

218855726

# UNIVERSIDAD DE SEVILLA

Departamento de Matemática Aplicada I

UNIVERSIDAD DE SEVILLA  
NEGOCIADO DE TESIS

Queda registrado este Título de Doctor al  
folio 7 número 102 del libro  
correspondiente.

Sevilla, 6 JUL. 2001

El Jefe del Negociado.

ESCUELA TECNICA SUPERIOR INGENIERIA INFORMATICA <b>- BIBLIOTECA -</b>
N.º ORDEN GENERAL <u>10.356</u>
OBRA N.º ..... TOMO.....
SIGNATURA.....
N.º EN ESPECIALIDAD.....
EJEMPLAR NUMERO.....

## COMPLEJOS REDUCIDOS DE RESOLUCIONES Y PERTURBACIÓN HOMOLÓGICA.

Tesis  
24

Vº Bº  
del Director,

Fdo. Pedro Real Jurado

Memoria presentada por  
Víctor Álvarez Solano  
para optar al grado de  
Doctor en Matemáticas  
por la Universidad de Sevilla

Sevilla, Junio de 2001



Complejos reducidos de resoluciones  
y perturbación homológica.

Víctor Álvarez Solano.

Junio de 2001.

D./D<sup>a</sup>. VÍCTOR ÁLVAREZ SOLANO

D.N.I.: 28911457-C COMO AUTORA DE LA PRESENTE TESIS  
DOCTORAL, AUTORIZA SU CONSULTA EN LA BIBLIOTECA CON FINES  
DE ESTUDIO Y/O INVESTIGACIÓN.

SEVILLA, 7 DE DICIEMBRE DE 2001

FIRMA:



Original archivado en carpeta "tesis".



*Luna, de blancos suspiros,  
Otea el horizonte, mira,  
Lucero en busca de amor,  
Insufla el mío de vida.*

*A Loli. Mi Luna. Mi Lucero. Mi vida.*



# Agradecimientos

Éste es el resultado de una paternidad responsable.

En efecto, a lo largo de estos más de cuatro años, se ha ido gestando esta criatura, al amparo y cuidado extremos de sus padres.

En un trayecto tan duradero, un hijo necesita de caricias, carantoñas, consejos, correcciones, confianza, afecto, algún que otro desengaño, pero sobre todo, de mucho amor.

De todo y más ha tenido éste en este tiempo. Consciente de ello, qué menos que ser agradecido. De él fluyen estas palabras. . .

*Gracias a ti, Madre, por dejarme nacer de tus entrañas, por darme cobijo en tus brazos, por encauzar mis pasos, por tus regalos y por tus desengaños, que han sido muchos. En ti, el conocimiento me embarga, y en él trato de crecer. Gracias, Álgebra Homológica.*

*Gracias también a ti, Ángel de mi Guarda, por tu apoyo, por tu afecto, siempre ahí, atento a cada suspiro, en lo bueno y en lo malo, sobre todo en lo malo, la hora difícil del parto. . . Gracias a ti, mi Ángel, que me das aliento. Gracias, Loli.*

Un hijo no se tiene sin padres, y éste, tampoco se tiene sin un buen cirujano. Y ha tenido el mejor. No necesitó vestirse de verde (lo lleva por dentro), y guió y supervisó la gestación y embarazo con un tesón, fuerza, confianza y animosidad envidiables. Con un *Doctor* así, ¡cómo no va a nacer de pie este niño! Más loable aún su esfuerzo, dada su condición de padre, esfuerzo y sacrificio que hizo (hace) toda su familia. *Gracias a vosotros, Palmas y Pedros. Gracias especialmente a ti, Pedro.*

Por otro lado, para llegar a tiempo al quirófano, se requiere de un versado enfermero (por supuesto, vestido de blanco impoluto), conocedor y respetuoso de los formalismos y normas propias del hospital, pero al tiempo sabedor de todas las puertas falsas y pasajes secretos que agilizan el movimiento por esos largos pasillos. ¡Qué habría sido sin ti! *Gracias, Juanma.*





Afortunadamente, este hijo no viene solo al mundo. Pertenece a una familia numerosa, bien sana, y ha crecido entre las risas, bromas, respaldo y muy buenos consejos de todos sus hermanos. Los mayores (Bea, Andrés, Rocío, Juan, Pedro mismo) y los pequeños, aún por venir (MariaJo, Loli). Todos sabemos cuánto cuesta sacar adelante semejante criatura. Vosotros lo hacéis llevar con muchísimo agrado, día a día. *Muchas gracias a todos, ¡familia C.H.A.T.A.!*

Decía que la familia era numerosa. Bien que lo es. En este parto se siente la presencia, la mirada, la alegría de muchos otros familiares.

Debo agradecer mucho a todos vosotros, compañeros en el Departamento de Matemática Aplicada I, por los medios facilitados y por el ambiente de trabajo; sobre todo a aquellos con los que he tenido la fortuna de compartir docencia, ya sea en Agrícola, en Aparejadores o en Informática. Especial mención han de tener los compañeros de Matemática Discreta, Introducción a la Matemática Discreta y Cálculo Numérico, por sus esfuerzos más puntuales en las proximidades del parto.

Por supuesto, también debo agradecer los valiosos consejos y las enriquecedoras conversaciones mantenidas a lo largo de estos años con Julio Rubio, y muy particularmente su asistencia en el momento de dar a luz.

Agradezco también el apoyo de todos los amigos, que esperan tras los cristales del hospital, barruntando el sexo del que va a nacer. Paciencia, todo se andará.

Y la Familia, sí, con mayúsculas, no de la que nace este niño, esa no. Familia, en la que nació un servidor.

Supongo que todos compartimos la misma emoción, el mismo deseo, al ver todas estas palabras por fin juntas, a punto de salir al mundo a respirar por sí mismas. Diréis todos que ya era hora. Yo también. Ellas también. ¿Será mío? Como es natural, lo que se puede garantizar es que viene del Álgebra Homológica. Mío, lo que es mío, un acto de Fe. Y, ante todo, vuestro. *Gracias, Familia: papá, mamá, Francis, Saluita, Antonio, Blasa, Juan, Espe, Titos, Titas, Paqui, Migue, . . .*

Va por todos vosotros, Familia, familia, por todos nosotros. *Gracias.*

## Resumen

Descubrimos aquí el Álgebra Homológica como un campo susceptible de un tratamiento computacional moderno, en función de técnicas de perturbación homológica y a través del diseño, análisis e implementación de métodos avanzados de generación y comparación de resoluciones, en función de contracciones entre los complejos reducidos asociados.

De hecho, la primera parte de la labor aquí realizada comprende precisamente la demostración de la equivalencia de trabajar en Álgebra Homológica a nivel de resoluciones que escinden de la resolución bar, o a nivel de contracciones entre los complejos reducidos asociados.

En particular, el resto de la memoria se circunscribe al contexto de los complejos reducidos y contracciones entre ellos, aunque a veces nos referiremos a las resoluciones correspondientes.

Afrontamos desde esta perspectiva el problema del cálculo de los módulos de homología de álgebras conmutativas, diferenciales, graduadas, aumentadas y conexas (brevemente, CDGAC-álgebras), y productos semidirectos de grupos abelianos dotados de una acción de grupos.

En el primero de los casos, realizamos una mejora ostensible del algoritmo que se diseñara en [14, 155] acerca de la determinación de modelos homológicos para CDGAC-álgebras, en función de lo que hemos llamado *teoría de inversiones*. Se trata de clasificar elementos (según sus *inversiones*), de modo que se simplifica sobremanera el comportamiento de los morfismos componentes de la contracción de la construcción bar del producto de dos álgebras en el producto de las construcciones bares respectivas. La tabla de comparación que damos del tiempo requerido en el cálculo de la diferencial del modelo antes y después de considerar la teoría de inversiones causa, al menos, asombro.

Con respecto al cálculo de modelos homológicos para productos semidirectos de grupos, extendemos el trabajo realizado fundamentalmente en [10, 14, 11, 12, 21, 2], al caso de productos semidirectos de grupos  $A \times_{\chi} G$  con  $A$  y  $G$  abelianos no necesariamente finitos,  $\chi$  acción de grupos. En la determinación de una fórmula explícita para la diferencial de los modelos obtenidos, realizamos también ciertas

simplificaciones que recuerdan a las realizadas en la teoría de inversiones.

A partir de estos modelos para productos semidirectos, diseñamos un algoritmo para generar matrices cocíclicas (en particular, de Hadamard) sobre estos grupos; lo que por ende permite diseñar códigos binarios no lineales óptimos para la corrección de errores, según las cotas de Plotkin.

Como complemento del trabajo realizado incluimos aquí, en forma de apéndice, las implementaciones realizadas en MATHEMATICA de las fórmulas de las diferenciales de los modelos homológicos de CDGAC-álgebras y productos semidirectos de grupos abelianos.

# Introducción

Hasta la fecha, el *Álgebra Homológica* [41, 126, ] ha sido un campo generalmente asociado a estudios de índole teórica, a decir verdad de una traducción computacional en apariencia inviable. Desde la nueva panorámica que la Teoría de Perturbación Homológica [152, 34, 85, 81, 98, 82, 148, 141] provee, en esta memoria establecemos una perspectiva unificadora en el estudio de resoluciones en función de contracciones entre los complejos reducidos asociados y, progresando sobre éstos, diseñamos e implementamos algoritmos para el cálculo de módulos de homología de álgebras conmutativas y productos semidirectos de grupos abelianos, aplicando el último de ellos para la generación de matrices cocíclicas sobre productos semidirectos de grupos abelianos finitos.

Tradicionalmente, el *Álgebra Homológica* se ha considerado como una herramienta útil en la demostración de teoremas de existencia no constructivos en *Álgebra y Topología Algebraica*.

Hoy día se acepta como origen de este área los trabajos que a lo largo de las primeras cuatro décadas del siglo se desarrollaron en relación con los espacios esféricos [103, 58, 59, 54], y lo que posteriormente se conocería como *homología*; pero en realidad nos podríamos remontar a finales del siglo pasado, a la luz del problema siguiente.

Dadas dos matrices  $M$  y  $N$  de modo que su producto  $MN$  es cero, y un vector columna  $v$  de longitud  $n$  con  $Mv = 0$ , el índice  $d$  que mide la falta de pertenencia de  $v$  al espacio generado por las columnas de  $N$  coincide necesariamente con la diferencia de  $n$  con la suma de los rangos de  $M$  y  $N$ . Pero este natural se puede interpretar, además, como la dimensión del espacio cociente  $\text{Ker}(f)/\text{Im}(g)$  del núcleo de la aplicación lineal  $f$  definida por la matriz  $M$  entre el espacio imagen de la aplicación lineal  $g$  definida por la matriz  $N$ .

Esta primigenia idea se trasladó de espacios vectoriales a módulos y complejos simpliciales, de modo que a cada espacio topológico se le asociaba una cierta estructura simplicial, y a partir de ésta se calculaba la *homología singular* del espacio en cuestión [55, 126]. Como todo invariante, constituía un elemento de clasificación o distinción entre espacios.

Más concretamente, cada  $n$ -símplice de un espacio topológico  $X$  dado tiene un



borde que consiste en  $(n - 1)$ -símplices. Si llamamos  $K_n$  al grupo abeliano libre generado por todos los  $n$ -símplices, el operador  $\partial$  que asigna a cada  $n$ -símplice la suma alternada de sus símplices borde constituye un homomorfismo  $\partial : K_n \rightarrow K_{n-1}$ . Dado que  $\partial\partial = 0$ , tiene sentido considerar el cociente  $H_n(X) = \text{Ker}\partial_n/\text{Im}\partial_{n+1}$ , que es el que se conoce como  $n$ -módulo de homología de  $X$ .

El estudio de las propiedades de este tipo de objetos requería el desarrollo paralelo de un lenguaje adecuado, que cristalizó en la teoría de categorías y funtores, apadrinada por Eilenberg y Mac Lane a finales de la década de los 40 [60].

Es común en Álgebra Homológica la consideración de elementos de *obstrucción* para ciertas construcciones, en el sentido de que dependiendo de que éstos verifiquen o no cierta propiedad la construcción en particular es o no posible. De esta forma fue que aparecieron los funtores *extensión*  $\text{Ext}$  y *torsión*  $\text{Tor}$  [63, 125], piczas fundamentales en Álgebra Homológica.

Restringiéndonos a la categoría de grupos abelianos, dados  $A$  y  $C$  sendos objetos de la categoría, el conjunto  $\text{Hom}(A, C)$  de todos los homomorfismos de grupos de  $A$  en  $C$  constituye un nuevo grupo conmutativo, bajo el producto punto a punto. Es más,  $\text{Hom}(-, -)$  constituye un funtor covariante fijada la primera componente y contravariante fijada la segunda, de modo que a cada  $\alpha : A \rightarrow A'$  se le asocia  $\bar{\alpha} : \text{Hom}(A', C) \rightarrow \text{Hom}(A, C)$  con  $\bar{\alpha}(f) = f\alpha$ .

A partir de un complejo  $(K, \partial)$ , se puede generar pues otro complejo

$$\text{Hom}(K_0, C) \xrightarrow{\bar{\partial}} \text{Hom}(K_1, C) \xrightarrow{\bar{\partial}} \text{Hom}(K_2, C) \rightarrow \dots$$

El grupo cociente  $H^n(K, C) = \text{Ker}\partial_n/\text{Im}\partial_{n+1}$  constituye el  $n$ -módulo de *cohomología* de  $K$  con coeficientes en  $C$ .

En este estado, la pregunta surgió de manera natural: ¿podría determinar la homología de un complejo  $K$  su cohomología? En la búsqueda de solución para este interrogante, apareció el grupo  $\text{Ext}^1(A, C)$  de todas las *extensiones de grupos* de  $C$  por  $A$ .

Una extensión de  $C$  por  $A$  es un grupo  $B \supset C$  con  $B/C \cong A$ , es decir, que hace de

$$E : 0 \rightarrow C \rightarrow B \rightarrow A \rightarrow 0$$

una sucesión exacta corta.

Según el *Teorema de coeficientes universales* [126], para  $K$  un complejo con todos los  $K_n$  grupos libres, el módulo de cohomología  $H^n(K, C)$  viene determinado, salvo extensión de grupos, por los módulos de homología  $H_n(K)$  y  $H_{n-1}(K)$ :

$$0 \rightarrow \text{Ext}^1(H_{n-1}(K), C) \rightarrow H^n(K, C) \rightarrow \text{Hom}(H_n(K), C) \rightarrow 0.$$

En el caso de no ser todos los  $K_n$  grupos libres, hace falta recurrir a otro tipo de métodos, que engloban las denominadas *sucesiones espectrales* [122, 131, 128], a describir posteriormente.

Por otro lado, atendiendo al producto tensorial de grupos, a partir de un grupo  $A$  y un complejo  $K$  se puede construir el complejo  $A \otimes K$  consistente en los grupos  $A \otimes K_n$ .

A la pregunta de si es posible que la homología de  $K$  determine de igual modo la homología de  $A \otimes K$ , si de nuevo nos restringimos al caso de complejos  $K$  libres, aparecen sucesiones exactas de la forma

$$0 \rightarrow H_n(K) \rightarrow H_n(A \otimes K) \rightarrow \text{Tor}_1(A, H_{n-1}(K)) \rightarrow 0;$$

donde  $\text{Tor}_1(A, G)$  es un grupo, denominado *producto torsión* [126], que depende de los elementos de orden finito en  $A$  y  $G$ , y viene generado por el conjunto de pares  $(a, g) \in A \times G$  para los que existe un entero  $m$  con  $ma = 0 = mg$ , sujetos a ciertas relaciones adicionales.

Otra pregunta clásica en Álgebra Homológica es la de si se puede determinar la homología del producto cartesiano de dos espacios conocidas las homologías de los factores. En este sentido, resulta fundamental el uso del *Teorema de Eilenberg-Zilber* [66, 63, 1], que conecta el producto cartesiano de complejos con su producto tensorial. Con esta relación en mente, el *Teorema de Künneth* [111, 126] da una solución:

$$0 \rightarrow \sum_{p+q=n} H_p(K) \otimes H_q(L) \rightarrow H_n(K \otimes L) \rightarrow \sum_{p+q=n-1} \text{Tor}_1(H_p(K), H_q(L)) \rightarrow 0,$$

en la que  $\text{Tor}_1$  desempeña un papel fundamental.

Consideremos ahora de nuevo una sucesión exacta de la forma

$$E : 0 \rightarrow C \rightarrow B \rightarrow A \rightarrow 0,$$

de modo que la sucesión

$$E : 0 \rightarrow C \otimes G \rightarrow B \otimes G \rightarrow A \otimes G \rightarrow 0,$$

resulta ser exacta, salvo posiblemente en el extremo  $C \otimes G$ .

Resulta que el funtor  $\text{Tor}_1$  permite recuperar la exactitud, a través de la aplicación  $E_* : \text{Tor}_1(A, G) \rightarrow C \otimes G$  que envía  $\text{Tor}_1(A, G)$  sobre el núcleo de  $C \otimes G \rightarrow B \otimes G$ : la sucesión

$$E : 0 \rightarrow \text{Tor}_1(C, G) \rightarrow \text{Tor}_1(B, G) \rightarrow \text{Tor}_1(A, G) \xrightarrow{E_*} C \otimes G \rightarrow B \otimes G$$

vuelve a ser exacta.

De otro lado, un homomorfismo  $C \rightarrow G$  no tiene por qué poder ser extensible a un homomorfismo  $B \rightarrow G$ , de modo que la sucesión

$$0 \rightarrow \text{Hom}(A, G) \rightarrow \text{Hom}(B, G) \rightarrow \text{Hom}(C, G) \rightarrow 0$$

puede no ser exacta en el extremo  $\text{Hom}(A, G)$ . La existencia de un homomorfismo  $E^*$  que conecta  $\text{Hom}(C, G)$  con  $\text{Ext}^1(A, G)$  permite obtener la sucesión

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow \text{Hom}(A, G) \rightarrow \text{Hom}(B, G) \rightarrow \text{Hom}(C, G) \xrightarrow{E^*} \\ \xrightarrow{E^*} \text{Ext}^1(A, G) \rightarrow \text{Ext}^1(B, G) \rightarrow \text{Ext}^1(C, G) \rightarrow 0, \end{aligned}$$

que sí es exacta.

El homomorfismo  $E^*$  funciona así: a cada  $\alpha : A \rightarrow G$ , se le hace corresponder la extensión  $\alpha E : 0 \rightarrow G \rightarrow (G \oplus B) / \langle (\alpha(a), a) \rangle \rightarrow C \rightarrow 0$ .

Es más, para cada extensión  $0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow B/A \rightarrow 0$ , un homomorfismo  $\alpha : A \rightarrow G$  puede llegar a extenderse a un homomorfismo de  $B$  en  $G$  si y sólo si la extensión  $\alpha E$  escinde.

Si ahora reemplazamos grupos abelianos por módulos sobre un anillo conmutativo  $\Lambda$ ,  $\text{Ext}^1(C, G)$  queda definido de igual modo como un  $\Lambda$ -módulo, aunque la sucesión precedente no tiene asegurada la exactitud en el término  $\text{Ext}^1(C, G)$ . En cualquier caso, quedan definidos nuevos funtores  $\text{Ext}^n(C, G)$  que van midiendo esta falta de exactitud, de modo que la sucesión

$$\cdots \rightarrow \text{Ext}^n(A, G) \rightarrow \text{Ext}^n(B, G) \rightarrow \text{Ext}^n(C, G) \xrightarrow{E^*} \text{Ext}^{n+1}(A, G) \rightarrow \cdots$$

es exacta.

De hecho, los elementos de  $\text{Ext}^n(A, G)$  son ciertas clases de equivalencia de sucesiones exactas largas del tipo

$$0 \rightarrow G \rightarrow B_{n-1} \rightarrow \cdots \rightarrow B_0 \rightarrow A \rightarrow 0,$$

con  $n$  módulos intermedios entre  $G$  y  $A$ .

En un discurrir análogo, se puede definir los funtores torsión generalizados  $\text{Tor}_n(C, G)$  a partir de ciertos generadores y relaciones; de modo que la sucesión

$$\cdots \rightarrow \text{Tor}_{n+1}(A, G) \xrightarrow{E} \text{Tor}_n(C, G) \rightarrow \text{Tor}_n(B, G) \rightarrow \text{Tor}_n(A, G) \rightarrow \cdots$$

es exacta.

Los funtores  $\text{Ext}^n$  y  $\text{Tor}_n$  se revelaban, pues, como elementos fundamentales en el campo del Álgebra Homológica, intrínsecamente relacionados no sólo con problemas de (co)homología, sino también con cuestiones clásicamente de corte algebraico más puro (sirva de ejemplo que en caso de tomar como  $\Lambda$  un anillo local noetheriano conmutativo de ideal maximal  $\mathfrak{m}$ , la dimensión de Krull de cualquier  $\Lambda$ -módulo  $A$  se reinterpreta como el menor natural  $n$  para el que  $\text{Ext}^n(\Lambda/\mathfrak{m}, A)$  es no nulo [93, 79]). Ahora bien, ¿cómo calcular estos módulos de manera eficiente? La respuesta llevó a la consideración de *módulos proyectivos y resoluciones*.

Un módulo proyectivo es aquel módulo  $P$  para el que cualquier homomorfismo  $P \rightarrow B/C$  admite una elevación  $P \rightarrow B$ . Atendiendo a la propiedad universal que caracteriza a los módulos libres, es claro que cualquier módulo libre es asimismo proyectivo; de donde cualquier módulo se puede considerar como cociente de un módulo proyectivo.

Dado un módulo  $A$ , tomemos su descomposición como cociente de un módulo proyectivo  $P_0$  en la forma

$$P_0 \rightarrow A \rightarrow 0$$

de sucesión exacta. El módulo que conforma el núcleo de  $P_0 \rightarrow A$  de nuevo admite una representación como cociente de un cierto módulo proyectivo  $P_1$ , proceso que iterado de forma indefinida desemboca en la aparición de una resolución proyectiva de  $A$ ,

$$\cdots P_2 \rightarrow P_1 \rightarrow P_0 \rightarrow A \rightarrow 0,$$



sucesión por construcción exacta.

Por medio del *teorema de comparación* [126], se comprobó que dos resoluciones proyectivas  $P$  y  $P'$  de  $A$  eran básicamente indistinguibles, en el sentido siguiente.

Dadas dos resoluciones proyectivas de  $A$ ,

$$\begin{array}{ccccccccc} \dots & \rightarrow & P_2 & \rightarrow & P_1 & \xrightarrow{\partial} & P_0 & \rightarrow & A & \rightarrow & 0 \\ & & \uparrow\downarrow & & f_1' \uparrow\downarrow f_1 & & f_0' \uparrow\downarrow f_0 & & \parallel & & \\ \dots & \rightarrow & P_2' & \rightarrow & P_1' & \xrightarrow{\partial'} & P_0' & \rightarrow & A & \rightarrow & 0 \end{array}$$

por construcción de los  $P_i$  y  $P_i'$  y definición de módulo proyectivo, existe una familia de aplicaciones  $f_i = P_i \rightarrow P_i'$  y  $f_i' : P_i' \rightarrow P_i$  de modo que  $\partial' f_{i+1} = f_i \partial$  y  $\partial f_{i+1}' = f_i' \partial'$ ; es más, las composiciones  $f f'$  y  $f' f$  resultan ser *homotópicas* a la identidad:  $1 - f f' = \phi \partial' + \partial' \phi$  y  $1 - f' f = \varphi \partial + \partial \varphi$ , para ciertos morfismos de módulos  $\phi$  y  $\varphi$ .

De este modo, dos tales resoluciones inducen módulos  $H_n(P \otimes G)$  y  $H_n(P' \otimes G)$  isomorfos, de donde  $H_n(P \otimes G)$  no depende de la elección de la resolución  $P$ , sino tan sólo de  $A$  y  $G$  mismos.

Lo destacable es que se comprobó que  $H_n(P \otimes G)$  resultaba ser el propio  $\text{Tor}_n(A, G)$ . De forma análoga, también se concluyó que  $\text{Ext}^n(A, G)$  coincidía con  $H^n(P, G)$ . Luego el cálculo de  $\text{Tor}$  y  $\text{Ext}$  venía intrínsecamente ligado al cálculo de la homología y cohomología, vía resoluciones.

Otra fuente de inagotable valor en el comienzo del Álgebra Homológica fue el *método de los modelos acíclicos* [62, 84], que en función de módulos acíclicos (de homología nula, salvo en grado cero, que coincide con el anillo base), permite establecer en determinadas circunstancias equivalencias de homotopía (en el sentido anteriormente expuesto en el caso del teorema de comparación de resoluciones). En particular, la primera prueba del ya citado Teorema de Eilenberg-Zilber se elaboró mediante esta técnica [66, 63].

Pero una vez que las bases del Álgebra Homológica estaban sentadas, con los elementos y procedimientos indispensables definidos, el objetivo primordial se tornó en alcanzar cálculos concretos. Lamentablemente, la teoría de los modelos acíclicos se presentaba como una utilísima herramienta en la resolución teórica de problemas de existencia, pero no revertía de igual modo en la determinación explícita de las construcciones en cuestión. Con este propósito, Leray concibió, estando preso en un

campo de concentración en la Segunda Guerra Mundial, la idea de tratar el problema desde la perspectiva de *sucesiones espectrales* [122], que permitieran alcanzar los cálculos de forma progresiva, grado a grado. La cristalización algebraica de esta idea fue establecida por Koszul y Cartan en los años siguientes [108, 39], y Massey llevó a cabo un desarrollo equivalente en términos de *pares exactos* [128].

Una sucesión espectral de homología en una categoría dada con comienzo en  $E^a$  (generalmente,  $a = 2$ ), consiste en una colección de objetos bigraduados en los enteros,  $\{E_{p,q}^r\}$ , para  $r \geq a$  y “diferenciales”  $d_{p,q}^r : E_{p,q}^r \rightarrow E_{p-r,q+r-1}^r$  (en el sentido de que  $d^r d^r = 0$ ), de modo que

$$E_{p,q}^{r+1} \cong H_{p,q}(E_{p,q}^r) = \text{Ker}(d_{p,q}^r) / \text{Im}(d_{p+r,q-r+1}^r).$$

El grado total del término  $E_{p,q}^r$  es  $n = p + q$ .

De forma análoga se puede definir una sucesión espectral de cohomología.

Una tal sucesión se dice acotada cuando para cada  $n$  existe sólo un número finito de términos no nulos de grado  $n$ , de modo que para cada par de enteros  $p$  y  $q$  a partir de un  $r_0$  en adelante es  $E_{p,q}^{r+1} = E_{p,q}^r$  para todo  $r \geq r_0$ . En este caso, el valor estable  $E_{p,q}^r$  se denota como  $E_{p,q}^\infty$ .

Una sucesión espectral se dice que converge a  $H_*$  cuando existe una filtración finita

$$0 = F_s H_n \subseteq \cdots \subseteq F_{p-1} H_n \subseteq F_p H_n \subseteq \cdots \subseteq F_t H_n = H_n$$

para cada objeto  $H_n$  de modo que  $E_{p,q}^\infty \cong F_p H_{p+q} / F_{p-1} H_{p+q}$ . En este caso, se suele denotar  $E_{p,q}^a \Rightarrow H_{p+q}$ .

Por ejemplo, esta situación se alcanza tomando como partida un complejo  $C$  y una filtración finita de cada módulo  $C_n$ . En este caso,  $E_{p,q}^1 \Rightarrow H_{p+q}(C)$ .

En particular, las sucesiones espectrales proveen una generalización de la fórmula de Künneth [126]: dados  $K$  y  $L$  complejos positivos de  $\Lambda$ -módulos a derecha e izquierda, respectivamente, con  $H(\text{Tot}[\text{Tor}_m(K, L)]) = 0$  para  $m > 0$  (condición que se verifica en el caso de ser  $K$  plano), entonces existe una sucesión espectral  $\{E_{p,q}^r, d_r\}$  con

$$E_{p,q}^2 = \sum_{s+t=q} \text{Tor}_p(H_s(K), H_t(L)), \quad E_{p,q}^r \xrightarrow{R} H(K \otimes L).$$



Este mismo cuadro se puede aplicar en muchos casos para determinar la (co)homología de algunos objetos, como la homología de espacios fibrados (sucesiones espectrales de Leray-Serre [122, 151] y Eilenberg-Moore [64, 65, 144]), la cohomología de  $G$ -módulos para  $G$  grupo de subgrupo normal conocido (sucesiones espectrales de Lyndon [124], Hochschild-Serre [150, 94]), etc.

Las sucesiones espectrales de Leray-Serre se utilizan para determinar la (co)homología del espacio total de una fibración a partir de las (co)homologías de la base y fibra; de modo que si  $F \hookrightarrow E \xrightarrow{\pi} B$  es una fibración con  $B$  conexo por caminos, existe una sucesión espectral  $\{E_r^{*,*}, d_r\}$  con

$$E_2^{p,q} \cong H^p(B; H^q(F; R)),$$

convergente a  $H^*(E; R)$  como álgebra, con  $R$  anillo conmutativo con unidad. Un resultado análogo se tiene en homología.

Las sucesiones espectrales de Eilenberg-Moore abordan este problema desde la perspectiva de determinar la cohomología de la fibra (resp., base) en función de las cohomologías del espacio total y la base (resp., fibra); de modo que si  $\pi : E \rightarrow B$  es una fibración y  $f : X \rightarrow B$  una función continua, entonces existe una sucesión espectral  $\{E_r^{*,*}, d_r\}$  con

$$E_2^{*,*} \cong \text{Tor}_{H^*(B;R)}^{*,*}(H^*(X; R), H^*(E; R)),$$

que converge a  $H^*(E_f; R)$  bajo condiciones adecuadas, donde  $E_f$  es el espacio total de la fibración que resulta de realizar el “pullback” de  $\pi$  sobre  $f$ .

Supongamos ahora que el punto de partida es una sucesión exacta corta de grupos,

$$1 \rightarrow N \rightarrow G \rightarrow Q \rightarrow 1,$$

y  $A$  un  $G$ -módulo. En la línea de las sucesiones espectrales anteriores, sería interesante determinar si es posible relacionar la cohomología de  $G$  con las cohomologías de  $N$  y  $Q$ . La respuesta viene de la mano de las sucesiones espectrales  $\{E_r^{*,*}, d_r\}$  de Lyndon-Hochschild-Serre, de modo que

$$E_2^{p,q} \cong H^p(Q; H^q(N, A)).$$

Y así podríamos seguir describiendo sucesiones espectrales apropiadas para diversos problemas en (co)homología. John McCleary mismo intuye en la introducción de

[131] la existencia de una maquinaria particularizada para cualquier objeto graduado  $H^*$  dado, en el sentido del “teorema” siguiente: *existe una sucesión espectral con  $E_2^{*,*}$  isomorfo a “algo computable” y convergiendo a  $H^*$ , lo que es deseable*. La consideración de sucesiones espectrales permitió, de hecho, esquivar en lo posible la enorme dificultad en los cálculos explícitos en el ámbito general del Álgebra Homológica hasta nuestros días.

En el camino, se comprobó la necesidad de considerar la mayor cantidad de información posible a la hora de efectuar cálculos concretos, lo que se traducía en la necesidad de enriquecer en lo posible las estructuras de los objetos de partida. Se hizo hincapié, de este modo, en el estudio de estructuras algebraicas más completas que los “simples” módulos, grupos o espacios topológicos; como las (co)álgebras, álgebras de Hopf o  $H$ -espacios. Esto implicó un esfuerzo adicional para adaptar a estas categorías la maquinaria de cálculo existente, y sucesiones espectrales convenientes fueron apareciendo a tal efecto.

Es conveniente que analicemos más detenidamente la cuestión de los  $H$ -espacios, que no son más que espacios topológicos  $X$  dotados de una aplicación producto  $\mu$ , continua, y un punto señalado que ejerce la función de unidad bilateral.

Resulta que el producto  $\mu$  en  $X$  no tiene por qué ser asociativo. Más aún, la asociatividad de  $\mu$  no conforma un invariante por homotopía. Sí lo sería la asociatividad homotópica de  $\mu$ , en el sentido de que las aplicaciones  $\mu(1 \times \mu)$  y  $\mu(\mu \times 1)$  fueran homotópicas.

Sin embargo, en ocasiones este concepto no resultaba ser suficientemente fino, y surgía la necesidad de definir un concepto de asociatividad más apropiado. La respuesta la dio Stasheff [157, 158] con la introducción de lo que se dio en llamar  $A_\infty$ -estructuras, que daban lugar a una *asociatividad fuertemente homotópica*: no bastaba que las aplicaciones anteriores fueran homotópicas, sino que los productos de más de tres factores también habrían de verificar ciertas relaciones de asociatividad homotópica, que Stasheff abstrajo en forma de poliedros.

El concepto de  $A_\infty$ -estructura traspasó hasta el campo de módulos y álgebras, y facilitó el cubrir ciertas fallas históricas en Álgebra Homológica; como, por ejemplo, el hecho de que la diferencial del modelo que diseñara Hirsch para el complejo de

cocadenas de ciertos espacios fibrados,

$$(C^*(B) \otimes H^*(F), D), \quad D = d \otimes 1 + 1 \otimes d + \text{términos de orden superior},$$

pareciese no ser derivación para ningún producto: con la determinación de una  $A_\infty$ -estructura subyacente en el modelo de Hirsch, la diferencial  $D$  se torna derivación [85].

También en este periodo, comprendido entre finales de los años 60, 70 e incluso inicios de los 80, se desarrolló la teoría conocida como *homotopía racional* [137, 138, 161, 162, 163], que, trabajando genéricamente con coeficientes en el cuerpo de los números racionales, procuraba el encontrar “módulo torsión” (i.e., conservando la información sin torsión) objetos algebraicos con invariantes de calculabilidad “factible” (llamados *modelos* [29, 88, 89, 90]), topológicamente equivalentes a espacios topológicos de homotopía y/o (co)homología desconocida y de determinación en apariencia complicada. Se trataba de una consolidación del espíritu subyacente en la teoría de los modulos acíclicos. La aportación fundamental de esta teoría, a nuestro entender, va más allá de los modelos concretos que haya podido establecer según la categoría considerada, sino en el propio hecho de buscar objetos algebraicos que simplifiquen el cálculo de invariantes en espacios más complejos.

Los padres de la homotopía racional son Quillen y Sullivan, a finales de los 60 y principios de los 70, quienes establecieron, respectivamente, equivalencias entre las categorías homotópicas de espacios racionales simplemente conexos y la de cadenas de álgebras de Lie, el primero; y una correspondencia entre los tipos de homotopía racional de espacios simplemente conexos y unas ciertas cocadenas de álgebras conmutativas libres, el segundo.

A partir de entonces se han sucedido aportaciones continuas, de la mano de diversos matemáticos; citemos aquí a Halperin [88, 89, 90], Félix [67, 68], Lehmann [119], Lemaire y Sigrist [120, 121], Thomas [69],...

Desde finales de la década de los ochenta va tomando cuerpo una alternativa, a principios teórica, y actualmente de comprobada solvencia computacional, para atacar el problema del cálculo en Álgebra Homológica: la *Teoría de Perturbación Homológica* [152, 34, 85, 81, 98, 82, 148, 141].

Fueron fundamentalmente Gugenheim, Lambe y Stasheff quienes, formalizando trabajos ya clásicos de W. Shih [152] y R. Brown [34], sentaron las bases de la Teoría

de Perturbación Homológica tal como la conocemos hoy [81, 82].

En sus comienzos, se restringió su aplicación como una mera herramienta de demostración de teoremas de existencia, al estilo del método de los modelos acíclicos. Incluso, el proceso utilizaba también equivalencias de homotopía particulares (*contracciones*), aquellas en las que la composición de los morfismos en un sentido fijo coincidía con la aplicación identidad.

De hecho, la idea que subyace en esta teoría es, partiendo de una contracción entre módulos diferenciales graduados, modificar convenientemente la estructura diferencial de uno de ellos, de modo que se obtenga una nueva contracción entre los módulos graduados iniciales, dotados de estructuras diferenciales “perturbadas”. El *Lema Básico de Perturbación* [152, 85, 81] garantiza que bajo ciertas hipótesis de nilpotencia en la “perturbación” de la estructura diferencial del módulo de partida, el proceso de generar la nueva contracción es viable, finito y algorítmico, con salida fórmulas explícitas para los morfismos componentes de tal contracción.

Esta técnica permitió reenunciar los teoremas de E. Brown [33] y Eilenberg-Zilber torcido [63] en función de perturbaciones de las estructuras diferenciales [1], redescubrir las  $A_\infty$ -estructuras como procesos de perturbación de módulos tensoriales [85, 82], interpretar estos procesos como construcciones de  $A_\infty$ -cocadenas (cocadenas de propiedades extrapoladas de las cocadenas de Brown), etc.

Pero, además, en un paso posterior, se concibió el Lema Básico de Perturbación no sólo ya como un teorema de punto fijo de utilidad meramente teórica [27], sino que también se apreció las fórmulas que ofrecía como salida para la determinación de cálculos explícitos en Álgebra Homológica [148, 149]: estudio de la (co)homología de grupos nilpotentes libres de torsión [117, 112, 113, 98], grupos metacíclicos [101], extensiones centrales de grupos [117, 143], homologías de Hochschild y cíclica de álgebras conmutativas diferenciales graduadas [14, 155], homología de fibrados [9, 21], operaciones cohomológicas [77, 76],...

Más aún, en la línea iniciada por la teoría de homotopía racional, esta vez trabajando sobre cualquier anillo de coeficientes, el objetivo perseguido es la determinación de objetos homológicamente equivalentes (vía contracciones) a los dados, pero cuyo cálculo (co)homológico es sensiblemente menos complejo. Se habla entonces de *modelos homológicos* [29, 22].

En este sentido, son varios los programas que intentan formalizar una plataforma informática básica para el cálculo en Álgebra Homológica (Axiom [113, 116], GAP, MAGMA [31, 38], Kenzo, etc.), de los cuales Kenzo proviene directamente de la Teoría de Perturbación Homológica. Este programa surgió de la colaboración Sergeraert-Rubio [148, 144, 149] a finales de los 80 y principio de los 90, y tiene como piezas claves la codificación explícita del operador de homotopía SHI de la contracción clásica Eilenberg-Zilber y las cocadenas de torsión asociadas en el sentido de Brown (cocadena de Sczarba [165], del propio Shih [152], etc.); y la reutilización continua de los datos que genera como salida, por medio de una conveniente programación funcional que explota las propiedades del lenguaje Lisp, particularmente versátil en el tratamiento de listas.

Del mismo modo que ocurriera en las etapas previas, también se consideró en la Teoría de Perturbación Homológica el problema del estudio de la preservación de estructuras algebraicas adicionales. De forma independiente, Gugenheim-Lambe-Stasheff [81, 82], de un lado, y Huebschmann-Kadesihvili [102], de otro, concluyeron condiciones a verificar en las contracciones de (co)álgebras para la preservación de dichas estructuras (co)multiplicativas, que resultaron ser excesivamente restrictivas: al igual que ocurriera con la asociatividad estricta en los  $H$ -espacios, estas condiciones no se verificaban con tanta generalidad como hubiera sido deseable.

En 1996, de la mano de Real [141], se consideraron resultados innovadores acerca de la preservación de estructuras algebraicas más débiles, pero a la vez de presencia mucho más frecuente en Álgebra Homológica.

Es desde esta perspectiva en que en este trabajo nos planteamos el estudio de tres elementos clásicos en Álgebra Homológica: resoluciones, homología de álgebras conmutativas y homología de ciertos productos semidirectos de grupos.

Organizamos la memoria en cinco capítulos bien diferenciados.

El primero es un compendio de todos los conceptos de Álgebra Homológica que se utilizarán posteriormente, en lo que concierne a la parte clásica (complejos y conjuntos simpliciales, módulos y (co)álgebras diferenciales graduados,  $A_\infty$ -estructuras, etc.), y la incipiente Teoría de Perturbación Homológica. Intentamos respetar en la exposición, en la medida de lo posible, la evolución histórica que hemos advertido en esta introducción, interpretando a veces conceptos ya tratados desde diferentes

puntos de vista. El motivo de incorporar un capítulo de preliminares tan extenso, en lugar de circunscribir estas nociones previas al inicio de los correspondientes capítulos principales, se debe al hecho de que se interrelacionan unas con otras de tal forma que se hace prácticamente inviable el considerarlas divididas en partes distinguidas.

En el segundo capítulo clarificamos el contexto de las *resoluciones que escinden de la resolución bar* [113, 114, 115, 16], aquellas que admiten una contracción de comparación con la resolución bar.

Más concretamente, primero estudiamos propiedades multiplicativas subyacentes en la *contracción de comparación canónica* [114, 115] entre una resolución que escinde de la resolución bar y la propia resolución bar; desde el novedoso punto de vista de la Teoría de Perturbación Homológica que Real proporciona en [141] con la distinción de tipos de contracciones de álgebras, según el grado de compatibilidad con las estructuras multiplicativas que en ellas intervienen. Concluimos que una tal contracción de comparación canónica es, en general, una contracción de álgebras *casicompleta* (Teorema 2.3.2).

Por otro lado, para aquellas resoluciones que escinden de la resolución bar (según una contracción de comparación), detectamos una  $A_\infty$ -estructura inherente (Teorema 2.4.3), naturalmente heredada de la estructura de coálgebra de la construcción bar. En este proceso, será necesario demostrar ciertas propiedades de compatibilidad entre una resolución que escinde de la resolución bar y sus complejos reducidos asociados (teoremas 2.4.1 y 2.4.2), y un resultado más general que comprende la transferencia de la estructura de coálgebra en un producto tensorial torcido, a partir de una contracción y bajo ciertas hipótesis adicionales, en la estructura de una  $A_\infty$ -coálgebra y un  $A_\infty$ -producto tensorial en el DG-módulo de llegada de la contracción (Teorema 2.4.4).

Además, estudiamos el problema general de la comparación de resoluciones contráctiles al anillo base, de modo que aunque no siempre es posible la determinación de una contracción de comparación con la resolución bar (Teorema 2.5.8); demostraremos que en cualquier caso siempre existe un sombrero de contracciones de comparación para estas resoluciones (Teorema 2.5.4), que extiende de manera natural a la contracción de comparación canónica (Teorema 2.5.5).

En conclusión, deducimos que en el manejo de resoluciones que escinden de la





resolución bar es equivalente trabajar a nivel de resoluciones o a nivel de contracciones entre los complejos reducidos asociados (Teorema 2.5.9). En el resto de la memoria se optará por esta segunda forma de trabajar.

Dedicamos el tercero de los capítulos a la mejora sustancial de un algoritmo de cálculo de la homología de álgebras conmutativas diferenciales graduadas (Teorema 3.2.5), que ya se diera en [14, 7, 155]. Fundamentalmente, enunciamos la *teoría de inversiones* (Definición 3.3.1, Lema 3.3.2), con germen en el trabajo de Real en [141], que permite rebajar de una manera radical la complejidad del algoritmo inicial (Teorema 3.3.3); la tabla comparativa que incluimos en este apartado da muestra del ostensible grado de simplificación logrado en la nueva fórmula (Teorema 2.9) para la diferencial del modelo propio del Teorema 3.2.5. Esto nos ha permitido elaborar un programa en MATHEMATICA para el cálculo concreto de la homología de estas álgebras, presentado ya en [5], que mejora en mucho los ataques de los proyectos [23, 132, 70]. Este trabajo concerniente a la teoría de inversiones ha sido presentado ya en distintos foros [42, 43, 44].

Asimismo, concluimos un resultado acerca de resoluciones que escinden de la resolución bar [16] para estas álgebras tan particulares (Teorema 3.4.8), y atacamos la  $n$ -homología entera de álgebras conmutativas (Proposición 3.4.7) a partir de la factorización que da el Corolario 3.1.3 de un álgebra de potencias divididas como producto tensorial torcido de álgebras exteriores y polinomiales (que no es más que un caso particular del esquema que se propone en el Teorema 3.1.1) y del trabajo análogo realizado por nuestra compañera Silva en el caso de trabajar con coeficientes en  $\mathbb{Z}_{(p)}$  [155].

El siguiente capítulo trata el problema de la homología de grupos, y más concretamente, el de productos semidirectos de ciertos grupos. Inspirados en el trabajo de Lambe y Stasheff acerca de la homología de extensiones centrales de grupos [117], progresamos sobre los trabajos [10, 14, 11, 12, 21, 2] acerca de la existencia de un modelo para productos semidirectos de grupos abelianos finitos con acción de grupos (Teorema 4.2.4), y lo extendemos en caso de considerar grupos abelianos no necesariamente finitos (Teorema 4.2.6). Para ello, será fundamental utilizar las herramientas desarrolladas en el capítulo 2 para obtener, a partir de una resolución de  $\mathbb{Z}$  sobre  $\mathbb{Z}[\mathbb{Z}]$ , otra resolución con unas propiedades muy particulares (Proposición 4.2.5). Además, utilizando argumentos similares a los de la teoría de inversiones, damos una versión simplificada para la fórmula explícita de la diferencial de los modelos

obtenidos (Teorema 4.2.7).

Incluimos también un apartado acerca de resoluciones que escinden de la resolución bar de estos productos semidirectos (Teorema 4.3.1), fundamentándonos en los teoremas 2.4.4 y 2.4.3 del capítulo segundo.

En lo referente a las aplicaciones, extrapolamos la labor realizada por de Launey y Horadam, en relación con la generación de bases de matrices cocíclicas de Hadamard con soporte un grupo [52, 53], al caso de estos productos semidirectos de grupos. Estableceremos aquí, al amparo de la Teoría de Perturbación Homológica, un método genérico para la construcción de matrices cocíclicas sobre grupos con modelos homológicos conocidos (Teorema 4.4.14, Algoritmo 4.4.15). Este trabajo tiene aceptada su publicación en la forma [4]. También hablaremos del paso a matrices de Hadamard y códigos binarios no lineales correctores de errores [13, 3] óptimos según las cotas de Plotkin.

En el quinto y último capítulo, en forma de apéndice, explicamos cómo se ha llevado a cabo la parte de programación de los algoritmos descritos en la memoria, y comentamos aquellas rutinas que nos parecen más relevantes. Por este orden, abordamos primero el programa que calcula la homología a partir de la forma normal de Smith de las matrices asociadas a la diferencial; después, el programa que calcula el modelo de una álgebra conmutativa diferencial graduada [5, 43]; y, para finalizar, aquel que determina la homología de los productos semidirectos de grupos tratados en el capítulo cuatro [6]. Este último se podría enriquecer diseñando un programa que generase matrices cocíclicas y matrices cocíclicas de Hadamard, amén de los códigos correctores de errores óptimos asociados, a los productos semidirectos tratados en el capítulo cuarto. Nosotros nos hemos limitado a realizar estos cálculos sobre grupos concretos, que detallamos al término de dicho capítulo.

# Contenido

<b>1</b>	<b>Fundamentos en Álgebra Homológica.</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Resoluciones.</b>	<b>37</b>
2.1	Introducción. . . . .	39
2.2	Resoluciones que escinden de la resolución bar. . . . .	44
2.3	Análisis multiplicativo en la comparación de resoluciones. . . . .	49
2.4	Análisis de la diferencial en la comparación de resoluciones. . . . .	55
2.4.1	De resoluciones a complejos reducidos. . . . .	56
2.4.2	De complejos reducidos a resoluciones. . . . .	57
2.4.3	$A_\infty$ -estructuras y productos tensoriales torcidos. . . . .	61
2.5	“Sombreros” de comparación de resoluciones. . . . .	73
2.5.1	Comparación de resoluciones vía “mapping cylinder”. . . . .	73
2.5.2	Sombrero de comparación y estructuras multiplicativas. . . . .	75
2.5.3	Resoluciones <i>versus</i> complejos reducidos (I). . . . .	85
2.6	Cuestiones relacionadas. . . . .	86
2.6.1	Sobre el carácter contráctil de $X$ . . . . .	86

2.6.2	Acerca del Teorema 2.3.2. . . . .	88
2.6.3	Variantes del Teorema 2.4.4. . . . .	89
2.6.4	Generadores de $\bar{B}(A)$ como álgebra. . . . .	95
2.7	Comentarios generales. . . . .	97
2.8	Resoluciones <i>versus</i> complejos reducidos (II). . . . .	98
<b>3</b>	<b>Homología de CDGAC-álgebras.</b>	<b>109</b>
3.1	Modelos para CDGAC-álgebras. . . . .	112
3.2	Homología de CDGAC-álgebras. . . . .	116
3.3	Teoría de inversiones. . . . .	122
3.3.1	Teoría general de inversiones. . . . .	123
3.3.2	Teoría de inversiones <i>versus</i> 1-homología de CDGAC-álgebras. . . . .	128
3.3.3	Programación y ejemplos. . . . .	131
3.4	Cuestiones relacionadas. . . . .	133
3.4.1	Paso a $n$ -homología. . . . .	134
3.4.2	Paso a resoluciones. . . . .	140
3.4.3	Comentarios generales. . . . .	141
<b>4</b>	<b>Homología de productos semidirectos de grupos.</b>	<b>145</b>
4.1	Introducción. . . . .	147
4.2	Modelos homológicos para $A \times_{\chi} G$ . . . . .	152
4.3	Resoluciones para $A \times_{\chi} G$ . . . . .	165

4.4	Aplicación: generación de matrices cocíclicas y de Hadamard. . . . .	170
4.4.1	Generalidades. . . . .	170
4.4.2	Un algoritmo de generación de matrices cocíclicas de Hadamard.	178
4.4.3	Matrices cocíclicas sobre $A \times_{\chi} G$ . . . . .	192
4.4.4	Un ejemplo: grupos dihédricos $D_{2t,2}$ . . . . .	196
<b>A</b>	<b>Programación.</b>	<b>201</b>
A.1	Cálculo explícito de la homología entera. . . . .	204
A.2	Homología de CDGAC-álgebras de tipo finito. . . . .	206
A.3	Homología de productos semidirectos. . . . .	222



**Capítulo 1.**  
**Fundamentos en Álgebra**  
**Homológica.**

# Capítulo 1.

## Fundamentos en Álgebra Homológica.

A lo largo de este apartado vamos a recopilar definiciones y resultados propios del Álgebra Homológica.

Trataremos de organizar una exposición de los contenidos del capítulo, en la medida de lo posible, paralela a la evolución histórica de esta materia.

Textos básicos de referencia para los primeros resultados, propios del Álgebra Homológica clásica, son los fundacionales [41] y [126], y el más moderno [174].

En la teoría de módulos es indispensable fijar un anillo base. En el desarrollo de esta memoria tomaremos como anillo base a uno conmutativo con elemento unidad no nulo, que notaremos por  $\Lambda$ . En la práctica, este anillo será casi siempre  $\mathbb{Z}$ , salvo que se precise explícitamente de otro modo.

Antes de comenzar es necesario que fijemos ciertas notaciones, que serán utilizadas a lo largo de todo el trabajo.

El morfismo identidad de un módulo  $M$  lo denotamos simplemente por  $1$ , a no ser que una posible confusión nos obligue a tomar la más engorrosa elección de  $1_M$ .

También con vistas a aligerar la notación, si  $f$  y  $g$  son dos morfismos que admiten ser compuestos, tal composición la denotamos como  $fg$ .

Asimismo, si  $f : M \rightarrow M$  es un morfismo de módulos y  $n$  un entero positivo, la composición  $f \cdot \overset{n}{\dots} \cdot f$  se denota por  $f^n$ .

Un *álgebra*  $A$  es un módulo dotado de un producto asociativo  $\mu : A \otimes A \rightarrow A$  con unidad bilateral  $\eta : \Lambda \rightarrow A$ , que se conoce como *coaumentación*.

Análogamente, una *coálgebra*  $C$  es un módulo dotado de un coproducto asociativo  $\Delta : C \rightarrow C \otimes C$  con counidad bilateral  $\xi : C \rightarrow \Lambda$ , que también se llama *augmentación*.

Un *módulo graduado* es un módulo  $M$  que admite una representación como suma directa, con índices en los enteros, de una familia de submódulos suyos,  $\{M_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ ; esto es:

$$\bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} M_n = M.$$

En general, salvo que se exprese lo contrario, entenderemos que tal graduación se hace sobre los enteros no negativos.

Para denotar que  $M$  es un módulo graduado seguiremos una notación que haga referencia a la familia de submódulos que lo caracterizan:  $M = \{M_n\}_{n \geq 0}$ .

Un elemento  $x$  de  $M$  se dice *homogéneo de grado  $n$*  cuando  $x \in M_n$ ; en tal caso, escribiremos  $|x| = n$ .

Es obvio que el anillo  $\Lambda$  constituye, en sí mismo, un módulo graduado, siendo  $\Lambda = \{\Lambda_n\}_{n \geq 0}$ , con  $\Lambda_0 = \Lambda$  y  $\Lambda_n = 0$  para  $n > 0$ .

Un *morfismo de módulos graduados* de grado  $p$  es un morfismo  $f : M \rightarrow N$  entre módulos graduados de modo que  $f(M_n) \subseteq N_{n+p}$ , para  $n \geq 0$ . Se denota como  $|f| = p$ .

Un módulo graduado  $M$  se dice *conexo* cuando  $M_0 = \Lambda$ ; se dice *simplemente conexo* cuando es conexo y  $M_1 = 0$ .

Dado un módulo graduado conexo, podemos definir el módulo graduado  $\bar{M}$ , con  $\bar{M}_n = M_n$  para  $n > 1$  y  $\bar{M}_0 = 0$ .

Además, dado  $f : M \rightarrow N$  morfismo de módulos graduados conexos, se tiene un morfismo  $\bar{f} : \bar{M} \rightarrow \bar{N}$  naturalmente asociado a  $f$ , según la relación  $\bar{f}(a) = f(a)$ .

Dados  $M$  y  $N$  módulos graduados,  $M \otimes N$  adquiere la estructura de módulo graduado con

$$(M \otimes N)_n = \bigoplus_{p+q=n} (M_p \otimes N_q).$$

Claramente, se tienen las identificaciones canónicas siguientes:

$$M \otimes \Lambda \cong M, \quad \text{y} \quad \Lambda \otimes M \cong M.$$



A lo largo de esta memoria, adoptaremos la *convención de Koszul* que define el producto tensorial de dos morfismos de módulos graduados de la forma natural, salvo un signo a determinar. Más concretamente, si  $f : M \rightarrow M'$  y  $g : N \rightarrow N'$  son dos morfismos de módulos graduados, su producto

$$f \otimes g : M \otimes N \longrightarrow M' \otimes N'$$

satisface

$$(f \otimes g)(x \otimes y) = (-1)^{|g||x|} f(x) \otimes g(y).$$

En particular, se tiene que

$$(f \otimes g)(h \otimes k) = (-1)^{|g||h|} (fh \otimes gk).$$

Por tanto, si uno de los dos morfismos es de grado par, el signo desaparece.

Hagamos aquí un mercedísimo paréntesis. Y es que esta condición, en apariencia intrascendente, es de una importancia capital en Álgebra Homológica. Aunque es posible progresar en esta materia haciendo caso omiso de esta convención, lo cierto es que los signos que se empiezan a generar se complican lo indecible y levantan una humareda que impide razonar con la necesaria perspectiva.

A lo largo de este trabajo se podrá valorar cuán necesario se hace utilizar esta identidad. De hecho, en la elaboración de la memoria nos encontramos en alguna ocasión con aparentes contradicciones, que provenían de la omisión en algún paso de alguna convención de Koszul.

Además, como observa Prouté en [136], exigir esta condición es bastante natural, teniendo presente que los objetos algebraicos que manejamos admiten la mayor parte de las veces representaciones geométricas asociadas: en este sentido, la noción de grado corresponde a la dimensión, el producto tensorial de módulos al producto cartesiano de espacios topológicos, y el signo de Koszul a la orientación.

Por ejemplo, dados dos espacios vectoriales  $E$  y  $F$  de dimensiones  $p$  y  $q$ , y bases orientadas  $\{e_1, \dots, e_p\}$  y  $\{f_1, \dots, f_q\}$ , respectivamente; los espacios  $E \times F$  y  $F \times E$  están asimismo orientados, y la aplicación canónica

$$T : E \times F \rightarrow F \times E$$

multiplica la orientación precisamente por  $(-1)^{pq}$ , que procede de la permutación que envía la base orientada de  $E \times F$  en la base orientada de  $F \times E$ .



Si se quiere ser coherente con el contexto geométrico, es necesario asumir entonces la convención de Koszul.

En adelante, asumiremos la notación  $f^{\otimes n} : M^{\otimes n} \rightarrow M^{\otimes n}$ , forma abreviada para la aplicación

$$f \otimes \cdots \otimes f : M \otimes \cdots \otimes M \rightarrow M \otimes \cdots \otimes M.$$

Se admite el convenio  $M^{\otimes 0} = \Lambda$ .

Por otro lado, si  $f : M^i \rightarrow M$  es un morfismo de módulos graduados y  $n$  es un entero positivo, notamos por  $f^{[n]}$  al morfismo

$$f^{[n]} = \sum_{j=0}^{n-i} 1^{\otimes j} \otimes f \otimes 1^{\otimes n-i-j}, \quad (1.1)$$

Asimismo, definimos el morfismo  $f^{[]} : \bigoplus_{j \geq i} M^{\otimes j} \rightarrow \bigoplus_{k \geq 1} M^{\otimes k}$  como aquel que en grado  $n$  coincide con  $f^{[n]}$ :

$$f^{[]} |_{M_n} = f^{[n]}. \quad (1.2)$$

Nos introducimos, ahora, en el ámbito del Álgebra Homológica Diferencial.

Sea  $M$  un módulo graduado y  $d : M \rightarrow M$  un morfismo de módulos graduados. Se dice que  $d$  es una *diferencial* (resp., *codiferencial*) cuando  $|d| = -1$  (resp.,  $|d| = +1$ ) y  $dd = 0$ . En estas condiciones,  $M$  se denomina *DG-módulo* (resp., *DG-comódulo*) y se nota por  $(M, d)$ . Escribimos  $d_n$  para  $d|_{M_n}$ .

Es claro que exigir la nilpotencia de orden 2 en la diferencial equivale a exigir que  $\text{Im } d_{n+1} \subset \text{Ker } d_n$  (resp.,  $\text{Im } d_n \subset \text{Ker } d_{n+1}$ ), para  $n \geq 1$ , lo que da pie a definir el concepto de *homología* (resp., *cohomología*).

Sea  $(M, d)$  un DG-módulo. La *homología* de  $M$  queda definida como el módulo graduado  $H_*(M)$ , con  $H_n(M) = \text{Ker } d_n / \text{Im } d_{n+1}$ .

Análogamente se define la *cohomología* de un DG-comódulo.

Sea  $M$  un módulo graduado. Se define la *suspensión* (resp., *desuspensión*) de  $M$  como el módulo graduado dado por:

$$S(M)_n = M_{n-1} \quad (\text{resp., } S^{-1}(M)_n = M_{n+1}).$$

Si  $(M, d)$  es un DG-módulo, entonces  $S(M)$  y  $S^{-1}(M)$  adquieren ambos la estructura de DG-módulos de forma natural, siendo sus diferenciales  $-d$  en ambos casos.

Dado  $f : M \rightarrow N$  morfismo de módulos graduados, existe un morfismo de módulos graduados  $S(f) : S(M) \rightarrow S(N)$ , dado por  $S(f)(a) = (-1)^{|a|} f(a)$ . Análogamente con  $S^{-1}$ .

Se dice que un morfismo  $f : (M, d_M) \rightarrow (N, d_N)$  de módulos graduados de grado  $p$  es un *morfismo de DG-módulos* de grado  $p$  cuando se verifica que  $d_N f = (-1)^p f d_M$ .

Sea  $M$  un DG-módulo. Una *aumentación* (resp., *coaumentación*), es un morfismo de DG-módulos de grado cero:

$$\begin{aligned} \xi_M : M &\longrightarrow \Lambda \\ (\text{resp.}, \eta_M : \Lambda &\longrightarrow M). \end{aligned}$$

En el caso de coálgebras y álgebras, coincidirán con la counidad y unidad, respectivamente, de ahí la notación escogida.

Un *DGA-módulo*  $(M, d, \xi, \eta)$  es un DG-módulo  $(M, d)$  dotado de una aumentación  $\xi$  y de una coaumentación  $\eta$ , de modo que se verifica que  $\xi\eta = 1$ . Se dice *conexo* si como módulo graduado es conexo y su aumentación y coaumentación son ambas la identidad del anillo base  $\Lambda$ .

Con el propósito de facilitar la lectura, con frecuencia nos referiremos a un DGA-módulo simplemente dando su módulo graduado subyacente,  $M$ .

Dados dos DGA-módulos  $M$  y  $N$ , definimos el *DGA-módulo producto tensorial*,  $M \otimes N$ , como el DGA-módulo establecido por los datos:

$$\begin{aligned} d_{M \otimes N} &= d_M \otimes 1_N + 1_M \otimes d_N, \\ \xi_{M \otimes N} &= \xi_M \otimes \xi_N, \\ \eta_{M \otimes N} &= \eta_M \otimes \eta_N. \end{aligned}$$

Observamos que, para  $M = N$ , la convención de Koszul permite escribir la diferencial del producto tensorial como  $d_{M \otimes M} = d_M^{[2]}$ .

Sean  $M$  y  $N$  dos DGA-módulos. Se dice que un morfismo de DG-módulos  $f : M \rightarrow N$  es un *morfismo de DGA-módulos* cuando se verifican las identidades:

$$\xi_N f = \xi_M, \quad f \eta_M = \eta_N.$$

Cabe destacar por su importancia el morfismo de DGA-módulos que intercambia las componentes de un producto tensorial,

$$T : M \otimes N \rightarrow N \otimes M,$$

dado por  $T(x \otimes y) = (-1)^{|x||y|}y \otimes x$ . En particular, dados dos morfismos  $f : M \rightarrow M$  y  $g : N \rightarrow N$  se tiene que

$$T(f \otimes g) = (-1)^{|f||g|}(g \otimes f)T. \quad (1.3)$$

Una *DGA-álgebra*  $(A, \mu)$  (resp., *DGA-coálgebra*  $(C, \Delta)$ ), es un DGA-módulo  $A$  (resp.,  $C$ ), al que  $\mu$  (resp.,  $\Delta$ ) dota de estructura de álgebra (resp., coálgebra).

Se dice que es *conmutativa* cuando  $\mu T = \mu$  (resp., *coconmutativa* cuando  $T\Delta = \Delta$ ).

En alguna ocasión especial, notaremos en esta memoria el producto  $\mu$  de un álgebra como  $*$ , y  $\mu(a \otimes b)$  simplemente por  $*(a \otimes b) = a * b$ .

Sean  $(A, \mu)$  una DGA-álgebra (resp.,  $(C, \Delta)$  una DGA-coálgebra), y  $\delta : A \rightarrow A$  (resp.,  $\delta : C \rightarrow C$ ) un morfismo de módulos graduados de grado  $-1$ . Se dice que el morfismo  $\delta$  es una *derivación* (resp., una *coderivación*), cuando verifica las condiciones siguientes:

$$\delta\mu = \mu(1 \otimes \delta + \delta \otimes 1), \quad \xi\delta = 0 \quad (1.4)$$

$$\text{(resp., } \Delta\delta = (1 \otimes \delta + \delta \otimes 1)\Delta, \quad \xi\delta = 0). \quad (1.5)$$

Consideremos ahora dos DGA-álgebras (resp. DGA-coálgebras) dadas. Se dice que  $f : (A, \mu_A) \rightarrow (A', \mu_{A'})$  constituye un *morfismo de DGA-álgebras* (resp.,  $f : (C, \Delta_C) \rightarrow (C', \Delta_{C'})$  *morfismo de DGA-coálgebras*), cuando se trata de un morfismo de DGA-módulos verificando:

$$\mu_{A'}(f \otimes f) = f\mu_A \quad \text{(resp., } (f \otimes f)\Delta_C = \Delta_{C'}f).$$

Existe una noción que aúna las estructuras de DGA-álgebra y DGA-coálgebra: es la denominada *DGA-álgebra de Hopf*, en la que

$$\Delta\mu = (\mu \otimes \mu)(1 \otimes T \otimes 1)(\Delta \otimes \Delta). \quad (1.6)$$

Sean  $(A, \mu_A)$  y  $(A', \mu_{A'})$  dos DGA-álgebras (resp.,  $(C, \Delta_C)$  y  $(C', \Delta_{C'})$  dos DGA-coálgebras). Queda definida la DGA-álgebra producto tensorial  $A \otimes A'$  (resp., la

DGA-coálgebra producto tensorial  $C \otimes C'$ , añadiendo a la estructura de DGA-módulo del producto tensorial de ambas el morfismo de grado cero siguiente:

$$\begin{aligned} \mu_{A \otimes A'} &= (\mu_A \otimes \mu_{A'})(1_A \otimes T \otimes 1_{A'}) \\ (\text{resp.}, \Delta_{C \otimes C'} &= (1_C \otimes T \otimes 1_{C'})(\Delta_C \otimes \Delta_{C'})). \end{aligned}$$

Veamos un ejemplo concreto: el DGA-módulo tensorial.

Dado un DG-módulo graduado  $(M, d)$  podemos construir el DGA-módulo tensorial de  $M$ , que se nota  $T(M)$ , de la siguiente manera:

$$T(M) = \bigoplus_{n \geq 0} M^{\otimes n}.$$

Un elemento del tipo  $a_1 \otimes \cdots \otimes a_n$  se dice homogéneo cuando cada  $a_i$  es un elemento homogéneo de  $M$ . La *graduación tensorial de  $T(M)$* ,  $| \cdot |_t$ , viene dada por la expresión:

$$|a_1 \otimes \cdots \otimes a_n|_t = \sum_{i=1}^n |a_i|.$$

La *diferencial tensorial*,  $d_t : T(M) \rightarrow T(M)$ , viene dada, actuando sobre elementos homogéneos, por el morfismo  $d^{[1]}$  definido según (1.2) en la página 6, siendo

$$(d_t)_n(a_1 \otimes \cdots \otimes a_n) = \sum_{i=1}^n (-1)^{|a_1| + \cdots + |a_{i-1}|_t} a_1 \otimes \cdots \otimes d(a_i) \otimes \cdots \otimes a_n,$$

siguiendo la convención de Koszul.

La aumentación  $\xi_{T(M)}$  y la coaumentación  $\eta_{T(M)}$  son, respectivamente, la “proyección a” e “inclusión de”  $M^{\otimes 0} = \Lambda$ ; así, abusando del lenguaje, se puede decir que ambos morfismos coinciden con  $1_\Lambda$ .

En estas circunstancias, sobre  $T(M)$  se puede definir un producto  $\mu$  y un coproducto  $\Delta$ , de modo que:

1. El producto de  $T(M)$  actúa por yuxtaposición sobre elementos homogéneos y se extiende por linealidad:

$$\mu((a_1 \otimes \cdots \otimes a_n) \otimes (a_{n+1} \otimes \cdots \otimes a_{n+p})) = a_1 \otimes \cdots \otimes a_{n+p}.$$

2. El coproducto viene dado por la expresión:

$$\Delta(a_1 \otimes \cdots \otimes a_n) = \sum_{i=0}^n (a_1 \otimes \cdots \otimes a_i) \otimes (a_{i+1} \otimes \cdots \otimes a_n).$$

El producto y el coproducto son ambos morfismos de DGA-módulos asociativos y admiten por unidad a  $\eta$  y por counidad a  $\xi$ , respectivamente; por lo que tenemos definidas en  $T(M)$  sendas estructuras de DGA-álgebra y DGA-coálgebra, que no son compatibles en el sentido de Hopf. Por tanto, escribiremos  $T^a(M)$  cuando consideremos el módulo tensorial como DGA-álgebra; y escribiremos  $T^c(M)$  cuando lo consideremos como DGA-coálgebra.

Todo morfismo de DG-módulos  $f : M \rightarrow N$  induce un morfismo de DGA-módulos  $T(f) : T(M) \rightarrow T(N)$ , que actúa sobre elementos homogéneos de la forma obvia:

$$T(f)(a_1 \otimes \cdots \otimes a_n) = f^{\otimes n}(a_1 \otimes \cdots \otimes a_n).$$

Ahora, vamos a introducir un nuevo concepto: *la construcción bar* asociada a una DGA-álgebra dada. Veamos en qué consiste tal construcción.

Dada una DGA-álgebra  $A$ , se puede construir una DGA-coálgebra concreta asociada a  $A$ , denominada *construcción bar* de  $A$  y que notaremos por  $\bar{B}(A)$ .

Esta construcción constituye una de las herramientas algebraicas estándares para definir coherentemente las homologías de álgebras y grupos (ver [126]).

La homología natural de una DGA-álgebra considerada como DG-módulo se llama la *0-homología* de  $A$ , y evidentemente no se sirve de la estructura multiplicativa subyacente. En cambio, el producto de  $A$  intervendrá de forma explícita en la diferencial propia de  $\bar{B}(A)$ ; en este sentido, la *1-homología* de una DGA-álgebra será la homología propia de la construcción bar asociada.

La construcción bar de  $A$ ,  $\bar{B}(A)$ , se define como la DGA-coálgebra que procede del módulo tensorial  $T(S(A)) = \bigoplus_{n \geq 0} (A \otimes \overset{n}{\cdot} \otimes A)$ , dotada de la diferencial  $d_{\bar{B}}$  y aumentación  $\xi_{\bar{B}} : \bar{B}(A) \rightarrow \Lambda$  dada por

$$\xi_{\bar{B}}(\lambda) = \lambda, \quad \lambda \in \Lambda; \quad \xi_{\bar{B}}(u) = 0, \quad |u|_{\bar{B}} > 0. \quad (1.7)$$

Un elemento  $S(a_1) \otimes \overset{n}{\cdot} \otimes S(a_n)$  lo escribiremos de la forma  $[a_1 | \cdots | a_n]$ . Un tal elemento se dice homogéneo cuando  $a_i$  es un elemento homogéneo de  $A$ , para todo

$1 \leq i \leq n$ . Notaremos  $[ ] = 1 \in \Lambda$ . Es obvio que todo elemento de  $T(S(A))$  puede descomponerse como sumas de elementos homogéneos.

La diferencial total  $d_{\bar{B}}$  es suma de las diferenciales simplicial

$$d_s([a_1 | \cdots | a_n]) = \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^{e_i} [a_1 | \cdots | \mu(a_i \otimes a_{i+1}) | \cdots | a_n] + \xi(a_1)[a_2 | \cdots | a_n] + (-1)^{e_n} [a_1 | \cdots | a_{n-1}] \xi(a_n),$$

y tensorial

$$d_t([a_1 | \cdots | a_n]) = - \sum_{i=1}^n (-1)^{e_{i-1}} [a_1 | \cdots | a_{i-1} | d(a_i) | a_{i+1} | \cdots | a_n],$$

donde  $e_i = i + |a_1| + \cdots + |a_i|$ .

El coproducto  $\Delta_{\bar{B}} : \bar{B}(A) \rightarrow \bar{B}(A) \otimes \bar{B}(A)$  es el natural del módulo tensorial, dado por

$$\Delta_{\bar{B}}([a_1 | \cdots | a_n]) = \sum_{i=0}^n [a_1 | \cdots | a_i] \otimes [a_{i+1} | \cdots | a_n].$$

En el caso de que  $A$  sea conmutativa,  $\bar{B}(A)$  adquiere la estructura adicional de DGA-álgebra de Hopf con el *producto shuffle*  $\star : \bar{B}(A) \otimes \bar{B}(A) \rightarrow \bar{B}(A)$ , que suma salvo signo todas las posibles mezclas de dos listas dadas conservando el orden interno de sus elementos:

$$[a_1 | \cdots | a_p] \star [b_1 | \cdots | b_q] = \sum_{\pi} (-1)^{\varepsilon(\pi)} [c_{\pi(1)} | \cdots | c_{\pi(p+q)}],$$

donde  $(c_1, \dots, c_{p+q}) = (a_1, \dots, a_p, b_1, \dots, b_q)$ ,  $\pi$  recorre aquellas permutaciones del conjunto  $\{1, \dots, p+q\}$  que dejan ordenados entre sí los elementos de los subconjuntos  $\{1, \dots, p\}$  y  $\{p+1, \dots, p+q\}$ , y el exponente

$$\varepsilon(\pi) = \sum_{\pi(i) > \pi(p+j)} (1 + |a_i|)(1 + |b_j|).$$

Debemos concretar, antes de proseguir, que una construcción dual, la *construcción cobar*  $\bar{\Omega}(C)$ , se define para DGA-coálgebras  $C$ .

Dada una DGA-álgebra  $A$ , definimos la *construcción Bar normalizada* de  $A$ , que denotamos  $\bar{B}_N(A)$ , como el cociente

$$\bar{B}_N(A) = \frac{\bar{B}(A)}{s(\bar{B}(A))},$$



donde  $s(\bar{B}(A))$  expresa el conjunto de elementos de  $\bar{B}(A)$  que son *degenerados* (i.e., de la forma  $[a_1|a_i|1|a_{i+1}|\cdots|a_n]$ , donde 1 es el elemento unidad del álgebra).

Claramente,  $\bar{B}_N(A)$ , es una DGA-coálgebra con graduación, diferencial y coproducto inducidos por  $|_{\bar{B}}$ ,  $d_{\bar{B}}$  y  $\Delta_{\bar{B}}$ ; respectivamente. Su aumentación viene dada por  $\xi_{\bar{B}}$ .

La construcción Bar normalizada asociada a una DGA-álgebra admite una reinterpretación en términos de módulos tensoriales:  $\bar{B}_N(A)$  es isomorfo como DGA-módulo con el módulo tensorial  $T(S(\text{Ker } \xi_A))$ , al que se ha de añadir la diferencial  $d_s$ . Este isomorfismo funciona así.

En el sentido  $T(S(\text{Ker } \xi_A)) \rightarrow \bar{B}_N(A)$  es la simple inclusión, dado que los escalares no están en  $\text{Ker } \xi_A$ .

La aplicación inversa asocia a cada  $[a_1|\cdots|a_n]$ ,  $[a_1 - \xi_A(a_1)|\cdots|a_n - \xi_A(a_n)]$ . Esta aplicación está bien definida, porque  $a_i - \xi_A(a_i) \in \text{Ker } \xi_A$  para todo  $1 \leq i \leq n$ .

A lo largo de la memoria utilizaremos indistintamente una u otra formulación para  $\bar{B}_N(A)$ , según convenga, así que habrá que mantener en mente los isomorfismos anteriores.

Con objeto de simplificar la notación del trabajo, y debido a que sólo consideraremos construcciones bar normalizadas, asumimos que el término  $\bar{B}(A)$  hace referencia a la construcción bar normalizada de una DGA-álgebra dada.

Dada  $A$  DGA-álgebra conmutativa y  $m \in \mathbb{N}$ , se define la *m-homología* de  $A$  como la homología de la *m-ésima* construcción bar iterada  $\bar{B}^m(A)$  [126].

Damos ahora varios ejemplos más de DGA-álgebras que utilizaremos con posterioridad a lo largo de esta memoria. Todas ellas serán conexas, conmutativas y con diferencial trivial.

- La *DGA-álgebra polinomial*  $P(v, 2n)$ , donde  $n$  es un entero positivo y  $v$  es un generador de grado  $2n$ . La aumentación y la coaumentación coinciden con la identidad en el anillo base. El producto de esta DGA-álgebra se define según la regla  $v^i v^j = v^{i+j}$ .
- La *DGA-álgebra exterior*  $E(u, 2n + 1)$ ,  $n \geq 0$ , que consiste en la DGA-álgebra



libre con generadores 1 y  $u$ ; con  $u$  de grado  $2n + 1$ ,  $u^2 = 0$ . La aumentación y la coaumentación vienen dadas por la identidad en el anillo base. Además, el morfismo

$$\Delta_E : E(u, 2n + 1) \longrightarrow E(u, 2n + 1) \otimes E(u, 2n + 1)$$

definido por

$$\Delta_E(u) = u \otimes 1 + 1 \otimes u,$$

convierte a  $E(u, 2n + 1)$  en una DGA-álgebra de Hopf conmutativa y coconmutativa.

- La DGA-álgebra de potencias divididas  $\Gamma(w, 2n)$ ,  $n \geq 1$ , que es la DGA-álgebra libre con generadores

$$\gamma_0(w) = 1, \gamma_1(w) = w, \gamma_2(w), \dots, \gamma_k(w), \dots, \quad \text{con} \quad |\gamma_k(w)| = 2n.$$

El producto viene definido por la expresión:

$$\gamma_k(w)\gamma_h(w) = \frac{(k+h)!}{k!h!}\gamma_{k+h}(w);$$

el elemento  $\gamma_1(w) = w$  se conoce como el generador del álgebra de potencias divididas. La aumentación y la coaumentación son la identidad en el anillo base. Además, el morfismo

$$\Delta_\Gamma : \Gamma(w, 2n) \longrightarrow \Gamma(w, 2n) \otimes \Gamma(w, 2n),$$

definido por

$$\Delta_\Gamma(\gamma_k(w)) = \sum_{i+j=k} \gamma_i(w) \otimes \gamma_j(w),$$

convierte a  $\Gamma(w, 2n)$  en una DGA-álgebra de Hopf conmutativa y coconmutativa.

Nos introducimos ahora en el contexto de la Teoría de Perturbación Homológica. Aquí, los elementos básicos los conforman las *contracciones* entre DG-módulos.

Una contracción entre dos DG-módulos es una herramienta muy útil en el cálculo de la homología ya que permite relacionar un DG-módulo con otro de menor número de generadores en cada grado, de modo que se preserve la homología. Constituye pues, una importante técnica algebraica que reduce el problema del cálculo homológico.

En el caso de las contracciones entre DGA-álgebras, nos interesarán aquéllas en las que se preserven las estructuras multiplicativas, por lo que habrá unos tipos de contracciones más "convenientes" (en este sentido) que otros.

Una *contracción* de DGA-módulos,  $c : \{N, M, f, g, \phi\}$  consiste en una particular equivalencia de homotopía entre los DG-módulos  $N$  y  $M$ ,

$$fg = 1_M, \quad 1_N - gf = \phi d + d\phi;$$

verificando ciertas propiedades adicionales:

$$(c1) \quad f\phi = 0,$$

$$(c2) \quad \phi g = 0,$$

$$(c3) \quad \phi\phi = 0.$$

A veces notaremos una tal contracción por  $N \xrightarrow{c} M$ ,  $c(f, g, \phi)$  o simplemente por  $c$ .

En esta definición hemos seguido la terminología de Eilenberg y Mac Lane en [62, 63]; en la literatura podemos encontrar otros nombres: "retracción de deformación fuerte" o SDR [117, 81, 85], reducción [148, 149], etc.

Se tiene que los morfismos  $f$  y  $g$  son, respectivamente, suprayectivo e inyectivo, por lo que se suelen denominar *proyección* e *inyección* de la contracción. Por el mismo motivo,  $N$  se conoce como *DG-módulo mayor*, y  $M$  como *DG-módulo menor*.

En estas condiciones, resulta posible descomponer  $N$  como suma directa de  $M$  y un DGA-módulo acíclico (i.e., de homología nula), por lo que las homologías de  $N$  y  $M$  coinciden. Este es el objetivo principal de una contracción: obtener un DGA-módulo con menor cantidad de generadores que el primero y con idénticos grupos de homología.

Exponemos a continuación varios ejemplos simples de contracciones:

- La *contracción trivial* de un DGA-módulo  $N$ , a saber:

$$1_N : \{N, N, 1_N, 1_N, 0\}.$$

- La *isocontracción*, contracción que proviene de un isomorfismo de DGA-módulos dado,  $f : N \rightarrow M$ :

$$c_f : \{N, M, f, f^{-1}, 0\}.$$

Pasamos ahora a exponer algunos resultados concernientes al comportamiento de las contracciones con respecto a algunas operaciones elementales del Álgebra Homológica.

Dadas dos contracciones de DG-módulos, notémoslas

$$c_i : \{N_i, M_i, f_i, g_i, \phi_i\} \quad i = 1, 2,$$

se pueden construir las siguientes contracciones [81, 82]:

1. La contracción  $\bar{c}_1 : \{\text{Ker}\xi_{N_1}, \text{Ker}\xi_{M_1}, f_1, g_1, \phi_1\}$ ; donde, abusando de la notación,  $f_1, g_1$  y  $\phi_1$  representan las restricciones de los morfismos correspondientes.
2. La contracción suspensión de  $c_1$ ,  $S(c_1)$ , que consiste en tomar los DGA-módulos suspensión de los dados:

$$S(c_1) : \{S(N_1), S(M_1), S(f_1), S(g_1), -\phi_1\},$$

siendo, respectivamente,  $S(f_1)$  y  $S(g_1)$  los morfismos  $f_1$  y  $g_1$  en un grado menor.

3. La contracción módulo tensorial,  $T(c_1)$ , obtenida al considerar los módulos tensoriales de  $M_1$  y  $N_1$  y los morfismos inducidos por  $f_1$  y  $g_1$ :

$$T(c_1) : \{T(N_1), T(M_1), T(f_1), T(g_1), T(\phi_1)\};$$

viniendo el operador de homotopía definido por la expresión:

$$T(\phi_1)|_{N_1^{\otimes n}} = \phi_1^{[\otimes n]} = \phi_1 \otimes (g_1 f_1)^{\otimes n-1} + 1 \otimes \phi_1 \otimes (g_1 f_1)^{\otimes n-2} + \dots + 1^{\otimes n-1} \otimes \phi_1, \quad k \geq 1.$$

4. La *contracción producto tensorial*:

$$c_1 \otimes c_2 : \{N_1 \otimes N_2, M_1 \otimes M_2, f_1 \otimes f_2, g_1 \otimes g_2, \phi_1 \otimes g_2 f_2 + 1_N \otimes \phi_2\}.$$

Un caso muy particular de contracción de este tipo resulta ser:

$$c^{\otimes n} : \{N^{\otimes n}, M^{\otimes n}, f^{\otimes n}, g^{\otimes n}, \phi^{[\otimes n]}\};$$

donde, si notamos  $\phi_i^{[\otimes n]} = 1_N^{\otimes i} \otimes \phi \otimes (gf)^{\otimes (n-i-1)}$ , es  $\phi^{[\otimes n]} = \sum_{i=0}^{n-1} \phi_i^{[\otimes n]}$ .

5. De ser  $N_2 = M_1$ , la *contracción composición de ambas*, dada por:

$$c_2 \circ c_1 : \{N_1, M_2, f_2 f_1, g_1 g_2, \phi_1 + g_1 \phi_2 f_1\}.$$



A continuación, vamos a tratar la clasificación de las contracciones de DGA-álgebras, según el grado de compatibilidad que presentes sus morfismos componentes con respecto de las estructuras multiplicativas subyacentes.

Sean  $A$  y  $A'$  dos DGA-álgebras (resp., dos DGA-coálgebras) y  $c : \{A, A', f, g, \phi\}$ , una contracción de DGA-módulos. Se dice que el morfismo  $\phi$  es una *homotopía de álgebras* [81] (resp., *homotopía de coálgebras*), cuando verifica la identidad siguiente:

$$\phi\mu_A = \mu_A\phi^{[\otimes 2]} \quad (\text{resp., } \Delta_A\phi = \phi^{[\otimes 2]}\Delta_A),$$

donde recordamos que  $\phi^{[\otimes 2]} = 1 \otimes \phi + \phi \otimes g$ .

Sean  $A$  y  $A'$  dos DGA-álgebras y  $c : \{A, A', f, g, \phi\}$  una contracción. En [141] encontramos las siguientes definiciones.

