morfismo de DG-módulos)

$$= d_B fh\phi + fhgf - fh - fhd_A\phi = fhd_A\phi + fhgf - fh - fhd_A\phi = fhgf - fh.$$

Si $i > 1$, entonces

$$\begin{aligned} d_B h_i - (-1)^i h_i d_A &= d_B f(h\phi)^i + (-1)^{i+1} f(h\phi)^i d_A \\ &= d_B f(h\phi)^i + (-1)^{i+1} fh(\phi h)^{i-1}\phi d_A \end{aligned}$$

(usando la propiedad (c2) obtenemos)

$$\begin{aligned} &= d_B f(h\phi)^i + (-1)^{i+1} fh(\phi h)^{i-1}(gf - 1_A - d_A\phi) \\ &= d_B f(h\phi)^i + (-1)^{i+1} fh(\phi h)^{i-1} gf + (-1)^i fh(\phi h)^{i-1} + (-1)^i fh(\phi h)^{i-1} d_A\phi \end{aligned}$$

(por (2.1) y (2.5) tenemos)

$$\begin{aligned} &= fhd_A\phi(h\phi)^{i-1} + (-1)^i f(h\phi)^{i-1}h + fh\phi d_A(h\phi)^{i-1} \\ &= fh(d_A\phi + \phi d_A)(h\phi)^{i-1} + (-1)^i f(h\phi)^{i-1}h \end{aligned}$$

(considerando las propiedades (**c3**) y (**c2**) de la contracción, la idempotencia de h y la fórmula (2.3), obtenemos)

$$\begin{aligned} &= fh(gf - 1_A)(h\phi)^{i-1} + (-1)^i h_{i-1}h \\ &= (fhg)f(h\phi)^{i-1} - fhh\phi(h\phi)^{i-2} + (-1)^i h_{i-1}h \\ &= h'h_{i-1} + (-1)^i h_{i-1}h. \end{aligned}$$

□

Apliquemos este teorema a un caso concreto. Partamos de una contracción Eilenberg–Zilber $c_{EZ} = (AW, EML, SHI) : C_*^N(X \times X) \Rightarrow C_*^N(X) \otimes C_*^N(X)$ y consideremos las permutaciones cíclicas t y T definidas en la página 22.

De ahora en adelante, denotaremos a las diferenciales de $C_*^N(X)$, $C_*^N(X \times X)$ y $C_*^N(X) \otimes C_*^N(X)$ por d, $d_\times$ y $d_\otimes$ respectivamente.

Usando que $t\ EML = EML\ T$ (visto en la página 25), podemos establecer fácilmente que $SHI\, t\, EML = 0$.

Aplicando el teorema 2.1.1, obtenemos que existe una secuencia de morfismos

$$\{h_i : C_*^N(X \times X) \to C_*^N(X) \otimes C_*^N(X)\}_{i \geq 0}$$

de grado i, siendo $h_0 = AW$ y $h_i = AW(t\,SHI)^i$, $\forall i \geq 1$; verificando que

$$d_\otimes h_i - (-1)^i h_i d_\times = T h_{i-1} + (-1)^i h_{i-1} t \qquad \text{si } i \geq 1.$$

Y podemos construir una mejor aproximación diagonal $\{D_i\}_{i \geq 0}$, donde el morfismo

$$D_i : C_*^N(X) \to C_*^N(X) \otimes C_*^N(X)$$

es

$$D_i = h_i \Delta,$$

siendo Δ el morfismo diagonal ya definido en el capítulo primero.

Donde el morfismo D_1 es un morfismo de DG–módulos (la aproximación diagonal de Alexander–Whitney) y los morfismo D_i, $i \geq 2$, satisfacen las relaciones:

$$d_\otimes D_i - (-1)^i D_i d = T\, D_{i-1} + (-1)^i D_{i-1}. \tag{2.7}$$

En particular, dado un conjunto simplicial X y un grupo G, la fórmula explícita de un productos i–cup aplicado sobre una cocadena $c \in C^p(X;G)$ y otra $c' \in C^q(X;G)$ es

$$c \smile_i c' = \mu(c \otimes c)D_i \in C^{p+q-i}(X;G)$$

donde μ es la multiplicación inducida por la operación de grupo en G.

Como los cuadrados de Steenrod pueden ser definidos a partir de los productos i–cup, entonces la fórmula de estas operaciones cohomológicas $Sq^i : H^q(X;\mathbb{F}_2) \to H^{q+i}(X;\mathbb{F}_2)$, a nivel de cociclos, es:

$$Sq^i(c)(x) = \begin{cases} \mu(c \otimes c)AW(t\,SHI)^{q-i}(x \times x), & \text{si } i \leq q, \\ 0, & \text{si } i > q, \end{cases}$$

donde $c \in C^q(X;\mathbb{F}_2)$, $x \in C^N_{q+i}(X)$ y μ es el producto natural en $\mathbb{F}_2$.

Parece claro que, al menos en el caso en que X es finito en cada grado, esta fórmula combinatorial constituye un verdadero algoritmo.

2.2 Una descripción combinatorial explícita de los productos i–cup

En la anterior sección, la fórmula para los morfismos D_i se establece en términos de los morfismos componentes de una contracción Eilenberg–Zilber dada de $C^N_*(X \times X)$ en $C^N_*(X) \otimes C^N_*(X)$, siendo X un conjunto simplicial.

Se nos presenta ahora los siguientes problemas. Por una parte, los morfismos componentes de la contracción anterior vienen definidos en términos de operadores de cara y degeneración del conjunto simplicial X. Por otra parte, la fórmula de un morfismo D_i implica siempre el uso del operador de homotopía de la contracción Eilenberg–Zilber, y la fórmula explícita de este último morfismo está determinada por shuffles de operadores de degeneración. En consecuencia, el número de sumandos que aparecen en la fórmula de un morfismo D_i evaluado sobre un elemento de grado n es, en general, al menos del orden de 2^n. Entonces, un algoritmo diseñado a partir de estas fórmulas sería demasiado lento en la práctica como para ser implementado.

Debido a esto, la idea de simplificar estas fórmulas aparece de manera natural. Esta simplificación o normalización se basa en el hecho de que toda composición de operadores de cara y degeneración de un conjunto simplicial X puede ser escrito en una forma normalizada (ver el lema 1.1.1).

Además, teniendo en cuenta que la imagen de un morfismo D_i está en $C_*^N(X) \otimes C_*^N(X)$, aquellos sumandos de la fórmula simplificada de D_i de forma que uno de sus factores tiene operadores de degeneración en su expresión, puede ser eliminado. La razón es que este factor aplicado a un elemento del conjunto simplicial X es cero en el complejo de cadenas normalizado asociado a X. De esta forma, obtenemos una fórmula más simple de los morfismos D_i. Por ejemplo, si X es un conjunto simplicial, c un cociclo de dimensión 2 y x un elemento de $C_3^N(X)$, el número de sumandos que harían falta para calcular la fórmula descrita por Real en [Rea96] de $Sq^1(c)(x)$ es de 55. Usando las técnicas de "normalización" que acabamos nombrar, el número de sumandos se reduce a 2.

En esta sección, explicamos cómo "simplificar" las fórmulas (1.7) dado una definición explícita de los cuadrados de Steenrod en términos de los operadores cara de X.

Como resaltaremos más adelante, esta descripción puede ser considerada como una traslación directa de la definición más antigua de los cuadrados de Steenrod (ver [Ste47]) al marco general de la Topología Simplicial. Por otra parte, esta maquinaria combinatorial puede ser mejorada sustancialmente combinándola con las propiedades bien conocidas de los cuadrados de Steenrod [Ade52, SE62] y técnicas avanzadas para calcular cociclos (ver, por ejemplo, [EGL97, Lam97]).

Comenzaremos enunciando el teorema fundamental de esta sección. La subsección 2.2.1 está enteramente dedicada a su demostración. Más adelante, en la sección 2.4 veremos una demostración mucho más escueta basadas en técnicas más potentes de normalización.

Teorema 2.2.1 *Sea Λ el anillo base y X un conjunto simplicial. Consideremos la contracción Eilenberg–Zilber de $C_*^N(X \times X)$ en $C_*^N(X) \otimes C_*^N(X)$. Entonces, el morfismo*

$$h_n = AW(t\,SHI)^n : C_m^N(X \times X) \to (C_*^N(X) \otimes C_*^N(X))_{m+n}$$

se puede expresar de la forma:

- *si n es par,*

$$
\begin{aligned}
AW(t\,SHI)^n = & \sum_{n\leq i_n\leq m}\ \sum_{n-1\leq i_{n-1}\leq i_n-1}\cdots\sum_{0\leq i_0\leq i_1-1}(-1)^{A(n)+B(n,m,\bar{i})+C(n,\bar{i})+D(n,m,\bar{i})}\\
& \partial_{i_0+1}\cdots\partial_{i_1-1}\partial_{i_2+1}\cdots\cdot\partial_{i_{n-1}-1}\partial_{i_n+1}\cdots\partial_m\\
& \otimes\partial_0\cdots\partial_{i_0-1}\partial_{i_1+1}\cdots\cdot\partial_{i_{n-2}-1}\partial_{i_{n-1}+1}\cdots\partial_{i_n-1}\,;
\end{aligned}
$$

- *si n es impar,*

$$
\begin{aligned}
AW(t\,SHI)^n = & \sum_{n\leq i_n\leq m}\ \sum_{n-1\leq i_{n-1}\leq i_n-1}\cdots\sum_{0\leq i_0\leq i_1-1}(-1)^{A(n)+B(n,m,\bar{i})+C(n,\bar{i})+D(n,m,\bar{i})}\\
& \partial_{i_0+1}\cdots\partial_{i_1-1}\partial_{i_2+1}\cdots\cdot\partial_{i_{n-2}-1}\partial_{i_{n-1}+1}\cdots\partial_{i_n-1}\\
& \otimes\partial_0\cdots\partial_{i_0-1}\partial_{i_1+1}\cdots\cdot\partial_{i_{n-1}-1}\partial_{i_n+1}\cdots\partial_m\,;
\end{aligned}
$$

donde

$$
A(n) = \begin{cases} 1 & si\ n\equiv 3,4,5,6\ mod\ 8\,,\\ 0 & en\ otro\ caso \end{cases}\quad;
$$

$$
B(n,m,\bar{i}) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{0\leq j\leq\left[\frac{n}{2}\right]} i_{2j} & si\ n\equiv 1,2\ mod\ 4\,,\\ \displaystyle\sum_{0\leq j\leq\left[\frac{n-1}{2}\right]} i_{2j+1}+nm & si\ n\equiv 0,3\ mod\ 4\,; \end{cases}
$$

$$
C(n,\bar{i}) = \sum_{1\leq j\leq\left[\frac{n}{2}\right]}(i_{2j}+i_{2j-1})(i_{2j-1}+\cdots+i_0)\,;
$$

y

$$
D(n,m,\bar{i}) = \begin{cases} (m+i_n)(i_n+\cdots+i_0) & si\ n\ es\ impar\ ,\\ 0 & si\ n\ es\ par\,. \end{cases}
$$

donde $\bar{i}=(i_0,i_1,\ldots,i_n)$.

Una primera consecuencia del teorema anterior es que teniendo en cuenta que el producto i–cup (definido en la página 28) de una p–cocadena $c\in C^p(X;G)$ y una q–cocadena $c'\in C^q(X;G)$ viene dado por:

$$
c\smile_i c'(x) \;=\; \mu(c\otimes c')D_i(x), \qquad i\geq 0
$$

donde $x\in C^N_{p+q-i}(X)$, uno inmediatamente obtiene la descripción simplicial de estas fórmulas. De manera análoga, como los cuadrados de Steenrod se definen a partir de los productos i–cup, se puede dar una definición combinatorial de estas operaciones.

Es necesario decir algunas palabras para poder evaluar la novedad de toda esta formulación combinatorial. Las siguientes observaciones históricas se pueden encontrar [Die89, Cap. VI, Sec. 1.B, p. 511]. En 1947, Steenrod [Ste47] generalizó la definición de Čech–Whitney del producto cup para un complejo simplicial finito K (en nuestro contexto, podemos considerar a K como un conjunto simplicial poliedral [May67]). La idea era mantener varios vértices en común entre ambos factores de la "descomposición" del símplice considerado, en lugar de sólo uno como ocurre en el producto cup. De esta forma, Steenrod estableció fórmulas para el producto i–cup, que eran, según sus propias palabras, "difíciles de manejar". Él demostró que las operaciones cohomológicas inducidas por esta descripción poco manejable eran, en efecto, independientes del orden elegidos en los vértices de K.

Teniendo esto en cuenta, nos atrevemos a decir que se redescubre esta antigua descripción dada por Steenrod y se clarifica en un contexto combinatorial general. Por otro lado, es importante notar que se determinan completamente los signos involucrados en las fórmulas de los productos i–cup.

2.2.1 Demostración del teorema principal

La demostración del teorema 2.2.1 consiste en encontrar los factores de la fórmula (escrita en forma normalizada) que son degenerados y en eliminar los sumandos tales que alguno de sus factores son degenerados.

Antes de nada, debemos darnos cuenta de que usando las propiedades de conmutatividad de los operadores de un conjunto simplicial (esencialmente, (**s3**)), es fácil ver que un factor de la fórmula cuya expresión comience (a la izquierda) por

$$\partial_{j_1} \cdots \partial_{j_t} s_k \cdots \tag{2.8}$$

siendo $0 \leq j_1 < \cdots < j_t < k$, es degenerado en su forma simplificada.

Después de haber dicho esto, comencemos con la demostración del teorema.

Para $n = 0$, obtenemos la fórmula explícita del operador Alexander–Whitney.

Asumamos que la fórmula es cierta para $k \leq n$ y así, probemos que también es cierta para el caso $n + 1$.

Consideremos que n es par (pues si n es impar, la demostración es similar). En este caso, por hipótesis de inducción, la fórmula sobre un elemento de grado m es:

$$
\begin{aligned}
AW\,(t\,SHI)^{n+1} &= \quad AW\,(t\,SHI)^{n}\,(t\,SHI) \\
&= \sum_{n\leq i_n\leq m+1}\cdots\sum_{0\leq i_0\leq i_1-1}\quad\sum\quad(-1)^{A(n)+B(n,m+1,\bar{i})+C(n,m+1,\bar{i})+D(n,\bar{i})}(-1)^{\bar{m}+\mathrm{sig}(\alpha,\beta)+1} \\
&\qquad \partial_{i_0+1}\cdots\cdot\partial_{i_{n-1}-1}\partial_{i_n+1}\cdots\partial_{m+1}s_{\alpha+\bar{m}}\partial_{\bar{m}}\cdots\partial_{m-q-1} \\
&\qquad \otimes\partial_0\cdots\partial_{i_0-1}\partial_{i_1+1}\cdots\cdot\partial_{i_n-1}s_{\beta+\bar{m}}s_{\bar{m}-1}\partial_{m-q+1}\cdots\partial_m\,;
\end{aligned}
$$

donde $\bar{i}=(i_0,i_1,\ldots,i_n)$, $\bar{m}=m-p-q$, $\mathrm{sig}(\alpha,\beta)=\sum_{1\leq i\leq p+1}\alpha_i-(i-1)$ y la última suma se toma sobre todos los índices

$$\{0\leq p\leq m-q-1\leq m-1,\ (\alpha,\beta)\in\{(p+1,q)\text{-shuffles}\}\,.$$

Recordemos que si la fórmula está en la forma normalizada, los sumandos que tengan un factor degenerado deben ser eliminados.

Si $i_n>m-p$, entonces tenemos que considerar los siguientes casos:

- Si $i_n=m-p+t$ y $\beta_q<q-1+t$, con $1\leq t\leq p$ entonces,

$$\alpha_{p+1}=p+q>\cdots>\alpha_{t+1}=q+t>\alpha_t=q+t-1>\beta_q.$$

  Y por tanto, el primer factor de este tipo de sumandos es:

$$
\begin{aligned}
&\partial_{i_0+1}\cdots\cdot\partial_{i_{n-1}-1}\partial_{m-p+t+1}\cdots\partial_{m+1}s_m\cdots s_{m-p+t-1}s_{\alpha_{t-1}}\cdots s_{\alpha_1}\partial_{\bar{m}}\cdots\partial_{m-q-1} \\
&=\partial_{i_0+1}\cdots\cdot\partial_{i_{n-1}-1}s_{m-p+t-1}s_{\alpha_{t-1}}\cdots s_{\alpha_1}\partial_{\bar{m}}\cdots\partial_{m-q-1}.
\end{aligned}
$$

  Como $i_{n-1}-1<i_n-1=m-p+t-1$, este factor es degenerado por (2.8).

- Si $i_n=m-p+t$ y $\beta_q=q-1+t$, con $1\leq t\leq p$ entonces,

$$\alpha_{p+1}=p+q>\cdots>\alpha_{t+1}=q+t>\beta_q=q+t-1.$$

  Y por tanto, en este caso, la expresión del primer factor tiene la forma:

$$
\begin{aligned}
&\partial_{i_0+1}\cdots\cdot\partial_{i_{n-1}-1}\partial_{m-p+t+1}\cdots\partial_{m+1}s_m\cdots s_{m-p+t}s_{\alpha_t+\bar{m}}\cdots \\
&=\partial_{i_0+1}\cdots\cdot\partial_{i_{n-1}-1}s_{\alpha_t+\bar{m}}\cdots.
\end{aligned}
$$

  Ahora tenemos que considerar dos situaciones diferentes:

– Si $i_{n-1} - 1 < \alpha_t + \bar{m}$ entonces, este factor es degenerado.

– Si $i_{n-1} - 1 \geq \alpha_t + \bar{m}$, denotemos $\alpha_t = q + t - 1 - j$ donde $1 \leq j \leq q + t - 1$. Entonces,

$$\alpha_{p+1} = p + q > \cdots > \alpha_{t+1} = q + t,$$

y

$$\beta_q = q + t - 1 > \cdots > \beta_{q-j+1} = q + t - j > \alpha_t = q + t - 1 - j.$$

Por tanto, el segundo factor de este tipo de sumandos es:

$$\partial_0 \cdots \cdot \partial_{i_{n-2}-1} \partial_{i_{n-1}+1} \cdots \partial_{m-p+t-1} s_{m-p+t-1} \cdots s_{m-p+t-j} s_{\beta_{q-j}+\bar{m}} \cdots$$

$$= \partial_0 \cdots \cdot \partial_{i_{n-2}-1} s_{i_{n-1}} \cdots s_{m-p+t-j} s_{\beta_{q-j}+\bar{m}} \cdots .$$

Como $i_{n-2} - 1 < i_{n-1}$, este factor es degenerado.

- Si $i_n = m - p + t$ y $\beta_q > q - 1 + t$, con $1 \leq t \leq p$ entonces $i_n - 1 < \beta_q + \bar{m}$. Así, el segundo factor de estos sumandos tiene la forma (2.8) y por tanto, estos sumandos deben ser eliminados.

- Si $i_n = m + 1$ y $\beta_q < p + q$, entonces $\alpha_{p+1} = p + q$ y como $i_{n-1} - 1 < i_n - 1 = m$ entonces, el primer factor de estos sumandos es degenerado.

- Si $i_n = m + 1$ y $\beta_q = p + q$ entonces

$$\beta_q = p + q > \cdots > \beta_{j+1} = p + j + 1 > \alpha_{p+1} = p + j$$

con $0 \leq j \leq q - 1$ y el primer factor de estos sumandos es:

$$\partial_{i_0+1} \cdots \cdot \partial_{i_{n-1}-1} s_{m-q+j} s_{\alpha_p+\bar{m}} \cdots s_{\alpha_1+\bar{m}} \partial_{\bar{m}} \cdots \partial_{m-q-1}.$$

Tenemos que considerar dos casos diferentes:

– Si $i_{n-1} - 1 < m - q + j$ entonces, este factor es degenerado.

– Si $i_{n-1} - 1 \geq m - q + j$ entonces el segundo factor de estos sumandos es:

$$\partial_0 \cdots \cdot \partial_{i_{n-2}-1} \partial_{i_{n-1}+1} \cdots \partial_m s_m \cdots s_{m-q+j+1} s_{\beta_j+\bar{m}} \cdots$$

$$= \partial_0 \cdots \cdot \partial_{i_{n-2}-1} s_{i_{n-1}} \cdots s_{m-q+j+1} s_{\beta_j+\bar{m}} \cdots ,$$

que es degenerado ya que $i_{n-2} - 1 < i_{n-1}$.

Si $i_n < m - p$, entonces $i_n - 1 < \beta_q + \bar{m}$. Por tanto, estos sumandos tiene el segundo factor en la forma (2.8) y por tanto, debe ser eliminado.

Si $i_n = m - p$, tenemos los dos siguientes casos:

- Si $\beta_q > q - 1$, entonces el segundo factor de estos sumandos es degenerado, igual que antes.
- Si $\beta_q = q - 1$ y $i_{n-1} > \bar{m} - 2$ entonces

  $$\alpha_{p+1} = p + q > \cdots > \alpha_1 = q > \beta_q = q - 1 > \cdots > \beta_1 = 0,$$

  y el segundo factor de un sumando de este tipo es

  $$\partial_0 \cdot \cdots \cdot \partial_{i_{n-2}-1} \partial_{i_{n-1}+1} \cdots \partial_{m-p-1} s_{m-p-1} \cdots s_{m-p-q-1} \partial_{m-q+1} \cdots \partial_m$$
  $$= \partial_0 \cdot \cdots \cdot \partial_{i_{n-2}-1} s_{i_{n-1}} \cdots s_{m-p-q-1} \partial_{m-q+1} \cdots \partial_m;$$

  y como $i_{n-2} - 1 < i_{n-1}$, este factor es degenerado.

  Finalmente, si $\beta_q = q - 1$ e $i_{n-1} \leq \bar{m} - 2$ entonces la fórmula (salvo signos) correspondiente a $AW\,(t\,SHI)^{n+1}$ es:

  $$\sum_{n-1 \leq i_{n-1} \leq \bar{m}-2} \cdots \sum_{0 \leq i_0 \leq i_1 - 1} \; \sum_{0 \leq q \leq m-1} \; \sum_{0 \leq p \leq m-q-1}$$
  $$\partial_{i_0+1} \cdot \cdots \cdot \partial_{i_{n-1}-1} \partial_{m-p+1} \cdots \partial_{m+1} s_m \cdots s_{m-p} \partial_{\bar{m}} \cdots \partial_{m-q-1}$$
  $$\otimes \partial_0 \cdot \cdots \cdot \partial_{i_{n-2}-1} \partial_{i_{n-1}+1} \cdots \partial_{m-p-1} s_{m-p-1} \cdots s_{\bar{m}-1} \partial_{m-q+1} \cdots \partial_m$$

  $$= \sum_{n+1 \leq i'_{n+1} \leq m} \; \sum_{n \leq i'_n \leq i'_{n+1}-1} \; \sum_{n-1 \leq i_{n-1} \leq i'_n - 1} \cdots \sum_{0 \leq i_0 \leq i_1 - 1}$$
  $$\partial_{i_0+1} \cdot \cdots \cdot \partial_{i_{n-1}-1} \partial_{i'_n+1} \cdots \partial_{i'_{n+1}-1}$$
  $$\otimes \partial_0 \cdot \cdots \cdot \partial_{i_{n-2}-1} \partial_{i_{n-1}+1} \cdots \partial_{i'_n-1} \partial_{i'_{n+1}+1} \cdots \partial_m;$$

  donde $i'_n = \bar{m} - 1$ e $i'_{n+1} = m - q$.

Ahora, estudiemos los signos de la fórmula en este último caso. Teniendo en cuenta que estamos trabajando con los exponentes de (-1), todas las identidades son mod 2.

Esta prueba se basa en el hecho de que si, y sólo si, $i_n = m - p$ y $\beta_q = q - 1$, los sumandos de $AW\,(t\,SHI)^n$ son no degenerados.

Primero, comprobemos la fórmula para $n = 1$. El exponente de (-1) asociado a cada sumando es:

$$\begin{aligned}
\bar{m} + \operatorname{sig}(\alpha,\beta) + 1 &= \bar{m} + \sum_{1\le i\le p+1} \alpha_i - (i-1) + 1 \\
&= \bar{m} + \sum_{1\le i\le p+1} (q - 1 + i - (i-1)) + 1 \\
&= \bar{m} + q(p+1) + 1 = i_0 + (m + i_1)(i_0 + i_1) \\
&= A(1) + B(1, m, \bar{i}) + C(1, \bar{i}) + D(1, m, \bar{i}) \quad \bmod 2;
\end{aligned}$$

notando $i_0 = \bar{m} - 1$, $i_1 = m - q$ y donde $\bar{i} = (i_0, i_1)$, como afirmábamos.

En general, tenemos que probar que

$$A(n) + B(n, m+1, \bar{i}) + C(n, \bar{i}) + D(n, m+1, \bar{i}) + \bar{m} + \operatorname{sig}(\alpha,\beta) + 1$$

$$= A(n+1) + B(n+1, m, \bar{i}) + C(n+1, \bar{i}) + D(n+1, m, \bar{i}) \quad \bmod 2.$$

- Si n es par entonces $D(n, m+1, \bar{i}) = 0$ y el exponente de (-1) en cada sumando es:

$$\begin{aligned}
&A(n) + B(n, m+1, \bar{i}) + C(n, \bar{i}) + \bar{m} + \operatorname{sig}(\alpha,\beta) + 1 \\
&= A(n) + B(n, m+1, \bar{i}) + C(n-1, \bar{i}) \\
&\quad + (m + p + i_{n-1})(i_{n-1} + \cdots + i_0) + \bar{m} + q(p+1) + 1 \\
&= A(n) + B(n, m+1, \bar{i}) + C(n-1, \bar{i}) \\
&\quad + (m + 1 + i'_{n+1} + i'_n + i_{n-1})(i_{n-1} + \cdots + i_0) \\
&\quad + i'_n + (m + i'_{n+1})(i'_{n+1} + i'_n) \\
&= A(n) + B(n, m+1, \bar{i}) + C(n-1, \bar{i}) + i_{n-1} + \cdots + i_0 \\
&\quad + (i'_n + i_{n-1})(i_{n-1} + \cdots + i_0) + (m + i'_{n+1})(i_{n-1} + \cdots + i_0) \\
&\quad + i'_n + (m + i'_{n+1})(i'_{n+1} + i'_n) \\
&= A(n) + B(n, m+1, \bar{i}) + i'_n + i_{n-1} + \cdots + i_0 \\
&\quad + C(n+1, \bar{i}) + D(n+1, m, \bar{i}) \quad \bmod 2.
\end{aligned}$$

  donde $i'_n = \bar{m} - 1$, $i'_{n+1} = m - q$.

  Tenemos que distinguir dos casos:

– Si $n = 0 \bmod 4$ entonces $A(n) = A(n+1)$ y

$$\begin{aligned}
&A(n) + B(n, m+1, \bar{i}) + i'_n + i_{n-1} + \cdots + i_0 \\
&= A(n+1) + \sum_{0 \le j \le \frac{n-2}{2}} i_{2j+1} + i'_n + i_{n-1} + \cdots + i_0 \\
&= A(n+1) + \sum_{0 \le j \le \frac{n-2}{2}} i_{2j} + i'_n \\
&= A(n+1) + B(n+1, m, \bar{i}) \mod 2.
\end{aligned}$$

– Si $n = 2 \bmod 4$ entonces $A(n) = A(n+1) + 1$ y

$$\begin{aligned}
&A(n) + B(n, m+1, \bar{i}) + i'_n + i_{n-1} + \cdots + i_0 \\
&= A(n+1) + 1 + \sum_{0 \le j \le \frac{n-2}{2}} i_{2j} + m + p + i'_n + i_{n-1} + \cdots + i_0 \\
&= A(n+1) + 1 + \sum_{0 \le j \le \frac{n-2}{2}} i_{2j} + m + i'_{n+1} + i'_n + 1 \\
&\quad + i'_n + i_{n-1} + \cdots + i_0 \\
&= A(n+1) + \sum_{0 \le j \le \frac{n-2}{2}} i_{2j+1} + i'_{n+1} + m \\
&= A(n+1) + B(n+1, m, \bar{i}) \mod 2.
\end{aligned}$$

- Si n es impar entonces el exponente de (-1) es:

$$\begin{aligned}
&A(n) + B(n, m+1, \bar{i}) + C(n, \bar{i}) + D(n, m+1, \bar{i}) + \bar{m} + \operatorname{sig}(\alpha, \beta) + 1 \\
&= A(n) + B(n, m+1, \bar{i}) + C(n, \bar{i}) \\
&\quad + (m + 1 + m + p)(m + p + i_{n-1} + \cdots + i_0) + \bar{m} + q(p+1) + 1 \\
&= A(n) + B(n, m+1, \bar{i}) + C(n, \bar{i}) \\
&\quad + (i'_{n+1} + i'_n)(m + 1 + i'_{n+1} + i'_n + i_{n-1} + \cdots + i_0) \\
&\quad + i'_n + (m + i'_{n+1})(i'_{n+1} + i'_n) \\
&= A(n) + B(n, m+1, \bar{i}) + C(n, \bar{i}) + (i'_{n+1} + i'_n)(i'_n + i_{n-1} + \cdots + i_0) \\
&\quad + i'_{n+1} + i'_n + (i'_{n+1} + i'_n)(m + i'_{n+1}) + i'_n + (m + i'_{n+1})(i'_{n+1} + i'_n) \\
&= A(n) + B(n, m+1, \bar{i}) + C(n, \bar{i}) \\
&\quad + (i'_{n+1} + i'_n)(i'_n + i_{n-1} + \cdots + i_0) + i'_{n+1} \\
&= A(n) + B(n, m+1, \bar{i}) + i'_{n+1} + C(n+1, \bar{i}) + D(n+1, m, \bar{i}) \mod 2.
\end{aligned}$$

donde $i'_n = \bar{m} - 1$, $i'_{n+1} = m - q$.

Como n es impar entonces $n = 1, 3, 5, 7 \mod 8$ y, en estos casos, $A(n) = A(n+1)$.

Ahora, tenemos que distinguir dos situaciones diferentes:

– Si $n = 1 \mod 4$ entonces

$$\begin{aligned} B(n, m+1, \bar{i}) + i'_{n+1} &= \sum_{0 \le j \le \frac{n-1}{2}} i_{2j} + i'_{n+1} = \sum_{0 \le j \le \frac{n+1}{2}} i_{2j} \\ &= B(n+1, m, \bar{i}) \mod 2. \end{aligned}$$

– Si $n = 3 \mod 4$ entonces

$$\begin{aligned} B(n, m+1, \bar{i}) + i'_{n+1} &= \sum_{0 \le j \le \frac{n-3}{2}} i_{2j+1} + i_n + m + 1 + i'_{n+1} \\ &= \sum_{0 \le j \le \frac{n-3}{2}} i_{2j+1} + i'_n + m + 1 + m + 1 \\ &= \sum_{0 \le j \le \frac{n-1}{2}} i_{2j+1} = B(n+1, m, \bar{i}) \mod 2. \end{aligned}$$

□

2.3 Generalización a potencias reducidas de Steenrod

Steenrod en [Ste52] obtuvo unas nuevas operaciones cohomológicas llamadas potencias reducidas de Steenrod, que generalizaba los cuadrados de Steenrod. Él demostró (usando el método de los modelos acíclicos) que, dado un conjunto simplicial X y un número primo p, existe una familia infinita de morfismos, $\{D_i\}_{i \ge 0}$, del complejo de cadenas normalizado de X al producto tensorial p–ésimo $C_*^N(X)^{\otimes p}$ verificando que

$$d_\otimes D_i + (-1)^{i+1} D_i d = \alpha_i D_{i-1}\,; \tag{2.9}$$

donde d y $d_\otimes$ denotan, respectivamente, la diferencial en $C_*^N(X)$ y en $C_*^N(X)^{\otimes p}$; y $\alpha_i : C_*^N(X)^{\otimes p} \to C_*^N(X)^{\otimes p}$ se define como:

$$\alpha_i = \begin{cases} T - 1 & \text{si } i \text{ es impar,} \\ 1 + T + \cdots + T^{p-1} & \text{si } i \text{ es impar;} \end{cases} \tag{2.10}$$

donde T denota la permutación cíclica en $C_*^N(X)^{\otimes p}$ definida en el capítulo de preliminares.

