UNIVERSIDAD DE SEVILLA
Departamento de Matemática Aplicada I

Álgebras de Lie *p*-filiformes

Memoria presentada por Luisa María Camacho Santana para optar al grado de Doctora en Matemáticas por la Universidad de Sevilla

Luisa M.ª Camacho

Vº Bº.
del Director,

Fdo. José Ramón Gómez Martín,
Catedrático de Universidad del Departamento de Matemática Aplicada I de la Universidad de Sevilla.

Sevilla, Noviembre 1999.

A mis padres y a mis hermanos, Miriam y Manolo.

-¿No ha observado usted -dijo entonces Hidelbrando- que los actos más decisivos de nuestra vida, es decir, los que corren más riesgo de decidir nuestro porvenir, son la mayoría de las veces actos imprudentes?

-Así lo veo -respondió Audibert-. Es un tren al cual sube uno sin pensarlo y sin haberse preguntado adónde lleva. E incluso casi nunca se comprende que el tren le conduzca a uno hasta que ya es demasiado tarde para apearse de él.

ANDRÉ GIDE,
Los monederos falsos

Resumen.

Se presentan en esta memoria algunos resultados sobre clasificación de álgebras de Lie nilpotentes.

La clasificación de las álgebras de Lie p-filiformes es conocida para valores de p comprendidos entre $n-4$ y $n-2$, siendo n la dimensión del álgebra. El objeto fundamental de este trabajo, es el estudio de las álgebras de Lie $(n-5)$-filiformes y $(n-6)$-filiformes.

En el primer capítulo de esta memoria se demuestra que en el caso de las álgebras de Lie $(n-5)$-filiformes la dimensión de la derivada es 4, 5, ó 6 y se presenta la clasificación, en dimensión arbitraria, en el caso de la dimensión de la derivada máxima y la clasificación completa cuando la dimensión del álgebra es 8.

El segundo capítulo tiene como objeto el estudio de las álgebras de Lie $(n-6)$-filiformes. Se determina la familia genérica de éstas y se da la clasificación completa en el caso de dimensión 8. Se cierra así la clasificación de las álgebras de Lie p-filiformes hasta dimensión 8.

El tratamiento computacional juega un papel importante en el estudio de los problemas planteados. Se recoge en el capítulo 3 de esta memoria uno de los programas utilizados, con el lenguaje de programación *Mathematica*.

Finalmente, se recogen en dos apéndices las listas de las álgebras encontradas en esta memoria.

Agradecimientos.

Esta pequeña parte de la tesis y a la vez tan importante es sin duda la que más trabajo me cuesta hacer. Son muchas las personas que de una forma u otra han participado en este trabajo. Va a ser difícil acordarme de todos.

En primer lugar quisiera dar las gracias a la persona que ha hecho posible que esta tesis se pueda leer, José Ramón, director de la misma, sin él seguro que no se habría llevado a cabo, por la oportunidad que me ofreció, por su entusiasmo y amor a su trabajo que tan bien transmite a todos los que tenemos la suerte de trabajar con él.

No podía faltar mi agradecimiento a Concha por su simpatía, amistad, apoyo y por tantas horas de trabajo que su marido no dedicó a ella.

Otra persona que ha hecho posible este momento ha sido Rosa, a ella le agradeceré siempre su ayuda (tanto a nivel investigador como a nivel personal), su amistad, su apoyo... gracias

He de hacer una mención especial al Departamento de Matemática Aplicada I, a los profesores de Aparejadores, a los profesores de Agrícolas por lo bien que me han acogido y especialmente a todo el grupo de Informática por tantas horas compartidas con ellos, a Natalia, a Juan Carlos (por sus consejos), a Javier (por su ayuda imprescindible), a Antonio ...., y, ¿cómo no? a Juanma, siempre dispuesto a resolver cualquier problema, aunque se lo pidiera una simple C.H. Quisiera también destacar y agradecer a Alberto, siempre dispuesto a buscar un hueco para convertir una traducción de inglés en un trabajo legible y gracias a eso tener hoy publicados o en fase algunos artículos de esta memoria. A todos gracias.