La proyección  $f$  es una *casi-proyección de álgebras* si se dan las siguientes condiciones:

$$\begin{aligned} f\mu_A(\phi \otimes \phi) &= 0, \\ f\mu_A(\phi \otimes g) &= 0, \\ f\mu_A(g \otimes \phi) &= 0; \end{aligned}$$

El operador de homotopía  $\phi$  es una *casi-homotopía de álgebras* si se dan las condiciones:

$$\begin{aligned} \phi\mu_A(\phi \otimes \phi) &= 0, \\ \phi\mu_A(\phi \otimes g) &= 0, \\ \phi\mu_A(g \otimes \phi) &= 0. \end{aligned}$$

Se dice que  $c$  es

- una contracción de álgebras *semicompleta*, si  $f$  es una casi-proyección de álgebras,  $g$  es un morfismo de DGA-álgebras y  $\phi$  es una casi-homotopía de álgebras.
- una contracción de álgebras *casicompleta* si  $f$  y  $g$  son morfismos de DGA-álgebras y  $\phi$  es una casi-homotopía de álgebras.
- una contracción de álgebras *completa* si  $f$  y  $g$  son morfismos de DGA-álgebras y  $\phi$  es una homotopía de álgebras.

Obviamente, las contracciones de álgebras completas y casicompletas son, en particular, semicompletas. No es difícil probar que los conjuntos de contracciones de álgebras semicompletas y casicompletas son cerrados por composición y producto tensorial de contracciones.

A lo largo de la memoria aparecerán distintas contracciones de estos tipos.

La Teoría de Perturbación Homológica está constituida por un conjunto de técnicas basadas esencialmente en los conceptos de contracción y perturbación. El Lema Básico de Perturbación constituye la piedra angular de esta Teoría: se trata de un verdadero algoritmo en el que el dato de entrada es una contracción entre dos DG-módulos junto con una perturbación y el de salida es una nueva contracción. Ya moviéndonos en la categoría DGA-álgebras conmutativas, nos interesará saber qué clases de contracciones de álgebras se preservan por perturbación y, de éstas, cuáles transfieren "adecuadamente" la estructura producto de las DGA-álgebras mayores. Amplia información sobre la Teoría de Perturbación Homológica puede ser encontrada en [152, 34, 85, 117, 81, 82, 98, 102, 141],...

Describimos, en primer lugar, el concepto de perturbación. Enunciaremos después el Lema Básico de Perturbación y, por último, recordamos los tipos de contracciones que se preservan por perturbación.

Sean  $N$  un DG-módulo y  $f : N \rightarrow N$  un morfismo de módulos graduados. Se dice que  $f$  es un morfismo *puntualmente nilpotente* cuando para todo elemento no nulo  $x \in N$  existe un entero positivo  $n$  (dependiendo de  $x$ , en general), de modo que  $f^n(x) = 0$ .

Una *perturbación* de un DGA-módulo  $N$  consiste en un morfismo de módulos graduados  $\delta : N \rightarrow N$  de grado  $-1$ , de modo que  $(d_N + \delta)^2 = 0$  y  $\xi_N \delta = 0$ . Es decir, una perturbación  $\delta$  de un DGA-módulo  $N$  verifica que  $|\delta| = -1$ ,  $d_N \delta + \delta d_N + \delta^2 = 0$  y que la aumentación  $\xi_N : (N, d_N + \delta) \rightarrow \Lambda$  sigue siendo un morfismo de DG-módulos.

Una *perturbación* o *dato de perturbación* de una contracción  $c : \{N, M, f, g, \phi\}$  es una perturbación  $\delta$  del DGA-módulo  $N$  que verifica que la composición  $\phi \delta$  es puntualmente nilpotente. Será *perturbación de álgebras* si  $N$  y  $M$  son DGA-álgebras y  $\delta$  una derivación.

Ahora podemos enunciar el teorema principal en teoría de perturbación.

**Lema Básico de Perturbación** [33][152].

Sean  $c : \{N, M, f, g, \phi\}$  una contracción y  $\delta : N \rightarrow N$  una perturbación de dicha contracción. Entonces, queda definida una nueva contracción,

$$c_\delta : \{(N, d_N + \delta, \xi_N, \eta_N), (M, d_M + d_\delta, \xi_M, \eta_M), f_\delta, g_\delta, \phi_\delta\},$$

siendo:

$$\begin{aligned} d_\delta &= f \delta (1 + \phi\delta)^{-1} g, \\ f_\delta &= f (1 - \delta (1 + \phi\delta)^{-1} \phi), \\ g_\delta &= (1 + \phi\delta)^{-1} g, \\ \phi_\delta &= (1 + \phi\delta)^{-1} \phi; \end{aligned}$$

$$\text{con } (1 + \phi\delta)^{-1} = \sum_{i \geq 0} (-1)^i (\phi\delta)^i = 1 - \phi\delta + \phi\delta\phi\delta - \dots + (-1)^i (\phi\delta)^i + \dots.$$

Es evidente que, debido a la nilpotencia puntual de  $\phi\delta$ , la suma  $(1 + \phi\delta)^{-1}(x)$  es finita, para cada  $x \in N$ . Por otra parte, resulta obvio que el morfismo  $d_\delta$  constituye una perturbación del DGA-módulo  $(M, d_M, \xi_M, \eta_M)$ .

El lema básico de perturbación es esencialmente un teorema de punto fijo [27]. Si la perturbación diferencial es suficientemente pequeña (condición de nilpotencia), entonces existe una única forma de modificar la estructura diferencial de llegada para mantener las hipótesis de contracción. Es importante notar que los módulos graduados  $N$  y  $M$  no son alterados en el proceso, sólo los *morfismos* son modificados conforme a las fórmulas explícitas dadas.

Podemos atrevernos a decir que este resultado puede calificarse como el **teorema fundamental del Álgebra Homológica Computacional**. Los resultados obtenidos de esta memoria pueden considerarse como ejemplos de la potencia y alcance de este método.

En [82] y [102] se demuestra que, dadas una contracción de álgebras completa  $c$  y una perturbación de álgebras  $\delta$  de  $c$ , la contracción perturbada  $c_\delta$  es una contracción de álgebras completa. En [141], se prueba asimismo que la semicompletitud en contracciones de álgebras es una “propiedad hereditaria” por perturbación homológica.

Más precisamente, toda perturbación de una contracción de álgebras completa es asimismo una contracción de álgebras completa. Ahora bien, toda perturbación de una contracción de álgebras casicompleta o semicompleta es, en el peor caso, una nueva contracción de álgebras semicompleta:

- Las contracciones de álgebras completas se preservan por perturbación, pero la composición y el producto tensorial de este tipo de contracciones degenera en general hacia la semicompletitud.
- Las contracciones casicompletas se preservan por composición y por producto tensorial. No obstante, la perturbación de esta clase de contracciones degenera en general hacia semicompletitud.
- Las contracciones semicompletas se preservan por composición, producto tensorial y perturbación. Obsérvese que los anteriores tipos de contracciones de álgebras considerados son, en particular, contracciones semicompletas. Además, cualquiera de ellas deriva en el peor de los casos, por composición, producto tensorial o perturbación, al tipo semicompleto.

Por otra parte, en una contracción semicompleta entre dos DGA-álgebras se tiene que  $\mu_{A'} = f\mu_{A'}g$ . Más aún, si se perturba una tal contracción según un dato de perturbación de álgebras, en la contracción semicompleta resultante ambas las dos nuevas diferenciales en  $A$  y  $A'$  conforman sendas derivaciones.

En este trabajo nos moveremos siempre en el contexto de las contracciones de álgebras semicompletas.

Ahora, abarcamos el contexto de la Topología Simplicial.

De la necesidad de representar los espacios topológicos por modelos combinatoriales que nos faciliten su manipulación surge la Topología Simplicial. A continuación damos una colección de definiciones y resultados básicos de la Topología simplicial, que hemos extraídos de los textos [50] y [130].

Un *conjunto simplicial*  $K$  es un conjunto graduado con índices en los enteros no negativos,  $K = \{K_0, K_1, \dots, K_n, \dots\}$ , junto con dos familias de funciones  $\partial_i : K_q \rightarrow K_{q-1}$  y  $s_i : K_q \rightarrow K_{q+1}$ ,  $0 \leq i \leq q$ ; verificándose las identidades:

$$\partial_i \partial_j = \partial_{j-1} \partial_i, \text{ si } i < j;$$



$$\begin{aligned}
s_i s_j &= s_{j+1} s_i, \quad \text{si } i \leq j; \\
\partial_i s_j &= s_{j-1} \partial_i, \quad \text{si } i < j; \\
\partial_i s_j &= s_j \partial_{i-1}, \quad \text{si } i > j + 1; \\
\partial_j s_j &= 1_K = \partial_{j+1} s_j.
\end{aligned}$$

Los elementos de  $K_q$  se llaman  $q$ -*símplices*. Las aplicaciones  $\partial_i$  y  $s_i$  se denominan operadores *cara* y *de degeneración*, respectivamente. Un símplice  $x$  se dice *degenerado* cuando  $x = s_i z$ , para algún símplice  $z$  y operador de degeneración  $s_i$ ; en caso contrario, el símplice  $x$  se denomina *no degenerado*.

Por ejemplo, un triángulo sólido con tres vértices, tres lados y una cara (el propio triángulo sólido) puede ser descrito como un conjunto simplicial  $T = \{T_n, \partial_i, s_i\}$ , donde

- El conjunto de los  $n$ -símplices  $T_n$  es el conjunto de las  $(n + 1)$ -secuencias crecientes  $(a_0, \dots, a_n)$  donde  $0 \leq a_0 \leq \dots \leq a_n \leq 2$ ;
- La  $i$ -ésima cara  $\partial_i \sigma$  del  $n$ -símplice  $\sigma = (a_0, \dots, a_n)$  se obtiene eliminando el  $i$ -ésimo vértice:  $\partial_i(\sigma) = (a_0, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_n)$ ;
- Por contra, la  $i$ -ésima degeneración del mismo símplice se obtiene duplicando el  $i$ -ésimo vértice:  $s_i(\sigma) = (a_0, \dots, a_i, a_i, \dots, a_n)$ .

Es inmediato observar que en el ejemplo anterior, un símplice  $\sigma = (a_0, \dots, a_n)$  es no degenerado si, y sólo si,  $0 \leq a_0 < \dots < a_n \leq 2$ ;

Un conjunto simplicial  $K$  es *reducido* si  $K_0$  tiene un símplice. Esta definición puede extenderse: diremos que  $K$  es  $n$ -*reducido* ( $n \geq 1$ ) si es reducido y no tiene  $m$ -símplices no degenerados, para  $1 \leq m \leq n$ .

A partir de un conjunto simplicial  $K$  se puede definir un nuevo conjunto simplicial, denominado *el simétrico de  $K$*  y notado  $K^{sy}$ , tal que  $K_n^{sy} = K_n$  y en dimensión  $n$  los operadores de cara y degeneración son:  $\partial_i^{sy} = \partial_{n-i}$  y  $s_i^{sy} = s_{n-i}$ , respectivamente.

Un *morfismo simplicial*  $f : K \rightarrow L$  entre dos conjuntos simpliciales es una aplicación de grado cero que conmuta con los operadores de cara y de degeneración; esto es,  $f$  consiste en una familia de aplicaciones  $\{f_q : K_q \rightarrow L_q\}_{q \geq 0}$  de modo que:

$$f_q \partial_i = \partial_i f_{q+1}, \quad 0 \leq i \leq q, \quad \forall q \geq 0; \quad \text{y} \quad f_q s_i = s_i f_{q-1}, \quad 0 \leq i \leq q, \quad \forall q > 0.$$



Recordamos someramente la noción de categoría [60]. Una *categoría*  $\mathcal{C}$  es una terna constituida por:

- Una clase de objetos, denotada  $\text{Obj}(\mathcal{C})$ .
- Una familia de conjuntos disjuntos,  $\text{Hom}(A, B)$ , uno por cada par de objetos  $A, B \in \text{Obj}(\mathcal{C})$ ; conjuntos cuyos elementos denominamos morfismos.
- Un conjunto de aplicaciones, de modo que sobre cada terna de objetos  $A, B, C \in \text{Obj}(\mathcal{C})$ , resulta:

$$\text{Hom}(B, C) \times \text{Hom}(A, B) \rightarrow \text{Hom}(A, C), \quad (\alpha, \beta) \mapsto \alpha\beta;$$

verificando:

1. Para cada objeto  $A \in \mathcal{C}$ , existe el morfismo identidad  $1_A \in \text{Hom}(A, A)$ , de modo que para todo morfismo  $\alpha \in \text{Hom}(A, B)$ , se tiene que  $\alpha 1_A = \alpha = 1_B \alpha$ .
2. La ley de asociatividad de la composición: se tiene que  $\alpha(\beta\gamma) = (\alpha\beta)\gamma$ , para  $\alpha \in \text{Hom}(C, D)$ ,  $\beta \in \text{Hom}(B, C)$  y  $\gamma \in \text{Hom}(A, B)$  dados.

Ejemplos de categorías los encontramos en todas las ramas de las matemáticas: la categoría de los conjuntos y aplicaciones entre conjuntos, la categoría de los grupos y homomorfismos de grupos, la categoría formada por los módulos y homomorfismos de módulos de un anillo dado, la categoría de los espacios topológicos y las aplicaciones continuas entre ellos, . . . Nosotros centraremos nuestra atención en los *objetos simpliciales* de las categorías anteriormente citadas.

Sea  $K$  un conjunto simplicial y  $\mathcal{C}$  una categoría. Si cada  $K_n$  y cada operador  $\partial_i$  y  $s_j$  están en la categoría  $\mathcal{C}$ , entonces  $K$  se denomina *objeto simplicial sobre*  $\mathcal{C}$ . De forma análoga, definimos el concepto de *morfismo simplicial* entre objetos simpliciales de  $\mathcal{C}$ : si  $K$  y  $L$  son ambos objetos simpliciales sobre  $\mathcal{C}$  y  $f : K \rightarrow L$  es un morfismo entre conjuntos simpliciales, con cada  $f_n$  en  $\mathcal{C}$ ; entonces  $f$  se denomina *morfismo simplicial sobre*  $\mathcal{C}$ .

Por ejemplo, podemos hablar de módulos simpliciales y de morfismos entre módulos simpliciales, atendiendo a la categoría de los módulos y de los morfismos

de módulos sobre un anillo dado. Otros ejemplos son los de  $\Lambda$ -álgebra simplicial y grupo simplicial, atendiendo a las categorías correspondientes.

Una clase interesante de conjuntos simpliciales son los conjuntos simpliciales con punto base.

Un *punto base*  $*$  en un conjunto simplicial  $K$  es el subconjunto simplicial de  $K$  constituido por un elemento  $*$  de  $K_0$  y todas sus degeneraciones. De no haber lugar a confusión, se identificará el punto base con el elemento  $*$  correspondiente de  $K_0$ .

Un *conjunto simplicial con punto base (o punteado)*, es un par  $(K, *)$ , donde  $K$  es un conjunto simplicial y  $*$  es un punto base en  $K$ .

El concepto de conjunto simplicial con punto base nos dice que estamos destacando un 0-símplice sobre los demás. Por ejemplo, consideraremos a un grupo simplicial como conjunto simplicial punteado, con punto base el elemento neutro  $e_0$  en dimensión cero; obsérvese que las degeneraciones de  $e_0$  son los elementos neutros en los grados correspondientes, al ser, en este caso, homomorfismos de grupos los operadores  $s_i$ .

La conexión entre Topología Simplicial y Álgebra Homológica se produce de la mano de los llamados *complejos simpliciales*, que describimos a continuación.

Dado un conjunto simplicial  $K$ , el  $\Lambda$ -módulo simplicial libre generado por  $K$ , que denotamos por  $\Lambda[K]$ , queda definido como el módulo simplicial dado por

$$\Lambda[K]_n = \Lambda[K_n],$$

siendo sus operadores de cara y de degeneración los morfismos de  $\Lambda$ -módulos inducidos por los operadores propios de  $K$ .

A partir de un módulo simplicial  $L$  se puede definir lo que se da en llamar *DG-módulo asociado a  $L$* , que consiste en el DG-módulo formado por  $L$  y el operador diferencial  $d$  que en grado  $n$  viene dado por  $d_n = \sum_{i=0}^n (-1)^i \partial_i$ , suma alternada de los sucesivos operadores de cara en  $L$ . Nótese que todo morfismo de módulos simpliciales  $f : L \rightarrow L'$  da lugar a un morfismo entre los DG-módulos asociados, de forma natural.

El *complejo de cadenas* asociado a un conjunto simplicial  $K$ , que denotamos por  $C_*(K)$ , es el DG-módulo asociado a  $\Lambda[K]$ . En este caso, la *homología de  $K$* , que

notamos por  $H(K)$ , se define como el módulo graduado dado por

$$H_n(K) = H_n(C_*(K)), \quad \forall n \geq 0.$$

Este es el invariante esencial que se persigue calcular en Topología Simplicial, dado que corresponde con la *homología singular* de un espacio topológico que admita a  $K$  como modelo simplicial.

Una máxima que preside el cálculo homológico es la siguiente: dado un objeto del que se pretende hallar su homología, encontrar “modelos” homológicamente equivalentes a los que sea más sencillo calcular este invariante.

De este modo surge el *complejo de cadenas normalizado* asociado a un conjunto simplicial.

Sea  $L$  un módulo simplicial y  $s(L)$  el submódulo engendrado por todos los símlices degenerados. Entonces, se verifica que  $d_n(s(L))_n \subset (s(L))_{n-1}$ , por lo que el par  $\{L/s(L), d\}$  define un nuevo DG-módulo  $L_N$ , que denominamos *submódulo normalizado* de  $L$ . Nótese que todo morfismo de módulos simpliciales  $f : K \rightarrow L$  da lugar a un morfismo de DG-módulos  $f : K_N \rightarrow L_N$  entre los normalizados, de forma obvia.

El complejo de cadenas normalizado  $C_*^N(K)$  del conjunto simplicial  $K$  es el normalizado del módulo simplicial  $C_*(K)$ . Es inmediato probar que ambos los complejos normalizado y sin normalizar son homológicamente equivalentes:

$$H_*(C_*(K)) = H_*(C_*^N(K)),$$

por lo que hemos encontrado en realidad un “modelo de  $C_*(K)$  en tanto en cuanto reducimos el número de elementos a considerar.

Nótese que los complejos de cadenas normalizados  $C_*^N(K)$  y  $C_*^N(K^{sy})$  son isomorfos. Este isomorfismo viene definido por la aplicación que a un elemento  $x_n$  de dimensión  $n$ , generador de  $C_*^N(K)$ , le hace corresponder el elemento  $(-1)^{\lceil n/2 \rceil + 1} x_n$  de  $C_*^N(K^{sy})$ , donde  $\lceil n/2 \rceil$  representa la parte entera por exceso de  $n/2$ .

Obsérvese que en el caso de que  $K$  sea un conjunto simplicial punteado se puede dotar a  $C_*(K)$  de estructura de DGA-módulo, vía la aumentación

$$\xi_\kappa(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \in K_0, \\ 0, & \text{en otro caso;} \end{cases}$$



y la coaumentación  $\eta_K$  definida linealmente a partir de la imagen de la unidad,

$$\eta_K(1) = *.$$

Esta propiedad se hereda para  $C_*^N(K)$ , sin más que considerar “normalizados” (i.e., clases por elementos degenerados).

Ahora vamos a definir una operación básica que se puede realizar entre conjuntos simpliciales, como es el *producto cartesiano*.

Dados dos conjuntos simpliciales  $K$  y  $L$ , definimos el *conjunto simplicial producto cartesiano* de ambos,  $K \times L$ , de modo que  $(K \times L)_q = K_q \times L_q$ ; viniendo dados los operadores cara y de degeneración por las expresiones:

$$\partial_i(a \times b) = \partial_i a \times \partial_i b, \quad s_j(a \times b) = s_j a \times s_j b,$$

con  $a \in K_q$ ,  $b \in L_q$ ,  $0 \leq i, j \leq q$ .

En el caso de que  $K$  y  $L$  sean ambos módulos simpliciales, a la hora de dotar a  $K \times L$  asimismo de estructura módulo simplicial, hay que variar ligeramente la definición anterior para obtener de ese modo un objeto en la misma categoría. De hecho, se toma  $(K \times L)_q = K_q \otimes L_q$ , viniendo dados los operadores de cara y de degeneración de forma análoga.

Podría haberse tomado en esta última definición la suma directa de los módulos que conforman  $K$  y  $L$  en lugar de su producto tensorial, resultando así el módulo simplicial  $(K \widetilde{\times} L)_q = K_q \oplus L_q$ . El porqué de la elección de uno y no otro lo encontramos en los teoremas de Eilenberg-Zilber torcido y Eilenberg-Zilber, que establecen equivalencias de homotopía particulares (sendas contracciones, en realidad), entre los complejos de cadenas de los espacios totales de una fibración y una fibración trivial, y ciertos productos tensoriales “torcido” (más propiamente, “perturbado”) y banal, respectivamente, de los complejos de cadenas de la fibra y la base. Veamos esto con más detenimiento.

Dados dos conjuntos simpliciales  $K$  y  $L$ , se puede considerar el *producto tensorial* de los complejos de cadenas asociados,  $C_*(K) \otimes C_*(L)$ , que consiste en los módulos

$$(C_*(K) \otimes C_*(L))_r = \sum_{p+q=r} C_p(K) \otimes C_q(L)$$

y operador diferencial  $d_{K,L}$  dado por:

$$d_{K,L}(k_p, l_q) = d_K k_p \otimes l_q + (-1)^p k_p \otimes d_L l_q, \quad k_p \in C_p(K), \quad l_q \in C_q(L).$$

Un resultado capital dentro de la evolución del Álgebra Homológica es el Teorema de Eilenberg-Zilber, contracción que relaciona estructuras geométrico combinatoriales (módulos simpliciales) y estructuras algebraicas (los complejos de cadenas asociados). El establecimiento de fórmulas explícitas de los morfismos que componen esta contracción ha permitido un considerable avance en el estudio de toda una pléyade de problemas afines al tratamiento simplicial en Álgebra Homológica.

Sean  $K$  y  $L$  dos  $\Lambda$ -módulos simpliciales aumentados. Consideremos los morfismos Alexander-Whitney,

$$AW : (K \times L)_N \rightarrow K_N \otimes L_N;$$

Eilenberg-Mac Lane,

$$EML : K_N \otimes L_N \rightarrow (K \times L)_N;$$

y Shih,

$$SHI : (K \times L)_N \rightarrow (K \times L)_N;$$

aplicaciones que vienen dadas en grados positivos por las fórmulas:

$$\begin{aligned} AW(a_n \times b_n) &= \sum_{i=0}^n \partial_{i+1} \cdots \partial_n a_n \otimes \partial_0 \cdots \partial_{i-1} b_n, \\ EML(a_p \otimes b_q) &= \sum_{(\alpha, \beta) \in \{(p, q)\text{-shuffles}\}} (-1)^{sg(\alpha, \beta)} (s_{\beta_q} \cdots s_{\beta_1} a_p \times s_{\alpha_p} \cdots s_{\alpha_1} b_q), \\ SHI(a_n \times b_n) &= \\ &= \sum (-1)^{m+sg(\alpha, \beta)} (s_{\beta_q+m} \cdots s_{\beta_1+m} s_{m-1} \partial_{n-q+1} \cdots \partial_n a_n \times \\ &\quad \times s_{\alpha_{p+1}+m} \cdots s_{\alpha_1+m} \partial_m \cdots \partial_{m+p-1} b_n); \end{aligned}$$

donde  $m = n - p - q$ ,  $sg(\alpha, \beta) = \sum_{i=1}^p (\alpha_i - (i - 1))$ , y la última suma se toma con los índices  $0 \leq q \leq n - 1$ ,  $0 \leq p \leq n - q - 1$  y  $(\alpha, \beta) \in \{(p + 1, q)\text{-shuffles}\}$ .

En grado 0, los homomorfismos  $AW$  y  $EML$  se definen como  $AW(a_0 \times b_0) = a_0 \otimes b_0$  y  $EML(a_0 \otimes b_0) = (a_0 \times b_0)$ ; por otro lado, el operador de homotopía,  $SHI$ , coincide con la aplicación idénticamente nula actuando sobre elementos de grado 0.

En estas condiciones, podemos enunciar el siguiente teorema.

**Teorema 1.0.1** [66] *El conjunto de datos*

$$EZ_{K,L} : \{(K \times L)_N, K_N \otimes L_N, AW_{K,L}, EML_{K,L}, SHI_{K,L}\} \quad (1.8)$$

define una contracción.

En particular, si consideramos complejos de cadenas asociados a conjuntos simpliciales dados, obtenemos el siguiente resultado.

**Teorema 1.0.2** [66, 63] (de Eilenberg-Zilber) Sean  $X$  e  $Y$  dos conjuntos simpliciales. Entonces, el conjunto de datos

$$EZ_{C_*(X), C_*(Y)} : \{C_*(X \times Y), C_*(X) \otimes C_*(Y), AW, EML, SHI\} \quad (1.9)$$

Las contracciones resultantes en los teoremas precedentes resultan ser contracciones de álgebras semicompletas en el caso particular de grupos simpliciales, tal como se recoge en [1]. Las estructuras multiplicativas a considerar en los complejos de cadenas vienen dadas en función de los morfismos proyección e inyección de la contracción anterior.

Más concretamente, sea  $K$  un conjunto simplicial. El *coproducto de Alexander-Whitney*,  $\Delta_{C_*(K)} : C_*(K) \rightarrow C_*(K) \otimes C_*(K)$ , se define como la composición de la aplicación diagonal  $C_*(K) \rightarrow C_*(K \times K)$  con el operador  $AW_{C_*(K), C_*(K)}$ :

$$\Delta_{C_*(K)}(x_n) = \sum_{i=0}^n \partial_{i+1} \cdots \partial_n x_n \otimes \partial_0 \cdots \partial_{i-1} x_n.$$

De ser  $K$  punteado, el morfismo anterior dota a  $C_*(K)$  de estructura de DGA-coálgebra.

Por otro lado, dado un grupo simplicial  $G$ , el *producto de Eilenberg-Mac Lane ó Pontrjagin* sobre  $C_*(G)$  consiste en la composición del operador  $EML_{C_*(G), C_*(G)}$  con el morfismo de DG-módulos  $C_*(G \times G) \rightarrow C_*(G)$  inducido por el producto en  $G$ :

$$\mu_{C_*(G)}(x_p \otimes y_q) = \sum_{(\alpha, \beta)} (-1)^{sg(\alpha, \beta)} s_{\beta_q} \cdots s_{\beta_1} x_p \circ s_{\alpha_p} \cdots s_{\alpha_1} y_q,$$

donde el índice  $(\alpha, \beta)$  del sumatorio recorre los  $(p, q)$ -shuffles.

El producto anterior dota a  $C_*(G)$  de estructura de DGA-álgebra, que será conmutativa en caso de ser  $G$  asimismo abeliano. En particular, teniendo en cuenta el coproducto de Alexander-Whitney,  $C_*(G)$  resulta ser una DGA-álgebra de Hopf, conmutativa de serlo el grupo de partida,  $G$ .

Ahora vamos a tratar de traducir el Teorema de Eilenberg-Zilber al caso de fibrados no triviales: perseguimos enunciar el Teorema de Eilenberg-Zilber Torcido y el Teorema de Brown.

Sean  $F$  y  $B$  dos conjuntos simpliciales y  $\kappa : F_* \times B_* \longrightarrow F_{*-1}$  una familia de correspondencias de conjuntos verificando:

$$\begin{aligned}\kappa(\partial_1 f, \partial_1 b) &= \kappa(\kappa(f, b), \partial_0 b), \\ \partial_i \kappa(f, b) &= \kappa(\partial_{i+1} f, \partial_{i+1} b) \text{ si } i > 0 \\ s_i \kappa(f, b) &= \kappa(s_{i+1} f, s_{i+1} b) \text{ y} \\ \kappa(f, s_0 b) &= \partial_0 f.\end{aligned}$$

El *producto cartesiano torcido*  $F \times_\kappa B$  (ver [28]) de los conjuntos simpliciales  $F$  y  $B$  según la familia de correspondencias  $\kappa$  consiste en el conjunto simplicial dado por:

$$\begin{aligned}(F \times_\kappa B)_n &= F_n \times B_n, \\ \partial_i(f, b) &= (\partial_i f, \partial_i b) \text{ si } i > 0, \\ \partial_0(f, b) &= (\kappa(f, b), \partial_0 b) \text{ y} \\ s_i(f, b) &= (s_i f, s_i b).\end{aligned}$$

Nótese que  $F \times_\kappa B$  define una fibración de fibra  $F$  y base  $B$ .

**Teorema 1.0.3 [63] (de Eilenberg-Zilber torcido (I)).**

Si  $F \times_\kappa B$  es un producto cartesiano torcido, entonces el complejo de cadenas  $C_*^N(F \times_\kappa B)$  es homotópicamente equivalente a un producto tensorial "torcido"  $C_*^N(F) \otimes_\kappa C_*^N(B)$ .

Utilizando técnicas de perturbación, en [34] se prueba la existencia toda una contracción entre los complejos anteriores, que llamaremos *contracción Eilenberg-Zilber torcida* y notaremos simplemente por  $EZ_{F,B}^\kappa$ . Un estudio desde el punto de vista de álgebras conduce al siguiente resultado.

**Teorema 1.0.4 [12, 21]** Si  $F$ ,  $B$  y  $F \times_\kappa B$  son tres grupos simpliciales entonces la *contracción de Eilenberg-Zilber torcida*  $EZ_{F,B}^\kappa$  es una *contracción de álgebras semi-completa*.

El teorema de Eilenberg-Zilber Torcido se asocia ineludiblemente al Teorema de Brown, que versa sobre el mismo tema, pero desde la original perspectiva que dan

las *cocadenas de Brown*. Para poder establecer su enunciado necesitamos recoger previamente varios resultados, que encontramos en [33], [130] y [141], entre otros.

Se dice que un grupo simplicial  $G$  *actúa a derecha* (resp., *a izquierda*) de un conjunto simplicial dado  $E$  cuando existe un morfismo simplicial  $*$  :  $E \times G \rightarrow E$  (resp.,  $*$  :  $G \times E \rightarrow E$ ), verificando:

$$\begin{aligned} *(x, e_q) &= x, & \phi(*(x, g_1), g_2) &= \phi(x, g_1 g_2) \\ (\text{resp.}, & & *(e_q, x) &= x, & \phi(g_1, *(g_2, x)) &= *(g_1 g_2, x)); \end{aligned}$$

con  $x \in E$  y  $g_1, g_2 \in G$ .

Con vistas a simplificar la lectura, notaremos  $*(x, g)$  simplemente por  $xg$ .

Sean  $B$  un conjunto simplicial y  $G$  un grupo simplicial. Una *función de torsión* ó *torsión geométrica*  $\tau : B_* \rightarrow G_{*-1}$  es una familia de aplicaciones verificando las condiciones siguientes:

$$\begin{aligned} \partial_0 \tau(b) &= [\tau(\partial_0 b)]^{-1} \tau(\partial_1 b); \\ \partial_i \tau(b) &= \tau(\partial_{i+1} b), \quad \text{para } i > 0; \\ s_i \tau(b) &= \tau(s_{i+1} b), \quad \text{para } i \geq 0; \\ \tau(s_0 b) &= e_n; \end{aligned}$$

donde  $e_n$  es el elemento neutro del grupo  $G_n$  correspondiente.

Sean  $F$  y  $B$  dos conjuntos simpliciales,  $G$  un grupo simplicial que actúa a izquierda de  $F$  y  $\tau : B \rightarrow G$  una función de torsión. El *producto cartesiano torcido (PCT)* de fibra  $F$ , base  $B$ , grupo estructural  $G$ , de acción  $*$  de  $G$  sobre  $F$  y función de torsión  $\tau$  es el conjunto simplicial  $F \times_\tau B$  definido por:

$$\begin{aligned} (F \otimes_\tau B)_n &= F_n \times B_n; \\ \partial_0(f, b) &= (\tau b * \partial_0 f, \partial_0 b); \\ \partial_i(f, b) &= (\partial_i f, \partial_i b), \quad \text{para } i > 0; \\ s_i(f, b) &= (s_i f, s_i b), \quad \text{para } i \geq 0. \end{aligned}$$

En el caso de que  $F = G$ , se habla de *producto cartesiano torcido principal*, o simplemente (PCTP). Obsérvese que si  $G \times_\tau B$  es un PCTP y  $f : C \rightarrow B$  un morfismo simplicial, entonces  $G \times_{\tau \circ f} C$  da lugar a un nuevo PCTP, que denominamos el *inducido por  $f$  a partir de  $\tau$* .



En lo sucesivo, sobrentenderemos por producto cartesiano torcido uno del tipo anterior, dotado de grupo estructural. El Teorema 1.0.3 puede reenunciarse en términos de este tipo de productos cartesianos, resultando el que con más generalidad se cita como Teorema de Eilenberg-Zilber Torcido.

**Teorema 1.0.5 (de Eilenberg-Zilber Torcido (II)).**

Si  $F \times_{\tau} B$  es un producto cartesiano torcido según una función de torsión  $\tau$ , entonces el complejo de cadenas  $C_{*}^N(F \times_{\tau} B)$  admite una contracción hacia un producto tensorial "torcido"  $C_{*}^N(F) \otimes_{\tau} C_{*}^N(B)$ .

La diferencia con el Teorema de Brown es muy sutil, como comprobaremos a continuación. Primero, definimos la noción de cocadena de torsión.

Sean  $C$  una DGA-coálgebra y  $A$  una DGA-álgebra. Se denomina *cocadena de torsión* (ó, también, *cocadena de Brown*), a un morfismo de módulos graduados  $t : C \rightarrow A$  de grado  $-1$  de modo que:

$$d_A t + t d_C + t \cup t = 0, \quad \xi_A t = 0, \quad t \eta_C = 0;$$

donde  $t \cup t = \pm \mu_A(t \otimes t) \Delta_C$ , con el signo a precisar ahora.

Sean  $M$  un DGA-módulo a derecha sobre una DGA-álgebra  $A$  y  $N$  un DGA-comódulo a izquierda sobre una DGA-coálgebra  $C$ , y sea  $t : C \rightarrow A$  una cocadena de torsión. Se define:

$$d_t : M \otimes N \longrightarrow M \otimes N$$

por

$$d_t(x \otimes y) = d(x \otimes y) + t \cap x \otimes y,$$

donde

$$t \cap x \otimes y = (\mu_M \otimes 1_N)(1_M \otimes t \otimes 1_N)(1_M \otimes \Delta_N)(x \otimes y).$$

Entonces,  $d_t$  es una diferencial y  $M \otimes N$  dotado de esta diferencial y de la aumentación y coaumentación definidas para el producto tensorial es un DGA-módulo,  $M \otimes_t N$ , *producto tensorial torcido por la cocadena  $t$* .

También podría haberse tomado  $M$  DGA-módulo a izquierda de  $A$  y  $N$  DGA-comódulo a derecha de  $C$ , de modo que aparece la diferencial  $d_t = 1 \otimes d + d \otimes 1 + t \cap$  sobre  $N \otimes M$ , con

$$t \cap = (1_N \otimes \mu_M)(1_N \otimes t \otimes 1_M)(\Delta_N \otimes 1_M).$$

En la demostración de que estas aplicaciones  $d_i$  constituyen sendas diferenciales, se utilizan propiedades de compatibilidad entre las aplicaciones

$$\cap : \text{Hom}(C, A) \otimes \text{Hom}(C, A) \rightarrow \text{Hom}(C, A)$$

y

$$\cup : \text{Hom}(C, A) \otimes P \otimes Q \rightarrow P \otimes Q,$$

con  $(P, Q) \in \{(M, N), (N, M)\}$ , dependiendo del caso.

La compatibilidad proviene del hecho de que  $\cap$  define un producto en  $\text{Hom}(C, A)$ , y como tal se espera que sea compatible con la aplicación  $\cup$ , en el sentido de que para cualesquiera morfismos  $\alpha, \beta \in \text{Hom}(C, A)$  se tenga

$$(\alpha \cup \beta) \cap = (\alpha \cap)(\beta \cap).$$

Para que esto sea posible, se ha de definir

$$\alpha \cup \beta = \mu(\alpha \otimes \beta) \Delta$$

en el caso  $(P, Q) = (N, M)$ , y

$$\alpha \cup \beta = (-1)^{|\alpha||\beta|} \mu(\alpha \otimes \beta) \Delta$$

en el caso  $(P, Q) = (M, N)$ . De aquí que antes definiéramos  $t \cup t$  sin precisar el signo. Ahora sabemos que debemos tomar  $t \cup t = -\mu_\Lambda(t \otimes t) \Delta_C$ .

**Teorema 1.0.6 (de Brown).** [33]

Sea  $F \times_\tau G$  un producto cartesiano torcido de grupo estructural  $G$  y base  $B$  reducida. Entonces, existe una cocadena de torsión  $t : C_*^N(B) \longrightarrow C_*^N(G)$  de modo que el producto tensorial torcido  $C_*^N(B) \otimes_t C_*^N(F)$ , con diferencial  $d_t = d \otimes 1 + 1 \otimes d + t \cap$ , es canónicamente homotópicamente equivalente al complejo de cadenas del espacio total,  $C_*^N(B \times_\tau F)$ .

Los teoremas de Brown y de Eilenberg-Zilber son ciertamente de naturaleza un tanto distinta. De un lado, el segundo admite una demostración en un contexto más general que el de Brown, para fibrados sin grupo estructural, mediante el uso de técnicas de perturbación. De otro, el teorema de Brown proporciona, en general, más información sobre el complejo pequeño.

La unificación de ambos teoremas en uno sólo se produce en [152], donde Shih demuestra asimismo con técnicas de perturbación la existencia de cocadenas de Brown en el Teorema de Eilenberg-Zilber torcido. Este es el resultado del que nos serviremos nosotros más adelante.

Sea  $F \times_{\tau} B$  un PCT con grupo estructural  $G$  y sea  $d_{\delta}$  la diferencial obtenida por perturbación sobre el DGA-módulo  $C_{*}^N(G) \otimes C_{*}^N(B)$ . Sea  $t : C_{*}^N(B) \rightarrow C_{*}^N(G)$  el morfismo de módulos graduados de grado  $-1$  definido por la composición  $t = p \circ d_{\delta} \circ \rho$ ,

$$C_{*}^N(B) \xrightarrow{\rho} C_{*}^N(G) \otimes C_{*}^N(B) \xrightarrow{d_{\delta}} C_{*}^N(G) \otimes C_{*}^N(B) \xrightarrow{p} C_{*}^N(G),$$

donde

$$\rho(x) = e_0 \otimes x, \quad e_0 \text{ elemento neutro de } G_0; \quad p(y \otimes x) = y \cdot \xi_{C_{*}^N(B)} x. \quad (1.10)$$

En estas circunstancias, Shih demostró el siguiente teorema.

**Teorema 1.0.7** [152] *Dado un producto cartesiano torcido  $F \times_{\tau} B$  con grupo estructural  $G$ , el morfismo  $t : C_{*}^N(B) \rightarrow C_{*}^N(G)$  definido previamente es una cocadena de torsión verificando  $d_{\delta} = t \cap$ .*

En el caso particular de trabajar con dos grupos simpliciales conmutativos, en [1] se demostró que la contracción resultante del teorema anterior consistía en verdad en una contracción de álgebras semicompleta. En [21, 12] se prueban resultados de semicompletitud análogos bajo hipótesis más débiles de no conmutatividad.

Un resultado técnico de gran utilidad como argumento para la verificación de la parada de procesos de perturbación, según el grado de filtración de un PCT dado, es el siguiente.

**Proposición 1.0.8** [130] *Sea  $F \times_{\tau} B$  un PCT de grupo estructural  $G$ , y denotemos por  $e_0$  al elemento neutro en  $G_0$ . Entonces, si  $\tau(b) = e_0$  para todo  $b \in B_1$ , es asimismo  $t(b) = 0$  para todo  $b \in B_1$ .*

Ahora vamos a definir las nociones fundamentales del Álgebra Homológica relacionadas con la determinación de la (co)homología de grupos. Comprobaremos que la Topología Simplicial tiene mucho que aportar en esta materia.



La homología de un grupo suele definirse por medio de su *espacio clasificante*, también conocido como *clasificante geométrico*. Veamos en qué consiste esta construcción (ver [130]).

Dado un grupo simplicial  $(G, +)$ , el *espacio clasificante*  $\bar{W}^g(G)$  consiste en el conjunto simplicial definido de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \bar{W}_0^g(G) &= \{[\ ]\}; \\ \bar{W}_n^g(G) &= G_{n-1} \times \cdots \times G_0, \quad n > 0; \\ s_0[\ ] &= [e_0]; \\ \partial_i[g_0] &= [\ ], \quad i = 0, 1; \\ \partial_0[g_n, \dots, g_0] &= [g_{n-1}, \dots, g_0], \\ \partial_{i+1}[g_n, \dots, g_0] &= [\partial_i g_n, \dots, \partial_1 g_{n-i+1}, g_{n-i-1} + \partial_0 g_{n-i}, g_{n-i-2}, \dots, g_0], \\ s_0[g_{n-1}, \dots, g_0] &= [e_n, g_{n-1}, \dots, g_0], \\ s_{i+1}[g_n, \dots, g_0] &= [s_i g_n, \dots, s_0 g_{n-i}, e_{n-i}, g_{n-i-1}, \dots, g_0]; \end{aligned}$$

donde  $[\ ]$  denota el único elemento de  $\bar{W}_0^g(G)$ ,  $e_n$  denota el elemento identidad de  $G_n$  y  $[g_{n-1}, \dots, g_0]$  denota un elemento genérico de  $\bar{W}_n^g(G)$ , para  $n > 0$ .

Por abuso de notación, se habla del clasificante asociado a un grupo discreto  $G$  como el clasificante  $\bar{W}^g({}^sG)$  del grupo simplicial  ${}^sG$  canónicamente asociado a  $G$ , que consiste en aquel con  ${}^sG_n = G$  para todo  $n \geq 0$  y operadores simpliciales (ambos de cara y de degeneración) el homomorfismo identidad.

La homología de un grupo  $G$ , ya sea discreto o simplicial, se puede definir entonces como la homología del objeto  $\bar{W}^g(G)$  (ver [35]): es decir, la correspondiente del complejo de cadenas  $C_*(\bar{W}^g(G))$ . Vamos a ver cómo podemos traducir este complejo de cadenas de forma directa al terreno algebraico en términos de la construcción Bar. Para ello necesitamos un *nuevo* tipo de “clasificante”.

El análogo algebraico del clasificante geométrico versa sobre álgebras simpliciales, y se denomina *clasificante algebraico*.

Una  $\Lambda$ -álgebra (o, simplemente, álgebra) simplicial  $K$  es un conjunto simplicial donde los  $K_n$  son  $\Lambda$ -álgebras y los operadores  $\partial_i$  y  $s_i$  son morfismos de  $\Lambda$ -álgebras. Un álgebra simplicial  $K$  es conmutativa si cada  $\Lambda$ -álgebra  $K_n$  así lo es. El producto sobre cada álgebra  $K_n$  se denomina *producto interno* del álgebra simplicial  $K$  en cuestión.

Una aumentación de un módulo (resp., álgebra) simplicial  $K$  es un morfismo de  $\Lambda$ -módulos (resp.,  $\Lambda$ -álgebras)  $\xi : K_0 \rightarrow \Lambda$  de modo que  $\xi \partial_0 = \xi \partial_1$ , con  $\partial_0$  y  $\partial_1$  los primeros operadores de cara de  $K_1$ .

A partir de un álgebra simplicial se puede obtener una DG-álgebra, considerando los siguientes morfismos producto y diferencial:

el producto,

$$a_p \star b_q = \sum (-1)^{\text{sig}(\alpha)} (s_{\beta_q} \dots s_{\beta_1} a_p) (s_{\alpha_p} \dots s_{\alpha_1} b_q), \quad (1.11)$$

donde  $a_p \in K_p$ ,  $b_q \in K_q$  y la suma en  $(\alpha, \beta)$  recorre los  $(p, q)$ -shuffles;

y la diferencial,

$$d(a_p) = \sum_{i=0}^p (-1)^i \partial_i(a_p), \quad (1.12)$$

donde  $a_p \in K_p$  y  $\partial_i$  son los operadores de cara de  $K_p$ .

De ser conmutativo el producto interno, el producto  $\star$  también lo es, por extensión. Asimismo, toda aumentación de  $K$  define una aumentación para la DG-álgebra  $K$ . Por otro lado, el objeto normalizado  $K_N$  también adquiere la estructura de DGA-álgebra, de forma natural.

Dada un álgebra simplicial  $K$  conmutativa y aumentada, se puede definir una nueva álgebra simplicial conmutativa aumentada  $\bar{W}(K)$ , *clasificante algebraico de  $K$* , donde los módulos subyacentes  $\bar{W}_q(K)$  consisten en el producto tensorial de álgebras

$$\bar{W}_q(K) = K_{q-1} \otimes \dots \otimes K_0 \quad q \geq 0.$$

Un elemento cualquiera de  $\bar{W}_q(K)$  se escribe entonces en la forma

$$(a_{q-1}, \dots, a_0, \lambda) = \lambda(a_{q-1}, \dots, a_0, 1) = \lambda(a_{q-1}, \dots, a_0),$$

con  $a_i \in K_i$ .

El producto a considerar en cada  $\bar{W}_q(K)$  viene definido por:

$$(a_{q-1}, \dots, a_0) \cdot (b_{q-1}, \dots, b_0) = (a_{q-1}b_{q-1}, \dots, a_0b_0). \quad (1.13)$$

Los operadores de cara y de degeneración consisten en:

$$\partial_0(a_{q-1}, \dots, a_0) = \bar{\xi}(a_{q-1})(a_{q-2}, \dots, a_0),$$



$$\begin{aligned} \partial_i(a_{q-1}, \dots, a_0) &= (\partial_{i-1}a_{q-1}, \partial_{i-2}a_{q-2}, \dots, a_{q-i-1}(\partial_0 a_{q-i}), a_{q-i-2}, \dots, a_0), \quad 0 < i < q, \\ \partial_q(a_{q-1}, \dots, a_0) &= (\partial_{q-1}a_{q-1}, \partial_{q-2}a_{q-2}, \dots, \partial_1 a_1)\xi(a_0), \quad \text{y} \\ s_i(a_{q-1}, \dots, a_0) &= (s_{i-1}a_{q-1}, \dots, s_0 a_{q-i}, 1_{(q-i, K)}, a_{q-i-1}, \dots, a_0). \end{aligned}$$

La aumentación  $\xi_{\bar{W}}$  de este álgebra simplicial se reduce a la aplicación identidad sobre  $\Lambda = \bar{W}_0(K)$ . De este modo, como DGA-álgebra,  $\bar{W}(K)$  resulta ser conmutativa y conexa.

Es importante hacer notar que la hipótesis de conmutatividad sobre el álgebra simplicial  $K$  de partida es esencial para demostrar que la multiplicación que hay en  $\bar{W}_q(K)$  induce una estructura de álgebra simplicial sobre  $\bar{W}(K)$ . De no ser así,  $\bar{W}(K)$  resulta ser, simplemente, un  $\Lambda$ -módulo simplicial. En cualquier caso, siempre es posible construir el complejo normalizado  $\bar{W}_N(K)$  y dotarle de una estructura de coálgebra con el coproducto siguiente:

$$\begin{aligned} \Delta_{\bar{W}} : \bar{W}_N(K) &\rightarrow \bar{W}_N(K) \otimes \bar{W}_N(K) \\ \Delta_{\bar{W}}(a_{q-1}, \dots, a_0) &= \sum_{i=0}^q (\tilde{\partial}^{q-i} a_{q-1}, \dots, \tilde{\partial}^{q-i} a_{q-i}) \otimes (a_{q-i-1}, \dots, a_0), \end{aligned}$$

donde  $\tilde{\partial}^{q-i} a_q = \partial_{i+1} \dots \partial_q a_q$ ,  $a_q \in K_q$ . La aumentación  $\xi_{\bar{W}}$  es la counidad de esta coálgebra.

**Proposición 1.0.9** [83] *Si  $K$  es un álgebra simplicial, entonces  $\bar{W}_N(K)$  es una DGA-coálgebra coconmutativa salvo homotopía. De ser además  $K$  conmutativa, entonces  $\bar{W}_N(K)$  es una DGA-álgebra de Hopf conmutativa y coconmutativa salvo homotopía.*

A estas alturas podemos afirmar que los clasificantes geométrico y algebraico definen básicamente los mismos objetos, desde puntos de vista complementarios. La “duplicidad” de estos conceptos, clasificante geométrico y clasificante algebraico, se remonta a la notación que establecieron Eilenberg y Mac Lane en [62], distinguiendo así de forma explícita los mundos geométrico (simplicial) y algebraico. Recogemos su estrecha relación en el siguiente resultado.

**Proposición 1.0.10** [83] *Dado  $G$  grupo simplicial reducido, la construcción  $\bar{W}_N(C_*(G))$  coincide como DGA-coálgebra con  $C_*^N(\bar{W}_g(G))$ . De ser además  $G$  conmutativo, entonces ambos complejos coinciden como DGA-álgebras de Hopf.*

La demostración de esta proposición se basa fundamentalmente en el hecho de que el funtor  $\Lambda[\ ]$  convierte productos cartesianos en productos tensoriales. El resultado es asimismo válido si tomamos las construcciones  $\bar{W}(C_*(G))$  y  $C_*(\bar{W}_g(G))$  sin normalizar.

Nótese que la estructura de DGA-álgebra de Hopf que presenta  $C_*^N(\bar{W}_g(G))$  es la inducida por el producto de Pontrjagin y el coproducto de Alexander-Whitney.

En adelante, teniendo en cuenta el resultado anterior, notaremos simplemente por  $\bar{W}$  ambos clasificantes, que habremos de entender como geométrico ó algebraico, dependiendo del contexto en que nos encontremos. Eventualmente, de ser necesario o acaso relevante, incidiremos de forma explícita sobre aquel al que nos refiramos en cuestión.

Ahora vamos a relacionar dos construcciones tan relevantes como el clasificante algebraico de álgebras simpliciales y la construcción Bar de álgebras diferenciales graduadas.

Históricamente, estos operadores fueron diseñados para la determinación del álgebra de homología de los espacios de Eilenberg-Mac Lane allá por 1950, de la mano de Eilenberg y Mac Lane mismos [61, 62, 63].

El camino que se marcaron consistía en obtener un “modelo” algebraico de los complejos de cadenas asociados a estos espacios homológicamente equivalente (i.e., isomorfo en homología), de modo que este modelo fuera susceptible de un tratamiento computacional más eficaz con vistas al cálculo real de la homología.

Para este fin, trabajando en un contexto simplicial, introdujeron en [62] de un lado, la construcción clasificante  $\bar{W}(K)$  de una  $\Lambda$ -álgebra simplicial  $K$ ; y, de otro, un objeto “más pequeño”, la construcción bar reducida  $\bar{B}(A)$ , con  $A$  una DGA- $\Lambda$ -álgebra.

Eilenberg y Mac Lane consiguieron ligar estos dos objetos a través de un cuasi-isomorfismo (i.e., un morfismo que induce un isomorfismo en homología), a saber:

$$g : \bar{B}_N(K_N) \rightarrow \bar{W}_N(K).$$

La filosofía del trabajo de Eilenberg y Mac Lane consiste en establecer verdaderas *contracciones*, en lugar de cuasi-isomorfismos, dado que aquéllas permiten un traspaso

de información en ambos sentidos y éstos se aplican en una única dirección. Sin embargo, aunque conjeturaban que la aplicación anterior conformaba en realidad la inclusión de una contracción (ver [62]), fueron incapaces de completar una tal equivalencia de homotopía.

Esta conjetura fue probada en [139, 142], por medio de la Teoría de Perturbación Homológica. Es más, en [21] y [12] se demuestra que la contracción  $C_{\bar{W}-\bar{B}}$  entre  $\bar{W}_N(K)$  y  $\bar{B}_N(K_N)$  es una contracción de álgebras semi-completa.

La utilización de los clasificantes algebraico y geométrico y la contracción semi-completa arriba indicada relacionando clasificante algebraico de un álgebra simplicial y construcción Bar del álgebra diferencial graduada correspondiente, permiten el diseño de una maquinaria de cálculo de la homología de ciertos grupos, por medio de la Teoría de Perturbación Homológica.

De hecho, dado un grupo simplicial reducido  $G$ , el procedimiento consiste en los siguientes pasos:

1. Mediante el isomorfismo descrito en [83], se pasa de  $C_*(\bar{W}^g(G))$  a  $\bar{W}(C_*(G))$ .
2. Se aplica la contracción que liga  $\bar{W}(C_*(G))$  con  $\bar{B}(C_*(G))$ .
3. Se busca algún “modelo homológico” del álgebra  $C_*(G)$  para calcular de la manera más sencilla posible la homología de  $\bar{B}(C_*(G))$ .

En el caso particular de los grupos discretos, el proceder es sustancialmente distinto, en tanto en cuanto los grupos simpliciales asociados no son reducidos. Ahora bien, el análisis detenido de la construcción de la equivalencia de homotopía  $C_{\bar{W}-\bar{B}}$  muestra que en grado simplicial 1 los morfismos de la contracción se comportan como isomorfismos, en realidad; luego en el caso de un grupo discreto  $G$ , resulta que  $C_*(\bar{W}^g(G))$  es canónicamente isomorfo a  $\bar{B}(C_*(G))$ , por lo que el procedimiento a seguir se reduce al paso 3 anterior.

Así, para grupos discretos  $G$ , recuperamos la noción de homología entera en función de la homología de  $\bar{B}(\mathbb{Z}[G])$ .



**Capítulo 2.**  
**Resoluciones.**

# Capítulo 2.

## Resoluciones.

### 2.1 Introducción.

Las resoluciones de anillos sobre álgebras permiten, entre otros, el cálculo de los funtores  $Ext$  y  $Tor$  definidos sobre dichos anillos. En particular, facilitan el cálculo de la (co)homología de grupos, a través de los anillos a ellos canónicamente asociados.

Más concretamente, trabajando en la más amplia categoría de los módulos sobre un anillo conmutativo fijado de unidad distinta al elemento neutro, el procedimiento para generar resoluciones para el cálculo de los funtores  $Ext$  y  $Tor$  es el siguiente.

Un módulo  $P$  se dice *proyectivo* cuando verifica la propiedad universal de que cualquier homomorfismo  $P \rightarrow B/A$  admite una extensión del tipo  $P \rightarrow B$ . Es sabido que todo módulo libre es, en particular, un módulo proyectivo. De este modo, como cualquier módulo se puede expresar como cociente de un módulo libre (por ejemplo, aquel asociado a un sistema de generadores del módulo en cuestión), se tiene que todo módulo es cociente de un módulo proyectivo.

Sea  $A$  un módulo cualquiera, y tomemos un módulo proyectivo  $P_0$  del cual sea  $A$  un cociente; es decir, tal que la sucesión  $P_0 \xrightarrow{\xi} A \rightarrow 0$  sea exacta. Repitiendo este proceso indefinidamente, tomando como módulo de partida el núcleo de la última aplicación construida, resulta una sucesión exacta del tipo

$$\cdots \rightarrow P_2 \xrightarrow{d_2} P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{\xi} A \equiv \xi : (P, d) \rightarrow A,$$

que constituye una *resolución* (proyectiva) de  $A$ . Es más, el DG-módulo  $(P, d)$ , por construcción, presenta por módulos de homología a  $H_0(P) = A$  y  $H_n(P) = 0$  para  $n > 0$ . En general, una *resolución* de  $A$  es una sucesión exacta del tipo anterior, en la



que los módulos  $P_i$  no tienen que ser forzosamente proyectivos. En el caso particular de que sean todos ellos libres, se habla de *resolución libre*.

DG-módulos proyectivos y resoluciones se pueden “comparar”, en el sentido siguiente.

**Teorema 2.1.1 [126] (de comparación de resoluciones)**

*Sean  $f : A \rightarrow A'$  un homomorfismo de módulos,  $\xi : (P, d) \rightarrow A$  un DG-módulo proyectivo sobre  $A$  y  $\xi' : (X', d) \rightarrow A'$  una resolución de  $A'$ . Entonces, existe un homomorfismo de DG-módulos  $g : P \rightarrow X'$  con  $\xi'g = f\xi$ , único salvo equivalencia de homotopía.*

Así, dos resoluciones proyectivas de  $A$  son homotópicas entre sí, de modo que para cualquier  $C$  dado,  $H_n(P \otimes C)$  está unívocamente definido, independientemente de la resolución proyectiva de  $A$  elegida. De hecho, se tiene que  $Tor_n(A, C) = H_n(P \otimes C)$ .

Análogamente, se tiene que  $Ext^n(A, C) = H^n(P, C)$ , independientemente de la elección en la resolución proyectiva  $P$  de  $A$ .

Aunque nuestra atención se centrará en mayor medida en el marco descrito previamente, es conveniente destacar que las resoluciones también intervienen en la determinación de la *dimensión de Krull*  $n$  de un módulo finitamente generado  $A$  sobre un anillo local noetheriano conmutativo  $R$  de ideal maximal  $\mathfrak{m}$ ; de modo que  $n$  coincide con el mayor índice  $k$  que hace de  $Ext^k(R/\mathfrak{m}, A)$  no nulo [93, 79]; esto es, con el mayor índice  $k$  para el que ninguna resolución proyectiva de  $A$  consta de menos de  $k$  módulos proyectivos  $P_i$  (así,  $n$  determina la longitud mínima de las resoluciones proyectivas de  $A$ , y recíprocamente).

En la breve descripción que llevamos acerca de las resoluciones, hemos aplicado este concepto tanto a grupos, como módulos, como álgebras. Desde una perspectiva más amplia, el concepto de resolución, en tanto en cuanto se fundamenta únicamente en propiedades de homomorfismos (exactitud de una sucesión y propiedad universal de un módulo proyectivo), es susceptible de ser extrapolado a aquellas categorías adecuadas, en las que los morfismos se puedan sumar, existan núcleos y conúcleos, etcétera. Este hecho llevó a MacLane [126] a estudiar lo que se dio en llamar *categorías abelianas*, entre las que se encuentran las categorías de los grupos abelianos,

los módulos y las álgebras conmutativas. En estas categorías encontramos generalizaciones apropiadas de objetos proyectivos, resoluciones, teoremas de comparación de complejos proyectivos y resoluciones, etc.

Por otro lado, un mismo objeto puede ser considerado perteneciente a varias categorías abelianas, indistintamente. Este es el caso, por ejemplo, de las siguientes cadenas: de bimódulos a módulos, y de aquí a grupos abelianos; de álgebras de Hopf a álgebras, de aquí a grupos, y entonces a anillos. El esquema general es que existen homomorfismos que permiten pasar, en determinadas circunstancias, de una categoría abeliana a otra: si  $G$  es un grupo, cada  $G$ -módulo es asimismo un grupo abeliano; de otra parte, si  $A$  es un álgebra sobre un anillo  $\Lambda$ , cada  $A$ -módulo es asimismo un  $\Lambda$ -módulo. En cada caso se considera un funtor “olvido”, que determina un homomorfismo de una categoría abeliana en otra, lo que da lugar de forma natural a la definición de funtores *Ext* y *Tor* relativos.

En este sentido, se desarrolló igualmente en los años cincuenta el *álgebra homológica relativa* y los *funtores aditivos y derivados*, que permiten el estudio de las propiedades “heredadas” de un objeto de una categoría cuando se considera como objeto de otra categoría abeliana “menos fina”. Las herramientas fundamentales que permiten estos trasposos cualitativos de información homológica son determinadas clases de sucesiones exactas (llamadas *admisibles*), sobre las que construir la “(co)homología relativa” (esto es, definición de funtores relativos *Ext* y *Tor*).

Dado que el resultado de los cálculos con resoluciones es independiente de la resolución inicialmente elegida (propiedad cualitativa a que se refiere el teorema de comparación 2.1.1), parece oportuno disponer de una comparación cuantitativa de entre las resoluciones, de modo que sea posible calificar su aptitud con vistas a cálculos explícitos.

Dependiendo del contexto, hoy día se conocen algunas resoluciones *minimales* y otras *maximales*.

Por ejemplo, de entre las primeras tenemos aquellas resoluciones que tienen por longitud  $n$  la dimensión de Krull de un anillo local noetheriano (y son minimales, en el sentido de que tienen longitud mínima,  $n$ ); o las *resoluciones de Koszul* de  $P$ -módulos, siendo  $P$  el anillo de polinomios en  $n$  indeterminadas sobre un anillo conmutativo dado (minimales en tanto en cuanto que dada cualquier otra resolución,

existe una inyección de aquéllas en ésta).

Por otro lado, se considera maximal a la *resolución bar* (functorial, definida para categorías abelianas), por analogía a las resoluciones de Koszul: dada otra resolución, la resolución bar se proyecta sobre ésta.

En este sentido, en un discurrir análogo al de la teoría de homotopía racional [137, 138, 161, 162, 163] en su búsqueda de modelos algebraicos [29, 88, 89, 90], es un objetivo fundamental el diseñar métodos de generación de resoluciones “pequeñas”, y el estudio de sus propiedades.

Nuestra intención es estudiar en este capítulo ciertas resoluciones de un anillo  $\Lambda$  conmutativo con unidad distinta de cero, sobre un álgebra  $A$  diferencial, graduada y aumentada (más brevemente, DGA-álgebra); mediante  $A$ -módulos *relativamente libres*. Por tanto, trabajaremos con dos categorías asociadas que permiten el cálculo (co)homológico relativo; cuales son la categoría  $\mathcal{A}$  de las DGA-álgebras sobre  $\Lambda$  y la categoría  $\mathcal{M}$  de los DG-módulos sobre  $\Lambda$ . En momentos puntuales, exigiremos condiciones adicionales sobre  $A$ , cuales son la conmutatividad y la conexión; hablaremos entonces de CDGA-álgebras y CDGAC-álgebras, respectivamente.

Cada DG-módulo  $M$  determina un  $A$ -módulo  $A \otimes M$ , con la propiedad universal de que todo homomorfismo  $u : M \rightarrow C$  de  $M$  sobre un  $A$ -módulo  $C$  se eleva de manera única a un homomorfismo de  $A$ -módulos  $\bar{u} : A \otimes M \rightarrow C$ , con  $u = e\bar{u}$ ,  $e_* : M_* \hookrightarrow A \otimes M_*$  la inclusión natural. Así,  $A \otimes M$  se dice *relativamente libre* en  $\mathcal{A}$ .

Una resolución *relativamente libre*  $\xi : (P, d) \rightarrow C$  sobre un  $A$ -módulo  $C$  es aquella que tiene todos los  $P_n$  relativamente libres. Una resolución *contráctil* es aquella  $\xi : (X, d) \rightarrow C$  en  $\mathcal{M}$  que admite una homotopía de DG-módulos  $t_{-1} : A \rightarrow X_0$ ,  $t_n : X_n \rightarrow X_{n+1}$ , tal que  $1 = d_{n+1}t_n + t_{n-1}d_n$  para  $n \geq 0$ , entendiendo  $d_0 = \xi$ .

Para este par de categorías derivadas, el teorema de comparación 2.1.1 se lee como sigue.

**Teorema 2.1.2 [126] (de comparación de resoluciones)**

Sean  $\xi : (P, d) \rightarrow B$  una resolución relativamente libre y  $\xi' : (X, d) \rightarrow C$  una resolución contráctil. Todo homomorfismo de  $A$ -módulos  $\alpha : B \rightarrow C$  admite una elevación a un homomorfismo de  $A$ -módulos  $f : P \rightarrow X$ , única salvo equivalencia de

homotopía. Tal elevación es única si se exige que los morfismos  $f_n e_n$  se descompongan a través de las homotopías  $t_{n-1}$ , con  $e_n : M_n \rightarrow A \otimes M_n$ .

De hecho,  $f$  viene determinado recursivamente por las fórmulas

$$f_0 e_0 = t_{-1} \alpha \xi e_0, \quad f_{n+1} e_{n+1} = t_n f_n d e_{n+1}.$$

En este capítulo vamos a clarificar el contexto de las *resoluciones que escinden de la resolución bar* [113, 114, 115, 16], aquellas que admiten una contracción de comparación con la resolución bar.

Más concretamente, para el caso de CDGAC-álgebras, primero estudiaremos propiedades multiplicativas subyacentes en la *contracción de comparación canónica* [114, 115] entre una resolución que escinde de la resolución bar y la propia resolución bar; desde el novedoso punto de vista de la Teoría de Perturbación Homológica que Real propone en [141] con la distinción de tipos de contracciones de álgebras, según el grado de compatibilidad con las estructuras multiplicativas que en ellas intervienen. Concluiremos que una tal contracción de comparación canónica es, en general, una contracción de álgebras *casicompleta* (Teorema 2.3.2).

Por otro lado, para aquellas resoluciones que escinden de la resolución bar (según una contracción de comparación, no necesariamente la canónica), detectaremos una  $A_\infty$ -estructura inherente (Teorema 2.4.3), naturalmente heredada de la estructura de coálgebra de la construcción bar. En este proceso, será necesario demostrar ciertas propiedades de compatibilidad entre una resolución que escinde de la resolución bar y sus complejos reducidos asociados (teoremas 2.4.1 y 2.4.2), y un resultado más general que comprende la transferencia de la estructura de coálgebra en un producto tensorial torcido, a partir de una contracción y bajo ciertas hipótesis adicionales, en la estructura de una  $A_\infty$ -coálgebra y un  $A_\infty$ -producto tensorial en el DG-módulo de llegada de la contracción (Teorema 2.4.4).

Además, estudiaremos el problema general de la comparación de resoluciones contráctiles al anillo base, de modo que que aunque no siempre es posible la construcción de la contracción de comparación canónica con la resolución bar (Teorema 2.5.8); demostraremos que en cualquier caso siempre existe un sombrero de contracciones de comparación para estas resoluciones (Teorema 2.5.4), que extiende de manera natural a la contracción de comparación canónica (Teorema 2.5.5).



En conclusión, deduciremos que en el manejo de resoluciones que escinden de la resolución bar es equivalente trabajar a nivel de resoluciones o a nivel de contracciones entre los complejos reducidos asociados (Teorema 2.5.9). En particular, en el resto de la memoria se optará por esta segunda forma de trabajar.

## 2.2 Resoluciones que escinden de la resolución bar.

Sea  $\Lambda$  un anillo conmutativo con unidad distinta de cero, y  $A$  una DGA-álgebra sobre  $\Lambda$ . Notemos por  $\bar{A}$  a  $\ker \xi_A$ , que coincidirá con el cociente  $A/\Lambda$  en caso de ser  $A$  conexa.

Ya hemos visto que la construcción bar (normalizada) de  $A$ ,  $\bar{B}(A)$ , se define como el DG-módulo tensorial aumentado  $T(S(\bar{A})) = \bigoplus_{n \geq 0} (\bar{A} \otimes \cdots \otimes \bar{A})$ , cuya diferencial total  $d_{\bar{B}}$  es suma de las diferenciales simplicial

$$d_s([a_1 | \cdots | a_n]) = \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^{e_i} [a_1 | \cdots | \mu_A(a_i \otimes a_{i+1}) | \cdots | a_n],$$

y tensorial

$$d_t([a_1 | \cdots | a_n]) = - \sum_{i=1}^n (-1)^{e_{i-1}} [a_1 | \cdots | a_{i-1} | da_i | a_{i+1} | \cdots | a_n],$$

donde  $e_i = i + |a_1| + \cdots + |a_i|$ .

Debemos recalcar que en el caso  $A$  no conexo, en grado 0 aparecen elementos que no son escalares y, aún así, pueden no estar en  $\ker \xi_A$ . Si  $a$  es uno de estos elementos, está claro que  $a \notin \ker \xi_A$ , pero en cambio  $a - \xi_A(a) \in \ker \xi_A = \bar{A}$ .

Ya se comentó en el capítulo de fundamentos que esta aplicación definía un isomorfismo entre las dos definiciones posibles de  $\bar{B}(A)$ ; la anterior,  $(T(S(\ker \xi_A)), d_{\bar{B}})$ ; y el cociente  $(T(S(A))/s(T(S(A))), d_{\bar{B}})$ , en el que se identifica a 0 cualquier upla que contenga alguna entrada escalar.

Nosotros trabajaremos generalmente con la primera de las caracterizaciones, aunque en el caso de álgebras libres  $\mathbb{Z}[G]$  sobre grupos  $G$  (en particular, en el capítulo cuatro de la memoria), tendremos que utilizar este isomorfismo.

La construcción bar presenta una estructura de cóalgebra, heredada del módulo

tensorial, mediante el coproducto tensorial  $\Delta_{\bar{B}} : \bar{B}(A) \rightarrow \bar{B}(A) \otimes \bar{B}(A)$ , dado por

$$\Delta_{\bar{B}}([a_1 | \cdots | a_n]) = \sum_{i=0}^n [a_1 | \cdots | a_i] \otimes [a_{i+1} | \cdots | a_n].$$

En caso de ser  $A$  conmutativa,  $\bar{B}(A)$  adquiere, además, la estructura de CDGAC-álgebra de Hopf con el *producto shuffle*  $\star : \bar{B}(A) \otimes \bar{B}(A) \rightarrow \bar{B}(A)$ , que suma salvo signo todas las posibles mezclas de dos listas dadas conservando el orden interno de sus elementos:

$$[a_1 | \cdots | a_p] \star [b_1 | \cdots | b_q] = \sum_{\pi} (-1)^{\varepsilon(\pi)} [c_{\pi(1)} | \cdots | c_{\pi(p+q)}],$$

donde  $(c_1, \dots, c_{p+q}) = (a_1, \dots, a_p, b_1, \dots, b_q)$ ,  $\pi$  recorre aquellas permutaciones del conjunto  $\{1, \dots, p+q\}$  que dejan ordenados entre sí los elementos de los subconjuntos  $\{1, \dots, p\}$  y  $\{p+1, \dots, p+q\}$ , y el exponente

$$\varepsilon(\pi) = \sum_{\pi(i) > \pi(p+j)} (1 + |a_i|)(1 + |b_j|).$$

Con generalidad, a excepción de la sección siguiente, trabajaremos con álgebras  $A$  no necesariamente conmutativas. En cualquier caso, cuando necesitemos de tal condición, lo expresaremos de forma tácita.

La resolución bar de  $A$ ,  $B(A)$ , se define como el producto tensorial torcido inducido por la cocadena de torsión *universal*  $\theta : \bar{B}(A) \rightarrow A$ ,  $A \otimes_{\theta} \bar{B}(A)$ , que actúa de manera no trivial únicamente sobre los elementos de dimensión simplicial uno,

$$\theta([a_1 | \cdots | a_n]) = \begin{cases} a_1, & \text{si } n = 1, \\ 0, & \text{si } n \neq 1. \end{cases}$$

Así, la diferencial  $d_{B(A)}$  queda definida como

$$d_B(a \otimes [a_1 | \cdots | a_n]) = da \otimes [a_1 | \cdots | a_n] + (-1)^{|a|} a \otimes d_{\bar{B}}([a_1 | \cdots | a_n]) + \mu_A(a, a_1)[a_2 | \cdots | a_n].$$

En caso de ser  $A$  conmutativa,  $B(A)$  adquiere asimismo una estructura de CDGA-álgebra, conexa de serlo  $A$ , con el producto canónico

$$\mu_{B(A)} = (\mu_A \otimes \star)(1 \otimes T \otimes 1),$$

donde  $T$  representa el operador trasposición,  $T(a \otimes b) = (-1)^{|a||b|} b \otimes a$ .



La homotopía  $s : B(A) \rightarrow B(A)$  definida como

$$s(a \otimes [a_1 | \cdots | a_n]) = [a|a_1 | \cdots | a_n],$$

hace de  $\xi : (B(A), d_B) \rightarrow \Lambda$  una *resolución contráctil* a  $\Lambda$ , dado que  $d_B s + s d_B = 1$ . Nótese que el operador  $s$  es  $\Lambda$ -lineal, pero en ningún caso  $A$ -lineal.

Esta será nuestra resolución de partida, y estudiaremos su comparación con resoluciones relativamente libres  $\xi : (X, d) \rightarrow A$ , que tienen por módulos  $X_n = A \otimes \bar{X}_n$ , con cada  $\bar{X}_n$  un  $\Lambda$ -módulo (ver [126]).

El módulo graduado  $\bar{X}$  se conoce como *complejo reducido de la resolución*, y siempre se puede obtener en la forma  $\bar{X} = \Lambda \otimes_A X$ .

Recordemos que el producto tensorial de  $A$ -módulos,  $B \otimes_A C$ , sobre la DGA-álgebra  $A$  viene dado por el conúcleo del homomorfismo  $p : B \otimes A \otimes C \rightarrow B \otimes C$  con

$$p(b \otimes a \otimes c) = \mu(b \otimes a) \otimes c - b \otimes \mu(a \otimes c).$$

A partir de ahora, por resolución entenderemos una resolución relativamente libre.

En [114, 115], Lambc establece una comparación entre la resolución bar  $B(A)$  y una resolución  $\xi : (X, d) \rightarrow A$  en términos del Teorema 2.1.2 de comparación de resoluciones; de modo que obtiene el homomorfismo  $A$ -lineal  $g : X \rightarrow B(A)$  de comparación canónicamente definido por recursión,

$$g_0|_{\bar{x}_0} = \xi, \quad g_{n+1}|_{\bar{x}_{n+1}} = s g_n d_{n+1}|_{\bar{x}_{n+1}}.$$

Esta aplicación define en general una equivalencia de homotopía entre  $B(A)$  y  $X$ .

Más aún, cuando la resolución  $X$  de partida es contráctil a  $\Lambda$ , mediante un operador  $t$   $\Lambda$ -lineal (que no  $A$ -lineal), en muchos casos resulta ser la inyección de una contracción.

En cualquier caso, a partir de  $t$  es posible aplicar nuevamente el teorema de comparación 2.1.2, esta vez en sentido inverso, de modo que se obtiene por recursión el homomorfismo  $A$ -lineal  $f : B(A) \rightarrow X$ , con

$$f_0|_{\bar{B}(A)_0} = 1_\Lambda, \quad f_{n+1}|_{\bar{B}(A)_{n+1}} = t f_n d_{n+1}|_{\bar{B}(A)_{n+1}}.$$

Las composiciones de estos dos homomorfismos de comparación son ambas homotópicas a la identidad, y  $f$  y  $g$  pueden por tanto completarse hasta formar un sombrero de contracciones (un par de contracciones con DG-módulo mayor común, y DG-módulos pequeños respectivos  $B(A)$  y  $X$ ).

Nosotros nos centraremos en principio en el caso en que  $f$  y  $g$  conforman una verdadera contracción (esto es, cuando  $fg = 1$ ), que llamaremos *contracción de comparación canónica*. Posteriormente, abordaremos el problema más general del sombrero de contracciones.

Las resoluciones que admiten una contracción desde la resolución bar (que llamaremos *contracción de comparación*, en general distinta de la canónica), las denominaremos *resoluciones que escinden de la resolución bar*, por extensión de las definiciones en [113, 114, 115]. El sentido de “escisión” proviene del hecho de que dichas resoluciones conforman DG-módulos pequeños en contracciones  $c(f', g', \phi')$  que tienen a  $B(A)$  como DG-módulo mayor, de modo que se da la descomposición  $B(A) = X \oplus \ker(g'f')$ .

Para determinar un operador de homotopía  $\phi : B(A) \rightarrow B(A)$  que complete la hipotética contracción de comparación canónica, procedemos de la siguiente manera.

Teniendo en cuenta que  $\phi$  debe ser  $A$ -lineal, trataremos de encontrar un operador  $\phi$  de modo que “respete el complejo reducido”, es decir, de modo que  $\phi(\bar{B}(A)) \subset \bar{B}(A)$ ; así, bastaría definir  $\phi$  actuando sobre elementos del complejo reducido  $\bar{B}(A)$ . Los homomorfismos que verifican esta propiedad de “respetar complejos reducidos” los llamaremos *especiales*, siguiendo la notación introducida por Cartan en [40].

Dado que  $1 = d_B s + s d_B$ , componiendo a derecha por  $\phi$  obtenemos que  $\phi = d_B s \phi + s d_B \phi = s d_B \phi$ , por ser  $\phi$  especial y  $s$  nulo actuando sobre el complejo reducido  $\bar{B}(A)$ .

Ahora bien, como  $\phi$  debe verificar que  $1 - gf = d_B \phi + \phi d_B$ , despejando de aquí el término  $d_B \phi$  y sustituyendo en la expresión anterior, obtenemos que

$$\phi = s(1 - gf - \phi d_B) = -s g f - s \phi d_B,$$

expresión que define  $\phi$  de modo recursivo actuando sobre elementos en el complejo reducido  $\bar{B}(A)$ .

Comprobamos que esta definición coincide con la dada por Lambe en [114, 115].

En este estadio, es importante destacar que ambos los morfismos  $g$  y  $\phi$  son especiales, puesto que respetan complejos reducidos. Sin embargo, el homomorfismo  $f$ , en general, **no es especial**. Nótese que el carácter especial de  $g$  y  $\phi$  proviene del tan particular operador de homotopía  $s$  que hace de  $B(A)$  contráctil a  $\Lambda$ .

Sin embargo, la definición de  $f$  depende, no de  $s$ , sino del operador de contracción  $t$  de la resolución  $X$ . Y de este operador, en general, nada sabemos, más que no suele dar lugar a un homomorfismo especial. Más aún, de ser  $f$  especial, aplicando resultados que recoge Cartan en [40], se puede probar que en este caso la composición  $gf$  también es la identidad, y la resolución  $X$  no es más que la propia resolución bar,  $B(A)$ .

Nos centramos, entonces, en el caso interesante, que es aquel en que  $f$  no es especial y  $X$  es, en verdad, una resolución “más fina” que  $B(A)$ .

Sobre estas resoluciones, Lambé recoge en [114, 115] fórmulas recursivas, que mejoran en algo las anteriores en el caso de  $f$  y  $\phi$ . Más concretamente,

$$f([b_1]) = t(b_1), \quad f[b_1 | \cdots | b_n] = t(b_1 \otimes f([b_2 | \cdots | b_n])), \quad (2.1)$$

$$\phi|_{||=0} = 0, \quad \phi([b_1 | \cdots | b_n]) = \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i [b_1 | \cdots | b_i | s g f([b_{i+1} | \cdots | b_n])]. \quad (2.2)$$

Nosotros vamos a demostrar que esta contracción de comparación canónica es, en el caso  $A$  conmutativo, una contracción de álgebras *casicompleta* (Teorema 2.3.2).

Por otro lado, para aquellas resoluciones que escinden de la resolución bar (no necesariamente según la contracción de comparación canónica), detectaremos una  $A_\infty$ -estructura inherente (Teorema 2.4.3), naturalmente heredada de la estructura de coálgebra de la construcción bar.

Además, estudiaremos el problema general de la comparación de resoluciones contráctiles al anillo base, de modo que aunque no siempre es posible la construcción de la contracción de comparación canónica con la resolución bar (Teorema 2.5.8); demostraremos que en cualquier caso siempre existe un *sombrero de contracciones de comparación canónica* para estas resoluciones (Teorema 2.5.4), que extiende de manera natural a la contracción de comparación canónica (Teorema 2.5.5).

Para finalizar, deduciremos que en el manejo de resoluciones que escinden de la

resolución bar es equivalente trabajar a nivel de resoluciones o a nivel de contracciones entre los complejos reducidos asociados (Teorema 2.5.9).

## 2.3 Análisis multiplicativo en la comparación de resoluciones.

Siguiendo las notaciones fijadas en la sección anterior, consideremos una resolución  $\xi : (X, d) \rightarrow \Lambda$  que escinde de la resolución bar, que sea contráctil a  $\Lambda$  según una homotopía  $t$ , y sea  $(f, g, \phi)$  la contracción de comparación canónica que genera  $t$  de  $B(A)$  a  $X$ .

Primero vamos a constatar que no se ha de modificar el operador de homotopía  $\phi$  para garantizar las condiciones laterales de anulación.

**Proposición 2.3.1** *Los morfismos  $f$ ,  $g$  y  $\phi$  verifican las condiciones complementarias de anulación de una contracción:  $f\phi = 0$ ,  $\phi g = 0$  y  $\phi\phi = 0$ .*

### Demostración.

Dado el carácter  $A$ -lineal de los morfismos, basta probar las identidades para elementos que pertenezcan al complejo reducido correspondiente. Procederemos por inducción en el grado del elemento inicial.

Para elementos de grado 0 (escalares), las identidades son trivialmente ciertas, dado que  $\phi|_{||=0} = 0$ .

Para grado  $n > 0$ , sabiendo que  $1 - gf = d\phi + \phi d$ ,  $fg = 1$  y que  $d$  conmuta con  $f$  y  $g$ , se tiene que:

- De un lado,

$$f\phi = tfd\phi = tf - tf\phi d - tfgf = -tf\phi d = 0,$$

por hipótesis de inducción.

- De otro,

$$\phi g = -s\phi dg - sgfg = -s\phi gd - sg = 0,$$

por hipótesis de inducción el primer sumando, y por ser  $s|_{\bar{B}} = 0$  y  $g$  especial.

- Finalmente,

$$\phi\phi = -s\phi d\phi = -s\phi + s\phi\phi d + s\phi g f,$$

donde los tres sumandos son nulos: el primero, por ser  $s|_{\bar{B}} = 0$  y  $\phi$  especial; el segundo, por hipótesis de inducción; y el tercero, por ser  $\phi g = 0$ , tal como se ha probado en el punto anterior. ■

Ahora, supongamos que, además, la DGA-álgebra inicial  $A$  es conmutativa, y que  $t$  es una cuasi-homotopía de álgebras. Entonces podemos garantizar el siguiente resultado.

**Teorema 2.3.2** *El  $A$ -módulo  $(X, d)$  tiene estructura de CDGA-álgebra, conexa de serlo  $A$ , mediante el producto  $\mu_X = f\mu_{B(A)}(g \otimes g)$ . Más aún, con respecto a los productos anteriores, la contracción  $(f, g, \phi)$  es una contracción de álgebras casi-completa.*

La demostración de este teorema requiere varios resultados auxiliares previos.

Sea  $(B, \mu_B)$  una CDGA-álgebra,  $M$  un DGA-módulo y  $c : \{B, M, f', g', \phi'\}$  una contracción de DGA-módulos. El hallar bajo qué condiciones se puede definir una estructura de álgebra en  $M$  ha sido un problema ya abordado por Gugenheim y Stasheff en [85] y, más recientemente, por Real en [141].

Los primeros, observaron que el morfismo candidato para dotar a  $M$  de estructura de álgebra, de modo natural, es  $\mu_M = f'\mu_B(g' \otimes g')$ . Pero a la hora de garantizar la asociatividad de tal “producto”, se veían en la obligación de tomar la diferencial trivial sobre  $M$ .

El trabajo del profesor Real evita esta exigencia tan restrictiva, y cristaliza en la forma siguiente. Reproducimos la demostración del resultado para que quede reflejado explícitamente el porqué de la condición de la hipótesis.

**Lema 2.3.3** [141] *Si  $\phi'\mu_B(g' \otimes g') = 0$ , la aplicación  $\mu_M$  dota a  $M$ , en verdad, de una estructura natural de CDGA-álgebra. Más aún, la inyección  $g'$  resulta ser un morfismo de CDGA-álgebras con estos productos.*

**Lema 2.3.4** [141] Sean  $B$  y  $B'$  dos CDGA-álgebras y  $(f', g', \phi')$  una contracción de DGA-módulos. Se tiene que

$$\phi' \mu_B - \mu_B \phi'^{[\otimes 2]} = \phi' \mu_B \phi'^{[\otimes 2]}(d \otimes 1 + 1 \otimes d) - d \phi' \mu_B \phi'^{[\otimes 2]} - g' f' \mu_B \phi'^{[\otimes 2]},$$

donde  $\phi'^{[\otimes 2]} = 1 \otimes \phi' + \phi' \otimes g' f'$ .