Además si $\{D_i\}_{i\geq 0}$ y $\{D_i'\}_{i\geq 0}$ verifican las relaciones anteriormente escritas, entonces existe una secuencia de morfismos $F_i : C_*^N(X) \to C_*^N(X^{\times p})$ de grado i verificando que

$$d_{\otimes}F_{i+1} = D_i - D_i' - \alpha_i F_i + (-1)^{i+1} F_{i+1} d\,. \tag{2.11}$$

A partir de los D_i, las operaciones cohomológicas potencias reducidas de Steenrod $\mathcal{P}_i^p : H1(X;\mathbb{F}_p) \to H^{pq-i}(X;\mathbb{F}_p)$ a nivel de cociclos se definen como sigue:

$$\mathcal{P}_i^p(c) = \mu c^{\otimes p} D_i \tag{2.12}$$

siendo c un q–cociclo y μ el producto natural en $\mathbb{F}_p$.

Como ya vimos en la seccion 2.1, es posible establecer fórmulas para los morfismos $\{D_i\}$ en términos de los morfismos componentes de una contracción Eilenberg–Zilber dada. De una manera análoga, vamos a demostrar que este resultado puede ser generalizado a las potencias reducidas de Steenrod [SE62].

Consideremos una contracción

$$c = (f, g, \phi) : C_*^N(X^{\times p}) \to C_*^N(X)^{\otimes p}\,,$$

que consiste en la composición apropiada de contracciones Eilenberg–Zilber. Consideremos también la diagonal Δ y los automorfismo t y T definidos en la página 22.

La igualdad $tg = gT$ es debida a la asociatividad del morfismo EML ya que se "comporta" bien con los morfismos t y T (para más detalles ir a la página 25).

Tomemos una familia de automorfismos $\{\gamma_i\}_{i\geq 0}$ definida por

$$\gamma_{2j-1} = t \qquad \text{y} \qquad \gamma_{2j} = t + t^2 + \cdots + t^{p-1}$$

y sea $\gamma = \gamma_i\gamma_{i-1} = t^2 + t^3 + \cdots + t^{p-1} + 1$.

Antes de probar el resultado principal de esta sección, necesitamos las siguientes proposiciones.

Proposición 2.3.1 *Sea p un número primo impar y sea i un entero no negativo, entonces*

$$\phi d\gamma_i\cdots\phi\gamma_1\phi \;=\; (-1)^{i-1}\phi\gamma_i\cdots\phi\gamma_1 d\phi+\sum_{1\le k\le i-1}(-1)^{i-k}\phi\gamma_i\cdots\phi\gamma_{k+2}\phi\gamma\phi\gamma_{k-1}\cdots\phi\gamma_1\phi\,.$$

Demostración

Demostremos la proposición por inducción en el parámetro i.

- Si $i=1$ entonces, $\phi d\gamma_1\phi=\phi\gamma_1 d\phi$.
- Si $i=2$ entonces,

$$\begin{aligned}\phi d\gamma_2\phi\gamma_1\phi &= \phi\gamma_2 d\phi\gamma_1\phi=\phi\gamma_2(gf-1-\phi d)\gamma_1\phi\\ &= -\phi\gamma\phi-\phi\gamma_2\phi\gamma_1 d\phi\,.\end{aligned}$$

- En general,

$$\begin{aligned}\phi d\gamma_i\phi\gamma_{i-1}\cdots\phi\gamma_1\phi &= \phi\gamma_i d\phi\gamma_{i-1}\cdots\phi\gamma_1\phi\\ &= \phi\gamma_i(gf-1-\phi d)\gamma_{i-1}\cdots\phi\gamma_1\phi\\ &= -\phi\gamma\phi\gamma_{i-2}\cdots\phi\gamma_1\phi-\phi\gamma_i\phi d\gamma_{i-1}\cdots\phi\gamma_1\phi\end{aligned}$$

(por hipótesis de inducción)

$$\begin{aligned}&= -\phi\gamma\phi\gamma_{i-2}\cdots\phi\gamma_1\phi-(-1)^{i-2}\phi\gamma_i\phi\gamma_{i-1}\cdots\phi\gamma_1 d\phi\\ &\quad -\sum_{1\le k\le i-2}(-1)^{i-1-k}\phi\gamma_i\phi\gamma_{i-1}\cdots\phi\gamma_{k+2}\phi\gamma\phi\gamma_{k-1}\cdots\phi\gamma_1\phi\\ &= (-1)^{i-1}\phi\gamma_i\cdots\phi\gamma_1 d\phi\\ &\quad +\sum_{1\le k\le i-1}(-1)^{i-k}\phi\gamma_i\cdots\phi\gamma_{k+2}\phi\gamma\phi\gamma_{k-1}\cdots\phi\gamma_1\phi\,.\end{aligned}$$

□

Sea $\Gamma_i(k)=f\gamma_i\phi\gamma_{i-1}\cdots\phi\gamma_{k+2}\phi\gamma\phi\gamma_{k-1}\phi\cdots\phi\gamma_1\phi\Delta$. Podemos probar el siguiente resultado.

Proposición 2.3.2 *Sea p un primo impar y sea i un entero no negativo, entonces*

$$f\gamma_i\phi\gamma_{i-1}\cdots\phi\gamma_2\phi\Delta=f\gamma_{i-1}\phi\gamma_{i-2}\cdots\phi\gamma_2\phi\gamma_1\phi\Delta+\sum_{1\le k\le i-1}(-1)^{k+1}\Gamma_i(k)\,.$$

Demostración

Usando que $\gamma_{k+1} = \gamma_k + (-1)^{k+1}\gamma$, para todo k entre 1 e i, tenemos que

$$\begin{aligned}
&f\gamma_i\phi\gamma_{i-1}\cdots\phi\gamma_{k+2}\phi\gamma_{k+1}\phi\gamma_{k-1}\cdots\phi\gamma_1\phi\Delta \\
&= f\gamma_i\phi\gamma_{i-1}\cdots\phi\gamma_{k+2}\phi\gamma_k\phi\gamma_{k-1}\cdots\phi\gamma_1\phi\Delta + (-1)^{k+1}\Gamma_i(k)\,.
\end{aligned}$$

Si usamos esto último sucesivamente, obtenemos la siguiente identidad:

$$f\gamma_i\phi\gamma_{i-1}\cdots\phi\gamma_2\phi\Delta = f\gamma_{i-1}\phi\gamma_{i-2}\cdots\phi\gamma_2\phi\gamma_1\phi\Delta + \sum_{1\leq k\leq i-1}(-1)^{k+1}\Gamma_i(k)\,.$$

□

El resultado principal de esta sección es el siguiente.

Teorema 2.3.3 *Sea p un primo impar y sea i un entero no negativo. Entonces, existe una secuencia de morfismo $\{D_i\}$ definido por*

$$D_i = f\gamma_i\phi\gamma_{i-1}\cdots\phi\gamma_1\phi\Delta\,,$$

verificando que

$$dD_i + (-1)^{i+1}D_i d = \alpha_i D_{i-1}\,,$$

donde $\alpha_{2j-1} = T - 1$ y $\alpha_{2j} = 1 + T + T^2 + \cdots + T^{p-1}$.

Demostración

Comencemos por el primer término de la identidad:

$$\begin{aligned}
dD_i + (-1)^{i+1}D_i d &= df\gamma_i\phi\gamma_{i-1}\cdots\phi\gamma_1\phi\Delta + (-1)^{i+1}f\gamma_i\phi\gamma_{i-1}\cdots\phi\gamma_1\phi\Delta d \\
&= f\gamma_i d\phi\gamma_{i-1}\cdots\phi\gamma_1\phi\Delta \\
&\quad +(-1)^{i+1}f\gamma_i\phi\gamma_{i-1}\cdots\phi\gamma_1(gf - 1 - d\phi)\Delta \\
&= f\gamma_i d\phi\gamma_{i-1}\cdots\phi\gamma_1\phi\Delta \\
&\quad +(-1)^i f\gamma_i\phi\gamma_{i-1}\cdots\phi\gamma_2\phi\Delta + (-1)^i f\gamma_i\phi\gamma_{i-1}\cdots\phi\gamma_1 d\phi\Delta
\end{aligned}$$

(por la proposición 2.3.1, obtenemos)

$$= f\gamma_i d\phi\gamma_{i-1}\cdots\phi\gamma_1\phi\Delta + (-1)^i f\gamma_i\phi\gamma_{i-1}\cdots\phi\gamma_2\phi\Delta$$

$$+(-1)^i(-1)^{i-2}f\gamma_i\phi d\gamma_{i-1}\cdots\phi\gamma_1\phi\Delta$$
$$+\sum_{1\le k\le i-2}(-1)^i(-1)^k f\gamma_i\phi\gamma_{i-1}\cdots\phi\gamma_{k+2}\phi\gamma\phi\gamma_{k-1}\phi\cdots\phi\gamma_1\phi\Delta$$

$$\begin{aligned}
&= f\gamma_i(d\phi+\phi d)\gamma_{i-1}\cdots\phi\gamma_1\phi\Delta \\
&\quad +(-1)^i f\gamma_i\phi\gamma_{i-1}\cdots\phi\gamma_2\phi\Delta+\sum_{1\le k\le i-2}(-1)^{i-k}\Gamma_i(k)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= f\gamma_i(gf-1)\gamma_{i-1}\cdots\phi\gamma_1\phi\Delta \\
&\quad +(-1)^i f\gamma_i\phi\gamma_{i-1}\cdots\phi\gamma_2\phi\Delta+\sum_{1\le k\le i-2}(-1)^{i-k}\Gamma_i(k)
\end{aligned}$$

(sea $\beta_{2j}=T+T^2+\cdots+T^{p-1}$ y $\beta_{2j-1}=T$, entonces)

$$\begin{aligned}
&= \beta_i f\gamma_{i-1}\phi\gamma_{i-2}\cdots\phi\gamma_1\phi\Delta \\
&\quad +(-1)^i f\gamma_i\phi\gamma_{i-1}\cdots\phi\gamma_2\phi\Delta+\sum_{1\le k\le i-1}(-1)^{i-k}\Gamma_i(k)
\end{aligned}$$

(la proposición 2.3.2 implica)

$$\begin{aligned}
&= \beta_i f\gamma_{i-1}\phi\gamma_{i-2}\cdots\phi\gamma_1\phi\Delta+(-1)^i f\gamma_{i-1}\phi\gamma_{i-2}\cdots\phi\gamma_1\phi\Delta \\
&\quad +\sum_{1\le k\le i-1}(-1)^{i+k+1}\Gamma_i(k)+\sum_{1\le k\le i-1}(-1)^{i-k}\Gamma_i(k)
\end{aligned}$$

$$= \alpha_i f\gamma_{i-1}\phi\gamma_{i-2}\cdots\phi\gamma_1\phi\Delta\,.$$

□

Al igual que ocurría con la expresión de los morfismos D_i cuando el anillo base era $\mathbb{F}_2$, todas estas formulas siempre requieren el uso del operador SHI. Entonces, un algoritmo basado en esta formulación es demasiado lento para ser implementado en la práctica.

De la misma forma que ocurría con la definición de los cuadrados de Steenrod, debido al hecho de que toda composición de operadores simpliciales pueden ser escritos en forma normalizada y la imagen de un morfismo D_i definiendo una potencia reducida de Steenrod $\mathcal{P}_i^p$ está en $C_*^N(X)^{\otimes p}$, aquellos sumandos de la fórmula simplificada teniendo operadores de degeneración en su expresión deben ser eliminados.

Como aplicación, mostramos una definición combinatorial de las potencias reducidas de Steenrod a nivel de cadenas en el caso $i=1$.

Teorema 2.3.4 *Sea p un primo impar, $\mathbb{F}_p$ el anillo base y X un conjunto simplicial. Si c es un q–cociclo y $x \in C^N_{pq-1}(X)$ entonces $\mathcal{P}^p_1 : H^q(X;\mathbb{F}_p) \to H^{qp-1}(X;\mathbb{F}_p)$ es*

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{P}^p_1(c)(x)\\
&= \textstyle\sum_{0\le \ell\le p-2}\sum_{I_{(1,0,p-1,m)}} \quad (-1)^{(i_{p-\ell-2}+(i_{p-\ell-2}+i_{p-\ell-1})(i_{p-\ell}+m-1))}\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad \mu(c(\partial_{i_0+1}\cdots\partial_m x)\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad \otimes c(\partial_0\cdots\partial_{i_0-1}\partial_{i_1+1}\cdots\partial_m x)\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad \vdots\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad \otimes c(\partial_0\cdots\partial_{i_{p-\ell-4}-1}\partial_{i_{p-\ell-3}+1}\cdots\partial_m x)\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad \otimes c(\partial_0\cdots\partial_{i_{p-\ell-3}-1}\partial_{i_{p-\ell-2}+1}\cdots\partial_{i_{p-\ell-1}-1}\partial_{i_{p-\ell}+1}\cdots\partial_m x)\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad \otimes c(\partial_0\cdots\partial_{i_{p-\ell}-1}\partial_{i_{p-\ell+1}+1}\cdots\partial_m x)\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad \vdots\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad \otimes c(\partial_0\cdots\partial_{i_{p-2}-1}\partial_{i_{p-1}+1}\cdots\partial_m x)\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad \otimes c(\partial_0\cdots\partial_{i_{p-1}-1}x)\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad \otimes c(\partial_0\cdots\partial_{i_{p-\ell-2}-1}\partial_{i_{p-\ell-1}+1}\cdots\partial_m x));
\end{aligned}
$$

donde μ es el producto natural en $\mathbb{F}_p$, $m = pq-1$ e

$$I_{(1,0,p-1,m)} = \{(i_0,\ldots,i_{p-1}) : 0 \le i_0 \le \cdots \le i_{p-\ell-2} < i_{p-\ell-1} \le \cdots \le i_{p-1}\}.$$

En la sección siguiente daremos la demostración de este teorema haciendo uso de una simple pero potente herramienta de normalización de fórmulas simpliciales.

2.4 Mejora de las técnicas de "normalización" de fórmulas combinatoriales

Nuestro objetivo en esta sección es mostrar cómo mejorar la técnica de normalización hecha en la sección 2.2. Pretendemos, de una manera simple, obtener una definición combinatorial de las fórmulas explícitas de las operaciones cohomológicas de Steenrod en términos de los operadores de cara de X y detectar fácilmente los sumandos que son no degenerados.

Esta sección está dividida en varias partes. En la primera parte, damos las notaciones que usaremos para el proceso de normalización. En la segunda, damos una nueva demostración de las fórmulas explícitas de los productos i–cup, para mostrar la mejora que hemos introducido en nuestras técnicas de normalización. Además damos una nueva expresión, mucho más "natural", de los signos envueltos en la expresión de los productos i–cup. En la tercera parte, normalizamos la fórmula de la primera potencia reducida y en una tercera parte mostramos cómo podríamos continuar calculando el resto de estas operaciones, a modo de ejemplo, simplificamos la expresión de la segunda potencia reducida.

Antes de nada, describimos una nueva notación para poder estudiar de forma sencilla la expresión combinatorial de los morfismos D_i.

Dado un conjunto simplicial X y un entero positivo n, podemos formar la contracción $c_n = (f_n, g_n, \phi_n)$ de $C_*^N(X^{\times n+1})$ hacia $C_*^N(X)^{\otimes n+1}$ componiendo apropiadamente contracciones Eilenberg–Zilber. Por ejemplo, si $n = 1$, entonces

$$c_1 = (f_1, g_1, \phi_1) : C_*^N(X \times X) \Rightarrow C_*^N(X) \otimes C_*^N(X)$$

es la contracción Eilenberg–Zilber descrita en la página 24. La contracción

$$c_2 = (f_2, g_2, \phi_2) : C_*^N(X^{\times 3}) \Rightarrow C_*^N(X)^{\otimes 3}$$

se define como la composición de la contracción Eilenberg–Zilber de $C_*^N((X \times X) \times X)$ a $C_*^N(X \times X) \otimes C_*^N(X)$ y el producto tensorial de las contracciones

$$C_*^N(X \times X) \overset{c_{EZ}}{\Rightarrow} C_*^N(X) \otimes C_*^N(X) \ \text{ y } \ 1_{C_*^N(X)} = (1_{C_*^N(X)}, 1_{C_*^N(X)}, 0) : C_*^N(X) \Rightarrow C_*^N(X) .$$

Y así, sucesivamente.

En general, dado un conjunto simplicial X y un entero no negativo n, si denotamos

$$f_{(j,n)} \\ = AW \otimes 1^{\otimes j-1} : C_*^N(X^{\times n-j+2}) \otimes C_*^N(X)^{\otimes j-1} \longrightarrow C_*^N(X^{\times n-j+1}) \otimes C_*^N(X)^{\otimes j} ,$$

$$g_{(j,n)} \\ = EML \otimes 1^{\otimes j-1} : C_*^N(X^{\times n-j+1}) \otimes C_*^N(X)^{\otimes j} \longrightarrow C_*^N(X^{\times n-j+2}) \otimes C_*^N(X)^{\otimes j-1} ,$$

$$\phi_{(j,n)} \\ = SHI \otimes 1^{\otimes j-1} : C_*^N(X^{\times n-j+2}) \otimes C_*^N(X)^{\otimes j-1} \longrightarrow C_*^N(X^{\times n-j+2}) \otimes C_*^N(X)^{\otimes j-1} ;$$

entonces los morfismos componentes de $c_n = (f_n, g_n, \phi_n) : C_*^N(X^{\times p}) \Rightarrow C_*^N(X)^{\otimes p}$ viene dados por

$$f_n = f_{(n,n)} \cdots f_{(2,n)} f_{(1,n)} , \tag{2.13}$$

$$g_n = g_{(1,n)}g_{(2,n)}\cdots g_{(n,n)}\,,$$

$$\phi_n = \phi_{(1,n)} + g_{(1,n)}\phi_{(2,n)}f_{(1,n)} + \cdots + g_{(1,n)}\cdots g_{(n-1,n)}\phi_{(n,n)}f_{(n-1,n)}\cdots f_{(1,n)}\,. \qquad (2.14)$$

A una contracción obtenida de la manera antes descrita se le llamará también contracción Eilenberg–Zilber.

Es claro que si $2 \leq j \leq n$, tenemos las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned}
f_{(j,n)} &= f_{(j-1,n-1)} \otimes 1\,,\\
g_{(j,n)} &= g_{(j-1,n-1)} \otimes 1\,,\\
\phi_{(j,n)} &= \phi_{(j-1,n-1)} \otimes 1\,,\\
f_n &= (f_{n-1} \otimes 1)f_{(1,n)}\,,\\
g_n &= g_{(1,n)}(g_{n-1} \otimes 1)\,,\\
\phi_n &= \phi_{(1,n)} + g_{(1,n)}(\phi_{n-1} \otimes 1)f_{(1,n)}\,.
\end{aligned} \qquad (2.15)$$

Dada una contracción Eilenberg–Zilber $c_n = (f_n, g_n, \phi_n)$ de $C_*^N(X^{\times n+1})$ a $C_*^N(X)^{\otimes n+1}$ y $(x_1, \ldots, x_{n+1}) \in C_m^N(X^{\times n+1})$, usando la igualdad (2.13), obtenemos una fórmula explícita del morfismo f_n.

$$\begin{aligned}
f_n(x_1, \ldots, x_{n+1}) = \sum_{I_{(n-1,m)}} \quad & \partial_{i_0+1}\cdots\partial_m x_1\\
& \otimes\partial_0\cdots\partial_{i_0-1}\partial_{i_1+1}\cdots\partial_m x_2\\
& \vdots\\
& \otimes\partial_0\cdots\partial_{i_{n-2}-1}\partial_{i_{n-1}+1}\cdots\partial_m x_n\\
& \otimes\partial_0\cdots\partial_{i_{n-1}-1}x_{n+1}\,;
\end{aligned}$$

donde $I_{(n-1,m)} = \{(i_0, \ldots, i_{n-1}) : 0 \leq i_0 \leq \cdots \leq i_{n-1} \leq m\}$.

Veamos ahora varias notaciones y resultados elementales que usaremos a lo largo de esta sección.

Sean i, j, k, ℓ, m, n enteros tal que $0 \leq i-1 \leq j,\ j-1 \leq k,\ k-1 \leq \ell,\ \ell-1 \leq m,$ $m-1 \leq n$; entonces la siguientes expresiones de la parte derecha de la igualdad son las formas normalizadas (ver lema 1.1.1) de las expresiones de la parte izquierda:

$$\begin{aligned}
&\partial_i \cdots \partial_k \partial_j \cdots \partial_n = \partial_i \cdots \partial_{k+n-j+1}\,;\\
&\partial_k \cdots \partial_\ell \partial_i \cdots \partial_j = \partial_i \cdots \partial_j \partial_{k+j-i+1} \cdots \partial_{\ell+j-i+1}\,;\\
&\partial_i \cdots \partial_k s_k \cdots s_j = \partial_i \cdots \partial_k s_{k-1} \cdots s_{j-1} = \partial_i \cdots \partial_{j-1}\,;\\
&\partial_i \cdots \partial_\ell s_k \cdots s_j = \partial_i \cdots \partial_{\ell-k+j-1}\,;\\
&\partial_m \cdots \partial_n s_k \cdots s_j = s_k \cdots s_j \partial_{m-k+j-1} \cdots \partial_{n-k+j-1}\,.
\end{aligned} \tag{2.16}$$

Dados dos enteros no negativos $\ell < t$, denotemos por $[\ell,\, t]$ al conjunto de enteros entre ℓ y t incluidos ℓ y t. Por ejemplo, si (α, β) es un $(p+1, q)$–shuffle, entonces

$$\beta + \bar{m} \,\cup\, \alpha + \bar{m} \;=\; [\bar{m},\, m]\,.$$

Sea γ un conjunto de enteros no negativos.

- El hecho de que ningún elemento de γ puede estar en $[i,\, j-1]$, lo notaremos por $i \overset{\gamma}{\longmapsto} j$.
- Por otra parte, si algún elemento de γ puede estar en $[i,\, j-1]$, será denotado por $i \underset{\gamma}{\longmapsto} j$.

Sean p y q don enteros no negativos. En esta sección, usaremos los (p, q)–shuffles (α, β):

$$\beta = [0,\, q-1]; \qquad \alpha = [q,\, p+q-1]$$

con el signo qp; y

$$\alpha = [0, i] \cup [j+1, p+q-1]; \qquad \beta = [i+1, j]$$

(siendo i y j dos enteros no negativos tal que $j - i = q$) con el signo $q(p-i-1)$.

Si m es un entero no negativo tal que $0 \leq p \leq m-q-1 \leq m$ y (α, β) es el $(p+1, q)$–shuffle

$$\beta = [0,\, q-1]; \qquad \alpha = [q,\, p+q]$$

entonces

$$\beta + \bar{m} = [\bar{m},\, m-p-1] \qquad \text{y} \qquad \alpha + \bar{m} = [m-p,\, m].$$

El conjunto $\{\bar{m}-1, \beta_1 + \bar{m}, \ldots, \beta_q + \bar{m}\}$ es denotado por $\mathfrak{B}$.

2.4.1 Fórmulas de los productos i–cup

En esta subsección, usando la nueva terminología introducida, veremos una demostración mucho más sencilla del teorema 2.2.1. Además, simplificaremos la expresión de los signos que aparecen envueltos en dicho teorema.

Demostremos primero la fórmula de $f_1 t\,\phi_1$. En términos de operadores de cara y degeneración, sabemos que su fórmula es:

$$f_1 t\,\phi_1(a_m, b_m) = \sum_{0\le i_0\le m+1} \sum_{T(m)} (-1)^{\bar{m}+\mathrm{sig}(\alpha,\beta)+1}$$
$$\partial_{i_0+1}\cdots\partial_{m+1}s_{\alpha+\bar{m}}\partial_{\bar{m}}\cdots\partial_{m-q-1}a_m$$
$$\otimes\partial_0\cdots\partial_{i_0-1}s_{\mathfrak{B}}\partial_{m-q+1}\cdots\partial_m b_m$$

donde recordemos que

$$T(m) = \{0\le p\le m-q-1\le m-1,\ (\alpha,\beta)\in\{(p+1,q)\text{–shuffles}\}\}.$$

Si la fórmula está en la forma normalizada, los sumandos que tengan un factor degenerado deben ser eliminados. Debido a las propiedades (2.16) debe ocurrir que:

$$\mathfrak{B} = [\bar{m}-1,\, i_0], \qquad \alpha+\bar{m} = [i_0, m], \qquad i_0 = m-p$$

y los sumandos no degenerados son:

$$\sum_{0\le i_0\le m+1} \sum_{0\le p\le m-q-1\le m-1} (-1)^{\bar{m}+1+q(p+1)}$$
$$\partial_{\bar{m}}\cdots\partial_{m-q-1}\otimes\partial_0\cdots\partial_{\bar{m}-2}\partial_{m-q+1}\cdots\partial_m.$$

Notando $i_0' = \bar{m}-1$ e $i_1' = m-q$, obtenemos la fórmula de $f_1 t\,\phi_1$.

Demostremos la fórmula de $f_1(t\,\phi_1)^n$ siendo n par (la demostración del caso impar es similar). Los signos serán tratados posteriormente.

Por hipótesis de inducción y salvo signos, la fórmula sobre un elemento de grado m es:

$$f_1(t\,\phi_1)^n(a,b) = f_1(t\,\phi_1)^{n-1}t\,\phi_1(a,b)$$

$$= \textstyle\sum_{0\le i_0<\cdots<i_{n-1}\le m+1} \sum_{T(m)}$$
$$\partial_{i_0+1}\cdots\partial_{i_1-1}\partial_{i_2+1}\cdots\cdot\partial_{i_{n-3}-1}\partial_{i_{n-2}+1}\cdots\partial_{i_{n-1}-1}s_{\mathfrak{B}}\partial_{m-q+1}\cdots\partial_m\, a$$
$$\otimes\partial_0\cdots\partial_{i_0-1}\partial_{i_1+1}\cdots\cdot\partial_{i_{n-2}-1}\partial_{i_{n-1}+1}\cdots\partial_{m+1}s_{\alpha+\bar{m}}\partial_{\bar{m}}\cdots\partial_{m-q-1}\, b\,.$$

Teniendo en cuenta las igualdades de (2.16), vemos que el producto es no degenerado si, y sólo si,

$$i_{n-2} < \bar{m} - 1, \qquad \mathfrak{B} = [\bar{m} - 1, i_{n-1}], \qquad \alpha + \bar{m} = [i_{n-1}, m], \qquad i_{n-1} = m - p;$$

y los sumandos no degenerados son:

$$\sum_{0 \leq i_0 < \cdots < i_{n-1} \leq m+1} \quad \sum_{0 \leq p \leq m-q-1 \leq m-1} \begin{array}{l} \partial_{i_0+1} \cdots \cdot \partial_{i_{n-3}-1} \partial_{i_{n-2}+1} \cdots \partial_{\bar{m}-2} \partial_{m-q+1} \cdots \partial_m a \\ \otimes \partial_0 \cdots \cdot \partial_{i_{n-4}-1} \partial_{i_{n-3}+1} \cdots \partial_{i_{n-2}} \partial_{\bar{m}} \cdots \partial_{m-q-1} b. \end{array}$$

Notando $i'_j = i_j$ si $0 \leq j \leq n-2$, $i'_{n-1} = \bar{m} - 1$ e $i'_n = m - q$, obtenemos la fórmula de $f_1(t\phi_1)^n$, cuando n es par, salvo signos.

Definamos los siguientes elementos para tratar los signos de la fórmula. Sea ℓ un entero no negativo e $\bar{i} = \{i_0, \ldots, i_{2\ell+2}\}$ un conjunto de parámetros. Definimos

$$\begin{aligned} A(\ell, \bar{i}) &= \sum_{0 \leq j \leq \ell} (i_{2j} + i_{2j+1})(i_{2j+1} + i_{2j+2}) \\ &\quad + \sum_{0 \leq j \leq \ell-1} (i_{2j} + i_{2j+1} + 1) \left(\sum_{j+1 \leq t \leq \ell} (i_{2t+1} + i_{2t+2} + 1) \right). \end{aligned}$$

Es fácil ver que el signo de $f_1\, t\, \phi_1$ es

$$\bar{m} + 1 + q(p+1) = i'_0 + (i'_0 + i'_1)(i'_1 + i'_2) = i'_0 + A(0, \bar{i}') + \lambda_1 i'_1,$$

si identificamos m con i'_2.

$$\text{Sea } \vartheta_\ell = \begin{cases} 0 & \text{si } \ell \text{ es impar,} \\ i_n & \text{si } \ell \text{ es par.} \end{cases}$$

Supongamos que para cualquier $n-1$ el signo de $f_1(t\,\phi_1)^{n-1}$ es

$$i_0 + A\left(\left\lfloor \frac{n-2}{2} \right\rfloor, \bar{i}\right) + \vartheta_{n-1}$$

identificando m con i_n si aparece este parámetro. Vamos a demostrar por inducción que el signo de $f_1(t\,\phi_1)^n$ es

$$i_0 + A\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor, \bar{i}\right) + \vartheta_n,$$

identificando m con i_{n+1} si aparece.

Incidamos en el hecho de que si, y sólo si, se verifica que $i_{n-1} = m-p$ y $\beta_q = q-1$, el sumando de $f_1(t\,\phi_1)^{n-1}t\,\phi_1$ correspondiente es no degenerado.

Supongamos que n es par. Sea $\bar{i} = \{i_0, \ldots, i_{n-1}\}$ e $i_{n+1} = m+1$. El signo de un sumando no degenerado de $f_1(t\,\phi_1)^{n-1}t\,\phi_1$ es

$$
\begin{aligned}
& i_0 + A\left(\frac{n-2}{2}, \bar{i}\right) + \bar{m} - 1 + q(p-1) \\
= \;& i_0 + \sum_{0 \leq j \leq \frac{n-2}{2}} (i_{2j} + i_{2j+1})(i_{2j+1} + i_{2j+2}) \\
& + \sum_{0 \leq j \leq \frac{n-4}{2}} (i_{2j} + i_{2j+1} + 1)\left(\sum_{j+1 \leq t \leq \frac{n-2}{2}} (i_{2t+1} + i_{2t+2} + 1)\right) + \bar{m} - 1 + q(p-1) \\
= \;& i_0 + \sum_{0 \leq j \leq \frac{n-4}{2}} (i_{2j} + i_{2j+1})(i_{2j+1} + i_{2j+2}) + (i_{n-2} + m - p)(m - p + m + 1) \\
& + \sum_{0 \leq j \leq \frac{n-4}{2}} (i_{2j} + i_{2j+1} + 1)\left(\sum_{j+1 \leq t \leq \frac{n-4}{2}} (i_{2t+1} + i_{2t+2} + 1) + m - p + m + 1 + 1\right) \\
& + \bar{m} - 1 + q(p-1) \\
= \;& i_0 + \sum_{0 \leq j \leq \frac{n-4}{2}} (i_{2j} + i_{2j+1})(i_{2j+1} + i_{2j+2}) + (i_{n-2} + i'_{n-1} + i'_n + m + 1)(i'_{n-1} + i'_n) \\
& + \sum_{0 \leq j \leq \frac{n-4}{2}} (i_{2j} + i_{2j+1} + 1)\left(\sum_{j+1 \leq t \leq \frac{n-4}{2}} (i_{2t+1} + i_{2t+2} + 1 + i'_{n-1} + i'_n + 1)\right) \\
& + i'_{n-1} + (i'_{n-1} + i'_n)(i'_n + m) \\
= \;& i_0 + \sum_{0 \leq j \leq \frac{n-4}{2}} (i_{2j} + i_{2j+1})(i_{2j+1} + i_{2j+2}) + (i_{n-2} + i'_{n-1})(i'_{n-1} + i'_n) \\
& + \sum_{0 \leq j \leq \frac{n-4}{2}} (i_{2j} + i_{2j+1} + 1)\left(\sum_{j+1 \leq t \leq \frac{n-2}{2}} (i_{2t+1} + i_{2t+2} + 1)\right) + i'_n \\
= \;& i'_0 + A\left(\frac{n-2}{2}, \bar{i}'\right) + i'_n \qquad \bmod 2 .
\end{aligned}
$$

siendo $i'_j = i_j$ si $0 \leq j \leq n-2$, $i'_{n-1} = \bar{m} - 1$, $i'_n = m - p$ e $\bar{i}' = \{i'_0, \ldots, i'_n\}$.

De manera análoga se demuestra la fórmula del signo de $f_1(t\phi_1)^n$ cuando n es impar.