Mi gratitud al profesor Yusupdjan Khakimdjanov, que ha seguido con interés la elaboración de este trabajo.

Quisiera también destacar a Jesús Mari, a Emi, a Isabel y a Joaquín, por el interés que han mostrado siempre, por su amistad, por haber compartido conmigo sus experiencias y por preocuparse tanto por mí.

Finalmente, en el ámbito familiar, quisiera dar las gracias a todos los que me rodean, mi familia, mis padres, mis hermanos, May, mis amigos, ..., por el apoyo, comprensión y cariño recibidos.

Gracias a todos.

Introducción.

El noruego Sophus Lie (1842-1899) desarrolló en Berlín la noción de grupos de transformaciones continuas y su papel en la teoría de ecuaciones diferenciales. Casi simultáneamente y en la misma ciudad, el alemán Felix Klein (1849-1925) considera el papel de los grupos finitos en el estudio de los cuerpos regulares y en la teoría de ecuaciones algebraicas. Ambos desarrollos, conjuntamente, supusieron un importante avance para la unificación de diversas teorías matemáticas y para numerosas aplicaciones en muchos otros campos. En concreto, la teoría de Lie es de una utilidad fundamental en áreas como el análisis, la geometría diferencial, la teoría de números, las ecuaciones diferenciales, la estructura atómica, la física de alta energía, los sistemas dinámicos, el sólido rígido, el campo electromagnético, la mecánica cuántica o la teoría de la relatividad, entre otras.

En física es frecuente encontrar álgebras y grupos de Lie como grupos de simetría de sistemas dinámicos. Estas simetrías están íntimamente asociadas con las leyes de conservación. El estudio de la teoría de grupos y álgebras de Lie ha ido ganando importancia en los últimos años. Es una poderosa herramienta en el estudio de las ecuaciones diferenciales y en la teoría de las perturbaciones. Además, en la física moderna los grupos de simetrías no consideran sólo simetrías espacio-temporales, sino también nuevas simetrías asociadas con los grados de libertad internos de las partículas y los campos.

Mención especial merece el estudio de las estructuras simplécticas de álgebras de Lie filiformes. Las álgebras de Lie simplécticas aparecen en el estudio de problemas dinámicos (como el problema de los dos cuerpos, o el de los tres cuerpos). Se han estudiado las álgebras de Lie filiformes simplécticas, no simplecto-isomorfas, hasta dimensión 10 [24], (y, para ello, ha sido necesario clasificar también las álgebras de Lie filiformes de contacto hasta dimensión 11, [26])

Conviene, por tanto, determinar familias de álgebras de Lie lo más extensas que sea posible y estudiar sus propiedades. En consecuencia, uno de los primeros problemas a considerar será el de obtener la clasificación, salvo isomorfismo, de las álgebras de Lie. La descomposición de Levi (véase cualquier manual sobre álgebras de Lie, como [5], [19], [30] ó [32]) de un álgebra de Lie en suma semidirecta de su radical (el ideal resoluble maximal del álgebra) y una parte semisimple (la subálgebra de levi), reduce el problema de la clasificación, esencialmente, al de las álgebras semisimples y resolubles.

Las álgebras de Lie semisimples (sin ideales propios abelianos), juegan un importante papel en las aplicaciones físicas. Las complejas fueron clasificadas por Killing y Cartan en su tesis (1894). La clasificación de las álgebrasde Lie semisimples sobre $\mathbf{C}$ va hoy asociada a los diagramas de Dynkin [36]. Posteriormente, Cartan (1914) clasificó las álgebras de Lie semisimples reales.