Progresando sobre esta identidad, es sencillo demostrar esta otra.

**Lema 2.3.5** En las condiciones del lema anterior, si  $f'$  es una cuasi-proyección de álgebras y  $\phi'$  una cuasi-homotopía de álgebras, entonces

$$\mu_B(\phi'(a) \otimes \phi'(b)) = (-1)^{|a|+1} \phi'(\mu_B(\phi'(a) \otimes b)) + \phi'(\mu_B(a \otimes \phi'(b))), \quad a, b \in B.$$

**Demostración.**

Apliquemos la expresión del Lema 2.3.4 al elemento  $\phi'(a) \otimes b$ . Teniendo en cuenta el hecho de que  $f'$  es una cuasi-proyección de álgebras y  $\phi'$  una cuasi-homotopía de álgebras, muchos términos cancelan, de modo que resulta:

$$\phi' \mu_B(\phi'(a) \otimes b) - (-1)^{|a|+1} \mu_B(\phi'(a) \otimes \phi'(b)) = (-1)^{|a|} \phi' \mu_B(d \phi'(a) \otimes \phi'(b));$$

multiplicando la expresión por  $(-1)^{|a|}$  y sustituyendo  $d \phi' = 1 - g' f' - \phi' d$ , resulta la identidad deseada:

$$\mu_B(\phi'(a) \otimes \phi'(b)) = (-1)^{|a|+1} \phi'(\mu_B(\phi'(a) \otimes b)) + \phi'(\mu_B(a \otimes \phi'(b))), \quad a, b \in B.$$

■

Estamos ahora en condiciones de iniciar la demostración del Teorema 2.3.2.

**Demostración del Teorema 2.3.2.**

La prueba de este resultado la desglosaremos en dos etapas.

Paso 1. Primero, demostraremos que la aplicación  $\mu_X$  definida por  $f \mu_{B(A)}(g \otimes g)$  dota a  $(X, d)$  de estructura de CDGA-álgebra, con respecto a la cual es la inyección  $g$  un morfismo de CDGA-álgebras. La idea es utilizar el Lema 2.3.3, para lo cual

hay que probar que  $\phi\mu_{B(A)}(g \otimes g) = 0$ . A tal efecto, seguiremos un elaborado proceso de inducción.

Es claro que basta probar que  $\phi\mu_{B(A)}(g \otimes g)$  es nulo para elementos en  $\bar{X} \otimes \bar{X}$ , dado que tanto  $g$  como  $\phi$  son  $A$ -lineales y especiales, y el producto  $\mu_{B(A)} = (\mu_A \otimes \star)(1 \otimes T \otimes 1)$ .

Dada la especialidad de  $g$  y  $\phi$ , podemos sustituir  $\phi$  en la expresión anterior por su definición recursiva, de modo que

$$\phi_{k+1}\mu_{B(A)}(g \otimes g)|_{||=k+1} = -s\phi_k d\mu_{B(A)}(g \otimes g)|_{||=k+1} - sgf\mu_{B(A)}(g \otimes g)|_{||=k+1},$$

donde con vistas a facilitar la lectura, a excepción del operador  $\phi$ , omitimos en cada momento los subíndices que expresan el grado en que se aplican las funciones.

Pretendemos establecer un proceso inductivo sobre el grado total del elemento  $\bar{x} \otimes \bar{x}'$  de  $\bar{X} \otimes \bar{X}$  al que aplicar la composición  $\phi\mu_{B(A)}(g \otimes g)$ .

La idea es la siguiente: probar que  $sgf\mu_{B(A)}(g \otimes g)$  es nulo sobre  $(\bar{X} \otimes \bar{X})_k$ , entonces sobre  $(X \otimes X)_k$ ; después, probar que  $s\phi d\mu_{B(A)}(g \otimes g)$  es nulo sobre  $(\bar{X} \otimes \bar{X})_k$ , y por tanto, también sobre  $(X \otimes X)_k$ ; concluir que  $\phi\mu_{B(A)}(g \otimes g)$  es nulo sobre  $(X \otimes X)_k$ .

En grado 0, por ser  $\phi|_{||=0} = 0$ , se verifica trivialmente.

Supuesto demostrado para grados menores o iguales que  $k$ , lo demostramos para elementos  $\bar{x} \otimes \bar{x}'$  de grado  $k + 1$ .

El primero de los sumandos anteriores,  $s\phi d\mu_{B(A)}(g \otimes g)$ , es nulo por hipótesis de inducción: basta observar que la diferencial  $d$  es compatible con el producto  $\mu_{B(A)}$ , y la diferencial  $d \otimes 1 + 1 \otimes d$  es asimismo compatible con el morfismo  $g \otimes g$ .

Para probar que  $sgf\mu_{B(A)}(g \otimes g)$  es nulo sobre estos elementos realizamos las siguientes sustituciones. En grado  $k + 1$ , es  $1 = sd + ds$ ; componiendo con  $d$  a izquierda de la definición recursiva de  $\phi$  y sustituyendo adecuadamente la igualdad anterior, obtenemos que

$$d\phi = -\phi d + sd\phi d - gf + sdgf,$$

de donde

$$d\phi + \phi d = sd\phi d - gf + sdgf.$$

Comparando esta identidad con  $1 - gf = d\phi + \phi d$ , concluimos que

$$1 = sd\phi d + sdgf,$$

actuando sobre  $\bar{X}$ .

Así, sobre elementos  $\bar{x} \otimes \bar{x}'$  de grado  $k + 1$ , es

$$sgf\mu_{B(A)}(g \otimes g) = sgf(sd\phi d + sdgf)\mu_{B(A)}(g \otimes g).$$

Ambos sumandos son claramente nulos, por hipótesis de inducción, dado que la diferencial  $d$  traspasa hasta  $\dots (g \otimes g)(d \otimes 1 + 1 \otimes d)$ . Aquí es fundamental el hecho de que  $sgf\mu_{B(A)}(g \otimes g)$  se anula sobre todo  $(X \otimes X)_k$ , según la hipótesis de inducción.

Queda demostrar, ahora, que  $sgf\mu_{B(A)}(g \otimes g)$  también se anula sobre  $(X \otimes X)_{k+1}$ , además de sobre  $(\bar{X} \otimes \bar{X})_{k+1}$ . Éste es el punto más delicado de la demostración, y se salva con un razonamiento similar al anterior.

Tomemos un elemento genérico  $(a \otimes \bar{x}) \otimes (a' \otimes \bar{x}')$  de  $X \otimes X$  de grado  $k + 1$ .

Entonces,

$$sgf\mu_{B(A)}(g(a \otimes \bar{x}) \otimes g(a' \otimes \bar{x}')) = (-1)^{|a'| |\bar{x}|} s(aa' g f \mu_{B(A)}(g(\bar{x}) \otimes g(\bar{x}'))).$$

Ahora bien, según lo expuesto anteriormente,

$$s(aa' g f \mu_{B(A)}(g(\bar{x}) \otimes g(\bar{x}'))) = s(aa' g f (sd\phi d + sdgf)\mu_{B(A)}(g(\bar{x}) \otimes g(\bar{x}'))),$$

y los términos

$$(sd\phi d + sdgf)\mu_{B(A)}(g(\bar{x}) \otimes g(\bar{x}'))$$

son nulos por hipótesis de inducción.

Paso 2. Ahora, demostraremos que la contracción dada es, en verdad, una contracción casi-completa (i.e.,  $f$  es morfismo de DGA-álgebras y  $\phi$  una cuasi-homotopía de álgebras). Para ello, estableceremos procesos inductivos similares al efectuado en el paso anterior.

Para probar que  $f$  es un morfismo de CDGA-álgebras, es suficiente probar que  $\mu_X(f \otimes f) = f\mu_{B(A)}$  sobre elementos  $\bar{b} \otimes \bar{b}'$  de  $\bar{B}(A) \otimes \bar{B}(A)$ , lo cual haremos por inducción en el grado de dicho elemento.

En grado cero, no hay nada que probar, pues trabajamos con el anillo base  $\Lambda$ . Supuesto que se ha probado para elementos de grado menor o igual que  $k$ , lo probamos para elementos de grado  $k + 1$ .





Teniendo en cuenta la definición recursiva de  $f$  sobre los elementos del complejo reducido, y aplicamos la tesis del Lema 2.3.5 (cuyas hipótesis se verifican, por la condición de cuasi-homotopía de álgebras de  $t$ ), resulta que

$$\begin{aligned} \mu_x(f(\bar{b} \otimes \bar{b}')) &= \mu_x(tfd(\bar{b}) \otimes tfd(\bar{b}')) = \\ &= (-1)^{|\bar{b}|} t\mu_x(tfd(\bar{b}) \otimes fd(\bar{b}')) + t\mu_x(fd(\bar{b}) \otimes tfd(\bar{b}')) = \\ &= (-1)^{|\bar{b}|} t\mu_x(f(\bar{b}) \otimes fd(\bar{b}')) + t\mu_x(fd(\bar{b}) \otimes f(\bar{b}')). \end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} f\mu_{B(A)}(\bar{b} \otimes \bar{b}') &= tfd\mu_{B(A)}(\bar{b} \otimes \bar{b}') = \\ &= tf\mu_{B(A)}(d(\bar{b}) \otimes \bar{b}') + (-1)^{|\bar{b}|} tf\mu_{B(A)}(\bar{b} \otimes d(\bar{b}')) = \\ &= t\mu_x(fd(\bar{b}) \otimes f(\bar{b}')) + (-1)^{|\bar{b}|} t\mu_x(f(\bar{b}) \otimes fd(\bar{b}')); \end{aligned}$$

donde la última igualdad es válida aplicando hipótesis de inducción.

Para terminar de probar que la contracción dada es casi-completa, tenemos que ver que se dan las relaciones

$$\begin{aligned} \phi\mu_{B(A)}(\phi \otimes g) &= 0, \\ \phi\mu_{B(A)}(g \otimes \phi) &= 0, \\ \phi\mu_{B(A)}(\phi \otimes \phi) &= 0. \end{aligned}$$

En los tres casos, seguimos una demostración por inducción en el grado del elemento sobre el que se aplican.

En grado cero, por ser  $\phi|_{|\cdot|=0} = 0$ , las tres relaciones son ciertas.

Supuesto que se dan para elementos de grado no superior a  $k$ , probemos que se verifican para elementos de grado  $k + 1$ .

El proceder general es sustituir  $\phi\mu_{B(A)}$  por

$$-s\phi d\mu_{B(A)} - sgf\mu_{B(A)} = s\phi\mu_{B(A)}(d \otimes 1 + 1 \otimes d) - sg\mu_x(f \otimes f),$$

esperando poder cancelar las expresiones anteriores recurriendo a la hipótesis de inducción. Los términos que dan lugar a  $dg \otimes \phi$  ó  $\phi \otimes dg$  se cancelan por este motivo, dado que  $dg = gd$  y se rebaja el grado del elemento de entrada en una unidad. Los términos del tipo  $sg\mu_x(f \otimes f)$  son directamente todos nulos, por ser  $f\phi = 0$ .

En definitiva, resta ver la nulidad de expresiones del tipo

$$\begin{aligned} s\phi\mu_{B(A)}(d\phi \otimes g), & \quad s\phi\mu_{B(A)}(g \otimes d\phi), \\ s\phi\mu_{B(A)}(d\phi \otimes \phi), & \quad s\phi\mu_{B(A)}(\phi \otimes d\phi). \end{aligned}$$

Sustituyendo  $d\phi$  por  $1 - gf - \phi d$ , todas las relaciones anteriores se anulan, bien por hipótesis de inducción (caso del término  $\phi d$ ), bien por ser la imagen por  $s$  de un elemento del complejo reducido  $\bar{B}(A)$  (caso de 1, dada la especialidad de  $\phi$  y  $g$ ), bien por ser  $g$  multiplicativa (pasando  $\phi\mu_{B(A)}(g \otimes g)$  a la forma  $\phi g\mu_X$ , que es nula por ser  $\phi g = 0$ ).

De este modo, concluimos que la contracción de comparación canónica  $(f, g, \phi)$  de  $B(A)$  a  $X$  es casi-completa. ■

Este resultado completa el estudio de Lambe en [114, 115], con respecto a las estructuras multiplicativas implicadas en las resoluciones que escinden de la resolución bar.

Así, dada cualquier resolución  $X$  contráctil a  $\Lambda$  que escinda de la resolución bar  $B(A)$ , es posible definir en  $X$  un producto, heredado del producto en  $B(A)$ . Y, más aún, con respecto a estos productos, la contracción de comparación canónica que define  $t$  es una contracción de álgebras casi-completa.

En adelante,  $A$  no será en general un álgebra necesariamente conmutativa.

## 2.4 Análisis de la diferencial en la comparación de resoluciones.

En esta sección, tomando como entrada una resolución  $(X, d)$  que escinda de  $B(A)$ , construiremos otra resolución  $(X', d')$  que asimismo escinde de  $B(A)$ , con la particularidad de que:

- Como módulo graduado,  $X$  coincidirá con  $X'$ .

- La estructura diferencial  $d'$  en  $X'$  es la propia de un  $A_\infty$ -producto tensorial torcido.
- En el caso de que la contracción de comparación de partida sea la canónica, entonces  $d' = d$ .

En definitiva, se determina una estructura adicional en la diferencial del complejo pequeño en la contracción de comparación canónica de resoluciones.

Este proceso de transferencia se realizará en dos pasos: primero, se reducirá una contracción de comparación de resoluciones a la naturalmente asociada entre los complejos reducidos correspondientes; y, a partir de ésta, se reconstruirá una nueva contracción de comparación entre resoluciones, en el que la diferencial es multiplicativamente más adecuada.

### 2.4.1 De resoluciones a complejos reducidos.

Partamos de la contracción de comparación canónica  $(f, g, \phi)$  de la resolución bar a una resolución  $(X, d)$  contráctil a  $\Lambda$  según  $t$ . En este caso, como módulo graduado, sabemos que  $X = A \otimes \bar{X}$ , donde  $X$  es un  $\Lambda$ -módulo graduado. Más aún, se tiene que  $\bar{X} = \Lambda \otimes_A X$ .

Si se quiere obtener una contracción que relacione complejos reducidos, parece natural intentar multiplicar tensorialmente la contracción anterior a izquierda por  $A$ , esperando que los morfismos así construidos estén bien definidos. De ser así, la contracción entre complejos reducidos estaría servida. A continuación vamos a ver que este proceso es, en efecto, válido.

Primero, observemos que  $\Lambda$  puede ser considerado como un  $A$ -módulo mediante el “pullback” de la aumentación  $\xi : A \rightarrow \Lambda$ . Ahora, construimos el  $DG$ -módulo sobre  $\Lambda$  que consiste en el producto tensorial sobre  $A$  de los  $A$ -módulos  $\Lambda$  y  $X$ ,  $\Lambda \otimes_A X$ , cuya diferencial es la usual:  $\bar{d} = 1 \otimes_A d$ . Análogamente se construye el  $DG$ - $\Lambda$ -módulo  $\Lambda \otimes_A B(A)$ .

Ahora, para que el conjunto  $(1 \otimes_A f, 1 \otimes_A g, 1 \otimes_A \phi)$  defina una contracción entre los  $DG$ -módulos anteriores, es necesario que las aplicaciones componentes estén bien definidas como morfismos de  $DG$ -módulos.

Claramente, por ser  $g$  y  $\phi$  especiales y  $A$ -lineales,  $1 \otimes_A g$  y  $1 \otimes_A \phi$  están bien definidos como morfismos de DG-módulos. Sin embargo, a pesar de que  $f$  es  $A$ -lineal, el hecho de no ser especial se traduce en que  $(1 \otimes_A f)(1 \otimes_A d)$  pudiera no ser igual a  $(1 \otimes_A d)(1 \otimes_A f)$ .

No obstante, dado que las diferenciales  $1 \otimes_A d$  están bien definidas (en tanto en cuanto la diferencial  $\partial$  de un  $A$ -módulo verifica que  $\partial(ax) = d(a)x + (-1)^{|a|}a\partial(x)$ , ver [126]); se puede asegurar que  $d(\ker \xi_A \otimes \bar{X}) \subset \ker \xi \otimes \bar{B}(A)$ , por lo que  $(1 \otimes_A f)(1 \otimes_A d) = (1 \otimes_A d)(1 \otimes_A f)$ .

Por este mismo motivo, las propiedades características para ser contracción se heredan de las propias del conjunto  $(f, g, \phi)$ , de donde  $(1 \otimes_A f, 1 \otimes_A g, 1 \otimes_A \phi)$  constituye una verdadera contracción entre los complejos reducidos de las resoluciones de partida. Nótese que  $1 \otimes_A g = g|_{\bar{X}}$  y  $1 \otimes_A \phi = \phi|_{\bar{B}(A)}$ , por ser ambos morfismos especiales; en cambio,  $1 \otimes_A f = \chi_{\bar{X}} f|_{\bar{B}(A)}$ , resultante de eliminar en  $\text{Im}(f)$  todos los términos con entrada no escalar en  $A$  (i.e., en  $\ker(\xi_A)$ ).

En esta manera de restringir la contracción inicial a otra entre los complejos reducidos es fundamental el que los morfismos iniciales sean todos  $A$ -lineales. Caso de que al comienzo no se tenga una verdadera contracción, sino dos equivalencias de homotopía no triviales, habría que estudiar el carácter  $A$ -lineal de las homotopías resultantes. Sobre este aspecto volveremos más adelante, en el estudio de sombreros de contracciones para la comparación de resoluciones.

## 2.4.2 De complejos reducidos a resoluciones.

Ahora vamos a diseñar un procedimiento inverso, mediante el cual, a partir de una contracción entre complejos reducidos, restablecer una contracción de comparación entre las resoluciones asociadas, que en general no coincidirá con la contracción de comparación canónica.

**Proposición 2.4.1** *Sea  $A$  una DGA-álgebra conexa y  $(\bar{f}, \bar{g}, \bar{\phi})$  una contracción de  $(\bar{B}(A), d_{\bar{B}})$  a un DG-módulo  $(\bar{X}, \bar{d})$  dado. Entonces, existe una contracción  $(B(A), d_B)$  a  $A \otimes \bar{X}$ , donde las estructuras diferenciales vienen determinadas por perturbación de la contracción inicial entre los complejos reducidos.*



**Demostración.**

El proceso consiste en tensorizar la contracción dada por la contracción identidad de la DGAC-álgebra  $A$ , de modo que se obtiene la contracción

$$(1 \otimes \bar{f}, 1 \otimes \bar{g}, 1 \otimes \bar{\phi}) : (A \otimes \bar{B}(A), d_A \otimes 1 + 1 \otimes d_B) \Rightarrow (A \otimes \bar{X}, d_A \otimes 1 + 1 \otimes d_X).$$

Si se perturba esta contracción según la cocadena  $\theta \cap$  definida por

$$\theta([a_1 | \cdots | a_n]) = \begin{cases} a_1, & \text{si } n = 1, \\ 0, & \text{si } n \neq 1; \end{cases}$$

entonces se obtiene según el Lema Básico de Perturbación la contracción

$$(f_\infty, g_\infty, \phi_\infty) : (A \otimes \bar{B}(A), d_A \otimes 1 + 1 \otimes d_B + \theta \cap) \Rightarrow (A \otimes \bar{X}, d_A \otimes 1 + 1 \otimes d_X + d_\infty).$$

Nótese que la diferencial que aparece en  $A \otimes \bar{B}(A)$  es en realidad la propia de  $B(A)$ , de donde la contracción anterior establece una contracción de comparación entre una resolución que escinde de la resolución bar y la propia resolución bar.

Para que este esquema esté bien definido lo único que resta por verificar es que el proceso de perturbación sea finito, lo cual se desprende del hecho de que  $\bar{B}(A)$  es simplemente conexa ( $A$  conexa): así,  $\theta \cap$  disminuye al menos en dos el grado de la parte que atañe al elemento del complejo reducido de entrada, mientras que  $1 \otimes \phi$  la aumenta tan sólo en una unidad; de donde la composición  $(1 \otimes \phi)\theta \cap$  es puntualmente nilpotente.

■

Supongamos que partimos de la contracción de comparación canónica entre una resolución contráctil que escinde de  $B(A)$  y la resolución bar misma, de modo que tensorizando por  $\Lambda \otimes_A -$  nos podemos reducir a la contracción asociada entre complejos reducidos.

Si intentamos restablecer una contracción de comparación siguiendo el esquema pergeñado anteriormente, resulta que obtendremos la contracción de comparación canónica de partida, **con los mismos morfismos y las mismas estructuras diferenciales.**

**Teorema 2.4.2** *Sea  $(X, d)$  una resolución contráctil a  $\Lambda$  que escinde de la resolución bar de una DGA-álgebra conexa, según la contracción de comparación canónica. Entonces,  $\theta \cap$  es un dato de perturbación de la contracción*

$$(1 \otimes (1 \otimes_A f), 1 \otimes (1 \otimes_A g), 1 \otimes (1 \otimes_A \phi)) : (A \otimes (\Lambda \otimes_A B(A)), d_A \otimes (1 \otimes_A 1) + 1 \otimes (1 \otimes_A d_B)) \\ \Rightarrow (A \otimes (\Lambda \otimes_A X), d_A \otimes (1 \otimes_A 1) + 1 \otimes (1 \otimes_A d)),$$

y la contracción de comparación perturbada coincide con la contracción de comparación canónica inicial,  $(f, g, \phi) : (B(A), d_B) \Rightarrow (X, d)$ .

### Demostración.

Los morfismos  $1 \otimes_A h$  en definitiva actúan eliminando los sumandos en  $A \otimes -$  de la imagen de  $h$ .

Así,  $1 \otimes_A g = g|_{\bar{X}}$  y  $1 \otimes_A \phi = \phi|_{\bar{B}}$ , por ser  $g$  y  $\phi$  morfismos especiales.

En cambio,  $1 \otimes_A f$  difiere de  $f|_{\bar{B}}$  en los casos no triviales (i.e., en los que  $f$  no es especial), y lo que ocurre es que se pierde la información de  $\text{Im}(f)$  que recae en  $\ker(\xi_A) \otimes \bar{X}$ . Algo análogo sucede con las diferenciales  $1 \otimes_A d_B$  y  $1 \otimes_A d$ . En aras de aligerar la lectura, en lo que sigue notaremos  $\bar{h}$  al morfismo  $1 \otimes_A h$ , para  $h$  dado.

Por otro lado, la cocadena universal  $\theta$  siempre da lugar a un dato de perturbación  $\theta \cap$  para la contracción

$$(1 \otimes \bar{f}, 1 \otimes \bar{g}), 1 \otimes \bar{\phi}) : (A \otimes (\Lambda \otimes_A B(A)), d_A \otimes \bar{1} + 1 \otimes \bar{d}_B) \Rightarrow (A \otimes (\Lambda \otimes_A X), d_A \otimes \bar{1} + 1 \otimes \bar{d}),$$

dado que por ser  $A$  es conexa la composición  $(1 \otimes \bar{\phi})(\theta \cap)$  disminuye siempre el grado del término correspondiente del complejo reducido  $\bar{B}(A)$ .

Además, se tiene que  $(\theta \cap)s = 1$  actuando en  $\ker \xi_A \otimes \bar{B}(A)$  y cero en otro caso (por ser  $s$  nula en otro caso). Utilizando ahora que  $\bar{\phi} = \phi|_{\bar{B}(A)}$  y  $\bar{g} = g|_{\bar{X}}$  y las definiciones recursivas de estos morfismos, resulta que:

- De un lado,

$$(\theta \cap)(1 \otimes \bar{\phi}) = -(\theta \cap)(1 \otimes s\phi d + 1 \otimes sgf)|_{\bar{B}} = \\ -\mu_A(1 \otimes (\theta \cap)(s\phi d + sgf)|_{\bar{B}}) = -\text{Im}(\mu_A(1 \otimes (\phi d + gf)|_{\bar{B}})) \cap (\ker(\xi_A) \otimes \bar{B}(A)).$$

- De otro,

$$\begin{aligned} (\theta \cap)(1 \otimes \bar{g}) &= (\theta \cap)(1 \otimes \text{sgd}|_{\bar{B}}) = \\ \mu_A(1 \otimes (\theta \cap) \text{sgd}|_{\bar{B}}) &= \text{Im}(\mu_A(1 \otimes \text{gd}|_{\bar{B}})) \cap (\ker(\xi_A) \otimes \bar{B}(A)). \end{aligned}$$

Aquí, hemos de entender que  $\mu_A$  actúa multiplicando elementos de  $A \otimes A$  y dejando invariante la parte en  $\bar{B}(A)$ ; y que cuando tomamos intersección con  $\ker(\xi_A) \otimes \bar{B}(A)$  estamos eliminando la parte en el complejo reducido  $\Lambda \otimes \bar{B}(A)$ .

De lo anterior es fácil deducir que  $(1 \otimes \bar{\phi})\theta \cap (1 \otimes \bar{\phi})$  y  $(1 \otimes \bar{\phi})\theta \cap (1 \otimes \bar{g})$  son ambas nulas, utilizando que  $\phi\phi = 0$  y  $\phi g = 0$  y que  $\phi$  y  $g$  son ambos morfismos especiales:

- De un lado, desarrollando  $(1 \otimes \bar{\phi})\theta \cap (1 \otimes \bar{\phi})$  obtenemos

$$-(1 \otimes \bar{\phi})\mu_A(1 \otimes (\phi d + gf)|_{\bar{B}}) = -\mu_A(1 \otimes \phi(\phi d + gf)|_{\bar{B}}) = 0.$$

- De otro, desarrollando  $(1 \otimes \bar{\phi})\theta \cap (1 \otimes \bar{g})$  obtenemos

$$(1 \otimes \bar{\phi})\mu_A(1 \otimes \text{gd}|_{\bar{B}}) = \mu_A(1 \otimes \phi \text{gd}|_{\bar{B}}) = 0.$$

Si atendemos a las fórmulas que provee el Lema Básico de Perturbación,

$$\begin{aligned} f_\infty &= 1 \otimes \bar{f} - (1 \otimes \bar{f}\theta \cap (1 \otimes \bar{\phi})) + (1 \otimes \bar{f}\theta \cap (1 \otimes \bar{\phi})\theta \cap (1 \otimes \bar{\phi})) - \dots \\ g_\infty &= 1 \otimes \bar{g} - (1 \otimes \bar{\phi}\theta \cap (1 \otimes \bar{g})) + (1 \otimes \bar{\phi}\theta \cap (1 \otimes \bar{\phi})\theta \cap (1 \otimes \bar{g})) - \dots \\ \phi_\infty &= 1 \otimes \bar{\phi} - (1 \otimes \bar{\phi}\theta \cap (1 \otimes \bar{\phi})) + (1 \otimes \bar{\phi}\theta \cap (1 \otimes \bar{\phi})\theta \cap (1 \otimes \bar{\phi})) - \dots \\ d_\infty &= D + (1 \otimes \bar{f}\theta \cap (1 \otimes \bar{g})) - (1 \otimes \bar{f}\theta \cap (1 \otimes \bar{\phi})\theta \cap (1 \otimes \bar{g})) + \dots \end{aligned}$$

resulta que obtenemos las reducciones  $f_\infty = 1 \otimes \bar{f} - (1 \otimes \bar{f})\theta \cap (1 \otimes \bar{\phi})$ ,  $g_\infty = 1 \otimes \bar{g}$ ,  $\phi_\infty = 1 \otimes \bar{\phi}$  y  $d_\infty = D + (1 \otimes \bar{f})\theta \cap (1 \otimes \bar{g})$ , donde  $D$  representa la diferencial usual sobre  $A \otimes (\Lambda \otimes_A \bar{X})$ , a saber:  $D = d_A \otimes 1 + 1 \otimes \bar{d}$ .

Claramente,  $g_\infty$  y  $\phi_\infty$  son la extensión  $A$ -lineal de  $\bar{g}$  y  $\bar{\phi}$ , de donde  $g_\infty = g$  y  $\phi_\infty = \phi$ .

Si desarrollamos el segundo sumando que define  $f_\infty$ , obtenemos

$$\begin{aligned} -(1 \otimes \bar{f})\theta \cap (1 \otimes \bar{\phi}) &= \mu_A(1 \otimes \bar{f})|_{\ker \xi_A \otimes \bar{B}(A)}(\phi d + gf)|_{\bar{B}} = \\ &= \mu_A(1 \otimes \bar{f})|_{\ker \xi_A \otimes \bar{B}(A)}(\phi d|_{\bar{B}}) + \mu_A(1 \otimes \bar{f})|_{\ker \xi_A \otimes \bar{B}(A)}(gf|_{\bar{B}}), \end{aligned}$$

donde el primero de los sumandos es cero ( $f\phi = 0$ , lo que implica que las imágenes de  $\phi$  por  $f$  en  $\ker \xi_A \otimes \bar{X}$  y en  $\Lambda \otimes \bar{X}$ , respectivamente, son ambas nulas; en particular la segunda, que es  $\text{Im}(\bar{f}(\phi))$ ); y el segundo restituye la parte en  $\ker \xi_A \otimes \bar{X}$  de la imagen de  $f$  (puesto que  $f g f = f$ , en particular  $(1 \otimes \bar{f})|_{\ker \xi_A \otimes \bar{B}(A)} g f$  reconstruye la información que se pierde al aplicar directamente  $\bar{f}$ ). Así,  $f_\infty = f$ .

De un modo similar se prueba que el sumando  $(1 \otimes \bar{f})\theta \cap (1 \otimes \bar{g})$  reconstruye la parte de  $d$  que se pierde al aplicar  $\bar{d}$ .

En definitiva, concluimos que la contracción perturbada devuelve la contracción de comparación canónica inicial.

■

Pero la verdadera potencia de este procedimiento reside en la siguiente aplicación.

**Teorema 2.4.3** *Sea  $A$  una DGA-álgebra conexa,  $(X, d)$  una resolución que escinde de  $B(A)$  y  $(f, g, \phi) : B(A) \Rightarrow (X, d)$  la contracción de comparación asociada. Entonces, existe otra resolución  $(X, d')$  que escinde de  $B(A)$ , que tiene estructura de un  $A_\infty$ -producto tensorial  $A \otimes_\gamma \bar{X}$ , donde la  $A_\infty$ -cocadena  $\gamma$  viene dada por  $\gamma = \theta g|_{\bar{X}}$ .*

*Más aún, si la contracción de comparación de partida es la propia comparación canónica, entonces  $d = d'$ .*

Este resultado es consecuencia inmediata del Teorema 2.4.2, la Proposición 2.4.1 y el Teorema 2.4.4, que concierne a  $A_\infty$ -estructuras heredadas vía contracción de productos tensoriales torcidos. El hecho de que el Teorema 2.4.4 sea aplicable en un marco más general que el de las resoluciones, y de que necesite de unos preliminares específicos sobre  $A_\infty$ -estructuras, justifica sobradamente que su estudio se desarrolle en una sección independiente.

### 2.4.3 $A_\infty$ -estructuras y productos tensoriales torcidos.

El resultado principal de esta sección, Teorema 2.4.4, establece una correspondencia vía contracción entre ciertos productos tensoriales torcidos y  $A_\infty$ -productos tensoriales torcidos a ellos naturalmente asociados.





Este tipo de problemas de transferencias de estructuras han sido tratados en contextos sucesivos en el transcurso de las últimas dos décadas, con especial ahínco en el periodo que comprende finales de los 80 [82, 102, 105, 85, 136].

En su estudio sobre  $H$ -espacios [157], Stasheff se percató de que la asociatividad de las (co)álgebras no era en general una propiedad invariante por homotopía, pero casi. Lo fundamental es que él estableció una definición formal para ese “casi”, que se ha ido completando con el transcurso de los años, y que cristaliza en lo que se da en llamar  $A_\infty$ -estructuras u objetos con *asociatividad fuertemente homotópica*, en el siguiente sentido.

Sea un DG-módulo  $(M, m_1)$  (i.e.,  $m_1 m_1 = 0$ ), dotado de un producto  $m_2$  compatible con la diferencial (i.e.,  $m_1 m_2 = m_2(m_1 \otimes 1 + 1 \otimes m_1)$ ); que, aunque no asociativo en el sentido estricto, sí sea asociativo *salvo homotopía*  $m_3$ : de modo que  $m_3(m_1 \otimes 1 \otimes 1) + m_1 m_3 = m_2(m_2 \otimes 1) - m_2(1 \otimes m_2)$ .

Este proceso se puede generalizar, de modo que existan homotopías  $m_i$  análogas que midan la falta de asociatividad en las diversas formas de agrupar los productos de  $i$  elementos dados (nótese que el conjunto completo de formas distintas viene dado por el conjunto de árboles binarios de  $i$  hojas). Stasheff diseñó en [157, 158] una sucesión de poliedros  $K_i$ , cuyos vértices representan cada forma de multiplicar  $i$  elementos, y cuyas aristas representan que los vértices adyacentes son homotópicos; es más, el poliedro en sí es un ciclo en  $\text{Hom}(M^{\otimes i}, M)$ , que es imagen de un borde, que identifica como la propia homotopía  $m_i$ .

Utilizando una formulación meramente analítica, una  $A_\infty$ -álgebra (respectivamente,  $A_\infty$ -coálgebra), es un DG-módulo  $(M, m_1)$  (resp.,  $(M, \Delta_1)$ ) dotado de una familia de morfismos  $m_i \in \text{Hom}(M^{\otimes i}, M)$  (resp.,  $\Delta_i \in \text{Hom}(M, M^{\otimes i})$ ) de grado  $i - 2$  de modo que, para  $i \geq 1$  (donde  $i$  indica el número de elementos a multiplicar), es

$$\sum_{n=1}^i \sum_{k=0}^{i-n} (-1)^{n+k+nk} m_{i-n+1}(1^k \otimes m_n \otimes 1^{i-n-k}) = 0,$$

$$\text{(resp., } \sum_{n=1}^i \sum_{k=0}^{i-n} (-1)^{n+k+nk} (1^{i-n-k} \otimes \Delta_n \otimes 1^k) \Delta_{i-n+1} = 0).$$

También se pueden definir las  $A_\infty$ -estructuras en función de las construcciones bar y cobar, del modo siguiente.

Una  $A_\infty$ -álgebra (resp.,  $A_\infty$ -coálgebra) es un módulo graduado  $M$  dotado de una aplicación lineal  $m : T(sM) \rightarrow M$  (resp.,  $\Delta : M \rightarrow T(s^{-1}M)$ ) tal que el morfismo  $d = -(smT(s^{-1}))^{[1]}$  (resp.,  $d = -(T(s^{-1})\Delta s)^{[1]}$ ) hace de  $T(sM)$  (resp.,  $T(s^{-1}M)$ ) una DGA-coálgebra (resp., DGA-álgebra).

En [136] se recogen demostraciones de las equivalencias entre estas definiciones. Por ejemplo, la relación entre las dos últimas es que  $m_1 = mj_1$  y  $m_i = -mj_i$  para  $i > 1$  (resp.,  $\Delta_1 = \pi_1\Delta$  y  $\Delta_i = -\pi_i\Delta$  para  $i > 1$ ).

Este tipo de estructuras cubren el vacío a que da lugar el carácter no homotópico de la asociatividad de un álgebra, y se están tornando en herramientas de gran utilidad en bastantes procesos de cálculo homológico hoy día.

Por ejemplo, el modelo para el complejo de cocadenas de ciertos espacios fibrados que diseñara Hirsch, es de la forma  $(C^*(B) \otimes H^*(F), D)$ , con

$$D = d \otimes 1 + 1 \otimes d + \text{términos de orden superior};$$

donde estos términos de grado superior vienen dados en función del  $\cup_1$ -producto. Lamentablemente, la diferencial  $D$  parecía no ser derivación para ningún producto, por lo que este modelo quedó de alguna manera marginado. Sin embargo, con la determinación de una  $A_\infty$ -estructura subyacente en el modelo de Hirsch, la diferencial  $D$  se torna derivación (ver [85]).

Aún más internacionalmente reconocido es el trabajo de Chen acerca de las llamadas “integrales iteradas” en la determinación de la homología del espacio de lazos de una superficie diferenciable en función de la homología de la propia superficie [47]. Aquí, Chen construyó una perturbación de la diferencial usual de la construcción cobar  $\Omega(HC)$  de la cohomología real de un espacio diferenciable  $X$ , de modo que la homología de la perturbación resultaba ser  $H(\Omega(X))$ .

Posteriormente, en [46], Chen identificaba que ciertos productos tensoriales de formas en  $X$  definían en realidad una cocadena de torsión, y a partir de ésta y del uso de integrales iteradas probaba la existencia de una aplicación multiplicativa  $C_*(\Omega(X)) \rightarrow (T^a(s^{-1}H_*(X), d)$ , que definía una equivalencia de homotopía.

Este procedimiento cristalizó en los trabajos, primero de Gugenheim [80], a quien se añadió posteriormente Stasheff [85] y por último Lambc [82]; en lo que se da en llamar *ardid tensorial*, de modo que a partir de una contracción  $A \xrightarrow{\cong} M$  de una

DGA-álgebra (resp., DGA-coálgebra) a un DG-módulo, tensorizando adecuadamente para obtener el módulo graduado subyacente de la construcción bar (resp., cobar) y perturbando en aras de obtener su diferencial usual,  $\bar{B}(A) \xrightarrow{\bar{B}(c)} \tilde{B}(M)$ , se define bajo ciertas condiciones (comunmente, conexión) una  $A_\infty$ -estructura de álgebra (resp., coálgebra) en el DG-módulo inicial.

En este traspaso de información, aparecen de manera natural ciertas cocadenas de torsión y productos tensoriales torcidos, canónicamente asociadas a las cocadenas de torsión universales  $\theta$  de las construcciones bar y cobar, respectivamente.

En este sentido, en Gugenheim prueba que a partir de una contracción de una coálgebra simplemente conexa  $C$  en un módulo  $M$  con diferencial nula, se puede construir una derivación  $d$  en  $T^a(s^{-1}H^+)$  y una cocadena de torsión  $\tau : C \rightarrow (T^a(s^{-1}H^+), d)$ , cuya extensión multiplicativa a  $\bar{\Omega}(C)$  constituye un casi-isomorfismo (i.e., induce un isomorfismo en homología).

Este procedimiento se extiende en [85] para el caso dual de una contracción de partida entre una DGA-álgebra conexa  $A$  y un DG-módulo  $(M, d)$  de diferencial no nula, en general, ambos sobre un cuerpo  $k$ . En este mismo trabajo se comenta la existencia de un resultado análogo para coálgebras simplemente conexas, en el que aunque el anillo base  $\Lambda$  no tiene por qué ser un cuerpo, sí se exige que ambos  $C$  y  $M$  sean libres como  $\Lambda$ -módulos.

En [82] se muestra que el ardid tensorial no sólo engloba los resultados anteriores, sino que los completa, en el sentido de que los casi-isomorfismos anteriores representan en realidad proyecciones de verdaderas contracciones. Además, se complementa el estudio de cocadenas y productos tensoriales recogido en [33] y [105].

Más concretamente, en [33] se prueba que dada una cocadena de torsión  $\tau : C \rightarrow A$  y un  $A$ -módulo  $L$  existe una cocadena de torsión  $\tau^* : C \rightarrow E$ , donde  $E = \text{End}(H(L))$  es el álgebra de endomorfismos de la homología de  $L$  con diferencial trivial. Más aún, los productos tensoriales torcidos  $C \otimes_\tau L$  y  $C \otimes_{\tau^*} H(L)$  son homológicamente equivalentes.

Por otro lado, Kadeishvili prueba en [105] que toda álgebra  $A$  induce una  $A_\infty$ -estructura sobre  $H(A)$  y una cocadena de torsión  $\tau : \bar{B}(H(A)) \rightarrow A$ . Además, si  $t : C \rightarrow A$  es otra cocadena de torsión, existe una cocadena de torsión “homotópica”  $\tilde{t} : C \rightarrow H(A)$ , de modo que  $t$  y  $\tau\tilde{t}$  son cocadenas de torsión homotópicas.

Aquí, se entiende como *cocadena de torsión homotópica*  $t : C \rightarrow M$  de una coálgebra  $C$  sobre una  $A_\infty$ -álgebra  $M$  a cualquier morfismo de módulos que admite una extensión  $\tilde{t}$  a  $\tilde{B}(M)$  como morfismo de coálgebras, de modo que  $t = \theta\tilde{t}$ . Posteriormente, adoptaremos la nomenclatura  *$A_\infty$ -cocadenas de torsión* para estos morfismos.

Gugenheim, Lambe y Stasheff extrapolan los resultados anteriores en función del ardid tensorial, mediante el siguiente planteamiento.

Dada un álgebra  $M$ , la aplicación  $\rho : M \rightarrow \text{End}(M)$  definida por  $\rho(a)(b) = ab$  resulta ser un morfismo de álgebras, en virtud de la asociatividad del producto en  $M$ . En el caso de que  $M$  sea una  $A_\infty$ -álgebra,  $\rho$  deja de ser un morfismo de álgebras por la pérdida de la asociatividad en  $M$ , aunque no obstante verifica una compatibilidad “homotópica” con respecto al producto, propia de un homomorfismo de  $A_\infty$ -álgebras:  $\rho$  admite una extensión a una aplicación de DG-coálgebras  $\tilde{\rho} : \tilde{B}(M) \rightarrow \bar{B}(\text{End}(M))$ , de modo que  $\tilde{\rho} = \rho\tilde{\theta}$ , para  $\tilde{\theta}$  la cocadena universal en  $\tilde{B}(M)$ .

Así, cualquier  $A_\infty$ -cocadena de torsión  $t : C \rightarrow M$  admite una elevación  $\tilde{t} = \tilde{\rho}t : C \rightarrow \text{End}(M)$  a una cocadena de torsión en el sentido estricto.

En estas circunstancias, el último teorema recogido en [82] aserta que dada una cocadena de torsión  $C \rightarrow A$  y una contracción  $(f, g, \phi) : A \rightarrow M$  para un cierto DGC-módulo  $M$ , existe una  $A_\infty$ -estructura sobre  $M$  (heredada de la contracción mediante el ardid tensorial), una  $A_\infty$ -cocadena de torsión  $\tilde{t} : C \rightarrow M$  y sendas cocadenas de torsión (en el sentido estricto)  $t^* : C \rightarrow \text{End}(M)$  y  $\bar{t} : C \rightarrow \bar{B}(A)$  de modo que  $\tilde{t} = \tilde{\theta}f_\infty\bar{t}$  y  $t^* = \rho\tilde{t}$ . Además,  $f_\infty : \bar{B}(A) \rightarrow \tilde{B}(M)$  define un casi-isomorfismo de coálgebras.

Más aún, los productos tensoriales torcidos  $C \otimes_t A$  y  $C \otimes_{t^*} M$  y el  $A_\infty$ -producto tensorial torcido  $C \otimes_{\tilde{t}} M$  son homológicamente equivalentes entre sí.

Aunque los autores dejan abierta la posibilidad de extender estos resultados para el caso dual de coálgebras, advierten que el ardid tensorial puede no definir un proceso finito (a causa de que el dato de perturbación tal vez pueda no disminuir la gradación de la filtración canónica asociada; es decir, que en definitiva no dé lugar a un proceso de perturbación convergente).

Nosotros pretendemos establecer aquí un resultado dual para  $A_\infty$ -coálgebras. Es

más, demostraremos que esta construcción es posible incluso sin abandonar el contexto de las contracciones. La idea será aprovechar el ardid tensorial hasta sus últimas consecuencias, en el sentido de que  $f_\infty$  no sólo define un isomorfismo en homología, sino que además constituye la proyección de una verdadera contracción.

Antes de proseguir, recopilaremos bastantes de entre las definiciones y resultados cosechados por Prouté en su tesis doctoral [136], que establecerán un marco general para el estudio de las  $A_\infty$ -estructuras y sus propiedades.

Dada una DGA-coálgebra  $C$  y una  $A_\infty$ -álgebra  $A$  (respectivamente, una DGA-álgebra  $A$  y una  $A_\infty$ -coálgebra  $C$ ), una  $A_\infty$ -cocadena de torsión  $t : C \rightarrow A$  es una aplicación lineal de grado  $-1$  tal que

$$td + \sum_{i=1}^{\infty} m_i t^{\otimes i} \Delta^{(i)} = 0$$

$$\text{(resp., } dt + \sum_{i=1}^{\infty} \mu^{(i)} t^{\otimes i} \Delta_i = 0),$$

donde  $\Delta^{(1)} = 1$ ,  $\mu^{(1)} = 1$ ,  $\Delta^{(2)} = \Delta$ ,  $\mu^{(2)} = \mu$  y en general  $\Delta^{(k)} = (1 \otimes \Delta^{(k-1)})\Delta$  y  $\mu^{(k)} = \mu(1 \otimes \mu^{(k-1)})$ .

De otro modo,  $t : C \rightarrow A$  es una  $A_\infty$ -cocadena de torsión si y sólo si posee una única elevación  $\tilde{t} : C \rightarrow \tilde{B}(A)$  (resp.,  $\tilde{t} : \tilde{\Omega}(C) \rightarrow A$ ) que constituye un morfismo de DGA-coálgebras (resp., DGA-álgebras), con  $t = \theta\tilde{t}$  (resp.,  $t = \tilde{t}\theta$ ).

Dado que un  $A_\infty$ -homomorfismo entre las  $A_\infty$ -álgebras  $A$  y  $A'$  (resp., entre las  $A_\infty$ -coálgebras  $C$  y  $C'$ ) viene dado por un morfismo de DGA-coálgebras entre  $\tilde{B}(A)$  y  $\tilde{B}(A')$  (resp., por un morfismo de DGA-álgebras entre  $\tilde{\Omega}(C)$  y  $\tilde{\Omega}(C')$ ); la composición de una  $A_\infty$ -cocadena de torsión con un  $A_\infty$ -homomorfismo genera una nueva  $A_\infty$ -cocadena de torsión.

Siguiendo con la analogía con respecto a las cocadenas de torsión en sentido estricto (cocadenas de Brown), toda  $A_\infty$ -cocadena de torsión da lugar a un  $A_\infty$ -producto tensorial torcido.

La diferencial  $d_t$  en el complejo  $A \otimes_t C$  viene dada por

$$d_t = 1 \otimes d + \sum_{i=1}^{\infty} (m_i \otimes 1)(1 \otimes t^{\otimes i-1} \otimes 1)(1 \otimes \Delta^{(i)})$$

$$\text{(resp., } d_t = d \otimes 1 + \sum_{i=1}^{\infty} (\mu^{(i)} \otimes 1)(1 \otimes t^{\otimes i-1} \otimes 1)(1 \otimes \Delta_i)\text{)}.$$

Prouté establece finalmente en [136] varios resultados acerca de la transmisión de  $A_\infty$ -cocadenas de torsión mediante morfismos de (co)álgebras y  $A_\infty$ -(co)álgebras.

Más concretamente, si  $f : A \rightarrow A'$  es un casi-isomorfismo sobreyectivo de DGA-álgebras conexas,  $C$  una  $A_\infty$ -coálgebra conexa y  $t' : C \rightarrow A'$  una  $A_\infty$ -cocadena; entonces, existe una  $A_\infty$ -cocadena  $t : C \rightarrow A$  con  $t' = ft$ .

Análogamente, si  $f : C \rightarrow C'$  es un casi-isomorfismo inyectivo de DGA-coálgebras simplemente conexas,  $A$  una  $A_\infty$ -álgebra y  $t : C \rightarrow A$  una  $A_\infty$ -cocadena; entonces, existe una  $A_\infty$ -cocadena  $t' : C' \rightarrow A$  con  $t'f = t$ .

Por otro lado, si  $f : A \rightarrow A'$  es un casi-isomorfismo de DGA-álgebras,  $C$  una  $A_\infty$ -coálgebra simplemente conexa y  $t' : C \rightarrow A'$  una  $A_\infty$ -cocadena; entonces, existe una  $A_\infty$ -cocadena  $t : C \rightarrow A$  con  $ft$  homotópica a  $t'$ .

Análogamente, si  $f : C \rightarrow C'$  es un casi-isomorfismo de DGA-coálgebras simplemente conexas,  $A$  una  $A_\infty$ -coálgebra conexa y  $t : C \rightarrow A$  una  $A_\infty$ -cocadena; entonces, existe una  $A_\infty$ -cocadena  $t' : C' \rightarrow A$  con  $t'f$  homotópica a  $t$ .

Estos primeros resultados se basan en morfismos de DGA-(co)álgebras. Prouté también se preocupa en obtener resultados que conciernan a morfismos de  $A_\infty$ -(co)álgebras, cuales son los siguientes.

Sea  $f : A \rightarrow A'$  un casi-isomorfismo de  $A_\infty$ -álgebras y  $t' : C \rightarrow A'$  una  $A_\infty$ -cocadena; entonces, existe una  $A_\infty$ -cocadena  $t : C \rightarrow A$  con  $ft$  homotópica a  $t'$ .

Análogamente, sea  $f : C \rightarrow C'$  un casi-isomorfismo de  $A_\infty$ -coálgebras simplemente conexas y  $t : C \rightarrow A$  una  $A_\infty$ -cocadena; entonces, existe una  $A_\infty$ -cocadena  $t' : C' \rightarrow A$  con  $t'f$  homotópica a  $t$ .

Lamentablemente, ninguno de estos resultados concluye un isomorfismo explícito entre los  $A_\infty$ -productos tensoriales asociados.

Nosotros pretendemos establecer aquí una construcción similar a la última recogida del trabajo de Prouté, pero en el contexto de las contracciones, de modo que tengamos una contracción explícita entre los  $A_\infty$ -productos tensoriales asocia-

dos. La idea será aprovechar el ardid tensorial hasta sus últimas consecuencias, en el sentido de que  $f_\infty$  no sólo define un isomorfismo en homología, sino que además constituye la proyección de una verdadera contracción.

**Teorema 2.4.4** *Sea  $A \otimes_t C$  el producto tensorial torcido según una cocadena de torsión  $t : C \rightarrow A$  y consideremos una contracción  $c(f, g, \phi) : C \Rightarrow C'$ . Supongamos que  $c$  induce sobre  $C'$  una estructura de  $A_\infty$ -coálgebra, que  $t\phi = 0$  y que  $(1 \otimes \phi)t\cap$  es puntualmente nilpotente. Entonces, existe una contracción*

$$A \otimes_t C \Rightarrow A \otimes_{\bar{t}} C',$$

donde  $\bar{t} = tg$  es una  $A_\infty$ -cocadena de torsión y  $A \otimes_{\bar{t}} C'$  un  $A_\infty$ -producto tensorial torcido.

### Demostración.

Dado que  $(1 \otimes \phi)t\cap$  es puntualmente nilpotente, se tiene que la perturbación de la contracción

$$A \otimes C \Rightarrow A \otimes C'$$

que se obtiene de  $c$  tensorizando por  $A$ , según el dato de perturbación  $t\cap$ ; converge para dar la contracción

$$A \otimes_t C \Rightarrow (A \otimes C', 1 \otimes d_{C'} + d_A \otimes 1 + d_{t\cap}),$$

con

$$d_{t\cap} = (1 \otimes f) \sum_{n \geq 0} (-1)^n [(\mu \otimes 1)(1 \otimes t \otimes 1)(1 \otimes \Delta_C)(1 \otimes \phi)]^n (\mu \otimes 1)(1 \otimes t \otimes 1)(1 \otimes \Delta_C g).$$

Por otra parte, como  $c$  induce una estructura de  $A_\infty$ -coálgebra sobre  $C'$ , por construcción ha de ser  $\bar{t} = tg$  una  $A_\infty$ -cocadena de torsión (según el ardid tensorial desarrollado en [82]).

Lo que vamos a probar es que, bajo la condición de que  $t\phi = 0$ , entonces la diferencial  $1 \otimes d_C + d_A \otimes 1 + d_{t\cap}$  coincide con la diferencial  $d_{\bar{t}}$  que induce  $\bar{t}$  en el  $A_\infty$ -producto tensorial  $A \otimes_{\bar{t}} C'$ , con

$$d_{\bar{t}} = d_A \otimes 1 + \sum_{i=1}^{\infty} (\mu^{(i)} \otimes 1)(1 \otimes \bar{t}^{i-1} \otimes 1)(1 \otimes \Delta_i),$$

para  $\mu^{(1)} = 1$ ,  $\mu^{(2)} = \mu$ ,  $\mu^{(i)} = 1 \otimes \mu^{(i-1)}$ ,  $\Delta_1 = \pi_1 \Delta$  y  $\Delta_i : C' \rightarrow C' \otimes \dots \otimes C'$ ,  $i \geq 2$ , la proyección canónica  $-\pi_i \Delta$ , siendo  $\Delta$  el morfismo que determina la estructura de  $A_\infty$ -coálgebra de  $C'$  según la contracción  $c$ :

$$d_{\bar{\alpha}} = (-s^{-1}d_{C'}s)^{[1]} + d_{\partial_{alg}} = -(T(s^{-1})\Delta s)^{[1]},$$

$$d_{\partial_{alg}} = T(s^{-1}fs)\partial_{alg}\left(\sum_{i \geq 0} (-1)^i (T(s^{-1}\phi s)\partial_{alg})^i\right)T(s^{-1}gs)$$

y

$$\partial_{alg}|_{|s=n} = \sum_{k=1}^n 1^{k-1} \otimes (s^{-1} \otimes s^{-1}) \Delta_C s \otimes 1^{n-k}.$$

De este modo, para  $i \geq 2$ , es

$$\Delta_i = (-1)^{\frac{i(i-1)}{2}} \pi_i T(s) d_{\bar{\alpha}} s^{-1}.$$

Ahora bien, de entre los sumandos que componen  $d_{\bar{\alpha}} = (-s^{-1}d_{C'}s)^{[1]} + d_{\partial_{alg}}$ , el primero de ellos respeta el número de factores del elemento de entrada, mientras que el segundo lo aumenta en al menos una unidad. Como la entrada de  $\Delta_i$  es un elemento de  $C'$  (i.e., de  $T(C')$  compuesto por un sólo factor), resulta que el sumando  $(-s^{-1}d_{C'}s)^{[1]}$  es el único que afecta en el cálculo de  $\Delta_1$ , mientras que el sumando  $d_{\partial_{alg}}$  es el único que interviene en el cómputo de  $\Delta_i$ , para  $i \geq 2$ .

Por tanto, se tiene que  $\Delta_1 = -T(s)\pi_1(-s^{-1}d_{C'}s)s^{-1}j = d_{C'}$ , para  $j : C' \rightarrow T(C')$  la inclusión natural; de donde

$$(\mu^{(1)} \otimes 1)(1 \otimes 1)(1 \otimes \Delta_1) = 1 \otimes d_{C'},$$

y el hecho de probar que  $1 \otimes d_{C'} + d_A \otimes 1 + d_{t\cap}$  coincide con  $d_{\bar{t}}$  se reduce, pues, a demostrar que

$$d_{t\cap} = \sum_{i=2}^{\infty} (\mu^{(i)} \otimes 1)(1 \otimes \bar{t}^{i-1} \otimes 1)(1 \otimes \Delta_i).$$

Por otro lado, para  $i \geq 2$ , es

$$\Delta_i = (-1)^{\frac{i(i-1)}{2}} \pi_i T(s) d_{\partial_{alg}} s^{-1} j,$$

y teniendo en cuenta que  $f\phi = 0$ ,  $\phi g = 0$  y  $f g f = f$ , resulta que

$$\Delta_i = (-1)^{\frac{(i-1)(i-2)}{2}} f^{\otimes i} \left[ \sum_{k_2=1}^2 \sum_{k_3=1}^{k_2+1} \dots \sum_{k_{i-1}=1}^{k_{i-2}+1} \prod_{j=2}^{i-1} (-1)^{k_j} (1^{\otimes k_j-1} \otimes \Delta_C \phi \otimes 1^{\otimes j-k_j}) \right] \Delta_C g,$$





donde el símbolo  $\prod_{j=2}^{i-1} h_j$  representa la composición  $h_{i-1} \circ \cdots \circ h_2$ .

Así, todo se reduce a probar que  $d_{t\cap}$  coincide con la expresión

$$\sum_{i=2}^{\infty} (-1)^{\frac{(i-1)(i-2)}{2}} (\mu^{(i)} \otimes 1)(1 \otimes (tg)^{\otimes i-1} \otimes 1)(1 \otimes f^{\otimes i}) \circ \left[ \sum_{k_2=1}^2 \sum_{k_3=1}^{k_2+1} \cdots \sum_{k_{i-1}=1}^{k_{i-2}+1} \prod_{j=2}^{i-1} (-1)^{k_j} (1^{\otimes k_j} \otimes \Delta_C \phi \otimes 1^{\otimes j-k_j}) \right] (1 \otimes \Delta_C g). \quad (2.3)$$

Para ello, llevaremos la expresión general de  $d_{t\cap}$ ,

$$d_{t\cap} = (1 \otimes f) \sum_{n \geq 0} (-1)^n [(\mu \otimes 1)(1 \otimes t \otimes 1)(1 \otimes \Delta_C)(1 \otimes \phi)]^n (\mu \otimes 1)(1 \otimes t \otimes 1)(1 \otimes \Delta_C g), \quad (2.4)$$

a esta forma, mediante el uso de las siguientes identidades:

1. Por ser  $t$  cocadena de torsión, se tiene que

$$d_A t + t d_C - \mu(t \otimes t) \Delta_C = 0; \quad (2.5)$$

2. Generalizando, se puede probar por inducción que

$$(-1)^n \mu^{(n)} t^{\otimes n} d_C^{[n]} = d_A \mu^{(n)} t^{\otimes n} + \mu^{(n+1)} t^{\otimes n+1} \sum_{k=1}^n (-1)^k (1^{\otimes k-1} \otimes \Delta_C \otimes 1^{\otimes n-k}); \quad (2.6)$$

de hecho, para  $n = 1$  se tiene la condición (2.5) y para  $n = 2$  se tiene que

$$\begin{aligned} \mu t^{\otimes 2} d_C^{[2]} &= \mu(t \otimes t d_C - t d_C \otimes t) \stackrel{(2.5)}{=} \\ &\stackrel{(2.5)}{=} \mu(-t \otimes d_A t + t \otimes \mu t^{\otimes 2} \Delta_C + d_A t \otimes t - \mu t^{\otimes 2} \Delta_C \otimes t) = \\ &= \mu d_A^{[2]} t^{\otimes 2} + \mu^{(3)} t^{\otimes 3} (-\Delta_C \otimes 1 + 1 \otimes \Delta_C) = \\ &= d_A \mu t^{\otimes 2} + \mu^{(3)} t^{\otimes 3} (-\Delta_C \otimes 1 + 1 \otimes \Delta_C); \end{aligned}$$

en general, supuesto que se verifica la relación hasta  $n = m - 1$ , para  $n = m$  se tiene que

$$\begin{aligned} \mu^{(m)} t^{\otimes m} d_C^{[m]} &= \mu(1 \otimes \mu^{(m-1)})(t \otimes t^{\otimes m-1})(1 \otimes d_C^{[m-1]} + d_C \otimes 1^{\otimes m-1}) = \\ &= \mu(t \otimes \mu^{(m-1)} t^{\otimes m-1} d_C^{[m-1]}) + (-1)^{m-1} \mu(t d_C \otimes \mu^{(m-1)} t^{\otimes m-1}) \stackrel{H.I.}{=} \\ &\stackrel{H.I.}{=} (-1)^{m-1} \mu(t \otimes d_A \mu^{(m-1)} t^{\otimes m-1}) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +(-1)^{m-1}\mu(t \otimes \mu^{(m)}t^{\otimes m} \sum_{k=1}^{m-1} (-1)^k (1^{\otimes k-1} \otimes \Delta_C \otimes 1^{\otimes m-k-1})) + \\
& +(-1)^m \mu(d_A t \otimes \mu^{(m-1)}t^{\otimes m-1}) + (-1)^{m-1} \mu(\mu t^{\otimes 2} \Delta_C \otimes \mu^{(m-1)}t^{\otimes m-1}) = \\
& = (-1)^m d_A \mu^{(m)}t^{\otimes m} + (-1)^m \mu^{(m+1)}t^{\otimes m+1} \sum_{k=1}^m (-1)^k (1^{\otimes k-1} \otimes \Delta_C \otimes 1^{\otimes m-k}).
\end{aligned}$$

3. Teniendo en cuenta que  $t\phi = 0$ , de la anterior resulta

$$\mu^{(n)}t^{\otimes n} d_C^{[n]} \phi^{[n]} = \mu^{(n+1)}t^{\otimes n+1} \sum_{k=1}^n (-1)^{k+n} (1^{\otimes k-1} \otimes \Delta_C \phi \otimes (gf)^{\otimes n-k}). \quad (2.7)$$

4. A partir de la contracción  $c^{\otimes n}$  y sabiendo que  $t\phi = 0$ , obtenemos la relación

$$t^{\otimes n} = (tg)^{\otimes n} f^{\otimes n} + t^{\otimes n} d_C^{[n]} \phi^{[n]}. \quad (2.8)$$

5. Por último, combinando las identidades (2.7) y (2.8), resulta

$$\begin{aligned}
\mu^{(n)}t^{\otimes n} & = \mu^{(n)}(tg)^{\otimes n} f^{\otimes n} + \\
& + t^{\otimes n} d_C^{[n]} \phi^{[n]} \mu^{(n+1)}t^{\otimes n+1} \sum_{k=1}^n (-1)^{k+n} (1^{\otimes k-1} \otimes \Delta_C \phi \otimes (gf)^{\otimes n-k}). \quad (2.9)
\end{aligned}$$

Estas igualdades afectan a los sumandos de (2.4) del siguiente modo:

$$\boxed{n = 0}$$

$$\begin{aligned}
& (\mu \otimes 1)(1 \otimes t \otimes f)(1 \otimes \Delta_C)(1 \otimes g) \stackrel{(2.8)}{=} (\mu \otimes 1)(1 \otimes tg \otimes 1)(1 \otimes f^{\otimes 2})(1 \otimes \Delta_C g) + \\
& + (\mu \otimes 1)(1 \otimes td_C \phi \otimes 1)(1 \otimes 1 \otimes f)(1 \otimes \Delta_C g) \stackrel{(2.5)}{=} \\
& \stackrel{(2.5)}{=} \boxed{i = 2} + (\mu \otimes 1)(1 \otimes \mu t^{\otimes 2} \Delta_C \phi \otimes 1)(1^{\otimes 2} \otimes f)(1 \otimes \Delta_C g) = \\
& = \boxed{i = 2} + (\mu \otimes 1)(1 \otimes \mu t^{\otimes 2} \otimes 1)(1^{\otimes 3} \otimes f)(1 \otimes \Delta_C \phi \otimes 1)(1 \otimes \Delta_C g) \stackrel{(2.9)}{=} \\
& \stackrel{(2.9)}{=} \boxed{i = 2} + (\mu^{(3)} \otimes 1)(1 \otimes (tg)^{\otimes 2} \otimes 1)(1 \otimes f^{\otimes 3})(1 \otimes \Delta_C \phi \otimes 1)(1 \otimes \Delta_C g) + \\
& + (\mu \otimes 1)(1 \otimes \mu^{(3)}t^{\otimes 3} \sum_{k_3=1}^2 (-1)^{k_3+2} (1^{k_3-1} \otimes \Delta_C \phi \otimes (gf)^{\otimes 2-k_3} \otimes 1) \circ \\
& \circ (1^{\otimes 3} \otimes f)(1 \otimes \Delta_C \phi \otimes 1)(1 \otimes \Delta_C g) \stackrel{(2.9)}{=} \dots \\
& \sum_{j=2}^{\infty} \sum_{k_2=1}^1 \sum_{k_3=1}^{k_2+1} \dots \sum_{k_{j-1}=1}^{k_{j-2}+1} (\mu^{(j)} \otimes 1)(1 \otimes (tg)^{\otimes j-1} \otimes 1)(1 \otimes f^{\otimes j})
\end{aligned}$$

$$\left[ \prod_{l=2}^{j-1} (-1)^{l+k_l-1} (1^{\otimes k_l} \otimes \Delta_{C'} \phi \otimes 1^{\otimes l-k_l}) \right] (1 \otimes \Delta_{C'} g),$$

dando lugar, pues, para  $j \geq 2$ , a los sumandos

$$i = j, k_2 = 1, 1 \leq k_3 \leq 2, 1 \leq k_4 \leq k_3 + 1, \dots, 1 \leq k_{j-1} \leq k_{j-2} + 1.$$

$$n = m$$

$$\begin{aligned} & (-1)^m (1 \otimes f) [(\mu \otimes 1)(1 \otimes t \otimes 1)(1 \otimes \Delta_{C'} \phi)]^m (\mu \otimes 1)(1 \otimes t \otimes 1)(1 \otimes \Delta_{C'} g) = \\ & = (1 \otimes f)(\mu^{(m+2)} \otimes 1)(1 \otimes t^{\otimes m+1} \otimes 1)(1^{\otimes m+1} \otimes \Delta_{C'} \phi) \dots (1^{\otimes 2} \otimes \Delta_{C'} \phi)(1 \otimes \Delta_{C'} g) \stackrel{(2.9)}{=} \dots \\ & \dots \stackrel{(2.9)}{=} \sum_{j=m+2}^{\infty} \sum_{k_2=2}^2 \dots \sum_{k_{m+1}=m+1}^{m+1} \sum_{k_{m+2}=1}^{m+1} \sum_{k_{m+3}=1}^{k_{m+2}+1} \dots \sum_{k_{j-1}=1}^{k_{j-2}+1} (\mu^{(j)} \otimes 1)(1 \otimes (tg)^{\otimes j-1} \otimes 1) \circ \\ & (1 \otimes f^{\otimes j}) \circ \left[ \prod_{l=2}^{j-1} (-1)^{l+k_l-1} (1^{\otimes k_l} \otimes \Delta_{C'} \phi \otimes 1^{\otimes l-k_l}) \right] (1 \otimes \Delta_{C'} g), \end{aligned}$$

dando lugar, pues, para  $j \geq m+2$ , a los sumandos

$$i = j, k_2 = 2, \dots, k_{m+1} = m+1, 1 \leq k_{m+2} \leq m+1,$$

$$1 \leq k_{m+3} \leq k_{m+2} + 1, \dots, 1 \leq k_{j-1} \leq k_{j-2} + 1.$$

De modo que ambas estructuras coinciden y el resultado queda probado. ■

**Nota 2.4.5** Las hipótesis del teorema anterior se verifican cuando la coálgebra  $C$  es simplemente conexa. Éste es el caso, por ejemplo, de la construcción  $\text{bar}$  de una CDGAC-álgebra.

Así, queda completamente clara la tesis del Teorema 2.4.3: teniendo en cuenta el Teorema 2.4.2, que garantiza que por perturbación de  $(\bar{B}(A), 1 \otimes_A d_B) \Rightarrow (\bar{X}, 1 \otimes_A d)$  según  $\theta \cap$  se obtiene una contracción de comparación (en general, no la canónica) entre  $B(A)$  y  $(X, d')$ , resulta que  $d'$  dota a  $X$  de estructura de  $A_\infty$ -producto tensorial torcido, según la  $A_\infty$ -cocadena de torsión  $\theta g$ .

Además, en caso de partir de la contracción de comparación canónica, el mismo Teorema 2.4.2 garantiza que  $d' = d$ , de donde la resolución que se obtiene como salida coincide con la primigenia, y  $(X, d)$  constituye un  $A_\infty$ -producto tensorial torcido.

## 2.5 “Sombreros” de comparación de resoluciones.

La hipótesis de partida en el estudio que hemos llevado a cabo acerca de resoluciones  $(X, d)$  sobre un álgebra  $A$  es que estas resoluciones escindían de la resolución bar; es decir, que existía una verdadera contracción entre  $B(A)$  y  $(X, d)$ .

Pero el teorema de comparación de resoluciones 2.1.2 lo único que garantiza para resoluciones  $(X, d)$  contráctiles a  $\Lambda$  es que son homotópicamente equivalentes a  $B(A)$ , y no necesariamente vía una contracción.

Ahora pretendemos analizar qué ocurre en el caso de que los morfismos que da el teorema de comparación anterior no conformen una contracción, y tan sólo definan una equivalencia de homotopía en el sentido general.

Primero, al amparo del estudio de equivalencias de homotopía que desarrollan Huebschmann y Kadeishvili en [102], construiremos un “sombrero” de contracciones entre  $B(A)$  y  $(X, d)$ , por medio del “mapping cylinder” de ambos.

Entendemos aquí por *sombrero de contracciones* (más brevemente, sombrero) de dos DG-módulos  $(M, d)$  y  $(N, d)$  al conjunto de un tercer DG-módulo  $(\tilde{N}, d)$  (que llamaremos principal) y un par de contracciones, desde  $(\tilde{N}, d)$  a cada uno de los DG-módulos iniciales.

El uso del “mapping cylinder” permite transformar toda equivalencia de homotopía en un sombrero de contracciones, cuyo DG-módulo principal es el propio “mapping cylinder” de los DG-módulos dados.

Dado que esta construcción no facilita la preservación de estructuras algebraicas, en una segunda etapa intentamos elaborar otro sombrero que sí permita establecer resultados de compatibilidad entre productos dados en  $B(A)$  y  $X$ , en caso de ser  $A$  conmutativa.

### 2.5.1 Comparación de resoluciones vía “mapping cylinder”.

Nuestro punto de partida es una resolución contráctil de  $\Lambda$  sobre  $A$ ,

$$(\xi_x, \eta_x, t) : (X, d) \Rightarrow \Lambda,$$

y la resolución bar

$$(\xi_B, \eta_B, s) : B(A) \Rightarrow \Lambda,$$

donde se asumen ciertas las condiciones laterales de anulaci3n.

Seg3n el Teorema de Comparaci3n 2.1.2, podemos construir recursivamente los morfismos de comparaci3n can3nica  $A$ -lineales  $f$ ,  $g$  y  $\phi$ , que hacen que  $1 - gf = \phi d + d\phi$ .

La cuesti3n est3 en construir la otra homotop3a  $\varphi$  que hace que  $1 - fg = \varphi d + d\varphi$ .

No ser3a buena opci3n el tratar de forzar que  $\varphi$  fuera tambi3n un morfismo especial, dado que la especialidad de  $\varphi$  equivale a que  $(X, d) \equiv B(A)$  (ver [40]), lo cual no se cumple, en general.

Para construir tal morfismo, basta utilizar que  $X$  es contr3ctil a  $\Lambda$  mediante la homotop3a  $t$ . De este modo, siguiendo la demostraci3n de la unicidad salvo homotop3a que reza el teorema de comparaci3n cl3sico (Teorema 2.1.1), se puede probar que  $\varphi = t(1 - fg)$ .

En realidad, con esta definici3n se tiene que

$$dt(1 - fg) + t(1 - fg)d = (1 - td)(1 - fg) + t(1 - fg)d = 1 - fg,$$

dado que  $-td(1 - fg) = -t(1 - fg)d$ .

Es m3s,  $\varphi|_{\bar{x}} = t|_{\bar{x}}$ , dado que  $tfg|_{\bar{x}} = ttdg|_{\bar{x}} = 0$ .

No obstante,  $\varphi$  no es  $A$ -lineal en general, dado que  $t$  tampoco lo es. M3s a3n, no es dif3cil vislumbrar que el caso  $t$   $A$ -lineal conduce a la resoluci3n trivial  $X \equiv \Lambda$ .

En cualquier caso, dado que  $td + dt = 1$  en grados positivos, se tiene que

$$(1 - fg)|_{\bar{x}} = (\varphi d + d\varphi)|_{\bar{x}} = (\varphi d + dt)|_{\bar{x}} = (\varphi d + 1 - td)|_{\bar{x}},$$

de donde  $fg|_{\bar{x}} = (t - \varphi)d|_{\bar{x}}$ .

Tambi3n,

$$fg|_{\bar{x}} = tfdsgd|_{\bar{x}} = tfdsdg|_{\bar{x}} = tfdg|_{\bar{x}} = tfgd|_{\bar{x}}.$$

A partir de los datos anteriores, aplicando las t3cnicas desarrolladas en [102], se puede determinar un sombrero de comparaci3n entre las resoluciones  $B(A)$  y  $(X, d)$ ,

tomando como DG-módulo principal el “mapping cylinder”  $(Z, d)_f$  de ambos asociado a  $f : B(A) \rightarrow X$ . Con vistas a simplificar la notación, omitiremos en lo que sigue el subíndice que hace referencia al morfismo  $f$  sobre el que se construye el “mapping cylinder”.

Como módulo graduado,  $Z_* = B_*(A) \oplus B_{*-1}(A) \oplus X_*$ . La diferencial viene dada por  $d(b, b', x) = (d(b) - b', -d(b'), d(x) + f(b'))$ . Hay que destacar que el “mapping cylinder” no tiene una estructura canónica de  $A$ -módulo heredada de las correspondientes de  $B(A)$  y  $X$ , dado que en general  $d(a(b, b', x)) \neq d(a)(b, b', x) + (-1)^{|a|}d(b, b', x)$ , como se puede comprobar.

Fórmulas explícitas para las aplicaciones que constituyen el sombrero vienen dadas en [102], y dada la extensión que ocupan, nos remitiremos a este artículo para su definición.

Sin embargo, en este caso no es posible a priori la construcción de un sombrero de contracciones entre los complejos reducidos mediante la tensorización  $\Lambda \otimes_A -$ . En efecto, ahora no todos los morfismos implicados son  $A$ -lineales:  $\varphi$  no verifica tal condición, en general.

De cualquier modo, en ninguno de los hipotéticos sombreros anteriores cabe lugar a hablar de preservación de estructuras multiplicativas, puesto que ni tan siquiera presenta estructura de  $A$ -módulo el DG-módulo principal.

A continuación abordamos esta problemática desde la perspectiva de otro sombrero de contracciones, que elaboramos especialmente para los complejos reducidos.

### 2.5.2 Sombrero de comparación y estructuras multiplicativas.

Sea  $A$  una DGA-álgebra conexa.

Consideremos una variante de la resolución bar, que presenta una estructura de  $A$ -módulo por la derecha en vez de por la izquierda.



Definamos una aplicación  $\theta' : \bar{B}(A) \rightarrow A$  de modo que

$$\theta'([a_1 | \cdots | a_n]) = \begin{cases} -a_1, & \text{si } n = 1, \\ 0, & \text{si } n \neq 1. \end{cases}$$

En verdad,  $\theta'$  constituye una cocadena de torsión, dado que

$$(d\theta' + \theta'd + \mu(\theta' \otimes \theta)\Delta)([a_1 | a_2]) = (-1)^{|a_1|}a_1a_2 - (-1)^{|a_1|}a_1a_2 = 0.$$

Así, queda definido el producto tensorial torcido  $\bar{B}(A) \otimes_{\theta'} A$ , cuya diferencial es

$$\begin{aligned} d([a_1 | \cdots | a_n] \otimes a) &= \\ &= - \sum_{i=1}^n (-1)^{e_i-1} [a_1 | \cdots | d(a_i) | \cdots | a_n] \otimes a + \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^{e_i} [a_1 | \cdots | a_i a_{i+1} | \cdots | a_n] \otimes a + \\ &\quad + (-1)^{e_n} [a_1 | \cdots | a_n] \otimes d(a) - (-1)^{e_{n-1}} [a_1 | \cdots | a_{n-1}] \otimes a_n a, \end{aligned}$$

para  $e_i = i + |a_1| + \cdots + |a_i|$ .

**Lema 2.5.1** *En las circunstancias anteriores, el endomorfismo  $s' : \bar{B}(A) \otimes_{\theta'} A \rightarrow \bar{B}(A) \otimes_{\theta'} A$  dado por  $s'([a_1 | \cdots | a_n] \otimes a) = (-1)^{1+e_n} [a_1 | \cdots | a_n] a$  constituye una homotopía de contracción al anillo base  $\Lambda$ , a través de la aumentación y coaumentación canónicas.*

### **Demostración.**

En grado cero no hay nada que probar, dado que  $0 = 0$ .

Para grados mayores, habrá que comprobar que  $1 = ds' + s'd$ , lo cual es inmediato por computación directa. ■

El carácter acíclico de  $\bar{B}(A) \otimes_{\theta'} A$  y  $(X, d)$  permitirá diseñar un sombrero de contracciones entre  $\bar{B}(A)$  y  $\bar{X}$ .

Es conveniente observar que la diferencial  $d$  en  $X = A \otimes \bar{X}$  verifica que  $d(a \otimes \bar{x}) = d(a) \otimes \bar{x} + (-1)^{|a|} a \otimes d(\bar{x})$ . Llamemos  $\delta$  a la aplicación que a  $\bar{x} \in \bar{X}$  le asocia la

imagen por  $d$  restringida a  $\ker \xi_A \otimes \bar{X}$ . De este modo, la estructura diferencial de  $\bar{X}$  canónicamente heredada de  $X$  según  $1 \otimes_A d$  coincide con la aplicación  $\bar{d} = d - \delta$ .

Ahora, procedemos según los siguientes pasos.

- Tensorizar la contracción  $(\xi_X, \eta_X, t) : (A \otimes \bar{X}, d) \rightarrow \Lambda$  a izquierda por  $\bar{B}(A)$ , y perturbar la contracción resultante por  $\theta' \cap$ .
- Tensorizar la contracción  $(\xi_B, \eta_B, s') : \bar{B}(A) \otimes_{\theta'} A \rightarrow \Lambda$  a derecha por  $\bar{X}$ , y perturbar la contracción resultante por  $\delta$ .

**Teorema 2.5.2** *Los procesos de perturbación anteriores no modifican las estructuras diferenciales en  $\bar{B}(A)$  y  $\bar{X}$ , ni tampoco las proyecciones  $\xi_X$  y  $\xi_B$ .*

### Demostración.

En el primero de los casos, cuando se perturba por  $\theta' \cap$  la contracción dada se añade a la diferencial inicial en  $\bar{B}(A)$  la suma

$$(1 \otimes \xi_X)(\theta' \cap \otimes 1)(1 \otimes 1 - (1 \otimes t)(\theta' \cap \otimes 1) + \cdots)(1 \otimes \eta_X),$$

que es nula por ser  $(1 \otimes \xi_X)(\theta' \cap \otimes 1) = 0$  (con el término  $\theta' \cap$  aparece un elemento propio de  $\ker \xi_A$ , sobre el que  $\xi_X$  actúa de forma nula).

En el segundo de los casos sucede algo similar: cuando se perturba por  $\delta$  la contracción propuesta, se añade a la diferencial inicial en  $\bar{X}$  la suma

$$(\xi_B \otimes 1)(1 \otimes \delta)(1 \otimes 1 - (s' \otimes 1)(1 \otimes \delta) + \cdots)(\eta_X \otimes 1),$$

que es nula por ser  $(\xi_B \otimes 1)(1 \otimes \delta) = 0$  (con el término  $\delta$  aparece un elemento propio de  $\ker \xi_A$ , sobre el que  $\xi_B$  actúa de forma nula).

Del hecho de que  $(1 \otimes \xi_X)(\theta' \cap \otimes 1) = 0$  y  $(\xi_B \otimes 1)(1 \otimes \delta) = 0$ , se deduce asimismo que  $(1 \otimes \xi_X)_\infty = 1 \otimes \xi_X$  y  $(\xi_B \otimes 1)_\infty = \xi_B \otimes 1$ .

■

Denotemos por  $\bar{B}(A) \otimes_{\theta'} A \otimes^\delta \bar{X}$  el DG-módulo mayor común a ambas las contracciones anteriores. Este objeto constituye, así, el DG-módulo principal de un sombrero de contracciones entre  $\bar{B}(A)$  y  $\bar{X}$ .



Este sombrero tiene la particularidad de que es natural con respecto a las equivalencias homotópicas que determina el teorema de comparación entre las resoluciones de partida; en el sentido que indica el siguiente resultado.

**Teorema 2.5.3** *Las aplicaciones que define el sombrero anterior entre  $\bar{B}(A)$  y  $\bar{X}$ ,*

$$\bar{f}_\infty = (\xi_B \otimes 1)(1 \otimes \eta_X)_\infty : \bar{B}(A) \rightarrow \bar{X}$$

y

$$\bar{g}_\infty = (1 \otimes \xi_X)(\eta_B \otimes 1)_\infty : \bar{X} \rightarrow \bar{B}(A),$$

*coinciden con las aplicaciones de comparación canónica  $\bar{f}$  y  $\bar{g}$ , respectivamente. Más aún, la composición*

$$\bar{\phi}_\infty = (1 \otimes \xi_X)(s' \otimes 1)_\infty(1 \otimes \eta_X)_\infty : \bar{B}(A) \rightarrow \bar{B}(A)$$

*coincide con la homotopía de comparación canónica  $\bar{\phi}$ .*

### Demostración.

A la hora de demostrar las identidades anteriores, hay que hacer notar cómo actúan las siguientes composiciones.

De un lado,

$$(1 \otimes t)(\theta' \cap \otimes 1)([a_1 | \cdots | a_n] \otimes (a \otimes \bar{x})) = -[a_1 | \cdots | a_{n-1}] \otimes t(a_n a \otimes \bar{x}).$$

De otro,

$$(s' \otimes 1)(1 \otimes \delta)([a_1 | \cdots | a_n] \otimes (1 \otimes \bar{x})) = -\sum_{i=1}^k [a_1 | \cdots | a_n | b_i] \otimes (1 \otimes \bar{x}_i),$$

donde notamos  $\delta(\bar{x}) = \sum_{i=1}^k b_i \otimes \bar{x}_i$ .

Además, las aumentaciones  $\xi_B$  y  $\xi_X$  son nulas cuando se aplican sobre elementos que no sean escalares, lo que propicia que las series que definen los morfismos perturbados se reduzcan a un sólo sumando.

Así, el morfismo  $\bar{f}_\infty = (\xi_B \otimes 1)(1 \otimes \eta_X)_\infty$  queda en la forma

$$\bar{f}_\infty([a_1 | \cdots | a_n] \otimes (1 \otimes 1)) = t(a_1 t(a_2(\cdots a_{n-1} t(a_n) \cdots))),$$

que coincide con la definición recursiva (2.1) de  $\bar{f} = f|_{\bar{B}(A)}$ .

Atendiendo ahora a  $\bar{g}_\infty = (1 \otimes \xi_x)(\eta_B \otimes 1)_\infty$ , resulta que  $\bar{g}_\infty$  es la composición reiterada de  $(s' \otimes 1)(1 \otimes \delta)$ , que coincide con el modo de componer reiteradamente  $(s \otimes 1)(1 \otimes \delta)$  en la definición recursiva de  $\bar{g} = sgd$ , con  $g_0 = 1_A$ . Nótese que  $sgd = sg\delta$ , por ser  $g$  especial.

En cuanto a  $\bar{\phi}_\infty = (1 \otimes \xi_x)(s' \otimes 1)_\infty(1 \otimes \eta_x)_\infty$ , se tiene que para cada sumando de  $(1 \otimes \eta_x)_\infty$  sólo hay uno de  $(s' \otimes 1)_\infty$  que sea relevante: aquel que permite la actuación no nula de la aumentación  $(1 \otimes \xi_x)$ , y que consiste en la composición adecuada  $[(s' \otimes 1)(1 \otimes \delta)]^{\otimes k}(s' \otimes 1)$  hasta la consecución de un elemento de grado cero (escalar) en la componente de  $\bar{X}$ .