2.4.2 Fórmula de la potencia reducida $\mathcal{P}_1^p$

El procedimiento de nuevo es encontrar los factores degenerados de la fórmula escrita en forma normalizada y en eliminar aquellos sumandos que tienen estos factores.

Antes de nada, consideremos las siguientes notaciones: Sean r, s, n, m enteros positivos tal que $1 \leq s \leq n$ y $1 \leq r \leq n-s$.Entoces:

$$I_{(n,m)} = \{(i_0, \ldots, i_n) : \ 0 \leq i_0 \leq \cdots \leq i_n \leq m\};$$

$$I_{(r,s,n,m)} = \{(i_0, \ldots, i_n) : \ 0 \leq i_0 \leq \cdots \leq i_n \leq m, \ i_{n-r-s} < i_{n-s})\}.$$

Lema 2.4.1 *Sea X un conjunto simplicial y sean k y n dos enteros tal que $1 \leq k \leq n$. Si $(x_1, \ldots, x_{n+1}) \in C_m^N(X^{\times n+1})$ entonces*

$$\begin{aligned} f_n t^k \phi_{(1,n)}(x_1, \ldots, x_{n+1}) = \sum_{I_{(k,0,n,m)}} \quad & (-1)^{i_{n-k}+(i_{n-k}+i_n)(i_n+m)} \\ & \partial_{i_0+1} \cdots \partial_m x_{k+1} \\ & \otimes \partial_0 \cdots \partial_{i_0-1} \partial_{i_1+1} \cdots \partial_m x_{k+2} \\ & \vdots \\ & \otimes \partial_0 \cdots \partial_{i_{n-k-2}-1} \partial_{i_{n-k-1}+1} \cdots \partial_m x_n \\ & \otimes \partial_0 \cdots \partial_{i_{n-k-1}-1} \partial_{i_{n-k}+1} \cdots \partial_{i_n-1} x_{n+1} \\ & \otimes \partial_0 \cdots \partial_{i_{n-k}-1} \partial_{i_{n-k+1}+1} \cdots \partial_m x_1 \\ & \vdots \\ & \otimes \partial_0 \cdots \partial_{i_{n-1}-1} \partial_{i_n+1} \cdots \partial_m x_k . \end{aligned}$$

Demostración

$$f_n t^k \phi_{(1,n)}(x_1, \ldots, x_{n+1})$$

$$\begin{aligned} = \textstyle\sum_{I_{(n-1,m+1)}} \ \sum_{T(m)} \quad & (-1)^{sig(\alpha,\beta)} \\ & \partial_{i_0+1} \cdots \partial_{m+1} s_{\mathfrak{B}} \partial_{m-q+1} \cdots \partial_m x_{k+1} \\ & \otimes \partial_0 \cdots \partial_{i_0+1} \partial_{i_1-1} \cdots \partial_{m+1} s_{\mathfrak{B}} \partial_{m-q+1} \cdots \partial_m x_{k+2} \\ & \vdots \\ & \otimes \partial_0 \cdots \partial_{i_{n-k-2}-1} \partial_{i_{n-k-1}+1} \cdots \partial_{m+1} s_{\mathfrak{B}} \partial_{m-q+1} \cdots \partial_m x_n \\ & \otimes \partial_0 \cdots \partial_{i_{n-k-1}-1} \partial_{i_{n-k}+1} \cdots \partial_{m+1} s_{\alpha+\bar{m}} \partial_{\bar{m}} \cdots \partial_{m-q-1} x_{n+1} \\ & \otimes \partial_0 \cdots \partial_{i_{n-k}-1} \partial_{i_{n-k+1}+1} \cdots \partial_{m+1} s_{\mathfrak{B}} \partial_{m-q+1} \cdots \partial_m x_1 \\ & \vdots \\ & \otimes \partial_0 \cdots \partial_{i_{n-2}-1} \partial_{i_{n-1}+1} \cdots \partial_{m+1} s_{\mathfrak{B}} \partial_{m-q+1} \cdots \partial_m x_{k-1} \\ & \otimes \partial_0 \cdots \partial_{i_{n-1}-1} s_{\mathfrak{B}} \partial_{m-q+1} \cdots \partial_m x_k . \end{aligned}$$

Un sumando es no degenerado si, y sólo si, la siguiente condición se satisface:

$$0 \underset{\alpha+\bar{m}}{\overset{\mathfrak{B}}{\longmapsto}} i_{n-k-1} \underset{\mathfrak{B}}{\overset{\alpha+\bar{m}}{\longmapsto}} i_{n-k} \underset{\alpha+\bar{m}}{\overset{\mathfrak{B}}{\longmapsto}} m+1;$$

entonces,

$$i_{n-k-1} \leq \bar{m}-1, \quad \beta+\bar{m} = [\bar{m},\, i_{n-k}-1], \quad \alpha+\bar{m} = [i_{n-k}, m], \quad i_{n-k} = m-p$$

y el signo es $\bar{m}+1+$ $\mathrm{sig}(\alpha,\beta) = \bar{m}+1+q(p+1)$.

Ahora notamos

$$i'_j = \begin{cases} i_j & \text{si } 0 \leq j < n-k\,, \\ \bar{m}-1 & \text{si } j = n-k\,, \\ i_j - q & \text{si } n-k < j < n\,, \\ m-q & \text{si } j = n\,. \end{cases}$$

Usando las propiedades de conmutatividad que satisfacen los operadores de cara y degeneración, obtenemos inmediatamente la fórmula que queríamos demostrar. □

Lema 2.4.2 *Sea X un conjunto simplicial y sean n y k dos enteros tal que $1 \leq k \leq n$. Entonces*

$$f_n t^k g_{(1,n)} = (1^{\otimes n-k} \otimes T^k)(f_{n-1}t^k \otimes 1).$$

Demostración

Sean $(x_1,\ldots,x_n) \in C^N_{\ell+1}(X^{\times n})$ y $x_{n+1} \in C^N_{m-\ell}(X)$, entonces, como en la prueba anterior, un sumando es no degenerado si

$$0 \underset{\alpha}{\overset{\beta}{\longmapsto}} i_{n-k-1} \underset{\beta}{\overset{\alpha}{\longmapsto}} i_{n-k} \underset{\alpha}{\overset{\beta}{\longmapsto}} \ell+1;$$

donde $(\alpha,\beta) \in \{(\ell+1, m-\ell)\text{–shuffles}\}$. Por tanto,

$$\alpha = [0,\, i_{n-k-1}-1] \cup [i_{n-k}, m], \quad \beta = [i_{n-k-1},\, i_{n-k}-1], \quad i_{n-k}-i_{n-k-1} = m-\ell$$

y $\mathrm{sig}(\alpha,\beta) = (m-\ell)(\ell - i_{n-k-1})$.

Consideremos la notación siguiente:

$$i'_j = \begin{cases} i_j & \text{si } -1 \leq j < n-k, \\ i_{j+1} - (m-\ell) & \text{si } n-k \leq j < n-1. \end{cases}$$

Usando las propiedades de conmutatividad de los operadores de cara y degeneración y (2.16), obtenemos

$$\begin{aligned}
&f_n t^k g_{(1,n)}((x_1, \ldots, x_n) \otimes x_{n+1}) \\
&= \textstyle\sum_{I_{(n-2,\ell+1)}} \quad (-1)^{(m-\ell)(\ell - i'_{n-k-1}+1)} \\
&\qquad \partial_{i'_0+1} \cdots \partial_{\ell+1} x_{k+1} \\
&\qquad \partial_0 \cdots \partial_{i'_0-1} \partial_{i'_1+1} \cdots \partial_{\ell+1} x_{k+2} \\
&\qquad \vdots \\
&\qquad \otimes \partial_0 \cdots \partial_{i'_{n-k-2}-1} \partial_{i'_{n-k-1}+1} \cdots \partial_{\ell+1} x_n \\
&\qquad \otimes x_{n+1} \\
&\qquad \otimes \partial_0 \cdots \partial_{i'_{n-k-1}-1} \partial_{i'_{n-k}+1} \cdots \partial_{\ell+1} x_1 \\
&\qquad \vdots \\
&\qquad \partial_0 \cdots \partial_{i'_{n-3}-1} \partial_{i'_{n-2}+1} \cdots \partial_{\ell+1} x_{k-1} \\
&\qquad \otimes \partial_0 \cdots \partial_{i'_{n-2}-1} x_k \\
&= (1^{\otimes n-k} \otimes T^k)(f_{n-1} t^k \otimes 1)((x_1, \ldots, x_n) \otimes x_{n+1}).
\end{aligned}$$

□

Combinando estos dos lemas, obtenemos el siguiente resultado:

Teorema 2.4.3 *Sea X un conjunto simplicial y sean $1 \leq k \leq n$ dos enteros. Si $(x_1, \ldots, x_{n+1}) \in C_m^N(X^{\times n+1})$ entonces*

$$\begin{aligned}
&f_n t^k \phi_n(x_1, \ldots, x_{n+1}) \\
&= \; f_n t^k \phi_{(1,n)}(x_1, \ldots, x_{n+1}) \\
&\quad + \sum_{1 \leq \ell \leq n-k} (1^{\otimes n-k-\ell+1} \otimes T^k)(f_{n-\ell} t^k \phi_{(1,n-\ell)} \otimes 1^{\otimes \ell}) f_{(\ell,n)} \cdots f_{(1,n)}(x_1, \ldots, x_{n+1})
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
= \sum_{0\le \ell\le n-k} \sum_{I_{(k,\ell,n,m)}} \quad & (-1)^{i_{n-k-\ell}+(i_{n-k-\ell}+i_{n-\ell})(i_{n-\ell}+m)} \\
& \partial_{i_0+1}\cdots\partial_m x_{k+1} \\
& \otimes\partial_0\cdots\partial_{i_0-1}\partial_{i_1+1}\cdots\partial_m x_{k+2} \\
& \vdots \\
& \otimes\partial_0\cdots\partial_{i_{n-k-\ell-2}-1}\partial_{i_{n-k-\ell-1}+1}\cdots\partial_m x_{n-\ell} \\
& \otimes\partial_0\cdots\partial_{i_{n-k-\ell-1}-1}\partial_{i_{n-k-\ell}+1}\cdots\partial_{i_{n-\ell}-1}\partial_{i_{n-\ell+1}+1}\cdots\partial_m x_{n-\ell+1} \\
& \otimes\partial_0\cdots\partial_{i_{n-\ell+1}-1}\partial_{i_{n-\ell+2}+1}\cdots\partial_m x_{n-\ell+2} \\
& \vdots \\
& \otimes\partial_0\cdots\partial_{i_{n-1}-1}\partial_{i_n+1}\cdots\partial_m x_n \\
& \otimes\partial_0\cdots\partial_{i_n-1}x_{n+1} \\
& \otimes\partial_0\cdots\partial_{i_{n-k-\ell}-1}\partial_{i_{n-k-\ell+1}+1}\cdots\partial_m x_1 \\
& \vdots \\
& \otimes\partial_0\cdots\partial_{i_{n-\ell-1}-1}\partial_{i_{n-\ell}+1}\cdots\partial_m x_k\,.
\end{aligned}
$$

Demostración

Demostremos la primera igualdad del teorema por inducción en n. Es trivial que si $n=1$, $f_1t\phi_1$ verifica la igualdad.

Usando la última relación que aparece en (2.15), tenemos que

$$f_nt^k\phi_n = f_nt^k\phi_{(1,n)} + f_nt^k g_{(1,n)}(\phi_{n-1}\otimes 1)f_{(1,n)}$$

(aplicando ahora el lema 2.4.2)

$$= f_nt^k\phi_{(1,n)} + (1^{\otimes n-k}\otimes T^k)(f_{n-1}t^k\phi_{n-1}\otimes 1)f_{(1,n)}$$

(por inducción)

$$
\begin{aligned}
= {} & f_nt^k\phi_{(1,n)} + (1^{\otimes n-k}\otimes T^k)(f_{n-1}t^k\phi_{(1,n-1)}\otimes 1)f_{(1,n)} \\
& + \textstyle\sum_{1\le\ell\le n-1-k} \quad (1^{\otimes n-k}\otimes T^k) \\
& \qquad ((1^{\otimes n-k-\ell}\otimes T^k)(f_{n-\ell-1}t^k\phi_{(1,n-\ell-1)}\otimes 1^{\otimes\ell})f_{(\ell,n-1)}\cdots f_{(1,n-1)}\otimes 1)\, f_{(1,n)}\,.
\end{aligned}
$$

Usando el lemma 1.2.4 y las relaciones (2.15) obtenemos la igualdad que queríamos probar.

Veamos ahora la segunda igualdad del teorema. El sumando $f_nt\phi_{(1,n)}$, ya ha sido calculado en el lema 2.4.1 y coincide con la fórmula que estamos demostrando cuando $\ell=0$.

Para $1 \leq \ell \leq n-k$, revisando la prueba del lema 2.4.2, es fácil ver que, salvo signos, coincide con la fórmula que estamos probando.

Finalmente, usando el lema 1.2.4, el signo es

$$\begin{aligned} & i_{n-\ell-1} + (i_{n-\ell-1} + i_{n-\ell})(i_{n-\ell} + i_{n-\ell+1}) \\ & +(-i_{n-\ell-1} + i_{n-\ell})((-i_{n-\ell+1} + i_{n-\ell+2}) + \cdots + (-i_{n-1} + i_n) + (-i_n + m)) \\ & = i_{n-\ell-1} + (i_{n-\ell-1} + i_{n-\ell})(i_{n-\ell} + m) \qquad \bmod 2. \end{aligned}$$

□

Por tanto, el teorema 2.3.4 ya está demostrado, pues es un caso particular del teorema 2.4.3 (cuando $k=1$ y $n=p-1$).

2.4.3 Generalización al resto de las potencias reducidas de Steenrod

Para continuar "definiendo" a nivel puramente combinatorial las sucesivas potencias reducidas de Steenrod, las siguientes propiedades podrían ser de muchísima utilidad.

Un problema que creemos podemos solucionar en un corto plazo de tiempo con ayuda de estas propiedades, es el de disponer de una completa descripción simplicial "minimal" del conjunto de todas las operaciones cohomológicas de Steenrod.

Proposición 2.4.4 *Sea X un conjunto simplicial y sean n y ℓ dos enteros tal que $1 \leq \ell \leq n$. Se verifica que*

$$f_{(1,n)} t^\ell \, g_{(1,n)} = (1^{\times n-\ell} \times t^{\ell-1} \otimes 1) g_{(2,n)} (1^{\times n-1} \otimes T) f_{(2,n)} (t^\ell \otimes 1)\,;$$

$$f_{(1,n)} (1^{\times n-\ell} \times t^\ell)\, g_{(1,n)} = (1^{\times n-\ell} \times t^{\ell-1} \otimes 1) g_{(2,n)} (1^{\times n-1} \otimes T) f_{(2,n)}\,.$$

Demostración

Sea $(x_1, \ldots, x_n) \otimes x_{n+1}$ un elemento de $C^N_{k+1}(X^{\times n}) \otimes C^N_{m-k}(X)$.

- Comencemos probando la primera fórmula:

$$
\begin{aligned}
&f_{(1,n)}t^{\ell}\, g_{(1,n)}\big((x_1,\dots,x_n)\otimes x_{n+1}\big)\\
&= \textstyle\sum_{0\le i\le m+1} \sum_{(\alpha,\beta)\,\in\,\{(k+1,\,m-k)\text{-shuffles}\}} (-1)^{\mathrm{sig}(\alpha,\beta)} \quad \begin{aligned}[t]
&(\partial_{i+1}\cdots\partial_{m+1}s_\beta x_{\ell+1},\\
&\vdots\\
&\partial_{i+1}\cdots\partial_{m+1}s_\beta x_{n},\\
&\partial_{i+1}\cdots\partial_{m+1}s_\alpha x_{n+1},\\
&\partial_{i+1}\cdots\partial_{m+1}s_\beta x_{1},\\
&\vdots\\
&\partial_{i+1}\cdots\partial_{m+1}s_\beta x_{\ell-1})\\
&\otimes\partial_0\cdots\partial_{i-1}s_\beta x_{\ell}\,.
\end{aligned}
\end{aligned}
$$

Debido a que el último producto es un producto tensorial, para que un sumando sea no degenerado, debe ocurrir que $\beta\subset[0,i-1]$ y por tanto $i\ge m-k$ y $\alpha=\alpha'\cup[i,m]$ tal que $(\alpha',\beta)\in\{(i+k-m,m-k)\text{-shuffles}\}$. Usando las propiedades de conmutatividad de los operadores de cara y degeneración tenemos que:

$$
\begin{aligned}
&f_{(1,n)}t^{\ell}\, g_{(1,n)}\big((x_1,\dots,x_n)\otimes x_{n+1}\big)\\
&= \textstyle\sum_{0\le i\le m+1} \sum_{(\alpha',\beta)\,\in\,\{(i+k-m,\,m-k)\text{-shuffles}\}} \quad \begin{aligned}[t]
&(-1)^{\mathrm{sig}(\alpha',\beta)}(-1)^{(m-k)(m-i+1)}\\
&(s_\beta\partial_{i+k-m+1}\cdots\partial_{k+1}x_{\ell+1},\\
&\vdots\\
&s_\beta\partial_{i+k-m+1}\cdots\partial_{k+1}x_{n},\\
&s_{\alpha'}x_{n+1},\\
&s_\beta\partial_{i+k-m+1}\cdots\partial_{k+1}x_{1},\\
&\vdots\\
&s_\beta\partial_{i+k-m+1}\cdots\partial_{k+1}x_{\ell-1})\\
&\otimes\partial_0\cdots\partial_{i+k-m-1}x_{\ell}
\end{aligned}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
= \textstyle\sum_{0\le j\le k+1} \sum_{(\alpha',\beta)\,\in\,\{(j,\,m-k)\text{-shuffles}\}} \quad & (-1)^{\mathrm{sig}(\alpha',\beta)}(-1)^{(m-k)(k-j+1)} \\
& (s_\beta\partial_{j+1}\cdots\partial_{k+1}x_{\ell+1}, \\
& \vdots \\
& s_\beta\partial_{j+1}\cdots\partial_{k+1}s_\beta x_n, \\
& s_{\alpha'}x_{n+1}, \\
& s_\beta\partial_{j+1}\cdots\partial_{k+1}x_1, \\
& \vdots \\
& s_\beta\partial_{j+1}\cdots\partial_{k+1}s_\beta x_{\ell-1}) \\
& \otimes\partial_0\cdots\partial_{j-1}x_\ell
\end{aligned}
$$

$$
= (1^{\times n-\ell}\times t^{\ell-1}\otimes 1)g_{(2,n)}(1^{\times n-1}\otimes T)f_{(2,n)}(t^\ell\otimes 1)((x_1,\ldots,x_n)\otimes x_{n+1}).
$$

- De manera análoga, vamos a demostrar la segunda fórmula:

$$
f_{(1,n)}(1^{\times n-\ell}\times t^\ell)g_{(1,n)}((x_1,\ldots,x_n)\otimes x_{n+1})
$$

$$
\begin{aligned}
= \textstyle\sum_{0\le i\le m+1} \sum_{(\alpha,\beta)\,\in\,\{(k+1,\,m-k)\text{-shuffles}\}} \quad & (-1)^{\mathrm{sig}(\alpha,\beta)} \\
& (\partial_{i+1}\cdots\partial_{m+1}s_\beta x_1, \\
& \vdots \\
& \partial_{i+1}\cdots\partial_{m+1}s_\beta x_{n-\ell}, \\
& \partial_{i+1}\cdots\partial_{m+1}s_\alpha x_{n+1}, \\
& \partial_{i+1}\cdots\partial_{m+1}s_\beta x_{n-\ell+1}, \\
& \vdots \\
& \partial_{i+1}\cdots\partial_{m+1}s_\beta x_{n-1}) \\
& \otimes\partial_0\cdots\partial_{i-1}s_\beta x_n\,.
\end{aligned}
$$

Igual que antes, como el último factor es un producto tensorial, para que un sumando sea no degenerado, debe ocurrir que

$$
m-k\le i\le m+1, \qquad \beta\subset[0,i-1] \qquad \alpha=\alpha'\cup[i,m]
$$

tal que

$$
(\alpha',\beta)\in\{(i+k-m,\,m-k)\text{-shuffles}\}.
$$

Tenemos que:

$$
f_{(1,n)}(1^{\times n-\ell}\times t^\ell)g_{(1,n)}((x_1,\ldots,x_n)\otimes x_{n+1})
$$

$$
\begin{aligned}
&= \textstyle\sum_{0\le i\le m+1} \sum_{(\alpha',\beta)\,\in\,\{(k+1,\,m-k)\text{-shuffles}\}} && (-1)^{\mathrm{sig}(\alpha',\beta)}(-1)^{(m-k)(m-i+1)} \\
&&& (s_\beta\partial_{i+k-m+1}\cdots\partial_{k+1}x_1, \\
&&& \vdots \\
&&& s_\beta\partial_{i+k-m+1}\cdots\partial_{k+1}x_{n-\ell}, \\
&&& s_{\alpha'}x_{n+1}, \\
&&& s_\beta\partial_{i+k-m+1}\cdots\partial_{k+1}x_{n-\ell+1}, \\
&&& \vdots \\
&&& s_\beta\partial_{i+k-m+1}\cdots\partial_{k+1}x_{n-1}) \\
&&& \otimes\partial_0\cdots\partial_{i+k-m-1}x_n \\
&= \textstyle\sum_{0\le j\le k+1} \sum_{(\alpha',\beta)\,\in\,\{(k+1,\,m-k)\text{-shuffles}\}} && (-1)^{\mathrm{sig}(\alpha',\beta)}(-1)^{(m-k)(k-j+1)} \\
&&& (s_\beta\partial_{j+1}\cdots\partial_{k+1}x_1, \\
&&& \vdots \\
&&& s_\beta\partial_{j+1}\cdots\partial_{k+1}x_{n-\ell}, \\
&&& s_{\alpha'}x_{n+1}, \\
&&& s_\beta\partial_{j+1}\cdots\partial_{k+1}x_{n-\ell+1}, \\
&&& \vdots \\
&&& s_\beta\partial_{j+1}\cdots\partial_{k+1}x_{n-1}) \\
&&& \otimes\partial_0\cdots\partial_{j-1}x_n\,. \\
&= (1^{\times n-\ell}\times t^{\ell-1}\otimes 1)g_{(2,n)}(1^{\times n-1}\otimes T)f_{(2,n)}\,.
\end{aligned}
$$

□

Proposición 2.4.5 *Sea X un conjunto simplicial, sean $1\le \ell\le n$ dos enteros. Si $(x_1,\ldots,x_{n+1})\in C_m^N(X^{\times n+1})$ entonces se verifica que*

$$
\begin{aligned}
f_{(\ell+1,n)}\cdots f_{(1,n)}t^\ell\phi_{(1,n)} = \sum_{I_{(\ell,0,\ell+1,m)}} \quad & (-1)^{i_1+(i_1+i_{\ell+1})(i_{\ell+1}+m)} \\
& (\partial_{i_0+1}\cdots\partial_m x_{\ell+1}, \\
& \vdots \\
& \partial_{i_0+1}\cdots\partial_m x_n) \\
& \otimes\partial_0\cdots\partial_{i_0-1}\partial_{i_1+1}\cdots\partial_{i_{\ell+1}-1}x_{n+1} \\
& \otimes\partial_0\cdots\partial_{i_1-1}\partial_{i_2+1}\cdots\partial_m x_1 \\
& \vdots \\
& \otimes\partial_0\cdots\partial_{i_\ell-1}\partial_{i_{\ell+1}+1}\cdots\partial_m x_\ell\,.
\end{aligned}
$$

Demostración

Tenemos que buscar los elementos no degenerados de la composición

$$
\begin{aligned}
& f_{(\ell+1,n)} \cdots f_{(1,n)} t^{\ell} \phi_{(1,n)}(x_1, \ldots, x_{n+1}) \\
& = \textstyle\sum_{I_{(\ell,m+1)}} \sum_{T(m)} \quad \begin{aligned}[t] & (-1)^{\mathrm{sig}(\alpha,\beta)} \\
& (\, \partial_{i_0+1} \cdots \partial_{m+1} s_{\mathfrak{B}} \partial_{m-q+1} \cdots \partial_m x_{\ell+1} \, , \\
& \vdots \\
& \partial_{i_0+1} \cdots \partial_{m+1} s_{\mathfrak{B}} \partial_{m-q+1} \cdots \partial_m x_n \,) \\
& \otimes \partial_0 \cdots \partial_{i_0-1} \partial_{i_1+1} \cdots \partial_{m+1} s_{\alpha+\bar{m}} \partial_{\bar{m}} \cdots \partial_{m-q-1} x_{n+1} \\
& \otimes \partial_0 \cdots \partial_{i_1-1} \partial_{i_2+1} \cdots \partial_{m+1} s_{\mathfrak{B}} \partial_{m-q+1} \cdots \partial_m x_1 \\
& \vdots \\
& \otimes \partial_0 \cdots \partial_{i_\ell-1} s_{\mathfrak{B}} \partial_{m-q+1} \cdots \partial_m x_\ell \, .
\end{aligned}
\end{aligned}
$$

Para que un sumando sea no degenerado, debe ocurrir que

$$i_0 \leq \bar{m} - 1, \quad \mathfrak{B} = [\bar{m} - 1, i_1 - 1], \quad \alpha + \bar{m} = [i_1, m], \quad i_1 = m - p \, .$$

y en ese caso, este sumando se simplifica:

$$
(-1)^{q(p+1)} \quad \begin{aligned}[t] & (\, \partial_{i_0+1} \cdots \partial_m x_{\ell+1} \, , \\
& \vdots \\
& \partial_{i_0+1} \cdots \partial_m x_n \,) \\
& \otimes \partial_0 \cdots \partial_{i_0-1} \partial_{\bar{m}} \cdots \partial_{m-q-1} x_{n+1} \\
& \otimes \partial_0 \cdots \partial_{\bar{m}-2} \partial_{i_2-q} \cdots \partial_m x_1 \\
& \vdots \\
& \otimes \partial_0 \cdots \partial_{i_\ell-q-2} \partial_{m-q+1} \cdots \partial_m x_\ell \, .
\end{aligned}
$$

Notando $i'_0 = i_0$, $i'_1 = \bar{m} - 1$, $i'_j = i_j - q - 1$ para todo $2 \leq j \leq \ell$ e $i'_{\ell+1} = m - q$, obtenemos la fórmula que queríamos demostrar.

$\square$

Por ejemplo, veamos cómo calcular las fórmulas de $\mathcal{P}_2^p$. Si notamos $p = n+1$, usando (2.15) tenemos que

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}_2^p &= \sum_{1\le k\le n} f_n t^k \phi_n t \phi_n \\
&= \sum_{1\le k\le n} f_n t^k \phi_{(1,n)} t \phi_{(1,n)} \\
&\quad + \sum_{1\le k\le n} \sum_{1\le j\le n-1} f_n t^k \phi_{(1,n)} t g_{(1,n)} \cdots g_{(j,n)} \phi_{(j+1,n)} f_{(j,n)} \cdots f_{(1,n)} \\
&\quad + \sum_{1\le k\le n} \sum_{1\le \ell\le n-k} (1^{\otimes n-k-\ell+1} \otimes T^k)(f_{n-\ell} t^k \phi_{(1,n-\ell)} \otimes 1^{\otimes \ell}) f_{(\ell,n)} \cdots f_{(1,n)} t \phi_{(1,n)} \\
&\quad + \sum_{1\le k\le n} \sum_{1\le \ell\le n-k} \sum_{1\le j\le n-1} (1^{\otimes n-k-\ell+1} \otimes T^k)(f_{n-\ell} t^k \phi_{(1,n-\ell)} \otimes 1^{\otimes \ell}) \\
&\qquad f_{(\ell,n)} \cdots f_{(1,n)} t g_{(1,n)} \cdots g_{(j,n)} \phi_{(j+1,n)} f_{(j,n)} \cdots f_{(1,n)}.
\end{aligned}$$

Sea $(x_1, \ldots, x_n) \otimes x_{n+1} \in C^N_{m-k}(X^{\times n}) \otimes C^N_{k+1}(X)$.

Usando la fórmula explícita de $f_n t^k \phi_{(1,n)}$, es fácil demostrar que si $1 \le k \le n-1$ entonces:

$$\begin{aligned}
& f_n t^k \phi_{(1,n)} t \phi_{(1,n)} \big((x_1, \ldots, x_n) \otimes x_{n+1} \big) \\
&= \sum \quad (-1)^{(i_{n-k}+i_n+1)(i_n+i_{n+1}+1)+i_{n-k-1}+(i_{n-k-1}+i_{n+1})(i_{n+1}+m)+m} \\
&\qquad \partial_{i_0+1} \cdots \partial_m x_{k+2} \\
&\qquad \otimes \partial_0 \cdots \partial_{i_0-1} \partial_{i_1+1} \cdots \partial_m x_{k+3} \\
&\qquad \vdots \\
&\qquad \otimes \partial_0 \cdots \partial_{i_{n-k-3}-1} \partial_{i_{n-k-2}+1} \cdots \partial_m x_n \\
&\qquad \otimes \partial_0 \cdots \partial_{i_{n-k-2}-1} \partial_{i_{n-k-1}+1} \cdots \partial_{i_{n+1}-1} x_{n+1} \\
&\qquad \otimes \partial_0 \cdots \partial_{i_{n-k-1}-1} \partial_{i_{n-k}+1} \cdots \partial_{i_n-1} \partial_{i_{n+1}+1} \cdots \partial_m x_1 \\
&\qquad \otimes \partial_0 \cdots \partial_{i_{n-k}-1} \partial_{i_{n-k+1}+1} \cdots \partial_m x_2 \\
&\qquad \vdots \\
&\qquad \otimes \partial_0 \cdots \partial_{i_{n-1}-1} \partial_{i_n+1} \cdots \partial_m x_{k+1}
\end{aligned}$$

siendo la suma sobre todos los índices $(i_0, \ldots, i_{n+1})$ que están en $I_{(k,1,n+1,m)} \cap I_{(k+2,0,n+1,m)}$.

Y si $k = n$ entonces

$$
\begin{aligned}
& f_n t^n \phi_{(1,n)} t \phi_{(1,n)}((x_1, \ldots, x_n) \otimes x_{n+1}) \\
& = \sum \quad (-1)^{(i_0+i_n)(i_n+i_{n+1})+i_{n+1}} \\
& \qquad \partial_{i_0+1} \cdots \partial_{i_{n+1}-1} x_1 \\
& \qquad \otimes \partial_0 \cdots \partial_{i_0-1} \partial_{i_1+1} \cdots \partial_m x_2 \\
& \qquad \vdots \\
& \qquad \otimes \partial_0 \cdots \partial_{i_{n-2}-1} \partial_{i_{n-1}+1} \cdots \partial_m x_n \\
& \qquad \otimes \partial_0 \cdots \partial_{i_{n-1}-1} \partial_{i_n+1} \cdots \partial_{i_{n+1}-1} x_{n+1}
\end{aligned}
$$

siendo la suma sobre todos los índices $(i_0, \ldots, i_{n+1})$ que están en

$$I_{(n+1,0,n+1,m)} \bigcap I_{(1,0,n+1,m)}.$$

Además, actuando de la misma manera, también obtenemos la igualdad

$$f_n t^k \phi_{(1,n)} t g_{(1,n)} = (1^{\otimes n-k-1} \otimes T^{k+1})(f_{n-1} t^k \phi_{(1,n-1)} t \otimes 1).$$

Y usando la igualdad anterior, se puede demostrar por inducción que si $1 \leq k \leq n$ entonces

$$
\begin{aligned}
& \sum_{1 \leq j \leq n-1} f_n t^k \phi_{(1,n)} t g_{(1,n)} \cdots g_{(j,n)} \phi_{(j+1,n)} f_{(j,n)} \cdots f_{(1,n)} \\
& = \sum_{1 \leq j \leq n-k} (1^{\otimes n-k-j} \otimes T^{k+1})(f_{n-j} t^k \phi_{(1,n-j)} t \phi_{(1,n-j)} \otimes 1^{\otimes j}) f_{(j,n)} \cdots f_{(1,n)}.
\end{aligned}
$$

Para calcular la expresión simplificada de

$$(1^{\otimes n-k-\ell+1} \otimes T^k)(f_{n-\ell} t^k \phi_{(1,n-\ell)} \otimes 1^{\otimes \ell}) f_{(\ell,n)} \cdots f_{(1,n)} t \phi_{(1,n)}$$

con $1 \leq k \leq n$ y $2 \leq \ell \leq n-k$ basta aplicar la propiedad 2.4.5.