La clasificación de las álgebras de Lie resolubles, sin embargo, es un problema abierto, aunque puede reducirse todavía, en un cierto sentido [30], a la clasificación de un tipo particular: las álgebras de Lie nilpotentes y es en este campo donde se enmarca el trabajo que se presenta en esta memoria.

Son muchos los autores que han abordado el problema de la clasificación de las álgebras de Lie nilpotentes. Las listas para dimensiones menores o iguales a 5 sobre un cuerpo conmutativo se publicaron por primera vez por Dixmier en 1.958 [20] aunque, tal como afirma él mismo en el trabajo, lo realizó también y de manera independiente Chevalley, pero no llegó a publicarlo. Mas no son éstas las primeras listas obtenidas de álgebras de Lie nilpotentes, puesto que en 1.891 K. Umlauf [37] da en su tesis doctoral listas para todas las leyes de dimensiones menores o iguales a 6 y para aquellas de dimensiones 7, 8 y 9 admitiendo una base $\{X_0, X_1, \ldots, X_{n-1}\}$ para la cual se cumple que $[X_0, X_i] = X_{i+1}$ $(1 \leq i \leq n-2)$, sobre $\mathbf{R}$ ó $\mathbf{C}$ (las álgebras de Lie nilpotentes con esta propiedad son las ahora llamadas filiformes). Estas listas contienen, no obstante, errores y álgebras escindidas no presentadas como tales. Pero esta dirección de investigación fue rápidamente abandonada, por su complejidad, en beneficio del estudio de las mucho mejor estructuradas álgebras de Lie semisimples. En 1.958 U. Morosov [33] publica la primera lista completa sobre un cuerpo de $\mathbf{K}$ de característica 0, para dimensión 6. Esta clasificación se basa en la dimensión máxima de un ideal abeliano maximal.

Vergne [38] publica en 1.966 listas completas de dimensión menores o iguales a 6 sobre $\mathbf{C}$, en su tesis de tercer ciclo, estudiando la variedad de leyes de álgebras de Lie nilpotentes mediante métodos cohomológicos más que estudiando directamente las clases de isomorfía. Muestra el importante papel de las álgebras de Lie filiformes, (terminología introducida por ella misma), en el estudio de la variedad de leyes de álgebras de Lie nilpotentes. Otras listas completas las proporcionan Nielsen [34] y Cerezo [18] en 1.983, aunque de manera independiente y haciendo uso de métodos diferentes. El procedimiento debido a Cerezo (a partir del hecho de que un álgebra de dimensión n es suma semidirecta de otra de dimensión $n-1$ y una recta) ha sido el seguido por M. Romdhani para dar la lista completa para las nilpotentes de dimensión 7 [35]. El tema ha continuado siendo estudiado por muchos autores en muy diversos lugares pero, la complejidad de los cálculos involucrados (realizados a veces a mano) ha sido fuente de errores y aconseja dar un tratamiento computacional al problema.

Un impulso importante a la clasificación de las álgebras de Lie nilpotentes lo ha dado la introducción, por Goze y Ancochea en [3], de un invariante más potente que los hasta entonces conocidos: *la sucesión característica o invariante de Goze.* Usando este invariante, estos mismos autores obtienen la clasificación de las álgebras de Lie nilpotentes complejas de dimensión 7, [3] y la de las álgebras de Lie filiformes complejas de dimensión 8 [2].

Más tarde y usando este invariante, Gómez y Echarte en [21], [22] clasifican las álgebras filiformes complejas de dimensión 9. Posteriormente, en [17], Castro, Gómez, Jiménez-Merchán, Núñez y Valeiras desarrollan un algoritmo para ser implementado en un lenguaje simbólico, que permita encontrar familias genéricas de álgebras de Lie filiformes en cualquier dimensión junto a las restricciones exigibles a los parámetros y así ya partir de familias fiables para su clasificación.