Analícemos por un momento cómo actúa  $\bar{\phi}$ , según su definición recursiva:

$$\begin{aligned} \bar{\phi}([a_1 | \cdots | a_n]) &= (-s\phi d - sgf)([a_1 | \cdots | a_n]) = \\ &= (-1)^{|a_1|+1}[a_1 | \bar{\phi}([a_2 | \cdots | a_n])] - sgf([a_1 | \cdots | a_n]). \end{aligned}$$

Si atendemos a  $\bar{\phi}_\infty$ , resulta igualmente

$$\bar{\phi}_\infty([a_1 | \cdots | a_n]) = (-1)^{|a_1|+1}[a_1 | \bar{\phi}_\infty([a_2 | \cdots | a_n])] - sgf([a_1 | \cdots | a_n]),$$

donde el sumando  $-sgf$  proviene del último término de  $(\eta_x)_\infty$ , y el primer sumando aparece al considerar los restantes términos de  $(\eta_x)_\infty$ .

Como ambas las homotopías  $\bar{\phi}$  y  $\bar{\phi}_\infty$  son nulas en grado cero y las expresiones anteriores definen la misma formulación recursiva, se puede concluir sin lugar a equívoco que  $\bar{\phi}_\infty = \bar{\phi}$ .

Así, el sombrero construido contiene de forma natural la restricción a los complejos reducidos de los morfismos  $A$ -lineales de la equivalencia de homotopía inicial de comparación canónica de resoluciones,  $f$ ,  $g$  y  $\phi$ .

No es posible comparar la homotopía  $\varphi$ , por no ser  $A$ -lineal en general. ■

Ahora, progresamos a partir del sombrero anterior para determinar otro entre las resoluciones de partida. El salto de uno a otro se corresponde con la perturbación adecuada de la tensorización banal a izquierda por la DGA-álgebra  $A$ :



- Tensorizar la contracción  $(1 \otimes \xi_x), (1 \otimes \eta_x)_\infty, (1 \otimes t)_\infty : \bar{B}(A) \otimes_{\theta'} A \otimes^\delta \bar{X} \rightarrow \bar{B}(A) \otimes \Lambda$  a izquierda por  $A$ , y perturbar la contracción resultante por  $\theta \cap$ .
- Tensorizar la contracción  $(\xi_B \otimes 1, (\eta_B \otimes 1)_\infty, (s' \otimes 1)_\infty) : \bar{B}(A) \otimes_{\theta'} A \otimes^\delta \bar{X} \rightarrow \Lambda \otimes \bar{X}$  a izquierda por  $A$ , y perturbar la contracción resultante con el dato de perturbación que genera el paso anterior sobre  $A \otimes \bar{B}(A) \otimes_{\theta'} A \otimes^\delta \bar{X}$ .

**Teorema 2.5.4** *Los procesos de perturbación anteriores establecen un sombrero entre la resolución bar  $A \otimes_\theta \bar{B}(A)$  y la resolución  $(A \otimes \bar{X}, d)$ . Más aún, los morfismos componentes de la contracción a  $B(A)$  no se modifican bajo el proceso de perturbación.*

### Demostración.

De un lado, la modificación de la diferencial en el DG-módulo pequeño de la contracción

$$(1 \otimes 1 \otimes \xi_x), (1 \otimes 1 \otimes \eta_x)_\infty, (1 \otimes 1 \otimes t)_\infty : A \otimes \bar{B}(A) \otimes_{\theta'} A \otimes^\delta \bar{X} \rightarrow A \otimes \bar{B}(A) \otimes \Lambda$$

según  $\theta \cap$  se traduce en la aparición del dato de perturbación

$$d_\theta = (1 \otimes 1 \otimes \eta_x)_\infty (\theta \cap \otimes 1) (1 \otimes 1 \otimes \xi_x)$$

en  $A \otimes \bar{B}(A) \otimes_{\theta'} A \otimes^\delta \bar{X}$ .

Éste es un caso particular de lo que podemos dar en llamar “perturbación ascendente”, en el que se trata de modificar una contracción  $(f, g, \phi) : N \Rightarrow M$  introduciendo un dato de perturbación  $\delta$  en el DG-módulo de llegada,  $M$ . De este problema se conoce una solución general, que equivale a la “perturbación descendente” (o simplemente perturbación, tal como definiéramos en su momento) del DG-módulo mayor  $N$  según el dato  $g\delta f$ . Es fácil probar que los morfismos componentes de la contracción inicial no se modifican en el proceso de perturbación, y son compatibles con las nuevas estructuras diferenciales.

Así, obtenemos la contracción

$$(1 \otimes 1 \otimes \xi_x), (1 \otimes 1 \otimes \eta_x)_\infty, (1 \otimes 1 \otimes t)_\infty : A \otimes^{d_\theta} \bar{B}(A) \otimes_{\theta'} A \otimes^\delta \bar{X} \rightarrow A \otimes \bar{B}(A) \otimes \Lambda,$$

donde la parada en la contracción viene garantizada por la actuación de  $\theta \cap$ , que es el único morfismo que afecta al primer factor  $A$ , y lo hace aumentando la graduación en cada ocasión que interviene.

Por otro lado, perturbando ahora la contracción

$$(1 \otimes \xi_B \otimes 1, (1 \otimes \eta_B \otimes 1)_\infty, (1 \otimes s' \otimes 1)_\infty) : A \otimes \bar{B}(A) \otimes_{\theta'} A \otimes^\delta \bar{X} \rightarrow A \otimes \Lambda \otimes \bar{X}$$

según el dato  $d_\theta = (1 \otimes 1 \otimes \eta_X)_\infty(\theta \cap \otimes 1)(1 \otimes 1 \otimes \xi_X)$ , se obtiene la contracción

$$((1 \otimes \xi_B \otimes 1)^\infty, (1 \otimes \eta_B \otimes 1)_\infty, (1 \otimes s' \otimes 1)_\infty) : A \otimes^{d_\theta} \bar{B}(A) \otimes_{\theta'} A \otimes^\delta \bar{X} \rightarrow A \otimes \Lambda \otimes \bar{X}.$$

Este proceso es convergente siguiendo el razonamiento precedente:  $d_\theta$  aumenta la graduación sobre el primer factor  $A$  cada vez que se aplica, por medio de  $\theta \cap$ ; y los demás morfismos no afectan a dicha componente.

■

En las circunstancias del teorema anterior, los morfismos del sombrero guardan una relación directa natural con respecto a los de comparación canónica entre  $B(A)$  y  $X$ , tal como recoge el resultado siguiente.

**Teorema 2.5.5** *Los morfismos  $f$ ,  $g$  y  $\phi$  de comparación canónica entre las resoluciones  $B(A)$  y  $X$  aparecen de forma natural en el sombrero construido, de modo que:*

$$f^\infty = (1 \otimes \xi_B \otimes 1)^\infty (1 \otimes 1 \otimes \eta_X)_\infty : B(A) \rightarrow X$$

y

$$g^\infty = (1 \otimes 1 \otimes \xi_X)(1 \otimes \eta_B \otimes 1)_\infty : X \rightarrow B(A),$$

coinciden con las aplicaciones de comparación  $f$  y  $g$ , respectivamente; por otro lado,

$$\phi^\infty = (1 \otimes 1 \otimes \xi_X)(1 \otimes s' \otimes 1)_\infty (1 \otimes 1 \otimes \eta_X)_\infty : B(A) \rightarrow B(A)$$

coincide con la homotopía de comparación  $\phi$ .

### Demostración.

En lo que sigue, utilizaremos que el sombrero entre complejos reducidos contiene de forma natural a los morfismos  $\bar{f}$ ,  $\bar{g}$  y  $\bar{\phi}$ .

Así, la composición  $(1 \otimes \xi_B \otimes 1)^\infty (1 \otimes 1 \otimes \eta_X)_\infty$ , resulta actuar según

$$f^\infty(a \otimes \bar{b}) = (1 \otimes \bar{f})(1 \otimes 1 - (1 \otimes \theta \cap)(1 \otimes \bar{\phi}) + \cdots)(a \otimes \bar{b}) = a\bar{f}(\bar{b}),$$

ya que  $(1 \otimes \bar{f})(1 \otimes \theta \cap)(1 \otimes \bar{\phi})(a \otimes \bar{b}) = a\bar{f}\bar{\phi}d(\bar{b}) = 0$ .

Análogamente, la composición  $(1 \otimes 1 \otimes \xi_x)(1 \otimes \eta_B \otimes 1)_\infty^\infty$  actúa en la forma

$$g^\infty(a \otimes \bar{x}) = (1 \otimes \bar{g})(1 \otimes 1 - (1 \otimes \bar{\phi})(\theta \cap \otimes 1)(1 \otimes \bar{g}) + \dots)(a \otimes \bar{x}) = a\bar{g}(\bar{x}),$$

puesto que  $(1 \otimes \bar{\phi})(\theta \cap \otimes 1)(1 \otimes \bar{g})(a \otimes \bar{x}) = a\bar{\phi}gd(\bar{x}) = 0$ .

Por otro lado,  $(1 \otimes 1 \otimes \xi_x)(1 \otimes s' \otimes 1)_\infty^\infty(1 \otimes 1 \otimes \eta_x)_\infty$  se aplica así:

$$\phi^\infty(a \otimes \bar{b}) = (1 \otimes \bar{\phi})(1 \otimes 1 - (\theta \cap \otimes 1)(1 \otimes \bar{\phi}) + \dots)(a \otimes \bar{b}) = a\bar{\phi}(\bar{b}),$$

al ser  $(1 \otimes \bar{\phi})(\theta \cap \otimes 1)(1 \otimes \bar{\phi})(a \otimes \bar{b}) = a\bar{\phi}\phi d(\bar{b}) = 0$ .

Hay que destacar que no tiene sentido plantear la comparación de la composición

$$(1 \otimes \xi_B \otimes 1)_\infty^\infty(1 \otimes 1 \otimes t)_\infty(1 \otimes \eta_B \otimes 1)_\infty^\infty$$

con la homotopía de comparación  $\varphi$ , dado que ésta no es  $A$ -lineal en general, y sin embargo la composición anterior sí lo es.

■

La construcción de los sombreros descritos anteriormente siempre es posible en la comparación de la resolución bar con resoluciones contráctiles a  $\Lambda$ .

Hablaremos de *sombreros de comparación canónica*, puesto que extienden de manera natural a los morfismos de comparación canónica.

Sería interesante establecer una condición necesaria y suficiente para los sombreros anteriores determinasen, en realidad, una verdadera contracción.

En [115] Lambe establece una condición suficiente, que rescata del trabajo de May en [129].

**Lema 2.5.6** [129] *Si  $d|_{\bar{X}} \cap \bar{X} = 0$ , entonces  $g$  es inyectiva.*

**Lema 2.5.7** [115] *En las condiciones anteriores, los morfismos de comparación canónicos establecen toda una contracción entre la resolución bar y  $X$ .*

En [115] no se recoge ninguna demostración del resultado, y se da por supuesto que el garantizar la inyectividad de  $g$  conlleva la existencia de una verdadera contracción.

En cualquier caso, es posible elaborar una prueba que ilustra el trabajo realizado con los sombreros de comparación entre resoluciones y complejos reducidos, respectivamente.

### Demostración.

Si  $d|_{\bar{X}} \cap \bar{X} = 0$ , entonces  $\bar{d} = 1 \otimes_A d = 0$ , de donde  $\bar{X}$  es un DG-módulo de diferencial nula.

En este caso, el sombrero de comparación de los complejos reducidos establece trivialmente una contracción, dado que

$$1|_{\bar{X}} - \bar{f}\bar{g} = \bar{d}\bar{\phi} + \bar{\phi}\bar{d} = 0.$$

A partir de aquí, siguiendo la demostración del Teorema 2.4.2, se concluye que entre las resoluciones de partida existe una verdadera contracción.

■

No obstante, el anterior no deja de ser un resultado que sólo indica una condición suficiente, y que no es necesaria: mismo en los artículos [113, 114, 115, 78] Lambé considera contracciones de comparación en las que la diferencial generada en los complejos reducidos no es nula.

En [126], MacLane propone como ejercicio demostrar que en el caso de que el álgebra de partida  $A$  posea diferencial nula, entonces las aplicaciones de comparación canónicas determinan de hecho una contracción.

Demostrar que  $fg = 1$  se reduce, en este caso, a probar que  $dt = 0$ , siendo  $t$  la homotopía de contracción de la resolución  $X$  a  $\Lambda$ .

A continuación probaremos que ésta es una condición necesaria y suficiente en el caso general, por añadidura.



**Teorema 2.5.8** *El sombrero de comparación canónica establecido previamente define una contracción de comparación (a fortiori canónica), si y sólo si  $dt|_{\bar{X}} = 0$ .*

**Demostración.**

Supongamos que  $dt|_{\bar{X}} = 0$ . Como  $t$  es una homotopía de contracción de  $X$  a  $\Lambda$ , en particular se tiene que

$$1|_{\bar{X}} = (dt + td)|_{\bar{X}} = td|_{\bar{X}}.$$

Ahora, vamos a demostrar que  $fg = 1$  en  $X$ , por inducción en el grado del elemento de entrada.

En grado 0 no hay nada que probar, dado que en este caso es  $f = g = 1_{\Lambda}$ .

Supuesto que se ha demostrado la igualdad para elementos de grado hasta  $n$ , probamos que también se tiene para elementos de grado  $n + 1$ . La idea será demostrarlo primero para elementos en  $\bar{X}$ , y después extender la propiedad por linealidad en  $A$ .

Para ello, basta tener en cuenta que

$$fg|_{\bar{X}} = tfgd|_{\bar{X}} \stackrel{H.I.}{=} td|_{\bar{X}} = 1|_{\bar{X}}.$$

De donde  $fg = 1$  en todo  $X$ .

Recíprocamente, supongamos que  $fg = 1$  en todo  $X$ . Procediendo de igual manera que en el razonamiento anterior, tenemos que

$$1|_{\bar{X}} = fg|_{\bar{X}} = tfgd|_{\bar{X}} = td|_{\bar{X}},$$

de donde  $td|_{\bar{X}} = 1|_{\bar{X}}$  y  $dt|_{\bar{X}} = 0$ . ■

Así, con los resultados anteriores se puede extrapolar al contexto de sombreros de contracciones todo el estudio multiplicativo realizado a lo largo del capítulo sobre las contracciones de comparación de resoluciones sobre  $A$  contráctiles a  $\Lambda$ , en el caso de álgebras  $A$  conmutativas.

### 2.5.3 Resoluciones *versus* complejos reducidos (I).

Los teoremas previos nos hacen ver que el procedimiento general a seguir para comparar dos resoluciones dadas es establecer nuestros sombreros de comparación; de suerte que en el caso particular de que  $dt$  sea nulo, el sombrero se transforma en una verdadera contracción, la contracción de comparación canónica.

Hemos de destacar que el espíritu que nos llevó a la determinación del sombrero en la forma dada se sustenta en las ideas que subyacen en el trabajo de Eilenberg-Moore, relacionando la información homológica de fibra y base conocida la del espacio fibrado total [65], y los trabajos posteriores de Rubio-Sergeraert [144] y Real [140].

Además, a raíz del estudio que hemos desarrollado aquí, podemos concluir el siguiente resultado.

**Teorema 2.5.9** *En el estudio de la comparación canónica de resoluciones contráctiles con la resolución bar, es equivalente trabajar a nivel de resoluciones o a nivel de complejos reducidos, para álgebras  $A$  conexas.*

#### **Demostración.**

El paso de complejos reducidos a resoluciones se deduce de la Proposición 2.4.1 y los teoremas 2.4.2 y 2.5.5.

El paso de resoluciones a complejos reducidos, proviene de la tensorización por  $\Lambda \otimes_A$  y el Teorema 2.5.4.

Los teoremas 2.5.4 y 2.5.5 permiten, además, considerar este traspaso de información no sólo en el lenguaje de contracciones, sino también en el más general de sombreros de contracciones.

■

Además, en caso de partir de una contracción de comparación no canónica, el paso anterior de resoluciones a complejos reducidos sigue siendo válido, de ser  $A$ -lineales los morfismos de la contracción inicial.



Recíprocamente, el paso de una contracción entre complejos reducidos a una contracción de comparación (en general, no canónica) entre resoluciones siempre es posible, suponiendo la conexión del álgebra base  $A$ .

Éste es el motivo de que en el resto de la memoria, nos restrinjamos a contracciones entre complejos reducidos.

## 2.6 Cuestiones relacionadas.

A raíz del estudio que hemos desarrollado en el presente capítulo surgen varias cuestiones secundarias, ligadas en mayor o menor medida al discurrir principal. De entre todas ellas, vamos a discutir a continuación las que en nuestra opinión parecen más interesantes, cuales son:

- Sobre el carácter contráctil de  $X$ .
- Comentarios acerca del Teorema 2.3.2.
- “Sombreros” de comparación de resoluciones.
- Generadores de  $\bar{B}(A)$  como álgebra.

Las analizaremos en secciones independientes.

### 2.6.1 Sobre el carácter contráctil de $X$ .

En el estudio que hemos llevado a cabo ha sido fundamental la hipótesis inicial de que la resolución  $X$  admitía una homotopía  $t$  de contracción a  $\Lambda$ . De hecho,  $t$  intervenía en la definición recursiva de la proyección de comparación entre la resolución bar y la propia resolución  $X$ .

¿Qué ocurre si no se dispone de una tal homotopía de contracción?

En [78] se recoge el siguiente resultado, que garantiza que toda resolución  $X$  que escinda de la resolución bar  $B(A)$  (en el sentido de que exista una contracción de  $B(A)$  a  $X$ ), admite una homotopía de contracción al anillo base.

**Lema 2.6.1** [78] *Sea  $X$  una resolución de  $\Lambda$  sobre  $A$  que escinde de  $B(A)$  según una contracción  $(f, g, \phi) : B(A) \Rightarrow X$ . Entonces,  $fsg$  es una homotopía de contracción para  $X$*

**Demostración.**

Aunque la demostración del resultado no aparece en el artículo citado, se puede reproducir sin dificultad.

En grado cero, es claro que  $fsg = 0$  (dado que  $s|_{|=-0} = 0$ ), lo cual tiene sentido por ser ambos  $X_0$  y  $B_0(A)$  el propio anillo  $\Lambda$ .

Dado que  $s$  es la homotopía de contracción de la resolución bar a  $\Lambda$ , se tiene que en grados positivos es  $1 = sd + ds$ .

Así, para grados positivos, se tiene que

$$(fsg)d + d(fsg) = fsgd + fdsg = fsgd + f(1 - sd)g = fsgd + fg - fsdg = fg = 1,$$

dado que  $dg = gd$  y  $fg = 1$ .

Por tanto,  $fsg$  constituye una homotopía de contracción a  $\Lambda$ .

■

Ahora, se puede demostrar con facilidad que la homotopía anterior coincide con  $t$ , en el caso particular de que  $X$  escinda de  $B(A)$  según las aplicaciones de comparación canónicas.

**Lema 2.6.2** *Sea  $X$  una resolución contráctil a  $\Lambda$  según  $t$  que escinde de  $B(A)$  mediante la contracción de comparación canónica. Entonces  $t = fsg$ .*

**Demostración.**

Ciertamente, se tiene que

$$fsg = tfdsg = tf(1 - sd)g = tfg - tfsdg = tfg = t,$$

dado que  $tf s = t(tfd)s = 0$ , por ser  $tt = 0$ .

Nótese que hemos utilizado la definición recursiva de  $f$  sobre  $\bar{B}(A)$ , lo cual siempre es posible en la composición  $fs$ : la imagen de la homotopía  $s$  recae por definición sobre el complejo reducido de la resolución bar.

■

### 2.6.2 Acerca del Teorema 2.3.2.

Una de las conclusiones del Teorema 2.3.2 es que la resolución  $(X, d)$  hereda el producto propio de la resolución bar,  $(B(A), d_B)$ .

En realidad, en la prueba del teorema lo que se valida es la veracidad de la identidad  $\phi\mu_B(g \otimes g) = 0$ , condición suficiente para que el producto traspase (ver Lema 2.3.3).

No obstante, una condición necesaria para que se dé la identidad en cuestión es que la composición  $sgf\mu_B(g \otimes g)$  sea nula. Este hecho se deduce de la definición recursiva de  $\phi$  para elementos en el complejo reducido  $\bar{B}(A)$ ,  $\phi = -s\phi d - sgf$ .

En el caso de que  $X$  sea una CDGA-álgebra en sí mismo, compatible con la estructura de  $A$ -módulo subyacente, entonces todas las condiciones anteriores se verifican.

Así, primero se probaría que  $g$  es un morfismo de CDGA-álgebras (es decir,  $g\mu_X = \mu_B(g \otimes g)$ ); con lo que  $\phi\mu_B(g \otimes g) = 0$  y  $\mu_X = f\mu_B(g \otimes g)$ .

Para probar que  $g\mu_X = \mu_B(g \otimes g)$  se procedería por inducción sobre el grado del elemento de entrada.

Dado que  $\mu_X$  es compatible con la estructura de  $A$ -módulo (lo cual significa, en definitiva, que consiste en el producto tensorial del producto en  $A$  y un producto en  $\bar{X}$ ) y que  $g$  es especial, entonces basta probar la identidad para elementos en el complejo reducido.

En grado cero, la identidad se verifica trivialmente, por reducirnos en este caso a escalares del anillo base.

Supuesto que se verifica para elementos de entrada de grado menor o igual que  $k$ , habría que comprobar la veracidad de la identidad para elementos de grado  $k + 1$ .

Utilizando la definición recursiva de  $g$  actuando sobre elementos en  $\bar{X}$  y el Lema 2.3.5 para la homotopía  $\phi' = s$ , tenemos que

$$\begin{aligned} \mu_B(g(\bar{x}) \otimes g(\bar{x}')) &= \mu_B(sgd \otimes sgd) = \\ &= (-1)^{|\bar{x}|} s\mu_B(g(\bar{x}) \otimes gd(\bar{x}')) + s\mu_B(gd(\bar{x}) \otimes g(\bar{x}')) = \\ &= s\mu_B(g \otimes g)(d \otimes 1 + 1 \otimes d)(\bar{x} \otimes \bar{x}') \stackrel{H.I.}{=} sg\mu_X(d \otimes 1 + 1 \otimes d)(\bar{x} \otimes \bar{x}') = \\ &= sgd\mu_X(\bar{x} \otimes \bar{x}') = g\mu_X(\bar{x} \otimes \bar{x}'). \end{aligned}$$

De este modo concluiríamos que  $g\mu_X = \mu_B(g \otimes g)$ , de donde

$$\mu_X = f\mu_B(g \otimes g)$$

y el producto dado en  $X$  coincide con el naturalmente heredado de  $B(A)$ .

Ahora, se enlazaría con el **Paso 2** de la demostración del Teorema 2.3.2.

### 2.6.3 Variantes del Teorema 2.4.4.

El Teorema 2.4.4 responde, bajo determinadas condiciones, a la iniciativa de trasladar un producto tensorial torcido a un  $A_\infty$ -producto tensorial torcido, preservando el álgebra base y sustituyendo la coálgebra inicial por una  $A_\infty$ -coálgebra.

A partir de este problema, nos planteamos las siguientes preguntas:

¿Es posible establecer un resultado dual, en el que se traslade la estructura preservando la coálgebra base y sustituyendo el álgebra inicial por una  $A_\infty$ -álgebra? En caso afirmativo, ¿bajo qué condiciones?

¿Se puede debilitar la tan restrictiva hipótesis de que la composición de la cocadena de torsión con la homotopía sea nula?

¿Qué ocurre en el caso de que ambas la coálgebra y el álgebra de partida se sustituyan por las  $A_\infty$ -estructuras correspondientes? Ya sea mediante el establecimiento

de alguna propiedad universal, o bien mediante la determinación de una relación formal, ¿cabe lugar a hablar de algún tipo de  $A_\infty$ -producto tensorial heredado?

En cuanto a las dos últimas preguntas, cabe buscar una respuesta trabajando únicamente a nivel de contracciones, utilizando las construcciones *bar* y *cobar*, y considerando argumentos adecuados de perturbación homológica. En este sentido, se encuentra en proceso de elaboración un trabajo conjunto con los profesores Armario y Real que progresa sobre estas cuestiones.

En cambio, es bastante más asequible el transcribir el Teorema 2.4.4 al caso dual de  $A_\infty$ -álgebras.

**Teorema 2.6.3** *Sea  $A \otimes_t C$  el producto tensorial torcido según una cocadena de torsión  $t : C \rightarrow A$  y consideremos una contracción  $c(f, g, \phi) : A \Rightarrow A'$ . Supongamos que  $c$  induce sobre  $A'$  una estructura de  $A_\infty$ -álgebra, que  $\phi t = 0$  y que  $(\phi \otimes 1)t \cap$  es puntualmente nilpotente. Entonces, existe una contracción*

$$A \otimes_t C \Rightarrow A' \otimes_{\bar{t}} C,$$

donde  $\bar{t} = ft$  es una  $A_\infty$ -cocadena de torsión y  $A' \otimes_{\bar{t}} C$  un  $A_\infty$ -producto tensorial torcido.

### Demostración.

Dado que  $(\phi \otimes 1)t \cap$  es puntualmente nilpotente, se tiene que la perturbación de la contracción

$$A \otimes C \Rightarrow A' \otimes C$$

que se obtiene de  $c$  tensorizando a derecha por  $C$ , según el dato de perturbación  $t \cap$ ; converge para dar la contracción

$$A \otimes_t C \Rightarrow (A' \otimes C, 1 \otimes d_C + d_{A'} \otimes 1 + d_{t \cap}),$$

con

$$d_{t \cap} = (f \otimes 1) \sum_{n \geq 0} (-1)^n [(\mu \otimes 1)(1 \otimes t \otimes 1)(1 \otimes \Delta)(\phi \otimes 1)]^n (\mu \otimes 1)(1 \otimes t \otimes 1)(g \otimes \Delta).$$

Por otra parte, como  $c$  induce una estructura de  $A_\infty$ -álgebra sobre  $A'$ , por construcción ha de ser  $\bar{t} = ft$  una  $A_\infty$ -cocadena de torsión (según el ardid tensorial desarrollado en [82]).

Lo que vamos a probar es que, bajo la condición de que  $\phi t = 0$ , entonces la diferencial  $1 \otimes d_C + d_{A'} \otimes 1 + d_{t\cap}$  coincide con la diferencial  $d_{\bar{t}}$  que induce  $\bar{t}$  en el  $A_\infty$ -producto tensorial  $A' \otimes_{\bar{t}} C$ , con

$$d_{\bar{t}} = 1 \otimes d_C + \sum_{i=1}^{\infty} (m_i \otimes 1)(1 \otimes \bar{t}^{i-1} \otimes 1)(1 \otimes \Delta^{(i)}),$$

para  $\Delta^{(1)} = 1$ ,  $\Delta^{(2)} = \Delta$ ,  $\Delta^{(i)} = 1 \otimes \Delta^{(i-1)}$ ,  $m_1 = m_{j_1}$  y, para  $i \geq 2$ ,  $m_i : A' \otimes \dots \otimes A' \rightarrow A'$  la inclusión canónica  $-m_{j_i}$ , siendo  $m$  el morfismo que determina la estructura de  $A_\infty$ -álgebra de  $A'$  según la contracción  $c$ :

$$d_{\bar{B}} = (-sd_{A'}s^{-1})^{[1]} + d_{\partial_{\text{coalg}}} = -(smT(s^{-1}))^{[1]},$$

$$d_{\partial_{\text{coalg}}} = T(sfs^{-1})\partial_{\text{coalg}}\left(\sum_{i \geq 0} (-1)^i (T(s\phi s^{-1})\partial_{\text{coalg}})^i\right)T(sgs^{-1})$$

y

$$\partial_{\text{coalg}}|_{|s=n} = \sum_{k=1}^{n-1} 1^{k-1} \otimes s\mu(s^{-1} \otimes s^{-1}) \otimes 1^{\otimes n-k-1}.$$

De este modo, para  $i \geq 2$ , es

$$m_i = (-1)^{\frac{i(i-1)}{2}} s^{-1} d_{\bar{B}} T(s) j_i.$$

Ahora bien, de entre los sumandos que componen  $d_{\bar{B}} = (-sd_{A'}s^{-1})^{[1]} + d_{\partial_{\text{coalg}}}$ , el primero de ellos respeta el número de factores del elemento de entrada, mientras que el segundo lo disminuye en al menos una unidad. Como la salida de  $m_i$  es un elemento de  $A'$  (i.e., de  $T(A')$  compuesto por un sólo factor), resulta que el sumando  $(-sd_{A'}s^{-1})^{[1]}$  es el único que afecta en el cálculo de  $m_1$ , mientras que el sumando  $d_{\partial_{\text{coalg}}}$  es el único que interviene en el cómputo de  $m_i$ , para  $i \geq 2$ .

Por tanto, se tiene que  $m_1 = -\pi s^{-1}(-sd_{A'}s^{-1})s_{j_1} = d_{C'}$ , para  $\pi$  la proyección natural  $\pi : T(A') \rightarrow A'$ .

De donde

$$(m_1 \otimes 1)(1 \otimes 1)(1 \otimes \Delta^{(1)}) = d_{A'} \otimes 1,$$

y el hecho de probar que  $1 \otimes d_C + d_{A'} \otimes 1 + d_{t\cap}$  coincide con  $d_{\bar{t}}$  se reduce, pues, a demostrar que

$$d_{t\cap} = \sum_{i=2}^{\infty} (m_i \otimes 1)(1 \otimes \bar{t}^{i-1} \otimes 1)(1 \otimes \Delta^{(i)}).$$



Por otro lado, para  $i \geq 2$ , es

$$m_i = (-1)^{\frac{i(i-1)}{2}} \pi s^{-1} d_{\partial_{\text{coalg}}} T(s) j_i.$$

y teniendo en cuenta que  $f\phi = 0$ ,  $\phi g = 0$  y  $fgf = f$ , resulta que

$$m_i = f\mu \left[ \sum_{k_2=1}^2 \sum_{k_3=1}^{k_2+1} \cdots \sum_{k_{i-1}=1}^{k_{i-2}+1} \prod_{j=2}^{i-1} (-1)^{k_j} (1^{\otimes k_j-1} \otimes \phi\mu \otimes 1^{\otimes j-k_j}) \right] g^{\otimes i},$$

donde el símbolo  $\prod_{j=2}^{i-1} h_j$  representa en este caso la composición  $h_2 \circ \cdots \circ h_{i-1}$ .

Así, todo se reduce a probar que  $d_{t\cap}$  coincide con la expresión

$$\begin{aligned} \sum_{i=2}^{\infty} (f\mu \otimes 1) \left[ \sum_{k_2=1}^2 \sum_{k_3=1}^{k_2+1} \cdots \sum_{k_{i-1}=1}^{k_{i-2}+1} \prod_{j=2}^{i-1} (-1)^{k_j} (1^{\otimes k_j-1} \otimes \phi\mu \otimes 1^{\otimes j-k_j+1}) \right] \circ \\ \circ (g^{\otimes i} \otimes 1) (1 \otimes (ft)^{\otimes i-1} \otimes 1) (1 \otimes \Delta^{(i)}). \end{aligned} \quad (2.10)$$

Para ello, llevaremos la expresión general de  $d_{t\cap}$ ,

$$d_{t\cap} = (f \otimes 1) \sum_{n \geq 0} (-1)^n [(\mu \otimes 1)(1 \otimes t \otimes 1)(1 \otimes \Delta)(\phi \otimes 1)]^n (\mu \otimes 1)(1 \otimes t \otimes 1)(g \otimes \Delta), \quad (2.11)$$

a esta forma, mediante el uso de las siguientes identidades:

1. Por ser  $t$  cocadena de torsión, se tiene que

$$d_A t + t d_C - \mu(t \otimes t) \Delta = 0; \quad (2.12)$$

2. Generalizando, se puede probar por inducción que

$$d_A^{[n]} t^{\otimes n} \Delta^{(n)} = (-1)^n t^{\otimes n} \Delta^{(n)} d_C + \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} (1^{\otimes k-1} \otimes \mu \otimes 1^{\otimes n-k}) t^{\otimes n+1} \Delta^{(n+1)}; \quad (2.13)$$

de hecho, para  $n = 1$  se tiene la condición (2.12) y para  $n = 2$  se tiene que

$$\begin{aligned} d_A^{[2]} t^{\otimes 2} \Delta &= (-t \otimes d_A t + d_A t \otimes t) \Delta \stackrel{(2.12)}{=} \\ &\stackrel{(2.12)}{=} (t \otimes t d_C - t \otimes \mu t^{\otimes 2} \Delta - t d_C \otimes t + \mu t^{\otimes 2} \Delta \otimes t) \Delta = \\ &= t^{\otimes 2} d_C^{[2]} \Delta + (\mu \otimes 1 - 1 \otimes \mu) t^{\otimes 3} \Delta^{(3)} = \end{aligned}$$

$$= t^{\otimes 2} \Delta d_C + (\mu \otimes 1 - 1 \otimes \mu) t^{\otimes 3} \Delta^{(3)};$$

en general, supuesto que se verifica la relación hasta  $n = m - 1$ , para  $n = m$  se tiene que

$$\begin{aligned} d_A^{[m]} t^{\otimes m} \Delta^{(m)} &= (1 \otimes d_A^{[m-1]} + d_A \otimes 1^{\otimes m-1}) (t \otimes t^{\otimes m-1}) (1 \otimes \Delta^{(m-1)}) \Delta = \\ &= -(t \otimes d_A^{[m-1]} t^{\otimes m-1} \Delta^{(m-1)}) \Delta + (d_A t \otimes t^{\otimes m-1} \Delta^{(m-1)}) \Delta \stackrel{H.I.}{=} \\ &\stackrel{H.I.}{=} (-1)^m t^{\otimes m} (1 \otimes \Delta^{(m-1)}) (1 \otimes d_C) \Delta + \sum_{k=2}^m (-1)^{k+1} (1^{\otimes k-1} \otimes \mu \otimes 1^{m-k}) t^{\otimes m+1} (1 \otimes \Delta^{(m)}) + \\ &\quad + (-1)^m t^{\otimes m} (d_C \otimes 1^{\otimes m-1}) \Delta^{(m)} + (\mu \otimes 1^{\otimes m-1}) t^{\otimes m+1} \Delta^{(m+1)} = \\ &= (-1)^m t^{\otimes m} \Delta^{(m)} d_C + \sum_{k=1}^m (-1)^{k+1} (1^{\otimes k-1} \otimes \mu \otimes 1^{\otimes m-k}) t^{\otimes m+1} \Delta^{(m+1)}. \end{aligned}$$

3. Teniendo en cuenta que  $\phi t = 0$ , de la anterior resulta

$$\phi^{[n]} d_A^{[n]} t^{\otimes n} \Delta^{(n)} = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} (1^{\otimes k-1} \otimes \phi \mu \otimes (gf)^{\otimes n-k}) t^{\otimes n+1} \Delta^{(n+1)}. \quad (2.14)$$

4. A partir de la contracción  $c^{\otimes n}$  y sabiendo que  $\phi t = 0$ , obtenemos la relación

$$t^{\otimes n} = g^{\otimes n} (ft)^{\otimes n} + \phi^{[n]} d_A^{[n]} t^{\otimes n}. \quad (2.15)$$

5. Por último, combinando las identidades (2.14) y (2.15), resulta

$$t^{\otimes n} \Delta^{(n)} = g^{\otimes n} (ft)^{\otimes n} \Delta^{(n)} + \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} (1^{\otimes k-1} \otimes \phi \mu \otimes (gf)^{\otimes n-k}) t^{\otimes n+1} \Delta^{(n+1)}. \quad (2.16)$$

Estas igualdades afectan a los sumandos de (2.11) del siguiente modo:

$$\boxed{n = 0}$$

$$\begin{aligned} (f\mu \otimes 1)(g \otimes t \otimes 1)(1 \otimes \Delta) &\stackrel{(2.15)}{=} (f\mu \otimes 1)(g^{\otimes 2} \otimes 1)(1 \otimes ft \otimes 1)(1 \otimes \Delta) + \\ &\quad (f\mu \otimes 1)(g \otimes 1^{\otimes 2})(1 \otimes \phi d_A t \otimes 1)(1 \otimes \Delta) \stackrel{(2.12)}{=} \\ &\stackrel{(2.12)}{=} \boxed{i = 2} + (f\mu \otimes 1)(g \otimes 1^{\otimes 2})(1 \otimes \phi \mu \otimes 1)(1 \otimes t^{\otimes 2} \Delta \otimes 1)(1 \otimes \Delta) \stackrel{(2.16)}{=} \\ &\stackrel{(2.16)}{=} \boxed{i = 2} + (f\mu \otimes 1)(1 \otimes \phi \mu \otimes 1)(g^{\otimes 3} \otimes 1)(1 \otimes (ft)^{\otimes 2} \otimes 1)(1 \otimes \Delta^{(3)}) + \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
& +(f\mu \otimes 1)(g \otimes 1^{\otimes 2})(1 \otimes \phi\mu \otimes 1) \sum_{k_3=1}^2 (-1)^{k_3+1} ((1^{\otimes k} \otimes \phi\mu \otimes (gf)^{\otimes 2-k_3}) t^{\otimes 3} \Delta^{(3)} \otimes 1)(1 \otimes \Delta) \stackrel{(2.16)}{=} \\
& \dots \stackrel{(2.16)}{=} (f\mu \otimes 1) \sum_{j=2}^{\infty} \sum_{k_2=2}^2 \sum_{k_3=2}^{k_2+1} \dots \sum_{k_{j-1}=2}^{k_{j-2}+1} \left[ \prod_{l=2}^{j-1} (-1)^{k_l} (1^{\otimes k_{l-1}} \otimes \phi\mu \otimes 1^{\otimes l-k_{l+1}}) \right] \circ \\
& \quad \circ (g^{\otimes j} \otimes 1)(1 \otimes (ft)^{\otimes j-1} \otimes 1)(1 \otimes \Delta^{(j)}),
\end{aligned}$$

dando lugar, pues, para  $j \geq 2$ , a los sumandos

$$i = j, k_2 = 2, 2 \leq k_3 \leq 3, 2 \leq k_4 \leq k_3 + 1, \dots, 2 \leq k_{j-1} \leq k_{j-2} + 1.$$

$$n = m$$

$$\begin{aligned}
& (-1)^m (f \otimes 1) [(\mu \otimes 1)(1 \otimes t \otimes 1)(\phi \otimes \Delta)]^m (\mu \otimes 1)(1 \otimes t \otimes 1)(g \otimes \Delta) = \\
& = (-1)^m (f\mu \otimes 1)(\phi\mu \otimes 1)(\phi\mu \otimes 1^{\otimes 2}) \dots (\phi\mu \otimes 1^{\otimes m+1})(1 \otimes t^{\otimes m+1} \otimes 1)(1 \otimes \Delta^{(m+2)}) \stackrel{(2.16)}{=} \\
& \dots \stackrel{(2.16)}{=} (f\mu \otimes 1) \sum_{j=m+2}^{\infty} \sum_{k_2=1}^1 \dots \sum_{k_{m+1}=1}^1 \sum_{k_{m+2}=2}^{m+1} \sum_{k_{m+3}=2}^{k_{m+2}+1} \dots \sum_{k_{j-1}=2}^{k_{j-2}+1} \\
& \quad \left[ \prod_{l=2}^{j-1} (-1)^{k_l} (1^{\otimes k_{l-1}} \otimes \phi\mu \otimes 1^{\otimes l-k_{l+1}}) \right] (g^{\otimes j} \otimes 1)(1 \otimes (ft)^{\otimes j-1} \otimes 1)(1 \otimes \Delta^{(j)}),
\end{aligned}$$

dando lugar, pues, para  $j \geq m + 2$ , a los sumandos

$$i = j, k_2 = 1, \dots, k_{m+1} = 1, 2 \leq k_{m+2} \leq m + 1,$$

$$2 \leq k_{m+3} \leq k_{m+2} + 1, \dots, 2 \leq k_{j-1} \leq k_{j-2} + 1.$$

De modo que ambas estructuras coinciden y el resultado queda probado. ■

El resultado anterior jugaría un papel análogo al Teorema 2.4.4 en el estudio de las resoluciones que escinden de la resolución cobar.

### 2.6.4 Generadores de $\bar{B}(A)$ como álgebra.

En la comparación de resoluciones que escinden de la resolución bar se ha probado que, en el caso conmutativo, los morfismos que intervienen son compatibles con las estructuras multiplicativas subyacentes: ambas la proyección e inyección son aplicaciones de DGA-álgebras y la homotopía satisface una compatibilidad intermedia.

En estas circunstancias, se antoja interesante la determinación de un conjunto de generadores de  $\bar{B}(A)$  como álgebra y no como simple DG-módulo, para así aprovechar el carácter multiplicativo de los morfismos.

Hemos de destacar que esta cuestión merece la atención de otras ramas de las matemáticas, como el Cálculo Secundario, que se preocupa de la algebrización de la teoría de ecuaciones diferenciales no lineales. Más concretamente, a la hora de facilitar el cálculo de la homología de los espacios  $k$ -Jets dados en [110] sería primordial el determinar un sistema de generadores de la construcción bar de ciertas CDGAC-álgebras particulares, tal como se indica en [18].

El problema de la consecución de un tal sistema de generadores consta esencialmente de dos etapas bien diferenciadas: la primera, destinada a distinguir los generadores de  $\bar{B}(A)$ ; una posterior, en la que se determina la descomposición de cada elemento del álgebra como combinación lineal de productos shuffle de los generadores previamente destacados.

Para determinar qué elementos de  $\bar{B}(A)$  son generadores nos preocuparemos de señalar aquellos que no lo son.

Es claro que basta razonar sobre los elementos homogéneos  $[x_1 | \cdots | x_n]$  de  $\bar{B}(A)$ , dado que cualquier elemento de  $\bar{B}(A)$  es combinación lineal de elementos homogéneos. Más aún, sólo hay que preocuparse de hallar aquellos elementos homogéneos que son combinación lineal de productos shuffle de pares de elementos de dimensión inferior, dado que cualquier producto de tres o más elementos se puede reducir a una combinación lineal de productos de esta forma.

Además, como el producto shuffle es conmutativo, se puede fijar que el primer elemento de cada una de estas parejas a multiplicar tenga por dimensión simplicial la mitad, a lo sumo, que el elemento homogéneo estudiado.

Es más, sólo hay que estudiar combinaciones lineales de productos shuffle de pares de elementos cuyas dimensiones simpliciales sumen la dimensión simplicial del elemento estudiado; y, por tanto, asimismo cuyas dimensiones tensoriales sumen la dimensión tensorial de dicho elemento. Dado que el producto shuffle consiste en una suma de permutaciones de la yuxtaposición del par de elementos de entrada, en definitiva, hay que reducir el estudio tan sólo a combinaciones lineales de shuffles de elementos que surjan como partición de cualquier permutación del elemento homogéneo  $[x_1 | \cdots | x_n]$  considerado.

En [132] se realizó una codificación del problema en el lenguaje computacionalmente más apropiado de espacios vectoriales, lo cual permite reducir la cuestión al campo matricial de sistemas de ecuaciones lineales.

Supongamos que el álgebra  $A$  de partida tiene  $k$  generadores (que notamos  $x_1, \dots, x_n$ , ordenados según su graduación de menor a mayor) de grado tensorial no superior a  $n$ . Para cada dimensión simplicial  $n$  se considera el espacio vectorial  $H_n$  engendrado por los  $k^n$  elementos homogéneos de  $\bar{B}(A)$  de dicha dimensión simplicial.

Dicho espacio vectorial tiene dimensión  $k^n$ , de modo que al elemento  $[x_{i_1} | \cdots | x_{i_n}]$  de  $\bar{B}(A)$  se le hace corresponder el  $m$ -ésimo elemento de la base canónica de  $H_n$ , con  $m = 1 + \sum_{j=1}^n (i_j - 1)k^{j-1}$ . Se trata de considerar el cambio de base decimal a base  $k$ .

Ahora, una vez generado el subespacio vectorial de los productos shuffle de pares de elementos adecuados, hay que dilucidar qué vectores correspondientes a elementos homogéneos en la construcción Bar pertenecen o no a tal subespacio. Esto requiere resolver para cada elemento homogéneo un sistema de tantas ecuaciones como productos shuffle hallados y  $k^n$  incógnitas.

En realidad, basta estudiar la forma reducida por filas de la matriz cuyas filas son las coordenadas de los vectores correspondientes a los productos shuffle a considerar. El sistema de generadores del álgebra en dimensión simplicial  $n$  viene dado por los elementos homogéneos correspondientes a aquellas columnas sin unos pivote. Además, este procedimiento nos permite conocer con el mismo coste todos los posibles sistemas generadores, dado que cada fila no nula de la matriz reducida proporciona la información necesaria: si localizamos en cada fila los coeficientes no nulos y tomamos los elementos homogéneos correspondientes a las columnas en las que éstos se encuentran, aquellos elementos homogéneos generadores que se encuentren en esa relación

se pueden sustituir por cualquiera de los otros de la relación que en principio no eran generadores.

Este problema admite también una traducción al campo de la matemática discreta, en tanto en cuanto cada elemento homogéneo de dimensión simplicial  $n$  se puede leer como una rama del árbol  $k$ -ario regular de peso  $n$ . Si se dota a este árbol de la estructura multiplicativa naturalmente heredada del producto shuffle, se obtiene lo que en [18, 17] damos en llamar *álgebra de caminos*. En este artículo se estudian comportamientos generales en este tipo de álgebras, aunque no se consigue determinar un conjunto explícito de generadores. No obstante, parece que el camino que aquí se encauza puede llegar a fructificar en corto plazo.

## 2.7 Comentarios generales.

Como punto final a este capítulo nos gustaría recalcar varias ideas, que de algún modo u otro han sido abordadas a lo largo de la exposición, pero preferimos recuperar en este apartado por su relevancia.

Del esquema analizado para la comparación de resoluciones, se desprende que fundamentalmente hay dos formas distintas para acometer tal estudio: una, establecer directamente una contracción entre las resoluciones dadas, vertiente encauzada por Cartan en [40]; la segunda, olvidarse de las resoluciones y trabajar únicamente en el plano de los complejos reducidos, en lo que nos permitimos llamar “a la Mac Lane”, haciendo honor al trabajo [126].

Aquí hemos probado que, paradójicamente, ambos caminos son paralelos y terminan en el mismo punto; y, más aún, que en bastantes casos es posible cambiar de uno a otro sin perder información en el salto (en particular, con las contracciones de comparación canónicas).

En general, el trabajar directamente a nivel de resoluciones permite evitar transferencias de alto coste computacional que aparecen al considerar exclusivamente complejos reducidos; en contraposición, la manipulación directa de resoluciones según la comparación canónica requiere utilizar fórmulas recursivas, mientras que las contracciones de complejos reducidos facilitan la aparición de fórmulas explícitas.

En la próxima sección veremos ejemplos trabajando de ambas formas, aunque la comparación quedará más clara en los capítulos siguientes.

Por otro lado, en la exposición a veces se han asumido hipótesis bastante restrictivas, cuales son la conexión y conmutatividad del álgebra de partida.

Como se puede comprobar, la conmutatividad sólo se hace necesaria cuando se habla de estructuras multiplicativas en la comparación de resoluciones. Esto no puede ser de otro modo, dado que el producto shuffle deja de estar definido en el caso no conmutativo.

Por su parte, la condición de conexión se ha utilizado para garantizar la parada de los procesos de perturbación: aunque no es necesaria, desde luego lo es suficiente. En el cuarto capítulo de la memoria presentamos una contracción de comparación de una resolución que escinde de la bar, aun sin verificarse la hipótesis de conexión.

Finalmente, el estudio que hemos diseñado se centra en las resoluciones del tipo  $A \otimes \bar{X}$ , aunque varios de los resultados tratados se pueden aplicar al más amplio caso de resoluciones  $X$ , para  $A$ -módulos  $X$  no necesariamente relativamente libres. Queda pendiente profundizar en el análisis de lo que sucede en este marco más general.

## 2.8 Resoluciones *versus* complejos reducidos (II).

El procedimiento usual de cálculo (co)homológico en Topología Algebraica y Álgebra Homológica se realiza a través de las resoluciones, tal como indicáramos en la introducción del presente capítulo.

Así, fijado un anillo base  $\Lambda$ , un álgebra  $A$  sobre  $\Lambda$  y sendos  $A$ -módulos  $M$  y  $N$  a izquierda y derecha, respectivamente; el cálculo de los funtores  $Tor^A(M, N)$  y  $Ext_A(M, N)$  se puede realizar a partir de una resolución proyectiva  $X$  de  $M$  sobre  $A$ , mediante el cómputo de la homología de  $X \otimes_A N$  y la cohomología de  $\text{Hom}_A(M, N)$ , respectivamente.

En particular, si  $A$  es una DGA-álgebra, entonces  $\Lambda$  adquiere la estructura de  $A$ -módulo vía el pullback de la aumentación de  $A$ ; de modo que  $Tor^A(A, \Lambda) = H_*(A)$  y  $Ext_A(A, \Lambda) = H^*(A)$  definen la homología y cohomología de  $A$ , respectivamente.

Por otro lado, a partir de un grupo  $G$ , se puede construir el álgebra canónicamente asociada  $\Lambda[G]$  que conforma su “anillo de grupo” sobre  $\Lambda$ ; cual es el  $\Lambda$ -módulo libre de base  $G$ , dotado del producto natural que surge de la extensión bilineal de la ley del grupo  $G$ . Una aumentación para este álgebra es la extensión lineal de la aplicación que lleva cada elemento de  $G$  en la unidad de  $\Lambda$ .

De esta forma, tomando como álgebra de partida  $A = \Lambda[G]$ , obtenemos por las definiciones anteriores que  $Tor^A(A, \Lambda) = H_*(A)$  y  $Ext_A(A, \Lambda) = H^*(A)$ , que por extensión se toman como la homología y cohomología del grupo  $G$ , respectivamente.

En cualquier caso, es necesario disponer de resoluciones para llegar a realizar explícitamente los cálculos anteriores. Una resolución “universal” o “estándar” disponible en cualquier categoría abeliana es la resolución bar.

Lamentablemente, esta resolución es demasiado “grosera”, en el sentido de que comprende un DG-módulo de gran tamaño, y en la mayor parte de los casos es posible encontrar resoluciones alternativas más finas.

Lo que hemos probado a lo largo del capítulo es que, aún así, cualquier resolución (contráctil a  $\Lambda$ ) deriva implícitamente de la resolución bar, en lo que llamamos escisión, ya sea en forma de contracción o de sombrero de comparación.

Tal como recoge Lambe en [115], fórmulas recursivas para la definición de estos morfismos de comparación son (ver (2.1) y (2.2)):

$$\begin{aligned} f([b_1]) &= t(b_1), & f[b_1 | \cdots | b_n] &= t(b_1 \otimes f([b_2 | \cdots | b_n])), \\ \phi|_{||=0} &= 0, & \phi([b_1 | \cdots | b_n]) &= \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i [b_1 | \cdots | b_i | sgf([b_{i+1} | \cdots | b_n])], \\ g_0|_{\bar{x}_0} &= \xi, & g_{n+1}|_{\bar{x}_{n+1}} &= sg_n d_{n+1}|_{\bar{x}_{n+1}}. \end{aligned}$$

Además, es inviable hallar una formulación recursiva más simple para  $g$ , en tanto en cuanto se desconoce una pauta universal, independiente de la resolución considerada, en el comportamiento de la diferencial  $d_X$ .

La complejidad en las fórmulas anteriores recae fundamentalmente en las propias de la homotopía de contracción  $t$  y la diferencial  $d_X$ , que dependen ambas de la contracción inicial  $X$ ; de modo que nada más se puede decir en este sentido, a priori.

Sin embargo, la segunda conclusión relevante del trabajo realizado es que ambos

$f$  y  $g$  son morfismos de álgebras (preservan productos) y  $\phi$  satisface la compatibilidad intermedia con el producto en  $B(A)$  que dan las relaciones de cuasi-homotopía,

$$\phi\mu_{B(A)}(\phi \otimes g) = 0,$$

$$\phi\mu_{B(A)}(g \otimes \phi) = 0,$$

$$\phi\mu_{B(A)}(\phi \otimes \phi) = 0;$$

de modo que a la hora de evaluar  $f$  y  $g$  basta con determinar las imágenes por estos morfismos, respectivamente, de los generadores de  $B(A)$  y  $X$  como álgebras.

Más aún, con vistas a simplificar la formulación de  $g$ , hemos demostrado por último que la diferencial  $d_X$  es la propia de un  $A_\infty$ -producto tensorial, según la  $A_\infty$ -cocadena de torsión  $\theta g$ , con  $\theta$  la cocadena universal que hace de  $A \otimes_\theta \bar{B}(A)$  la resolución bar.

Así,

$$d_X = d_A \otimes 1 + \sum_{i=1}^{\infty} (\mu^{(i)} \otimes 1)(1 \otimes (\theta g)^{\otimes i-1} \otimes 1)(1 \otimes \Delta_i),$$

para  $\mu^{(1)} = 1$ ,  $\mu^{(2)} = \mu$ ,  $\mu^{(i)} = 1 \otimes \mu^{(i-1)}$  y  $\{\Delta_i\}$  definiendo la  $A_\infty$ -estructura natural en  $\bar{X}$  heredada de  $\bar{B}(A)$ .

En esta expresión de  $d_X$ , la primera parte concierne al producto  $\mu$  de  $A$  y a la composición  $\theta g$ .

Notemos que la composición  $\theta g$  actúa de manera muy sencilla, de modo de

$$\theta g(\bar{x}) = \theta sgd(\bar{x}) = (1 \otimes \xi_{\bar{x}})\delta(\bar{x});$$

donde  $\delta$  se refiere a la parte  $A$ -lineal (i.e. en  $\ker \xi_A \otimes \bar{X}$ ) de  $d_X$ , y  $\xi_{\bar{x}}$  actúa de forma nula en grados positivos de  $\bar{X}$  y como  $1_A$  en grado 0.

Lamentablemente, esta codificación tan sencilla en la primera componente no se tiene, a priori, en la segunda, que concierne a los morfismos  $\Delta_i$  que dotan a  $\bar{X}$  de la  $A_\infty$ -estructura.

La razón proviene del modo en que  $\bar{B}(A)$  transfiere a  $\bar{X}$  dicha  $A_\infty$ -estructura,

$$\Delta_i = (-1)^{\frac{(i-1)(i-2)}{2}} f^{\otimes i} \left[ \sum_{k_2=1}^2 \sum_{k_3=1}^{k_2+1} \cdots \sum_{k_{i-1}=1}^{k_{i-2}+1} \prod_{j=2}^{i-1} (-1)^{k_j} (1^{\otimes k_j-1} \otimes \Delta_c \phi \otimes 1^{\otimes j-k_j}) \right] \Delta_c g,$$

donde el símbolo  $\prod_{j=2}^{i-1} h_j$  representa la composición  $h_{i-1} \circ \cdots \circ h_2$ .

Vemos que en la definición de la aplicación  $\Delta_i$  interviene el propio morfismo  $g$ , y por ende  $d_X$  mismo, **evaluados todos ellos en el mismo grado**.

En otras palabras, para optar a simplificar la formulación de  $g$  se requiere conocer una buena codificación de  $d_X$ ; y en la codificación que nosotros damos, está inmerso  $g$  mismo, en lo que toca a las aplicaciones  $\Delta_i$ .

Así, aunque hayamos demostrado que  $d_X$  es la diferencial propia de un  $A_\infty$ -producto tensorial, sólo podremos sacar ventaja de este hecho de cara a simplificar la formulación de  $g$ , exclusivamente cuando se caracterice la  $A_\infty$ -estructura de  $\bar{X}$  de forma directa, sin recurrir a la definición de los  $\Delta_i$  “heredados” de  $\bar{B}(A)$ .

En conclusión, para una resolución que escinda de la resolución bar según la contracción de comparación canónica  $(f, g, \phi) : X \Rightarrow B(A)$ , tenemos que la contracción es casi-completa y que la estructura diferencial de  $X$  es la de un  $A_\infty$ -producto tensorial; la cual se tornará ventajosa en los cálculos (co)homológicos en caso obtener una presentación suya intrínseca a  $X$ , independiente de su origen en  $B(A)$ . Y la complejidad de los morfismos proviene de la complejidad propia de la homotopía de contracción  $t$  y de la diferencial  $d_X$ .

En general, pues, ¿cuál debe ser el modo de actuar? Con normalidad, lo que se intenta es reducir la resolución a construir a la composición y perturbación de resoluciones conocidas “pequeñas”; donde el adjetivo “pequeño” hace referencia a que mejore ostensiblemente el tamaño, en cuanto a generadores, de la resolución bar correspondiente.

En esta línea, podemos nombrar la resolución de Koszul de  $R$ -módulos sobre un anillo de polinomios  $R = \Lambda[x_1, \dots, x_n]$  en un número finito de indeterminadas y las “pequeñas” resoluciones de Cartan [22] para los grupos  $\mathbb{Z}_n$ , o de Eilenberg y Mac Lane [63] para  $\mathbb{Z}$ . Es más, las dos primeras son incluso minimales: la de Koszul en el sentido de que cualquier otra resolución se proyecta sobre ella, y las de Cartan en tanto en cuanto las diferenciales de los complejos reducidos correspondientes son nulas (de donde los complejos reducidos conforman la homología de cada  $\mathbb{Z}_n$ ).

Atendiendo ahora al nivel de contracciones entre complejos reducidos, se pueden





establecer contracciones de comparación para las construcciones bar reducidas de álgebras exteriores y polinomiales sobre  $\mathbb{Z}$  [63], y para álgebras de potencias divididas en el caso de trabajar sobre el anillo  $\mathbb{Z}_{(p)}$  de los enteros localizados sobre un primo  $p$  [141].

Son precisamente el tipo de contracciones básicas anteriores sobre las que progresaremos en los capítulos siguientes; y, por ello, las vamos a describir brevemente a continuación.

Recordemos las álgebras básicas sobre  $\Lambda$ , cuales son las álgebras exteriores, polinomiales y de potencias divididas.

Un álgebra exterior  $E(u, 2n+1) = E(u)$  es la DG-álgebra truncada  $\Lambda[u]/(u^2)$  de diferencial nula, de modo que  $u^k = 0$  para  $k > 1$ . En general, dados  $n$  generadores de grado impar, se tiene que  $E(u_1, \dots, u_n) = E(u_1) \otimes \cdots \otimes E(u_n)$ .

Un álgebra polinomial  $P(v, 2n) = P(v)$  es la DG-álgebra de polinomios  $\Lambda[v]$  de diferencial nula. En general, dados  $n$  generadores de grado par, se tiene que  $P(v_1, \dots, v_n) = P(v_1) \otimes \cdots \otimes P(v_n)$ .

Un álgebra de potencias divididas  $\Gamma(w, 2n) = \Gamma(w)$  es la DG-álgebra de diferencial nula que presenta por  $\Lambda$ -base al conjunto  $\{\gamma_i(w)\}_{i \geq 1}$ , con  $\gamma_1(w) = w$  y producto dado por

$$\gamma_i(w)\gamma_j(w) = \binom{i+j}{i} \gamma_{i+j}(w).$$

En general, dados  $n$  generadores de grado par, se tiene que  $\Gamma(w_1, \dots, w_n) = \Gamma(w_1) \otimes \cdots \otimes \Gamma(w_n)$ .

La pequeña resolución de Cartan para el anillo  $\Lambda = \mathbb{Z}_n$  utiliza las álgebras exteriores y de potencias divididas.

Sea el álgebra  $\mathcal{C} = \mathbb{Z}_n[\mathbb{Z}_n] \otimes E(u, 1) \otimes \Gamma(w, 2)$ , aumentada por el morfismo de álgebras  $\xi(\bar{1}) = 1$ ,  $\xi(u) = 0$  y  $\xi(\gamma_i(w)) = 0$ , y de derivación  $d$  definida a partir de

$$d(\bar{1}) = 0, \quad d(u) = \bar{1} - \bar{0}, \quad d(\gamma_i(w)) = (\bar{1} + \cdots + \overline{n-1}) \otimes u \otimes \gamma_{i-1}(w).$$

Una homotopía de contracción de  $\mathcal{C}$  a  $\mathbb{Z}_n$  viene dada por la aplicación lineal

$$t(\bar{k} \otimes u^m \otimes \gamma_i(w)) = \begin{cases} (\bar{1} + \cdots + \overline{k-1}) \otimes u \otimes \gamma_i(w), & \text{si } m = 0 \text{ y } k > 0, \\ 1 \otimes 1 \otimes \gamma_i(w), & \text{si } m = 1 \text{ y } k = n - 1. \end{cases}$$

En el caso general de  $\mathbb{Z}_n[\mathbb{Z}_n^k]$  basta construir la resolución a partir de  $\mathcal{C} \otimes \cdots \otimes \mathcal{C}$ .

Ahora, se podrían comparar estas resoluciones con la resolución bar correspondiente, de modo que se obtendrían las contracciones de comparación canónicas asociadas: nótese que la homotopía de contracción se anula actuando sobre el complejo reducido (sólo deja de ser nula para elementos con términos en  $\bar{k}$  para  $k > 0$ ).

Incluso, se puede progresar hasta formar las contracciones de comparación asociadas entre los complejos reducidos, comprobando que efectivamente la diferencial sobre éstos es nula.

En adelante trabajaremos en el nivel de los complejos reducidos, de modo que cuando se quiera pasar a resoluciones basta tensorizar por el álgebra en cuestión y perturbar según la cocadena universal  $\theta$  (ver Proposición 2.4.1 y Lema 2.6.1, ó Teorema 2.4.2, en su caso).

Modificando el anillo de coeficientes de  $\mathbb{Z}_n$  a  $\Lambda = \mathbb{Z}$ , se puede formar otra contracción de comparación [63],

$$C_{\mathbb{Z}_n} : \{\bar{B}(\mathbb{Z}[\mathbb{Z}_n]), (E(u, 1) \otimes \Gamma(w, 2), d), f_{\mathbb{Z}_n}, g_{\mathbb{Z}_n}, \phi_{\mathbb{Z}_n}\};$$

por extensión lineal, se definen los morfismos de la siguiente manera: la “proyección”, como

$$\begin{aligned} f_{\mathbb{Z}_n}[x_1|y_1|\cdots|x_m|y_m] &= [\prod_{i=1}^m s^2(x_i, y_i)]\gamma_m(w), \\ f_{\mathbb{Z}_n}[x_1|y_1|\cdots|x_m|y_m|z] &= [s^1(z) \prod_{i=1}^m s^2(x_i, y_i)]u\gamma_m(w), \end{aligned}$$

donde  $s^2 : \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_n \rightarrow \mathbb{Z}$  y  $s^1 : \mathbb{Z}_n \rightarrow \mathbb{Z}$  son las aplicaciones

$$s^2(i, j) = \begin{cases} 0, & \text{si } i + j < n; \\ 1, & \text{si } i + j \geq n; \end{cases}$$

$$s^1(i) = i, \quad 0 \leq i < n.$$

La “inyección”, por

$$\begin{aligned} g_{\mathbf{Z}_n}(u) &= [1], \\ g_{\mathbf{Z}_n}(\gamma_k(w)) &= \sum_{x_1, \dots, x_k \in \mathbf{Z}_n} [1|x_1| \dots |1|x_k|], \\ g_{\mathbf{Z}_n}(u\gamma_k(w)) &= \sum_{x_1, \dots, x_k \in \mathbf{Z}_n} [1|x_1| \dots |1|x_k|1]. \end{aligned}$$

Y el operador de homotopía como  $\phi = -\varphi$ , para

$$\begin{aligned} \varphi_{\mathbf{Z}_n} 1 &= 0, \quad \varphi_{\mathbf{Z}_n}[x] = C(x), \quad \varphi_{\mathbf{Z}_n}[x|y] = [C(x)|y], \\ \varphi_{\mathbf{Z}_n}[x|y|\sigma] &= [C(x)|y|\sigma] + s^2(x, y) \left[ \sum_{l \in \mathbf{Z}_n} [1|l|] \varphi_{\mathbf{Z}_n} \sigma \right]; \end{aligned}$$

donde

$$C(x) = \sum_{i=0}^{x-1} [1|i].$$

La diferencial  $d$  es la usual, que actúa sobre los generadores  $u$  y  $v$  en la forma  $d(u) = 0$  y  $d(v) = \pm n u$ .

Nótese que en caso de trabajar con coeficientes en  $\mathbf{Z}_n$ , efectivamente obtendríamos que  $d$  sería la diferencial nula, como se indicaba al transferir la resolución pequeña de Cartan  $\mathcal{C}$  a la contracción asociada entre los complejos reducidos.

De hecho, podríamos establecer el siguiente resultado.

**Lema 2.8.1** *Si se tensoriza  $C_{\mathbf{Z}_n}$  a izquierda por  $\mathbb{Z}[\mathbf{Z}_n]$ , a continuación se perturba por la cocadena universal  $\theta$  y se toman coeficientes en  $\mathbf{Z}_n$ , reaparece el álgebra  $\mathcal{C}$  de la resolución de Cartan como DG-módulo pequeño de la contracción final resultante.*

**Demostración.**

Consideremos la contracción  $\mathbb{Z}[\mathbf{Z}_n] \otimes C_{\mathbf{Z}_n}$  dada por

$$\{\mathbb{Z}[\mathbf{Z}_n] \otimes \bar{B}(\mathbb{Z}[\mathbf{Z}_n]), \mathbb{Z}[\mathbf{Z}_n] \otimes (E(u, 1) \otimes \Gamma(w, 2), d), 1 \otimes f_{\mathbf{Z}_n}, 1 \otimes g_{\mathbf{Z}_n}, 1 \otimes \phi_{\mathbf{Z}_n}\}.$$

Al perturbar esta contracción según la cocadena  $\theta$ , obtenemos la diferencial sobre  $\mathbb{Z}[\mathbf{Z}_n] \otimes (E(u, 1) \otimes \Gamma(w, 2)$  dada por  $1 \otimes d + d_\infty$ , con

$$d_\infty = (1 \otimes f_{\mathbf{Z}_n})\theta \cap (1 \otimes 1 - (1 \otimes \phi_{\mathbf{Z}_n})\theta \cap + \dots)(1 \otimes g_{\mathbf{Z}_n}).$$

La perturbación  $\theta \cap$  actúa de la siguiente forma:

$$\theta \cap (m\bar{x} \otimes [\bar{x}_1 | \cdots | \bar{x}_p]) = m(\overline{x + x_1} - \bar{x}) \otimes [\bar{x}_2 | \cdots | \bar{x}_p],$$

de modo que define una derivación (téngase en cuenta que  $[u_1 | \cdots | u_p] \star [v_1 | \cdots | v_q] = [u_1 | [u_2 | \cdots | u_p] \star [v_1 | \cdots | v_q]] + (-1)^{|u_1||v_1|} [v_1 | [u_1 | \cdots | u_p] \star [v_2 | \cdots | v_q]]$  [62]), por lo que la contracción perturbada es semicompleta, con  $d + d_\infty$  asimismo derivación.

Cuando tomemos los coeficientes escalares módulo  $n$ , resultará que  $d = 0$ . En cuanto a  $d_\infty$ , tenemos que:

- $d_\infty(\bar{1}) = 0 = 0$ .
- $d_\infty(1 \otimes u) = (\bar{1} - \bar{0}) = \bar{1} - \bar{0}$ .
- $d_\infty(1 \otimes 1 \otimes \gamma_1(w)) = \binom{n}{1} (\bar{1} - \bar{0}) \otimes u + (1(n-2) + 2(n-3) + \cdots + (n-2)2 + (n-1)1)(\bar{1} - \bar{0})^2 \otimes u + \cdots = \sum_{i=1}^{n-1} (\sum_{j=1}^{n-i} j a_{i,j}) (\bar{1} - \bar{0})^i,$

para  $a_{1,j} = 1$ ,  $1 \leq j \leq n-1$ ,  $a_{i,j} = \sum_{k=j+1}^{n-i+1} a_{i-1,k}$ ,  $1 \leq j \leq n-i$ ; si se toman coeficientes en módulo  $\mathbb{Z}_n$ , se tiene finalmente que

$$d_\infty(\gamma_1(w)) = (\bar{0} + \cdots + \overline{n-1}) \otimes u.$$

- Por ser  $d_\infty$  derivación, asimismo se tiene que

$$d_\infty(\gamma_i(w)) = d_\infty(\gamma_1(w)) \otimes \gamma_{i-1}(w) = (\bar{0} + \cdots + \overline{n-1}) \otimes u \otimes \gamma_{i-1}(w).$$

Por tanto, se recupera el álgebra  $\mathcal{C}$  de la resolución de Cartan. ■

En definitiva, estamos diciendo que la resolución de [63] es básicamente la misma que da Cartan en caso de reducir el anillo base a  $\mathbb{Z}_n$ , en el sentido de que la comparación de estas resoluciones con la resolución bar determina el mismo DG-módulo pequeño. Aunque, de hecho, no la misma contracción de comparación.

**Lema 2.8.2** *La contracción  $C_{\mathbb{Z}_n}$  no procede de la comparación canónica con la resolución bar.*

**Demostración.**

Basta observar que el morfismo  $\mathbb{Z}[\mathbb{Z}_n]$ -lineal que daría la comparación canónica con respecto de la homotopía  $t$  sería

$$\begin{aligned}\bar{f}([x_1|y_1|\dots|x_m|y_m]) &= [\prod_{i=1}^m s^2(x_i, y_i)]\gamma_m(w), \\ \bar{f}([z|x_1|y_1|\dots|x_m|y_m]) &= [s^1(z) \prod_{i=1}^m s^2(x_i, y_i)]u\gamma_m(w);\end{aligned}$$

que difiere de  $f_{\mathbb{Z}_n}$ .

■

También se puede construir una contracción de comparación para  $\mathbb{Z}$  tomando como anillo base  $\Lambda = \mathbb{Z}$  [63],

$$C_{\mathbb{Z}} : \{\bar{B}(\mathbb{Z}[\mathbb{Z}]), E(u, 1), f_{\mathbb{Z}}, g_{\mathbb{Z}}, \phi_{\mathbb{Z}}\};$$

donde, por extensión lineal, se define la “proyección” como

$$f_{\mathbb{Z}}([n_1|\dots|n_q]) = \begin{cases} n_1 u, & \text{si } q = 1 \\ 0, & \text{si } q > 1; \end{cases}$$

la “inyección” por

$$g_{\mathbb{Z}}(u) = [1];$$

y el operador de homotopía como

$$\phi_{\mathbb{Z}}([n_1|\dots|n_k]) = \begin{cases} -\sum_{i=1}^{n_1-1} [1|i|n_2|\dots|n_k], & \text{si } n_1 > 1; \\ 0, & \text{si } n_1 = 1; \\ \sum_{i=1}^{|n_1|} [1|-i|n_2|\dots|n_k], & \text{si } n_1 < 1. \end{cases}$$

En este caso, la diferencial sobre el complejo de llegada es nula, de donde estamos definiendo en realidad una resolución minimal.

Entre las álgebras básicas también cabe establecer contracciones de comparación que generan resoluciones asociadas.

Más concretamente, para  $n$  natural, se tiene la iso-contracción

$$C_{\bar{B}E} : \{\bar{B}(E(u, 2n+1)), \Gamma(\sigma(u), 2n+2), f_{\bar{B}E}, g_{\bar{B}E}, 0\},$$

con

$$f_{\bar{B}E}([u] \cdots [u]) = \gamma_k(\sigma(u))$$

y

$$g_{\bar{B}E}(\gamma_k(\sigma(u))) = [u] \cdot^k [u].$$

Escribimos por  $\sigma(u) = [u]$  el generador del álgebra polinomial modificada, con el fin de hacer notar que se puede obtener a partir del generador  $u$  del álgebra exterior por medio de la operación suspensión  $\sigma : A \rightarrow \bar{B}(A)$ , que a un elemento  $a$  de un álgebra  $A$  le asocia  $[a] \in \bar{B}(A)$ .

Asimismo, dado un natural  $n$ , se puede construir una contracción casicompleta

$$C_{\bar{B}P} : \{\bar{B}(P(u, 2n)), E(\sigma(u), 2n+1), f_{\bar{B}P}, g_{\bar{B}P}, \phi_{\bar{B}P}\},$$

con

$$f_{\bar{B}P}[u^{r_1} | \cdots | u^{r_m}] = 0, \quad f_{\bar{B}P}[u^r] = \begin{cases} 0, & \text{si } r \neq 1, \\ \sigma(u), & \text{si } r = 1; \end{cases}$$

$$g_{\bar{B}P}(\sigma(u)) = [u];$$

$$\phi_{\bar{B}P}[u^{r_1} | \cdots | u^{r_m}] = [u | u^{r_1-1} | u^{r_2} | \cdots | u^{r_m}].$$

Por otro lado, reduciendo ahora el anillo base de  $\mathbb{Z}$  al localizado  $\Lambda = \mathbb{Z}_{(p)}$  para  $p$  primo, se tiene la contracción semicompleta [141]

$$C_{\bar{B}\Gamma} : \{\bar{B}(\Gamma(w, 2n)), A_\Gamma(\sigma(w), 2n+1), f_{\bar{B}\Gamma}, g_{\bar{B}\Gamma}, \phi_{\bar{B}\Gamma}\},$$

donde  $A_\Gamma(\sigma(w), 2n+1)$  es la DGA-álgebra

$$E(\sigma(u), 2n+1) \otimes (\otimes_{i \geq 1} (E(\sigma(\gamma_{p^i}(u)), 2np^i+1) \tilde{\otimes}^{\chi_p} \Gamma(\varphi_p(\gamma_{p^{i-1}}(u)), 2np^i+2))),$$

la diferencial  $\chi_p$  viene definida por la fórmula

$$\chi_p(\varphi_p(\gamma_{p^{i-1}}(u))) = p\sigma(\gamma_{p^i}(u)), \quad i \geq 1,$$



y  $\varphi_p : A \rightarrow \bar{B}(A)$  representa la transformación de  $p$ -transpotencia asociada a un álgebra dada  $A$ , con  $\varphi_p(a) = [a|a^{p-1}]$ .

De toda esta batería de resoluciones dadas (ya sea como resoluciones mismas o como contracciones de comparación entre complejos reducidos), las primeras, relacionadas con grupos finitos, se utilizarán en el capítulo 4 en lo concerniente al cálculo (co)homológico de productos semidirectos de grupos; y las últimas, más propias de álgebras, serán usadas en el capítulo 3 para el cómputo de la homología de CDGAC-álgebras.

Más concretamente, en el capítulo que se abre a continuación, diseñaremos un algoritmo para el cálculo de la homología de CDGAC-álgebras que mejora los conocidos hasta el momento, según lo que hemos dado en llamar “teoría de inversiones”. El trabajo se realiza sobre complejos reducidos, que permiten después el paso a resoluciones que escinden de la resolución bar. Y elaboramos un software en MATHEMATICA, que aunque ni de lejos maneja una estructura de datos ni un lenguaje tan apropiado y genérico como el de [78], permite no obstante el cálculo en este contexto.

Por otro lado, en el capítulo 4 de la memoria atacamos el cálculo de la homología entera de productos semidirectos de grupos, realizando también mejoras de los métodos ya conocidos en una línea similar a la de la teoría de inversiones empleada con las CDGAC-álgebras. Una vez más, el paso a resoluciones que escinden de la resolución bar es posible, y un programa en MATHEMATICA facilita el cálculo de los morfismos en cuestión.

Además, progresamos en la línea de [78] para la consecución de información (co)homológica que revierta en la determinación de códigos y matrices de Hadamard.

**Capítulo 3.**  
**Homología de CDGAC-álgebras.**





## Capítulo 3.

# Homología de CDGAC-álgebras.

En este capítulo pretendemos definir resoluciones que nos permitan calcular la homología de CDGAC-álgebras. En definitiva, se trata de encontrar una buena adecuación del procedimiento general de cálculo con resoluciones que fundamenta Lambe en [114, 115].

Para ello, demostraremos que con base un anillo  $\Lambda$  conmutativo con unidad distinta de cero, toda CDGAC-álgebra admite un casi-isomorfismo a un producto torcido de CDGAC-álgebras libres; resultado que extiende el análogo sobre cuerpos dado por Burghilea y Vigué-Poirrier en [36].

Esta reducción permite diseñar un algoritmo que tome como dato de entrada un tal producto torcido de álgebras exteriores y polinomiales; y que, mediante tensorizaciones y perturbaciones convenientes de las resoluciones que para estos objetos consideramos en el capítulo precedente, devuelva como salida una resolución adecuada para el cálculo de la homología del álgebra de partida.

Este mismo procedimiento, restringido al plano de los complejos reducidos, fue establecido en [14, 7, 155]. Más aún, en [14, 155] se progresaba para la determinación de las homologías de Hochschild y Cíclica [36] y la  $n$ -homología [126] del álgebra de entrada, con coeficientes en  $\mathbb{Z}$  y en el anillo  $\mathbb{Z}_{(p)}$  de los enteros localizado en un primo  $p$ , respectivamente.

Dedicamos este capítulo a la mejora sustancial del algoritmo de cálculo de la homología de CDGAC-álgebras (Teorema 3.2.5), que ya se diera en [14, 7, 155]. Fundamentalmente, enunciamos la *teoría de inversiones* (Definición 3.3.1, Lema 3.3.2), con germen en el trabajo de Real en [141], que permite rebajar de una manera rad-

ical la complejidad del algoritmo inicial (Teorema 3.3.3); la tabla comparativa que incluimos en este apartado da muestra del ostensible grado de simplificación logrado en la nueva fórmula (Teorema 2.9) para la diferencial del modelo propio del Teorema 3.2.5. Esto nos ha permitido elaborar un programa en *Mathematica* para el cálculo concreto de la homología de estas álgebras, presentado ya en [5], que mejora en mucho los ataques de los proyectos [23, 132, 70].

Se ha de entender que, aunque este software está teóricamente diseñado para su funcionamiento en cualquier grado, tiene limitada su aplicación práctica a dimensiones reducidas. El motivo se ha de buscar no sólo en las carencias del autor como programador, ni tampoco en las restricciones que pueda originar el lenguaje de cálculo simbólico elegido, sino quizás mayormente en la complejidad intrínseca del algoritmo; no cabe duda que la tarea de reducción iniciada con la teoría de inversiones debe tener continuidad, hasta desembocar en sucesivas mejoras del procedimiento diseñado.

Finalmente, concluimos un resultado acerca de resoluciones que escinden de la resolución bar para estas álgebras tan particulares (Teorema 3.4.8), y atacamos la  $n$ -homología entera de álgebras conmutativas (Proposición 3.4.7) a partir de la factorización que da el Corolario 3.1.3 de un álgebra de potencias divididas como producto tensorial torcido de álgebras exteriores y polinomiales (que no es más que un caso particular del esquema que se propone en el Teorema 3.1.1) y del trabajo análogo realizado por nuestra compañera Silva en el caso de trabajar con coeficientes en  $\mathbb{Z}_{(p)}$  [155].

### 3.1 Modelos para CDGAC-álgebras.

Es un hecho que, con base un cuerpo, toda CDGA-álgebra admite un casi-isomorfismo a un producto tensorial de álgebras exteriores y polinomiales dotado de una diferencial que es derivación (i.e., un *producto torcido* de estas álgebras, por coherencia con la notación establecida en el capítulo de fundamentos). La demostración que se da en [36] de este resultado implica la consecución de ciertas secciones de homomorfismos sobreyectivos y sus extensiones al nivel de homología, lo que redundará en la utilización de la estructura de cuerpo del anillo base.

Nosotros vamos a establecer aquí una prueba válida para anillos base cualesquiera

no necesariamente cuerpos, que se sustenta en la conocida técnica de “matar” grado a grado la información homológica no deseada.

**Teorema 3.1.1** *Toda CDGA-álgebra admite un casi-isomorfismo de álgebras a un producto torcido de álgebras exteriores y polinomiales.*

La construcción del producto torcido se hace grado a grado, de modo que en el límite se obtiene el modelo buscado.

Llegado el momento, esto no supone limitación alguna a la hora de realizar cálculos explícitos, pues basta elaborar el modelo hasta la dimensión necesaria.

### **Demostración.**

El objetivo es hallar un producto torcido de álgebras exteriores y polinomiales, digamos  $hA$ , que tenga por homología la propia del álgebra de entrada,  $A$ .

Parece razonable, entonces, progresar sobre el módulo  $H_*(A)$  de homología de  $A$ , dado que éste hereda de forma natural el producto de  $A$ .

Así,  $hA$  vendrá determinado en cada grado, por una parte, por el álgebra libre correspondiente (exterior en grado impar, polinomial en grado par), de tantos generadores como generadores como álgebra tiene  $H_*(A)$  en el mismo grado.

Ahora bien, habrá que incorporar en un grado superior el álgebra libre de tantos generadores como relaciones se necesiten en homología para garantizar que, de hecho, coincidan los productos de  $H_*(A)$  y  $H_*(hA)$ .

Más concretamente, para transformar el producto de un álgebra polinomial  $P(v_{x^{(m)}})$  asociado a un generador  $x^{(m)}$  de  $H_*(A)$  de grado  $m$  (por tanto,  $|v_{x^{(m)}}| = |x^{(m)}| = m$ , con  $m$  necesariamente par), se añade el álgebra exterior  $E_{v_{x^{(m)}}}$  que consta para cada producto  $y = x_1^{(i_1)} \cdots x_n^{(i_n)}$  (en particular, productos mónicos si  $n = 1$ ) de generadores de  $H_*(A)$  de grado no superior a  $m$  (i.e.,  $i_j \leq m$ ), de un generador  $u_y^{x^{(m)}}$  de grado  $m + |y| + 1$ .

Sea  $x^{(m)}x_1^{(i_1)} \cdots x_n^{(i_n)} = \sum \lambda_k x_k^{(m+|y|)}$  una descomposición de  $y$  como combinación lineal de generadores de  $H_*(A)$  en grado  $m + |y| + 1$ .

El generador  $u_y^{x^{(m)}}$  sirve para identificar en homología el producto  $v_{x^{(m)}}w_{x^{(i_1)}} \cdots w_{x^{(i_n)}}$  ( $w = v$  en caso de grado par,  $w = u$  en caso de grado impar) con la combinación lineal correspondiente  $\sum \lambda_k w_{x_k^{(m+|y|)}}$ , con  $w = v$  para grados pares de  $w$ , y  $w = u$  en grados impares. Y, así, sucesivamente, grado a grado.

Las transformaciones que se necesitan en el caso de partir de un álgebra exterior son similares.

Para garantizar que la diferencial final construida es una derivación basta extenderla a partir de los valores conocidos según la expresión  $d(ab) = d(a)b + (-1)^{|a|}ad(b)$ .

De esta manera, grado a grado, queda determinada una CDGAC-álgebra producto torcido de álgebras exteriores y polinomiales cuya homología es isomorfa a  $H_*(A)$  por construcción.

De hecho, la aplicación que manda cada  $w_{x^{(m)}}$  en  $x^{(m)}$ , para cada generador  $x^{(m)}$  en  $H_*(A)$ , define un casi-isomorfismo de álgebras del producto torcido hallado en el álgebra  $A$  inicial.

■

**Notas 3.1.2** • Téngase en cuenta que la hipótesis de conmutatividad sobre el álgebra de partida es fundamental, dado que el producto de que se dota a  $hA$  es necesariamente conmutativo (lo son los productos propios de álgebras exteriores y polinomiales). Así, también es conmutativo el producto que se hereda en  $H_*(hA)$ , y por tanto lo ha de ser el producto en  $H_*(A)$ . Esta condición se tiene garantizada para el caso de álgebras ya de partida conmutativas, pero no en otro caso, en general.

- Por otro lado, el teorema no hace referencia al carácter conexo del álgebra considerada. Un seguimiento de la demostración revela que si el álgebra inicial es conexa, asimismo lo es el producto torcido de salida.

Eventualmente, en ocasiones especiales se podrá determinar el modelo completo. Éste es el caso de un álgebra de potencias divididas, como reza el resultado siguiente.