Para $\ell = 1$, usando las mismas técnicas que en la proposición 2.4.5, obtenemos que si $(x_1, \ldots, x_{n+1})$ es un elemento de $C_m^N(X^{\times n+1})$ entonces

$$
\begin{aligned}
&(1^{\otimes n-k} \otimes T^k)(f_{n-1}t^k\phi_{(1,n-1)} \otimes 1)f_{(1,n)}t\phi_{(1,n)}(x_1, \ldots, x_{n+1}) \\
&= \sum \quad (-1)^{(i_{n-k-1}+i_{n-1}+1)(i_{n-1}+i_n+i_{n+1}+m)+(i_n+i_{n+1})(i_{n+1}+m)+i_{n+1}} \\
&\qquad \otimes \partial_{i_0+1} \cdots \partial_m x_{k+1} \\
&\qquad \otimes \partial_0 \cdots \partial_{i_0-1}\partial_{i_1+1} \cdots \partial_m x_{k+2} \\
&\qquad \vdots \\
&\qquad \otimes \partial_0 \cdots \partial_{i_{n-k-3}-1}\partial_{i_{n-k-2}+1} \cdots \partial_m x_n \\
&\qquad \otimes \partial_0 \cdots \partial_{i_{n-k-2}-1}\partial_{i_{n-k-1}+1} \cdots \partial_{i_{n-1}-1}\partial_{i_n+1} \cdots \partial_{i_{n+1}-1} x_{n+1} \\
&\qquad \otimes \partial_0 \cdots \partial_{i_{n-k-1}}\partial_{i_{n-k}+1} \cdots \partial_m x_2 \\
&\qquad \vdots \\
&\qquad \otimes \partial_0 \cdots \partial_{i_{n-2}-1}\partial_{i_{n-1}+1} \cdots \partial_m x_{k+1} \\
&\qquad \otimes \partial_0 \cdots \partial_{i_n-1}\partial_{i_{n+1}+1} \cdots \partial_m x_{k+2}\,.
\end{aligned}
$$

donde la suma se realiza sobre todos los parámetros $(i_0, \ldots, i_{n+1})$ que están en $I_{(k,2,n+1,m)} \bigcap I_{(1,0,n+1,m)}$.

Por último, hay que simplificar la suma

$$
\sum_{1\le k\le n-1}\ \sum_{1\le \ell\le n-k}\ \sum_{1\le j\le n-1} \begin{aligned}[t] &(1^{\otimes n-k-\ell+1} \otimes T^k)(f_{n-\ell}t^k\phi_{(1,n-\ell)} \otimes 1^{\otimes \ell}) \\ &f_{(\ell,n)} \cdots f_{(1,n)}tg_{(1,n)} \cdots g_{(j,n)}\phi_{(j+1,n)}f_{(j,n)} \cdots f_{(1,n)}\,. \end{aligned} \tag{2.17}
$$

Usando la proposición 2.4.4, si $\ell \le j$ entonces

$$
\begin{aligned}
&\cdots(\phi_{(1,n-\ell)} \otimes 1^{\otimes \ell})f_{(\ell,n)} \cdots f_{(1,n)}tg_{(1,n)} \cdots g_{(j,n)} \cdots \\
&= \cdots(\phi_{(1,n-\ell)} \otimes 1^{\otimes \ell})g_{(\ell+1,n)}(1^{\times n-\ell} \otimes T)f_{(\ell+1,n)}(t \otimes 1^{\otimes \ell})g_{(\ell+1,n)} \cdots g_{(1,n)} \cdots \\
&= \cdots(\phi_{(1,n-\ell)}g_{(1,n-\ell)} \otimes 1^{\otimes \ell})(1^{\times n-\ell} \otimes T)f_{(\ell+1,n)}(t \otimes 1^{\otimes \ell})g_{(\ell+1,n)} \cdots g_{(1,n)} \cdots
\end{aligned}
$$

que es degenerado.

Por tanto, la suma (2.17) se reduce a

$$\sum_{1\leq k\leq n}\sum_{1\leq \ell\leq n-k}\sum_{1\leq j\leq \ell-1} 1^{\otimes n-k-\ell+1}\otimes T^k)(f_{n-\ell}t^k\phi_{(1,n-\ell)}\otimes 1^{\otimes \ell})$$
$$(1^{\times n-j}\otimes T)(f_{(\ell-j,n-j)}\cdots f_{(1,n-j)}\phi_{(1,n-j)}\otimes 1^{\otimes \ell})f_{(j,n)}\cdots f_{(1,n)}\,.$$

□

Capítulo 3.

TPH y operaciones cohomológicas

Capítulo 3.

TPH y operaciones cohomológicas

El objetivo de este capítulo es aproximarnos a las operaciones cohomológicas de Steenrod a través de las técnicas de la Teoría de Perturbación Homológica.

Desde que las operaciones cohomológicas de Steenrod fueron reveladas en 1947, se ha hablado mucho sobre lo "misterioso" del hecho de que dichas operaciones que miden la falta de conmutatividad, existieran y no fueran nulas. Por ejemplo Massey, en [Mas52, pág. 183] dice que este es uno de los misteriosos "hechos de la vida" en Topología Algebraica. Por otra parte, K. Hess en [Hes99] también califica de "misteriosa" la fórmula de los cuadrados de Steenrod que ella obtiene a partir del desarrollo original hecho por May [May70].

En este sentido, el trabajo que a continuación se expone trata de mostrar de forma sencilla y natural, cómo obtener de manera constructiva las operaciones de Steenrod y operaciones secundarias de Adem en términos de morfismos de una contracción Eilenberg–Zilber.

En la primera sección, damos la herramienta que usaremos a lo largo de este capítulo: el Lema de Perturbación Homológica.

En una segunda sección, nos aproximamos a la descripción de las operaciones de Steenrod a través de la Teoría de Perturbación Homológica. Más concretamente, establecemos el hecho de que dichas operaciones aparecen como componentes en la fórmula del morfismo de proyección de una contracción perturbada de productos tensoriales torcidos.

En la tercera sección, siguiendo la misma técnica que en la segunda, encontramos la fórmula explícita de la operación cohomológica secundaria $\Phi : N^q(X) \to$

$H^{q+3}(X;\mathbb{Z}_2)/Sq^2H^{q+1}(X;\mathbb{Z})$ de Adem [Ade52, Ade62], dando un método que se podría generalizar a todas las operaciones cohomológicas secundarias. En una segunda parte de esta sección, usamos las técnica de normalización referidas en el segundo capítulo para simplificar dichas fórmulas.

3.1 Teoría de Perturbación Homológica

La Teoría de Perturbación Homológica está constituida por un conjunto de técnicas basadas esencialmente en los conceptos de contracción y perturbación. El Lema Básico de Perturbación constituye el eje de esta Teoría se trata de un algoritmo en el que el dato de entrada es una contracción entre dos DG–módulos junto con una "perturbación" de la diferencial y el de salida es una nueva contracción en la que los módulos graduados subyacentes quedan inalterados. Recordemos ahora varios conceptos de la Teoría de Perturbación Homológica [Shi62, Bro65, GL89, GLS91].

Referencias sobre la Teoría de Perturbación Homológica son [Shi62, Bro65, GL89, GLS91].

Describimos en primer lugar el concepto de contracción para seguidamente enunciar el Lema Básico de Perturbación. Por último, enunciamos dos lemas que serán utilizados a lo largo de este capítulo.

Sea N un DG–módulo y $f : N \to N$ un morfismo de DG–módulos. El morfismo f es *puntualmente nilpotente* si, para todo $x \in N$, existe un entero positivo n_x tal que $f^{n_x}(x) = 0$.

Una *perturbación* de un DGA–módulo N es un morfismo de módulos graduados $\psi : N_* \to N_{*-1}$, tal que $(d_N + \psi)^2 = 0$ y $\xi_N\psi = 0$.

Un *dato de perturbación* de una contracción $c = (f, g, \phi) : N \Rightarrow M$ es una perturbación ψ del DGA–módulo N verificando que la composición $\phi\psi$ es puntualmente nilpotente.

Introducimos ahora la herramienta más importante en la Teoría de Perturbación Homológica: el Lema Básico de Perturbación [Shi62, Bro65, GL89].

Teorema 3.1.1 (LBP) *Sea $c = (f, g, \phi) : N \Rightarrow M$ una contracción de DGA–módulos y $\psi : N \to N$ un dato de perturbación de c. Entonces, queda definida una nueva contracción:*

$$c_\psi = (f_\psi, g_\psi, \phi_\psi) : (N,\, d + \psi) \Rightarrow (M,\, d + d_\psi)$$

donde

$$\begin{aligned} d_\psi &= f\,\psi(1 + \phi\,\psi)^{-1}g, \\ \phi_\psi &= (1 + \phi\,\psi)^{-1}\phi, \\ f_\psi &= f - f\,\psi(1 + \phi\,\psi)^{-1}\phi, \\ g_\psi &= (1 + \phi\,\psi)^{-1}g, \end{aligned}$$

tal que $(1 + \phi\,\psi)^{-1} = \sum_{i\geq 0}(-1)^i(\phi\,\psi)^i$.

Observemos que $(1 - \phi\,\psi)^{-1}$ es una suma finita para cada $x \in N$ ya que $\phi\,\psi$ es puntualmente nilpotente.

Enunciemos dos resultados que usaremos repetidas veces a lo largo de este capítulo. La demostración es inmediata usando el teorema 3.1.1 (Lema de Perturbación Homológica).

Lema 3.1.2 *Sea A una DGA–álgebra que opera a derecha sobre dos DGA–módulos N y M. Denotemos por ν y ν' a las respectivas acciones. Sea (C, ∇) una DGA–coálgebra, ψ una cocadena de torsión de C en A y $c = (f, g, \phi)$ una contracción de N en M. Si $\nu(g \otimes 1_A) = g\nu'$ entonces existe una nueva contracción*

$$(c \otimes 1_C)_{\psi\cap} = ((f \otimes 1_C)_{\psi\cap}, (g \otimes 1_C)_{\psi\cap}, (\phi \otimes 1_C)_{\psi\cap}) : N \otimes_\psi C \Rightarrow (M \otimes C, d + d_{\psi\cap}),$$

donde $\psi\cap$ es un dato de perturbación de $c \otimes 1_C$.

Además en esta contracción, $(M \otimes C,\, d + d_{\psi\cap}) = M \otimes_\psi C$ y $(g \otimes 1_C)_{\psi\cap} = g \otimes 1_C$.

Lema 3.1.3 *Sea A una DGA–álgebra que opera a derecha sobre dos DGA–módulos N y M. Denotemos por ν y ν' a sus respectivas acciones. Sean (C, ∇) y (C', ∇') dos DGA–coálgebras, ψ una cocadena de torsión de C en A y $c = (f, g, \phi)$ una contracción de C en C'. Si g es un morfismo de DGA–coálgebras entonces existe una nueva contracción*

$$(1_N \otimes c)_{\psi\cap} = ((1_N \otimes f)_{\psi\cap}, (1_N \otimes g)_{\psi\cap}, (1_N \otimes \phi)_{\psi\cap}) : N \otimes_\psi C \Rightarrow (N \otimes C', d + d_{\psi\cap}),$$

donde $\psi\cap$ es un dato de perturbación de $1_N \otimes c$.

En esta contracción, el morfismo $\psi\, g$ es una cocadena de torsión de C' en A,

$$(N \otimes C',\, d + d_{\psi\cap}) = N \otimes_{\psi\, g} C'$$

y $(1_N \otimes g)_{\psi\cap} = 1_N \otimes g$.

3.2 TPH y operaciones de Steenrod

Analizamos los métodos establecidos en el segundo capítulo desde la perspectiva de la Teoría de Perturbación Homológica [Shi62, Bro65, GL89, GLS91].

En primer lugar, damos una nueva demostración del teorema 2.3.3 del segundo capítulo. Enfaticemos que esta nueva reescritura es necesaria para determinar de una forma sencilla el contexto combinatorial de las operaciones cohomológicas de Steenrod y Adem.

Consideremos el grupo simplicial $\mathbb{Z}_p$ y su DGA–álgebra asociada $\mathbb{Z}_p[\mathbb{Z}_p]$. Sea X un conjunto simplicial y supongamos que $\mathbb{Z}_p[\mathbb{Z}_p]$ opera a derecha en los DG–módulos $C_*^N(X^{\times p})$ y $C_*^N(X)^{\otimes p}$ (con las acciones ν y ν' respectivamente) de la siguiente manera. Sea $x \in C_*^N(X^{\times p})$, $y \in C_*^N(X)^{\otimes p}$ y $\sum \lambda_g g \in \mathbb{Z}_p[\mathbb{Z}_p]$; sea t la permutación cíclica en $C_*^N(X^{\times p})$ y T en $C_*^N(X)^{\otimes p}$, entonces

$$\nu(x, g) = \nu(x, \sum \lambda_g g) = \sum \lambda_g t^g(x)$$

y

$$\nu'(y, g) = \nu'(y, \sum \lambda_g g) = \sum \lambda_g T^g(y).$$

Consideremos la cocadena de torsión trivial $\theta : \bar{B}(\mathbb{Z}_p[\mathbb{Z}_p]) \to \mathbb{Z}_p[\mathbb{Z}_p]$ y la contracción Eilenberg–Zilber

$$c_{EZ} = (AW, EML, SHI) : \ C_*^N(X^{\times p}) \Rightarrow C_*^N(X)^{\otimes p}.$$

Se sabe que el morfismo EML conmuta con los automorfismos t y T, entonces es claro que $EML \otimes 1_{\bar{B}(\mathbb{Z}_p[\mathbb{Z}_p])}$ conmuta con las acciones ν y ν'.

Usando el lema 3.1.2, tenemos que existe una contracción

$$(c_{EZ} \otimes 1)_{\theta\cap} = ((AW \otimes 1)_{\theta\cap},\, EML \otimes 1,\, (SHI \otimes 1)_{\theta\cap})$$

de $C_*^N(X^{\times p}) \otimes_\theta \bar{B}(\mathbb{Z}_p[\mathbb{Z}_p])$ en $C_*^N(X)^{\otimes p} \otimes_\theta \bar{B}(\mathbb{Z}_p[\mathbb{Z}_p])$.

Denotemos por $\bar{\lambda}$ a los elementos del grupo $\mathbb{Z}_p$ para diferenciarlos de los elementos del anillo $\mathbb{Z}_p$. Sea $x \in C_*^N(X)$ y $e_i = [\bar{\gamma}_1|\cdots|\bar{\gamma}_i] \in \bar{B}(\mathbb{Z}_p[\mathbb{Z}_p])$ tal que para cada $1 \leq j \leq i$, $\bar{\gamma}_j : \mathbb{Z}_p[\mathbb{Z}_p] \to \mathbb{Z}_p[\mathbb{Z}_p]$ es $\bar{1} - \bar{0}$ si j es impar y $\bar{0} + \bar{1} + \cdots + \overline{p-1}$ en otro caso.

Usando la filtración trivial $\mathcal{F}(\mathbb{Z}_p)$ explicada en la página 18, obtenemos una nueva filtración
$$F = \{F_j(C_*^N(X)^{\otimes p} \otimes_\theta \bar{B}(\mathbb{Z}_p[\mathbb{Z}_p]))\}_{j\in\mathbb{Z}};$$
tal que $F_j(C_*^N(X)^{\otimes p} \otimes_\theta \bar{B}(\mathbb{Z}_p[\mathbb{Z}_p])) = C_*^N(X)^{\otimes p} \otimes_\theta \mathcal{F}_j(\mathbb{Z}_p)$ para todo $j \in \mathbb{Z}$.

Tenemos el siguiente resultado:

Teorema 3.2.1 *En la situación anterior, la proyección $(AW \otimes 1)_{\theta\cap}$ "genera" una mejor aproximación diagonal $\{D_i\}_{i\geq 0}$, donde*
$$D_i(x) = (AW \otimes 1)_{\theta\cap}|^{\mathcal{F}_0}(\Delta(x) \otimes e_i)$$
salvo signos.

Demostración

En primer lugar, es fácil demostrar que
$$\begin{aligned}
&(AW \otimes 1)_{\theta\cap}|^{F_0}(\Delta(x) \otimes e_i)\\
&= (-1)^i(AW \otimes 1)((\theta\cap)(SHI \otimes 1))^i(\Delta(x) \otimes e_i)\\
&= (-1)^i(-1)^i(-1)^m \cdots (-1)^{m+i-1} AW\gamma_i SHI \cdots \gamma_1 SHI\Delta(x) \otimes [\,];
\end{aligned}$$

A partir de la condición de ser $(AW \otimes 1)_{\theta\cap}$ un morfismo de DG–módulos, tenemos que obtener la relación (1.4).

Por tanto, partimos de la igualdad
$$(AW \otimes 1)_{\theta\cap}(d + \theta\cap)|^{F_0}(\Delta(x) \otimes e_i) = (d + d_{\theta\cap})(AW \otimes 1)_{\theta\cap}|^{F_0}(\Delta(x) \otimes e_i). \qquad (3.1)$$

Estudiando por separado cada sumando de la igualdad anterior, (observar que e_i es un ciclo y $(\theta\cap)(\Delta(x) \otimes e_i) = 0$), obtenemos fácilmente que
$$(AW \otimes 1)_{\theta\cap}(d + \theta\cap)|^{F_0}(\Delta(x) \otimes e_i) = (-1)^{m-1} \cdots (-1)^{m+i-2} D_i d(x) \otimes [\,],$$

$$(d\otimes 1)(AW\otimes 1)_{\theta\cap}|^{F_0}(\Delta(x)\otimes e_i) = (-1)^m\cdots(-1)^{m+i-1}dD_i(x)\otimes [\,],$$

$$(1\otimes d)(AW\otimes 1)_{\theta\cap}|^{F_0}(\Delta(x)\otimes e_i) = (-1)^m\cdots(-1)^{m+i-2}D_{i-1}(x)\otimes d([\bar{\gamma}_1]) = 0,$$

$$(\theta\cap)(AW\otimes 1)_{\theta\cap}|^{F_0}(\Delta(x)\otimes e_i) = (-1)^m\cdots(-1)^{m+i-3}\alpha_i D_{i-1}(x)\otimes [\,].$$

Sustituyendo estos resultados en (3.1) y simplificando signos, obtenemos (1.4) como afirmábamos. □

A continuación intentamos clarificar la relación (2.11) expresada en la página 48, usando de nuevo técnicas de perturbación homológica.

Sea X un conjunto simplicial y p un número primo. A partir del DG–módulo $C_*^N(X^{\times p})\otimes_\theta \bar{B}(\mathbb{Z}_p[\mathbb{Z}_p])$, podemos construir el automorfismo de grado cero $t\otimes 1$ donde t es la permutación cíclica en $C_*^N(X^{\times p})$.

Teorema 3.2.2 *En la situación anterior, una secuencia de morfismos $\{F_i\}$ que "mide la diferencia" entre dos mejores aproximaciones diagonales $\{D_i\}$ y $\{TD_i\}$ ambas de $C_*^N(X)$ hacia $C_*^N(X)^{\otimes p}$ (es decir, que satisfacen la relación (2.11)) viene dada explícitamente por:*

$$F_i : C_*^N(X)\to C_*^N(X^{\times p})$$

donde

$$F_i(x) = \sum_{0\le j\le i-1}(-1)^{i-j}AW\,\gamma_{i-1}SHI\cdots\gamma_{j+1}SHI\,t\,SHI\,\gamma_j SHI\cdots\gamma_1 SHI\Delta(x),$$

siendo $x\in C_m^N(X)$ y para todo $\ell\ge 0$, $\gamma_\ell : C_*^N(X^{\times p})\to C_*^N(X^{\times p})$ es igual a la permutación cíclica t si ℓ es impar ó $t+\cdots+t^{p-1}$ si ℓ es par.

Demostración

Notemos $M = C_*^N(X^{\times p})\otimes_\theta \bar{B}(\mathbb{Z}_p[\mathbb{Z}_p])$ y construyamos el DG–módulo cono (definido en la página 11) de $t\otimes 1$ como sigue:

$$C(t\otimes 1)_n = S(M)_n\oplus M_n\,,$$

cuya diferencial viene dada por

$$d_C(a,b) = (-d_M a, (t \otimes 1)\, a + d_M b).$$

Podemos escribir la diferencia d_C como la suma de dos morfismos:

- la diferencial usual de la suma directa: $d = (-d_M, d_M)$;
- y un morfismo $\delta : S(M) \oplus M \to S(M) \oplus M$ tal que $\delta(a, b) = (0, (t \otimes 1)\, a)$.

Es evidente que $d_C = d + \delta$.

Denotemos por N al DG–módulo $C_*^N(X)^{\otimes p} \otimes_\theta \bar{B}(\mathbb{Z}_p[\mathbb{Z}_p])$ y consideremos ahora la contracción ya usada anteriormente

$$(c_{EZ} \otimes 1)_{\theta\cap} = ((AW \otimes 1)_{\theta\cap},\, EML \otimes 1,\, (SHI \otimes 1)_{\theta\cap}) :\; M \Rightarrow N.$$

Podemos construir la contracción suma directa

$$c = S((c_{EZ} \otimes 1)_{\theta\cap}) \oplus (c_{EZ} \otimes 1)_{\theta\cap} = (f, g, \phi) :\; S(M) \oplus M \Rightarrow S(N) \oplus N\,;$$

donde

$$\begin{aligned} f &= S((AW \otimes 1)_{\theta\cap}) \oplus (AW \otimes 1)_{\theta\cap}\,, \\ g &= S(EML \otimes 1) \oplus EML \otimes 1\,, \\ \phi &= -(SHI \otimes 1)_{\theta\cap} \oplus (SHI \otimes 1)_{\theta\cap})\,. \end{aligned}$$

En ese caso, veamos que el morfismo δ definido anteriormente es una perturbación de la contracción c. Primero, comprobamos que $(d + \delta)^2 = 0$:

$$\begin{aligned} (d+\delta)^2(a, b) &= (d+\delta)(-(d+\theta\cap)\, a,\, ((t\otimes 1)\, a + (d+\theta\cap))\, b) \\ &= ((d+\theta\cap)^2 a,\, -(t\otimes 1)(d+\theta\cap)\, a + (d+\theta\cap)(t\otimes 1)\, a + (d+\theta\cap)^2 b) \\ &= (0,\, -(t\otimes 1)(d+\theta\cap)\, a + (d+\theta\cap)(t\otimes 1)\, a) = 0\,, \end{aligned}$$

ya que $t \otimes 1$ es morfismo de DG–módulos.

Para ver que $\phi\,\delta$ es puntualmente nilpotente basta comprobar que $\delta\,\phi\,\delta = 0$:

$$\delta\,\phi\,\delta(a, b) = \delta\,\phi(0,\, (t\otimes 1)\, a) = \delta(0,\, \phi(t\otimes 1)\, a) = (0,\, (t\otimes 1)\, 0) = 0\,.$$

Aplicando el Lema Básico de Perturbación, obtenemos una nueva contracción

$$c_\delta = (f_\delta, g_\delta, \phi_\delta) : \ (S(M) \oplus M, \ d+\delta) \Rightarrow (S(N) \oplus N, \ d+d_\delta).$$

Como $\delta\,\phi\,\delta = 0$ entonces

$$\begin{aligned} f_\delta(a,b) &= (f - f\,\delta\,\phi)(a,b) \\ &= ((AW \otimes 1)_{\theta\cap}(a), (AW \otimes 1)_{\theta\cap}(b) + (AW \otimes 1)_{\theta\cap}(t \otimes 1)(SHI \otimes 1)_{\theta\cap}(a)). \end{aligned}$$

Tomemos el elemento $(\Delta(x) \otimes e_i, 0)$ donde $x \in C_m^N(X)$ y $e_i = [\bar\gamma_1|\cdots|\bar\gamma_i] \in \bar B(\mathbb{Z}_p[\mathbb{Z}_p])$ ya ha sido definido anteriormente.

Al ser f_δ morfismo de DG–módulos entonces $f_\delta(d+\delta) = (d+d_\delta)f_\delta$. En particular, tenemos que

$$\begin{aligned} & f_\delta(d+\delta)(\Delta(x) \otimes e_i, 0) \\ &= f_\delta(-(d+\theta\cap)(\Delta(x) \otimes e_i), \ (t \otimes 1)(\Delta(x) \otimes e_i)) \\ &= (\ (AW \otimes 1)_{\theta\cap} - (AW \otimes 1)_{\theta\cap}\delta(SHI \otimes 1)_{\theta\cap})(-(d+\theta\cap)(\Delta(x) \otimes e_i), \ (\Delta(x) \otimes e_i)\ ) \\ &= (\ -(AW \otimes 1)_{\theta\cap}(d+\theta\cap)(\Delta(x) \otimes e_i), \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} & (d+d_\delta)f_\delta(\Delta(x) \otimes e_i, 0) \\ &= (d + f\delta g)(\quad (AW \otimes 1)_{\theta\cap}(\Delta(x) \otimes e_i), \\ &\qquad\qquad (AW \otimes 1)_{\theta\cap}(t \otimes 1)(SHI \otimes 1)_{\theta\cap}(\Delta(x) \otimes e_i)\ ) \\ &= (\quad -(d+\theta\cap)(AW \otimes 1)_{\theta\cap}(\Delta(x) \otimes e_i), \\ &\qquad ((d+\theta\cap)(AW \otimes 1)_{\theta\cap}(t \otimes 1)(SHI \otimes 1)_{\theta\cap} \\ &\qquad +(AW \otimes 1)_{\theta\cap}(t \otimes 1)(EML \otimes 1)(AW \otimes 1)_{\theta\cap})(\Delta(x) \otimes e_i)\ ) \\ &= (\ -(d+\theta\cap)(AW \otimes 1)_{\theta\cap}(\Delta(x) \otimes e_i), \\ &\quad ((d+\theta\cap)(AW \otimes 1)_{\theta\cap}(t \otimes 1)(SHI \otimes 1)_{\theta\cap} + (T \otimes 1)(AW \otimes 1)_{\theta\cap})(\Delta(x) \otimes e_i)\ ). \end{aligned}$$

Por tanto, debe ocurrir que

$$\begin{aligned} & ((AW \otimes 1)_{\theta\cap} - (AW \otimes 1)_{\theta\cap}(t \otimes 1)(SHI \otimes 1)_{\theta\cap}(d+\theta\cap))\,(\Delta(x) \otimes e_i) \\ &= ((d+\theta\cap)(AW \otimes 1)_{\theta\cap}(t \otimes 1)(SHI \otimes 1)_{\theta\cap} + (T \otimes 1)(AW \otimes 1)_{\theta\cap})\,(\Delta(x) \otimes e_i). \end{aligned} \tag{3.2}$$

Y en particular,

$$\begin{aligned}&(\,(AW\otimes 1)_{\theta\cap}\\ &-(AW\otimes 1)_{\theta\cap}(t\otimes 1)(SHI\otimes 1)_{\theta\cap}(d+\theta\cap)\,)|^{\mathcal{F}_0}(\Delta(x)\otimes e_i)\\ &=(\,(d+\theta\cap)(AW\otimes 1)_{\theta\cap}(t\otimes 1)(SHI\otimes 1)_{\theta\cap}\\ &+(T\otimes 1)(AW\otimes 1)_{\theta\cap}\,)|^{\mathcal{F}_0}(\Delta(x)\otimes e_i)\,.\end{aligned} \tag{3.3}$$

Estudiemos ahora la igualdad (3.3). Por un lado, el primer sumando de la parte izquierda de la igualdad se reduce a

$$(AW\otimes 1)_{\theta\cap}|^{\mathcal{F}_0}(\Delta(x)\otimes e_i)=(-1)^m\cdots(-1)^{m+i-1}D_i(x)\otimes[\,],$$

El segundo sumando es

$$\begin{aligned}&-(AW\otimes 1)_{\theta\cap}(t\otimes 1)(SHI\otimes 1)_{\theta\cap}(d+\theta\cap)(\Delta(x)\otimes e_i)\\ &=-(AW\otimes 1)_{\theta\cap}(t\otimes 1)(SHI\otimes 1)_{\theta\cap}(\Delta\, d(x)\otimes e_i)\\ &=(-1)^{i+1}(-1)^m\cdots(-1)^{m+i-1}F_{i+1}\,d(x)\otimes[\,].\end{aligned}$$

Por otro lado, el primer sumando de la parte derecha de la igualdad (3.3) es

$$\begin{aligned}&(d+\theta\cap)(AW\otimes 1)_{\theta\cap}(t\otimes 1)(SHI\otimes 1)_{\theta\cap}|^{\mathcal{F}_0}(\Delta(x)\otimes e_i)\\ &=\ (-1)^i(-1)^{m+1}\cdots(-1)^{m+i}d\,F_i\,(x)\otimes[\,]\\ &\quad+(-1)^{i-1}(-1)^{m+1}\cdots(-1)^{m+i-1}(-1)^{m+i-1}\alpha_iF_i\,(x)\otimes[\,];\end{aligned}$$

y el último sumando es

$$(T\otimes 1)(AW\otimes 1)_{\theta\cap})|^{\mathcal{F}_0}(\Delta(x)\otimes e_i)=(-1)^m\cdots(-1)^{m+i-1}T\,D_i(x)\otimes[\,].$$

Aplicando estos resultados a la igualdad 3.3 y simplificando los signos, tenemos que

$$dF_{i+1}=D_i-T\,D_i-\alpha_iF_i+(-1)^{i+1}F_{i+1}d\,,$$

como queríamos demostrar. $\square$

3.3 Operaciones cohomológicas secundarias

En esta sección, generalizamos la técnica usada en la sección anterior para operaciones cohomológicas de mayor orden. Usando esta técnica de perturbación homológica, encontramos la fórmula explícita de una particular operación secundaria, para más tarde, aplicar técnicas de normalización y conseguir así una expresión combinatorial "minimal" de esta operación cohomológica.

Adem en su trabajo sobre cuadrados de Steenrod [Ade52] formuló por primera vez la idea que condujo a las operaciones cohomológicas secundarias a partir de relaciones entre los cuadrados de Steenrod iterados. Más concretamente, Adem demostró la relación $Sq^2Sq^2 + Sq^3Sq^1 = 0$ usando una construcción de cocadenas. Más concretamente, dado un conjunto simplicial X, él demostró que existe un homomorfismo Φ del núcleo de

$$Sq^2 : H^n(X; \mathbb{F}_2) \to H^{n+2}(X; \mathbb{F}_2)$$

en el conúcleo de $Sq^2 : H_{n+1}(X; \mathbb{F}_2) \to H^{n+3}(X; \mathbb{F}_2)$. Y llamó a este homomorfismo una *operación cohomológica secundaria*. Adem obtuvo la existencia y unicidad de Φ usando las relaciones que él había encontrado entre los Sq^i. Este método fue más tarde generalizado por J.F. Adams en su trabajo sobre invariantes de Hopf [Ada58, Ada60].

Definamos más precisamente estas operaciones cohomológicas secundarias de Adem. Sea X un conjunto simplicial y denotemos por N^q al kernel de Sq^2. José Adem construyó una operación secundaria

$$\Phi : N^q(X) \longrightarrow H^{q+3}(X; \mathbb{Z}_2)/Sq^2\, H^{q+1}(X; \mathbb{Z}) \tag{3.4}$$

definida como sigue. Sea $c \in N^q(X)$, sea b una cocadena verificando que $c \smile c = \delta\, b$. Notemos por $\eta(c)$ a la expresión $1/2(c \smile_{i+2} c + c)$ y sea

$$E_j : C^p(X^{\times 4}) \to C^{4p-j}(X)$$

un morfismo de cocadenas tal que mod 2 verifica

$$(c \smile_i c) \smile_{i+2} (c \smile_i c) + (c \smile_{i+1} c) \smile_i (c \smile_{i+1} c) = \delta\, E_{3i+3}(c^4)$$

cuando $i = q - 2$. Entonces

$$w = b \smile_{i+1} b + b \smile_{i+2} \delta\, b + E_{3i+3}(c^4) + \eta(c) \smile_{i-1} \eta(c) + \eta(c) \smile_i \delta\, \eta(c)$$

y la operación (3.4) se define como

$$\Phi_c = w + Sq^2(H^{q+1}(X; \mathbb{Z}))\,.$$

En esta sección puede distinguirse dos partes. En una primera parte, aplicando técnicas de perturbación homológica y siguiendo el mismo esquema que en la sección anterior, obtenemos una fórmula explícita del morfismo de cocadenas E_3 $(i = 0)$ en términos de los morfismos componentes de una contracción Eilenberg–Zilber dada. En una segunda parte, realizamos un proceso de normalización de la fórmula usando las mismas técnicas que en la sección 2.4 para obtener una fórmula "minimal" del morfismo E_3.