Conforme aumenta la dimensión, la determinación de listas exhaustivas de álgebras de Lie se va volviendo cada vez más y más compleja. Los trabajos realizados por nuestro grupo de investigación han supuesto un avance en la clasificación de las álgebras de Lie filiformes, tanto para dimensiones pequeñas, Gómez, Jiménez-Merchán y Khakimdjanov [25], como en extensas familias de álgebras filiformes en dimensión arbitraria, Gómez, Goze y Khakimdjanov [23] (las llamadas álgebras de Lie filiformes k-abelianas) desarrollándose técnicas que permiten su clasificación y, dado que el caso $k=1$ ya era conocido, se han clasificado las álgebras filiformes 2-abelianas en dimensión arbitraria.

No es casual que hasta ahora los diferentes autores que han trabajado en la clasificación de álgebras de Lie nilpotentes se hayan limitado al caso filiforme en cuanto la dimensión no es "muy pequeña" pues, cuando el índice de nilpotencia se "aleja" de la dimensión, las dificultades crecen extraordinariamente, porque se da un gran aumento de los parámetros a determinar sin llevar aparejado un aumento paralelo de las restricciones entre ellos. Es un hecho bien conocido que la clasificación de las álgebras metabelianas (las de índice de nilpotencia 2, aquellas cuya derivada es abeliana) es muy difícil. Un resultado reciente de Goze y Khakimdjanov [30] muestra que la clasificación general de las álgebras de Lie metabelianas de dimensión $2p+1$ es equivalente a la clasificación de las formas bilineales en $\mathbf{C}^p$ con valores en $\mathbf{C}^p$ y contiene la clasificación de todas las álgebras de Lie de dimensión p. En la actualidad

Gómez y Rodríguez están trabajando en ellas y han consiguiendo algunos resultados [29], [27], [28].

Cabezas, Gómez en [7] y [11] y junto a Jiménez-Merchán en [12], estudian una familia de álgebras de Lie que ellos llaman álgebras de Lie *p-filiformes* que son las de dimensión n e invariante de Goze $(n-p, 1, \ldots, 1)$. Puesto que las filiformes son las de invariante de Goze $(n-1, 1)$, quedan incluidas dentro de esta familia como las álgebras de Lie 1-filiformes; análogamente, las casifiliformes son las 2-filiformes y las abelianas las $(n-1)$-filiformes. Hasta el momento se ha obtenido la clasificación, en [7] y [12], de las álgebras de Lie p-filiformes en dimensión cualquiera en los casos en que $p \geq n-4$.

En esta línea de investigación se incardina el presente trabajo estudiando álgebras de Lie $(n-5)$-filiformes y $(n-6)$-filiformes. Para las álgebras de Lie $(n-5)$-filiformes se prueba que la dimensión de la derivada es 4, 5 ó 6 y se presenta la clasificación, en dimensión arbitraria, en el caso de la dimensión de la derivada máxima y la clasificación completa en dimensión 8. Se determina la familia genérica de las álgebras $(n-6)$-filiformes y se clasifica en el caso de dimensión 8. Se cierra así, la clasificación de las álgebras de Lie p-filiformes hasta dimensión 8. Como complemento, en un apéndice al final del trabajo se clasifican las álgebras de Lie de dimensión 7, con invariante de Goze $(6, 1)$ [26] y $(5, 1, 1)$ [4] y también las de dimensión 6 de invariante de Goze $(5, 1)$ [26], [33], con objeto de usar una notación uniforme para las álgebras escindidas que aparecen en la tesis.

Álgebras de Lie $(n-5)$-filiformes de dimensión n con dimensión de la derivada máxima (dimensión 6) existen $2n-13$ si es par y $2n-14$ si es impar distribuidas en cuatro familias. En el caso de dimensión 8 existen 46 álgebras y una familia infinita uniparamétrica de álgebras 3-filiformes no escindidas y 37 álgebras y una familia uniparamétrica escindidas. Álgebras de Lie 2-filiformes de dimensión 8 hay 50 álgebras, 9 familias uniparamétricas y 2 biparamétricas no escindidas y 7 álgebras y una familia uniparamétrica escindidas. Una expresión de las correspondientes leyes respecto a una base adaptada puede verse en el apéndice B al final de la memoria (pág. 213 a 240).