**Corolario 3.1.3** *Un modelo como producto torcido de álgebras exteriores y polinomiales para un álgebra de potencias divididas  $\Gamma(w)$  es*

$$\left( P(v_1) \otimes \left( \otimes_{k \geq 2} (P(v_k) \tilde{\otimes} E(u_k)) \right), d \right),$$

donde  $|v_k| = k|w|$ ,  $|u_k| = k|w| + 1$  y

$$d(u_k) = x_1^k - k!x_k.$$

### Demostración.

Los generadores de las álgebras exteriores añadidas,  $u_k$ , desaparecen en homología, pues no son ciclos ( $d(u_k) \neq 0$ ).

Sin embargo, permiten transformar en homología los generadores  $x_i$  de las álgebras polinomiales en los generadores  $\gamma_i(w)$  de  $\Gamma(w)$ , y los productos característicos de las álgebras polinomiales en el producto propio de  $\Gamma(w)$ :

$$d(u_k) = x_1^k - \binom{2}{1} \cdots \binom{k}{1} x_k = x_1^k - k!x_k.$$

Así, para  $k = 2$  esta relación identifica en homología  $x_1^2$  con  $2x_2$ , de donde asimismo sus potencias sucesivas.

El hecho de que se identifiquen en homología todas las potencias de  $x_1$  con los múltiplos adecuados de los generadores  $x_k$  correspondientes, permite que todos los productos posibles de potencias de los generadores  $x_i$  se traduzcan convenientemente en homología al producto propio de un álgebra de potencias divididas.

La aplicación que lleva cada  $x_i$  en  $\gamma_i(w)$  establece un casi-isomorfismo de álgebras del producto torcido en  $\Gamma(w)$ .

■

Concluimos que toda CDGAC-álgebra admite un modelo como producto torcido de álgebras exteriores y polinomiales; de modo que su cálculo (co)homológico se reduce al cálculo (co)homológico del modelo.

### 3.2 Homología de CDGAC-álgebras.

En el capítulo anterior, definimos la homología de un álgebra  $A$  a partir de cualquier resolución  $X$  de  $\Lambda$  sobre  $A$ . En concreto, vimos que la homología del complejo reducido de la resolución coincidía con la homología de  $A$ .

En particular, la homología de  $\bar{B}(A)$  coincide con la homología del álgebra  $A$ .

A este respecto, tenemos que hacer un inciso obligado. Puede despistar el hecho de que se defina como homología de  $A$  la propia de  $\bar{B}(A)$ .

Esta aparente paradoja tiene su origen en lo que Mac Lane denomina en [126] “ $n$ -homología”.

Como DG-módulo, toda DG-álgebra es susceptible de un tratamiento homológico en la forma de cocientes de núcleo e imagen de operadores diferenciales de índice consecutivos,  $\ker(d_n)/\text{Im}(d_{n+1})$ .

Sin embargo, en este proceso el producto en  $A$ , que lo distingue de la estructura más simple de DG-módulo, brilla por su ausencia: que  $A$  esté dotado de una operación producto no altera en absoluto el resultado de los cocientes anteriores.

Parece entonces que de alguna manera se está perdiendo una información adicional de la que se tenía constancia desde el principio.

Como quiera que en la estructura diferencial de la construcción bar del álgebra,  $\bar{B}(A)$ , está involucrada la operación producto de  $A$  (atender a la diferencial simplicial en  $\bar{B}(A)$ ), Mac Lane distinguió en los años 50 varias nociones diferentes en cuanto a la homología de un álgebra: llamó 0-homología a la homología de  $A$  como simple DG-módulo; 1-homología a la homología de  $\bar{B}(A)$ ; y en caso de ser  $A$  conmutativa,  $n$ -homología a la homología de la construcción bar  $n$  veces iterada de  $A$ ,  $\bar{B}(\cdot \cdot (\bar{B}(A)) \cdot \cdot \cdot) = \bar{B}^n(A)$ .

En este último caso se necesita de la conmutatividad de  $A$  para que  $\bar{B}(A)$  misma sea una nueva DG-álgebra, dotada del producto shuffle.

Así, la homología de que hablábamos en el capítulo anterior, y que comúnmente se toma como homología de un álgebra  $A$  de forma natural, es la 1-homología en el

sentido de Mac Lane.

Y es ésta la que pretendemos determinar para cualquier CDGAC-álgebra.

Dado que el objetivo es, pues, calcular la homología de  $\bar{B}(A)$ , buscaremos una resolución  $X$  sobre  $A$  que escinda de la resolución bar en la forma de contracción  $(f, g, \phi) : \bar{B}(A) \Rightarrow (\bar{X}, \bar{d})$  entre los complejos reducidos.

Por otro lado, a raíz del Teorema 3.1.1, sería oportuno determinar la validez como dato de entrada un producto torcido de álgebras exteriores y polinomiales, en lugar de una CDGAC-álgebra cualquiera.

En [62, 126] encontramos la respuesta a este interrogante, con un resultado que utiliza las fórmulas de Künneth y el Teorema de los Coeficientes Universales.

**Teorema 3.2.1** [62, 126] *Sea  $f : A \rightarrow A'$  un casi-isomorfismo de álgebras, para DGA-álgebras  $A$  y  $A'$  sobre un anillo que sea cuerpo, o bien para DGA-álgebras  $A$  y  $A'$  libres como módulos sobre  $\Lambda = \mathbb{Z}$ . Entonces, la aplicación inducida  $\bar{B}(f) : \bar{B}(A) \rightarrow \bar{B}(A')$  define un casi-isomorfismo.*

Este teorema permite, por tanto, calcular la 1-homología de  $A$  a partir de la 1-homología de cualquier álgebra  $A'$  casi-isomorfa a  $A$ . En particular, nosotros reduciremos el cálculo de la  $n$ -homología de una CDGAC-álgebra a la  $n$ -homología de un producto torcido de álgebras exteriores y polinomiales, según el Teorema 3.1.1.

De hecho, atendiendo a los teoremas 3.1.1 y 3.2.1 podemos concluir que toda CDGA-álgebra  $A$  admite un casi-isomorfismo a un producto torcido de álgebras exteriores y polinomiales  $hA$ , que se extiende a un casi-isomorfismo entre las construcciones bares respectivas.

La idea sería ahora tratar de iterar indefinidamente este proceso, de modo que para cada natural  $n$  existiera un casi-isomorfismo de  $\bar{B}^n(hA)$  en  $\bar{B}^n(A)$ , de donde la  $n$ -homología de  $A$  sería la  $n$ -homología propia de  $hA$ .

En algunos casos (como el que nos lleva, según probaremos más adelante), el traspaso de información de que habla el Teorema 3.2.1 no se produce sólo a un nivel de isomorfismo en homología, sino que envuelve toda una contracción, como se desprende de los siguientes resultados.



**Teorema 3.2.2** [141] *Sea  $c : \{A, M, f, g, \phi\}$  una contracción donde  $A$  es una CDGAC-álgebra y  $M$  es un DG-módulo conexo. Entonces*

$$\bar{B}(c) : \{\bar{B}(A), \tilde{B}(M), \bar{B}(f), \bar{B}(g), \bar{B}(\phi)\}$$

*es una contracción de álgebras semicompleta.*

**Nota 3.2.3** Como ya sabemos del capítulo anterior, la contracción de salida de este teorema es la que dota a  $M$  de la estructura de  $A_\infty$ -álgebra, heredada mediante  $c$  de la CDGAC-álgebra  $A$ .

En el caso particular de que  $M$  mismo sea una CDGA-álgebra  $A'$  y  $c$  es una contracción de álgebras semicompleta, entonces la contracción  $\bar{B}(c)$  “conecta” en verdad dos construcciones bar (véase [82]). Más aún, por ser  $g$  un morfismo de DG-álgebras, se puede probar que  $\bar{B}(c)$  es una contracción de álgebras semicompleta con  $\bar{B}(g) = T(S(g))$ .

Del capítulo anterior, conocemos resoluciones que escinden de la resolución bar para las álgebras exteriores y polinomiales.

Si pudiéramos determinar algún proceso para transferir la información homológica de la construcción bar del producto de álgebras en la información homológica del producto de las construcciones bares de las álgebras factores, las resoluciones anteriores facilitarían la aparición de una resolución para cualquier producto torcido de álgebras exteriores y polinomiales.

Este procedimiento por el que suspiramos se conoce desde principio de los 50, y lo establecieron Eilenberg y Mac Lane en [63] en forma de contracción.

**Teorema 3.2.4** [63] *Para todo par de CDGA-álgebras  $A$  y  $A'$ , existe una contracción*

$$C_{\bar{B} \otimes} : \{\bar{B}(A \otimes A'), \bar{B}(A) \otimes \bar{B}(A'), f_{\bar{B} \otimes}, g_{\bar{B} \otimes}, \phi_{\bar{B} \otimes}\}.$$

La aplicación  $f_{\bar{B} \otimes}$  queda caracterizada por su actuación sobre elementos homogéneos  $[x_1 \otimes y_1 | \cdots | x_n \otimes y_n]$  de  $\bar{B}(A \otimes A')$ , con cada  $x_i \in A$  o  $y_i \in A'$  homogéneos:

$$f_{\bar{B} \otimes}[x_1 \otimes y_1 | \cdots | x_n \otimes y_n] =$$



$$= \sum_{i=0}^n \xi_{\bar{B}(A)}(x_{i+1} \cdots x_n) \xi_{\bar{B}(A')}(y_1 \cdots y_i) [x_1 | \cdots | x_i] \otimes [y_{i+1} | \cdots | y_n],$$

donde para  $i = 0$  el término  $[x_1 | \cdots | x_i] = 1 \in \bar{B}(A)$ ; y análogamente, para  $i = n$ ,  $[y_{i+1} | \cdots | y_n] = 1 \in \bar{B}(A')$ .

La aplicación  $g_{\bar{B} \otimes}$  se sustenta en la identificación de  $\bar{B}(A)$  y  $\bar{B}(A')$  como subálgebras de  $\bar{B}(A \otimes A')$ , siendo:

$$[x_1 | \cdots | x_n] = [x_1 \otimes 1 | \cdots | x_n \otimes 1], \quad [y_1 | \cdots | y_n] = [1 \otimes y_1 | \cdots | 1 \otimes y_n];$$

de modo que  $g_{\bar{B} \otimes}$  queda definida por la fórmula:

$$g_{\bar{B} \otimes}(u \otimes v) = u \star v, \quad u \in \bar{B}(A), v \in \bar{B}(A').$$

Por su lado, el operador de homotopía viene dado por la composición

$$\phi_{\bar{B} \otimes} = \lambda^{-1} SHI \lambda,$$

donde el isomorfismo de DG-módulos  $\lambda$  actúa del siguiente modo:

$$\lambda : \bar{B}(A \otimes A') \rightarrow \bar{B}(A) \times \bar{B}(A'),$$

$$\lambda[a_1 \otimes a'_1 | \cdots | a_m \otimes a'_m] = (-1)^{\sum_{j>k} (1+|a_j|)(1+|a'_k|)} [a_1 | \cdots | a_m] \times [a'_1 | \cdots | a'_m],$$

con  $a_i$  y  $a'_i$  elementos homogéneos de  $A$  y  $A'$ , respectivamente. Y el operador  $SHI$  viene dado por la fórmula:

$$\begin{aligned} SHI(a_n \times b_n) &= \sum_{q=0}^{n-1} \sum_{p=0}^{n-q-1} \sum_{(\alpha, \beta)} (-1)^{n-p-q+sg(\alpha, \beta)} (s_{\beta_q+n-p-q} \cdots s_{\beta_1+n-p-q} s_{n-p-q-1} \partial_{n-q+1} \cdots \partial_n a_n \times \\ &\quad \times s_{\alpha_{p+1}+m} \cdots s_{\alpha_1+m} \partial_m \cdots \partial_{m+p-1} b_n); \end{aligned}$$

donde  $sg(\alpha, \beta) = \sum_{i=1}^p (\alpha_i - (i-1))$ , el índice  $(\alpha, \beta)$  recorre los  $(p+1, q)$ -shuffles y los morfismos  $s_i$  y  $\partial_i$  denotan los operadores de cara y de degeneración de  $\bar{B}(A)$  como módulo simplicial:

$$\partial_0[a_1 | \cdots | a_q] = \xi(a_1)[a_2 | \cdots | a_q];$$

$$\partial_i[a_1 | \cdots | a_q] = (-1)^{(|a_1| \cdots |a_i|) \epsilon} [a_1 | \cdots | a_i a_{i+1} | \cdots | a_q], \quad 0 < i < q;$$

$$\partial_q[a_1 | \cdots | a_q] = (-1)^{(|a_1| \cdots |a_q|) \epsilon} [a_1 | \cdots | a_{q-1}] \xi(a_q),$$

$$s_0[\ ] = [\theta], \quad s_i[a_1 | \cdots | a_q] = (-1)^{(|a_1| \cdots |a_i|) \epsilon} [a_1 | \cdots | a_i \theta | a_{i+1} | \cdots | a_q].$$



A partir de las fórmulas anteriores, se puede determinar que los morfismos  $g_{\bar{B}^{\otimes}}$  y  $\phi_{\bar{B}^{\otimes}}$  actúan en tiempo exponencial, mientras que  $f_{\bar{B}^{\otimes}}$  lo hace en tiempo lineal.

Eilenberg y MacLane establecieron en [63] que  $f_{\bar{B}^{\otimes}}$  y  $g_{\bar{B}^{\otimes}}$  eran morfismos de DGA-álgebras. En el artículo [141] se prueba que  $\phi$  es una casi-homotopía de álgebras, de donde  $C_{\bar{B}^{\otimes}}$  adquiere el carácter de contracción de álgebras casi-completa.

Usando la contracción  $C_{\bar{B}^{\otimes}}$  y haciendo producto tensorial y composición de contracciones, podemos determinar una contracción de  $\bar{B}(\otimes_{i \in I} A_i)$  a  $\otimes_{i \in I} \bar{B}(A_i)$ . A partir de ésta y de las contracciones halladas para las construcciones bares de álgebras polinomiales y exteriores, es posible progresar para encontrar el siguiente resultado, pieza principal de [14, 155]

**Teorema 3.2.5** [14, 155] *Dado un producto torcido  $(A, d)$  de álgebras exteriores y polinomiales conexas, existe una contracción de álgebras semicompleta de  $\bar{B}((A, d))$  a una CDGAC-álgebra  $hBA$  producto torcido de álgebras exteriores y de potencias divididas, de modo que:*

- cada factor del tipo  $E(u, 2n - 1)$  en  $A$  contribuye con un factor  $\Gamma(\sigma(u), 2n)$  en  $hBA$ ;
- cada factor del tipo  $P(u, 2n)$  en  $A$  contribuye con un factor  $E(\sigma(u), 2n + 1)$  en  $hBA$ .

### Demostración.

La idea de la demostración es muy diáfana: por composición y producto tensorial de contracciones, es inmediato establecer una contracción  $c(f, g, \phi)$  semicompleta que relaciona la construcción bar de  $(A, 0)$  (DG-módulo trivial subyacente en  $(A, d)$ ) con un producto tensorial banal (esto es, no torcido, de diferencial nula) de álgebras exteriores y de potencias divididas.

El paso delicado es garantizar que la perturbación  $\delta_d$  de esta contracción que genera  $d$  (diferencial que hace de  $A$  un producto torcido, y que es derivación, trivialmente) en la diferencial tensorial de la construcción bar  $\bar{B}((A, 0))$  según el Lema Básico de Perturbación, da origen a un proceso finito que desemboca en el establecimiento de

una nueva contracción semicompleta, entre  $\bar{B}(A) = \bar{B}((A, d))$  y un producto torcido de álgebras exteriores y de potencias divididas.

Por tanto, hay que probar que la composición del operador de homotopía  $\phi$  con la perturbación  $\delta_d$  es puntualmente nilpotente.

Es conveniente recalcar que la perturbación  $\delta_d$  que genera  $d$  sobre  $\bar{B}((A, 0))$  afecta exclusivamente a la diferencial tensorial, por lo que en caso alguno modifica la graduación simplicial.

Sin embargo, el operador de homotopía  $\phi$  procede de los operadores de homotopía  $\phi_{\bar{B}^\otimes}$  y  $\phi_{\bar{B}^P}$  y ambos aumentan la graduación simplicial en una unidad. Como quiera que las composiciones  $g_{\bar{B}^\otimes} f_{\bar{B}^\otimes}$  y  $g_{\bar{B}^P} f_{\bar{B}^P}$  no alteran dicha graduación, podemos concluir sin lugar a equívoco que  $\phi$  aumenta la graduación simplicial en una unidad.

Ahora, es fácil determinar la nilpotencia puntual de la composición  $\phi\delta_d$ , dado que a lo más, se podrá iterar esta composición sobre un elemento dado tantas veces como dimensión tensorial tenga el elemento en cuestión: la suma de dimensiones simplicial y tensorial permanece constante, y la simplicial aumenta una unidad en cada aplicación de  $\phi\delta_d$ , de donde la tensorial disminuye en una unidad en cada iteración, hasta alcanzar la menor dimensión posible, que corresponde a la dimensión cero.

■

Lamentablemente, dado el comportamiento exponencial de los morfismos  $g_{\bar{B}^\otimes}$  y  $\phi_{\bar{B}^\otimes}$ , la evaluación de la diferencial  $d_{\delta_d}$  del producto torcido que provee como salida el teorema anterior se antoja como un proceso de complejidad desorbitada.

En [14, 155] se trabaja una familia infinita de productos torcidos de álgebras exteriores y polinomiales para la que la diferencial  $d_{\delta_d}$  asociada presentaba un comportamiento estable en cuanto a la complejidad en su evaluación. Esta estabilidad procede del hecho de que gran parte de los sumandos que intervienen en la evaluación de la diferencial pueden desecharse desde el principio, por tener garantizada su nulidad mediante argumentos y disquisiciones particulares para la familia en cuestión.

En la sección que se abre a continuación vamos a elaborar un mecanismo, que llamamos *teoría de inversiones* [43], que permitirá rebajar ostensiblemente el número de sumandos a contemplar en la evaluación de la diferencial  $d_{\delta_d}$ , en el caso general.

### 3.3 Teoría de inversiones.

Supongamos que tenemos como dato de partida un producto torcido  $A = A_1 \otimes \cdots \otimes A_t$ , con  $A_i \in \{E, P\}$ , de diferencial-derivación generada a partir de las imágenes de los  $t$  generadores.

La diferencial que provee el modelo de  $\bar{B}(A)$  hallado en el Teorema 3.2.5, en la forma de producto torcido de álgebras exteriores y de potencias divididas (según corresponda), viene dada según el Lema Básico de Perturbación por la expresión:

$$\begin{aligned} d_\infty &= ((f_{\bar{B}P} \otimes \cdots \otimes f_{\bar{B}P})(1^{\otimes t-2} \otimes f_{\bar{B}\otimes}) \cdots f_{\bar{B}\otimes} \delta_d \circ \\ &\circ \sum_{i \geq 0} (-1)^i \left[ (\phi_{\bar{B}\otimes} + \sum_{j=1}^{t-2} g_{\bar{B}\otimes}(1^{\otimes j-1} \otimes g_{\bar{B}\otimes})(1^{\otimes j} \otimes \phi_{\bar{B}\otimes})(1^{\otimes j-1} \otimes f_{\bar{B}\otimes}) \cdots f_{\bar{B}\otimes}) + \right. \\ &\quad \left. + [g_{\bar{B}\otimes} \cdots (1^{\otimes t-2} \otimes g_{\bar{B}\otimes}) \sum_{j=0}^{t-1} (g_{\bar{B}P} f_{\bar{B}P} \otimes \cdots \otimes g_{\bar{B}P} f_{\bar{B}P} \otimes \phi_{\bar{B}P} \otimes 1^{\otimes t-j+1}) \circ \right. \\ &\quad \left. \left. \circ (1^{\otimes t-2} \otimes f_{\bar{B}\otimes}) \cdots f_{\bar{B}\otimes}) \delta_d \right]^i \circ [g_{\bar{B}\otimes} \cdots (1^{\otimes t-2} \otimes g_{\bar{B}\otimes})(g_{\bar{B}P} \otimes g_{\bar{B}P})], \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} \delta_d([a_1^1 \otimes \cdots \otimes a_n^1 | \cdots | a_1^k \otimes \cdots \otimes a_n^k]) &= \\ - \sum_{i=1}^k (-1)^{e_{i-1}} [a_1^1 \otimes \cdots \otimes a_n^1 | \cdots | d(a_1^i \otimes \cdots \otimes a_n^i) | \cdots | a_1^k \otimes \cdots \otimes a_n^k], \end{aligned}$$

para  $e_i = i + |a_1^1 \otimes \cdots \otimes a_n^1| + \cdots + |a_1^i \otimes \cdots \otimes a_n^i|$ .

Para el establecimiento de esta fórmula se ha perturbado por  $\delta_d$  la composición de las siguientes contracciones:

- Primero, se itera  $t$  veces la contracción  $C_{\bar{B}\otimes}$  para dar la contracción

$$C_{\bar{B}\otimes^t} : (\bar{B}(\otimes_{i=1}^t A_i), \otimes_{i=1}^t \bar{B}(A_i), f_{\bar{B}\otimes^t}, g_{\bar{B}\otimes^t}, \phi_{\bar{B}\otimes^t}),$$

con  $f_{\bar{B}\otimes^t} = (1^{\otimes t-2} \otimes f_{\bar{B}\otimes}) \cdots f_{\bar{B}\otimes}$ ,  $g_{\bar{B}\otimes^t} = g_{\bar{B}\otimes} \cdots (1^{\otimes t-2} \otimes g_{\bar{B}\otimes})$  y

$$\phi_{\bar{B}\otimes^t} = \phi_{\bar{B}\otimes} + \sum_{i=1}^{t-2} (1^{\otimes i-1} \otimes g_{\bar{B}\otimes})(1^{\otimes i} \otimes \phi_{\bar{B}\otimes})(1^{\otimes i-1} \otimes f_{\bar{B}\otimes}).$$

- Después, a partir de las contracciones elementales  $C_{\bar{B}A_i} : \bar{B}(A_i) \Rightarrow hBA_i$  se componen las contracciones

$$\bar{B}(A_1) \otimes \bar{B}(A_2) \otimes \cdots \otimes \bar{B}(A_t) \Rightarrow hBA_1 \otimes \bar{B}(A_2) \otimes \cdots \otimes \bar{B}(A_t) \Rightarrow \cdots \Rightarrow hBA_1 \otimes hBA_2 \otimes \cdots \otimes hBA_t$$

para dar

$$C_{\otimes_{i=1}^t \bar{B}A_i} : (\otimes_{i=1}^t \bar{B}(A_i), \otimes_{i=1}^t hBA_i, \otimes_{i=1}^t f_{\bar{B}A_i}, \otimes_{i=1}^t g_{\bar{B}A_i}, \sum_{i=0}^{t-1} \otimes_{j=1}^i (g_{\bar{B}A_j} f_{\bar{B}A_i}) \otimes \phi_{\bar{B}A_{i+1}} 1^{\otimes t-i-1}).$$

Volviendo a la fórmula de  $d_\infty$ , se puede observar que de entre todos los morfismos implicados los que repercuten de manera más incisiva al carácter exponencial de la complejidad son  $g_{\bar{B}\otimes}$  y  $\phi_{\bar{B}\otimes}$ , principalmente debido a su dependencia con respecto a los shuffles.

A continuación vamos a describir un proceso que permitirá una simplificación extrema en la evaluación de las aplicaciones  $\phi_{\bar{B}\otimes}$  que intervienen en la fórmula de  $d_\infty$ . Este método constituye lo que en [43] se ha dado en llamar **teoría de inversiones**, y es válido para cualquier contracción del tipo  $C_{\bar{B}\otimes^t}$ .

### 3.3.1 Teoría general de inversiones.

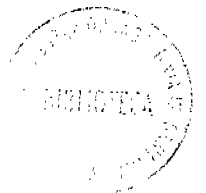
**Definición 3.3.1** Sean  $A$  y  $A'$  dos DGA-álgebras, y consideremos un elemento homogéneo  $b = [a_1 \otimes a'_1 | \cdots | a_n \otimes a'_n]$  de  $\bar{B}(A \otimes A')$ . Se dice que  $b$  tiene  $k$  inversiones si existen  $1 \leq i_1 < \cdots < i_k < j \leq n$  con  $a_{i_m} = 1$  para  $1 \leq m \leq k$  y  $a_j \notin \ker \xi_A$ .

En general, un elemento de  $\bar{B}(A \otimes A')$  tiene  $k$  inversiones si es combinación lineal de elementos homogéneos con al menos  $k$  inversiones.

Veamos cómo se comportan los elementos con inversiones respecto a los morfismos  $g_{\bar{B}\otimes}$ ,  $f_{\bar{B}\otimes}$  y  $\phi_{\bar{B}\otimes}$ .

Por un lado,  $f_{\bar{B}\otimes}$  se anula sobre elementos  $[x_1 \otimes y_1 | \cdots | x_n \otimes y_n]$  que tengan inversiones, dado que este caso al menos uno de los factores de  $\xi_{\bar{B}(A)}(x_{i+1} \cdots x_n) \xi_{\bar{B}(A')}(y_1 \cdots y_i)$  es nulo.

Por otro,  $g_{\bar{B}\otimes}$  aplicado sobre un elemento genérico del tipo  $[x_1 | \cdots | x_p] \otimes [y_1 | \cdots | y_q]$  produce:



- Un único término sin inversiones,

$$[x_1 | \cdots | x_p | y_1 | \cdots | y_q],$$

que procede de la simple yuxtaposición.

- Exactamente  $p$  sumandos con una inversión, que aparecen cuando  $y_1$  es el único elemento  $y_j$  que adelanta a algún  $x_i$ :

$$[x_1 | \cdots | y_1 | x_i | \cdots | x_p | y_2 | \cdots | y_q], \quad 1 \leq i \leq p.$$

- Los restantes  $\binom{p+q}{p} - p - 1$  sumandos tienen más de una inversión, dado que al menos  $y_1$  e  $y_2$  adelantan simultáneamente a algún  $x_i$ .

Por último,  $\phi_{\bar{B} \otimes}$  incrementa al menos en una las inversiones del elemento de entrada  $[x_1 \otimes y_1 | \cdots | x_n \otimes y_n]$ , como se puede inferir de la siguiente cadena de observaciones:

- Dado que  $\phi_{\bar{B} \otimes} = \lambda^{-1} SHI \lambda$ , las inversiones que produzca  $\phi_{\bar{B} \otimes}$  las hemos de buscar en la evaluación de  $SHI$ ; entendiéndose que  $(a_1, \dots, a_n) \times (a'_1, \dots, a'_n)$  produce  $k$  inversiones cuando  $[a_1 \otimes a'_1 | \cdots | a_n \otimes a'_n]$  tiene  $k$  inversiones.
- Cuando se aplica  $\dots s_{n-p-q-1} \partial_{n-q+1} \dots \partial_n$  sobre  $[a_1 | \dots | a_n]$  resulta

$$[a_1 | \dots | a_{n-p-q-1} | 1 | a_{n-p-q} | \cdots | a_{n-q}].$$

- Por otro lado, cuando se aplica  $\dots \partial_{n-p-q} \cdots \partial_{n-q-1}$  sobre  $[a'_1 | \dots | a'_n]$  resulta

$$[a'_1 | \cdots | a'_{n-p-q-1} | a'_{n-p-q} \cdots a'_{n-q} | a'_{n-q+1} | \cdots | a'_n].$$

- Para terminar de aplicar  $SHI$ , hay que hacer el producto shuffle de las últimas  $p+1$  entradas de la primera componente y las  $q$  últimas entradas de la segunda componente.
- Así, una fórmula explícita para  $\phi_{\bar{B} \otimes}$  es, salvo signo,

$$\begin{aligned} & \phi_{\bar{B} \otimes}([a_1 \otimes a'_1 | \dots | a_n \otimes a'_n]) = \\ & = \sum_{q=0}^{n-1} \sum_{p=0}^{n-q-1} [a_1 \otimes a'_1 | \cdots | a_{n-p-q-1} \otimes a'_{n-p-q-1} | a'_{n-p-q} \cdots a'_{n-q} | ([a_{n-p-q} | \cdots | a_{n-q}] \star [a'_{n-q+1} | \cdots | \end{aligned}$$

- En los sumandos anteriores se necesita que  $a_k \in \ker \xi_A$  y  $a'_l \in \ker \xi_{A'}$  para  $n - p - q \leq k \leq n - q$  y  $n - q + 1 \leq l \leq n$ , y también  $a_k \notin \ker \xi_A$  para  $n - q + 1 \leq k \leq n$ ; pues en otro caso el elemento resultante sería nulo. De este modo, podemos asumir que todas las inversiones del elemento de entrada se localizan en  $[a_1 \otimes a'_1 | \cdots | a_{n-p-q-1} \otimes a'_{n-p-q-1}]$ .
- En conclusión, a las inversiones que tuviera de entrada el elemento siempre se añade la que produce  $|a'_{n-p-q} \cdots a'_{n-q}|$ .
- Además, de entre todos los sumandos, el único que incrementa exactamente en uno el número de inversiones es

$$[a_1 \otimes a'_1 | \cdots | a_{n-p-q-1} \otimes a'_{n-p-q-1} | a'_{n-p-q} \cdots a'_{n-q} | a_{n-p-q} | \cdots | a_{n-q} | a'_{n-q+1} | \cdots | a'_n].$$

**Lema 3.3.2** *Sea  $\delta_d$  una perturbación de  $\bar{B}(A \otimes A')$  inducida por una perturbación  $d$  de la diferencial en  $A \otimes A'$ , de modo que  $d(A) \subset A$ . Entonces,  $\delta_d$  aplicado sobre un elemento de  $k$  inversiones devuelve un elemento de, al menos,  $k - 1$  inversiones.*

### **Demostración.**

La demostración se sigue fácilmente del hecho de que  $\delta_d$  afecta tan sólo a la diferencial tensorial y que  $d(A) \subset A$ , de modo que el elemento de la forma  $a_i \otimes 1$  respecto del cual se miden las inversiones del elemento de entrada genera otro elemento  $d(a_i) \otimes 1$  de similares características respecto del cual se miden asimismo las  $k$  inversiones que hubiere de un comienzo.

La única manera de perder alguna de las  $k$  inversiones iniciales es cuando se aplica  $d$  a un elemento del tipo  $1 \otimes a'_i$ . En cualquier caso, a lo sumo se perdería únicamente esta inversión, de donde  $\delta_d$  devuelve un elemento de, al menos,  $k - 1$  inversiones. ■

En estas circunstancias, podemos enunciar el resultado que permite rebajar drásticamente el número de sumandos a tener en cuenta al evaluar la diferencial perturbada  $d_\infty$  que genera  $\delta_d$  en una contracción del tipo

$$C_{\bar{B} \otimes} : \bar{B}(A \otimes A') \Rightarrow \bar{B}(A) \otimes \bar{B}(A'),$$

con

$$d_\infty = f_{\bar{B} \otimes} \delta_d (1 - \phi_{\bar{B} \otimes} \delta_d + \phi_{\bar{B} \otimes} \delta_d \phi_{\bar{B} \otimes} \delta_d - \cdots) g_{\bar{B} \otimes}.$$

**Teorema 3.3.3** *Asumiendo que  $d(A) \subset A$ , la fórmula para la aplicación  $\phi_{\bar{B} \otimes}$  en vuelta en definición de  $d_\infty$  se puede reducir a la expresión*

$$\phi_{\bar{B} \otimes}([a_1 \otimes a'_1 | \cdots | a_n \otimes a'_n]) = \sum_{q=0}^{n-1} \sum_{p=0}^{n-q-1} (-1)^{\varphi(n,p,q)} \xi_A(a_{n-q+1} \cdots a_n)$$

$$= [a_1 \otimes a'_1 | \cdots | a_{n-p-q-1} \otimes a'_{n-p-q-1} | a'_{n-p-q} \cdots a'_{n-q} | a_{n-p-q} | \cdots | a_{n-q} | a'_{n-q+1} | \cdots | a'_n],$$

donde el signo  $\varphi(n, p, q)$  viene dado por la expresión

$$\begin{aligned} \varphi = & n - p - q - 1 + |a_1| + \cdots + |a_{n-p-q-1}| + \sum_{i=n-q+1}^n (|a_1| + \cdots + |a_i|) + \\ & + q(|a_1| + \cdots + |a_{n-q}|) + \sum_{i=n-p-q}^{n-q-1} (|a'_1| + \cdots + |a'_i|) + (p-1)(|a'_1| + \cdots + |a'_{n-q}|) + \\ & + \sum_{i=n-p-q}^{n-q} |a_i|(|a'_i| + \cdots + |a'_n|) + \sum_{j=n-q+1}^n \sum_{k=1}^{j-1} |a_j| |a'_k|. \end{aligned}$$

Más aún, el sumatorio en  $q$  se reduce a un sólo sumando, que corresponde al único índice  $q$  con respecto al cual es

$$\begin{cases} a_k \notin \ker \xi_A, & \text{para } n - q + 1 \leq k \leq n, \\ a_k \in \ker \xi_A, & \text{para } 1 \leq k \leq n - q. \end{cases}$$

En conclusión, el número de sumandos resultantes en la evaluación final de  $\phi_{\bar{B} \otimes}$  es lineal en la dimensión simplicial del elemento de entrada.

**Demostración.** En la definición de  $d_\infty$  la composición  $\delta_d \phi_{\bar{B} \otimes}$  al menos, conserva el número de inversiones del elemento de entrada, si es que no lo aumenta. Como el último morfismo que se aplica es  $f_{\bar{B} \otimes}$ , y sólo deja de ser nulo actuando sobre elementos sin inversiones, necesariamente  $\delta_d \phi_{\bar{B} \otimes}$  debe devolver en cada iteración 0 inversiones. Esto requiere que el elemento de entrada no tenga inversiones, que  $\phi_{\bar{B} \otimes}$  produzca una sola inversión y que  $\delta_d$  elimine dicha inversión.

Según los comentarios realizados con anterioridad, esto sucede únicamente cuando  $\phi_{\bar{B} \otimes}$  actúa en la forma reseñada.



El signo  $\varphi$  proviene de evaluar los operadores de cara  $\partial_i$  y de degeneración  $s_j$  propios de  $SHI$ .

Por último, que el sumatorio en  $q$  se reduce a un sólo sumando, cuyo índice viene dado por las propiedad

$$\begin{cases} a_k \notin \ker \xi_A, & \text{para } n - q + 1 \leq k \leq n, \\ a_k \in \ker \xi_A, & \text{para } 1 \leq k \leq n - q; \end{cases}$$

es consecuencia del hecho de que el elemento de salida sólo puede tener una inversión (por tanto,  $a_k \in \ker \xi_A$ , para  $1 \leq k \leq n - q$ ) y que  $\xi_A(a_{n-q+1} \cdots a_n)$  no es nulo exclusivamente en el caso de que  $a_k \notin \ker \xi_A$ , para  $n - q + 1 \leq k \leq n$ .

En definitiva, **el número de sumandos en la imagen de  $\phi_{\bar{B} \otimes}$  se reduce del primigenio**

$$\sum_{q=0}^{n-1} \sum_{p=0}^{n-q-1} \binom{p+q+1}{q} = 2^{n+1} - n - 2,$$

a la moderada cantidad de

$$\sum_{p=0}^{n-q-1} 1,$$

para un sólo valor determinado de  $q$  entre 0 y  $n - 1$ . Es decir, **de un número exponencial de sumandos pasamos a uno lineal**, tomando como medida la dimensión simplicial  $n$  del elemento de entrada.

■

El resultado anterior se puede generalizar en la forma natural al caso de contracciones del tipo  $C_{\bar{B} \otimes^t} : \bar{B}(\otimes_{i=1}^t A_i) \Rightarrow \otimes_{i=1}^t \bar{B}(A_i)$ .

Ya vimos que una tal contracción proviene de la composición de contracciones elementales del tipo  $C_{\bar{B} \otimes}$ . En cada una de ellas es válida la elemental noción de inversión que nosotros hemos recogido en la Definición 3.3.1. Ahora, consideraremos como inversión todo estado que lleve a una inversión en alguna de las contracciones elementales  $C_{\bar{B} \otimes}$  de que se compone la contracción final  $C_{\bar{B} \otimes^t}$ .

Por tanto, habrá que tener en cuenta las inversiones de  $A_1 \otimes (\otimes_{i=2}^t A_i)$ , las de  $A_2 \otimes (\otimes_{i=3}^t A_i)$ , y así sucesivamente, hasta considerar las inversiones propias de  $A_{t-1} \otimes A_t$ .

Vamos a llevar este estudio al caso particular que nos lleva.

### 3.3.2 Teoría de inversiones *versus* 1-homología de CDGAC-álgebras.

En este caso, no sólo interviene una contracción del tipo  $C_{\bar{B} \otimes^t}$ , sino también la que lleva  $\otimes_{i=1}^t \bar{B}(A_i)$  al producto de los respectivos modelos,  $\otimes_{i=1}^t hBA_i$ :

$$C_{\otimes_{i=1}^t \bar{B}A_i} : (\otimes_{i=1}^t \bar{B}(A_i), \otimes_{i=1}^t hBA_i, \otimes_{i=1}^t f_{\bar{B}A_i}, \otimes_{i=1}^t g_{\bar{B}A_i}, \sum_{i=0}^{t-1} \otimes_{j=1}^i (g_{\bar{B}A_i} f_{\bar{B}A_i}) \otimes \phi_{\bar{B}A_{i+1}} 1^{\otimes t-i-1}),$$

con cada  $A_i$  un álgebra exterior o polinomial.

Antes de nada, hemos de advertir que se verifica la condición del Lema 3.3.2 sobre la diferencial  $d$  en  $\otimes_{i=1}^t A_i$ : para ello basta tomar las álgebras  $A_i$  ordenadas según el grado de sus generadores. Así, obviamente quedan garantizadas las relaciones  $d(\otimes_{i=j}^k A_i) \subset \otimes_{i=1}^{k-1} A_i$ , de modo que  $d$  nunca devuelve elementos en un álgebra de índice mayor que los correspondientes a las álgebras de los elementos de entrada.

Veamos cómo se puede particularizar la teoría de inversiones detallada en la sección previa, en la simplificación del cálculo de la diferencial  $d_\infty$  generada por la diferencial  $d$  de  $\otimes_{i=1}^t A_i$ ,

$$\begin{aligned} d_\infty &= ((f_{\bar{B}P} \otimes \dots \otimes f_{\bar{B}P})(1^{\otimes t-2} \otimes f_{\bar{B} \otimes}) \dots f_{\bar{B} \otimes} \delta_d \circ \\ &\circ \sum_{i \geq 0} (-1)^i \left[ (\phi_{\bar{B} \otimes} + \sum_{j=1}^{t-2} g_{\bar{B} \otimes} (1^{\otimes j-1} \otimes g_{\bar{B} \otimes}) (1^{\otimes j} \otimes \phi_{\bar{B} \otimes}) (1^{\otimes j-1} \otimes f_{\bar{B} \otimes}) \dots f_{\bar{B} \otimes}) \right] + \\ &+ [g_{\bar{B} \otimes} \dots (1^{\otimes t-2} \otimes g_{\bar{B} \otimes}) \sum_{j=0}^{t-1} (g_{\bar{B}P} f_{\bar{B}P} \otimes \dots \otimes g_{\bar{B}P} f_{\bar{B}P} \otimes \phi_{\bar{B}P} \otimes 1^{\otimes t-j+1}) \circ \\ &\circ (1^{\otimes t-2} \otimes f_{\bar{B} \otimes}) \dots f_{\bar{B} \otimes}] \delta_d^i \circ [g_{\bar{B} \otimes} \dots (1^{\otimes t-2} \otimes g_{\bar{B} \otimes}) (g_{\bar{B}P} \otimes g_{\bar{B}P})]. \end{aligned}$$

Analícemos cómo han de evaluarse cada uno de los sumandos que intervienen en la fórmula precedente. En cualquier caso, está claro que en modo alguno se podrá permitir la aparición de más de una inversión, porque en tal caso la evaluación final de  $(1^{\otimes t-2} \otimes f_{\bar{B} \otimes}) \dots f_{\bar{B} \otimes}$  será nula.

- De un lado, de la suma

$$\sum_{j=0}^{t-1} (g_{\bar{B}P} f_{\bar{B}P} \otimes \dots \otimes g_{\bar{B}P} f_{\bar{B}P} \otimes \phi_{\bar{B}P} \otimes 1^{\otimes t-j+1})$$

sólo hay que evaluar aquellos sumandos en los que el operador de homotopía corresponde a  $\phi_{\bar{B}P}$  (recordemos que  $\phi_{\bar{B}E} = 0$ ), y todos ellos preservan exactamente el número de inversiones del elemento de entrada.

- Por otro, cada vez que se aplique  $g_{\bar{B} \otimes} \cdots (1^{\otimes t-2} \otimes g_{\bar{B} \otimes})$ , a lo sumo una de las aplicaciones  $g_{\bar{B} \otimes}$  dará lugar a una inversión, mientras que las demás se limitarán a la yuxtaposición de los elementos de entrada. De este modo, el número inicial de sumandos que genera  $g_{\bar{B} \otimes} \cdots (1^{\otimes t-2} \otimes g_{\bar{B} \otimes})$  (que coincide con el producto de los números combinatorios asociados a las dimensiones simpliciales), **se reduce a menos del número que marca la suma de las dimensiones simpliciales de los elementos de entrada.**
- En particular, en los sumandos

$$\sum_{j=1}^{t-2} g_{\bar{B} \otimes} \cdots (1^{\otimes j-1} \otimes g_{\bar{B} \otimes})(1^{\otimes j} \otimes \phi_{\bar{B} \otimes})(1^{\otimes j-1} \otimes f_{\bar{B} \otimes}) \cdots f_{\bar{B} \otimes}$$

la composición  $g_{\bar{B} \otimes} \cdots (1^{\otimes j-1} \otimes g_{\bar{B} \otimes})$  debe actuar como la simple yuxtaposición, dado que  $\phi_{\bar{B} \otimes}$  ya da lugar a una inversión.

- El morfismo  $\delta_d$ , que en principio da lugar a una suma (de tantos sumandos como dimensión simplicial tiene el elemento de entrada), se reducirá a un solo sumando en el caso de que el elemento de entrada tenga una inversión; y dicho sumando se originará precisamente de la aplicación de  $\delta_d$  en la componente simplicial responsable de la inversión.

Todas estas simplificaciones permiten abordar con ciertas esperanzas la tarea de implementar en ordenador la fórmula de  $d_\infty$ , y proceder al cálculo de la homología de CDGAC-álgebras concretas.

Pero antes, comparemos la complejidad en la evaluación de  $d_\infty$  sobre los generadores del álgebra modelo, con y sin atender, respectivamente, a la teoría de inversiones.

Tomemos como tamaño de la instancia el grado del generador de entrada, digamos  $k$ , y midamos la complejidad en el peor de los casos posibles.

De antemano, podemos asegurar que el índice  $i$  del sumatorio principal en la fórmula de  $d_\infty$ , que corresponde a la composición nilpotente del dato de perturbación  $\delta_d$  y la homotopía pertinente, varía entre 0 y la parte entera del cociente  $\frac{k-1}{k_0+1}$  menos 1, donde  $k_0$  denota el grado del generador de  $A_1$  (mínimo entre todos los grados de generadores, según la ordenación que fijamos al comienzo entre las álgebras  $A_i$ ). No puede ser de otra forma, dado que en cada entrada de las que marca la dimensión

simplicial la menor graduación tensorial admisible es  $k_0$  mismo: así, como el elemento de entrada tiene dimensión  $k$ ,  $d_\infty$  baja un grado la dimensión y cada vez que se aplica un sumando del sumatorio en  $i$  aumenta en uno la dimensión simplicial, a lo más la dimensión simplicial de salida vendrá dada justamente por el cociente  $\frac{k-1}{k_0+1}$ .

En caso de no considerar la teoría de inversiones, el comportamiento de los morfismos en  $d_\infty$  es el siguiente.

La composición  $(1^{\otimes j-1} \otimes f_{\bar{B}^\otimes}) \cdots f_{\bar{B}^\otimes}$  aplicada sobre un elemento de dimensión simplicial  $n$  consiste, en definitiva, en realizar una partición de  $n$  en  $j+1$  compartimentos, y sumar los elementos correspondientes. Así, esta composición contribuye con  $\binom{n+j}{j}$  sumandos para elementos de entrada de dimensión simplicial  $n$ , tantos como particiones distintas  $(n_1, \dots, n_{j+1})$  hay de  $n$ .

Actuando sobre una de estas particiones, digamos  $(n_1, \dots, n_{j+1})$ , la composición  $g_{\bar{B}^\otimes} \cdots (1^{\otimes j-1} \otimes g_{\bar{B}^\otimes})$  devuelve  $\prod_{h=1}^j \binom{n_h + \cdots + n_{j+1}}{n_h}$  sumandos, que provienen de los productos shuffle anidados.

Por su parte,  $\phi_{\bar{B}^\otimes}$  actuando sobre un elemento de dimensión simplicial  $n$  devuelve  $2^{n+1} - n - 2$  sumandos.

Los morfismos  $g_{\bar{B}A_i}$ ,  $f_{\bar{B}A_i}$  y  $\phi_{\bar{B}A_i}$  actúan en tiempo constante.

Suponiendo que  $d$  actuando sobre un generador devuelve a lo más  $r$  sumandos, entonces podemos asumir que  $\delta_d$  actuando sobre un elemento de dimensión simplicial  $n$  devuelve  $rn$  sumandos.

Aglutinando toda esta información, podemos concluir que la complejidad en la evaluación de  $d_\infty$  actuando sobre un generador de grado  $k$  viene medida por la cantidad

$$\sum_{i=0}^{\lfloor \frac{k-1}{k_0+1} \rfloor - 1} \binom{i+t}{t-1} r(i+1) \prod_{m=1}^i r m \left( t \sum_{(n_1, \dots, n_t)}^{m+1} \prod_{h=1}^{t-1} \binom{n_h + \cdots + n_t}{n_h} \right) + \sum_{j=0}^{t-2} \sum_{(n_1, \dots, n_{j+1})}^{m+1} (2^{m-n_{j+1}} - (m - n_{j+1}) - 2) \prod_{h=1}^j \binom{n_h + \cdots + n_{j+1}}{n_h} \Bigg).$$

Por otro lado, la complejidad en caso de considerar las mejoras que provee la teoría de inversiones viene dada por

$$\sum_{i=0}^{\lfloor \frac{k-1}{k_0+1} \rfloor - 1} \binom{i+t}{t-1} r \prod_{m=1}^i r \left( t \left( \binom{m+t-1}{t-1} + m + 1 \right) + \sum_{j=0}^{t-2} \binom{m+j}{j} + 2m \right)$$

A continuación damos una tabla comparativa entre ambos resultados, para diversos valores de  $t$ ,  $r$  y  $n = \lfloor \frac{k-1}{k_0+1} \rfloor$ :

$r$	$t$	$n$	Sin T.I.	Con T.I.
2	2	3	.03''	.004''
2	2	4	12.29''	.2''
2	2	5	3h 38' 23''	11'
2	2	6	1a 1m 10h 48' 59''	12' 37''
2	2	7	6mi 5s 6a 24d 15h 39' 17''	16h 19' 28''
3	2	5	1d 3h 37' 50''	1' 24''
3	2	6	12a 4m 6d 21h 37' 44''	2h 23' 7''
4	2	5	4d 20h 25' 1''	5' 56''
4	2	6	69a 4m 23d 23h 43' 57''	13h 22' 10''
3	5	4	8m 21d 1h 17' 49''	1h 22' 45''
2	10	3	17h 14' 33''	3' 9''
2	10	4	4mi 4s 91a 8m 8d 32' 12''	1m 8d 12h 46' 52''
2	10	7	9.63 · 10 <sup>25</sup> mi 5s 61a 9m 2d 17h 10' 26''	4s 24a 1m 16d 14h 19' 6''

$mi$  = milenios,  $s$  = siglos,  $a$  = años,  $m$  = meses,  $d$  = días

Se puede observar que la complejidad depende básicamente en la magnitud de las variables  $n$  y  $t$ , principalmente la primera de ellas.

### 3.3.3 Programación y ejemplos.

A la hora de poder realizar algunos cálculos concretos, hemos implementado en MATHEMATICA un programa que permite el cálculo de  $d_\infty$  utilizando la fórmula que provee la teoría de inversiones.

Este programa está compartimentado en varias funciones elementales, que se corresponden en su mayoría con las aplicaciones en que factoriza  $d_\infty$ . Hay una rutina



especial, que es la que combina adecuadamente las funciones elementales para dar la expresión final de  $d_\infty$ .

El sistema de codificación que se ha elegido es la siguiente:

- Para los elementos del modelo homológico  $\otimes_{i=1}^t hBA_i$ , listas de listas de longitud  $t + 1$  de la forma  $\{\lambda_j, i_{j,1}, \dots, i_{j,t}\}$ , que representan combinaciones lineales del tipo

$$\sum_j \lambda_j w^{i_{j,1}} \otimes \dots \otimes w^{i_{j,t}}.$$

- Para los elementos en  $\bar{B}(\otimes_{i=j}^t A_i)$ , listas de listas de la forma  $\{\lambda_m, \{i_{m,1,j}, \dots, i_{m,1,t}\}, \dots, \{i_{m,n_m,j}, \dots, i_{m,n_m,t}\}\}$ , que representan combinaciones lineales del tipo

$$\sum_m \lambda_m [w^{i_{m,1,j}} \otimes \dots \otimes w^{i_{m,1,t}} | \dots | w^{i_{m,n_m,j}} \otimes \dots \otimes w^{i_{m,n_m,t}}].$$

- Para elementos en  $\bar{B}(A) \otimes \bar{B}(A')$ , listas de pares de elementos de la forma anterior.

Los datos de entrada son el número y grado de los generadores, y sus respectivas imágenes por la derivación  $d$ . La salida, la imagen de  $d_\infty$  sobre cada uno de los generadores del modelo.

Veamos algunos ejemplos.

$$1. E(x_1, x_2, x_3; 1) \otimes P(x_4, x_5; 2) \otimes E(x_6; 3) \otimes P(x_7; 4) \otimes P(x_8; 6).$$

**Entrada:**  $((1, 1, 1, 2, 2, 3, 4, 6),$   
 $(0, 0, 0, x_1 - x_2, x_2, x_1x_2, x_2x_4 + x_1x_5 + x_1x_2x_3, x_1x_2x_6)).$

**Salida:**  $((2, 2, 2, 3, 3, 4, 5, 7), (0, 0, 0, \underline{x}_1 - \underline{x}_2, \underline{x}_2, 0, \underline{x}_1\underline{x}_2 - 2\underline{x}_2^2, 0))$

**Tiempo de ejecución**  $d_\delta(\underline{x}_4)$  in 0.55 sec.

$d_\delta(\underline{x}_5)$  en 0.27 sg.

$d_\delta(\underline{x}_6)$  en 0.33 sg.

$d_\delta(\underline{x}_7)$  en 2.14 sg.

$d_\delta(\underline{x}_8)$  en 0.28 sg.

2.  $E(x_1; 1) \otimes P(x_2; 2) \otimes P(x_3; 6) \otimes P(x_4; 10) \otimes P(x_5; 26)$ .

**Entrada:**  $((1, 2, 6, 10, 26), (0, -2x_1, x_1x_2^2, 3x_1x_2x_3, 8x_1x_2x_3^2x_4))$ .

**Salida:**  $((2, 3, 7, 11, 27), (0, -2\underline{x}_1, -8\underline{x}_1^3, -192\underline{x}_1^5, 21799895040\underline{x}_1^{13}))$

**Tiempo de ejecución**  $d_\delta(\underline{x}_2)$  en 0.16 sg.

$d_\delta(\underline{x}_3)$  en 0.60 sg.

$d_\delta(\underline{x}_4)$  en 2.36 sg.

$d_\delta(\underline{x}_5)$  en 1571.47 sg.

3.  $E(x_1; 1) \otimes P(x_2; 2) \otimes P(x_3; 4) \otimes E(x_4; 5) \otimes E(x_5; 7) \otimes P(x_6; 14)$ .

**Entrada:**  $((1, 2, 4, 5, 7, 14), (0, -x_1, x_1x_2, 0, 2x_1x_4, -x_1x_4x_5))$ .

**Salida:**  $((2, 3, 5, 6, 8, 15), (0, -\underline{x}_1, -\underline{x}_1^2, 0, 0))$

**Tiempo de ejecución**  $d_\delta(\underline{x}_2)$  in 0.17 sec.

$d_\delta(\underline{x}_3)$  en 0.33 sg.

$d_\delta(\underline{x}_4)$  en 0.26 sg.

$d_\delta(\underline{x}_5)$  en 0.17 sg.

Todos estos cálculos se han realizado sobre un Pentium III, con 128Mb RAM y 7.2Gb de disco duro.

### 3.4 Cuestiones relacionadas.

Vamos a analizar aquí las siguientes cuestiones:

- Determinación de la  $n$ -homología de una CDGA-álgebra sobre  $\mathbb{Z}$ .
- Paso a resoluciones que escinden de la resolución bar.
- Posibles aplicaciones prácticas.

### 3.4.1 Paso a $n$ -homología.

En [22, 155] se ataca el problema de la  $n$ -homología para CDGAC-álgebras trabajando con  $\mathbb{Z}_{(p)}$  como anillo base.

A continuación reproducimos los resultados y conclusiones fundamentales de estos trabajos.

**Teorema 3.4.1** [141] Sean  $n$  un número natural,  $p$  un primo impar y  $\mathbb{Z}_p$  el anillo base considerado. Existe una contracción semicompleta de CDGAC-álgebras, que denotamos por  $C_{\bar{B}\Gamma}$ , de  $\bar{B}(\Gamma(u, 2n))$  a la CDGAC-álgebra

$$E(\sigma(u), 2n + 1) \otimes (\otimes_{i \geq 1} (E(\sigma\gamma_{p^i}(u), 2np^i + 1) \tilde{\otimes}^{\chi_p} \Gamma(\varphi_p\gamma_{p^{i-1}}(u), 2np^i + 2))),$$

donde la diferencial  $\chi_p$  viene definida por la fórmula

$$\chi_p(\varphi_p\gamma_{p^{i-1}}(u)) = p\sigma\gamma_{p^i}(u), \quad i \geq 1.$$

El concepto de *descomponibilidad*, a definir a continuación, permitirá distinguir productos torcidos básicos (a fortior, *indescomponibles*) de productos torcidos *compuestos* (i.e., que son productos tensoriales de productos torcidos indescomponibles).

**Definición 3.4.2** [155, 22] Un producto torcido  $PT = \tilde{\otimes}_{i \in I}^{\rho} A_i$  se dice *descomponible* si existe una partición no trivial de  $I$ ,  $I = I_1 \cup I_2$ , de modo que  $PT$  se descompone en un producto tensorial de dos productos torcidos  $PT_1 = \tilde{\otimes}_{i \in I_1}^{\rho_1} A_i$  y  $PT_2 = \tilde{\otimes}_{i \in I_2}^{\rho_2} A_i$ , con  $\rho_m = \rho|_{PTT_m}$  para  $m = 1, 2$ . En caso contrario,  $PT$  se dice que es *indescomponible*, de longitud  $\ell$  (o  $\ell$ -*indescomponible*, donde  $\ell$  es el cardinal del conjunto de índices  $I$ ).

El teorema anterior establecía un modelo homológico para  $\bar{B}(\Gamma)$  en forma de producto tensorial de un álgebra exterior y productos torcidos 2-indescomponibles de un álgebra exterior y otra de potencias divididas.



A partir de este modelo y progresando adecuadamente sobre el modelo homológico para la 1-homología de CDGAC-álgebras determinado en el Teorema 3.2.5 de la sección anterior, se puede enunciar el siguiente resultado.

**Teorema 3.4.3** [155, 22] *Consideremos  $\mathbb{Z}_{(p)}$  como anillo base. Existe un contracción de álgebras semicompleta de la construcción Bar de un producto torcido  $A$   $\ell$ -indescomponible (con  $\ell \geq 2$ ) de álgebras exteriores y de potencias divididas a un producto tensorial  $H$  de productos torcidos  $k$ -indescomponibles (con  $k \leq \ell$ ) de álgebras exteriores y de potencias divididas (dotadas de su producto natural). Es decir,  $H$  es un modelo homológico minimal de  $A$ .*

*Más aún, a nivel de álgebra graduada se tiene que*

- *cada factor  $E(u, 2n - 1)$  en  $A$  contribuye con un factor  $\Gamma(\sigma(u), 2n)$  en  $H$ .*
- *cada factor  $\Gamma(u, 2n)$  en  $A$  contribuye con factores  $E(\sigma\gamma_{p^i}(u), 2np^i + 1)$  (con  $i \geq 0$ ) y  $\Gamma(\varphi_p\gamma_{p^{i-1}}(u), 2np^i + 2)$  (con  $i \geq 1$ ) en  $H$ .*

De aquí se puede progresar para construir modelos homológicos para el cálculo de la  $n$ -homología de CDGAC-álgebras, mediante complejos procesos de cambios de base.

**Teorema 3.4.4** [155] *Sea  $\mathbb{Z}_{(p)}$  el anillo base,  $m$  un número natural y  $A$  un producto torcido de  $n$  álgebras exteriores y de potencias divididas. Existe una contracción de álgebras semicompleta de la construcción bar iterada  $\bar{B}^m(A)$  a un producto tensorial de productos torcidos  $k$ -indescomponibles de álgebras exteriores y de potencias divididas, con  $k \leq n$ .*

El Corolario 3.1.3 da una alternativa a este método, válido para cualquier anillo  $\Lambda$  cuerpo ó  $\mathbb{Z}$ , de forma que se puede establecer un proceso endogámico en el que la  $n$ -homología de un producto torcido de álgebras exteriores y polinomiales se calcula como la homología de otro producto torcido de álgebras exteriores y polinomiales. Eso sí, uno ha de bajar del nivel de contracciones al nivel de isomorfismos en homología.

En particular, nosotros vamos a centrarnos en el caso  $\Lambda = \mathbb{Z}$ .

Al igual que en el caso  $\Lambda = \mathbb{Z}_{(p)}$ , atendiendo a los teoremas 3.1.1 y 3.2.1 podemos concluir que toda CDGA-álgebra  $A$  sobre  $\mathbb{Z}$  admite un casi-isomorfismo a un producto torcido de álgebras exteriores y polinomiales  $hA$ , que se extiende a un casi-isomorfismo entre las construcciones bares respectivas.

Para calcular la 1-homología de  $A$ , habría que calcular la 0-homología de  $\bar{B}(hA)$ , para lo cual se extendería el Teorema 3.2.5 al caso de  $\Lambda = \mathbb{Z}$ ; de modo que  $\bar{B}(hA)$  admite una contracción a un producto torcido de álgebras exteriores y de potencias divididas  $h^1A$ .

A la hora de calcular la 2-homología de  $A$ , se establecería la contracción  $\bar{B}^2(hA) \Rightarrow \bar{B}(h^1A)$ . Para poder llegar a un nuevo producto torcido de álgebras exteriores y de potencias divididas, tendríamos que establecer un análogo en  $\mathbb{Z}$  del Teorema 3.4.3, en cuanto a la determinación de un modelo para la 1-homología de un álgebra de potencias divididas  $\Gamma$ .

Desafortunadamente, para  $\Lambda = \mathbb{Z}$  la aplicación que da el Corolario 3.1.3 sólo define un isomorfismo en homología, y no constituye la proyección de una verdadera contracción, como ocurre en  $\mathbb{Q}$ .

**Proposición 3.4.5** *Existe una contracción de álgebras completa del producto torcido*

$$h\Gamma = \left( P(v_1) \otimes \left( \otimes_{k \geq 2} (P(v_k) \tilde{\otimes} E(u_k)) \right), d \right),$$

con  $d(u_k) = x_1^k - k!x_k$ , al álgebra de potencias divididas  $\Gamma(w)$ , donde  $|v_k| = k|w|$  y  $|u_k| = k|w| + 1$ .

**Demostración.**

Teníamos un casi-isomorfismo  $f$ , morfismo de DGA-álgebras, definido por  $f(x_i) = \gamma_i(w)$  y  $f(u_i) = 0$ .

Definamos la inyección  $g$  como un morfismo de DGA-álgebras, de modo que  $g(\gamma_i(w)) = \frac{x_1^i}{i!}$ .

Asimismo, definamos  $\phi$  como una homotopía de álgebras (esto es, tal que  $\mu\phi = \mu(1 \otimes \phi + \phi \otimes gf)$ ), por extensión a partir de los datos  $\phi(u_i) = 0$ ,  $\phi(x_1) = 0$  y  $\phi(x_i) = -\frac{u_i}{i!}$ .

Es claro que  $fg = 1$ . Por otro lado, se tiene que

$$(d\phi + \phi d)(x_i) = d\phi(x_i) = -\frac{d(u_i)}{i!} = x_i - \frac{x_1^i}{i!} = (1 - gf)(x_i);$$

y

$$(d\phi + \phi d)(u_i) = \phi d(u_i) = \phi(x_1^i - i!x_i) = -i!\phi(x_i) = u_i = (1 - gf)(u_i).$$

Además, como  $d$  es derivación,  $\phi$  homotopía de álgebras y  $g$  y  $f$  morfismos de DGA-álgebras, esta relación asegura que la identidad  $1 - gf = d\phi + \phi d$  es válida sobre todo  $h\Gamma$ : basta establecer un proceso inductivo en el número de factores que componen el elemento de entrada y razonar sobre las igualdades siguientes

$$\begin{aligned} (d\phi + \phi d)\mu &= d\mu(\phi \otimes gf + 1 \otimes \phi) + \phi\mu(d \otimes 1 + 1 \otimes d) = \\ &= \mu(d\phi \otimes gf - \phi \otimes dgf + d \otimes \phi + 1 \otimes d\phi) + \mu(\phi d \otimes gf - d \otimes \phi + \phi gfd + 1 \otimes \phi d) = \\ &= \mu((d\phi + \phi d) \otimes gf + 1 \otimes (d\phi + \phi d)) = \\ &= \mu((1 - gf) \otimes gf + 1 \otimes (1 - gf)) = \mu(1 \otimes 1 - gf \otimes gf) = (1 - gf)\mu. \end{aligned}$$

Las condiciones adicionales de anulación también se verifican:

- Nótese que del hecho de ser  $\phi$  homotopía de álgebras y  $\phi(v_i) = u_i$ , necesariamente se desprende que  $\phi$  devuelve siempre sumandos con algún factor  $u_i$ . De aquí, el paso para demostrar que  $f\phi = 0$  es inmediato, por ser  $f$  morfismo de DGA-álgebras.
- La relación  $\phi g = 0$  procede de la identidad  $\phi(v_1^i) = 0$ , extensión de  $\phi(v_1) = 0$  por el carácter de homotopía de álgebras de  $\phi$ .
- Por último, la condición  $\phi\phi = 0$  se demuestra así.

Actuando sobre los generadores elementales ( $v_i$  y  $u_i$ ), la composición  $\phi\phi$  resulta ser obviamente nula. Para extender este resultado a cualquier producto de los generadores, basta proceder por inducción en el número de factores que componen el producto y utilizar que  $\phi$  es homotopía de álgebras y las condiciones de anulación previas:

$$\begin{aligned} \phi\phi\mu &= \phi\mu(1 \otimes \phi + \phi \otimes gf) = \mu(1 \otimes \phi + \phi \otimes gf)(1 \otimes \phi + \phi \otimes gf) = \\ &= \mu(1 \otimes \phi\phi - \phi \otimes \phi gf + \phi \otimes gf\phi + \phi\phi \otimes gf gf) = 0. \end{aligned}$$



En conclusión, los datos  $(f, g, \phi)$  conforman una contracción de álgebras completa entre el producto torcido  $h\Gamma$  y  $\Gamma(w)$ . ■

Ahora se podría establecer el análogo en  $\mathbb{Q}$  del Teorema 3.4.1

**Proposición 3.4.6** *Existe un sombrero de contracciones, de CDGA-álgebra principal  $h\Gamma$ , entre  $\bar{B}(\Gamma(w))$  y un producto tensorial  $H$  de un álgebra exterior y productos torcidos 2-indescomponibles de un álgebra exterior y otra de potencias divididas,*

$$E(\sigma(v_1), |w| + 1) \otimes (\otimes_{i \geq 1} (E(\sigma(v_i), i|w| + 1) \tilde{\otimes}^{\rho_i} \Gamma(\sigma(u_i), i|w| + 2))),$$

donde las diferenciales  $\rho_i$  vienen dadas por

$$\rho_i(\sigma(u_i)) = -i!\sigma(v_i), \quad i \geq 1.$$

Más aún, a nivel de álgebra graduada se tiene que

- cada factor  $P(v_i)$  en  $h\Gamma$  contribuye con un factor  $E(\sigma(v_i), i|w| + 1)$  en  $H$ .
- cada factor  $E(u_i)$  en  $h\Gamma$  contribuye con un factor  $\Gamma(\sigma(u_i), i|w| + 2)$ .

### Demostración.

Una de las contracciones del sombrero la da la Proposición 3.4.5.

La segunda de las contracciones, proviene la perturbación  $\delta_d$  que origina  $d$  en la diferencial tensorial de  $\bar{B}(P(v_1) \otimes (\otimes_{i \geq 1} (P(v_i) \otimes E(u_i))))$ , y cómo afecta ésta a la contracción

$$\bar{B}(P(v_1) \otimes (\otimes_{i \geq 1} (P(v_i) \otimes E(u_i)))) \Rightarrow E(\sigma(v_1)) \otimes (\otimes_{i \geq 1} (E(\sigma(v_i)) \otimes \Gamma(\sigma(u_i)))).$$

Este proceso de perturbación según  $\delta_d$  es finito y desemboca en la aparición de una diferencial  $d_\infty = \oplus_{i \geq 1} \rho_i$ , tal como en el Teorema 3.2.5.

Teniendo en cuenta las propiedades de los morfismos de la Proposición 3.4.5, se puede probar de manera sencilla que  $d_\infty(\sigma(v_i)) = 0$  y  $d_\infty(\sigma(u_i)) = -i!\sigma(v_i)$ . ■

Lamentablemente, las proposiciones 3.4.5 y 3.4.6 no aportan información relevante, dado que con coeficientes en  $\mathbb{Q}$ , un álgebra de potencias divididas  $\Gamma(w)$  no es más que un álgebra polinomial  $P(v)$ : basta establecer la relación  $v^i \cong i! \gamma_i(w)$ .

En cualquier caso, cabe observar que el modelo que da la última proposición se aproxima fielmente al modelo que da el Teorema 3.4.1 en el caso de trabajar con coeficientes en  $\mathbb{Z}_{(p)}$ . De hecho, la única diferencia entre ambos se da en los escalares  $p!$  y  $p$  que da la imagen de los generadores por la derivación. Pero esta diferencia en realidad no es tal, teniendo en cuenta que  $p!$  se diferencia de  $p$  en  $\mathbb{Z}_{(p)}$  en el producto por una unidad, a saber  $(p-1)!$ .

El trabajo sobre el anillo  $\Lambda = \mathbb{Z}$  es mucho más complejo. Aunque el Corolario 3.1.3 facilita igualmente un casi-isomorfismo de  $\Gamma$  a un producto torcido de álgebras exteriores y polinomiales, en este caso no se puede extender aparentemente a toda una contracción. En caso de encontrarse una tal contracción, el problema estaría resuelto en los mismos términos que para  $\mathbb{Z}_{(p)}$  ó  $\mathbb{Q}$ .

Una alternativa posible, en términos de isomorfismos en homología en lugar de contracciones, sería determinar un casi-isomorfismo de cualquier producto torcido de álgebras exteriores y de potencias divididas en un producto torcido de álgebras exteriores y polinomiales, por medio del casi-isomorfismo del Corolario 3.1.3. De este modo, el Teorema 3.2.1 concluiría que la construcción bar iterada  $\bar{B}^2(A)$  de cualquier CDGA-álgebra  $A$  admitiría un casi-isomorfismo a un producto torcido de álgebras exteriores y polinomiales asociado.

Evidentemente, este proceso se podría reiterar indefinidamente, hasta alcanzar la  $n$ -homología, para cualquier natural  $n$ , de modo que obtendríamos el resultado siguiente.

**Proposición 3.4.7** *La  $n$ -homología de una CDGAC-álgebra con coeficientes en  $\mathbb{Z}$  admite un casi-isomorfismo a un producto torcido de álgebras exteriores y polinomiales.*

Por otro lado, cabe señalar que la Teoría de Inversiones también se puede aplicar en el cálculo de la  $n$ -homología de una CDGAC-álgebra, independientemente del anillo  $\Lambda$  fijado: la teoría de inversiones concierne a los morfismos  $f_{\bar{B}^\otimes}$ ,  $g_{\bar{B}^\otimes}$  y  $\phi_{\bar{B}^\otimes}$  de la contracción  $C_{\bar{B}^\otimes}$ , cuya expresión general es independiente del anillo base.

### 3.4.2 Paso a resoluciones.

En el inicio del capítulo, nuestro interés era encontrar resoluciones de  $\Lambda$  sobre cualquier CDGAC-álgebra dada  $A$ , con objeto de calcular la información  $n$ -homológica propia de  $A$ . A raíz del trabajo realizado en el capítulo segundo, nos permitimos reducir esta problemática al estudio de contracciones que tuvieran como DG-módulo mayor la construcción bar iterada del álgebra de partida.

En cualquier caso, estas contracciones entre complejos reducidos admiten una extensión al lenguaje de resoluciones que escinden de una resolución bar, tensorizando por el álgebra pertinente y perturbando según la cocadena universal  $\theta$  (ver Proposición 2.4.1 y Lema 2.6.1, ó Teorema 2.4.2, en su caso, del capítulo precedente).

Centrémonos en resoluciones para la determinación de la 1-homología de CDGAC-álgebras.

**Teorema 3.4.8** *Dada una CDGAC-álgebra  $A$ , sea  $hA$  el producto torcido de álgebras exteriores y polinomiales diseñado en el Teorema 3.1.1. Entonces, existe una resolución  $(hA \otimes hBhA, d)$  que escinde de la resolución bar, donde  $hBhA$  es el modelo 1-homológico de  $hA$  determinado por el Teorema 3.2.5. Además, la contracción de comparación entre ambas es semicompleta.*

#### Demostración.

Consideremos la contracción semicompleta que da el Teorema 3.2.5 aplicado a la CDGAC-álgebra  $hA$ ,

$$c : \{\bar{B}(hA), hBhA, f, g, \phi\},$$

con  $hBhA$  producto torcido de álgebras exteriores y de potencias divididas, de modo que:

- cada factor del tipo  $E(u, 2n - 1)$  en  $hA$  contribuye con un factor  $\Gamma(\sigma(u), 2n)$  en  $hBA$ ;
- cada factor del tipo  $P(u, 2n)$  en  $hA$  contribuye con un factor  $E(\sigma(u), 2n + 1)$  en  $hBA$ .

Tensoricemos  $c$  a izquierda por  $hA$ , para obtener

$$C = 1 \otimes c : \{hA \otimes \bar{B}(hA), hA \otimes hBhA, 1 \otimes f, 1 \otimes g, 1 \otimes \phi\}.$$

Para probar que el proceso de perturbación que genera la cocadena universal  $\theta$  en  $C$  es finito, consideraremos la filtración natural que induce en  $hA \otimes \bar{B}(hA)$  la graduación tensorial de  $\bar{B}(hA)$ .

Por un lado, el morfismo  $\theta \cap$  (que es derivación) disminuye este grado de filtración al menos en una unidad, dada la conexión del álgebra  $hA$ . En efecto,

$$\theta \cap (a \otimes [a_1 | \cdots | a_n] = aa_1 \otimes [a_2 | \cdots | a_n],$$

con  $a_1 \in \ker \xi_A$ , de donde  $|a_1| \geq 1$  ( $hA$  conexa) y

$$|a_2| + \cdots + |a_n| \leq |a_1| + \cdots + |a_n| - 1.$$

En cambio,  $1 \otimes \phi$  preserva el grado de filtración: en la demostración del Teorema 3.2.5 vimos que  $\phi$  aumentaba exactamente en una unidad la dimensión simplicial del elemento de entrada, de donde el elemento de salida necesariamente conserva la graduación tensorial del elemento de entrada. Por extensión, asimismo  $1 \otimes \phi$ .

De este modo, la composición  $(1 \otimes \phi)\theta \cap$  disminuye al menos en una unidad el grado de la filtración, lo que garantiza la nilpotencia puntual de tal aplicación y, por ende, la finitud del proceso de perturbación.

Además, por ser  $\theta \cap$  derivación y la contracción  $1 \otimes c$  de partida semicompleta, la contracción de comparación de resoluciones resultante también es semicompleta.

■

### 3.4.3 Comentarios generales.

Vamos a abordar aquí dos cuestiones, cuales son:

- Comparación del trabajo a nivel de resoluciones (digamos, a la Cartan), frente al trabajo a nivel de complejos reducidos (sea a la Eilenberg).
- Aplicaciones fundamentales de la homología de CDGAC-álgebras.

En el Teorema 3.4.8 en caso alguno se dice que la comparación con la resolución bar sea la canónica. De hecho, en general no lo será: ya vimos un par de ejemplos en el capítulo anterior, en relación con resoluciones de  $\mathbb{Z}[\mathbb{Z}]$  y  $\mathbb{Z}[\mathbb{Z}_n]$ .

Esta circunstancia permite establecer un interesante debate, acerca de cuál será el mejor método para la determinación de una resolución en aras de realizar cálculos homológicos concretos.

Fundamentalmente, hay dos vertientes bien diferenciadas.

La primera de ellas, profusamente trabajada por Cartan en los años 50 y 60 y actualmente desarrollada por Lambé, se refiere a la búsqueda de resoluciones canónicas que escindan de la resolución bar. Este método requiere construir una resolución contráctil al anillo base, y genera fórmulas recursivas para los morfismos de la contracción de comparación canónica.

Eilenberg diseñó a comienzos de los 50 un procedimiento alternativo, que consiste en la determinación de una contracción entre los que serán complejos reducidos de las resoluciones a considerar. En este proceso no se generan fórmulas recursivas, pero generalmente intervienen contracciones que encierran una alta complejidad computacional (como la contracción  $C_{\bar{B} \otimes}$ , en nuestro caso).

Es difícil, diríamos incluso improcedente, el decantarse por uno u otro método de forma general. Habría que analizar las circunstancias concretas en cada caso, para elegir el procedimiento más adecuado. Incluso, a veces, un uso inteligente de ambos permite obtener resultados sorprendentes.

El modo en que nosotros hemos abordado el problema del cálculo de la 1-homología de CDGAC-álgebras sigue los pasos de Eilenberg: a partir de contracciones conocidas hemos progresado mediante composición, producto tensorial y perturbación hasta conformar una contracción semicompleta entre los complejos reducidos  $\bar{B}(hA)$  y  $hBhA$ ; y, más aún, una contracción semicompleta entre las resoluciones  $hA \otimes_{\theta} \bar{B}(hA)$  y  $(hA \otimes hBhA, d)$ . A pesar de utilizar la contracción  $C_{\bar{B} \otimes}$ , la teoría de inversiones nos permite reducir notablemente el coste computacional que requiere el realizar cálculos concretos sobre estas contracciones.

Si se quisiera evitar el uso de la contracción  $C_{\bar{B} \otimes}$ , habría que identificar un módulo graduado  $H$  candidato a resolución sobre  $hA$ , y definir convenientemente una estruc-



tura diferencial  $d$  sobre  $H$  de modo que  $(H, d)$  constituyera una resolución de  $\Lambda$  sobre  $hA$  contráctil a  $\Lambda$ . De este modo, los teoremas de comparación de resoluciones 2.5.4 y 2.5.5 facilitarían un sombrero de comparación canónica entre la resolución bar  $B(hA)$  y  $(H, d)$ , que en casos favorables (ver Teorema 2.5.8) se reduciría a una contracción, casicompleta como asegura el Teorema 2.3.2.

Aplicando el Lema 2.6.1 del capítulo segundo, a partir de la contracción de comparación entre la resolución bar  $B(hA)$  y  $(hA \otimes hBhA, d)$  se puede determinar que la resolución  $(hA \otimes hBhA, d)$  es contráctil al anillo base  $\Lambda$ .

Esta resolución contráctil daría lugar a un sombrero de comparación canónica con la resolución bar, que en el mejor de los casos se reduciría a una contracción, a fortiori casicompleta.

En tal caso, tendríamos dos contracciones de comparación entre estas dos resoluciones, en principio la una semicompleta, la otra casicompleta.

Se sabe que la contracción  $C_{\bar{B} \otimes}$  es semicompleta y no completa (ver [21]), aunque se desconoce si casicompleta. Si de hecho fuera casicompleta, la resolución del Teorema 3.4.8 sería asimismo casicompleta, y ambas las contracciones de comparación con la resolución bar serían casicompletas.

Parte del trabajo que nuestra compañera Jiménez está desarrollando en su memoria para optar al grado de doctor, abarca una generalización de la teoría de inversiones, que alcanza los modelos finales  $hA$ , y no sólo la contracción  $C_{\bar{B} \otimes}$ . Esta extensión permite demostrar que la propia contracción  $C_{\bar{B} \otimes}$  es en verdad casicompleta. Más aún, aporta información relevante acerca de las estructuras de coálgebra envueltas en todo este proceso, estructuras que nosotros no hemos atendido y podrían aportar mejoras computacionales en el cálculo de la homología de CDGAC-álgebras. Será ella quien determine toda esta cuestión.

En cuanto a las aplicaciones que se pueden derivar del conocimiento de la 1-homología de CDGAC-álgebras, podemos citar como campos más representativos la Física Cohomológica [159, 160, 92, 106, 107] y el Cálculo Secundario [110, 171].

El primero de ellos, cuyo nombre acuñó Stasheff en [159, 160], se preocupa del tratamiento de ciertos aspectos de la Teoría de Campos, principalmente en lo que concierne a la cuantización [106, 107] de sistemas Gauges y Hamiltonianos [92], desde



el punto de vista del Álgebra Homológica. En este estudio se ven envueltos de forma natural CDGAC-álgebras y sus 1-homologías.

Por su parte, el Cálculo Secundario se preocupa de la algebrización de la teoría de ecuaciones diferenciales no lineales. En particular, el cálculo de la homología de los espacios  $k$ -Jets dados en [110] se puede reducir al de la 1-homología de ciertas CDGAC-álgebras particulares, tal como se indica en [18].

También es posible encontrar otras aplicaciones, fuera de estos dos campos. Por ejemplo, las homologías de Hochschild y Cíclica de CDGAC-álgebras están íntimamente ligadas a la 1-homología de CDGAC-álgebras. Más aún, el trabajo desarrollado aquí acerca de la teoría de inversiones admite una traducción inmediata al contexto de las homologías de Hochschild y Cíclicas, tal como se abordan sus estudios en [14, 155]. Atacaremos este problema en un futuro inmediato.

**Capítulo 4.**  
**Homología de productos  
semidirectos de grupos.**

## Capítulo 4.

# Homología de productos semidirectos de grupos.

### 4.1 Introducción.

La teoría de (co)homología de grupos apareció de la mano de campos hasta entonces bien diferenciados, como eran el Álgebra y la Topología allá por los años 30. Se trata, en verdad, del origen de lo que Cartan y Eilenberg darían en llamar poco después como *Álgebra Homológica* [41].

En estos años Hurewicz se hallaba inmerso en el estudio de los grupos de homotopía  $\pi_n X$  de espacios  $X$  dados, para  $n \geq 2$ . Fue más concretamente en 1935 cuando centró su atención en aquellos espacios conexos por caminos de grupos de homotopía de orden superior todos ellos triviales y grupo fundamental  $\pi = \pi_1 X$  no necesariamente trivial (más comúnmente conocidos como *espacios esféricos*).

Entre otras cosas, Hurewicz [103] demostró que el tipo de homotopía de un espacio esférico  $X$  queda completamente determinado por su grupo fundamental  $\pi$ . Así, los grupos homología de  $X$  dependen sólo de  $\pi$ , lo que llevó en la década de los 40 a referirse a ellos como *grupos de homología de  $\pi$* . La dependencia explícita en función de la cohomología de grupos fue establecida en la década siguiente por Eilenberg y Mac Lane [58, 59] e independientemente por Eckmann [54].

Esta noción de homología de un grupo exige que exista un espacio esférico que tenga por grupo fundamental el grupo dado. Aunque Hurewicz obvió cualquier consideración sobre este asunto, el hecho fundamental es que esta conjetura es cierta, como se probó con la construcción de los llamados *espacios de Eilenberg-Mac Lane*:

nótese que un espacio de Eilenberg-Mac Lane de tipo  $(\pi, 1)$  no es más que un *CW*-complejo conexo con grupo fundamental  $\pi$  y de espacio recubridor universal contráctil. En [21, 8] se realiza un estudio homológico detallado de estos espacios.

Algebraicamente, dado un grupo  $\pi$ , es inmediato comprobar que  $H_0(\pi)$  coincide con el grupo de los enteros,  $\mathbb{Z}$ , y  $H_1(\pi)$  no es más que la abelianización de  $\pi$  (esto es, el grupo cociente  $\pi/[\pi, \pi]$  de  $\pi$  sobre su subgrupo conmutador  $[\pi, \pi]$ ). El problema surge cuando se pretende generalizar esta perspectiva algebraica para grupos de homología de orden superior.

En 1942, siguiendo esta línea, Hopf [95] expresó  $H_2(\pi)$  en términos puramente algebraicos, al demostrar la existencia de la siguiente sucesión exacta a partir de un espacio conexo por caminos  $X$  de grupo fundamental  $\pi$ :

$$\pi_2 X \xrightarrow{h_2} H_2(X) \rightarrow H_2(\pi) \rightarrow 0.$$

Los morfismos  $h_n : \pi_n(X) \rightarrow H_n(X)$  fueron introducidos por Hurewicz anteriormente, resultando ser  $h_n$  isomorfismo si  $\pi_i(X) = 0$  para  $i < n$ . De este modo, la relación hallada por Hopf da una precisa descripción en términos de  $\pi$  del comportamiento sobreyectivo o no de  $h_2$ , dependiendo de que el grupo fundamental  $\pi$  sea o no trivial.

Es más, tomando como presentación del grupo  $\pi$  el cociente de un grupo libre  $F$  sobre un subgrupo normal suyo  $R$ ,  $\pi = F/R$ , entonces resulta que

$$H_2(\pi) = R \cap [F, F]/[R, F],$$

donde  $[A, B]$  denota el subgrupo generado por los elementos de la forma  $[a, b] = aba^{-1}b^{-1}$  para  $a \in A$ ,  $b \in B$ ,  $A, B \subseteq F$ . Este resultado fue alcanzado por Hopf [96] y Freudenthal [75] de forma independiente.

Estos primeros pasos propiciaron que a mediados de los 40, de la mano de Eckmann, Eilenberg-Mac Lane, Freudenthal y Hopf mismo, se tuviera una definición puramente algebraica de la noción de grupo de (co)homología.

La línea de investigación abierta por Hopf acerca de la homología de grupos y la interrelación entre álgebra y topología hizo despertar asimismo el interés por la reinterpretación de los grupos de cohomología, en lo que sería el arranque definitivo del Álgebra Homológica.

Los grupos de cohomología de orden 1, en la forma de *homomorfismos cruzados*, habían sido ya estudiados largo ha. Los grupos de cohomología de orden 2, considerados como *conjuntos de factorización*, llevaban inmersos décadas en los estudios de extensiones de grupos de Schreier [147], Baer [25, 26], Hall [87] y Fitting [71]; mismo Schur en 1902 había definido su *multiplicador*, que no es más que un grupo de cohomología de orden 2. Los grupos de cohomología de tercer orden fueron considerados por vez primera por Teichmüller [167] en un estudio de álgebras simples sobre un cuerpo numérico, y están en relación con los llamados *módulos cruzados*...