El resultado final al que llegamos es el siguiente.

Teorema 3.3.1 *Sea X un conjunto simplicial y $\mathbb{F}_2$ el anillo base. Sea c una 2–cocadena y x un elemento de $C_5^N(X)$. Entonces*

$$\begin{aligned} E_3(c^4)(x) \;=\; & \mu(c(\partial_1\partial_4\partial_5\, x) \otimes c(\partial_3\partial_4\partial_5\, x) \otimes c(\partial_0\partial_1\partial_2\, x) \otimes c(\partial_0\partial_1\partial_4\, x) \\ & + c(\partial_1\partial_2\partial_3 x) \otimes c(\partial_0\partial_1\partial_2 x) \otimes c(\partial_3\partial_4\partial_5 x) \\ & + c(\partial_2\partial_3\partial_4 x) \otimes c(\partial_0\partial_1\partial_2 x) \otimes c(\partial_0\partial_4\partial_5 x) \\ & + c(\partial_3\partial_4\partial_5 x) \otimes c(\partial_0\partial_1\partial_3 x) \otimes c(\partial_0\partial_1\partial_5 x) \\ & + c(\partial_3\partial_4\partial_5 x) \otimes c(\partial_0\partial_1\partial_4 x) \otimes c(\partial_0\partial_1\partial_2 x)\ ). \end{aligned}$$

Lo que resta de sección, lo dedicaremos a la demostración de este teorema.

Primero, buscamos una fórmula explícita del morfismo E_3 usando la Teoría de Perturbación Homológica.

Consideremos la DGA–álgebra $\mathbb{Z}_2[\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2]$ y un conjunto simplicial X.

El grupo $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ opera a derecha en $C_*^N(X^{\times 4})$ y $C_*^N(X)^{\otimes 4}$ de la siguiente manera:

$$\nu(x,(1,0)) = t_1(x), \qquad \nu(x,(0,1)) = (t_2 \times t_2)(x);$$

y análogamente,

$$\nu'(y,(1,0)) = T_1(y), \qquad \nu'(y,(0,1)) = (T_2 \otimes T_2)(y);$$

donde $x \in C_*^N(X^{\times 4})$ e $y \in C_*^N(X)^{\otimes 4}$. Los morfismos t_1, t_2, T_1 y T_2 son permutaciones tal que si $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ e $y = y_1 \otimes y_2 \otimes y_3 \otimes y_4$ entonces

$$t_1(x) = (x_3, x_4, x_1, x_2), \qquad (t_2 \times t_2)(x) = (x_2, x_1, x_3, x_4),$$

$$T_1(y) = (-1)^{(|y_1|+|y_2|)(|y_3|+|y_4|)} y_3 \otimes y_4 \otimes y_1 \otimes y_2$$

y

$$(T_2 \otimes T_2)(y) = (-1)^{|y_1||y_2|+|y_3||y_4|} y_2 \otimes y_1 \otimes y_4 \otimes y_3.$$

Consideremos la contracción $c = (c_2 \otimes c_2)c_1 = (f, g, \phi) : C_*^N(X^{\times 4}) \Rightarrow C_*^N(X)^{\otimes 4}$ donde

$$c_1 = (f_1, g_1, \phi_1) : C_*^N((X \times X) \times (X \times X)) \Rightarrow C_*^N(X \times X) \otimes C_*^N(X \times X)$$

y

$$c_2 = (f_2, g_2, \phi_2) : C_*^N(X \times X) \Rightarrow C_*^N(X) \otimes C_*^N(X)$$

son contracciones Eilenberg–Zilber.

Se satisfacen las siguientes relaciones:

$$\begin{gathered}(t_2 \times t_2)\phi_1 = \phi_1(t_2 \times t_2),\ (t_2 \otimes t_2)f_1 = f_1(t_2 \times t_2),\ (t_2 \times t_2)g_1 = g_1(t_2 \otimes t_2),\\ t_1 g_1 = g_1 T_1,\ t_2 g_2 = g_2 T_2,\\ T_1(\phi_2 \otimes g_2 f_2) = (g_2 f_2 \otimes \phi_2)T_1,\ T_1(1 \otimes \phi_2) = (\phi_2 \otimes 1)T_1\,.\end{gathered} \tag{3.5}$$

Por una parte, como ya hemos mencionado en los preliminares, el morfismo $g_{\bar{B}}$ de la contracción

$$c_{\bar{B}} = (f_{\bar{B}}, g_{\bar{B}}, \phi_{\bar{B}}) : \bar{B}(\mathbb{Z}_2[\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2]) \Rightarrow \bar{B}(\mathbb{Z}_2[\mathbb{Z}_2]) \otimes \bar{B}(\mathbb{Z}_2[\mathbb{Z}_2])$$

es un morfismo de DGA–coálgebras; por otra parte, el morfismo $g = g_1(g_2 \otimes g_2)$ de la contracción c, conmuta con las acciones ν y ν'. Usando estos dos resultados, podemos aplicar los lemas 3.1.2 y 3.1.3 para obtener el siguiente diagrama de contracciones:

$$\begin{array}{ccc} C_*^N(X^{\times 4}) \otimes_\theta \bar{B}(\mathbb{Z}_2[\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2]) & \overset{(1 \otimes c_{\bar{B}})_{\theta\cap}}{\Rightarrow} & C_*^N(X^{\times 4}) \otimes_{\theta g} \bar{B}(\mathbb{Z}_2[\mathbb{Z}_2])^{\otimes 2} \\ (c \otimes 1)_{\theta\cap} \Downarrow & & \Downarrow (c \otimes 1)_{\theta g\cap} \\ C_*^N(X)^{\otimes 4} \otimes_\theta \bar{B}(\mathbb{Z}_2[\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2]) & \underset{(1 \otimes c_{\bar{B}})_{\theta\cap}}{\Rightarrow} & C_*^N(X)^{\otimes 4}) \otimes_{\theta g} \bar{B}(\mathbb{Z}_2[\mathbb{Z}_2])^{\otimes 2} \end{array}$$

Es fácil ver que

$$(1 \otimes g_{\bar{B}})_{\theta\cap}(f \otimes 1)_{\theta g\cap} = (f \otimes 1)_{\theta\cap}(1 \otimes g_{\bar{B}})_{\theta\cap}\,.$$

Denotemos por $\bar{c}$ a $(c\otimes 1)_{\theta\cap}$ y a sus morfismos por $(\bar{f}, \bar{g}, \bar{\phi})$ (recordemos que $\bar{g} = g\otimes 1$).

Siguiendo el mismo esquema que en la sección anterior, estamos interesados en el morfismo $\bar{f}$ aplicado a un elemento $\Delta(x) \otimes e$, donde $x \in X_m$ y $e \in \bar{B}(\mathbb{Z}_2[\mathbb{Z}_2 \otimes \mathbb{Z}_2])$ es un ciclo. Para obtener operaciones secundarias de Adem necesitamos realizar un paso más.

Definamos los automorfismos

$$z: \ C_*^N(X^{\times 4}) \to C_*^N(X^{\times 4}) \quad \text{donde } z(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1, x_3, x_2, x_4)\,,$$

$$z': \ C_*^N(X)^{\otimes 4} \to C_*^N(X)^{\otimes 4} \quad \text{donde } z'(y_1 \otimes y_2 \otimes y_3 \otimes y_4) = (-1)^{|y_2||y_3|} y_1 \otimes y_3 \otimes y_2 \otimes y_4\,,$$

y $\mathcal{T}: \bar{B}(\mathbb{Z}_2[\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2]) \to \bar{B}(\mathbb{Z}_2[\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2])$ se define como

$$\mathcal{T}([(a_1^1, a_1^2)|\cdots|(a_n^1, a_n^2)]) = [(a_1^2, a_1^1)|\cdots|(a_n^2, a_n^1)]\,.$$

Consideremos los DG–módulos

$$A = C_*^N(X^{\times 4}) \otimes_\theta \bar{B}(\mathbb{Z}_2[\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2]) \quad \text{y} \quad A' = C_*^N(X)^{\otimes 4} \otimes_\theta \bar{B}(\mathbb{Z}_2[\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2])\,.$$

Supongamos que $\mathbb{Z}_2$ opera a derecha sobre estos DG–módulos como sigue:

$$\nu(x \otimes a, \bar{1}) = z(x) \otimes \mathcal{T}(a)$$

y

$$\nu'(y \otimes a, \bar{1}) = z'(y) \otimes \mathcal{T}(a)\,;$$

donde $x \in C_*^N(X^{\times 4})$, $y \in C_*^N(X)^{\otimes 4}$ y $a \in \bar{B}(\mathbb{Z}_2[\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2])$.

Se satisface que $z(\bar{g} \otimes 1) = (\bar{g} \otimes 1)z'$ por tanto, podemos aplicar el lema 3.1.2 para obtener una contracción

$$(\bar{c} \otimes 1)_{\theta\cap} = ((\bar{f} \otimes 1)_{\theta\cap}, \bar{g} \otimes 1, (\bar{\phi} \otimes 1)_{\theta\cap}): \ A \otimes_\theta \bar{B}(\mathbb{Z}_2[\mathbb{Z}_2]) \Rightarrow A' \otimes_\theta \bar{B}(\mathbb{Z}_2[\mathbb{Z}_2])\,.$$

Para obtener las operaciones cohomológicas de Adem, usamos los mismos argumentos que para obtener las potencias reducidas de Steenrod. Es decir, usamos que $(\bar{f} \otimes 1)_{\theta\cap}$ es un morfismo de DG–módulos y estudiamos este hecho en un elemento $x \in X_m$ y dos ciclos $a \in \bar{B}(\mathbb{Z}_2[\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2])$ (que podemos encontrarlo usando el morfismo g_B) y $b \in \bar{B}(\mathbb{Z}_2[\mathbb{Z}_2])$.

Por ejemplo, sea $a = [(1,0)-(0,0)|(1,0)+(0,0)]$ y $b = [\bar{1}-\bar{0}]$. Consideremos la filtración

$$F = \{F_j(A' \otimes_\theta \bar{B}(\mathbb{Z}_2[\mathbb{Z}_2]))\}_{j\in\mathbb{Z}} = \{(C_*^N(X)^{\otimes 4} \otimes_\theta \mathcal{F}_0(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2)) \otimes_\theta \mathcal{F}_0(\mathbb{Z}_2)\}_{j\in\mathbb{Z}}\,.$$

Entonces,

$$(\bar{f}\otimes 1)_{\theta\cap}(d+\theta\cap)|^{\mathcal{F}_0}(\Delta(x)\otimes a\otimes b) = (d+\theta\cap)(\bar{f}\otimes 1)_{\theta\cap}|^{\mathcal{F}_0}(\Delta(x)\otimes a\otimes b)\,. \tag{3.6}$$

Estudiemos ahora esta última expresión mod 2. Por una parte, el término de la derecha de dicha identidad puede ser simplificado:

$$\begin{aligned}
&(\bar{f}\otimes 1)_{\theta\cap}(d+\theta\cap)|^{\mathcal{F}_0}(\Delta(x)\otimes a\otimes b)\\
&= (\tilde{E}_3 d + f(t_2\times t_2)\phi z\phi(t_1-1) + fz\phi t_1\phi(t_1-1)\\
&\quad + f(t_2\times t_2)\phi(t_2\times t_2)\phi z)\Delta(x)\otimes[\,]\otimes[\,]\\
&= (\tilde{E}_3 d + f(t_2\times t_2)\phi(t_2\times t_2)\phi z)\Delta(x)\otimes[\,]\otimes[\,] \quad \bmod 2\,,
\end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}
\tilde{E}_3 &= f(t_2\times t_2)\phi(t_2\times t_2)\phi z\phi + f(t_2\times t_2)\phi z\phi t_1\phi + fz\phi t_1\phi t_1\phi\\
&= (f_2t_2\phi_2t_2\phi_2\otimes f_2\\
&\quad + f_2t_2\phi_2t_2\otimes T_2f_2t_2\phi_2)f_1z(\phi_1 + g_1(\phi_2\otimes g_2f_2 + 1\otimes\phi_2)f_1)\\
&\quad + (f_2t_2\phi_2\otimes T_2f_2 + f_2t_2\otimes f_2t_2\phi_2)f_1z(\phi_1t_1\phi_1 + g_1(\phi_2\otimes\phi_2)f_1)\\
&\quad + (f_2\otimes f_2)f_1z\phi_1t_1\phi_1t_1\phi_1 \quad \bmod 2\,.
\end{aligned} \tag{3.7}$$

Por otra parte, el término de la derecha de la identidad (3.6) es

$$\begin{aligned}
&(d+\theta\cap)(\bar{f}\otimes 1)_{\theta\cap}|^{\mathcal{F}_0}(\Delta(x)\otimes a\otimes b)\\
&= (d\tilde{E}_3 + (T_2\times T_2+1)fz\phi t_1\phi + (T_2\times T_2+1)f(t_2\times t_2)\phi z\phi\\
&\quad + z'ft_1\phi t_1\phi)\Delta(x)\otimes[\,]\otimes[\,]\\
&= (d\tilde{E}_3 + z'ft_1\phi t_1\phi)\Delta(x)\otimes[\,]\otimes[\,] \quad \bmod 2\,.
\end{aligned}$$

Sustituyendo estos resultado en (3.6) tenemos que

$$(\tilde{E}_3 d + f(t_2\times t_2)\phi(t_2\times t_2)\phi)\Delta(x) = (d\tilde{E}_3 + z'ft_1\phi t_1\phi)\Delta(x) \quad \bmod 2\,.$$

Aplicando la relación (3.5), podemos simplificar esta última igualdad:

$$\begin{aligned}
&(\tilde{E}_3 d + (f_2t_2\phi_2t_2\phi_2\otimes f_2)f_1 + (f_2t_2\phi_2t_2\otimes T_2f_2t_2\phi_2)f_1\\
&+ (f_2\otimes f_2t_2\phi_2t_2\phi_2)f_1)\Delta(x) = (d\tilde{E}_3 + z'(f_2\otimes f_2)f_1t_1\phi_1t_1\phi_1)\Delta(x) \quad \bmod 2\,.
\end{aligned} \tag{3.8}$$

Sea c un 2–cociclo y μ el producto natural en $\mathbb{F}_2$, entonces $c \smile_2 c = Sq^0(c) = c \bmod 2$, y la igualdad anterior se convierte en:

$$\begin{aligned} &\mu c^{\otimes 4}\tilde{E}_3\Delta\, d + c \smile_0 (c \smile_0 c) + (c \smile_1 c) \smile_0 (c \smile_1 c) + (c \smile_0 c) \smile_0 c \\ &= \Delta + (c \smile_0 c) \smile_2 (c \smile_0 c) \quad \bmod 2\,. \end{aligned} \tag{3.9}$$

Notemos que al ser c un 2–cociclo, entonces $c \smile_0 c = c \smile c$ es también cociclo. Y la igualdad (1.6) cuando $i = 0$, y las cocadenas son $c \smile_0 c$ y c, se convierte en

$$\begin{aligned} \delta((c \smile_0 c) \smile_1 c) &= (c \smile_0 c) \smile_0 c + c \smile_0 (c \smile_0 c) \\ &\quad + \delta(c \smile_0 c) \smile_1 c + (c \smile_0 c) \smile_0 \delta(c) \\ &= (c \smile_0 c) \smile_0 c + c \smile_0 (c \smile_0 c) \quad \bmod 2\,. \end{aligned}$$

Aplicando esto último a la relación (3.9) obtenemos

$$\begin{aligned} &\delta(\mu c^{\otimes 4}\tilde{E}_3\Delta + (c \smile c) \smile_1 c) \\ &= (c \smile_0 c) \smile_2 (c \smile_0 c) + (c \smile_1 c) \smile_0 (c \smile_1 c) \quad \bmod 2\,. \end{aligned}$$

Por tanto el morfismo E_3 aplicado sobre una 2–cocadena tiene la expresión

$$\mu c^{\otimes 4}\tilde{E}_3\Delta + (c \smile c) \smile_1 c\,.$$

Ahora nos preocupamos en simplificar esta fórmula y encontrar una expresión de la misma donde sólo aparezcan operadores de cara.

En primer lugar, la expresión de $(c \smile c) \smile_1 c$ es fácil de obtener pues conocemos la fórmula explícita de los productos i–cup. Sea $x \in C_5^N(X)$, entonces

$$(c \smile c) \smile_2 c(x)$$

$$\begin{aligned} = \textstyle\sum_{0\le i_0<i_1\le 5} \;& \mu(c(\partial_3\partial_4\partial_{i_0+1}\cdots\partial_{i_1-1}x) \otimes c(\partial_0\partial_1\partial_{i_0+1}\cdots\partial_{i_1-1}x) \\ & \otimes c(\partial_0\cdots\partial_{i_0-1}\partial_{i_1+1}\cdots\partial_5 x)\,) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} = \;& \mu(\, c(\partial_3\partial_4\partial_1 x) \otimes c(\partial_0\partial_1\partial_1 x) \otimes c(\partial_3\partial_4\partial_5 x) + c(\partial_3\partial_4\partial_2 x) \otimes c(\partial_0\partial_1\partial_2 x) \otimes c(\partial_0\partial_4\partial_5 x) \\ & + c(\partial_3\partial_4\partial_3 x) \otimes c(\partial_0\partial_1\partial_3 x) \otimes c(\partial_0\partial_1\partial_5 x) + c(\partial_3\partial_4\partial_4 x) \otimes c(\partial_0\partial_1\partial_4 x) \otimes c(\partial_0\partial_1\partial_2 x)\,) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
= \;& \mu(\, c(\partial_1\partial_2\partial_3 x) \otimes c(\partial_0\partial_1\partial_2 x) \otimes c(\partial_3\partial_4\partial_5 x) \\
& + c(\partial_2\partial_3\partial_4 x) \otimes c(\partial_0\partial_1\partial_2 x) \otimes c(\partial_0\partial_4\partial_5 x) \\
& + c(\partial_3\partial_4\partial_5 x) \otimes c(\partial_0\partial_1\partial_3 x) \otimes c(\partial_0\partial_1\partial_5 x) \\
& + c(\partial_3\partial_4\partial_5 x) \otimes c(\partial_0\partial_1\partial_4 x) \otimes c(\partial_0\partial_1\partial_2 x)\,)\,.
\end{aligned}
$$

Ahora nuestro propósito es demostrar, a partir de la expresión (3.7), que

$$\mu c^{\otimes 4} \tilde{E}_3(\Delta(x)) = \mu(c(\partial_1\partial_4\partial_5\, x) \otimes c(\partial_3\partial_4\partial_5\, x) \otimes c(\partial_0\partial_1\partial_2\, x) \otimes c(\partial_0\partial_1\partial_4\, x)), \quad (3.10)$$

donde μ es el producto natural en $\mathbb{F}_2$ y $x \in C_5^N(X)$.

Analicemos los diferentes sumandos que componen la fórmula (3.7) de $\tilde{E}_3$.

Usaremos repetidamente las relaciones (2.16) en la demostración.

En primer lugar,

$$(f_2 t_2 \phi_2 t_2 \phi_2 \otimes f_2) f_1 z g_1((y_1, y_2)_{\ell+1} \otimes (y_3, y_4)_{m-\ell})$$

$$
\begin{aligned}
= \;& \textstyle\sum_{0 \le i_0 < i_1 < i_2 \le i_3 \le i_4 \le m+1,\ (\alpha,\beta) \in \{(\ell+1, m-\ell)\text{-shuffles}\}} \\
& \partial_{i_0+1} \cdots \partial_{i_1-1} \partial_{i_2+1} \cdots \partial_{m+1}\, s_\beta\, y_1 \\
& \otimes \partial_0 \cdots \partial_{i_0-1} \partial_{i_1+1} \cdots \partial_{i_2-1} \partial_{i_3+1} \cdots \partial_{m+1}\, s_\alpha\, y_3 \\
& \otimes \partial_0 \cdots \partial_{i_3-1} \partial_{i_4+1} \cdots \partial_{m+1}\, s_\beta\, y_2 \\
& \otimes \partial_0 \cdots \partial_{i_4-1}\, s_\alpha\, y_4\,.
\end{aligned}
$$

Entonces,

$$0 \;\underset{\alpha}{\overset{\beta}{\longmapsto}}\; i_0 \;\underset{\beta}{\overset{\alpha}{\longmapsto}}\; i_1 \;\underset{\alpha}{\overset{\beta}{\longmapsto}}\; i_2 \;\underset{\beta}{\overset{\alpha}{\longmapsto}}\; i_3 \;\underset{\alpha}{\overset{\beta}{\longmapsto}}\; i_4 \;\underset{\beta}{\overset{\alpha}{\longmapsto}}\; m+1.$$

Por tanto, el primer y el segundo factor es degenerado.

De la misma forma, los sumandos de

$$(f_2 t_2 \phi_2 t_2 \phi_2 \otimes f_2) f_1 z \phi_1(x_1, x_2, x_3, x_4)_m$$

pueden ser no degenerados si

$$i_2 \le \bar{m} - 1,\ \mathfrak{B} = [\bar{m} - 1, i_3 - 1] \cup [i_4, m],\ \alpha + \bar{m} = [i_3, i_4 - 1],\ i_4 - i_3 = m - p.$$

Y en ese caso,

$$(f_2 t_2 \phi_2 t_2 \phi_2 \otimes f_2) f_1 z \phi_1 (x_1, x_2, x_3, x_4)_m$$

$$\begin{aligned} = \textstyle\sum_{0 \le i_0 < i_1 < i_2 \le i_3' < i_4' \le i_5' \le m} \quad & \partial_{i_0+1} \cdots \partial_{i_1-1} \partial_{i_2+1} \cdots \partial_m x_1 \\ & \otimes \partial_0 \cdots \partial_{i_0-1} \partial_{i_1+1} \cdots \partial_{i_2-1} \partial_{i_3'+1} \cdots \partial_{i_4'-1} \partial_{i_5'+1} \cdots \partial_m x_3 \\ & \otimes \partial_0 \cdots \partial_{i_3'-1} \partial_{i_4'+1} \cdots \partial_m x_2 \\ & \otimes \partial_0 \cdots \partial_{i_5'-1} x_4 ; \end{aligned}$$

donde $i_3' = \bar{m} - 1$, $i_4' = m - q$, $i_5' = i_3 + p$.

$$(f_2 t_2 \phi_2 t_2 \otimes T_2 f_2 t_2 \phi_2) f_1 z g_1 ((y_1, y_2)_{\ell+1} \otimes (y_3, y_4)_{m-\ell})$$

$$\begin{aligned} = \textstyle\sum_{0 \le i_0 < i_1 \le i_2 \le i_3 < i_4 \le m+1,\ (\alpha,\beta) \in \{(\ell+1, m-\ell)\text{-shuffles}\}} \quad & \partial_{i_0+1} \cdots \partial_{i_1-1} \partial_{i_2+1} \cdots \partial_{m+1} s_\beta y_1 \\ & \otimes \partial_0 \cdots \partial_{i_0-1} \partial_{i_1+1} \cdots \partial_{m+1} s_\alpha y_3 \\ & \otimes \partial_0 \cdots \partial_{i_3-1} \partial_{i_4+1} \cdots \partial_{m+1} s_\beta y_2 \\ & \otimes \partial_0 \cdots \partial_{i_2-1} \partial_{i_3+1} \cdots \partial_{i_4-1} s_\alpha y_4 . \end{aligned}$$

Entonces

$$0 \underset{\alpha}{\overset{\beta}{\longmapsto}} i_0 \underset{\beta}{\overset{\alpha}{\longmapsto}} i_1 \underset{\alpha}{\overset{\beta}{\longmapsto}} i_2 \underset{\beta}{\overset{\alpha}{\longmapsto}} i_3 \underset{\alpha}{\overset{\beta}{\longmapsto}} i_4 \underset{\beta}{\overset{\alpha}{\longmapsto}} m+1 ;$$

el primer y cuarto factor son degenerados.

De la misma manera, podemos ver que el factor cuarto de todos los sumandos de $(f_2 t_2 \phi_2 t_2 \otimes T_2 f_2 t_2 \phi_2) f_1 z \phi_1$ son degenerados.

$$(f_2 \otimes f_2 t_2 \phi_2 t_2 \phi_2) f_1 z g_1 ((y_1, y_2)_{\ell+1} \otimes (y_3, y_4)_{m-\ell})$$

$$= \textstyle\sum_{0 \le i_0 \le i_1 \le i_2 < i_3 < i_4 \le m+1,\ (\alpha,\beta) \in \{(\ell+1, m-\ell)\text{-shuffles}\}}$$

$$\begin{aligned} & \partial_{i_0+1} \cdots \partial_{m+1}\, s_\beta\, y_1 \\ & \otimes \partial_0 \cdots \partial_{i_0-1} \partial_{i_1+1} \cdots \partial_{m+1}\, s_\alpha\, y_3 \\ & \otimes \partial_0 \cdots \partial_{i_1-1} \partial_{i_2+1} \cdots \partial_{i_3-1} \partial_{i_4+1} \cdots \partial_{m+1}\, s_\beta\, y_2 \\ & \otimes \partial_0 \cdots \partial_{i_2-1} \partial_{i_3+1} \cdots \partial_{i_4-1}\, s_\alpha\, y_4 . \end{aligned}$$

Tenemos

$$0 \overset{\beta}{\underset{\alpha}{\longmapsto}} i_0 \overset{\alpha}{\underset{\beta}{\longmapsto}} i_1 \overset{\beta}{\underset{\alpha}{\longmapsto}} i_2 \overset{\alpha}{\underset{\beta}{\longmapsto}} i_3 \overset{\beta}{\underset{\alpha}{\longmapsto}} i_4 \overset{\alpha}{\underset{\beta}{\longmapsto}} m+1\,;$$

por tanto, el tercer y cuarto factor son siempre degenerados.

De forma similar, el factor cuarto de todos los sumandos de $(f_2 \otimes f_2 t_2 \phi_2 t_2 \phi_2) f_1 z \phi_1$ son degenerados.

$$(f_2 t_2 \phi_2 \otimes T_2 f_2) f_1 z g_1((y_1, y_2)_{\ell+1} \otimes (y_3, y_4)_{m-\ell})$$

$$\begin{aligned} = \textstyle\sum_{0\le i_0<i_1\le i_2\le i_3\le m+1,\ (\alpha,\beta)\in\{(\ell+1,m-\ell)\text{-shuffles}\}} \quad & \partial_{i_0+1}\cdots\partial_{i_1-1}\partial_{i_2+1}\cdots\partial_{m+1}\, s_\alpha\, y_3 \\ & \otimes\partial_0\cdots\partial_{i_0-1}\partial_{i_1+1}\cdots\partial_{m+1}\, s_\beta\, y_1 \\ & \otimes\partial_0\cdots\partial_{i_3-1}\, s_\alpha\, y_4 \\ & \otimes\partial_0\cdots\partial_{i_2-1}\partial_{i_3+1}\cdots\partial_{m+1}\, s_\beta\, y_2\,. \end{aligned}$$

Entonces obtenemos que

$$0 \overset{\alpha}{\underset{\beta}{\longmapsto}} i_0 \overset{\beta}{\underset{\alpha}{\longmapsto}} i_1 \overset{\alpha}{\underset{\beta}{\longmapsto}} i_2 \overset{\beta}{\underset{\alpha}{\longmapsto}} i_3 \overset{\alpha}{\underset{\beta}{\longmapsto}} m+1;$$

el primer factor es siempre degenerado.

La composición $(f_2 t_2 \phi_2 \otimes T_2 f_2) f_1 z \phi_1 (x_1, x_2, x_3, x_4)_m$ no es degenerada si

$$i_1 \le \bar{m}-1,\ \mathfrak{B} = [\bar{m}-1, i_2-1] \cup [i_3, m],\ \alpha+\bar{m} = [i_2, i_3-1].$$

Consecuentemente,

$$(f_2 t_2 \phi_2 \otimes T_2 f_2) f_1 z \phi_1 (x_1, x_2, x_3, x_4)_m$$

$$\begin{aligned} = \textstyle\sum_{0\le i_0<i_1\le i'_2<i'_3\le i'_4\le m} \quad & \partial_{i_0+1}\cdots\partial_{i_1-1}\partial_{i'_2+1}\cdots\partial_{i'_3-1}\partial_{i'_4+1}\cdots\partial_m x_3 \\ & \otimes\partial_0\cdots\partial_{i_0-1}\partial_{i_1+1}\cdots\partial_m x_1 \\ & \otimes\partial_0\cdots\partial_{i'_4-1} x_4 \\ & \otimes\partial_0\cdots\partial_{i'_2-1}\partial_{i'_3+1}\cdots\partial_m x_2\,, \end{aligned}$$

donde $i'_2 = \bar{m}-1$, $i'_3 = m-q$, $i'_4 = i_2+p$.

Y por tanto, la composición $(f_2t_2\phi_2\otimes T_2f_2)f_1z\phi_1t_1\phi_1(x_1,x_2,x_3,x_4)_m$ no es degenerada si

$$0 \xmapsto[\alpha+\bar{m}]{\mathfrak{B}} i_0 \xmapsto[\mathfrak{B}]{\alpha+\bar{m}} i_1 \xmapsto[\alpha+\bar{m}]{\mathfrak{B}} i_2 \xmapsto[\mathfrak{B}]{\alpha+\bar{m}} i_3 \xmapsto[\alpha+\bar{m}]{\mathfrak{B}} i_4 \xmapsto[\alpha+\bar{m}]{\mathfrak{B}} m+1\,;$$

En este caso,

$$i_2<\bar{m}-1,\;\; \mathfrak{B}=[\bar{m}-1,i_3-1],\;\; \alpha+\bar{m}=[i_3,m],\;\; i_3=m-p.$$

Se sigue que

$$\begin{aligned}
&(f_2t_2\phi_2\otimes T_2f_2)f_1z\phi_1t_1\phi_1\\
&= \textstyle\sum_{0\le i_0<i_1\le i_2<i_3\le i_4\le i_5\le m,\; i_3<i_5} \quad \partial_{i_0+1}\cdots\partial_{i_1-1}\partial_{i_2+1}\cdots\partial_{i_3-1}\partial_{i_4+1}\cdots\partial_m x_3\\
&\qquad\qquad \otimes\partial_0\cdots\partial_{i_0-1}\partial_{i_1+1}\cdots\partial_m x_1\\
&\qquad\qquad \otimes\partial_0\cdots\partial_{i_4-1}\partial_{i_5+1}\cdots\partial_m x_4\\
&\qquad\qquad \otimes\partial_0\cdots\partial_{i_2-1}\partial_{i_3+1}\cdots\partial_{i_5-1} x_2\,.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&(f_2t_2\otimes f_2t_2\phi_2)f_1z\phi_1(x_1,x_2,x_3,x_4)_m\\
&= \textstyle\sum_{0\le i_0\le i_1\le i_2<i_3\le m+1} \quad \partial_{i_0+1}\cdots\partial_{m+1}\,s_\alpha\, x_3\\
&\qquad\qquad \otimes\partial_0\cdots\partial_{i_0-1}\partial_{i_1+1}\cdots\partial_{m+1}\,s_\beta\, x_1\\
&\qquad\qquad \otimes\partial_0\cdots\partial_{i_1-1}\partial_{i_2+1}\cdots\partial_{i_3-1}\,s_\alpha\, x_4\\
&\qquad\qquad \otimes\partial_0\cdots\partial_{i_2-1}\partial_{i_3+1}\cdots\partial_{m+1}\,s_\beta\, x_2\,.
\end{aligned}$$

Entonces,

$$0 \xmapsto[\beta]{\alpha} i_0 \xmapsto[\alpha]{\beta} i_1 \xmapsto[\beta]{\alpha} i_2 \xmapsto[\alpha]{\beta} i_3 \xmapsto[\beta]{\alpha} m+1.$$

El tercer factor es degenerado.