En el Capítulo 0 se da una breve recopilación de tópicos bien conocidos pero que son prerrequisitos necesarios para la mejor comprensión de la tesis. En cualquier caso, al comienzo de dicho capítulo se citan otras referencias destinadas a aquellos lectores no suficientemente familiarizados con los conceptos y resultados que se usan a lo largo del trabajo.

En el Capítulo 1 se aborda el problema de la clasificación para $p = n-5$ y con la derivada máxima. La familia ha sido ya encontrada en [7], [8], por lo que basándose en esa familia se clasifican las álgebras de Lie $(n-5)$-filiformes con dimensión de la derivada máxima. Además, dentro de este capítulo y como sección, se da la clasificación de las $(n-5)$-filiformes de dimensión 8. Partiendo de la familia ya encontrada, se intenta buscar invariantes que permitan distinguir familias no isomorfas. Esto no es siempre posible, por lo que es necesario buscar otras herramientas o técnicas, lo que se hace es mediante cambios de base genéricos intentar estudiar si la nulidad de algunos de los parámetros que van apareciendo en la familia es o no invariante, o por el contrario, existe algún cambio concreto que lo anula. En otros casos se ha encontrado invariantes que son combinación de los parámetros que aparecen en la familia. Aquí es dónde se utiliza el software *Mathematica*.

En el Capítulo 2, haciendo uso de los mismos resultados y técnicas se llega primero a la familia de leyes de las álgebras de Lie $(n-6)$-filiformes y después usando de nuevo la informática se obtiene la clasificación de las álgebras de Lie $(n-6)$-filiformes de dimensión 8. En este caso, el uso del ordenador se ha hecho imprescindible por la cantidad de parámetros que se obtienen, en cambio, aunque los cálculos en el caso de las 3-filiformes pueden resultar complicados, el ordenador ha servido como herramienta para comprobar los resultados y para garantizar la fiabilidad de los mismos.

Con esto se cierra la clasificación de todas las álgebras de Lie p-filiformes hasta dimensión 8, en la tabla siguiente se indican los correspondientes invariantes de Goze

$(7,1)$ $(6,1,1)$ $(5,1,1,1)$ $(4,1,1,1,1)$ $(3,1,1,1,1,1)$ $(2,1,1,1,1,1,1)$

$(6,1)$ $(5,1,1)$ $(4,1,1,1)$ $(3,1,1,1,1)$ $(2,1,1,1,1,1)$

$(5,1)$ $(4,1,1)$ $(3,1,1,1)$ $(2,1,1,1,1)$

$(4,1)$ $(3,1,1)$ $(2,1,1,1)$

$(3,1)$ $(2,1,1)$

$(2,1)$

todas las filiformes hasta dimensión 8 (e incluso hasta dimensión 11), se encuentran clasificadas en [26]. Todas las de invariante de Goze $(4,1,1)$, $(4,1,1,1)$, $(4,1,1,1,1)$, $(3,1,1)$, $(3,1,1,1)$, $(3,1,1,1,1,1)$, $(2,1,1)$, $(2,1,1,1)$, $(2,1,1,1,1,1,1)$ $(2,1,1,1,1)$ han sido ya clasificadas en [7] y por último, la de invariante de Goze $(5,1,1)$, ya fue clasificada (pero utilizando distinta terminología) por Ancochea y Goze en [4].

Un papel importante del método que conduce a los resultados obtenidos es, esencialmente, fruto del tratamiento computacional en el estudio de los problemas planteados, utilizando un lenguaje formal para generar cambios de base que nos permitan discutir la existencia de álgebras no isomorfas. Se recoge, además, en el capítulo 3 de la memoria uno de los programas utilizados, con el lenguaje de programación *Mathematica*, para la generación de cambios de base.