En adelante, adoptaremos las notaciones usuales algebraicas  $G$  o  $H$  para grupos en lugar de  $\pi$ , de connotaciones más topológicas (espacios de Eilenberg-Mac Lane).

En la actualidad, se acepta como definición formal que la homología (entera) de un grupo dado  $G$  es la homología (entera) del álgebra libre asociada de base  $G$  con coeficientes en  $\mathbb{Z}$ ,  $H_*(G) = H_*(\bar{B}(\mathbb{Z}[G]))$ . De esta manera, recuperamos todas las herramientas propias del Álgebra Homológica desarrolladas en los capítulos anteriores con respecto a la homología de álgebras. Y, por tanto, el cálculo homológico se puede reducir al establecimiento de contracciones entre complejos reducidos de resoluciones apropiadas.

En particular, el teorema de comparación de resoluciones se puede leer como un análogo algebraico del teorema de Hurewicz, en tanto en cuanto el primero asegura la unicidad salvo homotopía de resoluciones proyectivas de un complejo dado, y el segundo la unicidad salvo homotopía de espacios esféricos con grupos fundamentales prefijados.

De hecho, la definición de homología de un grupo  $G$  como la homología del complejo coinvariante asociado a cualquier resolución proyectiva de  $\mathbb{Z}$  sobre  $\mathbb{Z}[G]$  tiene sentido, gracias al propio teorema de comparación de resoluciones. En particular, la resolución bar da lugar a la definición que inicialmente tomamos. Es precisamente este formato el que permite establecer directamente el isomorfismo que apuntáramos al comienzo de la introducción, existente entre el primer grupo de cohomología de  $G$  y el abelianizado de  $G$ .

La obtención de resoluciones libres “económicas” de grupos abelianos (económicas en el sentido de que los cálculos homológicos que requieran puedan ser efectuados ciertamente en la práctica), es un problema que ha sido tratado de forma intensa en

las últimas décadas ([57, 63, 40, 41, 100]. Con la aparición de la Teoría de Perturbación Homológica ([152, 34, 85, 81, 82, 102, 148, 141]), otros grupos discretos comenzaron a ser tratados. En [117], Lambe y Stasheff describen un método para calcular la homología de extensiones centrales de grupos. Este método ya ha sido ampliado para el caso de grupos nilpotentes libres de torsión finitamente generados ([117, 112, 113]) y  $p$ -grupos finitos ([114, 78]). Utilizando un proceso de perturbación paralelo, en [98, 99] y [101] Hucbschmann se interesa, respectivamente, por el problema del cálculo de la homología de grupos nilpotentes finitamente generados de dos pasos y grupos metacíclicos.

Más concretamente, en [117] se factoriza un modelo simplicial  $\bar{W}(E)$  del espacio clasificante de una extensión central de grupos  $E$  en forma de producto cartesiano torcido. La aplicación del Teorema de Eilenberg-Zilber Torcido, algunas propiedades de anulación de la cocadena de torsión asociada y la existencia de un modelo homológico para el grupo de enteros  $\mathbb{Z}$  permiten finalmente construir una resolución pequeña para grupos nilpotentes libres de torsión finitamente generados.

En este capítulo queremos dar una respuesta para el caso de productos semidirectos de grupos abelianos. Organizamos el trabajo como sigue.

La segunda sección comienza recogiendo los estudios de [10, 14, 11, 12, 21, 2] en los que se caracteriza un pequeño modelo homológico de un producto semidirecto de grupos  $A \times_{\chi} G$ , con  $A$  abeliano y  $G$  finito abeliano (Teorema 4.2.4). Este proceso funciona así. Primero, se descompone el grupo simplicial  $\bar{W}(A \times_{\chi} G)$  como un producto cartesiano torcido de la forma  $\bar{W}(A) \times_{\tau} \bar{W}(G)$ . A partir de aquí, utilizando técnicas de perturbación similares a las empleadas en [117], es factible definir una resolución a nivel de complejos reducidos para el producto semidirecto de partida. La dificultad que esconde este resultado estriba en encontrar la filtración adecuada que permite que los procesos de perturbación utilizados en el transcurso de su demostración sean finitos: la filtración que definimos nosotros difiere sustancialmente de la utilizada en [117]; dado que la validez de esta última dependía de unas condiciones adicionales a verificar por la función de torsión  $\tau$ , que no se dan en el caso particular que nos lleva, del producto semidirecto de grupos. Este procedimiento difiere de los empleados en [168] o [166] para el cálculo de la cohomología de ciertos productos semidirectos.

En este capítulo se pretende extender este trabajo al caso en que  $G$  sea abeliano, aunque no necesariamente finito.

En [11, 21] se trató de progresar en este sentido, pero el modelo homológico de  $\mathbb{Z}[\mathbb{Z}]$  que Eilenberg y Mac Lane proveen en [63] no resultaba compatible con la filtración diseñada en el proceso anterior.

A partir del trabajo realizado en el capítulo 2 en lo que a complejos reducidos y resoluciones se refiere, aquí estableceremos un método para transformar este modelo homológico en una resolución contráctil a  $\mathbb{Z}$  que escinde de la resolución bar de  $\mathbb{Z}[\mathbb{Z}]$ , aunque no según la contracción de comparación canónica; posteriormente, construiremos la resolución de  $\mathbb{Z}[\mathbb{Z}]$  que provee la contracción de comparación canónica y demostraremos que esta resolución sí da morfismos compatibles con la filtración anterior (Proposición 4.2.5). En conclusión, se determinará un modelo homológico para productos semidirectos de grupos abelianos no necesariamente finitos, con acción de grupos (Teorema 4.2.6).

Posteriormente, siguiendo unos argumentos similares a los de la *teoría de inversiones* desarrollada en el capítulo anterior, se consigue una fórmula explícita de la diferencial en los modelos encontrados, que simplifica la primigenia (Teorema 4.2.7). Facilitamos, asimismo, una tabla comparativa que refleja la mejora en el tiempo que consume la evaluación de la diferencial.

Sirviéndonos una vez más de técnicas de perturbación, en la sección tercera establecemos resoluciones que escinden de la resolución bar de estos productos semidirectos (Teorema 4.3.1), fundamentándonos en los teoremas 2.4.4 y 2.4.3 del capítulo segundo.

Atendiendo a las aplicaciones, nos introduciremos en el campo de la teoría de desarrollo cocíclico de diseños; de modo que a partir de la homología de productos semidirectos  $A \times_{\chi} G$  en dimensiones 2 y 3, obtendremos un algoritmo para generar matrices cocíclicas sobre  $A \times_{\chi} G$ . En particular, de entre ellas se podrán determinar aquellas que eventualmente sean matrices de Hadamard, con objeto de construir códigos binarios no lineales correctores de errores, óptimos según las cotas de Plotkin. Nótese que el conocer métodos de elaboración de códigos de detección de errores es de una importancia capital hoy día, dado el desarrollo actual de las comunicaciones (piénsese en la telefonía móvil, comunicaciones vía satélite, etc.).

Esta sección se subdivide en tres partes: la primera se preocupa de cubrir las generalidades de matrices de Hadamard, y las interrelaciones de éstas con diseños





combinatorias y códigos correctores de errores; en la segunda, se detalla el funcionamiento del método de Horadam y de Launey [52] para la determinación de un conjunto de generadores del grupo de matrices cocíclicas sobre un grupo finito; finalmente, en la tercera parte, progresando sobre las ideas dadas por Horadam y de Launey en [52, 53] y el Teorema 4.4.14, establecemos un algoritmo particular (Algoritmo 4.4.15) para el cálculo de un sistema de generadores de matrices cocíclicas sobre productos semidirectos  $A \times_{\chi} G$  con  $A$  y  $G$  abelianos finitos y  $\chi$  acción de grupos.

Este método se puede tomar como una alternativa a los trabajos de Flannery [73, 74] (sobre grupos metacíclicos) y Grabmeier-Lambe [78] (sobre  $p$ -grupos finitos), para grupos con modelos homológicos conocidos. Recientemente, ha sido aceptada su publicación en la forma [4].

## 4.2 Modelos homológicos para $A \times_{\chi} G$ .

En esta sección nos preocupamos por encontrar un “modelo homológico” para un producto semidirecto de grupos  $A \times_{\chi} G$ , con  $A$  y  $G$  abelianos.

La utilización de los clasificantes algebraico y geométrico y la contracción semi-completa  $C_{\bar{W}-\bar{B}}$  entre  $\bar{W}_N(K)$  y  $\bar{B}_N(K_N)$  relacionando clasificante algebraico de un álgebra simplicial y construcción Bar del álgebra diferencial graduada correspondiente, permiten el diseño de una maquinaria de cálculo de la homología de ciertos grupos, por medio de la Teoría de Perturbación Homológica.

De hecho, dado un grupo simplicial reducido  $G$ , el procedimiento consiste en los siguientes pasos:

1. Mediante el isomorfismo descrito en [83], se pasa de  $C_*(\bar{W}^g(G))$  a  $\bar{W}(C_*(G))$ .
2. Se aplica la contracción que liga  $\bar{W}(C_*(G))$  con  $\bar{B}(C_*(G))$ .
3. Se busca algún “modelo homológico” del álgebra  $C_*(G)$  para calcular de la manera más sencilla posible la homología de  $\bar{B}C_*(G)$ .

En el caso particular de los grupos discretos, el proceder es sustancialmente distinto, en tanto en cuanto los grupos simpliciales asociados no son reducidos. Ahora

bien, el análisis detenido de la construcción de la equivalencia de homotopía  $C_{\bar{W}-\bar{B}}$  muestra que en grado simplicial 1 los morfismos de la contracción se comportan como isomorfismos, en realidad; luego en el caso de un grupo discreto  $G$ , resulta que  $C_*(\bar{W}^g(G))$  es canónicamente isomorfo a  $\bar{B}(C_*(G))$ , por lo que el procedimiento a seguir se reduce al paso 3 anterior.

Este es el camino que vamos a seguir para establecer la homología de los productos semidirectos de grupos.

Recordemos que, dados dos grupos  $A$  y  $G$  y una acción  $\chi : G \times A \rightarrow A$  de  $G$  en  $A$ , el *producto semidirecto*  $A \times_{\chi} G$  de  $A$  y  $G$  consiste en el grupo resultante de considerar en  $A \times_{\chi} G$  la operación producto definida por la regla:

$$(a, g) \cdot (a', g') = (a + \chi(g, a'), g + g').$$

La acción  $\chi$  conforma una *acción de grupos* cuando verifica que

$$\chi(g, a + a') = \chi(g, a) + \chi(g, a') \quad \forall g \in G, a, a' \in A.$$

Para simplificar la lectura en lo que sigue, notaremos  $\chi(g, a)$  simplemente por  $ga$ .

Un ejemplo clásico de producto semidirecto de grupos lo conforma el *grupo dihédrico*  $D_{2m} = \mathbb{Z}_m \times_{\chi} \mathbb{Z}_2$ , para  $m \geq 2$ , con  $\chi(-1, n) = -n$ . En este caso, la acción es además una acción de grupos.

La noción de producto semidirecto admite una generalización al contexto de los grupos simpliciales de forma natural, considerando acciones de grupos en el sentido simplicial.

Es más, teniendo en cuenta la versión simplicial canónica  ${}^sG$  asociada a todo grupo discreto  $G$  (constituida por el propio grupo  $G$  en cada grado y el homomorfismo identidad como único operador de cara y de degeneración), podemos aglutinar toda la información homológica de un producto semidirecto de grupos  $A \times G$  en su versión simplicial  ${}^s(A \times_{\chi} G) = {}^sA \times_{{}^s\chi} {}^sG$ , donde  ${}^s\chi$  denota la acción de  ${}^sG$  en  ${}^sA$  inducida por  $\chi$ . El problema reside, pues, en encontrar un modelo homológico de  $\bar{W}({}^s(A \times_{\chi} G))$ .

Nos vamos a reducir, en principio, al estudio de los productos semidirectos de grupos  $A \times_{\chi} G$ , con  $A$  y  $G$  grupos simpliciales y  $\chi$  acción de grupos.

Consideremos el producto cartesiano torcido  $\bar{W}(A) \times_{\tau} \bar{W}(G)$  definido por la

función de torsión  $\tau_*$ ,

$$\tau_n : \bar{W}_n(G) \rightarrow G_{n-1}, \quad [g_{n-1}, \dots, g_0] \xrightarrow{\tau_n} g_{n-1};$$

con grupo estructural  $G$  de acción  $\kappa$  determinada por

$$\begin{aligned} \kappa : G \times \bar{W}(A) &\longrightarrow \bar{W}(A) \\ (g, [a_{n-1}, \dots, a_0]) &\longrightarrow [g \cdot a_{n-1}, \dots, g \cdot a_0]. \end{aligned}$$

En estas circunstancias, podemos enunciar el siguiente resultado.

**Teorema 4.2.1** [11, 21] *Existe un isomorfismo simplicial*

$$f : \bar{W}(A \times_\chi G) \longrightarrow \bar{W}(A) \times_\tau \bar{W}(G).$$

En verdad,  $f$  viene dado por:

$$\begin{aligned} f_n([a_{n-1}, g_{n-1}], \dots, [a_0, g_0]) = \\ ([g_{n-1}^{-1}a_{n-1}, \dots, \partial_0^{i-1}g_{n-1}^{-1} \cdots \partial_0 g_{n-i+1}^{-1}g_{n-i}^{-1}a_{n-i}, \dots, \partial_0^{n-1}g_{n-1}^{-1} \cdots \partial_0 g_1^{-1}g_0^{-1}a_0], \\ [g_{n-1}, \dots, g_0]). \end{aligned}$$

La aplicación inversa  $f^{-1}$  resulta ser

$$\begin{aligned} f_n^{-1}([a_{n-1}, \dots, a_0], [g_{n-1}, \dots, g_0]) = \\ [(g_{n-1}a_{n-1}, g_{n-1}), \dots, (g_{n-i}\partial_0 g_{n-i+1} \cdots \partial_0^{n-i+1}g_{n-1}a_{n-i}, g_{n-i}), \\ \dots, (g_0\partial_0 g_1 \cdots \partial_0^{n-1}g_{n-1}a_0, g_0)]. \end{aligned}$$

Este resultado técnico es la llave que permite conectar con los estudios realizados a finales de la década pasada por Lambc y Stasheff sobre la homología de fibrados iterados en [117].

Aunque el producto cartesiano torcido  $\bar{W}(A) \times_\tau \bar{W}(G)$  asociado al producto semidirecto de grupos simpliciales  $A \times_\chi G$  no es principal (la acción se efectúa a través del grupo  $G$  y no de  $\bar{W}(G)$ ), la demostración del Teorema 3.5 de [117] se ajusta a nuestras circunstancias, de modo que es posible establecer un modelo homológico para ciertos productos semidirectos de grupos.

**Teorema 4.2.2** [11, 21] *Sea  $A \times_\chi G$  un producto semidirecto de grupos simpliciales de modo que la cocadena de torsión  $t$  en  $\bar{B}(A) \otimes_t \bar{B}(G)$  inducida por  $\tau$  según el teorema de Eilenberg-Zilber torcido se anule actuando sobre elementos de grado 1. En estas circunstancias,  $A \times_\chi G$  tiene un modelo homológico, en función de sendos modelos homológicos de los factores  $A$  y  $G$ .*

**Nota 4.2.3** La condición sobre la cocadena  $t$  fue considerada ya por May en [130], quien apuntó que grupos simpliciales como los reducidos se encuentran entre aquellos que verifican tal premisa.

Esto resuelve la cuestión para aquellos productos semidirectos de grupos simpliciales verificando la condición sobre la cocadena  $t$ . El problema que se nos presenta ahora es que los grupos simpliciales inducidos por los grupos discretos no verifican tal condición, al estar concentrados en grado cero.

Un camino alternativo lo facilita la Teoría de Perturbación Homológica, por medio de los modelos homológicos de  $\mathbb{Z}$  y  $\mathbb{Z}_{p^r}$  expuestos en el capítulo 2, así como el isomorfismo del Teorema 4.2.1.

**Teorema 4.2.4** [11, 21] Sean  $G$  abeliano finito,  $A$  un grupo discreto con modelo homológico  $hA$  y  $\chi : G \times A \rightarrow A$  una acción distributiva. Entonces, el grupo  $A \times_\chi G$  tiene un modelo homológico.

Incluimos la demostración de este resultado, porque a partir de ésta progresaremos para probar una generalización al caso en que  $G$  es abeliano, aunque no necesariamente finito.

### Demostración.

Al ser  $G$  un grupo abeliano finito, tenemos que  $G = \mathbb{Z}_{p_1^{r_1}} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{p_t^{r_t}}$ , con cada  $p_i$  primo y  $r_i$  natural. De este modo, el complejo

$$hG = (\otimes_{i=1}^t (E(u_i, 1) \otimes \Gamma(v_i, 2)), d_{p_1} \otimes 1 \otimes \overset{t-1}{\dots} \otimes 1+1 \otimes d_{p_2} \otimes \overset{t-2}{\dots} \otimes 1+\cdots+1 \otimes \overset{t-1}{\dots} \otimes 1 \otimes d_{p_t})$$

resulta ser un modelo homológico de  $G$ .

Denotemos por  $c_A(f_A, g_A, \phi_A) : C_*(\bar{W}(A)) \Rightarrow hA$  un modelo homológico de  $A$  y consideremos la siguiente relación de contracciones:

- $C_*(\bar{W}(A \times_\chi G)) \cong C_*(\bar{W}(A) \times_\tau \bar{W}(G))$ .
- $C_*(\bar{W}(A) \times_\tau \bar{W}(G)) \Rightarrow C_*(\bar{W}(A)) \otimes_{t(\tau)} C_*(\bar{W}(G))$ .



$$\bullet C_*(\bar{W}(A)) \otimes_{t(\tau)} C_*(\bar{W}(G)) \Rightarrow (hA \otimes hG, d_{hA} \otimes 1 + 1 \otimes d_{hG} + d_{t(\tau)\cap})$$

La primera de ellas consiste en la isocontracción de complejos de cadenas asociada al isomorfismo del Teorema 4.2.1.

La segunda, proviene de aplicar el teorema de Eilenberg-Zilber torcido con función de torsión la aplicación  $\tau$  definida en el isomorfismo precedente. Se puede comprobar que la cocadena de torsión  $t(\tau) : C_*(\bar{W}(G)) \rightarrow C_*(G)$  resultante viene dada por la fórmula

$$t(\tau)[g_{n-1}, \dots, g_0] = \begin{cases} g_0 - e_0, & \text{si } n = 1; \\ 0, & \text{si } n \geq 2. \end{cases}$$

El problema radica en demostrar la parada del proceso de perturbación que define la tercera contracción, tomando como contracción inicial

$$c(f, g, \phi) : C_*(\bar{W}(A)) \otimes C_*(\bar{W}(G)) \Rightarrow hA \otimes hG$$

y como dato de perturbación la diferencial  $t(\tau)\cap$  inducida por la cocadena de torsión  $t(\tau)$  del paso anterior.

La diferencial  $t(\tau)\cap$  viene definida de forma lineal a partir de la relación

$$t(\tau) \cap (g \otimes [g_{n-1}, \dots, g_0]) = (gg_{n-1} - ge_{n-1}) \otimes [g_{n-2}, \dots, g_0].$$

Para comprobar que la composición  $\phi t(\tau)\cap$  es, en efecto, puntualmente nilpotente vamos a definir una filtración particular sobre el complejo  $C_*(\bar{W}(A)) \otimes C_*(\bar{W}(G))$ , que afectará únicamente a los elementos del segundo factor,  $C_*(\bar{W}(G)) = \bar{B}(\mathbb{Z}[\mathbb{Z}_{p_1^{r_1}}] \otimes \dots \otimes \mathbb{Z}[\mathbb{Z}_{p_t^{r_t}}])$ .

Sea  $F_q(C_*(\bar{W}(G)))$  el sub-DG-módulo de  $\bar{B}(\mathbb{Z}[\mathbb{Z}_{p_1^{r_1}}] \otimes \dots \otimes \mathbb{Z}[\mathbb{Z}_{p_t^{r_t}}])$  generado por aquellos elementos homogéneos  $[x_1^1 \otimes \dots \otimes x_1^t] \dots [x_n^1 \otimes \dots \otimes x_n^t]$  con cada  $x_i^j \in \mathbb{Z}_{p_j^{r_j}}$ , de modo que  $\sum_{i,j} x_i^j \leq q$ . Es obvio que la familia  $\{F_q(C_*(\bar{W}(G)))\}_{q \geq 0}$  constituye una filtración del DG-módulo  $C_*(\bar{W}(G))$ .

Definimos ahora una filtración sobre  $C_*(\bar{W}(A)) \otimes C_*(\bar{W}(G))$ , dada por la familia  $\{C_*(\bar{W}(A)) \otimes F_q(C_*(\bar{W}(G)))\}_{q \geq 0}$ . Vamos a demostrar que el operador de homotopía anterior  $\phi$  preserva el grado de esta filtración, mientras que el dato de perturbación  $t(\tau)\cap$  baja en uno dicho grado de filtración, de donde necesariamente su composición  $\phi t(\tau)\cap$  será puntualmente nilpotente.

Teniendo en cuenta que en el complejo normalizado  $\bar{B}(\mathbb{Z}[\mathbb{Z}_{p_1^{r_1}}] \otimes \cdots \otimes \mathbb{Z}[\mathbb{Z}_{p_t^{r_t}}])$  no aparecen tuplas incluyendo los elementos neutros  $0 \in \mathbb{Z}_{p_i^{r_i}}$  (aquellas que los incluyen conforman precisamente los elementos degenerados del complejo sin normalizar), de la fórmula de  $t(\tau) \cap$  es inmediato concluir que esta diferencial disminuye el grado de la filtración en al menos una unidad, dado que

$$t(\tau) \cap (g \otimes [g_{n-1}, \dots, g_0]) = (gg_{n-1} - ge_{n-1}) \otimes [g_{n-2}, \dots, g_0]$$

y  $g_{n-1} > 0$ .

Para ver que el operador de homotopía  $\phi$  preserva el grado de filtración procederemos por inducción sobre el número  $t$  de factores  $\mathbb{Z}_{p_k^{r_k}}$  que componen el grupo  $G$ :

- Caso  $t = 1$ .

Esto significa que la contracción inicial es del tipo

$$c_{t=1}(f_{t=1}, g_{t=1}, \phi_{t=1}) : C_*(\bar{W}(A)) \otimes \bar{B}(\mathbb{Z}[\mathbb{Z}_{p_1^{r_1}}]) \Rightarrow hA \otimes (E(u_1, 1) \otimes \Gamma(v_1, 2)),$$

$$\text{con } f_{t=1} = f_A \otimes f_{\mathbb{Z}_{p_1^{r_1}}}, \quad g_{t=1} = g_A \otimes g_{\mathbb{Z}_{p_1^{r_1}}} \text{ y } \phi_{t=1} = \phi_A \otimes g_{\mathbb{Z}_{p_1^{r_1}}} f_{\mathbb{Z}_{p_1^{r_1}}} + 1 \otimes \phi_{\mathbb{Z}_{p_1^{r_1}}}.$$

Obviamente,  $\phi_A$  “preserva” el grado de filtración, en el sentido de que no afecta a la componente en  $C_*(\bar{W}(G))$ .

Si nos remitimos a las fórmulas de las aplicaciones que definen el modelo homológico de  $\mathbb{Z}_{p^r}$ ,

$$\begin{aligned} f_{\mathbb{Z}_{p^r}}[x_1|y_1|\dots|x_m|y_m] &= [\prod_{i=1}^m s^2(x_i, y_i)] \gamma_m(v), \\ f_{\mathbb{Z}_{p^r}}[x_1|y_1|\dots|x_m|y_m|z] &= [s^1(z) \prod_{i=1}^m s^2(x_i, y_i)] u \gamma_m(v), \end{aligned}$$

$$s^2(i, j) = \begin{cases} 0, & \text{si } i + j < p^r; \\ 1, & \text{si } i + j \geq p^r; \end{cases}$$

$$s^1(i) = i, \quad 0 \leq i < p^r;$$

$$\begin{aligned} g_{\mathbb{Z}_{p^r}}(u) &= [1], \\ g_{\mathbb{Z}_{p^r}}(\gamma_k(v)) &= \sum_{x_1, \dots, x_k \in \mathbb{Z}_{p^r}} [1|x_1|\dots|1|x_k], \\ g_{\mathbb{Z}_{p^r}}(u\gamma_k(v)) &= \sum_{x_1, \dots, x_k \in \mathbb{Z}_{p^r}} [1|x_1|\dots|1|x_k|1]; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \phi_{\mathbb{Z}_{p^r}} 1 &= 0, \quad \phi_{\mathbb{Z}_{p^r}}[x] = -C(x), \quad \phi_{\mathbb{Z}_{p^r}}[x|y] = -[C(x)|y], \\ \phi_{\mathbb{Z}_{p^r}}[x|y|\sigma] &= -[C(x)|y|\sigma] - s^2(x, y)[\sum_{l \in \mathbb{Z}_{p^r}} [1|l]|\phi_{\mathbb{Z}_{p^r}}\sigma]; \end{aligned}$$

$$C(x) = \sum_{i=0}^{x-1} [1|i];$$

concluimos que ambos  $\phi_{\mathbb{Z}_{p_1^{r_1}}}$  y la composición  $g_{\mathbb{Z}_{p_1^{r_1}}} f_{\mathbb{Z}_{p_1^{r_1}}}$  preservan el grado de la filtración, de donde  $\phi_{t=1}$  también.

La contracción que se obtiene al tomar  $A = \mathbb{Z}_{p_0^{r_0}}$  la notaremos simplemente por  $c_1(f_1, g_1, \phi_1)$ . Aparecerá de forma natural en el caso siguiente.

- Caso  $t = 2$ .

Recordemos la contracción de tipo Eilenberg-Zilber

$$C_{b\otimes}(f_{b\otimes}, g_{b\otimes}, \phi_{b\otimes}) : \bar{B}(\mathbb{Z}[\mathbb{Z}_{p_1^{r_1}}] \otimes \mathbb{Z}[\mathbb{Z}_{p_2^{r_2}}]) \Rightarrow \bar{B}(\mathbb{Z}[\mathbb{Z}_{p_1^{r_1}}]) \otimes \bar{B}(\mathbb{Z}[\mathbb{Z}_{p_2^{r_2}}]),$$

cuyos morfismos vienen dados por

$$f_{b\otimes}[n_1 \otimes z_1 | \cdots | n_m \otimes z_m] = [n_1 | \cdots | n_i] \otimes [z_{i+1} | \cdots | z_m],$$

$$g_{b\otimes}([n_1 | \cdots | n_p] \otimes [z_1 | \cdots | z_q]) = [n_1 \otimes 0 | \cdots | n_p \otimes 0] * [0 \otimes z_1 | \cdots | 0 \otimes z_q],$$

$$\phi_{b\otimes} = \zeta^{-1} SHI\zeta,$$

$$\zeta[n_1 \otimes z_1 | \cdots | n_m \otimes z_m] = [n_1 | \cdots | n_m] \times [z_1 | \cdots | z_m],$$

$$SHI([n_1 | \cdots | n_t] \times [z_1 | \cdots | z_t]) =$$

$$= -\sum_{(\alpha, \beta)} (-1)^{m+sg(\alpha, \beta)} (s_{\beta_q+m} \cdots s_{\beta_1+m} s_{m-1} \partial_{t-q+1} \cdots \partial_t [n_1 | \cdots | n_t] \times \\ \times s_{\alpha_{p+1}+m} \cdots s_{\alpha_1+m} \partial_m \cdots \partial_{m+p-1} [z_1 | \cdots | z_t]),$$

con  $m = t - p - q$ ,  $sg(\alpha, \beta) = \sum_{i=1}^p (\alpha_i - (i-1))$ ,  $0 \leq q \leq t-1$ ,  $0 \leq p \leq t-q-1$  y  $(\alpha, \beta) \in \{(p+1, q)\text{-shuffles}\}$ .

En el caso que nos lleva, atendiendo a la homotopía de la composición de contracciones, resulta que

$$\phi_{t=2} = 1 \otimes (g_{b\otimes} (1 \otimes \phi_{\mathbb{Z}_{p_2^{r_2}}} + \phi_{\mathbb{Z}_{p_1^{r_1}}} \otimes g_{\mathbb{Z}_{p_1^{r_1}}} f_{\mathbb{Z}_{p_1^{r_1}}}) f_{b\otimes} + \phi_{b\otimes}) + \phi_{hA} \otimes g_{b\otimes} (g_{\mathbb{Z}_{p_1^{r_1}}} f_{\mathbb{Z}_{p_1^{r_1}}} \otimes g_{\mathbb{Z}_{p_2^{r_2}}} f_{\mathbb{Z}_{p_2^{r_2}}}) f_{b\otimes}.$$

Ya vimos que las aplicaciones  $\phi_A$ ,  $\phi_{\mathbb{Z}_{p_i^{r_i}}}$  y  $g_{\mathbb{Z}_{p_i^{r_i}}} f_{\mathbb{Z}_{p_i^{r_i}}}$  preservan el grado de filtración. Por otro lado, atendiendo a las fórmulas que los definen, resulta que:

- $f_{b\otimes}$  escoge parte de los elementos de partida;
- $g_{b\otimes}$  los mezcla;
- $\phi_{b\otimes}$  aumenta en uno el tamaño de la tupla inicial y eventualmente suma elementos que la componen, pero exclusivamente añade elementos neutros ( $0 \in \mathbb{Z}_{p_i^{r_i}}$ ), a través de los operadores de degeneración que actúan en  $SHI$ .

Por tanto  $\phi_{t=2}$  preserva asimismo el grado de filtración. Nótese que

$$\phi_{t=2} = 1 \otimes (\phi_{b_{\otimes}} + g_{b_{\otimes}} \phi_1 f_{b_{\otimes}}) + \phi_A \otimes g_{b_{\otimes}} g_1 f_1 f_{b_{\otimes}}.$$

Esta formulación se puede generalizar al caso de  $\phi_{t=i}$ , lo que facilitará la demostración final de la preservación del grado de filtración.

- Caso  $t = p$  en función del caso  $t = p - 1$ .

Prácticamente, se reduce a una argumentación similar a la del caso anterior. En efecto, el operador de homotopía  $\phi_{t=p}$  viene dado en función de la contracción  $c_{p-1}(f_{p-1}, g_{p-1}, \phi_{p-1})$  obtenida al particularizar  $c_{t=p-1}$  para  $A = \mathbb{Z}_{p_0}^{\tau_0}$ , en la forma

$$\phi_{t=p} = 1 \otimes (\phi_{b_{\otimes}} + g_{b_{\otimes}} \phi_{p-1} f_{b_{\otimes}}) + \phi_A \otimes g_{b_{\otimes}} g_{p-1} f_{p-1} f_{b_{\otimes}}.$$

Dado que  $\phi_{p-1}$ ,  $g_{p-1} f_{p-1}$ ,  $\phi_A$  y  $\phi_{b_{\otimes}}$  ya vimos que preservaban el grado de filtración y el comportamiento de  $f_{b_{\otimes}}$  y  $g_{b_{\otimes}}$ , finalmente podemos deducir que  $\phi_{t=p}$  tampoco aumenta el grado de filtración.

En definitiva, la homotopía  $\phi$  respeta el grado de filtración, mientras que la perturbación  $t(\tau) \cap$  lo disminuye. Concluimos que la composición de ambos es puntualmente nilpotente, por lo que el proceso de perturbación converge para dar un modelo homológico de  $A \times_{\chi} G$ .

■

Nótese que para otros productos semidirectos  $A \times_{\chi} G$  con  $A$  y  $G$  grupos con modelos homológicos conocidos, el único paso que hay que verificar para poder construir un modelo para  $A \times_{\chi} G$ , es precisamente la existencia de una filtración que asegure que el último proceso de perturbación de la demostración del teorema anterior sea finito.

En [11, 21] se trató de extender este resultado al caso de productos semidirectos con  $G$  abeliano, no necesariamente finito.

Todo se reducía a encontrar un modelo homológico para  $\mathbb{Z}[\mathbb{Z}]$ ,

$$c : \{\bar{B}(\mathbb{Z}[\mathbb{Z}]), h\mathbb{Z}, f, g, \phi\},$$





de modo que  $\phi$  respctase el grado de la filtración  $\{C_*(\bar{W}(A)) \otimes F_q(C_*(\bar{W}(G)))\}_{q \geq 0}$  considerada en la demostración del teorema anterior.

Lamentablemente, el modelo homológico  $C_{\mathbf{z}} : (f_{\mathbf{z}}, g_{\mathbf{z}}, \phi_{\mathbf{z}})$  para  $\mathbb{Z}[\mathbb{Z}]$  que definieran Eilenberg y Mac Lane en [63] (ver capítulo 2), no satisface esta condición, dado que

$$\phi_{\mathbf{z}}([n_1 | \dots | n_k]) = \begin{cases} - \sum_{i=1}^{n_1-1} [1 | i | n_2 | \dots | n_k], & \text{si } n_1 > 1; \\ 0, & \text{si } n_1 = 1, 0; \\ \sum_{i=1}^{|n_1|} [1 | -i | n_2 | \dots | n_k], & \text{si } n_1 < 0; \end{cases}$$

y para valores negativos de  $n_1$  el grado de filtración aumenta en 1 (con el sumando  $[\bar{1} | \bar{n}_1 | \bar{n}_2 | \dots | \bar{n}_k]$ ).

Aún así, sobre esta contracción se puede progresar hasta llegar a definir otra cuyo operador de homotopía sí conservará el grado de filtración.

Para ello, primero extendemos la contracción a una contracción de comparación con la resolución bar, procediendo como en el Lema 2.8.1: se tensoriza por  $\mathbb{Z}[\mathbb{Z}]$  y luego se perturba por la cocadena universal  $\theta$ .

De este modo, se obtiene una resolución  $(\mathbb{Z}[\mathbb{Z}] \otimes E(u), d)$  con

$$d = (1 \otimes f_{\mathbf{z}})\theta \cap (1 \otimes 1 - (1 \otimes \phi_{\mathbf{z}})\theta \cap + \dots)(1 \otimes g_{\mathbf{z}}).$$

La perturbación  $\theta \cap$  actúa de la siguiente forma:

$$\theta \cap (m\bar{n} \otimes [\bar{n}_1 | \dots | \bar{n}_p]) = m(n + \bar{n}_1 - \bar{n}) \otimes [\bar{n}_2 | \dots | \bar{n}_p],$$

de modo que define una derivación, por lo que la contracción perturbada es semicompleta, con  $d_{\infty}$  asimismo derivación.

Así, tenemos que:

- $d_{\infty}(\bar{1}) = 0 = 0$ .
- $d_{\infty}(1 \otimes u) = \bar{1} - \bar{0}$ .

Resulta que el morfismo  $t : \mathbb{Z}[\mathbb{Z}] \otimes E(u)$  dado por  $t(\bar{n}u) = 0$  y

$$t(\bar{n}) = \begin{cases} (\overline{n-1} + \cdots + \bar{0}) \otimes u, & \text{si } n > 0, \\ 0, & \text{si } n = 0, \\ (\overline{n+1} + \cdots + \bar{0}) \otimes u, & \text{si } n < 0; \end{cases}$$

hace de la resolución una contráctil a  $\mathbb{Z}$  [114].

**Proposición 4.2.5** *Existe una contracción de comparación canónica entre la resolución bar y  $(\mathbb{Z}[\mathbb{Z}] \otimes E(u), d)$ , contráctil a  $\mathbb{Z}$  según  $t$ .*

**Demostración.**

Obsérvese ahora que  $dt|_E = 0$ , puesto que  $dt(u) = dt(\bar{0} \otimes u) = 0$ .

Así, según el Teorema 2.5.8 del capítulo 2, esta resolución admite una contracción de comparación canónica con la resolución bar. ■

Los morfismos  $\mathbb{Z}[\mathbb{Z}]$ -lineales de comparación canónica vendrán dados por las definiciones recursivas (2.1) y (2.2) del capítulo 2,

$$g = sgd, \quad f([\bar{b}_1]) = t(b_1), \quad f[b_1 | \cdots | b_n] = t(b_1 \otimes f([b_2 | \cdots | b_n])),$$

$$\phi|_{|\cdot|=0} = 0, \quad \phi([b_1 | \cdots | b_n]) = - \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i [b_1 | \cdots | b_i | sgf([b_{i+1} | \cdots | b_n])].$$

En particular, se tiene que

- $f([\bar{n}]) = t(\bar{n}) \otimes u$  y cero en otro caso.
- $g(u) = [\bar{1}]$ .
- 

$$\phi([\bar{n}_1 | \cdots | \bar{n}_k]) = \begin{cases} (-1)^k \sum_{i=1}^{n_k-1} [\bar{n}_1 | \cdots | \bar{n}_{k-1} | \bar{i} | \bar{1}], & \text{si } n_k > 1, \\ 0, & \text{si } n_k = -1, 0, 1, \\ (-1)^k \sum_{i=1}^{-1-n_k} [\bar{n}_1 | \cdots | \bar{n}_{k-1} | \bar{-i} | \bar{1}], & \text{si } n_k < -1. \end{cases}$$



Tensorizando ahora a izquierda por  $\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}[\mathbb{Z}]}$ , obtenemos una contracción de comparación canónica  $c : (\bar{f}, \bar{g}, \bar{\phi})$  entre los complejos reducidos, con  $\bar{g} = g|_E$ ,  $\bar{\phi} = \phi|_B$  y  $f([\bar{n}]) = nu$ .

Luego, a partir de la contracción  $C_{\mathbb{Z}}$ , hemos conseguido construir otra contracción  $c$  entre los complejos reducidos, en las que los morfismos proyección e inyección permanecen inalterados, pero no así el operador de homotopía.

El hecho fundamental es que con esta nueva contracción, se puede demostrar la validez del teorema anterior para el caso de  $G$  abeliano no necesariamente finito.

**Teorema 4.2.6** Sean  $G$  un grupo abeliano, no necesariamente finito,  $A$  un grupo con modelo homológico conocido  $hA$  y  $\chi : G \times A \rightarrow A$  una acción de grupos. Entonces, el grupo  $A \times_{\chi} G$  tiene un modelo homológico.

### Demostración.

El caso  $G$  finito constituye el teorema anterior. Probemos aquí el caso en el que  $G$  es abeliano, pero infinito.

De este modo,  $G = \mathbb{Z}_{n_1} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_{n_k} \oplus \mathbb{Z}^v$ . Un modelo homológico para  $G$  se puede obtener a partir de modelos homológicos de cada uno de los sumandos anteriores.

Un modelo para  $\mathbb{Z}_n$  viene dado por la contracción  $C_{\mathbb{Z}_n}$ . Como modelo para  $\mathbb{Z}$  tomamos la contracción  $c$  anterior, en lugar de  $C_{\mathbb{Z}}$ .

Aplicando el Teorema de Eilenberg-Zilber y tensorizando las contracciones anteriores de forma reiterada, se obtiene un modelo para  $G$ , en forma de la contracción

$$C_G : \{\bar{B}(\mathbb{Z}[G]), (\otimes_{i=1}^k (E(u_i, 1) \otimes^{\rho_{n_i}} \Gamma(w_i, 2)) \otimes E(u_{k+1}, \dots, u_{k+v}), 0), f_G, g_G, \phi_G\},$$

con

$$f_G = (f_{\mathbb{Z}_{n_1}} \otimes \cdots \otimes f_{\mathbb{Z}_{n_k}} \otimes f \cdot \overset{v}{\cdots} \cdot f)(1^{\otimes k+v-2} \otimes f_{\bar{B} \otimes}) \cdots f_{\bar{B} \otimes},$$

$$g_G = g_{\bar{B} \otimes} \cdots (1^{\otimes k+v-2} \otimes g_{\bar{B} \otimes})(g_{\mathbb{Z}_{n_1}} \otimes \cdots \otimes g_{\mathbb{Z}_{n_k}} \otimes g \cdot \overset{v}{\cdots} \cdot g),$$

$$\phi_G = \sum_{i=0}^{v+k-2} (1^{\otimes i} \otimes g_{\bar{B} \otimes})(1^{\otimes i} \otimes \phi_{\bar{B} \otimes})(1^{\otimes i} \otimes f_{\bar{B} \otimes}) +$$

$$+ g_{\bar{B} \otimes} \cdots (1^{\otimes k+v-2} \otimes g_{\bar{B} \otimes}) \sum_{i=0}^{v+k-1} (g_{\mathbb{Z}_{n_1}} f_{\mathbb{Z}_{n_1}} \otimes \cdots \otimes g_{\mathbb{Z}_{n_i}} f_{\mathbb{Z}_{n_i}} \otimes \phi_{\mathbb{Z}_{n_{i+1}}} \otimes 1^{\otimes v+k-i-1})(1^{\otimes v+k-2} \otimes f_{\bar{B} \otimes}) \cdots f_{\bar{B} \otimes}$$

Sea  $F_q(C_*(\bar{W}(G)))$  el sub-DG-módulo de  $\bar{B}(\mathbb{Z}[\mathbb{Z}_{n_1}] \otimes \cdots \otimes \mathbb{Z}[\mathbb{Z}_{n_k} \otimes \mathbb{Z}^v])$  generado por aquellos elementos homogéneos  $[x_1^1 \otimes \cdots \otimes x_1^{k+v} | \cdots | x_n^1 \otimes \cdots \otimes x_n^{k+v}]$  con cada  $x_i^j \in \mathbb{Z}_{n_j}$  para  $1 \leq j \leq k$ , y  $x_i^j \in \mathbb{Z}$  para  $k+1 \leq j \leq k+v$ ; de modo que  $\sum_{i,j} |x_i^j| \leq q$ . Es obvio que la familia  $\{F_q(C_*(\bar{W}(G)))\}_{q \geq 0}$  constituye una filtración del DG-módulo  $C_*(\bar{W}(G))$ , que coincide con la dada en el teorema anterior en el caso de que  $v = 0$ .

Definimos ahora una filtración sobre  $C_*(\bar{W}(A)) \otimes C_*(\bar{W}(G))$ , dada por la familia  $\{C_*(\bar{W}(A)) \otimes F_q(C_*(\bar{W}(G)))\}_{q \geq 0}$ .

Con esta filtración es fácil concluir la tesis del teorema, puesto que la demostración del teorema anterior se extiende al caso de  $G$ .

El motivo es que el operador de homotopía  $\phi_G$  ahora sí preserva el grado de la filtración, por hacerlo cada  $\phi_{\mathbb{Z}_{n_i}}$  y el propio  $\phi$ .

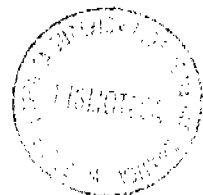
■

Supongamos que los datos de entrada son sendos grupos finitos  $A = \mathbb{Z}_{n_1} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{n_t}$  y  $G = \mathbb{Z}_{m_1} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{m_k}$ , y una acción de grupos  $\chi$ .

Una expresión explícita para la diferencial  $d_\infty$  viene dada por

$$\begin{aligned}
 d &= \left( \sum_{i=0}^{t-1} 1^{\otimes i} \otimes d_{n_{i+1}} \otimes 1^{\otimes t-i-1} \right) \otimes 1^{\otimes k} + 1^{\otimes t} \otimes \left( \sum_{i=0}^{k-1} 1^{\otimes i} \otimes d_{m_{i+1}} \otimes 1^{\otimes k-i-1} \right) + \\
 &+ [(f_{n_1} \otimes \cdots \otimes f_{n_t})(1^{\otimes t-2} \otimes f_{\bar{B}\otimes}) \cdots f_{\bar{B}\otimes}] \otimes [(f_{m_1} \otimes \cdots \otimes f_{m_k})(1^{\otimes k-2} \otimes f_{\bar{B}\otimes}) \cdots f_{\bar{B}\otimes}] t \cap \circ \\
 &\sum_{i \geq 0} [(1^{\otimes t} \otimes g_{\bar{B}\otimes} \cdots (1^{\otimes k-2} \otimes g_{\bar{B}\otimes}) \sum_{j=0}^{k-1} (g_{m_1} f_{m_1} \otimes \cdots \otimes g_{m_j} f_{m_j} \otimes \phi_{m_{j+1}} \otimes 1^{\otimes k-j-1}) (1^{\otimes k-2} \otimes f_{\bar{B}\otimes}) \cdots f_{\bar{B}\otimes} + \\
 &+ 1^{\otimes t} \sum_{j=0}^{k-2} g_{\otimes} \cdots (1^{\otimes j-1} \otimes g_{\bar{B}\otimes}) (1^{\otimes j} \otimes \phi_{\bar{B}\otimes}) (1^{\otimes j-1} \otimes f_{\bar{B}\otimes}) \cdots f_{\bar{B}\otimes} + [\sum_{j=0}^{t-2} g_{\bar{B}\otimes} \cdots (1^{\otimes j-1} \otimes g_{\bar{B}\otimes}) (1^{\otimes j} \otimes \phi_{\bar{B}\otimes}) (1^{\otimes j} \\
 &+ g_{\bar{B}\otimes} \cdots (1^{\otimes t-2} \otimes g_{\bar{B}\otimes}) \sum_{j=0}^{t-1} (g_{n_1} f_{n_1} \otimes \cdots \otimes g_{n_j} f_{n_j} \otimes \phi_{n_{j+1}} \otimes 1^{\otimes t-j-1}) (1^{\otimes t-2} \otimes f_{\bar{B}\otimes}) \cdots f_{\bar{B}\otimes}] \\
 &\otimes [g_{\bar{B}\otimes} \cdots (1^{\otimes k-2} \otimes g_{\bar{B}\otimes}) (g_{m_1} f_{m_1} \otimes \cdots \otimes g_{m_k} f_{m_k}) (1^{\otimes k-2} \otimes f_{\bar{B}\otimes}) \cdots f_{\bar{B}\otimes}] t \cap]^i \cdot (-1)^i \circ \\
 &\circ [g_{\bar{B}\otimes} \cdots (1^{\otimes t-2} \otimes g_{\bar{B}\otimes}) (g_{n_1} \otimes \cdots \otimes g_{n_t}) \otimes g_{\bar{B}\otimes} \cdots (1^{\otimes k-2} \otimes g_{\bar{B}\otimes}) (g_{m_1} \otimes \cdots \otimes g_{m_k})].
 \end{aligned}$$

Esta fórmula admite una simplificación, en términos parecidos a lo que dimos en llamar teoría de inversiones.



**Teorema 4.2.7** *El término*

$$1^{\otimes t} \sum_{j=0}^{k-2} g_{\otimes} \cdots (1^{\otimes j-1} \otimes g_{\bar{B}\otimes}) (1^{\otimes j} \otimes \phi_{\bar{B}\otimes}) (1^{\otimes j-1} \otimes f_{\bar{B}\otimes}) \cdots f_{\bar{B}\otimes}$$

*cancela.*

*Más aún, el sumatorio*

$$1^{\otimes t} \otimes g_{\bar{B}\otimes} \cdots (1^{\otimes k-2} \otimes g_{\bar{B}\otimes}) \sum_{j=0}^{k-1} (g_{m_1} f_{m_1} \otimes \cdots \otimes g_{m_j} f_{m_j} \otimes \phi_{m_{j+1}} \otimes 1^{\otimes k-j-1}) (1^{\otimes k-2} \otimes f_{\bar{B}\otimes}) \cdots f_{\bar{B}\otimes}$$

*se reduce a un sumando.*

**Demostración.**

El morfismo  $t \cap$  siempre elimina una componente en la parte que corresponde a los factores de  $G$ .

Por otro lado, el elemento inicial al que se le aplica el primero de los sumatorios anteriores proviene de un shuffle, y para éste se tiene la siguiente propiedad [62]

$$\begin{aligned} & [a|u_1| \cdots |u_p] \star [b|v_1| \dots |v_q] = \\ & = [a|([u_1| \cdots |u_p] \star [b|v_1| \dots |v_q])] \pm [b|([a|u_1| \cdots |u_p] \star [v_1| \dots |v_q])]. \end{aligned}$$

Así,  $t \cap$  aplicado sobre un shuffle en la parte que corresponde a  $G$  devuelve la suma de otros dos shuffles, sobre los que  $\phi_{\bar{B}\otimes}$  siempre se anula.

Para la segunda propiedad, basta observar que  $\phi_{m_i}$  se anula sobre 1, y sólo la componente en que ha actuado  $t \cap$  puede tener esta entrada distinta de 1, según la definición de los morfismos  $f_{\bar{B}\otimes}$ ,  $g_{\bar{B}\otimes}$ ,  $f_{m_i}$  y  $g_{m_i}$ .

Por tanto, del segundo sumatorio sólo hay que evaluar un sumando, aquel en el que  $\phi_{m_{j+1}}$  actúa sobre la componente recién eliminada por  $t \cap$ ; el siguiente  $t \cap$ , además, también debe actuar en esa misma componente. ■

### 4.3 Resoluciones para $A \times_{\chi} G$ .

Los resultados anteriores se pueden prolongar hasta conectar con  $A_{\infty}$ -estructuras y resoluciones.

**Teorema 4.3.1** *Sea  $A$  y  $G$  grupos abelianos, y  $\chi : G \times A \rightarrow A$  una acción de grupos. Entonces, existe una resolución  $(\mathbb{Z}[A \times_{\chi} G] \otimes H, d)$  que escinde de la resolución bar  $B(\mathbb{Z}[A \times_{\chi} G])$ . Además, esta resolución tiene una estructura de  $A_{\infty}$ -coálgebra, inducida del complejo reducido de la resolución bar.*

#### Demostración.

A la hora de aplicar los resultados anteriores, sólo nos es necesario comprobar que se verifican dos condiciones, a saber:

- La contracción

$$c(f, g, \phi) : C_*(\bar{W}(A \times_{\chi} G)) \Rightarrow H$$

que define el modelo homológico  $H = (hA \otimes hG, d)$  del producto semidirecto  $A \times_{\chi} G$  según el teorema 4.2.4, induce una estructura de  $A_{\infty}$ -coálgebra sobre  $H$ ; esto es, la diferencial simplicial de la construcción cobar de  $\mathbb{Z}[A \times_{\chi} G]$ ,

$$d_s = \sum_{i=1}^* 1^{i-1} \otimes (s^{-1} \otimes s^{-1}) \Delta s \otimes 1^{*-i},$$

produce en la contracción

$$T^a(s^{-1}(C_*(\bar{W}(A \times_{\chi} G)))) \Rightarrow T^a(s^{-1}(H))$$

un proceso de perturbación convergente.

- Existe una contracción entre la resolución bar estándar de  $\mathbb{Z}[A \times_{\chi} G]$  y la resolución libre sobre  $\mathbb{Z}[A \times_{\chi} G]$  que induce  $H$ ; es decir, la cocadena universal  $\theta : \bar{B}(\mathbb{Z}[A \times_{\chi} G]) \rightarrow \mathbb{Z}[A \times_{\chi} G]$  induce un proceso de perturbación convergente de la contracción

$$\mathbb{Z}[A \times_{\chi} G] \otimes \bar{B}(\mathbb{Z}[A \times_{\chi} G]) \Rightarrow \mathbb{Z}[A \times_{\chi} G] \otimes H$$

a la contracción

$$\mathbb{Z}[A \times_{\chi} G] \otimes_{\theta} \bar{B}(\mathbb{Z}[A \times_{\chi} G]) \Rightarrow \mathbb{Z}[A \times_{\chi} G] \otimes_{\theta'} H.$$

Desglosamos la demostración del teorema en seis procesos de perturbación, los tres primeros de los cuales dan una respuesta positiva a la primera cuestión, en tanto en cuanto los restantes a la segunda.

1. Consideremos la contracción

$$T^a(s^{-1}(C_*(\bar{W}(A \times_\chi G)))) \Rightarrow T^a(s^{-1}(C_*(\bar{W}(A) \times_\tau \bar{W}(G))))$$

que induce el isomorfismo simplicial  $f$  del Teorema 4.2.1. El perturbar por la diferencial simplicial de la construcción cobar de  $\mathbb{Z}[A \times_\chi G]$  produce la isocontracción

$$\bar{\Omega}(C_*(\bar{W}(A \times_\chi G))) \Rightarrow \bar{\Omega}(C_*(\bar{W}(A) \times_\tau \bar{W}(G))),$$

dado que la diferencial perturbada  $\delta = T(f)d_sT(f^{-1})$  coincide con la diferencial simplicial de la construcción cobar de  $C_*(\bar{W}(A) \times_\tau \bar{W}(G))$ . Más concretamente,

$$\delta(\{(a_{\tau_0-1}^0, \dots, a_0^0), (g_{\tau_0-1}^0, \dots, g_0^0)\} | \cdots | \{(a_{\tau_n-1}^n, \dots, a_0^n), (g_{\tau_n-1}^n, \dots, g_0^n)\}) = \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{j=1}^{\tau_k-1} (-1)^r$$

2. Sea ahora la contracción

$$T^a(s^{-1}(C_*(\bar{W}(A) \times_\tau \bar{W}(G)))) \Rightarrow T^a(s^{-1}(C_*(\bar{W}(A)) \otimes_t C_*(\bar{W}(G)))).$$

Vcamos que el proceso de perturbación generado por la diferencial  $\delta$  anterior es convergente, esto es, que la composición  $T(SHI_\tau)\delta$  es puntualmente nilpotente. Para ello, definimos la filtración  $F$  sobre  $D = T^a(s^{-1}(C_*(\bar{W}(A) \times_\tau \bar{W}(G))))$  dada por los DG-módulos

$$F_q(D) = \{ \{ \{ (a_{\tau_0-1}^0, \dots, a_0^0), (g_{\tau_0-1}^0, \dots, g_0^0) \} | \cdots | \{ (a_{\tau_n-1}^n, \dots, a_0^n), (g_{\tau_n-1}^n, \dots, g_0^n) \} \} \in D : r$$

Teniendo en cuenta que  $\delta$  no varía la suma de las graduaciones de los elementos de una tupla y que  $g \cdot 0 = 0$ , concluimos que  $\delta$  preserva el grado de filtración. Por otro lado, tenemos que

$$T(SHI_\tau) = 1 \otimes \cdots \otimes SHI_\tau \otimes EML_\tau AW_\tau \otimes \cdots \otimes EML_\tau AW_\tau,$$

donde  $SHI_\tau$ ,  $EML_\tau$  y  $AW_\tau$  son los morfismos que definen la contracción perturbada del teorema de Eilenberg-Zilber torcido según la función de torsión  $\tau$ . Atendiendo a la definición de estas aplicaciones (ver Teorema 1.0.1), se puede comprobar que  $SHI_\tau$  aumenta en 1 la suma de graduaciones de elementos de

la tupla inicial, y al menos en 2 el número de ceros totales, luego disminuye el grado de la filtración en 1; además, la composición  $EML_{\tau}AW_{\tau}$  en caso alguno aumenta el grado de filtración (cuando menos, lo preserva, si es que no lo disminuye en casos concretos: mantiene la suma de graduaciones de los elementos de la tupla inicial, y como mínimo el mismo número de ceros, si es que no los aumenta).

Por tanto, la composición  $T(SHI_{\tau})\delta$  es puntualmente nilpotente por bajar el grado de la filtración en al menos 1 unidad.

Además, la diferencial perturbada

$$d_{\delta} = T(AW_{\tau})\delta \sum_{i \geq 0} ((-1)^i T(SHI_{\tau})\delta)^i T(EML_{\tau})$$

coincide con el morfismo  $T(AW)\delta T(EML)$ , dado que:

- $EML_{\tau} = EML$ : basta observar que  $EML$  traspasa el operador  $(\tau\partial_0, \partial_0) - (\partial_0, \partial_0)$  y la composición  $SHIEML$  es nula.
- $AW_{\tau}EML = AW EML = 1$ , por ser  $SHIEML = 0$ .
- $d_{\delta} = T(AW)\delta T(EML)$ , ya que  $EML$  traspasa  $\delta$ .

Más concretamente, se tiene que  $d_{\delta}$  separa un elemento en la siguiente manera:

$$d_{\delta}([\cdots | \{a_{r_k-1}^k, \dots, a_0^k\} \otimes \{g_{t_k-1}^k, \dots, g_0^k\} | \cdots]) = [\cdots | \{a_{r_k-1}^k, \dots, a_i^k\} \otimes \{g_{t_k-1}^k, \dots, g_j^k\} | \{a_{i-1}^k, \dots,$$

con  $0 < i < p$  y  $0 < j < q$ .

3. En este paso tratamos de perturbar la contracción

$$T^a(s^{-1}(C_*(\bar{W}(A)) \otimes_t C(\bar{W}(G)))) \Rightarrow (T^a(s^{-1}(hA \otimes hG)), d \otimes 1^* + \cdots 1^* \otimes d)$$

tomando como dato de partida la diferencial  $d_{\delta}$ . Para ver que este proceso para, necesitamos probar la nilpotencia puntual de la composición

$$T\left(\sum_{i \geq 0} (-1)^i ((1 \otimes \phi_G + \phi_A \otimes g_G f_G) t \cap)^i (1 \otimes \phi_G + \phi_A \otimes g_G f_G)\right) d_{\delta}.$$

A tal efecto, consideramos la filtración

$$F_q = \{[\{a_{r_0-1}^0, \dots, a_0^0\} \otimes \{g_{t_0-1}^0, \dots, g_0^0\} | \cdots | \{a_{r_n-1}^n, \dots, a_0^n\} \otimes \{g_{t_n-1}^n, \dots, g_0^n\}\} : \#(\{k : r_k > 1\})\}$$

Resulta que  $d_{\delta}$  disminuye en 2 el grado de la filtración, mientras que  $T(\sum_{i \geq 0} (-1)^i ((1 \otimes \phi_G + \phi_A \otimes g_G f_G) t \cap)^i (1 \otimes \phi_G + \phi_A \otimes g_G f_G))$  lo sube exactamente uno, de donde la composición resulta nilpotente aplicada punto sobre punto.



Agrupando los pasos 1, 2 y 3 podemos concluir que existe una contracción

$$\bar{\Omega}(\mathbb{Z}[A \times_{\chi} G]) \Rightarrow \tilde{\Omega}(hA \otimes hG, d),$$

de modo que se obtiene una estructura de  $A_{\infty}$ -coálgebra.

4. Ahora vamos a probar que el modelo homológico  $H$  de  $A \times_{\chi} G$  conforma una resolución libre que escinde de la resolución bar estándar.

Consideremos la contracción

$$\mathbb{Z}[A \times_{\chi} G] \otimes C_*(\bar{W}(A \times_{\chi} G)) \Rightarrow \mathbb{Z}[A \times_{\chi} G] \otimes C_*(\bar{W}(A) \times_{\tau} \bar{W}(G)),$$

que admite ser perturbada (nótese que el operador de homotopía es nulo, al tratarse de una isocontracción), por la diferencial  $\theta \cap$  inducida por la cocadena universal  $\theta : \bar{B}(\mathbb{Z}[A \times_{\chi} G]) \rightarrow \mathbb{Z}[A \times_{\chi} G]$ ,

$$\theta([(a_1, g_1) | \cdots | (a_n, g_n)]) = \begin{cases} (a_1, g_1) & \text{si } n = 1, \\ 0 & \text{si } n > 1; \end{cases}$$

siendo

$$\theta \cap ((a, g) \otimes [(a_1, g_1) | \cdots | (a_n, g_n)]) = (a, g) \cdot (a_1, g_1) \otimes [(a_2, g_2) | \cdots | (a_n, g_n)].$$

La diferencial perturbada  $d_{\theta \cap}$  consiste en

$$d_{\theta \cap}((a, g) \otimes (\{a_{n-1}, \dots, a_0\}, \{g_{n-1}, \dots, g_0\})) = (a, g) \cdot (g_{n-1}a_{n-1}, g_{n-1}) \otimes (\{g_{n-1}a_{n-2}, \dots, g_{n-1}a_0\}, \{g_{n-2}, \dots, g_0\})$$

donde

$$(\{g_{n-1}a_{n-2}, \dots, g_{n-1}a_0\}, \{g_{n-2}, \dots, g_0\}) = (\tau(\{g_{n-1}, \dots, g_0\}) \cdot \partial_0(\{a_{n-1}, \dots, a_0\}), \partial_0(\{g_{n-1}, \dots, g_0\})).$$

5. Sea ahora la contracción

$$\mathbb{Z}[A \times_{\chi} G] \otimes C_*(\bar{W}(A) \times_{\tau} \bar{W}(G)) \Rightarrow \mathbb{Z}[A \times_{\chi} G] \otimes C_*(\bar{W}(A)) \otimes_t C_*(\bar{W}(G)).$$

Vamos a probar que  $d_{\theta \cap}$  induce un proceso de perturbación convergente, por ser la composición  $(1 \otimes SHI_{\tau})d_{\theta \cap}$  puntualmente nilpotente. A tal efecto, consideremos la filtración dada por

$$F_q = \{(a, g) \otimes (\{a_{n-1}, \dots, a_0\}, \{g_{n-1}, \dots, g_0\}) : \#(\{i : a_i = 0 \text{ ó } g_i = 0\}) \geq n - q\}.$$

Resulta que  $d_{\theta \cap}$  aumenta en 1 a lo sumo el grado de la filtración, dado que  $a_{n-1}$  y  $g_{n-1}$  no pueden ser simultáneamente nulos (se trataría entonces de un

elemento degenerado en  $C_*(\bar{W}(A) \times_\tau \bar{W}(G))$ . Por otro lado, teniendo en cuenta que

$$SHI_\tau = \sum_{i \geq 0} (-1)^i [SHI((\tau \partial_0, \partial_0) - (\partial_0, \partial_0))]^i SHI,$$

resulta que  $SHI_\tau$  disminuye en al menos 2 el grado de filtración:  $SHI$  lo hace en al menos 2 y  $SHI((\tau \partial_0, \partial_0) - (\partial_0, \partial_0))$  al menos en 1. De donde la nilpotencia puntual de la composición.

Más aún, una fórmula explícita para  $\delta = d_{d_{\theta \cap}}$  es

$$\delta((a, g) \otimes \{a_{p-1}, \dots, a_0\} \otimes \{g_{q-1}, \dots, g_0\}) = (a, gg_{q-1}) \otimes \{g_{q-1}a_{p-1}, \dots, g_{q-1}a_0\} \otimes \{g_{q-2}, \dots, g_0\}$$

dado que  $\delta = (1 \otimes AW)d_{\theta \cap}(1 \otimes EML)$ , por traspasar  $(1 \otimes EML)$  la diferencial  $d_{\theta \cap}$ , según un razonamiento análogo al seguido en el punto 4.

6. Consideremos la contracción

$$\mathbb{Z}[A \times_\chi G] \otimes C_*(\bar{W}(A)) \otimes_t C_*(\bar{W}(G)) \Rightarrow \mathbb{Z}[A \times_\chi G] \otimes hA \otimes hG.$$

Vamos a probar que el proceso de perturbar esta contracción según el dato  $\delta$  es finito, ya que la composición  $(1 \otimes 1 \otimes \phi_G + 1 \otimes \phi_A + g_G f_G)\delta$  resultará ser puntualmente nilpotente.

Sea la filtración

$$F_q = \{(a, g) \otimes \{a_{p-1}, \dots, a_0\} \otimes \{g_{q-1}, \dots, g_0\} : \sum_{i=0}^{p-1} |a_i| + \sum_{j=0}^{q-1} |g_j| \leq q\},$$

semejante a la que ya consideráramos en la demostración del Teorema 4.2.6. Resulta que  $\delta$  disminuye en 1 el grado de filtración, mientras que  $1 \otimes 1 \otimes \phi_G$  y  $1 \otimes \phi_A \otimes g_G f_G$  lo preservan, de donde la nilpotencia puntual.

Agrupando las etapas 4, 5 y 6, obtenemos finalmente una contracción

$$\mathbb{Z}[A \times_\chi G] \otimes_\theta \bar{B}(\mathbb{Z}[A \times_\chi G]) \Rightarrow (\mathbb{Z}[A \times_\chi G] \otimes hA \otimes hG, d + d_\delta),$$

de donde el modelo homológico  $(hA \otimes hG, d)$  de  $\mathbb{Z}[A \times_\chi G]$  conforma una resolución libre (formada por productos de álgebras exteriores y polinomiales divididas) de  $\mathbb{Z}[A \times_\chi G]$  que escinde de la resolución bar estándar.

■

**Nota 4.3.2** Consideremos dos grupos discretos  $A$  y  $G$  con modelos homológicos conocidos  $hA$  y  $hG$ , respectivamente, y una acción de grupos  $\chi$  de  $G$  en  $A$ , de modo que  $A \times_{\chi} G$  admita un modelo homológico en función de los de los factores en la forma del Teorema 4.2.4. La demostración realizada anteriormente indica que en estas circunstancias el modelo homológico en cuestión también viene dotado de una estructura de  $A_{\infty}$ -coalgebra, inducida por la contracción que da dicho modelo homológico.

## 4.4 Aplicación: generación de matrices cocíclicas y de Hadamard.

### 4.4.1 Generalidades.

Una matriz cuadrada de dimensión  $n$  con todas sus entradas en  $\mathbb{K}_2 = \{1, -1\}$  se dice *matriz de Hadamard* cuando verifica que  $H \cdot H^t = n \cdot I$ , i.e., si sus filas (resp., columnas) tienen por módulo  $n$  y son ortogonales dos a dos.

Históricamente, las matrices de Hadamard fueron ya consideradas por Sylvester [164] en 1867, en relación con un problema sobre teselaciones. No obstante, cobraron entidad propia al aparecer ligadas al siguiente problema, enunciado por Hadamard [86]: dada una matriz cuadrada real  $A = (a_{ij})$  de orden  $n$  con  $|a_{ij}| \leq M$  para cierto  $M > 0$ , Hadamard demostró que el determinante de  $A$  venía acotado en valor absoluto por el número  $M^n n^{\frac{1}{2n}}$ . Es obvio que para  $M = 1$  las matrices de Hadamard alcanzan la cota en cuestión, dado que

$$(\det(H))^2 = \det(H) \det(H^t) = \det(HH^t) = \det(nI) = n^n.$$

Hadamard mismo demostró que las matrices de aquí homónimas, son de hecho las únicas que alcanzan tal cota.

Es sabido que el orden de estas matrices ha de ser 1, 2 o múltiplo de 4; precisando un poco más, se puede demostrar el siguiente resultado (ver Teorema 7.2.2 de [24], por ejemplo).

**Teorema 4.4.1** [24] *Sea  $H$  una matriz de Hadamard de dimensión  $n > 1$ . Entonces,  $n$  es par y cualesquiera dos filas distintas de  $H$  coinciden en exactamente  $n/2$  de sus*

columnas. Más aún, si  $n > 2$ , entonces  $n$  es múltiplo de 4 y cualesquiera tres filas distintas de  $H$  coinciden en exactamente  $n/4$  columnas.

Dado que  $H^t$  es Hadamard de serlo  $H$ , el resultado anterior se puede igualmente enunciar para columnas en lugar de filas.

Esto da pie a plantearse la así denominada *conjetura de Hadamard*, que versa sobre la existencia de matrices de Hadamard de dimensión cualquier múltiplo de 4.

Han sido continuos los esfuerzos por llegar a demostrar la validez de la conjetura de Hadamard (también conocida como *conjetura de Paley*) y desarrollar métodos de construcción de matrices de Hadamard de orden cualquiera prefijado. En este sentido cabe destacar, aparte de los mencionados Sylvester y Hadamard, fundamentalmente a Scarpis ([145]), Paley ([134], que generalizó los resultados del anterior), Williamson ([175], considerando innovadores métodos) y Cooper, Wallis y Turyn ([49, 172, 169], generalizando el trabajo de Williamson).

Actualmente, la aproximación que se estima con mayores probabilidades de éxito en la consecución final de la conjetura de Hadamard es la construcción de “matrices cocíclicas de Hadamard” ([53]), que explicaremos posteriormente con más detalle.

Un problema secundario relacionado con la conjetura de Hadamard, asimismo de gran complejidad, es el de la determinación del número de matrices de Hadamard “esencialmente distintas” que existen para un orden determinado  $n$ . La *equivalencia Hadamard* de matrices es la noción que se corresponde con esta idea de “diferencia sustancial” de matrices dadas  $H_1$  y  $H_2$ , en el sentido de que han de diferir una de otra en el producto de sendas matrices de permutación signadas  $P_1$  y  $P_2$ ,

$$P_1 H_1 = H_2 P_2;$$

es decir, que se pueden obtener una de otra mediante la permutación y/o negación de filas y/o columnas.

Para más información sobre generalidades acerca de matrices, recomendamos la consulta de [91], referencia por antonomasia.

La existencia de matrices de Hadamard en cualquier dimensión  $4n$  es fundamental por sus aplicaciones en muy diversos campos, tales como las teorías de diseños com-

binatoriales y códigos correctores de errores. A continuación, basándonos en [24, 37], comentaremos brevemente esta relación.

Dados enteros  $0 \leq t < k < v$  y  $\lambda > 0$ , un  $t - (v, k, \lambda)$  *diseño (combinatorial)* o, simplemente,  $t$ -diseño de parámetros  $(v, k, \lambda)$ , es una terna  $(X, \mathcal{B}, \mathcal{I})$  donde  $X$  es un conjunto de  $v$  puntos,  $X = \{p_1, \dots, p_v\}$ ,  $\mathcal{B}$  es un conjunto de *bloques*  $\{B_1, \dots, B_b\}$  disjunto de  $X$  y  $\mathcal{I}$  es una relación  $\mathcal{I} \subset X \times \mathcal{B}$ ; con la propiedad de que todo bloque está relacionado con exactamente  $k$  puntos, y cualesquiera  $t$  puntos dados están relacionados con exactamente  $\lambda$  bloques de forma simultánea.

En la definición de diseño puede tomarse, incluso, que un mismo bloque puede aparecer más de una vez en la colección  $\mathcal{B}$ , pero no será el caso de los diseños que consideraremos aquí. Así, necesariamente ha de ser el número  $b$  de bloques de un  $t - (v, k, \lambda)$  diseño de la forma

$$b = \frac{\lambda \binom{v}{t}}{\binom{k}{t}}.$$

Basta observar que el número de pares  $(T, B)$  distintos formados por un subconjunto  $T$  de  $t$  elementos de  $X$  y un bloque  $B$  de  $\mathcal{B}$  viene dado, de un lado, por  $\binom{v}{t}$  elecciones de  $T$  y  $\lambda$  bloques  $B$  para cada una de estas opciones; y, de otro, por  $b$  bloques  $B$  y  $\binom{k}{t}$   $t$ -subconjuntos  $T$  para cada uno de estos bloques.

Se suele abstraer que  $\mathcal{I}$  representa una relación de pertenencia entre puntos y bloques, de modo que cada bloque queda identificado como un subconjunto de  $X$  con  $k$  elementos (aquellos con los que está relacionado). Aunque ésta sea una buena representación de la idea formal de diseño, no se debe hipotecar el concepto a una situación tan particular en la que  $\mathcal{I}$  sea la relación de pertenencia. Este hecho se pone de manifiesto en la construcción de los complementarios y derivados de diseños.

Dado un  $t$ -diseño  $(X, \mathcal{B}, \mathcal{I})$  de parámetros  $(v, k, \lambda)$  con  $v - k \geq t$ , se puede definir una “estructura complementaria” en el siguiente sentido: se sustituye la relación  $\mathcal{I}$  por su complementaria  $\bar{\mathcal{I}} = X \times \mathcal{B} \setminus \mathcal{I}$ , de modo que un punto  $x$  está relacionado con un bloque  $B$  si  $(x, B) \notin \mathcal{I}$ .

Se tiene que la estructura complementaria de un  $t$ -diseño de parámetros  $(v, k, \lambda)$  con  $v - k \geq t$  conforma un  $t$ - $(v, v - k, \bar{\lambda})$  diseño  $(\bar{X}, \bar{\mathcal{B}})$ , con

$$\bar{\lambda} = \lambda \frac{\binom{v-k}{t}}{\binom{k}{t}}.$$

Por otro lado, dado  $s \leq t$ , sea  $S$  un  $s$ -subconjunto de  $X$ ,  $X' = X \setminus S$  y

$$\mathcal{B}' = \{B \setminus S : S \subseteq B, B \in \mathcal{B}\}.$$

Entonces, el par  $(X', \mathcal{B}')$  constituye un  $(t-s)$ - $(v-s, k-s, \lambda)$  diseño, que se denomina *diseño derivado* de  $(X, \mathcal{B})$  con respecto a  $S$ . En el caso particular de que  $S$  sea un conjunto unitario  $\{x\}$ , se habla de diseño derivado con respecto al punto  $x$ .

Vemos, pues, la necesidad de hacer flexible la identificación de  $\mathcal{I}$  como una relación de pertenencia, abarcando un sentido de “pertenencia” más amplio. Con esta idea en mente, sobreentenderemos que  $\mathcal{I}$  representa en adelante una relación de “pertenencia” entre puntos y bloques y hablaremos sencillamente de  $t$ -diseños  $(X, \mathcal{B})$ .

Todo  $t$ -diseño admite una representación matricial, en forma de *matriz de incidencia*  $A = (a_{ij})$ , para  $1 \leq i \leq b$  y  $1 \leq j \leq v$ : la entrada  $a_{ij}$  es 1 si  $p_j \in B_i$  y 0 en otro caso. Está claro que para  $t$ -diseños, con  $t > 0$ , habrá exactamente  $k$  entradas no nulas por fila. Más aún, se puede probar que también es constante el número  $r$  de entradas no nulas por columnas. Recíprocamente, toda matriz con esta propiedad da origen de forma natural a un 1-diseño.

La existencia de diseños para toda entrada de enteros es un resultado hasta ahora no demostrado, en gran medida similar al de la conjetura de Hadamard. De hecho, 3-diseños, 2-diseños y matrices de Hadamard se encuentran intrínsecamente relacionados, como se verá a continuación.

Sea  $H = (h_{ij})$  una matriz de Hadamard de dimensión  $4n > 4$ , que podemos tomar bajo equivalencia de Hadamard con su primera fila toda de  $+1$ .

Para  $2 \leq i \leq 4n$ , sean  $B_i^+ = \{j : h_{ij} = +1\}$  y  $B_i^- = \{j : h_{ij} = -1\}$ , que conforman una familia  $\mathcal{B}$  de  $2(n-1)$  conjuntos de  $2n$  elementos. Es fácil concluir que si llamamos  $X = \{1, \dots, n\}$ , entonces  $(X, \mathcal{B})$  constituye un  $3 - (4n, 2n, n-1)$  diseño.



Por otro lado, a partir de un  $3 - (4n, 2n, n - 1)$  diseño  $(X, \mathcal{B})$  dado, tomando el diseño derivado con respecto a un punto cualquiera de entre los  $4n$  de  $X$ , se obtiene un  $2 - (4n - 1, 2n - 1, n - 1)$  diseño.

Sea ahora  $D$  un  $2 - (4n - 1, 2n - 1, n - 1)$  diseño y denotemos por  $A$  su matriz de incidencia. Sea  $H$  la matriz que se obtiene de  $A$  al sustituir los 0 por  $-1$  y añadir una primera fila y primera columna todas de  $+1$ .

En estas circunstancias, cualquier fila de  $A$  contiene exactamente  $2n - 1$  entradas  $+1$ , de donde toda fila de  $H$  coincide en exactamente  $2n$  columnas (todas aquellas con entrada  $+1$ ) con la primera fila de  $H$ .

Por otro lado, cualesquiera dos filas de  $A$  tienen la entrada 1 común en  $n - 1$  posiciones, y la 0 en  $n$  posiciones (dado que el complementario de  $D$  es un  $2 - (4n - 1, 2n, n)$  diseño). Así, las correspondientes filas de  $H$  coinciden exactamente en  $2n$  columnas, de donde  $HH^t = 4nI$ .

En definitiva, hemos verificado la validez del siguiente resultado.

**Teorema 4.4.2** [37] *Para  $n > 1$ , los apartados siguientes son equivalentes:*

1. *Existe una matriz de Hadamard de dimensión  $4n$ .*
2. *Existe un  $3 - (4n, 2n, n - 1)$  diseño.*
3. *Existe un  $2 - (4n - 1, 2n - 1, n - 1)$  diseño.*

Este tipo de 2-diseños y 3-diseños se denominan *diseños de Hadamard*.

Demos ahora el paso siguiente, hacia los códigos correctores de errores. Primero, definiremos qué son y algunas de sus propiedades fundamentales, para después relacionar diseños con códigos y, por último, asociar códigos a diseños (o matrices) de Hadamard.

La teoría de códigos es una herramienta fundamental hoy día, dada la cantidad de información que es continuamente transmitida en muy variados medios en los que la distorsión es siempre factible (transmisiones radio-televisivas, aparatos de audio, lectores compactos, teléfonos móviles, comunicaciones vía satélites, etc.). El hecho de

poder reconstruir la información original enviada a partir de los datos recibidos, bajo ciertas condiciones determinadas por *códigos correctores de errores*, se hace, pues, indispensable.

Se suele asumir que la información a enviar consta de “palabras” de longitud fija  $v$  (frecuentemente, sucesión de dígitos), cuyas “letras” recaen sobre un “alfabeto”  $Q$  de tamaño  $q$  (la mayor de las veces, cuerpo finito  $\mathbb{Z}_q$ , y, en particular,  $q = 2$ ).

En estas circunstancias, el *espacio de Hamming*  $H(v, q)$  consiste en el conjunto de todas las palabras de longitud  $v$  sobre el alfabeto  $Q$ , y tiene una métrica asociada, llamada *distancia Hamming*, que mide el número de posiciones en que difieren las letras de dos palabras dadas  $c = (c_1, \dots, c_v)$  y  $w = (w_1, \dots, w_v)$ :

$$d(c, w) = |\{i : c_i \neq w_i, 1 \leq i \leq v\}|.$$

Así, palabras cercanas pueden confundirse al final de una transmisión, si el efecto de las distorsiones modifica convenientemente aquellas pocas letras en que varían. En esta idea subyace la noción de *código*: se trata de un subconjunto de al menos dos palabras de  $H(v, q)$ , de modo que la transmisión se circunscribe a este grupo de palabras. Así, de distar lo suficiente unas de otras para que las distorsiones del medio no lleguen a confundirlas, la información recibida puede rectificarse sin problemas para recuperar el mensaje original.

Más concretamente, si se recibe la palabra  $w$ , se busca aquella palabra  $c$  del código  $C$  prefijado que diste menos de  $w$ , y se asume que la palabra transmitida es  $c$ . La dificultad estriba en determinar códigos correctores según el medio en los que la palabra del código más próxima a la palabra recibida sea siempre única y coincida con la palabra transmitida originalmente.

Se dice que un código  $C$  es corrector de  $e$  errores cuando de cualquier palabra  $w$  dada a lo más dista una palabra  $c$  del código, y sólo una, menos que  $e$ . Esto garantiza la situación de que hablábamos en el párrafo anterior, para medios que no propicien más de  $e$  distorsiones.

Llamemos *distancia mínima* de un código a la menor de entre las distancias de cada par de sus palabras.

Obviamente, un código de distancia mínima  $d$  será corrector de  $e$  errores si y sólo



si  $d \geq 2e + 1$ ; es decir, si y sólo si las bolas de centro cualquier palabra del código y radio  $e$  son disjuntas dos a dos.

Lucgo un buen código corrector de errores habría de satisfacer tres condiciones: que tuviera una elevada distancia mínima, un cuantioso número de palabras (a efectos de poder elaborar gran cantidad de información diversa), y que no por ello el problema de reconstruir mensajes se tradujera en un problema de alto coste computacional.

Las dos primeras condiciones parecen difíciles de sostener de manera simultánea, dado que mientras más palabras haya en el código, en buena lid es muy plausible que la distancia mínima disminuya. En realidad, este problema de la determinación del código de tamaño máximo en  $H(v, q)$  de distancia mínima dada  $d$  ha sido hondamente tratado, lo que ha derivado en la consecución de diversos resultados parciales, cuales son la cota de Varshamov-Gilbert, la cota de Hamming, la cota de Singleton,...

Reduciéndonos al caso  $Q = \mathbb{K}_2$ , resulta que las matrices de Hadamard permiten construir códigos binarios óptimos, en el sentido de las cotas de Plotkin.

**Proposición 4.4.3** [135] *Sea  $C$  un código en  $H(v, 2)$  de distancia mínima dada  $d$ . Entonces, el número  $b$  de palabras que componen el código verifica las cotas siguientes:*

- (1) *Si  $d$  es par y  $v < 2d$ , es  $b \leq 2 \left\lfloor \frac{d}{2d-v} \right\rfloor$ .*
- (2) *Si  $d$  es par y  $v = 2d$ , es  $b \leq 2v$ .*
- (3) *Si  $d$  es impar y  $v < 2d + 1$ , es  $b \leq 2 \left\lfloor \frac{d+1}{2d+1-v} \right\rfloor$ .*
- (4) *Si  $d$  es impar y  $v = 2d + 1$ , es  $b \leq 2v + 2$ .*

MacWilliams y Sloane probaron en [127] que la existencia de códigos óptimos para (1) y (2) implican la existencia de códigos óptimos para (3) y (4).

Levenshtein probó en [123] que estas acotaciones eran las más finas posibles, dado que existían códigos óptimos alcanzando dichas cotas, en función de la existencia de matrices de Hadamard de determinadas dimensiones.

**Teorema 4.4.4** [30, 123] *La existencia de una matriz de Hadamard de dimensión  $4t$  implica la existencia de los siguientes códigos binarios óptimos para las cotas de Plotkin:*

- Un código de  $8t$  palabras de longitud  $4t$  y distancia mínima  $2t$ .
- Un código de  $4t$  palabras de longitud  $4t - 1$  y distancia mínima  $2t - 1$ .
- Un código de  $8t$  palabras de longitud  $4t - 1$  y distancia mínima  $2t$ .
- Un código de  $2t$  palabras de longitud  $4t - 2$  y distancia mínima  $2t$ .

Incluimos aquí la demostración dada en [91], por su valor constructivo.

#### **Demostración.** [91]

Sea  $H$  una matriz normalizada de Hadamard de dimensión  $4t$ , y denotemos por  $J = (j_{ij})$  a la matriz cuadrada de la misma dimensión formada toda ella por 1 ( $h_{ij} = 1 \forall i, j$ ). Entonces, las  $8t$  filas de las dos matrices  $W_{4t}^{(1)} = \frac{1}{2}(J + H)$  y  $W_{4t}^{(2)} = \frac{1}{2}(J - H)$  forman un código binario de distancia mínima  $2t$ , siendo la longitud de cada palabra constante e igual a  $4t$ .

Para construir los otros códigos, llamemos  $K$  a la matriz que se obtiene de  $H$  al eliminar su primera columna, y  $L$  la matriz que se obtiene al eliminar la primera columna de la matriz resultante de eliminar de  $K$  todas las filas que comienzan por  $+1$ . Entonces, las  $4t$  filas de  $W_{4t}^{(3)} = \frac{1}{2}(J + K)$ , las  $8t$  filas de  $W_{4t}^{(3)}$  y  $W_{4t}^{(4)} = \frac{1}{2}(J - K)$ , y las  $2t$  filas de  $W_{4t}^{(5)} = \frac{1}{2}(J + L)$  forman los restantes códigos, respectivamente.

■

Los códigos primero y tercero anteriores son óptimos en el sentido de las segunda y cuarta de las cotas de Plotkin, respectivamente. Los otros dos códigos son casos óptimos particulares de la cota (1), en los que es  $v = 2d - 1$  y  $v = 2d - 2$ , respectivamente.