Finalmente, estudiemos la fórmula de $fz\phi t_1\phi t_1\phi$.

$$\begin{aligned}
&(f_2\otimes f_2)f_1z\phi_1(x_1,x_2,x_3,x_4)_m\\
&= \textstyle\sum_{0\le i_0\le i_1\le i_2\le m+1,\; 0\le p\le m-q-1\le m-1,\; (\alpha,\beta)\in\{(p+1,q)\text{-sh.}\}} \quad \partial_{i_0+1}\cdots\partial_{m+1}\,s_\beta\, x_1\\
&\qquad\qquad \otimes\partial_0\cdots\partial_{i_0-1}\partial_{i_1+1}\cdots\partial_{m+1}\,s_\alpha\, x_3\\
&\qquad\qquad \otimes\partial_0\cdots\partial_{i_1-1}\partial_{i_2+1}\cdots\partial_{m+1}\,s_\beta\, x_2\\
&\qquad\qquad \otimes\partial_0\cdots\partial_{i_2-1}\,s_\alpha\, x_4\,.
\end{aligned}$$

Tenemos

$$0 \overset{\mathfrak{B}}{\underset{\alpha+\bar{m}}{\longmapsto}} i_0 \overset{\alpha+\bar{m}}{\underset{\mathfrak{B}}{\longmapsto}} i_1 \overset{\mathfrak{B}}{\underset{\alpha+\bar{m}}{\longmapsto}} i_2 \overset{\alpha+\bar{m}}{\underset{\mathfrak{B}}{\longmapsto}} m+1;$$

por tanto,

$$i_0 \le \bar{m}-1,\ \mathfrak{B} = [\bar{m}-1, i_1-1] \cup [i_2, m],\ \alpha+\bar{m} = [i_1, i_2-1],\ i_2 - i_1 = p+1.$$

Entonces

$$\begin{aligned}
&(f_2 \otimes f_2) f_1 z \phi_1(x_1, x_2, x_3, x_4)_m \\
&= \textstyle\sum_{0 \le i_0 \le i_1' < i_2' \le i_3' \le m} \quad \partial_{i_0+1} \cdots \partial_m x_1 \\
&\qquad\qquad \otimes \partial_0 \cdots \partial_{i_0-1} \partial_{i_1'+1} \cdots \partial_{i_2'-1} \partial_{i_3'+1} \cdots \partial_m x_3 \\
&\qquad\qquad \otimes \partial_0 \cdots \partial_{i_1'-1} \partial_{i_2'+1} \cdots \partial_m x_2 \\
&\qquad\qquad \otimes \partial_0 \cdots \partial_{i_3'-1} x_4\,;
\end{aligned}$$

donde $i_1' = \bar{m}-1$, $i_2' = m-q$, $i_3' = i_1 + p$.

La composición $(f_2 \otimes f_2) f_1 z \phi_1 t_1 \phi_1(x_1, x_2, x_3, x_4)_m$ no es degenerada si

$$0 \overset{\alpha+\bar{m}}{\underset{\mathfrak{B}}{\longmapsto}} i_0 \overset{\mathfrak{B}}{\underset{\alpha+\bar{m}}{\longmapsto}} i_1 \overset{\alpha+\bar{m}}{\underset{\mathfrak{B}}{\longmapsto}} i_2 \overset{\mathfrak{B}}{\underset{\alpha+\bar{m}}{\longmapsto}} i_3 \overset{\mathfrak{B}}{\underset{\alpha+\bar{m}}{\longmapsto}} m+1;$$

entonces,

$$i_1 \le \bar{m}-1,\ \mathfrak{B} = [\bar{m}-1, i_2-1],\ \alpha+\bar{m} = [i_2, m],\ i_2 = m-p.$$

y

$$\begin{aligned}
&(f_2 \otimes f_2) f_1 z \phi_1 t_1 \phi_1(x_1, x_2, x_3, x_4)_m \\
&= \textstyle\sum_{0 \le i_0 \le i_1 < i_2' \le i_3 \le i_4 \le m,\ i_2' < i_4'} \quad \partial_{i_0+1} \cdots \partial_m x_3 \\
&\qquad\qquad \otimes \partial_0 \cdots \partial_{i_0-1} \partial_{i_1+1} \cdots \partial_{i_2'-1} \partial_{i_3'+1} \cdots \partial_m x_1 \\
&\qquad\qquad \otimes \partial_0 \cdots \partial_{i_1-1} \partial_{i_2'+1} \cdots \partial_{i_4'-1} x_4 \\
&\qquad\qquad \otimes \partial_0 \cdots \partial_{i_3'-1} \partial_{i_4'+1} \cdots \partial_m x_2\,,
\end{aligned}$$

donde $i_2' = \bar{m}-1$, $i_3' = i_3 - q$, $i_4' = m - q$.

Y finalmente, la composición $(f_2\otimes f_2)f_1z\phi_1t_1\phi_1t_1\phi_1(x_1,x_2,x_3,x_4)_m$ no es degenerada si

$$0 \xmapsto[\mathfrak{B}]{\alpha+\bar{m}} i_0 \xmapsto[\alpha+\bar{m}]{\mathfrak{B}} i_1 \xmapsto[\mathfrak{B}]{\alpha+\bar{m}} i_2 \xmapsto[\alpha+\bar{m}]{\mathfrak{B}} i_3 \xmapsto[\alpha+\bar{m}]{\mathfrak{B}} m+1;$$

entonces,

$$i_2 \leq \bar{m}-1,\ \mathfrak{B}=[\bar{m}-1,i_4-1],\ \alpha+\bar{m}=[i_4,m],\ i_4=m-p.$$

y obtenemos que

$$(f_2\otimes f_2)f_1z\phi_1t_1\phi_1t_1\phi_1(x_1,x_2,x_3,x_4)_m$$

$$\begin{aligned}
= \textstyle\sum_{0\leq i_0\leq i_1<i_2<i'_3<i'_4\leq i_5\leq m} \quad & \partial_{i_0+1}\cdots\partial_m x_1\\
&\otimes\partial_0\cdots\partial_{i_0-1}\partial_{i_1+1}\cdots\partial_{i_2-1}\partial_{i'_3+1}\cdots\partial_{i'_4-1}\partial_{i'_5+1}\cdots\partial_m x_3\\
&\otimes\partial_0\cdots\partial_{i_1-1}\partial_{i_2+1}\cdots\partial_{i'_3-1}\partial_{i'_4+1}\cdots\partial_m x_2\\
&\otimes\partial_0\cdots\partial_{i'_3-1}x_4\,,
\end{aligned}$$

donde $i'_3=\bar{m}-1$, $i'_4=m-q$, $i'_5=i_3+p$.

En el caso particular en que c es una 2–cocadena, la expresión de $\mu c^{\otimes 4}\tilde{E}_3(\Delta(x))$ con $x\in C^N_5(X)$ es

$$\begin{aligned}
\textstyle\sum_{0\leq i_0<i_1<i_2\leq i'_3<i'_4\leq i'_5\leq 5} \quad & \mu(c(\partial_{i_0+1}\cdots\partial_{i_1-1}\partial_{i_2+1}\cdots\partial_5 x)\\
&\otimes c(\partial_0\cdots\partial_{i_0-1}\partial_{i_1+1}\cdots\partial_{i_2-1}\partial_{i'_3+1}\cdots\partial_{i'_4-1}\partial_{i'_5+1}\cdots\partial_5 x)\\
&\otimes c(\partial_0\cdots\partial_{i'_3-1}\partial_{i'_4+1}\cdots\partial_5 x)\\
&\otimes c(\partial_0\cdots\partial_{i'_5-1}x))\\
+\textstyle\sum_{0\leq i_0<i_1\leq i_2<i_3\leq i_4\leq i_5\leq 5,\ i_3<i_5} \quad & \mu(c(\partial_{i_0+1}\cdots\partial_{i_1-1}\partial_{i_2+1}\cdots\partial_{i_3-1}\partial_{i_4+1}\cdots\partial_5 x)\\
&\otimes c(\partial_0\cdots\partial_{i_0-1}\partial_{i_1+1}\cdots\partial_5 x)\\
&\otimes c(\partial_0\cdots\partial_{i_4-1}\partial_{i_5+1}\cdots\partial_5 x)\\
&\otimes c(\partial_0\cdots\partial_{i_2-1}\partial_{i_3+1}\cdots\partial_{i_5-1}x))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
+\textstyle\sum_{0\leq i_0\leq i_1<i_2<i'_3<i'_4\leq i_5\leq 5} \quad & \mu(c(\partial_{i_0+1}\cdots\partial_5 x)\\
&\otimes c(\partial_0\cdots\partial_{i_0-1}\partial_{i_1+1}\cdots\partial_{i_2-1}\partial_{i'_3+1}\cdots\partial_{i'_4-1}\partial_{i'_5+1}\cdots\partial_5 x)\\
&\otimes c(\partial_0\cdots\partial_{i_1-1}\partial_{i_2+1}\cdots\partial_{i'_3-1}\partial_{i'_4+1}\cdots\partial_5 x)\\
&\otimes c(\partial_0\cdots\partial_{i'_3-1}x))
\end{aligned}$$

$$= \mu(c(\partial_1\partial_4\partial_5 x)\otimes c(\partial_3\partial_4\partial_5 x)\otimes c(\partial_0\partial_1\partial_2 x)\otimes c(\partial_0\partial_1\partial_4 x))\,.$$

3.4 Cuestiones relacionadas

Los artículos de los topólogos V.A. Smirnov [Smi89] y J. Smith [Smi94] en donde la estructura de $C_*^N(X)$ es enriquecida usando una estructura de "coálgebra" (un operad, en el trabajo de V.A. Smirnov y una m–estructura en el trabajo de J. Smith), pueden ser estudiados desde nuestro punto de vista. Estas estructuras en el complejo de cadenas normalizado pueden verse como completas extensiones de las operaciones cohomológicas de Steenrod. Ambos artículos dan diferentes soluciones al problema de la computabilidad de la homología de espacios de lazos iterados. Quizás, nuestro sencillo tratamiento podría interrelacionarse con alguno de estos trabajos y plantear un enfoque unificador para esta cuestión.

A continuación desarrollamos con un poco más de profundidad, dos ideas de cómo continuar nuestro trabajo.

3.4.1 Operaciones de Steenrod y espacios de Eilenberg–Mac Lane

Otro potencial ataque al problema de las operaciones cohomológicas desde una óptica simplicial es a través de los espacios de Eilenberg–Mac Lane $K(\pi, n)$, siguiendo el método clásico de interpretar estas operaciones como clases de cohomología de estos importantes espacios (ver [May70]). Una ventaja de este esquema es que podemos combinar apropiadamente diferentes aspectos combinatoriales y algebraicos concernientes a las operaciones cohomológicas.

Para poder progresar en este camino, son necesarios retractos de deformación fuerte para los espacios $K(\pi, n)$. Un retracto de deformación fuerte (SDR) en una categoría de objetos graduados diferenciales consiste en un objeto C de una categoría, junto con una contracción de C a C' [Hes99]. En [Rea93, ARS99], se construyen SDRs explícitas para complejos de cadenas normalizados de espacios de Eilenberg–Mac Lane, (trabajando en $\mathbb{Z}_p$), tal que los "pequeños" modelos son productos tensoriales de complejos elementales de Cartan [Car50] y las contracciones asociadas son contracciones de álgebras semicompletas [Sil98, Arm99]. Como primer paso para poder trasladar una clase de cohomología $[c] \in H^{n'}(K(\pi, n), \pi)$ (con $n' > n$) hacia una operación cohomológica $O(c) : H^n(\ \ , \pi) \to H^{n'}(\ \ , \pi)$, necesitamos un isomorfismo simplicial explícito entre las dos versiones clasificante $\bar{K}(\pi, n)$ y " de cociclos" $\tilde{K}(\pi, n)$ para cualquier $K(\pi, n)$, siendo π un grupo abeliano finitamente generado ([May67], Teor. 23.2 y Teor. 23.9). Este isomorfismo puede establecerse explícitamente gracias al Corolario 21.8 de [May67].

Ahora, aparte de este isomorfismo, es necesario tener en cuenta los siguientes resultados para poder diseñar un proceso algorítmico de obtención de operaciones cohomológicas.

(1) El teorema 24.8 de [May67], donde se pone en correspondencia biunívoca las operaciones cohomológicas de tipo (n, n', π, π') y los elementos de $H^{n'}(K(\pi, n), \pi')$, siendo π y π' dos grupos abelianos.

(2) El disponer de contracciones de álgebras semi–completas (ver [Car56, Rea93, Sil98, Arm99]) de $C_*^N(K(\pi, n), \mathbb{Z}_p)$ a "pequeñas" álgebras de Cartan, en las cuales es muy sencillo el cómputo homológico y cohomológico.

Por ejemplo, sea $\pi = \pi' = \mathbb{Z}_p$, $\mathfrak{X}$ un espacio cualquiera y c una operación cohomológica (ver su definición en la página 27,

$$c: H^q(\mathfrak{X}; \mathbb{Z}_p) \to H^{pq-1}(\mathfrak{X}; \mathbb{Z}_p).$$

Entonces c es operación cohomológica del tipo $(q, pq-1, \mathbb{Z}_p, \mathbb{Z}_p)$ y $\alpha(c) = c(u)$ donde u es la clase fundamental de $H^q(\mathbb{Z}_p, q; \mathbb{Z}_p) = H^q(K(\mathbb{Z}_p, q); \mathbb{Z}_p)$.

Si tomamos $q = 2$, es inmediato conocer un cociclo representativo de la clase fundamental de $H^2(K(\mathbb{Z}_p, 2); \mathbb{Z}_p)$. Entonces podemos calcular un cociclo representativo de $\alpha(c) = c(u) \in H^{2p-1}(K(\mathbb{Z}_p, 2); \mathbb{Z}_p)$. Esta clase de cohomología puede ser determinada concretamente haciendo uso de de los resultados del apartado (2) anteriormente citados.

Recíprocamente y haciendo uso de las mismas técnicas, podríamos describir explícitamente el cociclo imagen de una operación cohomológica correspondiente a una clase de cohomología $c \in H^{2p-1}(K(\mathbb{Z}_p, 2); \mathbb{Z}_p)$ aplicada a un cociclo deteminado. En efecto, usando el teorema 24.7 de [May67], c se corresponde con una operación cohomológica $\beta(c)$de $H^2(K; \mathbb{Z}_p)$ en $H^{2p-1}(K; \mathbb{Z}_p)$, siendo K un conjunto simplicial cualquiera.

Sea $\gamma \in H^2(K; \mathbb{Z}_p)$, es decir $\gamma : C_2(K) \to \mathbb{Z}_p$. A partir de γ se define una clase de homotopía de aplicaciones $\Psi(\gamma) : K_q \to K(\mathbb{Z}_p, 2)_q$, de la forma siguiente:

$$\Psi(\gamma)(x) = \bar{x}^*(\gamma) := \gamma \circ \bar{x}$$

donde

$$C_2(\Delta[q]; \mathbb{Z}_p) \xrightarrow{\bar{x}} C_2(K; \mathbb{Z}_p) \xrightarrow{\gamma} \mathbb{Z}_p$$

$$\mathrm{Hom}(C_2(\Delta[q]; \mathbb{Z}_p); \mathbb{Z}_p) = C^2(\Delta[q]; \mathbb{Z}_p) \xrightarrow{\text{restricción a cociclos}} K(\mathbb{Z}_p, 2)_q$$

siendo $x \in K_q$ y $\Delta[q]$ es el complejo simplicial tal que en cada grado

$$\Delta[q]_r = \{(a_0, \ldots, a_r) : 0 \leq a_0 \leq \cdots \leq a_r \leq q\};$$

y notamos $\Delta^N[q]$ al complejo simplicial normalizado. Sea $\Delta_q = (0, 1, \ldots, q)$ el único símplice en grado q de $\Delta^N[q]$ entonces $\bar{x}$ es la aplicación simplicial definida por $\bar{x}(\Delta_q) = x$. Por ejemplo, si $q = 5$,

$$\bar{x}(0, 1, 3) = \partial_1 \partial_4 \partial_5(x),$$

ya que $\partial_1 \partial_4 \partial_5 \Delta_5 = (0, 1, 3)$.

Definimos la operación cohomológica

$$\beta(c) : H^2(K; \mathbb{Z}_p) \to H^{2p-1}(K; \mathbb{Z}_p)$$

tal que $\beta(c)(\gamma)(x_{2p-1}) = c(\gamma\bar{x})$ donde $\gamma \in H^2(K; \mathbb{Z}_p)$, $x_{2p-1} \in C_{2p-1}(K; \mathbb{Z}_p)$. Ahora bien, el elemento $\gamma\bar{x}) \in \tilde{K}(\mathbb{Z}_p; 2)_{2p-1}$ es necesario considerarlo como elemento de $\bar{K}(\mathbb{Z}_p; 2)_{2p-1}$, para después aplicar finalmente el cociclo representativo c.

Resumiendo, en este caso concreto nuestro proceso algorítmico podría comenzar tomando como punto de partida una contracción de álgebras de $C_*^N(K(\mathbb{Z}_p, 2); \mathbb{Z}_p)$ a su homología (un producto tensorial A de álgebra monogénicas exteriores y polinomiales truncadas). Tomamos un elemento en A y determinamos cuál es el cociclo c correspondiente en $C_*^N(K(\mathbb{Z}_p, 2))$. Este es el el cociclo representativo de la clase de cohomología $c \in H^{2p-1}(K(\mathbb{Z}_p, 2); \mathbb{Z}_p))$.

Generamos finalmente la correspondiente operación cohomológica $\beta(c)$ de $H^2(K; \mathbb{Z}_p)$ hacia $H^{2p-1}(K; \mathbb{Z}_p)$, donde dando como dato de entrada un cociclo de $C^2(K; \mathbb{Z}_p)$ y un $2p-1$-símplice del conjunto simplicial K nos devuelve un elemento de $\mathbb{Z}_p$.

Por supuesto que lo desarrollado en esta subsección debe ser considerado simplemente como un esquema de trabajo futuro, pero es necesario incidir en la importante que sería completar este estudio, ya que este método permitiría "comprender" combinatorialmente cualquier operación cohomológica.

3.4.2 El concepto de álgebra fuertemente homotópica de Munkholm

En [Cla65, Mun76], aparece el concepto de álgebra conmutativa fuertemente homotópica (*strongly homotopy commutative algebra, o más brevemente, shc–algebra*) para poder probar resultados de colapsabilidad para la sucesión espectral de Eilenberg–Moore en cohomología de ciertas fibraciones particulares. Munkholm en [Mun76] determina que el complejo de cadenas normalizado $C_*^N(X)$ de un conjunto simplicial reducido cualquiera X está dotado de una estructura de shc–coalgebra (él prueba que $C^*(X)$ es una shc–algebra, pero su dualización no presenta ningún problema). Aquí, daremos un plan de trabajo para determinar explícitamente esa estructura en términos combinatoriales. Precisando, nuestra motivación para trabajar este problema es analizar los puntos de contacto entre las nociones de conmutatividad fuertemente homotópica de Munkholm y la de mejor aproximación diagonal definida por Steenrod para establecer los productos i–cup. En [GM74, pág. 27], hay un párrafo, después de haber sido establecida la estructura de shc–coalgebra de $C_*^N(X)$, que dice literalmente lo siguiente:

> ... This proposition, of course, subsumes the usual statement that the cup product is commutative up to chain homotopy, indeed, it contains the existence of $\cup_1$ but it does not seem related to $\cup_i$, for $i > 1$.

Comenzamos nuestro trabajo considerando la contracción Eilenberg–Zilber

$$c_{EZ} = (AW, EML, SHI) : C_*^N(X \times X) \Rightarrow C_*^N(X) \otimes C_*^N(X)$$

de la cual se sabe [EM54] que la inyección EML es un morfismo de coálgebras.

Teniendo en cuenta, por una parte, el lema de perturbación de álgebras establecido paralelamente por Huebschmann–Kadeishvili [HK91] y Gugenheim–Lambe–Stasheff [GLS91]; y por otra parte, que la construcción cobar $\Omega(C)$ de una coálgebra C puede escribirse en la forma

$$\Omega(C) = (T^a(S^{-1}(\mathrm{Coker}\, \eta_C)),\ \partial),$$

donde $\eta_C : \Lambda \to C$ es la coaumentación de la DGA–coálgebra, S^{-1} es el operador desuspensión, $T^a(\ )$ expresa el álgebra tensorial y ∂ es la derivación sobre el álgebra tensorial diferencial $T^a(S^{-1}(\mathrm{Coker}\ \eta_C))$ inducida por la aplicación diagonal en C, se puede derivar inmediatamente una contracción de álgebras

$$\bar{\Omega}(c_{EZ} = (\bar{\Omega}(AW), \bar{\Omega}(EML), \bar{\Omega}(SHI) : \bar{\Omega}(C_*^N(X \times X)) \Rightarrow \bar{\Omega}(C_*^N(X) \otimes C_*^N(X)),$$

en la que la inyección $\bar{\Omega}(EML)$ coincide con el morfismo $T(EML)$. Este último resultado, junto con el hecho de que el pequeño DG–módulo de esta contracción sea precisamente $\bar{\Omega}(C_*^N(X) \otimes C_*^N(X))$ es debido a la compatibilidad de EML con respecto a los coproductos existentes.

Ahora bien, la estructura de shc–coálgebra de $C_*^N(X)$ se encuentra inmersa en la composición de morfismos $\bar{\Omega}(AW)\ \bar{\Omega}(\Delta)$:

$$\bar{\Omega}(C_*^N(X)) \to \bar{\Omega}(C_*^N(X \times X)) \to \bar{\Omega}(C_*^N(X) \otimes C_*^N(X)),$$

siendo Δ la aplicación diagonal.

En esta etapa, la maquinaria de perturbación nos permitiría dilucidar cuál es la estructura de shc–coalgebra de $C_*^N(X)$ en términos de la aplicación Δ y los morfismos AW y SHI integrantes en una contracción Eilenberg–Zilber. Habiendo allanado terreno en este campo, la cuestión importante se reduciría a tener fórmulas explícitas combinatoriales para los morfismos que controlan esta estructura. Esta idea nos podría llevar, en particular, a disponer de homotopías explícitas que midan la falta de "asociatividad" de los "productos" cup y 1–cup, y poder "visionar" la fórmula cohomológica de Hirch

$$c \smile_1 (a \smile b) - a \smile (b \smile_1 c) - (c \smile_1 a) \smile b = 0$$

a nivel de cocadenas.

Capítulo 4.

Diseño de algoritmos de cálculo de cociclos

Capítulo 4.

Diseño de algoritmos de cálculo de cociclos

El objetivo de este capítulo es diseñar algoritmos que calculen cociclos representantes de clases de cohomología de complejo simpliciales vía cuadrados de Steenrod. A grandes rasgos, un complejos simpliciales es una apropiada generalización de un poliedro triangulado.

En primer lugar, estudiamos la complejidad de las fórmulas combinatoriales del producto i–cup, los cuadrados de Steenrod y la primera potencia reducida de Steenrod, en términos del número de operadores de cara que aparecen en dichas fórmulas. En este estudio, el problema de contar operadores de cara se traslada al problema de contar ceros y unos.

Debido al hecho de que una q–cocadena c aplicada sobre un elemento de dimensión distinta de q es cero, reducimos las fórmulas de las operaciones cohomológicas antes citadas aún más.

En una segunda sección, diseñamos algoritmos para el cálculo de cociclos en complejos simpliciales basados en las escrituras combinatoriales explícitas dadas en los capítulos anteriores de las operaciones cohomológicas de Steenrod.

4.1 Complejidad de cálculo de las fórmulas combinatoriales

Parece claro que al menos en el caso en que X tiene un número finito de símplices no degenerados en cada grado, nuestro método basado en las escrituras combinatoriales explícitas dadas en los capítulos anteriores de las operaciones cohomológicas de Steenrod, puede verse como un algoritmo real para calcular algunas operaciones cohomológicas de Steenrod. Por ejemplo, si el número de símplices no degenerados en cada X_ℓ es $O(\ell^2)$, entonces, si asumimos que cada operador de cara de X es una operación elemental, la complejidad de nuestro algoritmo para calcular $Sq^i(c_{i+2})$ es $O(i^5)$. Esta complejidad se puede obtener debido a que el número de operadores de cara que toman parte en la fórmula de $Sq^i(c_{i+2})$ es $O(i^3)$ y, por otro lado, $Sq^i(c_{i+2})$ es una $(2i+2)$–cocadena y entonces, esta cocadena se determina conociendo su imagen sobre todos los símplices no degenerados de X_{2i+2}.

Sin embargo, los ejemplos más interesantes que aparecen en Topología Algebraica muestran, en general, una complejidad alta en el número de símplices no degenerados en cada grado. Por ejemplo, tomemos el espacio clasificante de un 2–grupo finito. En este caso, el número de símplices no degenerados en grado ℓ es $O(2^\ell)$. Por tanto, nuestro método sólo será útil en dimensiones pequeñas. Como hemos mencionado en la introducción, quizás combinando apropiadamente estas fórmulas combinatoriales con las propiedades clásicas de los cuadrados de Steenrod y con los estudios hechos para calcular cociclos, nos permitirá realizar una importante mejora de nuestro método.

4.1.1 Complejidad de cálculo de los productos i–cup

En esta sección queremos dar una idea de la complejidad del algoritmo para calcular n–cociclos vía productos i–cup.

El siguiente lema surge a partir del teorema 2.2.1.

Lema 4.1.1 *Sea $\mathbb{F}_2$ el anillo base y X un conjunto simplicial. Si $c \in C^j(X;\mathbb{F}_2)$ y $x \in C^N_{i+j}(X)$, entonces se define $Sq^i : H^j(X;\mathbb{Z}_2) \to H^{j+i}(X;\mathbb{Z}_2)$ de la siguiente forma:*

- *si $i \leq j$ e $i+j$ es par, entonces:*

$$
\begin{aligned}
Sq^i(c)(x) \;=\; & \sum_{S(n)\leq i_n\leq m} \;\; \sum_{S(n-1)\leq i_{n-1}\leq i_n-1} \cdots \sum_{S(1)\leq i_1\leq i_2-1} \\
& c(\partial_{i_0+1}\cdots\partial_{i_1-1}\partial_{i_2+1}\cdots\cdot\partial_{i_{n-1}-1}\partial_{i_n+1}\cdots\partial_m x) \\
& \bullet c(\partial_0\cdots\partial_{i_0-1}\partial_{i_1+1}\cdots\cdot\partial_{i_{n-2}-1}\partial_{i_{n-1}+1}\cdots\partial_{i_n-1}x)\,;
\end{aligned}
$$

- *si $i \leq j$ e $i+j$ es impar, entonces:*

$$\begin{aligned} Sq^i(c)(x) &= \sum_{S(n)\leq i_n \leq m} \; \sum_{S(n-1)\leq i_{n-1}\leq i_n -1} \cdots \sum_{S(1)\leq i_1 \leq i_2 -1} \\ & \qquad c(\partial_{i_0+1}\cdots\partial_{i_1-1}\partial_{i_2+1}\cdots\cdot\partial_{i_{n-2}-1}\partial_{i_{n-1}+1}\cdots\partial_{i_n-1}x) \\ & \qquad \bullet c(\partial_0\cdots\partial_{i_0-1}\partial_{i_1+1}\cdots\cdot\partial_{i_{n-1}-1}\partial_{i_n+1}\cdots\partial_m x)\,; \end{aligned}$$

- *si $i > j$, entonces $Sq^i(c)(x) = 0$.*

En estas fórmulas, $\bullet$ es el producto natural en $\mathbb{F}_2$, $n = j - i$, $m = i + j$,

$$S(k) = i_{k+1} - i_{k+2} + \cdots + (-1)^{k+n-1} i_n + (-1)^{k+n}\left\lfloor \frac{m+1}{2}\right\rfloor + \left\lfloor \frac{k}{2}\right\rfloor,$$

para todo $0 \leq k \leq n$ e $i_0 = S(0)$.

Demostración

Sea $c \in C^j(X;\mathbb{F}_2)$. Si $i > j$ entonces $Sq^i(c) = 0$. Por tanto, supongamos que $i \leq j$. En ese caso,

$$Sq^i(c)(x) = \mu(c\otimes c)AW(t\,SHI)^n(x,x)$$

donde $x \in C_m(X)$ y $\mu(c\otimes c)(a,b) = c(a)\bullet c(b)$. No es difícil ver que sólo tenemos que considerar los sumandos de la fórmula explícita de $AW\,(t\,SHI)^n$ (ver el teorema 2.2.1), que tengan el mismo número de operadores cara en ambos factores.

- Si $n = 0$, entonces $m - i_0 = i_0$, y por tanto $i_0 = \frac{m}{2}$. La fórmula sólo tiene un sumando.
- Si $n = 1$, entonces $i_1 - 1 - i_0 = i_0 + m - i_1$. Así que, $i_0 = i_1 - \frac{m+1}{2}$ e $i_1 \geq \frac{m+1}{2}$.
- En general, si n es par (cuando n es impar la demostración es análoga):

$$\begin{aligned} & m - i_n + \cdots + i_{2k+1} - 1 - i_{2k} + \cdots + i_1 - 1 - i_0 \\ & = i_n - 1 - i_{n-1} + \cdots + i_{2k} - 1 - i_{2k-1} + \cdots + i_2 - 1 - i_1 + i_0, \end{aligned}$$

por tanto, tenemos que

$$i_0 = i_1 - i_2 + i_3 - \cdots - i_n + \frac{m}{2}. \tag{4.1}$$

Teniendo en cuenta en (4.1) que $i_0 \geq 0$,

$$i_1 \geq i_2 - i_3 + \cdots + i_n - \frac{m}{2}.$$

Usando $i_0 \leq i_1 - 1$ en (4.1), tenemos

$$i_2 \geq i_3 - i_4 + \cdots + i_{n-1} - i_n + \frac{m}{2} + 1.$$

En general, supongamos que

$$i_k \geq i_{k+1} - i_{k+2} + \cdots + (-1)^{k+n-1} i_n + (-1)^{k+n}\frac{m}{2} + \left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor$$

para todo $1 \leq k \leq \ell$ y probemos que esta expresión es cierta en $\ell + 1$. En el caso $k = \ell - 1$, como $i_\ell - 1 \geq i_{\ell-1}$, tenemos que

$$i_\ell - 1 \geq i_\ell - i_{\ell+1} + \cdots + (-1)^{\ell+n-2} i_n + (-1)^{\ell+n-1}\frac{m}{2} + \left\lfloor \frac{\ell-1}{2} \right\rfloor$$

y simplificando, concluimos

$$i_{\ell+1} \geq i_{\ell+2} - i_{\ell+3} + \cdots + (-1)^{\ell+n} i_n + (-1)^{\ell+n+1}\frac{m}{2} + \left\lfloor \frac{\ell+1}{2} \right\rfloor.$$

□

Si asumimos que los operadores cara son evaluados en tiempo constante, el siguiente resultado nos da una primera medida de la complejidad computacional de estas fórmulas.

Proposición 4.1.2 *Sea $\mathbb{F}_2$ el anillo base. Sea X un conjunto simplicial y k un entero no negativo. Si $c \in C^{i+k}(X; \mathbb{F}_2)$, entonces el número de operadores cara tomando parte en la fórmula de $Sq^i(c)$ es $O(i^{k+1})$.*

Demostración

Sea $j = i + k$. En esta prueba, no es necesario distinguir si $i + j$ par ó $i + j$ es impar, ya que es la misma en ambos casos.

Primero, contemos el número de sumandos en la fórmula de $Sq^i(c)$ dada en el corolario 4.1.1.

El parámetro i_n contribuye con

$$m - S(n) + 1 = m - \left\lfloor \frac{m+1}{2} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1 \tag{4.2}$$

sumandos en la fórmula, donde $n = j - i$ y $m = i + j$.

Veamos que (4.2) es igual a $i + 1$. Si n es par entonces, esta expresión es igual a

$$m - \frac{m}{2} - \frac{n}{2} + 1 = \frac{m - n}{2} + 1 = i + 1$$

y si n es impar,

$$m - \frac{m+1}{2} - \frac{n-1}{2} + 1 = \frac{m-n}{2} + 1 = i + 1.$$

El parámetro i_{n-1} contribuye con

$$i_n - S(n-1) = \left\lfloor \frac{m+1}{2} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor \leq i + 1$$

sumandos.

En general, el parámetro i_k, con $1 \leq k \leq n-1$ contribuye con

$$i_{k+1} - S(k) = i_{k+2} - i_{k+3} + \cdots + (-1)^{k+n} i_n + (-1)^{k+n+1} \left\lfloor \frac{m+1}{2} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor \tag{4.3}$$

sumandos, y usando que $i_{\ell-1} - i_\ell \leq -1$ e $i_n \leq m$, no es difícil ver que la expresión (4.3) es menor o igual que $i + 1$ para cada $1 \leq k \leq n-1$.