Finalmente, se añaden dos apéndices con las listas de álgebras ya obtenidas anteriormente, es el caso de las álgebras de invariante de Goze $(5,1)$, $(5,1,1)$ y $(6,1)$, y un último apéndice que recoge las encontradas en esta memoria.

Índice

Capítulo 0

Generalidades.

Se introducen las nociones y definiciones generales que se utilizarán a lo largo de este trabajo de investigación, y se mencionan algunos textos introductorios sobre álgebras de Lie, que son suficientemente conocidos para el especialista.

Si el lector no está suficientemente familiarizado con los conceptos que se tratan, puede recurrir a los textos que se citan a continuación.

Podrían ser considerados básicos los textos de Jacobson [32] o Humphreys [31] y el "survey" de Belifante y Kolman [6]. Más recientemente, con un enfoque muy actual, puede ser consultado el texto de Bäuerle y Kerf [5]. Un texto muy reciente pero imprescindible, dedicado especialmente a las álgebras de Lie nilpotentes, objeto de estudio de esta tesis, es el de Goze y Khakimdjanov [30].

0.1 Notaciones y terminología.

Un *álgebra de Lie* $(\mathfrak{g}, \mu)$ *sobre un cuerpo* $\mathbb{K}$ es un espacio vectorial $\mathfrak{g}$ sobre $\mathbb{K}$ dotado de una aplicación bilineal $\mu : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$, llamada *producto o ley del álgebra*, que cumple las propiedades

$$\mu(x, x) = 0$$

y la identidad de Jacobi, que se expresa como

$$\mu(x, \mu(y, z)) + \mu(y, \mu(z, x)) + \mu(z, \mu(x, y)) = 0$$

para todos los elementos x, y, z de $\mathfrak{g}$.

Se suele designar $\mu(x, y)$ por $[x, y]$ y así μ es nombrado usualmente como *producto corchete*. Por otra parte, $\mathfrak{g}$ representa el álgebra o el espacio vectorial, indistintamente, según contexto. A la dimensión del espacio vectorial subyacente se le llama también *dimensión del álgebra*. Las álgebras de Lie, en este trabajo, serán consideradas sobre el cuerpo $\mathbf{C}$ y de dimensión finita.

Si llamamos $\mathcal{B}^2(\mathbf{C}^n)$ al espacio vectorial de las aplicaciones bilineales de $\mathbf{C}^n \times \mathbf{C}^n$ en $\mathbf{C}^n$ y fijamos una base $\{e_1, e_2, \dots e_n\}$ de $\mathbf{C}^n$, podemos determinar un elemento α de $\mathcal{B}^2(\mathbf{C}^n)$ conociendo el conjunto de escalares $C_{i,j}^k$, llamados *constantes de estructura*, definidos por las fórmulas $\alpha(e_i, e_j) = \sum_{k=1}^n C_{i,j}^k e_k$; de este modo, $\mathcal{B}^2(\mathbf{C}^n)$ puede ser dotado con estructura de espacio afín. Así, podemos considerar un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ como un elemento de $\mathcal{B}^2(\mathbf{C}^n)$; el conjunto $\mathcal{L}_n$ de leyes de álgebra de Lie sobre $\mathbf{C}^n$ es un conjunto algebraico afín definido por las relaciones polinomiales

1. $C_{i,j}^k = -C_{j,i}^k$,
2. $\sum_{l=1}^n (C_{i,j}^l C_{k,l}^s + C_{j,k}^l C_{i,l}^s + C_{k,i}^l C_{j,l}^s) = 0$

y parametrizado por las $(n^3 - n^2)/2$ constantes de estructura $C_{i,j}^k$.