Faltaría probar que para  $d \leq v < 2d$ ,  $d$  par, existe un código de  $b$  palabras de longitud  $v$  sobre un alfabeto de  $q$  letras y distancia mínima  $d$ , óptimo en el sentido de Plotkin (i.e., con  $b = 2 \left\lfloor \frac{d}{2d-v} \right\rfloor$ ).

La construcción de un tal código pasa por una suma apropiada de los códigos definidos en la demostración anterior, según se recoge en [91].

Recordemos qué significa *sumar* códigos. Sean dados sendos códigos  $C_i$ ,  $1 \leq i \leq 2$ , de  $b_i$  palabras, de longitud constante  $v_i$ , en el alfabeto  $\mathbb{Z}_2$  y de distancias mínimas  $d_i$ , con  $b_2 \geq b_1$ . En estas circunstancias, para naturales  $(a_1, a_2)$  se puede generar el código suma  $C = a_1 C_1 \oplus a_2 C_2$  cuyas palabras son de la forma  $(c_1^j | \overset{a_1}{\cdot} | c_1^j | c_2^j | \overset{a_2}{\cdot} | c_2^j)$ , siendo  $c_i^j$  la palabra  $j$ -ésima de  $C_i$ , para  $1 \leq j \leq b_1$ . El código  $C$  así construido consta, por tanto, de  $b_1$  palabras de longitud constante  $a_1 v_1 + a_2 v_2$  y distancia mínima  $d \geq a_1 d_1 + a_2 d_2$ . Queda claro que esta construcción es independiente de las últimas  $b_2 - b_1$  palabras de  $C_2$ .

Sean  $r = \lfloor \frac{d}{2d-v} \rfloor$ ,  $a_1 = d(2r+1) - v(r+1)$  y  $a_2 = rv - d(2r-1)$ .

Consideremos el código  $C$  definido por:

- Si  $v$  es par,  $C = \frac{a_1}{2} W_{4r}^{(5)} \oplus \frac{a_2}{2} W_{4(r+1)}^{(5)}$ .
- Si  $v$  es impar y  $r$  es par,  $C = a_1 W_{2r}^{(3)} \oplus \frac{a_2}{2} W_{4(r+1)}^{(5)}$ .
- Si  $v$  y  $r$  son ambos impares,  $C = \frac{a_1}{2} W_{4r}^{(5)} \oplus a_2 W_{2(r+1)}^{(3)}$ .

El código  $C$  así construido es óptimo para la cota de Plotkin.

Por tanto, la existencia de matrices de Hadamard de dimensiones  $2r$  ( $r$  par),  $2(r+1)$  ( $r$  impar),  $4r$  y  $4(r+1)$  es una condición suficiente para la existencia de códigos binarios óptimos en el sentido de la cota de Plotkin, para  $v$  y  $d$  dados.

Dado que la conjetura de Hadamard permanece hoy día aún abierta, es interesante abordar el problema de la generación de matrices de Hadamard en dimensión dada  $4t$ . Uno de los más prometedores caminos que se siguen en la actualidad es el que proveen los *diseños combinatoriales cocíclicos* [52] en relación con las *matrices cocíclicas de Hadamard* [53], que esquematizamos a continuación.

#### 4.4.2 Un algoritmo de generación de matrices cocíclicas de Hadamard.

Una matriz  $M$  cuadrada  $v \times v$  de entradas  $\pm 1$  se dice que está *desarrollada sobre un grupo* finito  $G$  de  $v$  elementos si proviene de una tabla de multiplicar del grupo

$G$ , en el siguiente sentido: dada una ordenación de los elementos de  $G$ , existe una aplicación de conjuntos  $g : G \rightarrow \{\pm 1\}$  de modo que  $M = (g(ab))$  para  $a, b \in G$ .

Aunque esta noción se puede extender para conjuntos de llegada  $S$  distintos del grupo  $\mathbb{K}_2$  (generando así matrices de incidencia para diseños en general), el objetivo inmediato que se planteaba era el de obtener matrices binarias que fueran de Hadamard, a ser posible de dimensión genérica  $4t$  y así cerrar la conjetura por tantos años abierta.

Pronto se advirtió que la empresa era imposible, dado que las matrices binarias así construidas tenían el mismo número de entradas positivas y negativas por fila, y toda matriz de Hadamard con esta propiedad (denominadas *regulares*) tiene por dimensión un cuadrado perfecto  $4t^2$  [173].

La teoría del *desarrollo cocíclico de diseños*, que extiende a la anterior, parece que puede solventar esta dificultad. Esta técnica fue por vez primera considerada por de Launey como una condición suficiente para poder extender 2-diseños (satisfaciendo restricciones de ortogonalidad muy generales en sus filas), a diseños de dimensión mayor del mismo tipo [51], a partir de las ideas apuntadas en [153, 154] para extender una matriz binaria ortogonal a dimensiones mayores. Esta extensión se realizaba por medio de una aplicación, de nombre *función de extensión*, abeliana en el caso de verificar una condición de conmutatividad.

Horadam identificó una tal función como un 2-cociclo, y junto con de Launey sentó las bases de la teoría de desarrollo cocíclico de diseños en [52]. En este artículo, ambos autores generan matrices de Hadamard por este método hasta completar todas las dimensiones no superiores a 100 (en contrapartida, no se conoce matriz de Hadamard de dimensión inferior a 12100 generada por el método simple del desarrollo sobre un grupo), y conjeturan que mediante este artificio se pueden generar matrices de Hadamard de cualquier dimensión  $4t$ .

A continuación, describiremos a grandes rasgos cómo funciona el método de la generación de matrices cocíclicas (en particular, de Hadamard), que se detalla en [53], y tiene su fundamento en el artículo más general [52], donde se demuestran los resultados principales de la teoría (teoremas 4.4.7, 4.4.10 y 4.4.11 y Corolario 4.4.8). Posteriormente, analizaremos cómo se puede aplicar la maquinaria de la homología efectiva desarrollada para productos semidirectos en esta tesitura.



En adelante, entenderemos que  $G$  es un grupo multiplicativo finito de  $v$  elementos, ordenados en la forma  $G = \{a_1 = 1, a_2, \dots, a_v\}$ .

Una *función de desarrollo cocíclico*<sup>1</sup> para matrices binarias, o más brevemente *cociclo*, es una aplicación de conjuntos  $f : G \times G \rightarrow \mathbb{K}_2$  satisfaciendo:

$$f(a, b)f(ab, c) = f(a, bc)f(b, c), \quad \forall a, b, c \in G. \quad (4.1)$$

Un cociclo se dice *normalizado* cuando  $f(1, 1) = 1$ , en cuyo caso es necesariamente  $f(a, 1) = f(1, c) = f(1, 1)$  para cualesquiera  $a, c \in G$ . Es obvio que exactamente la mitad de los cociclos son normalizados, dado que  $f$  es un cociclo si y sólo si  $-f$  lo es.

Una matriz binaria cuadrada  $M$  de orden  $v$  se dice *desarrollada cocíclicamente* sobre  $G$ , o simplemente *cocíclica*, cuando existe una función  $g : G \rightarrow \mathbb{K}_2$  de desarrollo sobre el grupo  $G$  de modo que  $M = (f(a, b)g(ab))$  para todos  $a, b \in G$ . De ser  $g \equiv 1$ ,  $M$  se denomina *cocíclica pura*.

Nótese que, en particular, toda matriz desarrollada sobre el grupo  $G$  es cocíclica, mediante el cociclo trivial  $f \equiv 1$ .

Debemos hacer notar que para un conjunto genérico de coeficientes  $S$  no necesariamente  $\mathbb{K}_2$ , un cociclo asocia a cada par de elementos de  $G$  una permutación de  $S$ , habiéndose de verificar igualmente la relación 4.1. En adelante obviaremos cualquier mención en este sentido, aunque de igual modo las subsiguientes definiciones pueden generalizarse en la misma línea: nos reduciremos al estudio de matrices binarias (con coeficientes en  $\mathbb{K}_2$ ), aunque utilizaremos la notación  $a^{-1}$  para el inverso de  $a$  en  $\mathbb{K}_2$  (y no  $a$  mismo), para mostrar cómo habría de ser la lectura en el caso más general.

No es arbitrario el que este tipo de funciones reciba el nombre de “cociclos”, dado que verdaderamente conforman 2-cociclos del complejo de cadenas no normalizado usual para calcular la cohomología de  $G$  con coeficientes en  $\mathbb{Z}_2$ , como comprobaremos más adelante (ver [35] para más detalles).

Así, surge la *equivalencia de cociclos*: dos cociclos  $f$  y  $f'$  se dicen equivalentes, y se nota  $f \sim f'$ , si existe una aplicación de conjuntos  $\alpha : G \rightarrow \mathbb{K}_2$  de modo que

$$f'(a, b) = \alpha(a)\alpha(b)(\alpha(ab))^{-1}f(a, b), \quad \forall a, b \in G.$$

Un cociclo se dice *principal* cuando  $f \sim 1$ .

<sup>1</sup>También llamada *función abeliana de extensión* en [52].

Por tanto, la clase de equivalencia de un cociclo  $f$  viene determinada por aquellas aplicaciones  $\alpha$  que no son homomorfismos de grupos.

Dos matrices cuadradas  $M$  y  $M'$  de orden  $v$  se dicen *cocíclicamente equivalentes*, y se nota  $M \sim_c M'$ , si existen tres aplicaciones  $g, g', \alpha : G \rightarrow \mathbb{K}_2$  y un cociclo  $f$  de modo que

$$M = (f(a, b)g(ab)) \quad \text{y} \quad M' = (\alpha(a)\alpha(b)f(a, b)g'(ab)),$$

para todo  $a, b \in G$ .

Es decir, dos matrices son cocíclicamente equivalentes si y sólo si están cocíclicamente desarrolladas por cociclos equivalentes.

Además, tomando  $\alpha = g' = 1$ , vemos que toda matriz cocíclica es cocíclicamente equivalente a una matriz cocíclica pura.

El siguiente resultado recoge una caracterización de cuándo una matriz cocíclica pura es de Hadamard.

**Proposición 4.4.5** [53] *Una matriz cocíclica es de Hadamard si y sólo si la suma de los elementos de cualquier fila, salvo la primera (de entradas sólo +1), es nula.*

De hecho, dadas las filas  $b$  y  $d$ , con  $b, d \in G \setminus \{1\}$ , sea  $a = db^{-1}$ . Entonces, el producto escalar de las filas  $b$  y  $d$  será:

$$\begin{aligned} \sum_{c \in G} f(b, c)f(d, c) &= \sum_{c \in G} f(b, c)f(ab, c) \stackrel{4.1}{=} \sum_{c \in G} f(a, b)f(a, bc) = \\ &= f(a, b) \sum_{c \in G} f(a, bc) = \pm \sum_{c \in G} f(a, c), \end{aligned}$$

teniendo en cuenta que en  $\mathbb{K}_2$  todo elemento es su propio inverso. El resultado es inmediato a partir de esta identidad.

Luego el comprobar si una matriz cocíclica pura es o no de Hadamard requiere tan sólo de, a lo más,  $(v - 1)^2$  sumas binarias, lo que supone una complejidad computacionalmente aceptable.

Veremos que podemos reducirnos a este tipo de matrices, según otra equivalencia clásica de matrices binarias: la *equivalencia Hadamard* de matrices.

Dos matrices  $M$  y  $M'$  se dicen *equivalentes Hadamard*, y se nota  $M \sim_h M'$ , cuando se pueden obtener una de la otra mediante una sucesión de negaciones y/o permutaciones de filas y columnas.

Al contrario que la equivalencia cocíclica, la equivalencia de Hadamard sí respeta la ortogonalidad entre filas (y columnas), lo que la convierte en una relación de equivalencia entre las matrices de Hadamard. Es más, toda matriz es equivalente Hadamard con una matriz *normalizada*, cuyas primera fila y columna están formadas sólo por  $+1$ . De hecho, todo cociclo normalizado determina una tal matriz, y viceversa.

El siguiente resultado permite reducir el problema de generar las matrices cocíclicas, en general, al de determinar las matrices cocíclicas puras.

**Proposición 4.4.6** [53] *Toda matriz cocíclica es equivalente Hadamard a una matriz cocíclica pura. En particular, toda matriz desarrollada sobre un grupo es equivalente Hadamard a una matriz cocíclica pura generada por un cociclo principal.*

En verdad, si  $M = (f(a,b)g(ab))$  es una matriz cocíclica, entonces,  $M \sim_h (f'(a,b))$ , con  $f'(a,b) = g(a)^{-1}g(b)^{-1}g(ab)f(a,b)$ .

En particular, si  $M$  está desarrollada sobre  $G$  es  $f = 1$ , luego  $f' \sim 1$  es un cociclo principal.

Según este resultado, para generar todas las matrices cocíclicas es suficiente, salvo equivalencia de Hadamard, con generar tan sólo las matrices cocíclicas puras; o, equivalentemente, los cociclos normalizados.

Observamos ahora que tanto cociclos como matrices cocíclicas puras adquieren la estructura de sendos grupos abelianos bajo el *producto de Hadamard* (componente a componente), siendo cada elemento su propio inverso:

$$(f(a,b)) \bullet (h(a,b)) = (f(a,b)h(a,b)).$$

Los elementos normalizados conforman, además, subgrupos del mismo carácter.

La estructura de estos grupos abelianos elementales de orden 2 de cociclos y cociclos normalizados y sus generadores es la salida del método que describen Horadam y de Launey en [52, 53]. Vamos a desglosar el funcionamiento de dicho método.

El primer paso es considerar el conjunto de cociclos como el conjunto de homomorfismos  $\text{Hom}(A(G, -), \mathbb{Z}_2)$ , para cierto grupo  $A(G, -)$ .

Consideremos  $v^2$  variables  $(a, b)$ , para  $a, b \in G$ , sujetas a las relaciones

$$(a, b) + (ab, c) = (b, c) + (a, bc), \quad \forall a, b, c \in G.$$

El conjunto de vectores  $x = (n(a, b))_{a, b \in G}$  satisfaciendo formalmente las relaciones anteriores conforma un  $\mathbb{Z}$ -módulo con la suma componente a componente; por lo que un grupo abeliano, que llamamos  $A(G, -)$ .

Aplicando una reducción por filas en los enteros a las relaciones dadas, se puede alcanzar, según el teorema fundamental de grupos abelianos finitamente generados, una presentación estándar de  $A(G, -)$ .

Observamos que cada cociclo vendrá determinado, ahora (asumiendo en (4.1) una notación aditiva en lugar de la multiplicativa), por un homomorfismo de  $A(G, -)$  en  $\mathbb{Z}_2$  que asigne a cada variable el valor correspondiente; y viceversa.

Luego el encontrar un sistema de generadores de cociclos equivale a encontrar un sistema de generadores del grupo  $\text{Hom}(A(G, -), \mathbb{Z}_2)$ .

Tomemos  $C = \mathbb{Z}_2$  como grupo aditivo. Entonces,  $f$  será un cociclo cuando verifique que

$$f(a, b) + f(ab, c) - f(b, c) - f(a, bc) = 0, \quad \forall a, b, c \in G,$$

normalizado en el caso de que  $f(1, 1) = 0$ .

Recordando la introducción histórica realizada al comienzo del presente capítulo, este tipo de funciones (verificando todas las condiciones, tanto las de regularidad como la de normalización), se llamaban *conjuntos de factorización*, y definían la clase de un 2-cociclo.

De hecho, si llamamos  $B(G, C)$  al subgrupo de los cociclos principales, se tiene que  $A(G, C)/B(G, C)$  es isomorfo al cociente de los conjuntos de factorización entre los conjuntos de factorización principales, de donde, efectivamente, es:

$$A(G, C)/B(G, C) \cong H^2(G; C) = H^2(G; \mathbb{Z}_2).$$

Por otro lado, aplicando el Teorema de los Coeficientes Universales, resulta que

$$H^2(G; C) \cong \text{Ext}_{\mathbb{Z}}(G/[G, G], C) \oplus \text{Hom}(H_2(G; \mathbb{Z}), C), \quad (4.2)$$



donde  $[G, G]$  es el conmutador de  $G$  y  $G/[G, G]$  el abelianizado finito de  $G$ .

El cálculo del funtor  $Ext$  es inmediato en este caso, al trabajar con grupos abelianos finitos: si  $G/[G, G] = (\oplus_{j=1}^l \mathbb{Z}_2^{t_j}) \oplus (\oplus_{j=l+1}^L \mathbb{Z}_{q_j})$ , con  $q_j = p_j^{t_j}$ ,  $p_j$  primo impar, entonces

$$Ext_{\mathbb{Z}}(G/G', \mathbb{Z}_2) = \oplus_{j=1}^l \mathbb{Z}_2.$$

Pero interesaría conocer cómo funciona el isomorfismo (4.2) en concreto, para localizar los cociclos generadores.

Consideremos la construcción Bar no normalizada asociada a  $G$ , en la forma de suma directa de los grupos abelianos libres  $M_m(G)$  de rango finito  $v^m$ ,

$$M_0(G) = \mathbb{Z}, \quad M_m(G) = Ab \langle (x_1, \dots, x_m) : x_i \in G \rangle;$$

dotados de la aplicación diferencial  $\partial_{m+1} : M_{m+1}(G) \rightarrow M_m(G)$ ,  $m \geq 0$ , de modo que  $\partial_0(x_1) = 0$  y para  $m \geq 1$

$$\begin{aligned} \partial_{m+1}(x_1, \dots, x_n) &= (-1)^{m+1}(x_1, \dots, x_m) + (x_2, \dots, x_{m+1}) + \\ &\quad + \sum_{i=1}^m (-1)^i (x_1, \dots, x_i x_{i+1}, \dots, x_{m+1}). \end{aligned}$$

Llamemos  $I_m = \partial_{m+1}(M_{m+1}(G))$ ,  $K_{m+1} = \ker(\partial_{m+1})$  y  $R_m(G) = M_m(G)/I_m$ . Por definición, es  $H_m(G) = K_m/I_m$  el  $m$ -ésimo grupo de homología de  $G$  sobre los enteros, teniéndose que  $H_m(G) \subseteq R_m(G)$ .

En particular,  $H_1(G) \cong G/[G, G]$  y  $R_2(G) \cong A(G, -)$ , dado que las imágenes  $\partial_3(a, b, c) = -(a, b) + (b, c) - (ab, c) + (a, bc)$ , para cualesquiera  $a, b, c \in G$ , generan las relaciones propias de  $A(G, -)$ .

Así,  $A(G, C)$  es isomorfo a  $\text{Hom}(R_2(G), C)$ , vía la aplicación  $\phi$ :

$$\phi(h) \left( \sum_{(a,b) \in G \times G} (n(a, b)(a, b) + I_2) \right) = \sum_{(a,b) \in G \times G} n(a, b)h(a, b), \quad h \in A(G, C). \quad (4.3)$$

Nótese que  $\phi(h)(H_2(G)) = 0$  para  $h \in B(G, C)$ .

Llamemos ahora  $R_2^*(G) = R_2(G)/\langle (1, 1) \rangle$  y  $A^*(G, C)$  al subgrupo de los cociclos normalizados. Estamos en disposición de enunciar el primero de los teoremas fundamentales de la teoría.

**Teorema 4.4.7** [53] *En las condiciones anteriores, con  $|G| = v$ , se tiene:*

1.  $R_2(G)/H_2(G) \cong \mathbb{Z}^v$ .
2.  $R_2(G) = N_2(G) \oplus H_2(G)$ , con  $N_2(G) \cong R_2(G)/H_2(G)$ .
3.  $A(G, C) \cong \text{Hom}(N_2(G), C) \oplus \text{Hom}(H_2(G), C) \cong C^v \oplus \text{Hom}(H_2(G), C)$ .
4.  $A^*(G, C) \cong \text{Hom}(N_2(G)/\langle (1, 1) \rangle, C) \oplus \text{Hom}(H_2(G), C) \cong C^{v-1} \oplus \text{Hom}(H_2(G), C)$ .

Luego el grupo abeliano de cociclos es isomorfo a  $\mathbb{Z}_2^v \oplus \text{Hom}(H_2(G), \mathbb{Z}_2)$  y el grupo abeliano de cociclos normalizados es isomorfo a  $\mathbb{Z}_2^{v-1} \oplus \text{Hom}(H_2(G), \mathbb{Z}_2)$ .

**Corolario 4.4.8** [53] *Sea  $H_2(G) = (\oplus_{i=1}^l \mathbb{Z}_{2^{t_i}}) \oplus (\oplus_{i=l+1}^L \mathbb{Z}_{p_i^{t_i}})$ , con cada  $p_i$  primo impar. Entonces, el grupo abeliano de cociclos es isomorfo a  $\mathbb{Z}_2^v \oplus \mathbb{Z}_2^l$ , y el de cociclos normalizados isomorfo a  $\mathbb{Z}_2^{v-1} \oplus \mathbb{Z}_2^l$ .*

La cuestión está en determinar qué forma tienen los generadores de estas factorizaciones.

Según el Teorema 4.4.7, todo cociclo  $f \in A(G, C)$  se descompone como suma de un *cociclo simétrico*  $f_s$  (de modo que  $f_s(H_2(G)) = 0$ ) y su *cociclo conmutador*  $f_c$  asociado (restricción de  $f$  a  $H_2(G)$ ).

Si denotamos por  $S(G, C)$  al subgrupo de todos los cociclos simétricos, resulta que  $S(G, C) \cong \text{Hom}(N_2(G), C)$ . Además,  $B(G, C) \subseteq S(G, C)$ , por lo que de (4.2) se desprende:

- $A(G, C) = S(G, C) \oplus \text{Hom}(H_2(G), C)$ .
- $S(G, C)/B(G, C) \cong \text{Ext}_{\mathbb{Z}}(G/[G, G], C)$ .

Del mismo modo, como  $G/[G, G]$  es abeliano, habría de ser

$$S(G/[G, G], C)/B(G/[G, G], C) \cong \text{Ext}_{\mathbb{Z}}(G/[G, G], C) \cong S(G, C)/B(G, C).$$

Además, todo cociclo  $f \in S(G/[G, G], C)$  admite una *elevación*  $f^+ \in S(G, C)$ , con  $f^+ = f \circ (\pi \times \pi)$ , siendo  $\pi : G \rightarrow G/[G, G]$  la proyección canónica.

**Proposición 4.4.9** [52] *Todo cociclo simétrico  $f_s \in S(G, C)$  tiene una descomposición*

$$f_s = f_A^+ + f_B, \quad f_A \in S(G/[G, G], C), \quad f_B \in B(G, C),$$

*y cualquier otra descomposición  $f_s = f_A^+ + f_B$  es de la forma  $f_A^+ = f_A^+ h^+$  y  $f_B = f_B - h^+$ , para  $h^+ \in B(G/[G, G], C)$ .*

Tomando una descomposición primaria de  $G/[G, G]$  como suma de grupos abelianos cíclicos finitos, obtenemos el *teorema de estructura de cociclos simétricos*.

**Teorema 4.4.10** [52] *Sean  $f \in S(G, C)$  y  $G/[G, G] = (\oplus_{i=1}^l \mathbb{Z}_{2^{t_i}}) \oplus (\oplus_{i=l+1}^L \mathbb{Z}_{q_i})$ ,  $q_i = p_i^{t_i}$ ,  $p_i$  primo, una descomposición primaria de  $G/[G, G]$ . Entonces,*

$$f = (\oplus_{i=1}^l f_{s_i})^+ + f_B,$$

*donde  $f_{s_j} \in S(\mathbb{Z}_{2^{t_j}}, C)$ ,  $f_B \in B(G, C)$  y la descomposición es única salvo representante  $f_B$  de la clase  $f_B + B(G/[G, G], C)^+$  en  $B(G, C)$ .*

Recapitulemos lo obtenido en los últimos resultados.

Sabemos que el conjunto de cociclos normalizados es

$$A^*(G, C) \cong \mathbb{Z}_2^{v-1} \oplus \text{Hom}(H_2(G), C),$$

y módulo la relación de equivalencia cocíclica  $\sim_c$  verifica

$$\begin{aligned} A^*(G, C)/B^*(G, C) &\cong S^*(G, C)/B^*(G, C) \oplus \text{Hom}(H_2(G), C) \cong \\ &\cong \mathbb{Z}_2^j \oplus \text{Hom}(H_2(G), C) \cong \mathbb{Z}_2^j \oplus \mathbb{Z}_2^l, \end{aligned}$$

para cierto  $j \leq v - 1$ .

Este índice  $j$  se corresponde con el número de subgrupos cíclicos potencias de 2 que aparecen en una descomposición primaria de  $G/[G, G]$ .

El exponente  $l$  viene, asimismo, del número de subgrupos cíclicos potencias de 2 que aparecen en una descomposición primaria de  $H_2(G)$ .

Luego, en total, resultan  $j$  generadores correspondientes a cociclos normalizados simétricos,  $l$  generadores correspondientes a cociclos no simétricos y  $k = (v - 1) - j$  generadores de cociclos normalizados principales (de  $B^*(G, C)$ ).

Una descripción explícita para estos generadores se recoge en el siguiente teorema, que hace uso del *producto de Kronecker*  $A \otimes B$  de matrices cuadradas  $A = (a_{ij})_n$  y  $B = (b_{ij})_m$ , que es la matriz cuadrada de dimensión  $nm$  formada por  $n^2$  bloques  $m \times m$  de la forma  $a_{ij}B$ :

$$A \otimes B = (a_{ij}B)_{nm}.$$

Notaremos por  $J_m$  a la matriz cuadrada de orden  $m$  formada toda por  $+1$ , y  $MD(\mathbb{Z}_m)$  a la matriz negacíclica inversa de orden  $m$ ,

$$MD(\mathbb{Z}_m) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & A \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & A & A \\ 1 & A & \cdots & A & A \end{pmatrix},$$

en nuestro caso con  $A^2 = 1$ , por ser el grupo de coeficientes  $C = \mathbb{Z}_2$ .

**Teorema 4.4.11** [52, 53] *Sea  $A * (G, C)/B * (G, C) \cong \mathbb{Z}_2^j \oplus \mathbb{Z}_2^l$ , con  $G/G' = (\oplus_{i=1}^j \mathbb{Z}_{2^{t_i}}) \oplus (\oplus_{i=j+1}^T \mathbb{Z}_{p_i^{t_i}})$ ,  $p_i$  primo impar,  $H_2(G) = (\oplus_{j=1}^l \mathbb{Z}_{2^{k_j}}) \oplus (\oplus_{j=l+1}^L \mathbb{Z}_{q_j^{k_j}})$ ,  $q_j$  primo impar. Entonces, se tiene que:*

1. Una matriz generadora de los cociclos simétricos es:

$$MD_s(G) = J_{\frac{|G|}{2^{t_1+\cdots+t_j}}} \otimes MD(\mathbb{Z}_{2^{t_1}}) \cdots \otimes MD(\mathbb{Z}_{2^{t_j}}).$$

2. Sean  $f_1, \dots, f_l$  un grupo de generadores de los cociclos no simétricos (de parte no trivial exclusivamente conmutadora). La matriz generadora de todos ellos es:

$$MD_c(G) = (f_1(a, b)) \bullet \cdots \bullet (f_l(a, b)).$$

3. Una matriz  $MD_p(G)$  generadora del subgrupo  $B^*(G, C)$  de cociclos normalizados principales se puede calcular mediante álgebra lineal.
4. El grupo de todos los cociclos normalizados viene generado por la matriz

$$MD(G) = MD_p(G) \bullet MD_s(G) \bullet MD_c(G).$$

**Ejemplo 4.4.12** En [53], se dice que las matrices cocíclicas sobre  $G = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$  tienen la forma

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & A & C & AC \\ 1 & CK & B & BCK \\ 1 & ACK & BC & ABK \end{pmatrix},$$

con  $A^2 = B^2 = C^2 = K^2 = 1$ .

Veamos que esto es así.

En efecto, resulta que, por ser  $G$  abeliano es  $[G, G] = 0$  y  $G/[G, G] = G$ , de donde

$$\begin{aligned} MD_s(G) &= MD(\mathbb{Z}_2) \otimes MD(\mathbb{Z}_2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & B \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & A \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & A & 1 & A \\ 1 & 1 & B & B \\ 1 & A & B & AB \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & A & 1 & A \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & A & 1 & A \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & B & B \\ 1 & 1 & B & B \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Por otro lado, tomando una aplicación genérica  $g : G \rightarrow \mathbb{Z}_2$ , definida por  $g(1, 1) = a$ ,  $g(-1, 1) = b$ ,  $g(1, -1) = c$  y  $g(-1, -1) = d$ , resulta que la matriz desarrollada sobre  $G$  por  $g$ ,

$$M' = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ b & a & d & c \\ c & d & a & b \\ d & c & b & a \end{pmatrix},$$

es equivalente Hadamard a la matriz normalizada cocíclica principal pura  $M = (g(x)^{-1}g(y)^{-1}g(xy))$  para  $x, y \in G$ . De donde

$$M' \sim_h \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ ab & ab & cd & cd \\ ac & bd & ac & bd \\ ad & bc & bc & ad \end{pmatrix} \sim_h \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & C & C \\ 1 & C & 1 & C \\ 1 & C & C & 1 \end{pmatrix} = MD_p(G),$$

con  $C = abcd$ .

Por último, calculemos la matriz  $MD_c(G)$  correspondiente a los cociclos provenientes de  $\text{Hom}(H_2(G), \mathbb{Z}_2)$ .

Sabemos que  $H_2(G)$  es necesariamente finito, luego sólo tiene parte de torsión (siempre es abeliano).

Para determinar  $H_2(G)$  basta entonces con hallar  $\partial_3(M_3(G))$ , lo cual podemos conseguir de manera eficiente calculando la forma normal de Smith asociada a la matriz que representa dicha aplicación.

Con la ayuda de un programa adecuado, como el *Mathematica*, se puede concluir que  $H_2(G) = \mathbb{Z}_2$ , siendo  $(c, d) - (d, c)$  un generador, con  $c = (-1, 1), d = (-1, -1) \in G$ .

Utilizando ahora las matrices de paso, se puede determinar qué elementos de la base original dependen linealmente de este vector en la base que da la forma normal: se trata de los vectores unitarios  $(b, b), (b, d), (c, b)$  y  $(c, d)$ , con  $b = (1, -1)$ .

Por tanto, la matriz  $MD_c(G)$  es de la forma

$$MD_c(G) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & K & 1 & K \\ 1 & K & 1 & K \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

para  $K^2 = 1$ .

La matriz  $MD(G)$  resultante del producto Hadamard de las matrices  $MD_s(G), MD_p(G)$  y  $MD_c(G)$  nos da la matriz genérica cocíclica sobre  $G$ ,

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & AK & C & ACK \\ 1 & CK & B & BCK \\ 1 & AC & BC & AB \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & A & C & AC \\ 1 & CK & B & BCK \\ 1 & ACK & BC & ABK \end{pmatrix},$$

con  $A^2 = B^2 = C^2 = K^2 = 1$ .

**Nota 4.4.13** Para generar todas las matrices cocíclicas de Hadamard, basta seleccionar de entre las anteriores aquellas que verifican la condición necesaria y suficiente de ortogonalidad dada en la Proposición 4.4.5.



La gran dificultad en el método que diseñan Horadam y de Launey estriba (según ellos mismos destacan de forma explícita en [53], y proponen como problema a resolver), en la determinación no ya de  $H_2(G)$  (sistemas de cálculo simbólico tales como *GAP* ([146]) y *MAGMA* ([38]) resuelven esta cuestión), sino de los generadores de  $H_2(G)$ , en el caso de  $G$  no conmutativo (se conoce solución del problema para  $G$  abeliano, de lo que se hacen eco ambos autores también en [53]).

Podemos decir que ha habido muy variadas aportaciones en este sentido.

Flannery sigue en [73] la aproximación que apuntan Horadam y de Launey, mediante el uso del *Teorema de los Coeficientes Universales* y la *Fórmula de Hopf*, herramientas que se han utilizado tradicionalmente para el cálculo del segundo grupo de homología de un grupo  $G$  dado.

Más explícitamente, para  $G$  finito y  $U$  un  $G$ -módulo (trivial para la acción de  $G$ ) finitamente generado, Flannery desarrolla el siguiente esquema:

- Según el Teorema de los Coeficientes Universales, es

$$H^2(G, U) \cong \text{Ext}(G/[G, G], U) \oplus \text{Hom}(H_2(G), U),$$

por lo que incide en la necesidad de calcular  $H_2(G)$ .

- Por medio de la Fórmula de Hopf, si  $G$  admite una presentación  $G = F/R$ , resulta

$$H_2(G) \cong (R \cap [F, F])/[R, F].$$

- Si  $S/[R, F]$  denota un complemento (no es único, en general), de  $(R \cap [F, F])/[R, F]$  en  $R/[R, F]$ , se tiene que

$$H_2(G) \cong R/S.$$

- Flannery concluye una descomposición de  $H^2(G, U)$  en suma directa de los morfismos transgresión  $\tau_s : \text{Hom}(R/S, U) \rightarrow H^2(F/R, U)$  e “inflación” *inf* restricción a  $\text{Ext}(G/[G, G], U)$  de la inflación  $H^2(G/[G, G], U) \rightarrow H^2(G, U)$ :

$$H^2(G, U) \cong \text{inf} \oplus \tau_s.$$

Esta aproximación de Flannery requiere el cálculo de diversas presentaciones de grupos, problema que resuelve puntualmente en los ejemplos particulares que cita en

[73]. Por otra parte, el cálculo explícito de los generadores de  $H^2(G; U)$  no aparenta ser un proceso eficientemente algoritmizable. Más aún, el cálculo de los 2-cociclos asociados a  $\text{Ext}_{\mathbb{Z}}(G/[G, G], U)$  (mediante la inflación), es canónico; sin embargo, el cálculo de los 2-cociclos procedentes de  $\text{Hom}(H_2(G), U)$  requiere la elección del complemento  $S/[R, F]$ , que en caso alguno sigue un proceso canónico (nótese que ¡no es único!, en general). Una implementación del método se realiza en [74], utilizando el sistema de cálculo simbólico MAGMA.

Grabmeier y Lambe aportan una aproximación distinta en [78], desde el punto de vista de la Teoría de Perturbación Homológica, que ahora nos es tan conocida: generan un algoritmo para el cálculo de todos los elementos en la cohomología  $H^2(G; \mathbb{Z}_2)$ , para  $p$ -grupos  $G$  (i.e., grupos con un número de elementos potencia de  $p$ ).

Nosotros vamos a presentar aquí un método para determinar de forma explícita un conjunto completo de generadores de 2-cociclos representativos para los elementos de  $H^2(A \times_{\chi} G)$ , con  $A \times_{\chi} G$  un producto semidirecto de grupos abelianos con  $\chi$  acción de grupos.

Este método estaría a medio camino de los algoritmos dados por Flannery en [73] y Grabmeier-Lambe en [78]. En realidad, nosotros calculamos aquellos 2-cociclos representativos que proceden de  $\text{Hom}(H_2(A \times_{\chi} G), \mathbb{Z}_2)$ , a partir del modelo homológico encontrado en la sección anterior para los productos semidirectos que consideramos.

De esta aproximación no sólo hemos establecido un algoritmo, sino que, además, hemos implementado un programa en *Mathematica* para el cálculo de dichos generadores, en el caso de productos semidirectos de la forma  $\mathbb{Z}_r \times_{\chi} \mathbb{Z}_s$ .

En particular, unido a sendos programas calculando la presentación del grupo conmutador de  $A \times_{\chi} G$  (a partir, por ejemplo, de  $H_1(A \times_{\chi} G)$ ) y matrices cocíclicas generadoras de las matrices desarrolladas sobre  $A \times_{\chi} G$  (mediante álgebra lineal), se obtiene un programa más elaborado que construye todas las matrices cocíclicas sobre  $A \times_{\chi} G$ . Añadiendo un programa de comprobación de la condición de ser de Hadamard, se obtienen así todas las matrices cocíclicas de Hadamard sobre  $A \times_{\chi} G$ .

Detallamos todo este procedimiento en la sección entrante.





### 4.4.3 Matrices cocíclicas sobre $A \times_\chi G$ .

El objetivo que se persigue aquí es el determinar un conjunto completo de generadores de la 2-homología de un producto semidirecto  $A \times_\chi G$ , que permita a su vez caracterizar un conjunto completo de generadores de  $\text{Hom}(H_2(A \times_\chi G), \mathbb{Z}_2)$ ; y, mediante el isomorfismo (4.3), concluir un conjunto de generadores de 2-cociclos representativos, precisamente los que añadidos a los 2-cociclos simétricos y principales completan una base para generar todas las matrices cocíclicas sobre  $A \times_\chi G$ .

Recordemos que el modelo homológico que hemos diseñado aquí para productos semidirectos  $A \times_\chi G$  vienen dados por una contracción con DG-módulo de partida  $C_*(\bar{W}(A \times_\chi G))$ .

Para poder traspasar la información homológica mediante el isomorfismo (4.3), deberíamos ser capaces de traducir dicha información en términos de la construcción bar de  $\mathbb{Z}[A \times_\chi G]$ .

Por ser  $A \times_\chi G$  un grupo no conmutativo,  $C_*(\bar{W}(A \times_\chi G))$  no coincide con  $\bar{B}(\mathbb{Z}[A \times_\chi G])$ , pero existe un isomorfismo  $\varphi$  entre ellos, que viene dado por

$$[(a_0, g_0) | \cdots | (a_n, g_n)] \xrightarrow{\varphi} (-1)^{\lceil \frac{n+1}{2} \rceil + 1} \{(a_n, g_n), \dots, (a_0, g_0)\}.$$

Con toda esta información y a partir del modelo homológico  $hA \otimes hG$  de  $A \times_\chi G$  determinado en el Teorema 4.2.4, podemos establecer el algoritmo buscado.

Los resultados que exponemos a continuación son válidos para cualesquiera productos semidirectos  $A \times_\chi G$  de grupos abelianos finitos  $A$  y  $G$ , aunque con aras de simplificar la exposición, nos reduciremos al caso de grupos de la forma  $\mathbb{Z}_r \times_\chi \mathbb{Z}_s$ , para  $\chi$  acción de grupos.

Sabemos que un modelo homológico de estos grupos es

$$(E(u_1, u_2; 1) \otimes \Gamma(w_1, w_2; 2), d),$$

con  $d$  dada por el proceso de perturbación descrito en la demostración del Teorema 4.2.4.

Sea  $F_2 : \bar{B}_2(\mathbb{Z}[\mathbb{Z}_r \times_\chi \mathbb{Z}_s]) \rightarrow (\bar{B}(\mathbb{Z}[\mathbb{Z}_r]) \otimes_t \bar{B}(\mathbb{Z}[\mathbb{Z}_s]))|_{|_2}$ , definida a partir del isomorfismo  $\varphi$ , la función de torsión  $\tau$  del Teorema 4.2.1 y la aplicación del teorema de Eilenberg-Zilber torcido.

Llamemos  $f_\infty : (\bar{B}(\mathbb{Z}[\mathbb{Z}_r]) \otimes_t \bar{B}(\mathbb{Z}[\mathbb{Z}_s]))|_{||=2} \rightarrow (E(u_1, u_2; 1) \otimes \Gamma(w_1, w_2; 2))|_{||=2}$  a la restricción a dimensión 2 de la proyección al modelo.

**Teorema 4.4.14** *En las condiciones anteriores, se tiene:*

1.  $H_2(\mathbb{Z}_r \times_\chi \mathbb{Z}_s) = H_2((E(u_1, u_2; 1) \otimes \Gamma(w_1, w_2; 2), d))$ , que se puede calcular a partir de  $d_3$ .
2. La aplicación  $F = f_\infty \circ F_2 : \bar{B}_2(\mathbb{Z}[\mathbb{Z}_r \times_\chi \mathbb{Z}_s]) \rightarrow E(u_1, u_2; 1) \otimes \Gamma(w_1, w_2; 2)$  induce un isomorfismo en homología, de modo que para cada  $z \in H_2(E(u_1, u_2; 1) \otimes \Gamma(w_1, w_2; 2))$  la elevación de  $z$  a través de  $F$  define una matriz cocíclica sobre  $\mathbb{Z}_r \times_\chi \mathbb{Z}_s$ .

### Demostración.

De un lado,  $F$  induce un isomorfismo en homología porque es la proyección de la contracción que da el Teorema 4.2.4.

Por otro, es sabido que el segundo módulo de homología de cualquier grupo finito consiste en grupo abeliano finito, por tanto sin parte libre [35].

Así, a la hora de calcular  $H_2(\mathbb{Z}[\mathbb{Z}_r \times_\chi \mathbb{Z}_s])$ , sólo interviene la diferencial  $d_3$  (ver en el apéndice los comentarios acerca del algoritmo de Veblen [170]).

Este proceso consiste en calcular la forma normal de Smith  $D$  de la matriz  $M$  que representa a  $d_3$  con respecto a las bases  $\mathcal{B} = \{u_1w_1, w_1u_2, u_1w_2, u_2w_2\}$  y  $\mathcal{B}' = \{w_1, u_1u_2, w_2\}$ .

Sean  $\mathcal{U} = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$  y  $\mathcal{V} = \{y_1, y_2, y_3\}$  las bases nuevas del cambio, de modo que  $D_{\mathcal{U}, \mathcal{V}} = PM_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}Q$ , para las matrices de paso  $P$  y  $Q$  correspondientes.

Explicuemos qué hemos de entender por *elegir  $z$  a través de  $F$* .

Queremos calcular todas las matrices cocíclicas sobre  $\mathbb{Z}_r \times_\chi \mathbb{Z}_s$  que proceden de  $\text{Hom}(H_2(\mathbb{Z}_r \times_\chi \mathbb{Z}_s), \mathbb{Z}_2)$ .

Para ello, bastará calcular qué elementos  $x$  de  $\bar{B}_2(\mathbb{Z}[\mathbb{Z}_r \times_\chi \mathbb{Z}_s])$  se leen con información homológica no trivial vía  $F$  en  $H_2(E(u_1, u_2; 1) \otimes \Gamma(w_1, w_2; 2))$ .

Para cada generador  $z$  en  $H_2(E(u_1, u_2; 1) \otimes \Gamma(w_1, w_2; 2))$ , la elevación de  $z$  a través de  $F$  precisamente devuelve el conjunto de elementos en  $\bar{B}_2(\mathbb{Z}[\mathbb{Z}_r \times_\chi \mathbb{Z}_s])$  que se proyectan sobre  $z$  con información 2-homológica.

Esto se puede conseguir en dos etapas más simples de elevación: una de  $E(u_1, u_2; 1) \otimes \Gamma(w_1, w_2; 2)$  a  $(\bar{B}(\mathbb{Z}[\mathbb{Z}_r]) \otimes_t \bar{B}(\mathbb{Z}[\mathbb{Z}_s]))|_{||=2}$ , la segunda de aquí a  $\bar{B}_2(\mathbb{Z}[\mathbb{Z}_r \times_\chi \mathbb{Z}_s])$ .

■

La aplicación  $F$  podría llamarse *2-cocadena universal*, por analogía a la notación que sugieren Grabmeier y Lambe en [78].

Es posible extender el teorema anterior a otras familias de grupos que tengan modelos homológicos conocidos; tales como extensiones centrales [117], grupos nilpotentes libres de torsión [112, 98, 99], grupos metacíclicos [101], etc. “Sólo” se necesita establecer fórmulas explícitas para las análogas de las aplicaciones  $F_2$  y  $F$ .

En nuestro caso, para los grupos  $\mathbb{Z}_r \times_\chi \mathbb{Z}_s$ , podemos establecer dichas fórmulas explícitas a partir del Teorema 4.2.4.

La función de torsión  $t$  que generan  $\tau$  y  $\chi$  según el Teorema 4.2.1 produce el dato de perturbación  $t \cap$ , con

$$t \cap ([n, m] \otimes [k]) = [\chi(k, n), \chi(k, m)] \otimes [] - [n, m] \otimes [],$$

$$t \cap ([n] \otimes [m, k]) = [n] \otimes [k] - [\chi(m, n)] \otimes [k].$$

La inyección  $g_3$  del modelo  $E(u_1, u_2; 1) \otimes \Gamma(w_1, w_2; 2)$  a  $\bar{B}(\mathbb{Z}[\mathbb{Z}_r]) \otimes \bar{B}(\mathbb{Z}[\mathbb{Z}_s])$ , la

proyección  $f_3$  y la homotopía  $\phi_2$  vienen dadas por

$$\begin{aligned} g_3(u_1 w_1) &= ([\bar{1}, \bar{1}, \bar{1}] + \cdots + [\bar{1}, \overline{r-1}, \bar{1}]) \otimes [], \\ g_3(w_1 u_2) &= ([\bar{1}, \bar{1}] + \cdots + [\bar{1}, \overline{r-1}]) \otimes [\bar{1}], \\ g_3(u_1 w_2) &= [\bar{1}] \otimes ([\bar{1}, \bar{1}] + \cdots + [\bar{1}, \overline{s-1}]), \\ g_3(u_2 w_2) &= [] \otimes ([\bar{1}, \bar{1}, \bar{1}] + \cdots + [\bar{1}, \overline{r-1}, \bar{1}]) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_2([n, m] \otimes []) &= w_2, \text{ si } n + m \geq r, \\ f_2([n] \otimes [m]) &= (nm) u_1 u_2, \\ f_2([] \otimes [n, m]) &= w_2, \text{ si } n + m \geq s, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \phi_2([\bar{n}, \bar{m}] \otimes []) &= -([\bar{1}, \bar{1}, \bar{m}] + \cdots + [\bar{1}, \overline{n-1}, \bar{m}]) \otimes [] \\ \phi_2([\bar{n}] \otimes [\bar{m}]) &= -([\bar{1}, \bar{1}] + \cdots + [\bar{1}, \overline{n-1}]) \otimes [\bar{m}] + [\bar{n}] \otimes ([\bar{1}, \bar{1}] + \cdots + [\bar{1}, \overline{m-1}]), \\ \phi_2([] \otimes [\bar{n}, \bar{m}]) &= -[] \otimes ([\bar{1}, \bar{1}, \bar{m}] + \cdots + [\bar{1}, \overline{n-1}, \bar{m}]). \end{aligned}$$

Por otro lado, sea  $d_r(w_1 u_2) = r u_1 u_2$  y  $d_s(u_1 w_2) = -s u_1 u_2$ . Entonces, una expresión para  $d_3$  y  $f_\infty$  son

$$\begin{aligned} d_3 &= d_r + d_s + f_2 t \cap g_3 - f_2 t \cap \phi_2 t \cap g_3 + f_2 (t \cap \phi_2)^2 t \cap g_3 - \cdots, \\ f_\infty &= f_2 - f_2 t \cap \phi_2 + f_2 (t \cap \phi_2)^2 - \cdots. \end{aligned}$$

La aplicación  $F_2$  viene dada por

$$\begin{aligned} F_2[(a_1, b_1), (a_2, b_2)] &= [] \otimes [b_2, b_1] + 2[\chi(b_2, a_2)] \otimes [b_1] + 2[\chi(b_2, a_2), \chi(b_2 b_1, a_1)] \otimes [] - \\ &\quad - [\chi(b_2 b_1 b_2, a_2), \chi(b_2 b_1 b_2 b_1, a_1)] \otimes [] - [\chi(b_2 b_2, a_2)] \otimes [b_1]. \end{aligned}$$

Ahora, a partir del Teorema 4.4.14, se puede establecer un algoritmo que calcula 2-ciclos representativos para  $\mathbb{Z}_r \times_\chi \mathbb{Z}_s$ .

**Algoritmo 4.4.15 ENTRADA:** un producto semidirecto  $\mathbb{Z}_r \times_\chi \mathbb{Z}_s$ .

- Paso 1.** Calcular  $d_3 : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'$ , diferencial del modelo homológico de  $\mathbb{Z}_r \times_\chi \mathbb{Z}_s$  en dimensión 3.
- Paso 2.** Calcular  $H_2(\mathbb{Z}_r \times_\chi \mathbb{Z}_s)$  y 2-ciclos representativos a partir de  $d_3$ .
- Paso 3.** Elevar los 2-ciclos representativos de  $H_2(\mathbb{Z}_r \times_\chi \mathbb{Z}_s)$  a  $\bar{B}_2(\mathbb{Z}[\mathbb{Z}_r \times_\chi \mathbb{Z}_s])$  a través de  $F$ .



SALIDA: Un conjunto de generadores conmutadores (i.e., de  $\text{Hom}(H_2(\mathbb{Z}_r \times_{\chi} \mathbb{Z}_s), \mathbb{Z}_2)$ ) para una base de matrices cocíclicas sobre  $\mathbb{Z}_r \times_{\chi} \mathbb{Z}_s$ .

Debemos hacer notar que el **Paso 2** frecuentemente requiere calcular la forma normal de Smith de la matriz que representa a  $d_3$ , que siempre es de dimensión  $4 \times 3$ , independientemente de los índices  $r$  y  $s$  de los factores. Esto es un importante avance en lo que concierne al cálculo de los generadores conmutadores, dado que las dimensiones de las matrices que surgen del complejo  $\bar{B}_2(\mathbb{Z}[G])$  dependen del orden del grupo; en nuestro caso,  $G = \mathbb{Z}_r \times_{\chi} \mathbb{Z}_s$ , el tamaño de la matriz correspondiente es  $(rs)^3 \times (rs)^2$ .

#### 4.4.4 Un ejemplo: grupos dihédricos $D_{2t,2}$ .

En esta sección, aplicamos el Algoritmo 4.4.15 al caso concreto de grupos dihédricos. Nos servimos de programas en MATHEMATICA, que serán comentados en el apéndice de la memoria.

Nos reduciremos al estudio de grupos  $D_{2t,2}$ , puesto que los grupos  $D_{k,2}$  con  $k$  impar no proveen información 2-homológica: se sabe que  $H_2(D_{k,2}) = 0$  en estos casos [174].

Sea  $D_{2t,2} = \{(0, 0), (1, 0), \dots, (2t - 1, 0), (1, 1), \dots, (2t - 1, 1)\}$ ,

$$\chi(0, n) = n, \quad \chi(1, n) = 2t - n, \quad \forall n \in \mathbb{Z}_{2t}.$$

Una fórmula explícita para  $F$  en estos casos viene dada por

$$\begin{aligned} F[(a_1, b_1), (a_2, b_2)] &= b_1 b_2 y^2 + 2b_1 \chi(b_2, a_2) xy + 2b_1 (\chi(b_2, a_2) - 1) x^2 + \\ &+ 2\lambda[\chi(b_2, a_2), \chi(b_2 b_1, a_1)] x^2 - \lambda[\chi(b_1, a_2), a_1] x^2 - a_2 b_1 xy - b_1 (a_2 - 1) x^2, \end{aligned}$$

con  $\lambda : \mathbb{Z}_k \times \mathbb{Z}_k \rightarrow \mathbb{Z}_2$ ,  $k \geq 2$ ,  $\lambda[x, y] = 1$  si  $x + y \geq k$  y 0 en otro caso.

Consideremos los casos  $t = 1$ ,  $D_{2,2} = \{(0, 0), (1, 0), (0, 1), (1, 1)\}$ ,  
 $t = 2$ ,  $D_{4,2} = \{(0, 0), (1, 0), (2, 0), (3, 0), (0, 1), (1, 1), (2, 1), (3, 1)\}$ ,  
y  $t = 6$ ,  $D_{12,2} = \{(0, 0), (1, 0), \dots, (11, 0), (0, 1), (1, 1), \dots, (11, 1)\}$ .

**Paso 1.** Calcular  $d_3$ .

$d(\mathcal{B})$	$t = 1$	$t = 2$	$t = 6$
$u_1w_1$	0	0	0
$w_1u_2$	$2u_1u_2$	$2w_1 + 4u_1u_2$	$10w_1 + 12u_1u_2$
$u_1w_2$	$-2u_1u_2$	$-2w_1 - 4u_1u_2$	$-10w_1 - 12u_1u_2$
$u_2w_2$	0	0	0

**Paso 2.** Calcular  $H_2(D_{2t,2})$  y 2-ciclos representativos a partir de  $d_3$ .

A la hora de calcular  $H_2(D_{2t,2})$  en los casos  $t = 1, 2, 6$ , es útil calcular la forma normal de Smith  $D_t = P_t M_t Q_t$  de la matriz  $M_t$  asociada a  $d_3$ , con matrices de cambio de base  $P_t$  y  $Q_t$ , respectivamente.

En estos casos,

	$t = 1$	$t = 2$	$t = 6$
$D_t$	$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
$Q_t$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 & -6 & 0 \\ 1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Así,  $H_2(D_{2t,2}) = \mathbb{Z}_2$  para  $t = 1, 2, 6$  y el único 2-ciclo representativo es el primer elemento de la nueva base  $\mathcal{V}$  de  $(E(u_1, u_2; 1) \otimes \Gamma(w_1, w_2; 2))|_{||=2}$ .

Con vistas a trasladar a la base  $\mathcal{B}'$  de  $(E(u_1, u_2; 1) \otimes \Gamma(w_1, w_2; 2))|_{||=2}$  la información homológica que  $H_2(D_{2t,2})$  provee, es suficiente seleccionar las entradas impares de cada una de las columnas de  $Q_t$  que corresponden al 2-ciclo representativo en la base  $\mathcal{V}$  (es decir, seleccionar qué elementos de  $(E(u_1, u_2; 1) \otimes \Gamma(w_1, w_2; 2))|_{||=2}$  con respecto a la base  $\mathcal{B}'$  tienen una entrada impar en la posición correspondiente a un 2-ciclo representativo, tomando coordenadas en  $\mathcal{V}$ ).

La información homológica está concentrada en aquellos elementos con coordenadas  $(-, n, -)_{\mathcal{B}'}$  para valores impares de  $n$ , en el caso  $t = 1$ ; en elementos de la forma  $(n, -, -)_{\mathcal{B}'}$  para valores impares de  $n$  en el caso  $t = 2$ ; y en elementos  $(n, m, -)_{\mathcal{B}'}$  para  $n, m$  de paridad distinta en el caso  $t = 6$ .

**Paso 3.** Elevar los 2-ciclos representativos de  $H_2(D_{2t,2})$  a  $\bar{B}_2(\mathbb{Z}[D_{2t,2}])$  a través de  $F$ .



Para ello, será suficiente detectar qué elementos de  $\bar{B}_2(\mathbb{Z}[D_{2t,2}])$  se proyectan vía  $F$  sobre elementos  $(-, n, -)_{\mathcal{B}'}$  para  $n$  impar ( $t = 1$ ),  $(n, -, -)_{\mathcal{B}'}$  para  $n$  impar ( $t = 2$ ), y  $(n, m, -)_{\mathcal{B}'}$  para  $n, m$  de paridad distinta ( $t = 6$ ). Estos elementos indican las posiciones no triviales dentro de la  $|D_{2t,2}| \times |D_{2t,2}|$  matriz cocíclica generadora de la parte conmutadora.

En el caso  $t = 1$ , obtenemos los siguientes elementos:

$$[(0, 1), (1, 0)], [(1, 1), (1, 0)], [(0, 1), (1, 1)], [(1, 1), (1, 1)].$$

Para  $t = 2$ ,

$$\begin{aligned} & [(1, 0), (3, 0)], [(1, 0), (3, 1)], [(2, 0), (2, 0)], [(2, 0), (3, 0)], [(2, 0), (2, 1)], \\ & [(2, 0), (3, 1)], [(3, 0), (1, 0)], [(3, 0), (2, 0)], [(3, 0), (3, 0)], [(3, 0), (0, 1)], \\ & [(3, 0), (2, 1)], [(3, 0), (3, 1)], [(0, 1), (2, 0)], [(0, 1), (2, 1)], [(1, 1), (1, 0)], \\ & [(1, 1), (2, 0)], [(1, 1), (1, 1)], [(1, 1), (3, 1)], [(2, 1), (1, 0)], [(2, 1), (1, 1)], \\ & [(3, 1), (1, 0)], [(3, 1), (3, 0)], [(3, 1), (1, 1)], [(3, 1), (3, 1)]. \end{aligned}$$

En el caso  $t = 6$ , los elementos que se proyectan vía  $F$  sobre elementos  $(n, m, -)_{\mathcal{B}'}$  para  $n, m$  de paridad distinta son aquellos  $[(a_1, b_1), (a_2, b_2)]$  de modo que

$$\begin{cases} b_1 = 0, a_1 + a_2 > 11; \\ \text{ó} \\ b_1 = 1, a_1 < a_2. \end{cases}$$

**SALIDA:** un conjunto de generadores de la parte conmutadora para una base de matrices cocíclicas sobre  $D_{2t,2}$ ,  $t = 1, 2, 6$ . Asumiendo que  $K^2 = 1$ , obtenemos

$t = 1$	$t = 2$	$t = 6$
$\begin{pmatrix} A_1 & A_1 \\ B_1 & B_1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} A_2 & A_2 \\ B_2 & B_2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} A_6 & A_6 \\ B_6 & B_6 \end{pmatrix}$

donde

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B_1 = \begin{pmatrix} 1 & K \\ 1 & K \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & K \\ 1 & 1 & K & K \\ 1 & K & K & K \end{pmatrix}, \quad B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & K & 1 \\ 1 & K & K & 1 \\ 1 & K & 1 & 1 \\ 1 & K & 1 & K \end{pmatrix},$$

$$A_6 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & K \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & K & K \\ 1 & K & \cdots & K & K \end{pmatrix}, \quad B_6 = \begin{pmatrix} 1 & K & \cdots & K & K \\ 1 & 1 & \cdots & K & K \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & K \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

La matriz  $A_6$  se suele denominar *reversa negacíclica*.

En general, se puede probar que para  $t > 2$  el cálculo de  $H_2(D_{2t,2})$  se reduce a las matrices

$$D_t = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad Q_t = \begin{pmatrix} -1 & -t & 0 \\ 1 & t-1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

de modo que  $H_2(D_{2t,2}) = \mathbb{Z}_2$  y la información 2-homológica se concentra en aquellos elementos con coordenadas  $(n, m, -)_{B'}$  para  $n, m$  de paridad distinta.

Así, el conjunto de generadores de la parte conmutadora para una base de matrices cocíclicas sobre  $D_{2t,2}$  se reduce a  $\left\{ \begin{pmatrix} A_t & A_t \\ B_t & B_t \end{pmatrix} \right\}$ , donde  $A_t$  denota la correspondiente matriz reversa negacíclica y  $B_t$  consiste en la matriz cuyas filas son las propias de  $A_t$ , pero dispuestas en orden inverso.

Debemos incidir en el hecho de que las matrices cocíclicas sobre los grupos dihédricos ya habían sido determinadas en [73], utilizando las técnicas desarrolladas por Flannery.

**Nota 4.4.16** El caso  $t = 2$  fue estudiado asimismo en [52], donde se recogía que el generador de la parte conmutadora era

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & B & B & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & B & B & B & 1 & 1 & B \\ 1 & B & B & B & B & 1 & B & B \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & B & B & B & B & 1 & B & B \\ 1 & 1 & B & B & B & 1 & 1 & B \\ 1 & 1 & 1 & B & B & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$



con  $B^2 = 1$ .

Esta matriz y la que nosotros damos como generador difieren en el producto (Hadamard) de un generador coborde  $C$  y un generador simétrico  $S$ , que son

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & A & 1 & A & A & A & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & A & 1 & A & 1 \\ 1 & A & 1 & A & A & 1 & 1 & A \\ 1 & 1 & A & 1 & 1 & 1 & A & 1 \\ 1 & A & 1 & 1 & A & 1 & 1 & 1 \\ 1 & A & A & A & A & A & 1 & A \\ 1 & 1 & 1 & A & A & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & D & 1 & D & 1 & D & 1 & D \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & D & 1 & D & 1 & D & 1 & D \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & D & 1 & D & 1 & D & 1 & D \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & D & 1 & D & 1 & D & 1 & D \end{pmatrix},$$

con  $A = D = -1$ .

La matriz  $C$  proviene de cualquiera de las aplicaciones  $\alpha_k : D_{4,2} \rightarrow \mathbb{K}_2$ , para  $k \in \{1, -1\}$ , con

$$\begin{aligned} \alpha(0,0) &= 1, & \alpha(1,0) &= -1, & \alpha(2,0) &= -1, & \alpha(3,0) &= 1, \\ \alpha(0,1) &= k, & \alpha(1,1) &= k, & \alpha(2,1) &= k, & \alpha(3,1) &= -k. \end{aligned}$$

**Apéndice A.**  
**Programación.**

# Apéndice A.

## Programación.

En este apéndice pretendemos explicar cómo se ha llevado a cabo la parte de programación de los algoritmos descritos en la memoria, y comentamos aquellas rutinas que nos parecen más relevantes.

El trabajo de implementación lo hemos desarrollado en MATHEMATICA, y se ha de entender como una herramienta complementaria en la elaboración de la memoria, y en caso alguno como un paquete informático de cálculo homológico a medirse a nivel internacional con los consagrados AXIOM [113, 116], MAGMA [38, 31], GAP o KENZO [148, 144, 149].

De hecho, una interesante labor que se nos abre en el futuro inmediato es la de depurar, optimizar y traducir los procesos aquí descritos a alguno de los sistemas anteriores.

Por este orden, abordamos primero el programa que calcula la homología a partir de la forma normal de Smith de las matrices asociadas a la diferencial; después, el programa que calcula el modelo de una álgebra conmutativa diferencial graduada; y, para terminar, aquel que determina la homología de los productos semidirectos de grupos tratados en el capítulo cuatro.

A partir de éste, se podría elaborar otro programa que generase matrices cocíclicas y matrices cocíclicas de Hadamard sobre estos productos semidirectos de grupos. Nosotros sólo lo hemos hecho para casos particulares, algunos de los cuales se han descrito en el capítulo cuarto.

## A.1 Cálculo explícito de la homología entera.

En [133] se describe un método para calcular la homología entera de módulos libres de tipo finito (i.e., con un número finito de generadores en cada grado), en función del cálculo de formas normales de Smith [170] de las matrices que representan en cada grado el operador diferencial del módulo de partida.

Más concretamente, supongamos que  $(M, d)$  es un DG-módulo libre sobre  $\mathbb{Z}$  de tipo finito. Vamos a determinar una descomposición de  $M_n$  en la forma  $M_n = U_n \oplus V_n \oplus W_n$ , donde  $d(U_n) \subset W_{n-1}$ ,  $d(V_n) = 0$ ,  $d(W_n) = 0$  y la expresión de  $d_n|_{U_n}$  respecto de unas bases adecuadas de  $U_n$  y  $W_{n-1}$  será de la forma

$$\begin{pmatrix} b_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & b_l \end{pmatrix},$$

con  $b_i \in \mathbb{N}$  y  $b_1|b_2|\cdots|b_l$ .

Sean  $Z_n = \text{Ker}d_n$  y  $B_n = \text{Im}d_{n+1}$  los ciclos y bordes correspondientes en grado  $n$ . Definimos  $W_n$  como el submódulo de  $M_n$  generado por los *bordes generalizados*, que son todos aquellos elementos que admiten un múltiplo entero no nulo en  $B_n$ . Evidentemente,  $B_n \subset W_n \subset Z_n \subset M_n$ .

Con estas definiciones, está claro que  $Z_n/W_n$  da la parte libre de  $H_n(M)$ ; de modo que si  $\{d_1, \dots, d_t\}$  es una base de  $W_n$  y  $\{c_1 + W_n, \dots, c_k + W_n\}$  es una base de  $Z_n/W_n$ , entonces  $\{c_1, \dots, c_k, d_1, \dots, d_t\}$  conforma una base de  $Z_n$ . Si tomamos  $V_n$  como el módulo de base  $\{c_1, \dots, c_k\}$ , todas las condiciones de partida se verifican, a excepción de la expresión matricial de  $d_n$ .

Para salvar esta eventualidad, basta tomar la forma normal de Smith  $D_n$  de la matriz  $M_n$  que representa  $d_n$ , de modo que respecto de unas bases  $\{e_1, \dots, e_p\}$  de  $C_n$

y  $\{e'_1, \dots, e'_q\}$  de  $C_{n-1}$ , se tiene que

$$D_n = \begin{pmatrix} b_1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & b_l & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}_{p \times q},$$

con  $b_i \in \mathbb{N}$ ,  $b_1 | b_2 | \cdots | b_l$ .

De este modo,  $\{e_{l+1}, \dots, e_p\}$  conforma una base de  $Z_n$ ,  $\{e'_1, \dots, e'_l\}$  conforma una base de  $W_{n-1}$  y  $\{b_1 e'_1, \dots, b_l e'_l\}$  conforma una base de  $B_{n-1}$ .

Para calcular  $H_n(M) = Z_n/B_n \cong (Z_n/W_n) \oplus (W_n/B_n)$ , bastará realizar las descomposiciones anteriores para las matrices  $M_n$  (obtenemos  $Z_n$ ) y  $M_{n+1}$  (obtenemos  $W_n$  y  $B_n$ ).

Nótese que el sumando  $(Z_n/W_n)$  corresponde a la parte libre (por tanto, tantas copias de  $\mathbb{Z}$  como diferencia de las dimensiones de  $Z_n$  y  $W_n$ ), y el sumando  $(W_n/B_n)$  corresponde a la parte de torsión (y los coeficientes  $b_i > 1$  de los generadores de  $W_n$  en  $B_n$  dan los índices de torsión).

Comentemos la implementación que realizamos de este proceso en MATHEMATICA.

Para el cálculo de la forma normal de Smith, nos servimos del paquete elaborado por David Jabon en 1994 desde la *Eastern Washington University*.

En este paquete hay disponibles cuatro funciones elementales, a aplicar sobre una matriz de enteros  $A$ :

- `SmithForm[A]` da la forma normal de Smith  $D$  de  $A$ .
- `ExtendedSmithForm[A]` devuelve la lista  $\{D, \{P, Q\}\}$ , donde  $D = PAQ$ ;
- `InvariantFactors[A]` devuelve la lista de los factores invariantes de  $A$ , esto es, los elementos en la diagonal de  $D$ .
- `ElementaryDivisors[A]` devuelve la lista de los divisores elementales de  $A$ , esto es, los elementos de la diagonal de  $D$  que son distintos de 1.

A partir de estas funciones elementales, es fácil implementar una rutina para el cálculo de la homología de  $M$  en grado  $n$ , conocidas las diferenciales  $d_n$  y  $d_{n+1}$ . Este proceso dependerá de la codificación elegida para los generadores del DG-módulo  $M$ .

Este será el procedimiento que seguiremos para poder calcular las homologías de CDGAC-álgebras y productos semidirectos de grupos abelianos, con dato de entrada las diferenciales correspondientes que dan los teoremas 2.9 y 4.2.7, respectivamente.

En las secciones que siguen estableceremos sendas codificaciones en *Mathematica* para estas fórmulas.

## A.2 Homología de CDGAC-álgebras de tipo finito.

Vamos a implementar un programa en MATHEMATICA que calcule la diferencial  $d_\infty$  del Teorema 2.9, propia del modelo que provee el Teorema 3.2.5.

Este programa tomará como datos de entrada el número  $n1$  de factores que componen el producto torcido inicial  $(A_1 \otimes \cdots \otimes A_t, d)$ , con  $A_i \in \{E, P\}$ , y las imágenes de los  $n1$  generadores por la diferencial  $d$ .

Recordemos que la expresión para  $d_\infty$  es

$$\begin{aligned} d_\infty &= ((f_{\bar{B}P} \otimes \cdots \otimes f_{\bar{B}P})(1^{\otimes t-2} \otimes f_{\bar{B}\otimes}) \cdots f_{\bar{B}\otimes} \delta_d \circ \\ &\circ \sum_{i \geq 0} (-1)^i \left[ (\phi_{\bar{B}\otimes} + \sum_{j=1}^{t-2} g_{\bar{B}\otimes}(1^{\otimes j-1} \otimes g_{\bar{B}\otimes})(1^{\otimes j} \otimes \phi_{\bar{B}\otimes})(1^{\otimes j-1} \otimes f_{\bar{B}\otimes}) \cdots f_{\bar{B}\otimes}) + \right. \\ &+ [g_{\bar{B}\otimes} \cdots (1^{\otimes t-2} \otimes g_{\bar{B}\otimes}) \sum_{j=0}^{t-1} (g_{\bar{B}P} f_{\bar{B}P} \otimes \cdots \otimes g_{\bar{B}P} f_{\bar{B}P} \otimes \phi_{\bar{B}P} \otimes 1^{\otimes t-j+1}) \circ \\ &\left. \circ (1^{\otimes t-2} \otimes f_{\bar{B}\otimes}) \cdots f_{\bar{B}\otimes}] \delta_d \right]^i \circ [g_{\bar{B}\otimes} \cdots (1^{\otimes t-2} \otimes g_{\bar{B}\otimes})(g_{\bar{B}P} \otimes g_{\bar{B}P})], \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} \delta_d([a_1^1 \otimes \cdots \otimes a_n^1 | \cdots | a_1^k \otimes \cdots \otimes a_n^k]) &= \\ - \sum_{i=1}^k (-1)^{e_i-1} [a_1^1 \otimes \cdots \otimes a_n^1 | \cdots | d(a_1^i \otimes \cdots \otimes a_n^i) | \cdots | a_1^k \otimes \cdots \otimes a_n^k], \end{aligned}$$

para  $e_i = i + |a_1^1 \otimes \cdots \otimes a_n^1| + \cdots + |a_1^i \otimes \cdots \otimes a_n^i|$ .

El sistema de codificación que hemos elegido es el siguiente:

- Para los elementos del modelo homológico  $\otimes_{i=1}^t hBA_i$ , listas de listas de longitud  $t + 1$  de la forma  $\{\lambda_j, i_{j,1}, \dots, i_{j,t}\}$ , que representan combinaciones lineales del tipo

$$\sum_j \lambda_j w^{i_{j,1}} \otimes \dots \otimes w^{i_{j,t}}.$$

- Para los elementos en  $\bar{B}(\otimes_{i=1}^t A_i)$ , listas de listas de la forma  $\{\lambda_m, \{i_{m,1,j}, \dots, i_{m,1,t}\}, \dots, \{i_{m,n_m,j}, \dots, i_{m,n_m,t}\}\}$ , que representan combinaciones lineales del tipo

$$\sum_m \lambda_m [w^{i_{m,1,j}} \otimes \dots \otimes w^{i_{m,1,t}} | \dots | w^{i_{m,n_m,j}} \otimes \dots \otimes w^{i_{m,n_m,t}}].$$

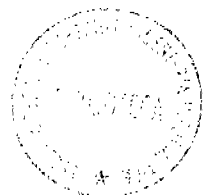
- Para elementos en  $\bar{B}(A) \otimes \bar{B}(A')$ , listas de pares de elementos de la forma anterior.

El primer dato a introducir es el número de factores  $n_1$  que componen el álgebra producto torcido inicial.

```
Label[Inicio];
n1=Input["How many factors do compose the product algebra A?"];
```

Después, se pide el grado de cada uno de los generadores, y se almacena en una lista  $dim_1$ , que contempla una segunda componente, que identifica con un número si el álgebra factor en cuestión es un álgebra polinomial (0) o exterior (1). En la lista  $posalgext$  se almacenan los índices que corresponden a álgebras exteriores.

```
dim1={};
Do[
  Print["Please, introduce degree of generator ",i," on A."];
  a=Input[];
  dim1=Append[dim1,a],
{i,n1}];
dim1=Transpose[Table[{Mod[dim1[[i]],2],dim1[[i]]},{i,n1}]];
posalgext=Select[Table[i,{i,n1}],dim1[[1,#1]]==1&];
(*
The number of factors on A is n1. Characters and
```



generator degrees are located on the list dim1.

\*)

La diferencial  $d$  actuando sobre cada generador se codifica como una lista de listas de longitud  $t + 1$ , cuya primera entrada corresponde con un escalar y el resto marca el generador de grado esa entrada multiplicada por el grado del generador correspondiente.

```
Print["The ",n1," generators of A are denoted by u[i]."];
Print["The perturbation datum delta is determined by
      its images upon u[i], which are assumed
      to be lists of length ",n1+1,""];
Print["The first element in the list corresponds
      to the scalar coefficient."];
Print["The following elements represent the exponent of
      the associated power of the generator of
      the correspondent algebra factor."];
delta={};
Do[
  Print["Please, introduce delta(u["i,"])
        as a list of lists of length ",n1+1];
  delta=Append[delta,Input[]],
{i,n1}];
```

Para simplificar combinaciones lineales en el modelo se utilizan las siguientes funciones.

```
coincieen[l1_,l2_] :=Module[{i},
  i=0;
  Do[
    If[
      Rest[l1[[i1]]]==Rest[l2],
      i=i1],
    {i1,Length[l1]}];
```



```

i];
simplmodelo[l1_List,l2_List]:=Module[{k,j},
  If[
    12[[1]]==0,k=l1,
    j=coincideen[l1,l2];
    If[
      j==0,k=Append[l1,l2],
      ReplacePart[l1,Prepend[Rest[l2],
        l1[[j,1]]+12[[1]],j]]];
k];

```

Si se quisiera extender la definición de  $d$  para que se pudiera aplicar sobre cualquier elemento, bastaría definir una función apropiada que extendiera a  $d$  en forma de derivación. Éste es el cometido de la función `apdelta1`. La función `simplalgebra` controla que la regla de la derivación se aplique bien, en el sentido de que se considere nulo cualquier elemento con un generador de un álgebra exterior elevado a una potencia mayor que 1, o que el producto de generadores de álgebras de potencias divididas dé lugar al coeficiente binomial correspondiente.

```

apdelta1[l_]:=Fold[simplmodelo,{Table[0,{i1,n1+1}]},
  Flatten[Map[apdelta2,l],1]];
apdelta2[l_]:=Module[{pos,k},
  k={Table[0,{i1,n1+1}]};
  pos=Select[Table[1+i1,{i1,n1}],1[[#1]]!=0&];
  k=Join[k,Flatten[Table[apdelta3[l,pos[[i1]]-1],
    {i1,Length[pos]}],1]];
posalg[l_]:=Module[{i1},
  Do[
    If[1[[1+posalgext[[i1]]]]>1,Throw[False]],
    {i1,Length[posalgext]}];
  Throw[True]];
simplalgebra[l_]:=Module[{k},
  If[Catch[posalg[l]],
    k=l,
    k=Table[0,{i1,n1+1}]];

```

```

k];
apdelta3[l_,i1_]:=Table[simplalgebra[Prepend[(Rest[l]-Insert[
  Table[0,{i2,n1-1}],1,i1])+Rest[delta[[i1,i3]]],
  l[[1]]*delta[[i1,i3,1]]*((-1)^Apply[Plus,Take[l,{2,i1}]]]
  *Prepend[l2,Product[Binomial[l[[i4 + 1]] + delta[[i1, i4]], l[[i4 +
  1]]], {i4, n1}]]]],
  {i3,Length[delta[[i1]]]}];

```

Se puede implementar una pequeña rutina de comprobación que indica que  $d$  verifica ser nilpotente de orden 2.

```

Print["Checking that delta is well defined as a
  perturbation datum."];
Print["Wait a moment, please."];
comprobar1[l1_,i1_]:=If[
  (Apply[Plus,Rest[l1]*dim1[[2]]]==dim1[[2,i1]]-1)||
  (l1[[1]]==0),
  True,
  False];
comprobar2[l1_,i1_]:=Module[{}],
  Do[
    If[
      comprobar1[l1[[i2]],i1],,
      Throw[False]],
    {i2,Length[l1]}];
Throw[True]];
Do[
  If[
    Catch[comprobar2[delta[[i]],i]],,
    Print["The given data do not define a
      perturbation datum, since delta(u[\",i,\"])
      is not of the appropriate degree."];
    Goto[Inicio]];
  If[apdelta1[delta[[i]]]=={Table[0,{j,n1+1}]},,
    Print["delta does not define a perturbation

```

```

    datum: delta^2(u["i,"]) is not zero.";
    Goto[Inicio]],
{i,n1}];
Print["OK to proceed with the computation."];

```

Ahora procedemos a codificar las inyecciones  $g_{\bar{B}E}$  y  $g_{\bar{B}P}$ .

$$g_{\bar{B}E}(\gamma_k(\sigma(u))) = [u | \cdot^k \cdot | u], \quad g_{\bar{B}P}(\sigma(v)) = [v].$$

El código no necesita de explicaciones.

(\*

A basis element of simplicial degree  $t$  of  $B(A_i(u))$  is codified as a list of length  $t+1$ , so that  $\{\lambda, \{s_1\}, \dots, \{s_t\}\}$  is in correspondance with the element  $\lambda[u^{s_1} | \dots | u^{s_t}]$ . Elements in the homological model of  $B(A_i)$  are codified as pairs  $\{\lambda, \text{exponent}\}$  and their linear relations.

\*)

(\*

$g3[n][\{\lambda, t\}]$  gives the image of  $\lambda * \gamma_t(\sigma(u))$  by the inclusion morphism on the homological model of  $B(A_i)$ , with  $n=0$  if  $A_i=P$  and  $n=1$  if  $A_i=E$ , as it is the case.

\*)

```

g3[1][1_] := Module[{k},
  If[1[[2]] == 0,
    k = {1[[1]], {}},
    k = Prepend[Table[{1}, {i, 1[[2]]}], 1[[1]]]];

```

k];

```

g3[0][1_] := Module[{k},
  If[1[[2]] == 0,
    k = {1[[1]], {}},
    If[1[[2]] == 1,
      k = {1[[1]], {1}},
      k = {0, {}}]];

```

k];

Para implementar las proyecciones  $f_{BE}$  y  $f_{BP}$ ,

$$f_{BE}([u | \overset{k}{\cdot} | u]) = \gamma_k(\sigma(u)), \quad f_{BP}([v^{r_1} | v^{r_2} | \dots | v^{r_m}]) = \begin{cases} \sigma(v), & \text{si } m = 1 \text{ y } r = 1, \\ 0, & \text{si } m > 1 \text{ ó } r_1 > 1; \end{cases}$$

procedemos de la siguiente manera.

(\*

The output of `f[n][l]` is a list of length 2, `{lambda,t}`. The first element (lambda) is nothing but the corresponding scalar integer. The second element (t) corresponds to the exponent of the generator `u` on the homological model of `B(Ai)` with `n=0` if `Ai=P` and `n=1` if `Ai=E`, as it is the case.

\*)

```
f[1][l_]:=Module[{k},
  If[Length[l[[2]]]==0,
    k={l[[1]],0},
    k={l[[1]],Length[l]-1}];
```

k];

```
f[0][l_]:=Module[{k},
  If[Length[l[[2]]]==0,
    k={l[[1]],0},
    If[(Length[l]==2)&&(l[[2]]=={1}),
      k={l[[1]],1},
      k={0,Length[l]-1}]]];
```

k];

```
f[dimen_List][l_List]:=unif2[Table[
  f[dimen[[i]][l[[i]]],{i,Length[dimen]}]]];
```

Del mismo modo, se puede implementar los operadores de homotopía

$$\phi_{BE} \equiv 0, \quad \phi_{BP}([v^{r_1} | \dots | v^{r_m}]) = \begin{cases} [v | v^{r_1-1} | v^{r_2} | \dots | v^{r_m}], & \text{si } r_1 > 1, \\ 0, & \text{si } r_1 \leq 1. \end{cases}$$

El código es

```
(*
The function hofi[n][l] computes the image of an
element l in B(An) by applying the homotopy operator
of the contraction. Notice that hofi is necessarily
zero in the case Ai=E.
*)
hofi[1][1_]:=0, ;
hofi[0][1_]:=Module[{k},
  k = 0, ;
  If[1[[2]] == {}, ,
    If[1[[2]] != {1},
      k=Join[{1[[1]],{1},1[[2]]-1},Drop[1,2]]];
k];
```

La fórmula de  $g_{\bar{B} \otimes}$  consiste en el producto shuffle

$$g_{\bar{B} \otimes}([a_1 | \cdots | a_n] \otimes [g_1 | \cdots | g_m]) = [a_1 \otimes 1 | \cdots | a_n \otimes 1] \star [1 \otimes g_1 | \cdots | 1 \otimes g_m].$$

Pero, en verdad, nosotros no estamos interesados sólo en implementar  $g_{\bar{B} \otimes}$ , sino también cada composición del tipo  $(1^{\otimes i-1} \otimes g_{\bar{B} \otimes}) \cdots (1^{\otimes t-2} \otimes g_{\bar{B} \otimes})$ .

Para ello, bastará definir una función `gbar[i][l1,l2]` que lleve un elemento de  $\bar{B}(A_i) \otimes \bar{B}(A_{i+1} \otimes \cdots \otimes A_t)$  en otro de  $\bar{B}(A_i \otimes \cdots \otimes A_t)$ , puesto que los primeros  $i-1$  factores permanecen inalterados.

En el código que sigue, las funciones `*augment*` calculan listas de shuffles y las funciones `gradoshu*` calculan los signos adecuados.

```
(*
Function gbar[i][l1,l2] computes the image of
the inclusion morphism of the bar contraction,
applied to the given simple elements l1 and l2 in B(Ai)
and B(Ai+1x...xAn1), respectively.
*)
augment[j6_][k6_]:=Table[Join[k6,{j5}],{j5,Last[k6]+1,j6}];
```

```

apaument[j6_,j5_][k6_] := Flatten[Map[apaument[j6-j5+1+Length[k6[[1]]],k6],1];
shuf[j5_,1] := Table[{j6},{j6,1,j5}];
shuf[j5_,j6_] := Nest[apaument[j5,j6],shuf[j5-j6+1,1],j6-1];
insertarlista[l1_,l2_][l3_] := Module[{k},
insertarlista2[l2_,l4_] := Insert[l2, l4[[1]], l4[[2]]];
gradshuf2[k1_] := 1+Apply[Plus,k1*Take[dim1[[1]],-Length[k1]]];
gradoshu[1][k2_,k3_] := 1;
gradoshu[0][k2_,k3_] := Module[{suma},
suma=0;
Do[
suma=suma+Apply[Plus,Map[gradshuf2,Take[
k2,{2,1-i1+k3[[i1]]}]]],
{i1,Length[k3]}]; (-1)^suma];
mezclar[k1_,k2_,i_][k3_] := Prepend[insertarlista[Rest[k1],
Rest[k2]][k3],k1[[1]]*gradoshu[dim1[[1,i]]][k2,k3]];
anadir1[i_, l1_][l2_] := Map[anadir2[i, l1], l2];
anadir2[1, l1_][l2_] := Join[l1, l2];
anadir2[0, l1_][l2_] := Join[l2, l1];
gbar[i_][l1_,l2_] := Module[{k,shuffle,m1,m2},
If[l1[[1]] == 0 || l2[[1]] == 0, k = {{0, {}}},
If[l1[[2]] == {},
If[l2[[2]] == {},
k={{l1[[1]]*l2[[1]], {}}},
k = {Prepend[anadir1[1, {0}][Rest[l2]], l1[[1]]*l2[[1]]}],
k = Prepend[anadir1[0, Table[0, {i1, n1 -
i}]] [Rest[l1]], l1[[1]]*l2[[1]]];
If[l2[[2]] != {},
m1=k;m2=Prepend[anadir1[1, {0}][Rest[l2]], 1];
shuffle = shuf[Length[l1] + Length[l2] - 2, Length[l1] - 1];
k = Map[mezclar[m1, m2, i], shuffle], k = {k}
]];
k];

```

La proyección  $f_{B \otimes}$  actuaba en la forma

$$f_{B \otimes}((a_1 \otimes a'_1 | \dots | a_m \otimes a'_m)) = \sum_{i=0}^m \nu_i [a_1 | \dots | a_i] \otimes [a'_{i+1} | \dots | a'_m],$$

donde  $\nu_i$  era cero cuando alguno de entre  $\{a_{i+1}, \dots, a_n, a'_1, \dots, a'_i\}$  no era escalar, y su producto en otro caso.