Por tanto, el número de sumandos que aparecen en las fórmulas del corolario 4.1.1 es:

$$\sum_{S(n) \leq i_n \leq m} \cdots \sum_{S(3) \leq i_3 \leq i_4 - 1} \; \sum_{S(2) \leq i_2 \leq i_3 - 1} i_2 - S(1) \leq \sum_{S(n) \leq i_n \leq m} \cdots \sum_{S(3) \leq i_3 \leq i_4 - 1} \; \sum_{S(2) \leq i_2 \leq i_3 - 1} i + 1$$

$$\leq (i+1) \sum_{S(n) \leq i_n \leq m} \cdots \sum_{S(3) \leq i_3 \leq i_4 - 1} i_3 - S(2) \leq \cdots \leq (i+1)^n.$$

Como hay $m - n$ operadores cara en cada sumando y $n = k$, el número de operadores cara que tiene la fórmula es menor o igual que

$$(m - n)(i + 1)^k = 2i(i + 1)^k.$$

□

Nos preocupamos ahora en estudiar el número exacto de operadores de cara que aparece en la definición combinatorial de los productos n–cup.

Consideremos un alfabeto con sólo dos letras: 0 y 1. Por tanto, las palabras de este alfabeto serán secuencias de las letras 0 y 1. Por convenio, contaremos las letras de una palabra de izquierda a derecha y supondremos que la primera letra más a la izquierda ocupa la posición cero.

Sean m y n dos enteros non negativos de forma que $n \leq m$. Tomemos $n+1$ números enteros, $i_0, i_1, \ldots, i_n \in \mathbb{Z}$, tal que $0 \leq i_0 < i_1 < \cdots < i_n \leq m$ entonces, la notación $(i_0, i_1 \ldots, i_n)_m$ representa a la palabra de $m+1$ letras compuesta por 0 en las posiciones $i_0, i_1, \ldots, i_n$ y 1 en el resto, es decir:

$$1\cdots1 \ \overset{i_0}{0} \ 1\cdots1 \ \overset{i_1}{0} \ 1\cdots1 \ \overset{i_2}{0} \ 1\cdots1 \ \overset{i_3}{0} \ \cdots\cdots \ \overset{i_n}{0} \ 1\cdots1.$$

En esta palabra, entendemos por *bloque* j al bloque de letras 1 que se encuentran en las posiciones $i_{j-1}+1$ hasta $i_j - 1$ junto con la letra 0 que se encuentra en posición i_j (notemos que el bloque 0 es el compuesto por las letras 1 en las posiciones 0 hasta $i_0 - 1$ y por el 0 en la posición i_0; y el bloque $(n+1)$ tiene 1 en las posiciones $i_n + 1$ hasta m), es decir,

$$\overbrace{1\cdots1 \ \overset{i_0}{0}}^{\text{bloque } 0} \quad \overbrace{1\cdots1 \ \overset{i_1}{0}}^{\text{bloque } 1} \quad \overbrace{1\cdots1 \ \overset{i_2}{0}}^{\text{bloque } 2} \quad \cdots\cdots \quad \overbrace{1\cdots1 \ \overset{i_n}{0}}^{\text{bloque } n} \quad \overbrace{1\cdots1}^{\text{bloque } n+1}$$

Ocasionalmente, el bloque $n+1$ puede ser la palabra vacía.

Dada una palabra del tipo $(i_0, i_1, \ldots, i_n)_m$, podemos construir, a partir de ella, una pareja de la siguiente manera. Si n es par, entonces

- la primera palabra de la pareja, denotada por $(i_0, i_1, \ldots, i_n)_m^+$, se puede obtener de la palabra "madre" $(i_0, i_1, \ldots, i_n)_m$ preservando los bloques j, siendo j impar, es decir,

$$\overbrace{1\cdots10}^{\text{bloque }1}\ \overbrace{1\cdots10}^{\text{bloque }3}\ \overbrace{1\cdots10}^{\text{bloque }5}\ \cdots\cdots\ \overbrace{1\cdots10}^{\text{bloque }n-1}\ \overbrace{1\cdots1}^{\text{bloque }n+1}\ ;$$

– y la segunda palabra de la pareja, denotada por $(i_0, i_1, \ldots, i_n)^-_m$ se puede obtener de $(i_0, i_1, \ldots, i_n)_m$ preservando los bloques j, siendo j par, es decir,

$$\overbrace{1\cdots10}^{\text{bloque }0}\ \overbrace{1\cdots10}^{\text{bloque }2}\ \overbrace{1\cdots10}^{\text{bloque }4}\ \cdots\cdots\ \overbrace{1\cdots10}^{\text{bloque }n-2}\ \overbrace{1\cdots10}^{\text{bloque }n}\ .$$

Si n es impar, el procedimiento es análogo.

Veamos algunos ejemplos:

A la palabra 1101101, representada por $(2,5)_6$, se le puede asociar la pareja de palabras:

$$((2,5)^+_6, (2,5)^-_6) = (110, 1101).$$

Y a la palabra 00110, que está representada por $(0,1,4)_4$, se le asocia la pareja de palabras:

$$((0,1,4)^+_4, (0,1,4)^-_4) = (0, 0110).$$

Es fácil ver que podemos recuperar la palabra madre $(i_0, i_1, \ldots, i_n)_m$ a partir de la pareja $((i_0, i_1, \ldots, i_n)^+, (i_0, i_1, \ldots, i_n)^-_m)$ combinando apropiadamente los bloques de cada palabra.

Por ejemplo, si tenemos la pareja

$$(111101011, 011100),$$

primero, contamos el número de letras (en este caso, $m = 14$), después, determinamos los bloques de cada palabra de la pareja:

$$\left(\overbrace{11110}^{\text{bloque }0}\ \overbrace{10}^{\text{bloque }1}\ \overbrace{11}^{\text{bloque }2},\quad \overbrace{0}^{\text{bloque }0}\ \overbrace{1110}^{\text{bloque }1}\ \overbrace{0}^{\text{bloque }2}\right)$$

y, finalmente, reconstruimos la palabra madre alternando los bloques de ambas palabras

$$0\ 11110\ 1110\ 10\ 0\ 11 = (0,5,9,11,12)_{14}.$$

Identificando la letra 1 en la posición k con ∂_k y 0 con la identidad, la fórmula general para el producto n–cup admite la siguiente representación:

$$\begin{aligned} c \smile_n c'(x) = \sum_{0\le i_0<\cdots<i_n\le m} & (-1)^{i_0+A(0,\lfloor\frac{n-1}{2}\rfloor,\vec{\imath})+\vartheta_n} \\ & c\big((i_0,i_1,\ldots,i_n)^{+}_{m}x\big) \bullet c'\big((i_0,i_1,\ldots,i_n)^{-}_{m}x\big), \end{aligned} \tag{4.4}$$

identificando i_{n+1} con m y $\vartheta_n = i_n$ si n par y es nulo en caso contrario.

De manera análoga, usando que $Sq^i(c) = c \smile_{j-i} c$, donde j es la dimensión de la cocadena c, se puede dar una definición combinatorial de los cuadrados de Steenrod.

Y el problema de contar el número de sumandos en la fórmula del producto n–cup es equivalente al de encontrar todas las formas posibles de colocar $n+1$ letras 0 en $m+1$ posiciones posibles, que es

$$\binom{m+1}{n+1}.$$

Pero teniendo en cuenta que c es una p–cocadena y c' es una q–cocadena, entonces sólo tenemos que considerar los sumandos de la fórmula que tengan exactamente $q-n$ operadores de cara en el primer factor y $p-n$ en el segundo. Por tanto, obtenemos una definición combinatorial todavía más simplificada en el siguiente teorema.

Lema 4.1.3 *Sea Λ el anillo base y sea X un conjunto simplicial. Si $c \in C^p(X;\Lambda)$, $c' \in C^q(X;\Lambda)$ y $x \in C^N_{p+q-n}(X)$, entonces*

$$\begin{aligned} c \smile_n c'(x) = \sum_{0\le i_0=S(0)<i_1<\cdots<i_n\le m} & (-1)^{i_0+A(0,\lfloor\frac{n-1}{2}\rfloor,\vec{\imath})+\vartheta_n} \\ & c\big((i_0,i_1,\ldots,i_n)^{+}_{m}x\big) \bullet c'\big((i_0,i_1,\ldots,i_n)^{-}_{m}x\big). \end{aligned}$$

En estas fórmulas, $\bullet$ es el producto natural en Λ, $m = p+q-n$,

$$S(0) = i_1 - i_2 + \cdots + (-1)^{n-1} i_n + (-1)^n \left(\lambda_n - \left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor\right),$$

donde $\lambda_n = p$ si n es par y $\lambda_n = q$ en caso contrario. E identificamos i_{n+1} con m en caso de que aparezca.

Demostración

Comencemos con $c \in C^p(X;\Lambda)$ y $c' \in C^q(X;\Lambda)$. Si $n < p$ o $n < q$ entonces $c \smile_n c'$ es cero porque la fórmula no tiene ningún sumando con $q-n$ operadores de cara en el primer factor y $p-n$ en el segundo. Por tanto, supongamos que $n \leq p$ y $n \leq q$.

- Si $n = 0$, entonces imponemos que $p+q-i_0 = q$ e $i_0 = p$, en resumen, $i_0 = p$.
- Si $n = 1$, entonces imponemos que

$$i_1 - 1 - i_0 = q - 1, \qquad p + q - 1 - i_1 + i_0 = p - 1.$$

  En particular, queremos que $i_1 - 1 - i_0 - q + 1 = p + q - 1 - i_1 + i_0 - p + 1$, es decir, $i_0 = i_1 - q$.

  Veamos que con esa condición es suficiente para que en el primer factor haya $q-n$ operadores de cara y $p-n$ en el segundo:

$$\begin{aligned} &i_1 - 1 - i_0 = i_1 - 1 - i_1 + q = q - 1; \\ &p + q - 1 - i_1 + i_0 = p + q - 1 - i_1 + i_1 - q = p - 1\,. \end{aligned}$$

- Supongamos que n es par, entonces el número de operadores de cara en el primer factor de los sumandos es

$$p + q - n - i_n + i_{n-1} - 1 - i_{n-2} + \cdots + \cdots + i_1 - 1 - i_0\,, \tag{4.5}$$

  y en el segundo

$$i_n - 1 - i_{n-1} + \cdots + i_2 - 1 - i_1 + i_0\,. \tag{4.6}$$

  Como sólo tenemos que considerar en la fórmula de $c \smile_n c'$, los sumandos que tienen $q-n$ operadores de cara en el primer factor y $p-n$ en el segundo, esto es, (4.5) es $q-n$ y (4.6) es $p-n$, entonces en particular, imponemos que

$$\begin{aligned} &p + q - n - i_n + i_{n-1} - 1 - i_{n-2} + \cdots + i_1 - 1 - i_0 - q + n \\ &= i_n - 1 - i_{n-1} + \cdots + i_2 - 1 - i_1 + i_0 - p + n\,, \end{aligned}$$

por tanto,

$$i_0 = i_1 - i_2 + \cdots + i_{n-1} - i_n + p - \frac{n}{2}. \tag{4.7}$$

Se puede comprobar que esta restricción basta para que el primer factor tenga $q-n$ operadores de cara y $p-n$ el segundo.

- Si n es impar, entonces el número de operadores de cara en el primer factor de los sumandos es

$$i_n - 1 - i_{n-1} + \cdots + i_1 - 1 - i_0\,, \tag{4.8}$$

y en el segundo

$$p + q - n - i_n + i_{n-1} - 1 - i_{n-2} + \cdots + i_2 - 1 - i_1 + i_0\,. \tag{4.9}$$

Siguiendo los mismos pasos que antes, tenemos que

$$\begin{aligned} & i_n - 1 - i_{n-1} + i_1 - 1 - i_0 - q + n \\ &= p + q - n - i_n + i_{n-1} - 1 - i_{n-2} + \cdots + i_2 - 1 - i_1 + i_0 - p + n\,, \end{aligned}$$

por tanto,

$$i_0 = i_1 - i_2 + \cdots + i_{n-2} - i_{n-1} + i_n - q + \frac{n-1}{2}. \tag{4.10}$$

□

Estudiemos el número de sumandos en este caso. El problema de contar todos los sumandos en esta fórmula de $c \smile_n c'$ es equivalente al de encontrar todas las parejas de palabras $((i_0, i_1, \ldots, i_n)^+_m, (i_0, i_1, \ldots, i_n)^-_m)$ tal que la primera palabra tiene $q-n$ letras 1 y la segunda palabra tiene $p-n$ letras 1. Obtenemos el siguiente teorema.

Teorema 4.1.4 *Sea Λ el anillo base. Sea X un conjunto simplicial y n un entero no negativo. Si $c \in C^p(X;\Lambda)$ y $c' \in C^q(X;\Lambda)$, entonces el número de sumandos que toman parte en la fórmula del teorema (4.1.3) para $c \smile_n c'$ es*

$$\binom{q - \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor}{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor} \binom{p - \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor}{\left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor}.$$

Demostración

Primero, supongamos que n es par. Nuestra prueba comienza con la observación de que el primer factor de un sumando tiene $q-n$ operadores de cara si, y sólo si, la palabra $(i_0, i_1, \ldots, i_n)_m^+$ asociada a él tiene $q-n$ letras 1; y el número de ceros que pueden cambiar su posición es $\frac{n}{2}$. Entonces, el número de palabras $(i_0, i_1, \ldots, i_n)_m^+$ que tienen exactamente $q-n$ letras 1 es el número de todos las formas posibles de colocar $\frac{n}{2}$ ceros en $q-n+\frac{n}{2}$ lugares,

$$\binom{q-\frac{n}{2}}{\frac{n}{2}}.$$

Análogamente, el número de palabras $(i_0, i_1, \ldots, i_n)_m^-$ que tiene $p-n$ letras 1 (y $\frac{n}{2}$ letras 0 que pueden variar su posición) es:

$$\binom{p-\frac{n}{2}}{\frac{n}{2}}.$$

Y el mismo razonamiento para n impar, nos dice que hay

$$\binom{q-\frac{n+1}{2}}{\frac{n-1}{2}}$$

palabras $(i_0, i_1, \ldots, i_n)_m^+$ posibles, y

$$\binom{p-\frac{n-1}{2}}{\frac{n+1}{2}}$$

palabras $(i_0, i_1, \ldots, i_n)_m^-$. □

Veamos, con los siguientes ejemplos, la mejora de la fórmula del producto n–cup en el lema 4.1.3 respecto de la fórmula (4.4). Denotemos por c_p a $c \in C^p(X; \Lambda)$.

	Num. de sumandos en la fórmula (4.4)	Num. de sumandos en la fórmula del teor. 4.1.1
$c_3 \smile_2 c_4$	20	6
$c_6 \smile_5 c_6$	28	12
$c_{12} \smile_4 c_{10}$	11,628	1,260
$c_{25} \smile_5 c_{30}$	18,009,460	621,621
$c_{60} \smile_5 c_{70}$	4,925,156,775	68,222,616
$c_6 \smile_5 c_{700}$	162,699,437,009,655	970,224
$c_{60} \smile_{50} c_{60}$	225,368,761,961,739,396	33,701,394,635,724,816
$c_6 \smile_5 c_{7000}$	163,331,343,055,757,216,550	97,902,024

Teniendo en cuenta que los cuadrados de Steenrod se definen usando los productos n–cup, aparece el siguiente corolario.

Corolario 4.1.5 *Sea $\mathbb{F}_2$ el anillo base. Sea i un entero no negativo y $c \in C^j(X;\mathbb{F}_2)$ entonces, el número de sumandos que toman parte en la fórmula de $Sq^i(c)$ es*

$$\binom{\left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor}{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor} \binom{\left\lfloor \frac{m+1}{2} \right\rfloor}{\left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor}$$

donde $m = i + j$ y $n = j - i$.

4.1.2 Complejidad de cálculo de $\mathcal{P}_1^p$

Vamos a estudiar la formula de $\mathcal{P}_1^p$ para un p cualquiera. Reescribiendo el teorema 2.3.4, si X es un conjunto simplicial, c es una q–cocadena y $x \in C_{pq-1}^N(X)$ entonces

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}_1^p(x) &= \mu c^{\otimes p} f_{p-1} t \phi_{p-1} \Delta(x) \\
&= \textstyle\sum_{0\leq \ell \leq p-2} \sum_{I_{(\ell,p-1,pq-1)}} \quad (-1)^{i_{p-\ell-2}+(i_{p-\ell-2}+i_{p-\ell-1})(i_{p-\ell-1}+pq-1)} \\
&\qquad \mu(c((i_0)_{pq-1}^{+} x) \\
&\qquad \otimes c((i_0, i_1)_{pq-1}^{-} x) \\
&\qquad \vdots \\
&\qquad \otimes c((i_{p-\ell-4}, i_{p-\ell-3})_{pq-1}^{-} x) \\
&\qquad \otimes c((i_{p-\ell-3}, i_{p-\ell-2}, i_{p-\ell-1}, i_{p-\ell})_{pq-1}^{-} x) \\
&\qquad \otimes c((i_{p-\ell}, i_{p-\ell+1})_{pq-1}^{-} x) \\
&\qquad \vdots \\
&\qquad \otimes c((i_{p-2}, i_{p-1})_{pq-1}^{-} x) \\
&\qquad \otimes c((i_{p-1})_{pq-1}^{-} x) \\
&\qquad \otimes c((i_{p-\ell-2}, i_{p-\ell-1})_{pq-1}^{-} x) ;
\end{aligned} \tag{4.11}$$

donde

- μ es el producto natural en $\mathbb{F}_p$,
- $\Delta(x) = x \times \overset{p \text{ veces}}{\cdots} \times x$,
- f_{p-1} y ϕ_{p-1} son morfismos componentes de la contracción c_{p-1} de la página 53,
- $t(x_1 \times x_2 \times \cdots \times x_p) = x_2 \times \cdots \times x_p \times x_1$,
- $I_{(\ell,p-1,pq-1)} = \{(i_0, \ldots, i_{p-1}) : 0 \leq i_0 \leq \cdots \leq i_{p-\ell-2} < i_{p-\ell-1} \leq \cdots \leq i_{p-1}\}$.

Teniendo en cuenta que c es una q–cocadena, sólo tenemos que considerar aquellos sumandos que tengan exactamente $pq - q - 1$ operadores de cara en cada factor. Por tanto, podemos simplificar aún más la fórmula que hemos obtenido antes.

Proposición 4.1.6 *Sea p un primo impar. Sea $\mathbb{F}_p$ el anillo base y X un conjunto simplicial. Si $c \in C^q(X; \mathbb{F}_p)$ y $x \in C_{pq-1}^N(X)$ entonces $\mathcal{P}_1^p : H^q(X; \mathbb{F}_p) \rightarrow H^{qp-1}(X; \mathbb{F}_p)$ es:*

$$
\begin{aligned}
\mathcal{P}_1^p(c)(x) = \sum_{1\le j\le p-1}\ \sum_{jq\le i\le (j+1)q-1} & (-1)^{(i+1)(q+1)+1} \\
& \mu(c((q)^+_{pq-1}x) \\
& \otimes c((q,2q)^-_{pq-1}x) \\
& \vdots \\
& \otimes c(((j-2)q,(j-1)q)^-_{pq-1}x) \\
& \otimes c(((j-1)q, i-q, i, (j+1)q-1)^-_{pq-1}x) \\
& \otimes c(((j+1)q-1, (j+2)q-1)^-_{pq-1}x) \\
& \vdots \\
& \otimes c(((p-2)q-1, (p-1)q-1)^-_{pq-1}x) \\
& \otimes c(((p-1)q-1)^-_{pq-1}x) \\
& \otimes c((i-q, i)^-_{pq-1}x))\,,
\end{aligned}
$$

donde μ es el producto natural en $\mathbb{F}_p$.

Demostración

Partimos de la fórmula (4.11). Recordemos que $\mathcal{P}_1^p(c) = \mu c^{\otimes p} D_1(x)$ para una q–cocadena c. Entonces, en la fórmula de $D_1 = f_{p-1}t\phi_{p-1}$, sólo tenemos que considerar aquellos sumandos con $pq-q-1$ operadores cara en cada factor.

Si $p=2$ entonces $m = 2q-1$ y en la fórmula de $f_1 t\,\phi_1$, cada factor debe tener $2q-q-1$ operadores de cara. Entonces

$$
\begin{aligned}
i_1 - i_0 - 1 &= 2q-q-1, \\
2q - 1 - i_1 + i_0 &= 2q - q - 1;
\end{aligned}
$$

por tanto, $i_0 = i_1 - q$ y $q \le i_1 \le 2q-1$.

En el caso general, si p es un entero positivo, entonces $m = pq-1$.

Estudiando la fórmula general de $f_{p-1}t\phi_{p-1}$ tenemos lo siguiente. Cuando $\ell = 0$, tenemos

$$
\begin{aligned}
& pq - 1 - i_0 = pq - q - 1\,; \\
& pq - 1 - i_j + i_{j-1} = pq - q - 1 \quad \text{si } 1 \le j \le p-3 \text{ or } j = p-1\,; \\
& i_{p-1} - i_{p-2} - 1 + i_{p-3} = pq - q - 1\,;
\end{aligned}
$$

entonces,

$$\begin{aligned}
&i_j = (j-1)q \quad \text{si } 1 \leq j \leq p-3\,, \\
&i_{p-2} = i_{p-1} - q\,, \\
&(p-1)q \leq i_{p-1} \leq pq - 1\,.
\end{aligned}$$

Si $1 \leq \ell < p-2$, entonces

$$\begin{aligned}
&pq - 1 - i_0 = pq - q - 1\,, \\
&pq - 1 - i_j + i_{j-1} = pq - q - 1 \quad \text{si } \begin{cases} 1 \leq j \leq p-\ell-3\,, \\ j = p-\ell-1\,, \\ p-\ell+1 \leq j \leq p-2\,, \end{cases} \\
&pq - 1 - i_{p-\ell} + i_{p-\ell-1} - i_{p-\ell-2} - 1 + i_{p-\ell-3} = pq - q - 1\,, \\
&i_{p-1} = pq - q - 1\,.
\end{aligned}$$

Concluimos,

$$\begin{aligned}
&i_j = (j+1)q \quad \text{si } 1 \leq j \leq p-\ell-3\,, \\
&i_{p-\ell-2} = i_{p-\ell} - q\,, \\
&(p-\ell-1)q \leq i_{p-\ell-1} \leq (p-\ell)q - 1\,, \\
&i_k = kq - 1 \quad \text{si } p-\ell \leq k \leq p-1\,.
\end{aligned}$$

Si $\ell = p-2$ entonces

$$\begin{aligned}
&pq - 1 - i_2 + i_1 - i_0 - 1) = pq - q - 1\,, \\
&pq - 1 - i_j + i_{j-1} = pq - q - 1 \quad \text{si } j = 1 \text{ o } 3 \leq j \leq p-2\,,
\end{aligned}$$

tenemos

$$\begin{aligned}
&i_0 = i_1 - q\,, \\
&q \leq i_1 \leq 2q - 1\,, \\
&i_j = jq - 1 \quad \text{si } 2 \leq j \leq p-1\,.
\end{aligned}$$

□

Si asumimos que los operadores de cara se evalúan en tiempo constante, el siguiente resultado nos da una primera medida de la complejidad computacional de la fórmula de $\mathcal{P}_1^p$.

Proposición 4.1.7 *Sea p un primo impar. Sea $\mathbb{F}_p$ el anillo base y X un conjunto simplicial. Si $c \in H^q(X; \mathbb{F}_p)$, entonces el número de operadores de cara en la fórmula de $\mathcal{P}_1^p(c)$ de la sección anterior es*

$$p(p-1)q((p-1)q-1).$$

Demostración

Como el parámetro i verifica que $jq \leq i \leq (j+1)q-1$ y $1 \leq j \leq p-1$, entonces el número de sumandos es $(j+1)q-1-jq+1 = q$ con $1 \leq j \leq p-1$, por tanto es $(p-1)q$. Y el número de operadores de cara es $p((p-1)q-1)$ en cada uno de los factores.

Luego el número de operadores de cara en la expresión de $\mathcal{P}_p^1$ es $(p-1)qp((p-1)q-1)$.

□

4.2 Algoritmos en complejos simpliciales

Las operaciones cohomológicas son herramientas para calcular n–cociclos en la cohomología de espacios (ver, por ejemplo, [Mas52], [Spa81]). Desafortunadamente, por el momento, ningún sistema simbólico computacional incluye métodos *generales* para encontrar n–cociclos representativos en la cohomología de espacios, álgebras, grupos, etc. Recientemente, se ha diseñado varios métodos para encontrar 2–cociclos representativos en las clases de cohomología 2–dimensionales de grupos finitos (ver [EGL97], [HL93], [Lam97]).

En este capítulo, describimos un método computacional basado en una formulación combinatorial dada en el segundo capítulo para los cuadrados de Steenrod.

Primero, estudiaremos la "complejidad" (en términos de los operadores cara involucrados) de un algoritmo para calcular los productos i–cup. Finalmente, como aplicación, damos un algoritmo para computar cuadrados de Steenrod a nivel de cociclos en complejos simpliciales.

Nosotros intentamos integrar aquí, herramientas del Álgebra Computacional y la Combinatoria en un trabajo enmarcado dentro de la Topología Algebraica, abriendo una puerta al desarrollo computacional buscando cociclos en cualquier grado.

Un *complejo simplicial* combinatorial [Wei94, Mun84] es una colección P de subconjuntos finitos no vacíos de un conjunto de vértices V tal que si $\tau \subset \sigma \subset V$ y $\sigma \in P$ entonces $\tau \in P$. Si el conjunto de vértices está ordenado, diremos que P es un complejo simplicial *ordenado*. A cada complejo simplicial ordenado asociamos un conjunto simplicial $SS(P)$ como sigue. Sea $SS_n(P)$ el conjunto de todas las $(n+1)$–tuplas $(v_0, v_1, \ldots, v_n)$ de vértices (llamados *n–símplices*), con posibilidad de incluir repetición, de forma que el conjunto subyacente $\{v_0, v_1, \ldots, v_n\}$ está en P (notar que $v_0 \leq v_1 \leq \cdots \leq v_n$). Junto con los operadores cara y degeneración definidos como sigue:

$$\partial_i(\langle v_0, \cdots, v_n\rangle) = \langle v_0, \ldots, v_{i-1}, v_{i+1}, \ldots, v_n\rangle$$

y

$$s_i(\langle v_0, \cdots, v_n\rangle) = \langle v_0, \ldots, v_i, v_i, \ldots, v_n\rangle.$$

Notemos que un símplice es degenerado si tiene vértices repetidos; y es no degenerado en otro caso.

Resumiendo, un complejo simplicial P puede verse como una versión combinatorial de un poliedro triangulado. La fuerte estructura combinatorial en el primero (más precisamente, en $SS(P)$) se debe a considerar los operadores degeneración.

De ahora en adelante, debido a que trabajaremos solamente con complejos simpliciales ordenados, y para simplificar la exposición, identificaremos el complejo simplicial P con su conjunto simplicial asociado $SS(P)$. Entonces, si $v \in P_q$, diremos que la *dimensión* de v es q. Por abuso de notación, diremos que un símplice pertenece a P si pertenece a P_ℓ para algún ℓ.

Sean x e y dos símplices de P. Escribiremos $x \leq y$, si x es una proyección de y. Parece claro que un conjunto simplicial puede darse con el conjunto de símplices de dimensión máxima; y por tanto, un símplice pertenece a P si es una proyección de alguno de los símplices de dimensión máxima.

Sea x e y dos símplices del complejo simplicial P. Definamos dos operaciones entre símplices. Sea

$$\{z \in P : x \leq z \text{ e } y \leq z\}.$$

Entonces, $x \cup y$ denotará al símplice de este conjunto de dimensión menor (es fácil ver que $x \cup y$ es único). Y sea

$$\{z \in P : z \leq x \text{ y } z \leq y\}.$$

Entonces $x \cap y$ es el símplice del conjunto de dimensión mayor (observemos que $x \cap y$ también es único).

Las fórmulas de los productos n–cup dada aplicadas a la proposición 4.1.1 en un complejo simplicial son las siguientes:

Proposición 4.2.1 *Sea Λ el anillo base. Sea P un complejo simplicial con un número finito de vértices. Si $c \in C^p(P;\Lambda)$ y $c' \in C^q(P;\Lambda)$ entonces, para todo entero no negativo n, $c \smile_n c' \in C^{p+q-n}(P;\Lambda)$ está definido por las fórmulas siguientes. Sea $m = p+q-n$ y $x = \langle v_0, \cdots, v_m\rangle \in C_m(P)$ entonces, si n es par,*

$$\begin{aligned} c \smile_n c'(x) \;=\; & \sum_{0 \le i_0 = S(0) < i_1 < \cdots < i_n \le m} (-1)^{i_0 + A(\frac{n-2}{2}, \bar{i}) + i_n} \\ & c(\langle v_0, \ldots, v_{i_0}, v_{i_1}, \ldots v_{i_2}, v_{i_3}, \ldots, v_{i_{n-2}}, v_{i_{n-1}}, \ldots, v_{i_n}\rangle) \\ & \circledast c(\langle v_{i_0}, \ldots, v_{i_1}, v_{i_2}, \ldots v_{i_3}, v_{i_4}, \ldots, v_{i_{n-1}}, v_{i_n}, \ldots v_m\rangle); \end{aligned}$$

y si n es impar, las fórmulas son análogas.

Demostración

Usando la fórmula de la proposición 4.1.1, sólo tenemos que ver que

$$\begin{aligned} &\partial_0 \cdots \partial_\ell(\langle v_0, \ldots, v_\ell, v_{\ell+1}, \ldots, v_m\rangle) = \langle v_{\ell+1}, \ldots, v_m\rangle, \\ &\partial_\ell \cdots \partial_s(\langle v_0, \ldots, v_{\ell-1}, v_\ell, \ldots, v_s, v_{s+1}, \ldots, v_m\rangle) = \langle v_0, \ldots, v_{\ell-1}, v_{s+1}, \ldots, v_m\rangle, \\ &\partial_s \cdots \partial_m(\langle v_0, \ldots, v_{s-1}, v_s, \ldots, v_m\rangle) = \langle v_0, \ldots, v_{s-1}\rangle. \end{aligned}$$

□

Por ejemplo, la fórmula

$$\begin{aligned} c \smile_1 c'(\langle v_0, v_1, \ldots v_m\rangle) = & \sum_{0 \le j \le p-1} (-1)^{j+(p-1+j)q} \\ & c(\langle v_0, \ldots, v_j, v_{j+q}, \ldots, v_m\rangle) \circledast c'(\langle v_j, \ldots, v_{j+q}\rangle), \end{aligned}$$

coincide con la que Steenrod dio en la página 293 en [Ste47] salvo por el signo $(-1)^{p+q}$.

Dado un complejo simplicial P, dos enteros no negativos n y m, y tres símplices x, y, z tal que $z = x \cup y = \langle v_0, v_1, \ldots, v_m\rangle$ es un m–símplice y $x \cap y = \langle v_{i_0}, v_{i_1}, \ldots, v_{i_n}\rangle$

es un n–símplice. Entonces, para $0 \leq j \leq n+1$ definamos los siguientes símplices:

$$\begin{aligned} z^0 &= \langle v_0, \ldots, v_{i_0} \rangle \,, \\ z^j &= \langle v_{i_{j-1}}, \ldots, v_{i_j} \rangle \,, \quad \text{para } 1 \leq j \leq n \,, \\ z^{n+1} &= \langle v_{i_n}, \ldots, v_m \rangle \,. \end{aligned}$$

Fijándonos en las condiciones que tienen que cumplir los sumandos del producto n–cup para ser no nulos, podemos establecer los siguientes resultados.