Razonando de igual modo que antes, procederemos a implementar una función algo más compleja `fbar[i][1]`, que sea válida para composiciones de la forma  $(1^{\otimes t-2} \otimes f_{B \otimes}) \cdots (1^{\otimes i-1} \otimes f_{\bar{B} \otimes})$ .

Las dificultades que surgen son, principalmente, detectar qué índices dan lugar a sumandos no nulos, y determinar los signos correctos de cada sumando. Las funciones `cota*` y `signo` ayudan en este propósito.

(\*

Function `fbar[i][1]` computes the image of an element `l` of  $B(A_1 \times \dots \times A_n)$  by the projection of the bar contraction.

\*)

```
fbar[i_][1_] := Module[{k, m1, m2, cota1, cota2, cota3, cota4, t},
  If[
    If[1[[2]] == {}, k = {{{1[[1]]}, {}}, {1, {}}}],
    m1 = Table[{First[1[[i1]]]}, {i1, 2, Length[1]}];
    m2 = Map[Rest, Rest[1]];
    t = Length[m1];
    cota1 = t + 1 - Position[Append[Reverse[m2], Table[0,
      {i1, n1 - i}], Table[0, {i1, n1 - i}], 1, 1];
    cota2 = Position[Append[m1, {0}], {0}, 1, 1] - 1;
    cota3 = Last[Prepend[Select[Table[i1,
      {i1, t}], m1[[#1]] != {0} &], 0]];
    cota4 = First[Append[Select[Table[i1, {i1, 0, t - 1}],
      m2[[#1 + 1]] != Table[0, {i1, n1 - i} &], t]];
    cota1 = Max[cota1, cota3];
    cota2 = Min[cota2, cota4];
    coger[l1_, i1_] := Take[l1, i1];
    coger[l1_, 0] := {};
    If[cota1 > cota2,
      k = {{{0, {}}, {0, {}}}],
      k = Table[{Join[{1[[1]]}, coger[m1, i1]],
        Join[{1}, coger[m2, i1 - t]]}, {i1, cota1, cota2}]]];
```



k];

La fórmula de  $\phi_{\bar{B} \otimes}$  que provee el Teorema 3.3.3 a través de la teoría de inversiones, resulta ser

$$\phi_{\bar{B} \otimes}([a_1 \otimes a'_1 | \cdots | a_n \otimes a'_n]) = \sum_{q \in \{\nu_i \neq 0\}} \sum_{p=0}^{n-q-1} (-1)^{sg}.$$

$$[a_1 \otimes a'_1 | \cdots | a_{n-p-q-1} \otimes a'_{n-p-q-1} | a'_{n-p-q} \cdots a'_{n-q} | a_{n-p-q} | \cdots | a_{n-q} | a'_{n-q+1} | \cdots | a'_n],$$

donde

$$\begin{aligned} sg = n - p - q - 1 + |a_1| + \cdots + |a_{n-p-q-1}| + \sum_{i=n-q+1}^n (|a_1| + \cdots + |a_i|) + \\ + q(|a_1| + \cdots + |a_{n-q}|) + \sum_{i=n-p-q}^{n-q-1} (|a'_1| + \cdots + |a'_i|) + (p-1)(|a'_1| + \cdots + |a'_{n-q}|) + \\ + \sum_{i=n-p-q}^{n-q} |a_i|(|a'_i| + \cdots + |a'_n|) + \sum_{j=n-q+1}^n \sum_{k=1}^{j-1} |a_j| |a'_k|. \end{aligned}$$

El código de esta fórmula es el siguiente.

(\*

Function phibar[i][l] computes the homotopy operator of the bar contraction acting on l. Notice that the contraction consists in  $B(A_1 x \dots x A_n) \rightarrow B(A_i) x B(A_{i+1} x \dots x A_n)$ .

\*)

```
phibar[i_][l_] := Module[{k, m0, m1, m2, m3, m4, n, x},
  If[l[[2]] == {}, k = {0, {}},
  n = Length[l] - 1;
  x = First[Append[Select[Table[i1, {i1, n}],
    l[[n+2-#1, 1]] != 0 &], n+1]];
  gr[l1_] := Apply[Plus, l1 * Take[dim1[[2]], -Length[l1]]];
  m1[i1_, i2_] := Take[l, {2, n-i1-i2}];
  m2[i1_, i2_] := {Prepend[Apply[Plus, Table[
    Rest[l[[i3]]], {i3, n+1-i2-i1, n+1-i1}], 0]};
  m3[i1_, i2_] := Table[Join[{First[l[[i3]]], Table[0,
    {i4, Length[l[[2]]]-1}], {i3, 1+n-i2-i1, 1+n-i1}];
  m4[i1_, i2_] := Table[Prepend[Rest[l[[i3]]], 0],
    {i3, n+2-i1, n+1}];
```



```

m0[i1_,i2]:=Module[{signo},
  signo=n-i1-i2;
  signo=signo+Apply[Plus,Table[Apply[Plus,
    Table[gr[Rest[1[[j2]]]],{j2,2,j1+1}],
    {j1,n-i1-i2,n-i1-1}]];
  signo=signo+(i2+1)*Apply[Plus,Table[gr[
    Rest[1[[j1]]]],{j1,2,n+1-i1}]];
  If[dim1[[1,i]]==1,
    signo=signo+Apply[Plus,Table[Apply[
      Plus,Table[First[1[[j2]]],
        {j2,2,j1+1}],{j1,n-i1+1,n}]];
    signo=signo+Apply[Plus,Table[
      First[1[[j1]]],{j1,2,n-i1-i2}]];
    signo=signo+i1*Apply[Plus,Table[
      First[1[[j1]]],{j1,2,n-i1+1}]];
    signo=signo+Apply[Plus,Table[
      First[1[[j1]]]*Apply[Plus,Table[
        gr[Rest[1[[j2]]]],{j2,j1,n}],
        {j1,n+1-i1-i2,n+1-i1}]];
    signo=signo+Apply[Plus,Table[
      Apply[Plus,Table[First[1[[j1]]]*
        gr[Rest[1[[j2]]]],{j2,2,j1}],
        {j1,n-i1+2,n+1}]]];
  signo=(-1)^signo;
  signo];
k=Flatten[Table[Table[Prepend[Join[m1[i1,i2],
  m2[i1,i2],m3[i1,i2],m4[i1,i2]],1[[1]]*m0[i1,i2]],
  {i2,0,n-i1-1}],{i1,0,x-1}],1]];
k];

```

Ahora, sólo queda engarzar convenientemente las aplicaciones anteriores.

(\*

Function `deltabar` gives the perturbation operator acting on  $B(A_1x \dots x_{A_1})$

related to `delta`, applied on a list of elements of  $B(A_1x \dots x_{A_1})$ .

\*)

(\*

Function `diftotal` gives the full perturbed differential morphism on the homological model. Its input data consists in a list of elements of the model, which are lists of length  $n_1+1$ .

\*)

(\*

The function `unif2` transforms a list  $\{\{\lambda_{1,1}, t_{1,1}\}, \dots, \{\lambda_{n_1,1}, t_{n_1,1}\}\}$  of elements of single models of  $B(A_{ij})$  into an unique list, which is an element of the model of  $B(A_{i1}x \dots x_{A_{i1}})$ . The inverse function is called `desunif`.

\*)

(\*

The function `simplmodelo` is used to simplify the output data of the differential morphisms.

\*)

(\*

The full inclusion morphism is called `gcompleta`. Its input data consists in a list of lists of length  $n_1+1$ . The output data consists in a list of simple elements in  $B(A_{1x} \dots x_{A_{n_1}})$ .

\*)

(\*

The input data of the full projection morphism (`fcompleta`) consists in a list of simple elements in  $B(A_{1x} \dots x_{A_{n_1}})$ . The output data consists in a simplified list of elements (lists of length  $n_1+1$ ) on the homological model.

\*)

```
unif2[l_]:=Module[{l1,l2},
  {l1,l2}=Transpose[l];Prepend[l2,Apply[Times,l1]]];
desunif[l_]:=
  Partition[Insert[l,1,Table[{i+2},{i,Length[l]-2}]],2];
```

```

diftotal[l_]:=Module[{k},
  k=Fold[simplmodelo,{Table[0,{i1,n1+1}],Flatten[Map[dpert,l],1]];
  If[k[[1,1]]==0,If[Length[k]==1,,k=Rest[k]]];
k];
inybar1[l_]:=Flatten[Map[inybar2,l],1];
inybar2[l_]:=Module[{j,k,k2},
  j=Length[l];k2=gbar[j-1][l[[j-1]],l[[j]]];
  k=Table[Append[Drop[l,-2],k2[[i]]],{i,Length[k2]}];
k];
gcompleta[l_]:=Flatten[Map[gcomp,l],1];
gcomp[l_]:=Module[{k,num},
  k=desunif[l];k=Table[g3[dim1[[1,i]]][k[[i]]],{i,n1}];
  If[n1==1,,k=Flatten[Nest[inybar1,{k},n1-1],1]];
k];
(* La entrada de proybar0 es una lista de elementos de B(A1x...xAn1).
*)
proybar0[l_]:=Module[{k},
  If[n1==1,k=1,
    k=proybar1[Map[List,l]];
    k=Nest[proybar1,k,n1-2]];
k]; proybar1[l_]:=Flatten[Map[proybar2,l],1];
proybar2[l_]:=Module[{k,j},
  k=fbar[Length[l]][Last[l]];
  k=Table[Join[Drop[l,-1],k[[i]]],{i,Length[k]}];
k];
fcompleta[l_]:=Module[{k},
  k=Fold[simplmodelo,{Prepend[Table[-1,{ij,n1}],0]},
    Map[f[dim1[[1]]],proybar0[l]]];
  If[Length[k]==1,k={Table[0,{ij,n1+1}]},
    k=Rest[k]];
k];
proybar3[l_,i_]:=Module[{k},
  If[i==n1-1,k={1},
    k=proybar1[Map[List,l]];
    k=Nest[proybar1,k,n1-2-i]];
k];

```

```

(*
Notice that the output of deltabar must be a list of elements in
B(A1x...xAn1).
*)
deltabar[l_]:=Module[{k},
  k=Fold[simplmodelo,{{0,{}}},Flatten[Map[deltabar2,l],1]];
  If[k[[1,1]]==0,If[Length[k]==1,,k=Rest[k]]];
k];
deltabar2[l_]:=Module[{k},
  If[Length[l[[2]]]==0,
    k={{0,{}}},
    k=Apply[Join,Table[deltabar3[l,i+1],{i,Length[l]-1}]];
  If[Length[k]==0,k={{0,{}}]];
k];
deltabar3[l_,i_]:=Module[{k,j,k1},
  k=apdelta1[{Prepend[l[[i]],1}]];
  If[k[[1]]==Table[0,{j,n1+1}],k1={},
    j=Length[k];k1=Table[ReplacePart[ReplacePart[l,Rest[k[[j1]]],i],
      k[[j1,1]]*1[[1]]*sigdeltabar[l,i],1],{j1,Length[k]}]];
k1];
sigdeltabar[l_,i_]:=i-1+Apply[Plus,
  Table[Apply[Plus,l[[j+1]]*dim1[[1]]],{j,i-2}]];
(*
Both the input and output of function funcionfi1 are a list of
elements in
B(A1x...xAn1).
*)
simplificarbar[l_]:=Catch[Do[
  If[l[[j]]=={0,{}},,Throw[True]],
  {j,Length[l]}];
Throw[False];
funcionfi2[l_]:=Module[{k,h1},
  k={{1}};h1=1;
  While[simplificarbar[Last[k]],
    k=Append[k,Flatten[Map[funcionfi3[h1],Last[k]],1]];h1=h1+1];
  Flatten[Drop[k,-1],1];

```

```

funcionfi1[l_]:=Flatten[Map[funcionfi2,l],1];
multiprimer[i_][l_]:=ReplacePart[l,l[[1]]*i,1];
funcionfi3[h2_][l_]:=Module[{k,k1,k2,j,k3},
  k=deltabar[{l}];
  If[k=={0,{}}],k3=k,
  k3={};Do[
    k1=Map[multiprimer[(-1)h2],funcionfi4[k[[j]]]];
    k2=Map[multiprimer[(-1)h2],funcionfi7[k[[j]]]];
    k3=Join[k3, k1, k2],
  {j, Length[k]}]];
k3];
funcionfi4[l_]:=Flatten[Table[funcionfi5[l,i],{i,n1}],1];
(*
The output of funcionfi5 consists in a list of elements in B(A)
endowed with the corresponding signs.
*)
funcionfi5[l_,i_]:=Module[{k},
  k=Flatten[Map[funcionfi6[i],proybar0[{l}]],1];
k];
gradofi1[l_,i_]:=Apply[Plus,Table[Length[Flatten[Rest[l[[i1]]],1]]+
  Apply[Plus,Apply[Join,Rest[l[[i1]]]*dim1[[2,i1]]],{i1,i-1}]];
funcionfi6[j_][l_]:=Flatten[Nest[inybar1,Map[multiprimer[(-1)gradofi1[l,j]],
  {Join[Table[g3[dim1[[1,i1]]][f[dim1[[1,i1]]][l[[i1]]]],{i1,j-1}],
  {hofi[dim1[[1,j]]][l[[j]]]},Table[l[[i1]],{i1,j+1,n1}]]],n1-1],1];
funcionfi7[l_]:=Flatten[Table[funcionfi8[l,i],{i,n1-1}],1];
funcionfi8[l_,i_]:=Flatten[Map[funcionfi9[n1-i],proybar3[{l},i]],1];
funcionfi9[i_][l_]:=Module[{k},
  k=phibar[i][Last[l]]; k=Table[Append[Drop[l,-1],k[[j]]],{j,Length[k]}];
  k=Flatten[Map[funcionfi10[i],k],1];
k];
funcionfi10[i_][l_]:=Module[{k,j},
  otrosigno[i1_]:=Module[{p},
    If[l[[i1,2]]=={ },p=0,
    p=Length[l[[i1]]]-1+Apply[Plus,Join[Rest[l[[i1]]]*dim1[[1,i1]]]];
  p];
j=Apply[Plus,Table[otrosigno[i1],{i1,1-1}]];j=(-1)j];

```



```

k=ReplacePart[1,ReplacePart[1[[i]],j*1[[i,1]],1],i];
Flatten[Nest[inybar1,{k},i-1],1]];
(*
The output of dperit consists in a list of lists of length n1+1,
which are single elements of the homological model.
The input data consists in a single element of the homological model.
*)
dperit[l_]:=Module[{k},
  k=gcompleta[{1}];
  k=fcompleta[deltabar[funcionfi1[k]]];
k];

```

### A.3 Homología de productos semidirectos.

Ahora, los datos de entrada son sendos grupos finitos  $A = \mathbb{Z}_{n_1} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{n_t}$  y  $G = \mathbb{Z}_{m_1} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{m_k}$ , y una acción de grupos  $\chi$ .

La expresión de la diferencial a calcular en este caso viene dada por el Teorema 4.2.7,

$$\begin{aligned}
d = & \left( \sum_{i=0}^{t-1} 1^{\otimes i} \otimes d_{n_{i+1}} \otimes 1^{\otimes t-i-1} \right) \otimes 1^{\otimes k} + 1^{\otimes t} \otimes \left( \sum_{i=0}^{k-1} 1^{\otimes i} \otimes d_{m_{i+1}} \otimes 1^{\otimes k-i-1} \right) + \\
& + [(f_{n_1} \otimes \cdots \otimes f_{n_t})(1^{\otimes t-2} \otimes f_{\bar{B} \otimes}) \cdots f_{\bar{B} \otimes}] \otimes [(f_{m_1} \otimes \cdots \otimes f_{m_k})(1^{\otimes k-2} \otimes f_{\bar{B} \otimes}) \cdots f_{\bar{B} \otimes}] t \cap \circ \\
& \sum_{i \geq 0} [(1^{\otimes t} \otimes g_{\bar{B} \otimes} \cdots (1^{\otimes k-2} \otimes g_{\bar{B} \otimes}) \sum_{j=0}^{k-1} (g_{m_1} f_{m_1} \otimes \cdots \otimes g_{m_j} f_{m_j} \otimes \phi_{m_{j+1}} \otimes 1^{\otimes k-j-1}) (1^{\otimes k-2} \otimes f_{\bar{B} \otimes}) \cdots f_{\bar{B} \otimes} + \\
& + g_{\bar{B} \otimes} \cdots (1^{\otimes t-2} \otimes g_{\bar{B} \otimes}) \sum_{j=0}^{t-1} (g_{n_1} f_{n_1} \otimes \cdots \otimes g_{n_j} f_{n_j} \otimes \phi_{n_{j+1}} \otimes 1^{\otimes t-j-1}) (1^{\otimes t-2} \otimes f_{\bar{B} \otimes}) \cdots f_{\bar{B} \otimes}] \\
& \otimes [g_{\bar{B} \otimes} \cdots (1^{\otimes k-2} \otimes g_{\bar{B} \otimes}) (g_{m_1} f_{m_1} \otimes \cdots \otimes g_{m_k} f_{m_k}) (1^{\otimes k-2} \otimes f_{\bar{B} \otimes}) \cdots f_{\bar{B} \otimes}] t \cap]^i \cdot (-1)^i \circ \\
& \circ [g_{\bar{B} \otimes} \cdots (1^{\otimes t-2} \otimes g_{\bar{B} \otimes}) (g_{n_1} \otimes \cdots \otimes g_{n_t}) \otimes g_{\bar{B} \otimes} \cdots (1^{\otimes k-2} \otimes g_{\bar{B} \otimes}) (g_{m_1} \otimes \cdots \otimes g_{m_k})].
\end{aligned}$$

Para implementar esta fórmula en MATHEMATICA, volvemos a considerar una descomposición en funciones elementales más simples, como hicieramos en el caso de CDGAC-álgebras.

En este caso, los elementos del modelo homológico

$$E(u_1, \dots, u_{t+k}) \otimes \Gamma(w_1, \dots, w_{t+k})$$

se codifican como listas de listas de longitud  $t+k+1$  de la forma  $\{\lambda_i, n_{1,i}, \dots, n_{t+k,i}\}$ , que representan la combinación lineal

$$\sum_i \lambda_i \prod_{j=1}^{k+t} u_j^{Mod[n_{j,i}, 2]} w_j^{[n_{j,i}/2]}.$$

Para codificar los elementos en  $\bar{B}(\mathbb{Z}[\mathbb{Z}_n])$ , en vez de utilizar listas de la forma  $\{n_1, \dots, n_m\}$ , con entradas que representan congruencias canónicas; vamos a utilizar una manera distinta, que nos servirá a modo de comparación con la codificación seguida en el caso de CDGAC-álgebras.

Así, identificaremos  $\bar{B}_m(\mathbb{Z}[\mathbb{Z}_n])$  con un  $(n-1)^m$  espacio vectorial, de modo que el elemento  $[n_1 | \dots | n_m]$  se corresponde con el  $j$ -ésimo vector de la base canónica, con

$$j = n_1 + (n_2 - 1) * (n - 1) + \dots + (n_m - 1) * (n - 1)^{m-1}.$$

Se trata, pues, de un cambio de base  $n-1$  a base decimal.

El proceso es reversible para  $n > 2$ , con sólo tomar  $m = \log_{n-1}(n-1)^m$ .

El caso  $n = 2$  tendrá que ser, por tanto, distinguido en la codificación.

Los escalares  $\{\lambda, 0\}$  del modelo homológico se corresponderán con los escalares  $\{\lambda, \{\}\}$  de  $\bar{B}(\mathbb{Z}[\mathbb{Z}_n])$ .

Las rutinas de entrada de datos y verificación de que la acción dada es una acción de grupos, son similares a las implementadas en el caso de CDGAC-álgebras.

```
Label[Inicio];
n1=Input["How many factors does A decompose into?"];
n2=Input["How many factors does G decompose into?"];
dim1={};
dim2={};
Do[
  Print["Please, introduce factor ",i," on A."];
  dim1=Append[dim1,Input[]],
```

```

{i,n1}];
Do[
  Print["Please, introduce factor ",i," on G."];
  dim2=Append[dim2,Input[]],
{i,n2}];
(*
The number of factors on A y G are n1 and n2, respectively.
Their associated dimensions as finite groups are located
on the lists dim1/2.
*)
Print["The ",n1," generators of A are denoted by u[i]
and the ",n2," of G by e[j]."];
Print["The action X is determined by the elements X(e[j],u[i]),
which are assumed to be lists of length ",n1,"."];
Print["There is a natural correspondence between the
components of these lists and elements on the factors of A."];
accion={};
Do[
  accion=Append[accion,{}];
  Do[
    Print["Please, introduce X(e[",j,"],u[",i,"])
as a list of length ",n1];
    accion[[i]]=Append[accion[[i]],Input[]],
{j,n2}],
{i,n1}];
simp[l_List,k_List]:=Table[Mod[l[[i]],k[[i]]],{i,Length[l]}];
ac1[g_List][a_List]:=Module[{k,h},
  h=simp[g,dim2];
  k=a;
  Do[
    k=Nest[ac2[j],k,h[[j]]],
{j,n2}];
k];
ac2[j_Integer][k_List]:=
  simp[Apply[Plus,Table[k[[i]]*accion[[i,j]],{i,n1}]],dim1];
Print["Checking that X is well defined as a group action."];

```



```
Print["Wait a moment, please."];
Do[
  Do[
    If[Nest[ac2[j], Insert[Table[0, {i1, n1-1}], 1, i],
      dim2[[j]] == Insert[Table[0, {i1, n1-1}], 1, i], ,
    Print["The given data do not define a group action,
      since X(", dim2[[j]], "e[" , j, "], u[" , i, "]) differs
      from u[" , i, "]."];
    Goto[Inicio]],
  {j, n2}],
{i, n1}];
Print["OK to proceed with the computation."];
```

Para codificar  $g_n$ ,

$$\begin{aligned} g_n(u) &= [1], \\ g_n(\gamma_k(w)) &= \sum_{x_1, \dots, x_k \in \mathbb{Z}_n} [1|x_1| \dots |1|x_k|], \\ g_n(u\gamma_k(w)) &= \sum_{x_1, \dots, x_k \in \mathbb{Z}_n} [1|x_1| \dots |1|x_k|1], \end{aligned}$$

creamos primero una función  $\text{base}[n, t]$ , que genera todas las listas  $\{x_1, \dots, x_{[t/2]}\}$  tal que  $g_n(u^{\text{Mod}[t, 2]}\gamma_{[t/2]}(w))$  coincide con la suma de todas las tuplas  $\{1, x_1, 1, x_2, \dots\}$  de longitud  $t$ .

Esto significa que tenemos que construir una lista de todas las tuplas de longitud  $[t/2]$  que podamos formar a partir del conjunto  $\{1, \dots, n-1\}$ . Este problema lo resolvemos como sigue.

Llamemos  $v_0$  a la tabla  $\{\{1\}, \dots, \{n-1\}\}$ . Comenzando por  $v_0$ , consecutivamente unimos cada uno de sus elementos a cada uno de los elementos de  $v_0$ , de forma anidada,  $[(t-2)/2]$  veces. El resultado es justamente lo que perseguíamos.

(\*

A basis element of simplicial degree  $t$  of  $B(\mathbb{Z}[\mathbb{Z}_n])$  is codified as a list of length  $(n-1)^t$ , so that  $\{u_1, \dots, u_t\}$  is in correspondence with the  $j$ th basis element of the vector space of dimension  $(n-1)^t$ . Here,  $j$ th means the decimal integer represented as  $\{u_1, \dots, u_t\}$  in base  $n$ . The function  $\text{base}[n, t]$  generates the lists  $(x_1 \dots x_{[t/2]})$  such that the sum  $\{1, x_1, 1, x_2, \dots\}$



generates the image by  $g$  of an element of degree  $t$  on the homological model of  $B(\mathbb{Z}[\mathbb{Z}_n])$ .

\*)

```
base1[n_Integer][l_List]:=Table[Join[{i},l],{i,n-1}];
base2[n_Integer][l_List]:=Flatten[Map[base1[n],l],1];
base[n_Integer,t_Integer]:=Nest[base2[n],Table[{i},{i,n-1}],
  Floor[(t-2)/2]];
```

El siguiente paso es traducir la lista anterior en la forma normalizada que hemos tomado de patrón. Es necesario cambiar las tuplas de base  $n - 1$  a base decimal, y sumar el resultado. Esto se consigue mediante las funciones `conversion` y `baseaux`. La función `g3` provee la salida buscada, atendiendo a las particularidades de los casos  $t = 0, 1$ .

```
convert[n_Integer,t_Integer][l_List]:=
  {1+Apply[Plus,(1-1)*Table[(n-1)^(2k+1),{k,0,Floor[t/2]-1}]]};
baseaux[n_Integer,t_Integer]:=Map[convert[n,t],base[n,t]];
g3[n_Integer][l_List]:=Module[{i1,t,k},
  i1=l[[1]];
  t=l[[2]];
  Which[
    t==0,k={i1,{ }},
    t==1,k=Prepend[Table[0,{i,n-2}],i1],
    True,k=ReplacePart[Table[0,{i,(n-1)^t}],i1,baseaux[n,t]]];
k];
g3[2][l_]:=Module[{k},
  If[t==0,k={l[[1]},{ }},k={l[[1]],t}];
k];
```

Ahora vamos a implementar la proyección  $f_n : \bar{B}(\mathbb{Z}[\mathbb{Z}_n]) \rightarrow E(u, 1) \tilde{\otimes}_n \Gamma(w, 2)$ ,

$$\begin{aligned} f_n[x_1|y_1|\dots|x_m|y_m] &= \{\prod_{i=1}^m s^2(x_i, y_i)\} \gamma_m(v), \\ f_n[x_1|y_1|\dots|x_m|y_m|z] &= \{s^1(z) \prod_{i=1}^m s^2(x_i, y_i)\} u \gamma_m(v), \end{aligned}$$

con  $s^2 : \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_n \rightarrow \mathbb{Z}$  y  $s^1 : \mathbb{Z}_n \rightarrow \mathbb{Z}$  definidos por

$$s^2(i, j) = \begin{cases} 0, & \text{si } i + j < n, \\ 1, & \text{si } i + j \geq n; \end{cases}$$

$$s^1(i) = i, \quad 1 \leq i \leq n-1.$$

Teniendo en cuenta que  $f_n$  se aplica sobre una lista del espacio vectorial asociado a  $\bar{B}(\mathbb{Z}[\mathbb{Z}_n])$ , para mejor definir  $f_n$  sobre cualquier vector del espacio, en lugar de hacerlo para los generadores.

La idea será determinar cuáles de los elementos normalizados no se anulan vía  $f_n$ , para seleccionar las posiciones correspondientes en la combinación lineal.

(\*

The output of  $f[n][l]$  is a list of length 2,  $\{\lambda, t\}$ .  
 The second element (t) corresponds to the degree of the basis element on the homological model of  $B(\mathbb{Z}[\mathbb{Z}_n])$  which is associated to  $l$  by applying the projection morphism of the contraction. The first element ( $\lambda$ ) is nothing but the corresponding scalar integer. Notice that the input data  $l$  consists necessarily in a list of length  $(n-1)^t$ .  
 Last function is called when computing the total differential.

\*)

```

hunio[n_Integer][l_List]:=Table[Join[{i},l],{i,n-1[[1]],n-1}];
parini[n_Integer]:=Flatten[Map[hunio[n],Table[{i},{i,n-1}],1];
combinar[n_Integer,2][l_List]:=Module[{pos,k,k1},
  k1=parini[n];
  pos=Flatten[Outer[List,Table[i1,{i1,Length[k1]}],
    Table[i1,{i1,Length[l]}],1];
  k=Table[Join[k1[[pos[[i1,1]]]],l[[pos[[i1,2]]]]],
    {i1,Length[pos]}}];
k];
anteponer[i_Integer][l_List]:=Prepend[l,i];
combinar[n_Integer,0][l_List]:=Map[anteponer[1],l];
fun[n_Integer][l_List]:=Table[anteponer[i][Join[l,{i}]],{i,n-1}];
combinar[n_Integer,1][l_List]:=Flatten[Map[fun[n],l],1];
f[n_Integer][l_List]:=Module[{t,k,j,v},
  t=Log[n-1,Length[l]];
  Which[
    (Length[l]==2)&&(VectorQ[l[[2]]]),k={l[[1]],0},

```



```

t==1,k={Apply[Plus,Table[i*1[[i]],{i,Length[l]}]},1},
True,k=Nest[combinar[n,2],parini[n],Floor[t/2]-1];
j=Mod[t,2];
k=combinar[n,j][k];
v[k1_List,l1_List]:=ReplacePart[k1,First[l1],
1+Apply[Plus,(Rest[l1]-1)*Table[(n-1)^i,{i,0,t-1}]]];
k=Fold[v,Table[0,{i,(n-1)^t}],k];
k={Apply[Plus,k*1],t};
k];
f[dimen_List][l_List]:=unif2[Table[
f[dimen[[i]][l[[i]]],{i,Length[dimen]}]];

```

En la implementación de la homotopía  $\phi_n$  está envuelto un proceso recursivo, que eleva la complejidad en la evaluación del morfismo:  $\phi_n = -\varphi_n$ , con

$$\begin{aligned} \varphi_n 1 &= 0, & \varphi_n[x] &= C(x), \\ \varphi_n[x|y|\sigma] &= [C(x)|y|\sigma] + s^2(x,y)[\sum_{l \in \mathbb{Z}_n} [1|l]|\varphi_n \sigma]; \end{aligned}$$

$$C(x) = \sum_{i=1}^{x-1} [1|i].$$

El dato de entrada normalizado consiste en una lista de longitud una potencia  $k$  de  $(n-1)$ . La salida será entonces una lista de longitud  $(n-1)^{k+1}$ .

Así, el código queda

```

(*)
Function hofi[n][l] computes the image of an element l
in B(Z[Zn]) by applying the homotopy operator of the
contraction. Both the input and output are lists of
length consecutive powers of (n-1).
*)
sumar[l_,i_]:=Table[l[[j]]+i,{j,Length[l]}];
hofi[n_Integer][l_List]:=Module[{pos,t,k},
If[
(Length[l]==2)&&(VectorQ[l[[2]]]),
t=0;
k=Table[0,{i,n-1}],

```

```

t=Log[n-1,Length[l]];
pos=Select[Table[i,{i,(n-1)^t}],l[[#1]]!=0&];
If[
  pos=={},k=Table[0,{i,(n-1)^(t+1)}],
  k=Apply[Plus,Table[fi[n,t,l[[pos[[i]]]],pos[[i]],
    {i,Length[pos]}]]];
k];
fi[n_,t_,j_,i_]:=Module[{k,k1,pos2,res1,res2},
  k=Table[0,{p,(n-1)^(t+1)}];
  res1=Mod[i-1,n-1];
  If[
    res1==0,,
    k1=sumar[Table[{1+j1*(n-1)},{j1,0,res1-1}],(n-1)*(i-1-res1)];
    k=ReplacePart[k,-j,k1];
  If[
    t<3,,
    res2=Mod[(i-1-res1)/(n-1),n-1];
    If[
      res1+res2+2<n,,
      k1=hofi[n][Insert[Table[0,{p,(n-1)^(t-2)-1}],1,
        ((i-1)-res1-res2*(n-1))/(n-1)^2+1]];
      pos2=Select[Table[p,{p,(n-1)^(t-1)}],k1[[#1]]!=0&];
      reemplazar3[l1_,i1_][l2_,i2_]:=ReplacePart[l2,-j*k1[[i2]],
        (i2-1)*(n-1)^2+(i1-1)*(n-1)+1];
      reemplazar4[l1_,i1_,l2_,l3_]:=Fold[reemplazar3[l1,i1],l2,l3];
      k=k+Apply[Plus,Table[reemplazar4[k1,p,
        Table[0,{h,(n-1)^(t+1)}],pos2],{p,n-1}]]];
k];

```

Enfrentémonos ahora a la codificación de  $g_{\bar{B} \otimes}$ ,

$$g_{\bar{B} \otimes}([a_1 | \cdots | a_n] \otimes [g_1 | \cdots | g_m]) = [a_1 \otimes 1 | \cdots | a_n \otimes 1] \star [1 \otimes g_1 | \cdots | 1 \otimes g_m].$$

Al igual que ocurriera en el proceso de implementación de la diferencial del modelo de CDGAC-álgebras, en realidad no nos interesa sólo codificar  $g_{\bar{B} \otimes}$ , sino más bien cada una de las composiciones  $g_{\otimes} \cdots (1^s \otimes g_{\otimes})$ .



Vamos a definir una función `gbar[i,13][l1,l2]` que transformará un elemento de  $\bar{B}(\mathbb{Z}[\mathbb{Z}_{p_i}]) \otimes \bar{B}(\mathbb{Z}[\mathbb{Z}_{p_{i+1}} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{p_l}])$  en otro propio de  $\bar{B}(\mathbb{Z}[\mathbb{Z}_{p_i} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{p_l}])$ .

Tomamos que `m1` es el número de congruencias no nulas en  $\mathbb{Z}_{p_i}$  y `m2` el número de congruencias no nulas en  $\mathbb{Z}_{p_{i+1}} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{p_l}$ . La lista `l3` será  $\{p_{i+1}, \dots, p_l\}$ .

Etiquetamos los elementos en  $\mathbb{Z}_{p_{i+1}} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{p_l}$  comenzando por el primer factor: esto es,  $\{1, 0, \dots, 0\}$  es el primer elemento,  $\{2, 0, \dots, 0\}$  es el segundo,  $\{p_{i+1} - 1, 0, \dots, 0\}$  el  $(p_{i+1} - 1)$ -ésimo,  $\{0, 1, 0, \dots, 0\}$  el  $p_{i+1}$ -ésimo,  $\{1, 1, 0, \dots, 0\}$  el  $(p_{i+1} + 1)$ -ésimo, y así sucesivamente.

La implementación resulta:

```
(*
Function gbar[i,13][l1,l2] computes the image of the
inclusion morphism of the bar contraction, applied to
the given elements l1 and l2 in B(Zl3[i]) and
B(Zl3[i+1]...Zl3[n]), respectively. Notice that l3
represents, indeed, dim1 or dim2, as it is the case.
*)
gbar[i_,l3_][l1_,l2_] := Module[{k,t1,t2,pos1,pos2,m1,m2},
  m1=l3[[i]]-1;
  m2=Apply[Times,Drop[l3,i]]-1;
  t1=Length[l1];
  t2=Length[l2];
  Which[
    (t1==2)&&(VectorQ[l1[[2]])&&(t2==2)&&(VectorQ[l2[[2]]]),
    k={l1[[1]]*l2[[1]},{}},
    (t1==2)&&(VectorQ[l1[[2]]]),
    t2=Log[m2,t2];
    pos2=Select[Table[i1,{i1,m2^t2}],l2[[#1]]!=0&];
    conversion2[i1_] := Module[{j5,k4},
      k4={};
      j5=i1-1;
      Do[
        k4=Append[k4,1+Mod[j5,m2]]];
```

```

      j5=(j5+1-k4[[j6]])/m2,
      {j6,t2}];
      k4=1+Apply[Plus,((m1+1)*k4-1)*Table[
        ((m1+1)*(m2+1)-1)^i3,{i3,0,t2-1}]];
      k4];
      k=l1[[1]]*Apply[Plus,Table[Insert[Table[0,
        {i1,((m1+1)*(m2+1)-1)^t2-1}],l2[[pos2[[i2]]]],
        conversion2[pos2[[i2]]]],{i2,Length[pos2]}]],
      (t2==2)&&(VectorQ[l2[[2]]]),
      t1=Log[m1,t1];
      pos1=Select[Table[i1,{i1,m1^t1}],l1[[#1]]!=0&];
      conversion1[i1_]:=Module[{j5,k4},
        k4={};
        j5=i1-1;
        Do[
          k4=Append[k4,1+Mod[j5,m1]];
          j5=(j5+1-k4[[j6]])/m1,
          {j6,t1}];
          k4=1+Apply[Plus,(k4-1)*Table[((m1+1)*(m2+1)-1)^i3,
            {i3,0,t1-1}]];
          k4];
          k=l2[[1]]*Apply[Plus,Table[Insert[Table[0,
            {i1,((m1+1)*(m2+1)-1)^t1-1}],l1[[pos1[[i2]]]],
            conversion1[pos1[[i2]]]],{i2,Length[pos1]}]],
          True,
          t1=Log[m1,t1];
          t2=Log[m2,t2];
          pos1=Select[Table[i1,{i1,m1^t1}],l1[[#1]]!=0&];
          pos2=Select[Table[i1,{i1,m2^t2}],l2[[#1]]!=0&];
          k=Flatten[Outer[List,pos1,pos2],1];
          shuffle1[k1_]:=Module[{j1,j2,k2,k3,k8},
            j1=k1[[1]];
            j2=k1[[2]];
            convertir1[j3_,j4_,j7_]:=Module[{j5,k4},
              k4={};
              j5=j3-1;

```

```

Do[
  k4=Append[k4,1+Mod[j5,j4]];
  j5=(j5+1-k4[[j6]])/j4,
  {j6,j7}];
k4];
k2=convertir1[j1,m1,t1];
k3=convertir1[j2,m2,t2]*(m1+1);
aument[j6_] [k6_] :=Table[Join[k6,{j5}],{j5,Last[k6]+1,j6}];
apaument[j6_,j5_] [k6_] :=
  Flatten[Map[aument[j6-j5+1+Length[k6[[1]]]],k6],1];
shuf[j5_,1]:=Table[{j6},{j6,1,j5}];
shuf[j5_,j6_] :=Nest[apaument[j5,j6],shuf[j5-j6+1,1],j6-1];
k8=shuf[t1+t2,t1];
insertarlista[k5_,k6_] [k4_] :=Module[{j5,k7},
  k7=k6;
  Do[
    k7=Insert[k7,k5[[j5]],k4[[j5]],
    {j5,t1}];
k7];
reconvertir[k5_] :=Insert[
  Table[0,{j9,((m1+1)*(m2+1)-1)^(t1+t2)-1}],1,
  1+Apply[Plus,(k5-1)*Table[((m1+1)*(m2+1)-1)^j5,
  {j5,0,t1+t2-1}]]
];
(11[[j1]]*12[[j2]])*Apply[Plus,Map[reconvertir,Map[
  insertarlista[k2,k3],k8]]];
k=Apply[Plus,Map[shuffle1,k]];
k];

```

La proyección  $f_{\bar{B} \otimes}$  es en este caso

$$f_{\otimes}[a_1 \otimes a'_1 | \dots | a_m \otimes a'_m] = \sum_{i=0}^m [a_1 | \dots | a_i] \otimes [a'_{i+1} | \dots | a'_m].$$

Pero nosotros vamos a implementar una función  $\mathbf{fbar}$  válida para cualquier función



del tipo  $(1^s \otimes f_\otimes)$ .

(\*

Function `fbar[i,13][1]` computes the image of an element `l` of  $B(\mathbb{Z}_{13}[i] \times \mathbb{Z}_{13}[i+1] \dots \mathbb{Z}_{13}[n])$  by the projection of the bar contraction.

\*)

```
fbar[i_,13_][1_]:=Module[{k,m,pos,t},
  If[
    Length[l]==2,
      k={{1[[1]],{ }},{1,{ }},
      m=Apply[Times,Drop[13,i-1]]-1;
      t=Log[m,Length[l]];
      pos=Select[Table[i1,{i1,m^t}],1[[#1]]!=0&];
      fsimple[i2_]:=Module[{k1,l1,l2,cota1,cota2},
        convertir2[j3_,j4_,j7_]:=Module[{j5,k4,j8,j9},
          k4={};
          j5=j3-1;
          Do[
            j8=1+Mod[j5,j4];
            j9=Mod[j8,13[[i]]];
            k4=Append[k4,{j9,(j8-j9)/13[[i]]};
            j5=(j5+1-j8)/j4,
            {j6,j7}];
          k4];
          {l1,l2}=Transpose[convertir2[i2,m,t]];
          cota1=Position[Join[l1,{0}],0,1,1];
          cota2=Position[Join[Reverse[l2],{0}],0,1,1];
          insertaruno[l4_,0,i5_]:=1,{ };
          insertaruno[l4_,i4_,i5_]:=Module[{i6,l5},
            l5=Take[l4,i4];
            i6=Abs[i4];
            Insert[Table[0,{i7,i5^i6-1}],1,
              1+Apply[Plus,(l5-1)*Table[i5^i7,{i7,0,i6-1}]]];
            k1=Join[{},Table[1[[i2]]*insertaruno[l1,i3,13[[i]]-1],
              insertaruno[l2,-t+i3,((m+1)/13[[i]]-1)],
```



```

      {i3,Max[0,t-cota2+1],Min[cota1-1,t]}]];
k1];
k={};
Do[
  k=Join[k,fsimple[pos[[i1]]]],
  {i1,Length[pos]}];
k];
k];

```

El elemento de entrada del operador  $t \cap$  puede ser cualquier combinación lineal de elementos de  $\bar{B}(\mathbb{Z}[A]) \otimes \bar{B}(\mathbb{Z}[G])$ ; esto es,

$$\bar{B}(\mathbb{Z}[\mathbb{Z}_{n_1}] \otimes \cdots \otimes \mathbb{Z}[\mathbb{Z}_{n_t}]) \otimes \bar{B}(\mathbb{Z}[\mathbb{Z}_{m_1}] \otimes \cdots \otimes \mathbb{Z}[\mathbb{Z}_{m_k}]).$$

Normalizamos esta entrada como una lista de listas de longitud 2, cada una de ellas correspondiente a los factores  $\bar{B}(\mathbb{Z}[A])$  y  $\bar{B}(\mathbb{Z}[G])$ , respectivamente.

Primero, construiremos una función `hacertau`, a aplicar sobre elementos simples de esta clase, que posteriormente será extendida por la función `tau`.

```

pasar1[h1_,h2_,h3_] :=Module[{h4,h5},
h5={};
h4=h1-1;
Do[
  h5=Append[h5,1+Mod[h4,h2]];
  h4=(h4+1-h5[[h6]])/h2,
  {h6,h3}];
h5];
pasar2[dimensi_] [h1_] :=Table[Mod[Floor[h1/Apply[Times,
  Take[dimensi,h2-1]]],dimensi[[h2]]],{h2,Length[dimensi]}];
(*
Notice that the output of hacertau must be a list of
lists of two lists of monotonic lists of an element of B().
*)
hacertau[dimen_] [par_] :=Module[{k,k1,k2,pos1,pos2,dimsim},
  k1=par[[1]];
  k2=par[[2]];
  If[

```

```

(Length[k2]==2)&&VectorQ[k2[[2]]],k={{0*k1,{0,{}},}},
pos1=Select[Table[i1,{i1,Length[k1]}],k1[[#]]!=0&];
pos2=Select[Table[i1,{i1,Length[k2]}],k2[[#]]!=0&];
If[
  (Length[k1]==2)&&VectorQ[k1[[2]]],
    k=Table[{k2[[pos2[[i1]]]]*k1,Insert[Table[0,
      {i2,Length[k2]/(Apply[Times,dimen[[2]]]-1)},1,
      1+(pos2[[i1]]-1-Mod[pos2[[i1]]-1,Apply[Times,
        dimen[[2]]]-1)/(Apply[Times,dimen[[2]]]-1)}],
{i1,Length[pos2]}],
  dimsim=Log[Apply[Times,dimen[[1]]]-1,Length[k1]];
  tau[k3_]:=Module[{j1,j2,j3,a,g},
    j1=k3[[1]];
    j2=k3[[2]];
    j4=Apply[Times,dimen[[2]]]-1;
    j3=1+Mod[j2-1,j4];
    j2=1+(j2-j3)/j4;
    g=pasar2[dimen[[2]]][j3];
    a=Map[pasar2[dimen[[1]]],pasar1[j1,
      Apply[Times,dimen[[1]]]-1,dimsim]];
    a=Map[convac[g],a];
    convac[i1_][i2_]:=Module[{k5},
      k5=ac1[i1][i2];
      k5=Apply[Plus,k5*Table[Apply[Times,
        Take[dimen[[1]],i3]],{i3,0,n1-1}]];
    k5];
  If[
    Log[Apply[Times,dimen[[2]]]-1,Length[k2]]==1,
      a={Insert[Table[0,{i1,Length[k1]-1}],k1[[k3[[1]]]],
        1+Apply[Plus,(a-1)*Table[(Apply[Times,dimen[[1]]]-1)^i1,
          {i1,0,dimsim-1}]]],{k2[[k3[[2]]]],{}}},
      a={Insert[Table[0,{i1,Length[k1]-1}],k1[[k3[[1]]]],
        1+Apply[Plus,(a-1)*Table[(Apply[Times,dimen[[1]]]-1)^i1,
          {i1,0,dimsim-1}]]],Insert[Table[0,{i4,Length[k2]/j4-1}],
        k2[[k3[[2]]]],j2]};
  a];

```



```

      k=Map[tau,Flatten[Outer[List,pos1,pos2],1]];
k];
(*
Both the input and output of diftau are a list of lists
of length 2, each of them corresponding to an element of
the factors B(Z[A]) and B(Z[G]), respectively.
*)
diftau[l_,dimen_]:=Flatten[Map[hacertau[dimen],1],1];

```

A la hora de implementar la diferencial total, necesitaremos de varias funciones elementales adicionales, cuales son: funciones que relacionen los modelos de cada  $\mathbb{Z}[\mathbb{Z}_n]$  en el modelo del producto semidirecto, y viceversa (`unif2` y `desunif`), funciones de simplificación (`simplmodelo` y `simplificarbar`) y funciones que calculen la serie a que da origen la composición del operador de homotopía y  $t \cap$  (`funcionfi*`), entre otras.

El código final queda

```

(*
Function diftotal gives the full perturbed differential
morphism on the homological model. Its input data
consists in a list of elements of the model, which are
lists of length n1+n2+1.
*)
(*
The function unif2 transforms a list of pairs of single
models B(Z[Zik]) into an unique list, which is an element
of the model of B(Z[Zi1] x...x Z[Zin]). The inverse
function is called desunif.
*)
(*
The function dif computes the banal (not perturbed)
differential of an element of the model.
*)
(*
The function simplmodelo is used to simplify the output

```

data of the differential morphisms.

\*)

(\*

The full inclusion morphism is called `gcompleta`. Its input data consists in a list of lists of length  $n_i+1$ . The output data consists in a list of lists of just one element, which is in  $B(Z[H_i])$ ,  $H_1=A$ ,  $H_2=G$ .

\*)

(\*

The input data of the full projection morphism (`fcompleta`) consists in a list of monotonic lists of an element of  $B(Z[H_i])$ , i.e., of the form `{{Table}}`. The output data consists in a simplified list of elements (lists of length  $n_i+1$ ) on the corresponding homological model.

\*)

```
unif2[l_]:=Module[{l1,l2},
  {l1,l2}=Transpose[l];
  Prepend[l2,Apply[Times,l1]]];
desunif[l_]:=Partition[Insert[l,1,Table[{i+2},
  {i,Length[l]-2}]],2];
coincieen[l1_,l2_]:=Module[{i},
  i=0;
  Do[
    If[Rest[l1[[i1]]]==Rest[l2],i=i1],
    {i1,Length[l1]}];
  i];
simplmodelo[l1_List,l2_List]:=Module[{k,j},
  If[
    l2[[1]]==0,k=l1,
    j=coincieen[l1,l2];
    If[
      j==0,k=Append[l1,l2],
      k=ReplacePart[l1,Prepend[Rest[l2],
        l1[[j,1]]+l2[[1]]],j]];
  k];
diftotal[l_]:=Rest[Fold[simplmodelo,{Table[0,{i1,n1+n2+1}]}],
```

```

    Flatten[Map[dinfinito, l], 1]];
dinfinito[l_] := Join[dif[l], dpert[l]];
dif[l_] := Module[{k, dimen, grado},
    dimen = Join[dim1, dim2];
    grado[0] := 0;
    grado[j_Integer] := Mod[1 + j, 2];
    k = Table[ReplacePart[ReplacePart[l, (-1)^Apply[Plus,
        Take[l, {2, i - 1}]] * dimen[[i - 1]] * l[[1]] * grado[l[[i]]], 1],
        l[[i]] - 1, i], {i, 2, n1 + n2 + 1}];
k];
inybar[dimen_] [l_] := Module[{j, k},
    j = Length[l];
    k = Append[Drop[l, -2], gbar[j - 1, dimen][l[[j - 1]], l[[j]]]];
k];
gcompleta[l_, dimen_] := Map[gcomp[dimen], l];
gcomp[dimen_] [l_] := Module[{k, num},
    k = desunif[l];
    num = Length[dimen];
    k = Table[g3[dimen[[i]]][k[[i]]], {i, num}];
    k = Nest[inybar[dimen], k, num - 1];
k];
proybar1[dimen_] [l_] := Flatten[Map[proybar2[dimen], l], 1];
proybar2[dimen_] [l_] := Module[{k, j},
    k = fbar[Length[l], dimen][Last[l]];
    k = Table[Join[Drop[l, -1], k[[i]]], {i, Length[k]}];
k];
fcompleta[l_, dimen_] := Module[{k},
    If[
        Length[dimen] == 1,
        k = Fold[simplmodelo, {{0, -1}}, Map[f[dimen], l]];
        If[
            Length[k] == 1, k = {{0, 0}},
            k = Rest[k]],
        k = Rest[Fold[simplmodelo, {{0, -1}},
            Map[f[dimen], Nest[proybar1[dimen], l, Length[dimen] - 1]]]];
k];

```

```

(*)
Both the input and output of function funcionfi1 are a
list of lists of length 2, each of them corresponding to
an element of the factors B(Z[A]) and B(Z[G]), respectively.
*)
nulo[l1_,2]:=If[
  VectorQ[l1[[2]]]&&11[[1]]==0,
  True,
  False];
nulo[l1_,j1]:=If[
  l1==Table[0,{j,j1}],
  True,
  False];
simplificarbar[l_]:=Catch[
  Do[
    If[
      (nulo[l[[j,1]],Length[l[[j,1]]])||
      (nulo[l[[j,2]],Length[l[[j,2]]])],,
      Throw[True]],
    {j,Length[l]};
  Throw[False]];
funcionfi2[l_]:=Module[{k,h1},
  k={{l}};
  h1=1;
  While[
    simplificarbar[Last[k]],
    k=Append[k,Flatten[Map[funcionfi3[h1],Last[k]],1]];
    h1=h1+1];
  Flatten[Drop[k,-1],1]];
funcionfi1[l_]:=Flatten[Map[funcionfi2,l],1];
funcionfi3[h2_][l_]:=Module[{k,k1,k2,k3,i1},
  k=diftau[{l},{dim1,dim2}];
  k3={};
  Do[
    k1=k[[i1,1]];
    k2=k[[i1,2]];

```



```

k2=Flatten[gcompleta[fcompleta[{{k2}},dim2],dim2],1];
k1=(-1)^h2*funcionfi4[k1];
pos=Flatten[Outer[List,Table[i,{i,Length[k1]}],
  Table[i,{i,Length[k2]}]],1];
k3=Join[k3,Table[{k1[[pos[[i,1]]]],k2[[pos[[i,2]]]]},
  {i,Length[pos]}]],
  {i1,Length[k]}];
k3];
funcionfi4[l_]:=Flatten[Table[funcionfi5[l,i],{i,n1}],1];
(*)
The output of funcionfi5 consists in a list of elements
in B(Z[A]) endowed with the corresponding signs.
*)
funcionfi5[l_,i_]:=Map[funcionfi6[i],Nest[proybar1[dim1],
  {{1}},n1-1]];
gradofi1[l_,i_]:=Apply[Plus,Table[gradofi2[l[[i1]],
  Length[l[[i1]]],i1],{i1,i-1}]];
gradofi2[l_,2,i_]:=Module[{j},
  If[
    VectorQ[l[[2]]],j=0,
    j=Log[dim1[[i]]-1,2]];
j];
gradofi2[l_,j_,i_]:=Log[dim1[[i]]-1,j];
funcionfi6[j_][l_]:=(-1)^gradofi1[l,j]*Flatten[Nest[inybar[dim1],
  Join[Table[g3[dim1[[i1]]][f[dim1[[i1]]][l[[i1]]]],{i1,j-1}],
  {hofi[dim1[[j]]][l[[j]]}],Table[l[[i1]],{i1,j+1,n1}],n1-1],1];
(*)
The output of dpert consists in a list of lists of
length n1+n2+1, which are single elements of the
homological model. The input data consists in a single
element of the homological model.
*)
dpert[l_]:=Module[{k,l1,l2,posici},
  l1=Flatten[gcompleta[{Take[l,n1+1]},dim1],1];
  l2=Flatten[gcompleta[{Prepend[Take[l,-n2],1]},dim2],1];
  posici=Flatten[Outer[List,Table[i1,{i1,Length[l1]}],

```



```

Table[i1, {i1, Length[l2]}], 1];
k=Table[{l1[[posici[[i1,1]]]], l2[[posici[[i1,2]]]]},
  {i1, Length[posici]}];
k=diftau[funcionfi1[k], {dim1, dim2}];
ultimafun[l1_] := Module[{pos, l3, l4, l5},
  l3=fcompleta[{{l1[[1]]}}, dim1];
  l4=fcompleta[{{l1[[2]]}}, dim2];
  pos=Flatten[Outer[List, Table[i1, {i1, Length[l3]}],
    Table[i1, {i1, Length[l4]}]], 1];
  l5=Table[Prepend[Join[Rest[l3[[pos[[i1,1]]]]],
    Rest[l4[[pos[[i1,2]]]]], l3[[pos[[i1,1]], 1]]*
    l4[[pos[[i1,2]], 1]]], {i1, Length[pos]}];
  l5];
k=Apply[Join, Map[ultimafun, k]];
k];

```

Ahora se podría prolongar esta implementación para construir matrices cocíclicas, matrices cocíclicas de Hadamard y códigos binarios correctores de errores óptimos según las cotas de Plotkin.

Nosotros hemos realizado cálculos parciales, algunos de ellos tácitamente recogidos en el capítulo cuarto de la memoria, aunque no hemos llegado a formalizar una implementación genérica.

# Referencias

- [1] Álvarez V.: *Un tratamiento multiplicativo del Teorema de Eilenberg-Zilber torcido*, tesina. Dirigida por P. Real (1997).
- [2] Álvarez V., Armario J.A., Frau M.D. y Real P.: *An algorithm for calculating the homology of some semi-direct products of groups*, International Workshop “Algebraic Models for topological spaces and fibrations and their applications”, Tbilisi, Georgia (2000).
- [3] Álvarez V., Armario J.A., Frau M.D. y Real P.: *Software para generar códigos correctores de errores óptimos vía homología de productos semidirectos de grupos*, EACA’00, Barcelona (2000).
- [4] Álvarez V., Armario J.A., Frau M.D. y Real P.: *An algorithm for computing cocyclic matrices developed over some semidirect products*, AAEECC’14, Melbourne, Australia. Aceptada publicación en la serie Lectures Notes, Springer-Verlag (2001).
- [5] Álvarez V., Armario J.A., Frau M.D., Real P. y Silva B.: *An algorithm for computing the first homology groups of CDGAs with linear differential*, 3rd International Symposium IMS’99, Hagenberg, Austria, <http://www.south.rotol.ramk.fi/keranen/IMS99/ims99papers/ims99papers.html> (1999).
- [6] Álvarez V., Armario J.A., Frau M.D., Real P. y Silva B.: *An algorithm for computing the first homology groups of some semidirect products of finite groups*, 3rd International Symposium IMS’99, Hagenberg, Austria (1999).
- [7] Álvarez V., Armario J.A., González-Díaz R. y Real P.: *Algorithms in algebraic topology and homological algebra: the problem of the complexity*, Proc. CASC’98, San Petersburgo, Rusia, pp. 8–11 (1998).

- [8] Álvarez V., Armario J.A. y Real P.: *On the computability of the  $p$ -local homology of TCPs of Eilenberg-Mac Lane spaces*, Proc. 1st Meeting on Geometry and Topology, Braga, Portugal, pp. 15–29, Electronic EMIS Proceedings, <http://www.emis.de/proceedings> (1997).
- [9] Álvarez V., Armario J.A. y Real P.: *Computability of the  $p$ -primary homology of some fibre bundles*, actas de EACA'97, Granada, pp. 31–37 (1997).
- [10] Álvarez V., Armario J.A. y Real P.: *Sobre la computabilidad de la homología de productos semidirectos de grupos*, actas EACA'97, Granada, pp. 39–44 (1997).
- [11] Álvarez V., Armario J.A. y Real P.: *On the homology of semi-direct products of groups*, Colloquium on Topology, Gyula, Hungary (1998).
- [12] Álvarez V., Armario J.A. y Real P.: *Homology of semidirect products of groups*, International Conference IMACS-ACA99, El Escorial, Madrid, <http://math.unm.edu/ACA/1999/Proceedings/> (1999).
- [13] Álvarez V., Armario J.A. y Real P.: *Códigos correctores de errores vía cohomología*, Primer encuentro andaluz de Matemática Discreta, La Rábida, Huelva (1999).
- [14] Álvarez V., Armario J.A., Real P. y Silva B.: *HPT and computability of Hochschild and cyclic homologies of CDGAs*, Conf. on Secondary Calculus and Cohomological Physics, Moscú, Electronic EMIS Proceedings, <http://www.emis.de/proceedings> (1997).
- [15] Álvarez V., Armario J.A., Real P. y Silva B.: *Sobre productos semidirectos de grupos con acción determinada por una matriz*, Proceedings EAMA'97, Eds. F.J. Cobos, J. R. Gómez y F. Mateos, pp. 18–25 (1997).
- [16] Álvarez V., Armario J.A., Real P. y Silva B.: *Obtención de resoluciones pequeñas sobre DG-álgebras conmutativas, libres y conexas*, actas EACA'98, Sigüenza (1998).
- [17] Álvarez V., González-Díaz R., Jiménez M.J. y Real P.: *Discrete methods in algebraic topology*, Colloquium in combinatorics, Braunschweig, Alemania (1998).
- [18] Álvarez V., Jiménez M.J. y Real P.: *On the homology of Jets of CDGAs*, EACA'98, Sigüenza (1998).

- [19] Álvarez V., Jiménez M.J. y Real P.: *Sobre el álgebra de caminos en un árbol binario infinito*, IV Encuentro de Matemática Discreta, Sevilla (1998).
- [20] Anick D.J.: *The computation of rational homotopy groups is  $\#P$ -Hard*, Conf. on applications of computers to Geom. and Top., Lectures Notes in Pure and Applied Math., Marcel Deckker Inc., **114**, pp. 1–56 (1989).
- [21] Armario J.A.: *Estructuras multiplicativas y homología de fibrados*, Tesis doctoral. Dirigida por P. Real (1999).
- [22] Armario J.A., Real P. y Silva B.: *On  $p$ -minimal homological models of twisted tensor products of elementary complexes localized over a prime*, Contemporary Mathematics, **227**, pp. 303–314 (1999).
- [23] Artigas D.: *Software para el cálculo de la homología de ciertos tipos de DG-álgebras conmutativas*, Proyecto Diplomatura Informática. Codirigido por P. Real y B. Silva (1997).
- [24] Assmus E.F. y Key J.D.: *Designs and their codes*, Cambridge University Press, **103** (1992).
- [25] Baer R.: *Erweiterung von Gruppen und ihren Isomorphismen*, Math. Z., **38**, pp. 375–416 (1934).
- [26] Baer R.: *Automorphismen von Erweiterungsgruppen*, Actualités Scientifiques et Industrielles, **205**, Paris (1935).
- [27] Barnes D.W. y Lambe L.A.: *A fixed point approach to homological perturbation theory*, Proceeding of the A.M.S., **112** (3), pp. 881–892 (1991).
- [28] Barrat M.G., Gugenheim V.K.A.M. y Moore J.C.: *On semisimplicial fibre bundles*, Am. J. Math., **81**, pp. 639–657 (1959).
- [29] Baues H.J. y Lemaire J.M.: *Minimal models in homotopy theory*, Math. Ann., **225**, pp. 219–225 (1977).
- [30] Bose R.C. y Shrikhande S.S.: *A note on a result in the theory of code construction*, Inform. and Control, **2**, pp. 183–194 (1959).
- [31] Bosma W., Cannon J. y Playoust C.: *The MAGMA algebra system I*, The user language computational algebra and number theory, London (1993). J. Symb. Computation, **24**, (3-4), pp. 235–265 (1997).



- [32] Brady T.: *Free resolutions for semidirect products*, Tôhoku Math. J., **45**, pp. 535–537 (1993).
- [33] Brown E.H.: *Twisted tensor products I*, Annals of Math., **69** pp. 223–246 (1959).
- [34] Brown R.: *The twisted Eilenberg-Zilber theorem*, Celebrazioni Archimedeae del Secolo XX, Simposio di Topologia, pp. 34–37 (1967).
- [35] Brown K.S.: *Cohomology of groups*, Graduate Texts in Math., **87**, Springer-Verlag, New York (1982).
- [36] Burghilea D. y Vigué-Poirrier M.: *Cyclic homology of commutative algebras*, Lecture Notes in Mathematics, Springer, **1318**, pp. 51–72 (1988).
- [37] Cameron P.J.: *Combinatorics: topics, techniques, algorithms*, Cambridge University Press (1994).
- [38] Cannon P.J. y Playoust C.: *MAGMA: a new computer algebra system*, Euro-math Bull., **2** (1), pp. 113–144 (1996).
- [39] Cartan H.: *Séminaire de Topologie Algébrique*, École Norm. Sup., Paris (1951).
- [40] Cartan H.: *Algèbres d'Eilenberg-Mac Lane*, Séminaire H. Cartan 1954/55, (exposé 2 à 11), Ecole Normale Supérieure, Paris (1956).
- [41] Cartan H. y Eilenberg S.: *Homological Algebra*, Princeton University Press, Princeton (1956).
- [42] C.H.A.T.A. Group: *Determining 1-homological models for CDGAs*, International Workshop “Algebraic Models for topological spaces and fibrations and their applications”, Tbilisi, Georgia (2000).
- [43] C.H.A.T.A. Group: *Computing small 1-homological models for CDGAs*, Proceedings of CASC'00, Samarcanda, Uzbekistan, Eds. V.G. Ganzha, E.W. Mayr, E.V. Vorozhtsov, Springer-Verlag, pp. 87–100 (2000).
- [44] C.H.A.T.A. Group: *Computing small homological models for commutative differential graded algebras*, 18<sup>th</sup> Victorian Algebra Conference, Melbourne, Australia (2000).
- [45] C.H.A.T.A. Group: *A software for computing “small” 1-homological models for CDGAs*, EACA'00, Barcelona (2000).

- [46] Chen K.T.: *Connections, holonomy and path space homology*, Proc. Symp. in Pure Math., **27**, pp. 39–52 (1975).
- [47] Chen K.T.: *Iterated path integrals*, Bull. Amer. Math. Soc., **83**, pp. 831–879 (1975).
- [48] Cohen D. y Suciu A.: *Homology of iterated semidirect products of free groups*, J. Pure Appl. Alg., **126**, pp. 87–120 (1998).
- [49] Cooper J. y Wallis J.: *A construction for Hadamard arrays*, Bull. Austral. Math. Soc., **7**, pp. 269–277 (1972).
- [50] Curtis E.B.: *Simplicial homotopy theory*, Advances in Math., **6**, pp. 107–209 (1971).
- [51] de Launey W.: *On the construction of  $n$ -dimensional designs from 2-dimensional designs*, Australas. J. Combin., **1**, pp. 67–81 (1990).
- [52] de Launey W. y Horadam K.J.: *A weak difference set construction for higher dimensional designs*, Designs, Codes and Cryptography, **3**, pp. 75–87 (1993). Erratum, *ibid* **3** pp. 129 (1994).
- [53] de Launey W. y Horadam K.J.: *Generation of cocyclic Hadamard matrices*, chap. 20 in Computational Algebra and Number Theory, eds. W. Bosma and van der Poorten, Mathematics and its Applications 325, Kluwer Academic, pp. 279–290 (1995).
- [54] Eckmann B.: *Der Cohomologie-Ring einer beliebigen Gruppe*, Comment. Math. Helv., **18**, pp. 232–282 (1946).
- [55] Eilenberg S.: *Singular homology theory*, Ann. of Math, **45**, pp. 407–447 (1944).
- [56] Eilenberg S.: *Homology of spaces with operators, I*, Trans. AMS, **61**, pp. 378–417 (1947).
- [57] Eilenberg S.: *Topological methods in abstract algebra*, Bull. Amer. Math. Soc. **55**, pp. 3–27 (1949).
- [58] Eilenberg S. y Mac Lane S.: *Relations between homology and homotopy groups*, Proc. NAS USA, **29**, pp. 155–158 (1943).

- [59] Eilenberg S. y Mac Lane S.: *Relations between homology and homotopy groups of spaces*, Ann. of Math., **46**, pp. 480–509 (1945).
- [60] Eilenberg S. y Mac Lane S.: *General theory of natural equivalences*, Trans. AMS, **58**, pp. 231–294 (1945).
- [61] Eilenberg S. y Mac Lane S.: *Relations between homology and homotopy groups of spaces II*, Ann. of Math., **51**, pp. 514–533 (1950).
- [62] Eilenberg S. y Mac Lane S.: *On the groups  $H(\pi, n)$ , I*, Annals of Math. **58**, pp. 55–106 (1953).
- [63] Eilenberg S. y Mac Lane S.: *On the groups  $H(\pi, n)$  II*, Annals of Math. **66**, pp. 49–139 (1954).
- [64] Eilenberg S. y Moore J.C.: *Limits and spectral sequences*, Top., **1**, pp. 1–24 (1962).
- [65] Eilenberg S. y Moore J.C.: *Homology and fibrations I. Coalgebras, cotensor product and its derived functors*, Comm. Math. Helv., **40**, pp. 199–236 (1966).
- [66] Eilenberg S. y Zilber J.A.: *On products of complexes*, Am. J. Math. **75**, pp. 200–204 (1953).
- [67] Félix Y.: *Classification homotopique des espaces rationnels de cohomologie donnée*, Bull. Soc. Math. Belgique, **31**, pp. 75–86 (1979).
- [68] Félix Y. y Halperin S.: *L.-S. category and its applications*, Trans. Amer. Math. Soc., **273**, pp. 1–37 (1982).
- [69] Félix Y. y Thomas J.C.: *Homotopie rationnelle: dualité et complémentarité des modèles*, Bull. Soc. Math. Belgique, **33**, pp. 7–19 (1981).
- [70] Ferrer I.: *Software experimental para el cálculo homológico de DG-álgebras conmutativas*, Proyecto de Licenciatura en Informática. Codirigido por V. Álvarez y P. Real (1999).
- [71] Fitting H.: *Beiträge zur theorie der gruppen endlicher ordnung*, Jber. DMV, **48**, pp. 77–141 (1938).
- [72] Flannery D.L.: *Transgression and the calculation of cocyclic matrices*, Australas. J. Combin., **11**, pp. 67–78 (1995).

- [73] Flannery D.L.: *Calculation of cocyclic matrices*, J. Pure Appl. Algebra 112 (2), pp. 181–190 (1996).
- [74] Flannery D.L. y O'Brien E.A.: *Computing 2-cocycles for central extensions and relative difference sets*, Comm. Algebra, **28** (4), pp. 1939–1955 (2000).
- [75] Freudenthal H.: *Der einflu der fundamentalgruppe auf die Bettischen Gruppen*, Ann. of Math., **47**, pp. 274–316 (1946).
- [76] González-Díaz R.: *Operaciones cohomológicas: un enfoque combinatorial*, Tesis doctoral. Dirigida por P. Real (2000).
- [77] González-Díaz R. y Real P.: *A combinatorial method for computing Steenrod squares*, J. of Pure Appl. Alg. (1999).
- [78] Grabmeier J. y Lambe L.A.: *Computing Resolutions Over Finite  $p$ -Groups*, Proceedings ALCOMA'99, Eds. A. Betten, A. Kohnert, R. Lave, A. Wassermann, Springer Lecture Notes in Computational Science and Engineering, Springer-Verlag, Heidelberg (2000).
- [79] Gröbner W.: *Über die Syzygien Theorie der polynomideale*, Monatsh. Math., **53**, pp. 1–16 (1949).
- [80] Gugenheim V.K.A.M.: *On Chen's iterated integrals*, Illinois J. Math., pp. 703–715 (1977).
- [81] Gugenheim V.K.A.M. y Lambe L.A.: *Perturbation theory in Differential Homological Algebra, I*, Illinois J. Math. **33**, pp. 556–582 (1989).
- [82] Gugenheim V.K.A.M., Lambe L.A. y Stasheff J.D.: *Perturbation theory in Differential Homological Algebra II*, Illinois J. Math. **35** (3), pp. 357–373 (1991).
- [83] Gugenheim V.K.A.M. y May P.J.: *On the theory and application of differential torsion products*, Memo. Amer. Math. Soc., **142** (1974).
- [84] Gugeheim V.K.A.M. y Moore J.C.: *Acyclic models and fibre spaces*, Trans. AMS, **85**, pp. 265–306 (1957).
- [85] Gugenheim V.K.A.M. y Stasheff J.D.: *On perturbations and  $A_\infty$  structures*, Bull. Soc. Math. de Belg. **38**, pp. 237–246 (1986).





- [86] Hadamard J.: *Résolution d'une question relative aux déterminants*, Bull. Sci. Math. **17** (parte 1), pp. 240–246 (1893).
- [87] Hall M.: *Group rings and extensions, I*, Ann. of Math., **39**, pp. 220–234 (1938).
- [88] Halperin S.: *Finiteness in minimal models*, Trans. Amer. Math. Soc., **230**, pp. 173–199 (1977).
- [89] Halperin S.: *Rational fibrations, minimal models, and fibrings of homogeneous spaces*, Trans. Amer. Math. Soc., **244**, pp. 199–224 (1978).
- [90] Halperin S.: *Lectures on minimal models*, Mémoire de la Société Mathématique de France (N.S.), **9/10** (1983).
- [91] Hedayat A. y Wallis W.D.: *Hadamard matrices and their applications*, The Annals of Statistics **6**, (6), pp. 1184–1238 (1978).
- [92] Henneaux M. y Teitelboim C.: *Quantization of Gauge Systems*, Princenton Univ. Press (1992).
- [93] Hilbert D.: *Über die theorie der algebraischen formen*, Math. Ann., **36**, pp. 473–534 (1890).
- [94] Hochschild G. y Serre J.P.: *Cohomology of group extensions*, TAMS **74**, pp. 110–134 (1953).
- [95] Hopf H.: *Fundamentalgruppe und zweite Bettische Gruppe*, Comment. Math. Helv., **14**, pp. 257–309 (1942).
- [96] Hopf H.: *Über die Bettischen Gruppen, die zu einer beliebigen Gruppe gehören*, Comment. Math. Helv., **17**, pp. 39–79 (1945).
- [97] Horadam K.J. y Perera A.A.I.: *Codes from cocycles*, Lecture Notes in Computer Science, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, **1255**, pp. 151–163 (1997).
- [98] Huebschmann J.: *Perturbation theory and free resolutions for nilpotent groups of class 2*, J. Alg. **126**, pp. 348–399 (1989).
- [99] Huebschmann J.: *Cohomology of nilpotent groups of class 2*, J. Alg. **126**, pp. 400–450 (1989).

- [100] Huebschmann J.: *Cohomology of finitely generated abelian groups*, L'Enseignement Mathématique t. **37** pp. 61–71 (1991).
- [101] Huebschmann J.: *Cohomology of metacyclic groups*, Transactions of the American Mathematical Society **328**, **1**, pp. 1–72 (1991).
- [102] Huesbschmann J. y Kadeishvili T.: *Small models for chain algebras*, Math. Z. **207**, pp. 245–280 (1991).
- [103] Hurewicz W.: *Beiträge zur Topologie der deformationen*, Proc. Akad. Amsterdam, **38**, pp. 112–119, 521–538 (1935); **39**, pp. 117–125, 215–224 (1936).
- [104] Johansson L. y Lambe L.A.: *Transferring algebra structures up to homology equivalence*, Math. Scan, **88** (2) (2001).
- [105] Kadeishvily T.V.: *On the homology theory of fibre spaces*, Uspekhi Mat. Nauk., **35** (3), pp. 183–188 (1980).
- [106] Kontsevich M.: *Formality conjecture*, Deformation Theory and Symplectic Geometry, Ed. D. Sternheimer et al., Kluwer, pp. 139–156 (1997).
- [107] Kontsevich M.: *Deformation quantization of poisson manifolds I*, Preprint (1997).
- [108] Koszul J.L.: *Sur les opérateurs de dérivation dans un anneau*, C.R. Acad. Sci. Paris, **225**, pp. 217–219 (1947).
- [109] Krasil'shchik I.S.: *Some new cohomological invariants for nonlinear differential equations*, Differential Geometry and its Applications, North Holland, **2**, pp. 307–350 (1992).
- [110] Krasil'shchik I.S., Lychagin V.V. y Vinogradov A.M.: *Geometry of Jets spaces and nonlinear differential equations*, Gordon and Breach, New York–London (1986).
- [111] Künneth H.: *Über die Bettischen Zahlen einer produktmannigfaltigkeit*, Math. Ann., **90**, pp. 65–85 (1923).
- [112] Lambe L.A.: *Algorithms for the homology of nilpotent groups*, Conf. on applications of computers to Geom. and Top., Lecture Notes in Pure and Applied Math. **114**, Marcel Dekker Inc., N.Y. (1989).



- [113] Lambe L.A.: *Resolutions via homological perturbation*, J. Symbolic Comp. **12**, pp. 71–87 (1991).
- [114] Lambe L.A.: *Homological perturbation theory, Hochschild homology and formal groups*, Proc. Conference on Deformation Theory and Quantization with Applications to Physics, Amherst, MA, June 1990, Cont. Math. **134**, A.M.S, pp. 183–218 (1992).
- [115] Lambe L.A.: *Resolutions which split off of the bar construction*, J. Pure Appl. Alg. **84**, pp. 311–329 (1993).
- [116] Lambe L.A.: *Next generation computer algebra systems AXIOM and the scriptpad concept: applications to research in algebra*, Collection “Analysis, algebra and computers in mathematical research, Lulea, pp. 201–222 (1992). Lect. Notes in Pure and Appl. Math., Dekker, **156** (1994).
- [117] Lambe L.A. y Stasheff J.D.: *Applications of perturbation theory to iterated fibrations*, Manuscripta Math. **58**, pp. 367–376 (1987).
- [118] Lechuga L. y Morillo A.: *Complexity in rational homotopy*, Topology, **39**, pp. 89–94 (2000).
- [119] Lehmann D.: *Théorie homotopique des formes différentielles*, Astérisque, **45** (1977).
- [120] Lemaire J.M. y Sigrist F.: *Dénombrement de types d’homotopie rationnelle*, C.R. Acad. Paris, **287**, pp. 109–112 (1978).
- [121] Lemaire J.M. y Sigrist F.: *Sur les invariants d’homotopie rationnelle liés à la L.S. catégorie*, Comment. Math. Helv., **56**, pp. 103–122 (1981).
- [122] Leray J.: *L’anneau d’une représentation*, C.R. Acad. Paris, **222**, pp. 1366–1368 (1946).
- [123] Levenshtein V.I.: *Application of the Hadamard matrices to a problem in coding*, Problems of Cybernetics, **5**, pp. 166–184 (1964).
- [124] Lyndon R.: *The cohomology theory of group extensions*, Duke Math. J., **15**, pp. 271–292 (1948).
- [125] Mac Lane S.: *Extensions and obstructions for rings*, Ill. J. Math, **2**, pp. 316–345 (1958).

- [126] Mac Lane S.: *Homology*, Classics in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin (1995). Reprint of the 1975 edition.
- [127] MacWilliams F.J. y Sloane N.J.A.: *The theory of error-correcting codes*, North Holland, New York (1977).
- [128] Massey W.S.: *Exact couples in algebraic topology I,II,III*, Ann. of Math, **56**, pp. 363–396 (1950).
- [129] May J.P.: *The cohomology of restricted Lie algebras and of Hopf algebras*, J. Alg., **3**, pp. 123–146 (1966).
- [130] May J.P.: *Simplicial objects in Algebraic Topology*, Van Nostrand, Princenton (1967). Chicago Lectures in Mathematics, The University of Chicago Press, Chicago and London (1992).
- [131] McCleary J.: *User's guide to spectral sequences*, Math. Lect. Series, **12**, Publish or Perish, Inc. (1985).
- [132] Monereo A.: *Un algoritmo de cálculo de los generadores de la construcción bar de un álgebra conmutativa*, Proyecto de Diplomatura en Informática. Codirigido por V. Álvarez y M.J. Jiménez (1998).
- [133] Munkres J.R.: *Elements of Algebraic Topology*, Addison-Wesley (1984).
- [134] Paley R.E.A.C.: *On orthogonal matrices*, J. Math. and Physics, **12**, pp. 311–320 (1933).
- [135] Plotkin M.: *Binary codes with soecified minimum distances*, IEEE Trans. Information Theory, **6**, pp. 445–450 (1960).
- [136] Prout A.: *Algèbres defferentielles fortement homotopiquement associatives*, Thèse de Mathematiques, Université Paris VII (1984).
- [137] Quillen D.: *Homotopical Algebra*, Lecure Notes in Mathematics, Springer, **43** (1967).
- [138] Quillen D.: *Rational homotopy theory*, Ann. of Math., **90**, pp. 205–295 (1969).
- [139] Real P.: *Algoritmos de clculo de la homologa efectiva de los espacios clasifi-cantes*, Tesis doctoral. Dirigida por F. Sergeraert (1993).

- [140] Real P.: *Sur le calcul des groupes d'homotopie*, C.R. Acad. Sci. Paris, **319**, Serie I, pp. 475–478 (1994).
- [141] Real P.: *Homological Perturbation Theory and Associativity*, Homology, Homotopy and Applications, **2**, **5**, pp. 51–88 (2000).
- [142] Real P. y Sergeraert F.: *A conjecture of Eilenberg-Mac Lane*, Prepublicacin de L'Institut Fourier, Grenoble (1994).
- [143] Rubio J.: *Integrating functional programming and symbolic computation*, Mathematics and computers in simulation, **44**, pp. 505–511 (1997).
- [144] Rubio J. y Sergeraert F.: *Homologie effective et suites spectrales d'Eilenberg-Moore*, C.R. Acad. Sc. Paris, **306**, pp. 723–726 (1988).
- [145] Scarpis U.: *Sui determinants di valore massime*, Rend. R. Inst. Lombardo Sci. e Lett (2), **31**, pp. 1441–1446 (1898).
- [146] Schörnert M. et al.: *Groups, Algorithms and Programming*, Technical report, LDFM, Aachen (1995).
- [147] Schreier O.: *Über die erweiterungen von gruppen*, I, Monatsh. Math.u. Phys., **34**, pp. 165–180 (1926); II. Abh. Math. Sem. Hamburg, **4**, pp. 321–346 (1926).
- [148] Sergeraert F.: *Homologie effective I,II*, C.R. Acad. Sc. Paris, **304** (**11** y **12**), pp. 279–281 y 319–321 (1987).
- [149] Sergeraert F.: *The computability problem in Algebraic Topology*, Advances in Math., **1104**, pp. 1–29 (1994).
- [150] Serre J.P.: *Cohomologies des extensions de groupes*, C.R. Acad. Sci. Paris, **226**, pp. 303–305 (1948).
- [151] Serre J.P.: *Homologie singulière des espaces fibrés*, Ann. of Math., **54**, pp. 425–505 (1951).
- [152] Shih W.: *Homologie des espaces fibrés*, Inst. Hautes Etudes Sci. **13**, pp. 293–312 (1962).
- [153] Shlichta P.J.: *Three and four-dimensional Hadamard matrices*, Bull. Amer. Phys. Soc., ser. 11, **16**, pp. 825–826 (1971).

- [154] Shlichta P.J.: *Higher dimensional Hadamard matrices*, IEEE Trans. Inform. Theory, IT-**25**, pp. 566–572 (1979).
- [155] Silva B.: *Modelos homológicos pequeños de DGA-álgebras conmutativas*, Tesis doctoral. Dirigida por P. Real (1998).
- [156] Slepian D.: *Some further theory of group codes*, Bell System Tech. J., **39**, pp. 1219–1252 (1960).
- [157] Stasheff J.D.: *Homotopy associativity of a H-space I,II*, Trans. Amer. Math. Soc. **108**, pp. 275–292 y 293–312 (1963).
- [158] Stasheff J.D.: *H-spaces from a homotopy point of view*, Lecture Notes in Math. **161**, Springer, N.Y. (1970).
- [159] Stasheff J.D.: *Cohomological Physics*, Lect. Notes in Math., Ed. Y. Félix, Algebraic Topology and Rational Homotopy, **1218**, pp. 228–237 (1986).
- [160] Stasheff J.D.: *Homological reduction of constrained poisson algebras*, J. Differential Geometry, **45**, pp. 221–240 (1997).
- [161] Sullivan D.: *Differential forms and the topology of manifolds*, Proc. Inter. Conf. on Manifolds and Related Topics in Topology, Tokyo, Uni. Tokyo Press (1973).
- [162] Sullivan D.: *Cartan–de Rham homotopy theory*, Astérisque, **32–33**), pp. 227–254 (1976).
- [163] Sullivan D.: *Infinitesimal computations in topology*, Publ. I.H.E.S., **47**, pp. 269–331 (1977).
- [164] Sylvester J.J.: *Thoughts on inverse orthogonal matrices, simultaneous sign-successions, and tessellated pavements in two or more colors, with applications to Newton's rule, ornamental tile-work, and the theory of numbers*, Phil. Mag. (4), **34**, pp. 461–475 (1867).
- [165] Szcarba R.H.: *The homology of twisted cartesian products*, Transactions of the A.M.S., **100**, pp. 197–216 (1961).
- [166] Tahara K.: *On the Second Cohomology Groups of Semidirect Products*, Math Z., **129**, pp. 365–379 (1972).

- [167] Teichmüller O.: *Über die sogenannte nicht kommutative Galoissche Theorie und die relation ...*, Dutsche Math., **5**, pp. 138–149 (1940).
- [168] Totaro B.: *Cohomology of semidirect product groups*, J. Algebra, **182**, pp. 469–475 (1996).
- [169] Turyn R.J.: *Hadamard matrices, Baumert-Hall units, four-symbol sequences, pulse compression and surface wave encoding*, J. Combinatorial Theory (A), **16**, pp. 313–333 (1974).
- [170] Veblen O.: *Analysis situs*, A.M.S. Publications, **5** (1931).
- [171] Vinogradov A.M.: *An informal introduction to the geometry of jet spaces*, Rendiconti Seminari Facoltà Scienze, Università Cagliari Supplemento al v. **58** (1988).
- [172] Wallis J.: *Hadamard matrices of order  $28m$ ,  $36m$  and  $44m$* , J. Combinatorial Theory (A), **15**, pp. 323–328 (1973).
- [173] Wallis W.D.: *Combinatorial designs*, Marcel Dekker, New York (1988).
- [174] Weibel C.A.: *An introduction to homological algebra*, Cambridge studies in advanced mathematics, Cambridge University Press, **38** (1994).
- [175] Williamson J.: *Hadamard's determinant theorem and the sum of four squares*, Duke Math. J., **11**, pp. 65–81 (1944).

UNIVERSIDAD DE SEVILLA

Reunido el Tribunal integrado por los abajo firmantes  
en el día de la fecha, para juzgar la Tesis Doctoral de

D. Víctor Álvarez Solano  
sobre *Complejos reducidos de resoluciones y  
perturbación homológica*

acordó otorgarle la calificación de *sobresaliente cum laude*

Sevilla, 21 de septiembre

2007

El Vocal,

El Vocal,

El Vocal,

El Presidente

El Secretario,

El Doctorado,

Vaz