Proposición 4.2.2 *Sea Λ el anillo base. Sea P un complejo simplicial, $c \in C^p(P;\Lambda)$, $c' \in C^q(P;\Lambda)$ y n un entero no negativo. Sea C (resp. C') el conjunto de símplices no degenerados de P tal que $c(x) \neq 0$ si, y sólo si, $x \in C$ (resp. $c'(x) \neq 0$ si, y sólo si, $x \in C'$). Sea $m = p + q - n$ y $z = \langle v_0, v_1, \ldots, v_m \rangle$ un símplice de P. Definamos el conjunto*

$$\begin{aligned} D_z = \{ \quad & (x_r, y_s, x_r \cap y_s, x_r \cup y_s) : x_r \in C, y_s \in C', x_r \cup y_s = z, \\ & x_r \cap y_s = \langle v_{i_0}, v_{i_1}, \ldots, v_{i_n} \rangle \text{ es un } n\text{–símplice con } i_0 = S(0), \\ & x_r = \bigcup_{j \text{ par}} z^j \} \,. \end{aligned}$$

Entonces,

$$c \smile_n c'(z) = \sum_{(x,y,x\cap y, x\cup y)\in D_z} (-1)^{i_0 + A(0,\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor, \bar{i}) + \vartheta_n} c(x) \circledast c'(y);$$

donde $\circledast$ es el producto en Λ.

Demostración

Usando la fórmula en la proposición 4.2.1 de $c \smile_n c'$, no es difícil ver que un sumando de la fórmula es distinto de cero si el primer factor es un símplice de C y el segundo factor es un símplice de C'. Y en ese caso, los símplices $x_r \in C$ e $y_s \in C'$, son los dos factores de un sumando si y sólo si $x_r \cup y_s = z$, $x_r \cap y_s = \langle v_{i_0}, v_{i_1}, \ldots, v_{i_n} \rangle$ es un n–símplice con $i_0 = S(0)$ y $x_r = \bigcup_{j \text{ par}} z^j$. □

Trasladando este resultado a un lenguaje algorítmico, obtenemos lo siguiente.

Algoritmo para calcular productos n–cup

Input: El anillo base Λ,
un complejo simplicial P,
una p–cocadena c y una q–cocadena c'.
Construye el conjunto C de p–símplices tal que $x \in C$ si, y sólo si, $c(x) \neq 0$.
Construye el conjunto C' tal que $y \in C'$ si, y sólo si, $c'(y) \neq 0$.
$D := \{\ \}$.
for $x \in C,\ y \in C'$, **do**
 $z := x \cup y = \langle v_0, \ldots, v_m \rangle$,
 if $x \cap y = \langle v_{i_0}, \ldots, v_{i_n} \rangle$
  es un n–símplice con $n = p + q - m$,
  $i_0 = S(0)$ y $x = \bigcup_{j \text{ par}} z^j$ **then**
  $D := D \cup \{(x, y)\}$.
 endif;
endfor;
$cup := 0$.
for $(x, y) \in D_z$ **do**
 $cup := cup + (-1)^{i_0 + A(0, \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor, \bar{i}) + \vartheta_n} c(x) \bullet c(y)\ z.$
endfor;
Output: una suma formal, $cup = \sum \lambda_j z_j$, tal que
si λz es un sumando de cup ($\lambda \in \Lambda$ y z es un m-símplice) entonces
$c \smile_n c'(z) = \lambda$, donde $n = p + q - m$.
En caso contrario, $c \smile_n c'(z) = 0$.

Ahora, para poder calcular cociclos, necesitamos la fórmula (1.6). Es claro que si c y c' son cociclos, entonces la "conmutatividad" del producto $(n-1)$–cup determinará la obtención de cociclos vía los productos n–cup. Y, en el caso particular $c = c'$ y $\Lambda = \mathbb{F}_2$, los cuadrados de Steenrod a nivel de cociclos aparecen de forma natural.

Corolario 4.2.3 *Sea $\mathbb{F}_2$ el anillo base. Sea P un conjunto simplicial y c un j–cociclo. Sea C un conjunto de j–símplices no degenerados de P tal que $c(x) = 1$ si, y sólo si, $x \in C$. Sea i un entero positivo y sea $z = \langle v_0, v_1, \ldots, v_{i+j} \rangle$ un símplice de P. Definamos el conjunto*

$$\begin{aligned} D_z = \{ & (x_r, x_s, x_r \cap x_s, x_r \cup x_s) : x_r, x_s \in C, r < s, x_r \cup x_s = z, \\ & x_r \cap x_s = \langle v_{i_0}, v_{i_1}, \ldots, v_{i_n} \rangle, \text{ es un } n\text{–símplice con } i_0 = S(0), \end{aligned}$$

$$x_r = \bigcup_{j \text{ par}} z^j \text{ ó } x_r = \bigcup_{j \text{ impar}} z^j\},$$

donde $m = i + j$ *y* $n = j - i$. *Si el cardinal de* D_z *es par, entonces* $Sq^i(c)(z) = 0$. *En otro caso,* $Sq^i(c)(z) = 1$.

En este corolario, sólo consideramos que i es estrictamente positivo pues es bien conocido que $Sq^0(c) = c$. Y podemos observar que para conocer el cociclo $Sq^i(c)$ es suficiente evaluarlo sobre los símplices z tal que D_z es no vacío. Así, la cocadena $Sq^i(c)$ no depende del número de $(i+j)$–símplices de P, sólo del número de símplices de C.

Usando que los cuadrados de Steenrod $Sq^i(c_j)$ son productos $(j-i)$–cup, podemos adaptar el algoritmo para calcular productos n–cup a estas operaciones.

Algoritmo para calcular cuadrados de Steenrod a nivel de cocadenas

Input: Un complejo simplicial P,
una j–cocadena c.

Construye el conjunto $C = \{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$ de j–símplices tal que
$x \in C$ si, y sólo si, $c(x) = 1$.
$S := 0$.
for $x_r, x_s \in C$, $r < s$, **do**
$z = x_r \cup x_s = \langle v_0, \ldots, v_m \rangle$,
  if $x_r \cap x_s = \langle v_{i_0}, \ldots, v_{i_n} \rangle$ donde $n = 2j - m$,
    $i_0 = S(0)$
    y $x_r = \bigcup_{t \text{ par}} z^t$ ó $x_r = \bigcup_{t \text{ impar}} z^t$ **then**
    $S := S + z$.
  endif;
endfor;

Output: una suma formal de símplices S tal que
si el m–símplice z es un sumando de S entonces
$Sq^i(c)(z) = 1$ donde $i = m - j$,
y $Sq^i(c)(z) = 0$ en otro caso.

Los anteriores algoritmos pueden ser implementados fácilmente usando un paquete de Álgebra Computacional ó un programa de lenguaje funcional.

Debido a que los cuadrados de Steenrod son operaciones cohomológicas, el primer paso del anterior algoritmo debe ser determinar si la cocadena c es un cociclo, porque en ese caso, $Sq^i(c)$ también es un cociclo. También habría que ver que ni c ni $Sq^i(c)$ son cobordes pues en caso contrario la clase de cohomología que representarían sería la trivial.

Para ver esto último nos introducimos en el campo del Álgebra Lineal.

Sea P un complejo simplicial y q un entero no negativo cualquiera. Notemos por $\{x_1^q, x_2^q, \ldots, x_{n_q}^q\}$ a los símplices de P_q. Dada una cadena de dimensión q de la forma $y = \sum_{0 \le i \le n_q} \mu_i x_i^q$ con $\mu_i \in \mathbb{Z}$, podemos identificar y con la matriz columna $\begin{pmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_{n_q} \end{pmatrix}$.

A partir de ahora, identificaremos todas las cadenas de P con su matriz columna correspondiente, según lo explicado en el párrafo anterior.

Sea c una cocadena de dimensión q. Como las cocadenas son homomorfismos, basta conocer la imagen por c de los símplices de P_q para conocer la imagen por c de cualquier elemento de $C_q^N(P)$. Por tanto, podemos identificar la cocadena c con la matriz fila $(\gamma_1 \ \cdots \ \gamma_{n_q})$ donde $\gamma_i = c(x_i)$ para todo $0 \le i \le n_q$.

Notemos por D_{q+1} a la matriz, de dimensiones $n_q \times n_{q+1}$, asociada a la diferencial $d_{q+1} : C_{q+1}^N(P) \to C_q^N(P)$. Escribimos:

$$D_{q+1} = \begin{pmatrix} \lambda_{11}^q & \cdots & \lambda_{1n_{q+1}}^q \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda_{n_q 1}^q & \cdots & \lambda_{n_q n_{q+1} q}^q \end{pmatrix}$$

donde las columnas de D_{q+1} vienen determinadas por la imagen de los símplices de dimensión $q+1$ de P. Es decir, para todo $1 \le i \le n_{q+1}$,

$$d(x_i^{q+1}) = \sum_{1 \le j \le n_q} \lambda_{ji}^q x_j^q = \begin{pmatrix} \lambda_{1i}^q \\ \vdots \\ \lambda_{n_q i}^q \end{pmatrix}.$$

Si estamos interesados en encontrar una cocadena c de dimensión q que sea cociclo (por tanto, $\delta(c)(z) = c\, d(z) = 0$, para todo $z \in C_{q+1}^N(P)$) entonces buscamos una matriz de dimensiones $1 \times n_q$, notémosla por $(\gamma_1 \; \cdots \; \gamma_{n_q})$ tal que

$$(\gamma_1 \; \cdots \; \gamma_{n_q}) D_{q+1} = (0 \; \overset{n_{q+1}}{\cdots} \; 0).$$

Por tanto, tenemos que resolver el sistema de n_{q+1} ecuaciones lineales con n_q incógnitas anterior (para que tenga solución, debe ocurrir que el rango de D_{q+1} sea menor que el número de incógnitas n_q).

El conjunto de las soluciones de este sistema se identifica con el conjunto de cocadenas de dimensión q que son cociclos. Pero de ese conjunto, sólo nos interesa aquellos cociclos que no son cobordes. Estudiemos esto último.

Para que un cociclo $c = (\gamma_1 \; \cdots \; \gamma_{n_q})$ no sea coborde, debe ocurrir que no exista una cocadena $c' = (\vartheta_1 \; \cdots \; \vartheta_{n_{q-1}})$ de dimensión $q-1$ tal que $\delta(c') = c$. Traducido al lenguaje matricial, esto significa que el sistema de n_q ecuaciones lineales con n_{q-1} incógnitas:

$$(\vartheta_1 \; \cdots \; \vartheta_{n_{q-1}}) D_q = (\gamma_1 \; \cdots \; \gamma_{n_q})$$

no tenga solución, es decir que el rango de $D_{q-1} = \begin{pmatrix} \lambda_{11}^{q-1} & \cdots & \lambda_{1n_q}^{q-1} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda_{n_{q-1}1}^{q-1} & \cdots & \lambda_{n_{q-1}n_q}^{q-1} \end{pmatrix}$ sea menor que el rango de la matriz $\begin{pmatrix} \lambda_{11}^{q-1} & \cdots & \lambda_{1n_q}^{q-1} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda_{n_{q-1}1}^{q-1} & \cdots & \lambda_{n_{q-1}n_q}^{q-1} \\ \gamma_1 & \cdots & \gamma_{n_q} \end{pmatrix}$.

4.3 Cuestiones relacionadas

En este capítulo, hemos mostrado varios procesos algorítmicos calculando operaciones cohomológicas a nivel de cociclos en complejos simpliciales. Análogamente, las descripciones combinatoriales explícitas del segundo capítulo permiten también considerar operaciones cohomológicas en grupos finitos desde una óptica algorítmica. El problema estriba aquí en la gran cantidad de símplices que hay en cada dimensión.

Sea G un grupo. Trabajaremos con el complejo de cadenas asociado al conjunto simplicial $\bar{W}(G)$, denotado por $C_*^N(\bar{W}(G))$. Definimos la (co)homología del grupo G como la del espacio clasificante $\bar{W}(G)$.

Aparece el siguiente lema:

Lema 4.3.1 *Sea $\mathbb{F}_2$ el anillo base y $(G,+)$ un grupo. Si $c \in C^j(X;Z_2)$ y $x = (g_0,\ldots,g_{i+j-1}) \in C^N_{i+j}(\bar{W}(G))$, entonces los cuadrados de Steenrod se definen por las fórmulas:*

Si $i \leq j$ e $i+j$ es par, entonces:

$$
\begin{aligned}
Sq^i(c)(x) &= \mu(c \otimes c)D_i(x) \\
&= \textstyle\sum_{i_0=S(0)<i_1<\cdots<i_n\leq m} \\
&\qquad \mu\big(\, c(g_0,\ldots,g_{i_0-1},g_{i_0}+\cdots+g_{i_1-1},g_{i_1},\ldots \\
&\qquad \ldots,g_{i_{n-2}-1},g_{i_{n-2}}+\cdots+g_{i_{n-1}-1},g_{i_{n-1}},\ldots,g_{i_n-1}) \\
&\qquad \otimes c(g_{i_0},\ldots,g_{i_1-1},g_{i_1}+\cdots+g_{i_2-1},g_{i_2},\ldots \\
&\qquad \ldots,g_{i_{n-1}-1},g_{i_{n-1}}+\cdots+g_{i_n-1},g_{i_n},\ldots,g_{m-1})\big).
\end{aligned}
$$

Si $i \leq j$ e $i+j$ es impar, entonces:

$$
\begin{aligned}
Sq^i(c)(x) &= \mu(c \otimes c)D_i(x) \\
&= \textstyle\sum_{i_0=S(0)<i_1<\cdots<i_n\leq m} \\
&\qquad \mu\big(\, c(g_0,\ldots,g_{i_0-1},g_{i_0}+\cdots+g_{i_1-1},g_{i_1},\ldots \\
&\qquad \ldots,g_{i_{n-1}-1},g_{i_{n-1}}+\cdots+g_{i_n-1},g_{i_n},\ldots,g_{m-1}) \\
&\qquad \otimes c(g_{i_0},\ldots,g_{i_1-1},g_{i_1}+\cdots+g_{i_2-1},g_{i_2},\ldots \\
&\qquad \ldots,g_{i_{n-2}-1},g_{i_{n-2}}+\cdots+g_{i_{n-1}-1},g_{i_{n-1}},\ldots,g_{i_n-1})\big).
\end{aligned}
$$

Si $i > j$, entonces $Sq^i(c)(x) = 0$.

En estas fórmulas, μ es el producto natural en $\mathbb{F}_2$, $n = j - i$, $m = j + i$,

$$S(0) = i_1 - i_2 + \cdots + (-1)^{n-1} i_n + (-1)^n \left\lfloor \frac{m+1}{2} \right\rfloor .$$

Observemos que se le puede dotar a $C^N_*(\bar{W}(\mathcal{G}))$ de estructura de DGA–módulo, siendo $d_n = \sum_{0\leq i\leq n}(-1)^i \partial_i$, la aumentación $\xi(\lambda(\,)) = \lambda$ y la coaumentación $\eta(\lambda) = \lambda(\,)$.

Nuestra técnica combinatorial se puede mejorar usando técnicas de perturbación homológica [GL89, GLS91], debido a que para algunas clases de grupos y álgebras diferenciales graduadas es posible obtener modelos homológicos pequeños [EM53b, EM54, HK91, Lam92, LS87, Sil98, ARS99]. Por tanto, muestra maquinaria combinatorial para calcular cuadrados de Steenrod y potencias reducidas de Steenrod, puede ser mejorada buscando directamente los cociclos en estos modelos. Para poder hacer esto, necesitamos la siguiente definición.

Definición 4.3.2 Sea $\mathbb{F}_p$ el anillo base, X un conjunto simplicial y M un Λ–módulo diferencial graduado. Si existe una contracción $r = (f, g, \phi)$ de $C_*^N(X)$ hasta M, definimos la operación cohomológica $Sq^i : H^*(M; \mathbb{F}_2) \to H^{*+i}(M; \mathbb{F}_2)$ por

$$Sq^i(c) = g^*(Sq^i(f^*(c))),$$

donde i es un entero no negativo, $c \in \mathrm{Hom}(M; \mathbb{F}_2)$ es un cociclo y $f^* : \mathrm{Hom}(M; \mathbb{F}_2) \to \mathrm{Hom}(X; \mathbb{F}_2)$, $g^* : \mathrm{Hom}(X; \mathbb{F}_2) \to \mathrm{Hom}(M; \mathbb{F}_2)$ se define por $f^*(c)(x) = c(f(x))$, $g^*(c)(y) = c(g(y))$, donde $x \in C_*^N(X)$ e $y \in M$.

Un resultado que podemos necesitar en este contexto es el siguiente:

Proposición 4.3.3 *Sea X un conjunto simplicial, M una coálgebra diferencial graduada y consideremos como anillo base a $\mathbb{F}_2$. Supongamos que existe una contracción $r = (f, g, \phi) : C_*^N(X; \mathbb{F}_2) \Rightarrow M$ tal que g es un morfismo de coálgebras . Definimos el siguiente producto en $Hom(M; \mathbb{F}_2)$:*

$$a \star b(x) = \mu(a \otimes b)\Delta(x),$$

donde μ es el homomorfismo inducido por la multiplicación en $\mathbb{F}_2$ y $a, b \in Hom(M; \mathbb{F}_2)$.

Bajo estas hipótesis, tenemos la siguiente identidad

$$a \star b = g^*(f^*(a) \smile f^*(b)),$$

donde $\smile$ es el producto cup en $C^*(X; \mathbb{F}_2)$.

Usando estos resultados, es fácil ver que las operaciones cohomológicas en M definidas previamente satisfacen la siguiente propiedad:

Proposición 4.3.4 *Sea X un conjunto simplicial, M una coálgebra diferencial graduada y $\mathbb{F}_2$ el anillo base. Si existe una contracción, $r = (f, g, \phi) : C_*^N(X; \mathbb{F}_2) \Rightarrow M$, donde g es un morfismo de coálgebra, entonces tenemos que*

$$Sq^i(a \star b) = \sum_{s+t=i} Sq^s(a) \star Sq^t(b),$$

siendo $a \star b(x) = \mu(a \otimes b)\Delta(x)$, μ el homomorfismo inducido por el producto en $\mathbb{F}_2$ y $a, b \in Hom(M; \mathbb{F}_2)$.

En un futuro pretendemos abordar esta aproximación a operaciones cohomológicas en grupos finitos.

Bibliografía

[Ada58] J.F. Adams. *On the estructure and applications of the Steenrod algebra*, Comment. Math. Helv., **32** (1958), 80–214.

[Ada60] J.F. Adams. *On the non–existence of elements of Hopf–invariant one*, Ann. of Math., **72** (1960), 20–104.

[Ade52] J. Adem. *The iteration of the Steenrod squares in Algebraic Topology*, Proc. Nat. Acad. Sci. USA, **38** (1952), 720–724.

[Ade58] J. Adem. *Operaciones cohomológicas de segundo orden asociadas con cuadrados de Steenrod*, Symposium Internacional de Topología Algebraica, Univ. of Mexico, Mexico D.F. (1958), 186–221.

[Ade62] *Sobre operaciones cohomológicas secundarias*, Bol. Soc. Mat. Mexicana **7** (1962), 95–110.

[And67] M. André. *Méthode simpliciale in Algèbre Homologique et Algèbre Commutative*, Lecture Notes in Mathematics, **32**, Springer–Verlag, 1967.

[Arm99] J.A. Armario. *Estructuras multiplicativas y homología de fibrados*, Tesis Doctoral de la Universidad de Sevilla, Sevilla (1999).

[AAFR99] V. Álvarez, J.A. Armario, M.D. Frau, P. Real. *An algorithm for computing the first homology groups of some semidirect product of finite groups.* Third International Mathematica Symposium IMS99, RISC, Hagenberg (Austria), agosto de 1999.

[AAGR98] V. Álvarez, A. Armario, R. González–Díaz, P. Real. *Algorithms in Algebraic Topology and Homological Algebra: the problem of the complexity*, Extended Abstracts of the International Conferece Computer Algebra in Scientific Computing CASC'98, San Petersburgo (Rusia), abril de 1998.

[AARS97] V. Álvarez, A. Armario, P. Real, B. Silva. *HPT and computability of the homology of CDGA–algebras*, Comunicación presentada en el congreso Conference on Secondary Calculus and Cohomological Physics, Moscow, 1997. Electronic proceedings of the EMS.

[ADFQ97] R. Ayala, E. Domínguez, A.R. Francés, A. Quintero. *About digital surfaces on* $\mathbb{Z}^3$, actas del congreso Journess Franco–Espagnoles de Geometric Algoritmique, Barcelona, septiembre de 1997, 25–26.

[AGJR98] V. Álvarez, R. González–Díaz, M.J. Jiménez, P. Real. *Discrete Methods on Algebraic Topology* Comunicación presentada en el congreso Colloquium on Combinatorics Braunschweing (Alemania), noviembre de 1998.

[ARS99] J.A. Armario, P. Real, B. Silva. *On p–minimal homological models of twisted tensor products of elementary complexes localized over a prime*, Contemporary Mathematics **227** (1999), 303–314.

[Bro59] E.H. Brown. *Twisted tensor products I*, Annals of Math., **65** (1959), 223–246.

[Bro65] R. Brown. *The twisted Eilenberg–Zilber theorem*, Celebrazioni Archimedee del secolo XX, Simposio di topologia (Messina, 1964), Ed. Oderisi, Gubbio (1965), 33–37.

[Car50] H. Cartan. *Une théorie axiomatique des carrés de Steenrod*, C. R. Acad. Sci. Paris, **230** (1950), 425–427.

[Car56] H. cartan. Algèbres d'Eilenberg–Mac Lane et homotopie. séminaire H. Cartan, 1954/55, Ecole Normale Supérieure, Paris, (exposé 2 à 11), 1956.

[Car79] H. Cartan. *Ouvres, vol. III*, Springer, Berlin–Heidelberg–New York (1979), 1252–1254.

[CE56] H. Cartan, S. Eilenberg. *Homological Algebra*, Princeton Univ. Press, 1956.

[Cla65] A. Clarck. *Homotopy commutativity and the Moore spectral sequence*, Pacific. J. Math. **15** (1965).

[Cur71] E.B. Curtis. *Simplicial Homotopy Theory*. Advances in Math. **6** (1971), 107–209.

[Die89] J. Dieudonné. *A history of Algebraic and Differential Topology 1990–1960*, Birkhäuser, Boston, 1989.

[Dol61] A. Dold. *Uber die Steenrodschen kohomologieoperationen*, Annals of Math. **73** (1961), 258–294.

[DC91] B. Donald, D. Chang. *On the complexity of computing the homotopy type of a triangulation*, Cornell Computer Science Dept., technical report (1991).

[DFM93] E. Domínguez, A.R. Francés, A. Márquez. *A framework for Digital Topology*, actas del congreso IEEE Int. Conf. of Systems, Man and Cybernetics **2** (1993) 65–70.

[EM53a] S. Eilenberg, S. Mac Lane. *Acyclic models*, Am. J. Math., **67** (1953), 282–312.

[EM53b] S. Eilenberg, S. Mac Lane. *On the groups $H(\pi, n)$, I*, Annals of Math. **58** (1953), 55–106 .

[EM54] S. Eilenberg, S. Mac Lane. *On the groups $H(\pi, n)$, II*, Annals of Math. **60** (1954), 49–139.

[EZ59] S. Eilenberg, J.A. Zilber. *On products of complexes*, Am. J. Math. **75** (1959), 200–204.

[EGL97] T. Ekedahl , J. Grabmeier, L. Lambe. *Algorithms for algebraic computations with applications to the cohomology of finite p–groups*, Preprint of Department of Mathematics and Centre for Innovative Computation, University of Wales, 1997.

[GL00] J. Grabmeier, L.A. Lambe. *Homological computation for p–groups*, Prepublicación de la Universidad de Bangor, Gales, 2000.

[GR98a] R. González–Díaz, P. Real. *An approach to computing the action of Steenrod squares on the cohomology of polyhedral simplicial sets*. Comunicación presentada en el congreso Asoc. for Math. and Computers in Simulation Conf. on App. of Computer Alg. IMACS–ACA'98, Praga (República Checa), agosto de 1998.

[GR98b] R. González–Díaz, P. Real. *Una curiosa combinación de Topología, Álgebra y Combinatoria: los cuadrados de Steenrod*, La Gaceta de la Real Soc. Mat. Española **3** (1998).

[GR98c] R. González–Díaz, P. Real. *Calculando cociclos en poliedros.* Comunicación presentada en el IV Encuentro de Matemática Discreta, Sevilla, septiembre de 1998.

[GR98d] R. González–Díaz, P. Real. *Un nuevo método para calcular cociclos en poliedros.* Comunicación presentada en el IV Encuentro de Álgebra Computacional y Aplicaciones (EACA'98), Sigüenza, septiembre de 1998.

[GR98e] R. González–Díaz, P. Real. *Del Álgebra Homológica a la Combinatoria.* Charla invitada por el Depto. de Matemáticas y Computación de la Universidad de Logroño, septiembre de 1998.

[GR99a] R. González–Díaz, P. Real. *A combinatorial method for computing Steenrod squares*, Journal of Pure and Applied Algebra 139 (1999) 89–108.

[GR99b] R. González–Díaz, P. Real. *Computing cocycles on simplicial complexes*, Proceedings of the Second Workshop on Computer Algebra and Scientific Computing, Munich, May 31-June 4 (1999) Springer-Verlag 177–190.

[GR99c] R. González–Díaz, P. Real. *Steenrod cohomology operations and combinatorics.* Comunicación presentada en el congreso IMACS ACA–99, El Escorial, junio de 1999.

[GR99d] R. González–Díaz, P. Real. *Algorithms for computing chain–level Steenrod cohomology operations*, Seminario del Diffiety Institut, Yaroslavl (Rusia), octubre de 1999.

[GR99e] R. González–Díaz, P. Real. *Cohomology operations and combinatorics*, International Seminar in Physics and Mathematics, Workshop Modern Mathematical Methods and their Applications, Tbilisi (Georgia), octubre de 1999.

[GR99f] R. González–Díaz, P. Real. *Computación de Operaciones Cohomológicas en Triangulaciones.* Comunicación presentada en el I Encuentro Andaluz de Matemática Discreta, La Rábida (Huelva), septiembre de 1999.

[Gug72] V.K.A.M. Gugenheim. *On the chain complex of a fibration*, Illinois J. Math. **3** (1972), 398–414.

[GL89] V.K.A.M. Gugenheim, L. Lambe. *Perturbation theory in Differential Homological Algebra, I*, Illinois J. Math **33** (1989), 56–582.

[GLS91] V.K.A.M. Gugenheim, L. Lambe, J. Stasheff. *Perturbation theory in Differential Homological Algebra, II*, Illinois J. Math. **35** n. 3 (1991), 357–373.

[GM74] V.K.A.M. Gugenheim, H.J. Munkholm. *On the extended functoriality of Tor and Cotor*, J. Pure Appl. Alg. 4 (1974), 9–29.

[Hes99] K. Hess. *Perturbation and transfer of generic algebraic structure*. Contemporary Mathematics **227** (1999), 103–144.

[HK91] J. Huebschmann, T. Kadeishvili. *Small models for chain algebras*, Math. Zeit. **207** (1991), 245–280 .

[HL93] K.J. Horadam, W. De Launey. *Cocyclic development of designs*, J. Algebraic Combin. **2(3)** (1993), 267–290. Erratum: J. Alg. Comb. **1** (1994), 129.

[HMS74] D. Husemoller, J. Moore, J.D. Stasheff. *Differential homological algebra and homogeneous spaces*. J. Pure Appl. Alg **5** (1974), 113–185.

[Lam92] L. Lambe. *Homological perturbation theory, Hochschild homology and formal group*, Deformation theory and quantum groups with applications to mathematical physics (Amherst, MA, 1990), Contemp. Math. **134**, 183–218. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1992.

[Lam97] L. Lambe. *An algorithm for calculating cocycles*, Preprint of Department of Mathematics and Centre for Innovative Computation, University of Wales, 1997.

[LS87] L. Lambe, J. Stesheff. *Applications of perturbation theory to iterated fibrations*, Manuscripta Math. **58** (1992), 363–376.

[Mac63] S. Mac Lane. *Homology*, Die Grundlenhren der mathematichen Wissenchaften **114**, Springer, 1963.

[McL75] S. Mac Lane. *Homology*, Classics in Mathematics, Springer–Verlag, Berlin, 1995. Reprint of the 1975 edition.

[Mas52] W. Massey. *Singular homology theory*, Graduate texts in mathematics **56**, Berlin, Heidelberg, New York, Springer–Verlag, 1952.

[Mas80] W.S. Massey. *Singular Homology Theory*, Graduate texts in mathematics **70**, Sepringer–Verlag New York, 1980.

[May67] P. May. *Simplicial Objects in Algebraic Topology*, Van Nostrand, Princeton , 1967.

[May70] P. May. *A General Algebraic approach to Steenrod operations*, Lect. Notes in Math. **156**, Springer–Verlag (1970), 153–231.

[Mil58] J. Milnor. *The Steenrod algebra and its dual*, Ann. of Math **67** (1958), pp 150–171.

[Mun76] H.J. Munkholm. *The Eilenberg–Moore spectral sequence and strongly homotopy multiplicative maps.* J. Pure Appl. Alg. **9** (1976) 1–50.

[Mun84] J.R. Munkres. *Elements of Algebraic Topology*, Addison–Wesley Publishing Company, 1984.

[Rea92] P. Real. *Algoritmos de cálculo de homología efectiva de los espacios clasificantes*, Tesis doctoral de la Universidad de Sevilla, Sevilla (1993).

[Rea93] P. Real. *Homological perturbation theory and associativity.* Prepublicación del Departamento de Matemática Aplicada I, 1993.

[Rea96] P. Real. *On the computability of the Steenrod squares*, Annali de'll Università di Ferrara, sezione VII, Scienze Matematiche **XLII** (1996), 57–63.

[Rub91] J. Rubio. *Homologie effective des espaces de lacets itérés: un logiciel*, Tesis doctoral de l'Institut Fourier, Grenoble (1991).

[Sch91] R. Schön. *Effective Algebraic Topology.* Memo. Amer. Amer. Math. Soc. **451**, 1991.

[Ser53] J.P. Serre. *Cohomologie modulo 2 des complexes d'Eilenberg–Mac Lane*, Comm. Math. Helv. **27** (1953), 198–232.

[Ser87] F. Sergeraert. *Homologie effective I, II*, C. R. Acad. Sc. París **304** (1987), 279–281 y 319–321.

[Shi62] W. Shih *Homologie des espaces fibrés*, Inst. Hautes Etudes Sci. **13** (1962), 93–176.

[Sil98] B. Silva. *Modelos homológicos pequeños de DGA-álgebras conmutativas*, Tesis doctoral de la Universidad de Sevilla, Sevilla (1998).

[Smi89] V.A. Smirnov. *On the chain complex of an iterated loop space*, Izv. Ac. Nauk. (Rusia) **53** (1989), 1108–1119.

[Smi94] J.R. Smith. *Iterating the cobar construction*, Memoirs of American Math. Soc. **524** (1994).

[Spa81] E.H. Spanier. *Algebraic Topology*, New York, McGraw–Hill, 1966 . Reprinted by Springer, 1981.

[Ste47] N.E. Steenrod. *Products of cocycles and extensions of mappings*, Annals of Math. **48** (1947), 290–320.

[Ste52] N.E. Steenrod. *Reduced powers of cohomology classes*, Ann. of Math. **56** (1952), 47–67.

[SE62] N.E. Steenrod, D. B. A. Epstein. *Cohomology operations*, Ann. of Math. Studies **50**, Princeton University Press, 1962.

[Wei94] C.A. Weibel. *An introduction to Homological Algebra*, Cambridge studies in advanced mathematics **38**, Cambridge University Press, 1994.

[Woo98] R.M.W. Wood. *Problems in the Steenrod algebra*, Bull. London Math. Soc. **30** (1998), 449–517.

[Wu50] Wu Wen–Tsün. *Classes caractéristiques et i–carrés d'une variéte*, C. R. Acad. Sci. Paris **230** (1950), 918–920.

[Wu52] Wu Wen–Tsün. *Sur les classes caractéristiques des structures fibrées sphériques*, Publ. de l'Inst. Math. de l'Univ. de Strasbourg **XL**, París, Hermann, 1952.

UNIVERSIDAD DE SEVILLA

Reunido el Tribunal integrado por los abajo firmantes en el día de la fecha, para juzgar la Tesis Doctoral de D. Rocío González Díaz

titulada Operaciones cohomológicas en enfoque combinatorial

acordó otorgarle la calificación de Sobresaliente cum laude por unanimidad

Sevilla, ... de 2000

El Vocal, | El Vocal, | El Vocal,
T. Kaczynski | J. F. Sergeraert

El Presidente, | El Secretario, | El Doctorado,

1013135 39

FMA C 043/334