Un subespacio $\mathfrak{g}_1$ de $\mathfrak{g}$ se dice que es una *subálgebra de Lie de* $\mathfrak{g}$ si $[X, Y] \in \mathfrak{g}_1$ para todo elemento X, Y de $\mathfrak{g}_1$, es decir, una subálgebra es un subespacio vectorial que es álgebra de Lie para la multiplicación inducida.

Una subálgebra de Lie $\mathcal{I}$ de $\mathfrak{g}$ se dice que es un *ideal* de $\mathfrak{g}$ si $[\mathcal{I}, \mathfrak{g}] \subseteq \mathcal{I}$, es decir, $[X, Y] \in \mathcal{I}$ para cualquier elemento $X \in \mathcal{I}$, $\quad Y \in \mathfrak{g}$; por supuesto, todo ideal es subálgebra.

Un álgebra de Lie no abeliana $\mathfrak{g}$ se dice *simple* si no tiene ideales propios y *semisimple* si no tiene ideales propios abelianos. Las álgebras semisimples son sumas directas de álgebras simples y éstas son conocidas desde los trabajos de Killing y Cartan y están clasificadas (pueden verse en [30] ó [31]).

Si $\mathfrak{g}$ es un álgebra de Lie, a la sucesión de ideales definidos mediante

$$\begin{cases} \mathcal{D}^0(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g}, \\ \mathcal{D}^{k+1}(\mathfrak{g}) = [\mathcal{D}^k(\mathfrak{g}), \mathcal{D}^k(\mathfrak{g})], \qquad k \geq 0, \end{cases}$$

se le llama *sucesión derivada* de $\mathfrak{g}$. Dicha sucesión verifica que

$$\mathfrak{g} = \mathcal{D}^0(\mathfrak{g}) \supseteq \mathcal{D}^1(\mathfrak{g}) \supseteq \cdots \supseteq \mathcal{D}^i(\mathfrak{g}) \cdots$$

y si existe un entero k para el que $\mathcal{D}^k(\mathfrak{g}) = \{0\}$ el álgebra se dice *resoluble*; en tal caso, al menor entero que cumple dicha condición se le llama *índice de resolubilidad* de $\mathfrak{g}$.

El Teorema de Lévi (veánse, por ejemplo, [30] ó [32]) dice que toda álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ admite una descomposición en suma semidirecta de su radical (el ideal resoluble maximal del álgebra) y una subálgebra semisimple (la subálgebra de Levi). Este resultado reduce, en esencia, el problema de la clasificación de las álgebras de Lie al de la clasificación de las resolubles (pues la de las semisimples ya hemos visto que es conocida).

Si $\mathfrak{g}$ es un álgebra de Lie, a la sucesión de ideales definidos mediante

$$\begin{cases} \mathcal{C}^0(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g}, & \\ \mathcal{C}^{k+1}(\mathfrak{g}) = [\mathcal{C}^k(\mathfrak{g}), \mathfrak{g}], & k \geq 0, \end{cases}$$

se le llama *sucesión central descendente* de $\mathfrak{g}$. Dicha sucesión verifica que

$$\mathfrak{g} = \mathcal{C}^0(\mathfrak{g}) \supseteq \mathcal{C}^1(\mathfrak{g}) \supseteq \cdots \supseteq \mathcal{C}^i(\mathfrak{g}) \cdots$$

y si existe un entero k para el que $\mathcal{C}^k(\mathfrak{g}) = \{0\}$ el álgebra se dice *nilpotente*; en tal caso, al menor entero que cumple dicha condición se le llama *índice de nilpotencia* de $\mathfrak{g}$. Cuando la dimensión es n y el nilíndice $n-1$, las álgebras que se obtienen son llamadas *filiformes*; se dirán *casifiliformes* si su nilíndice es $n-2$. Las álgebras de Lie *abelianas* son las de nilíndice 1.

Si $\mathfrak{g}$ es un álgebra de Lie y $X \in \mathfrak{g}$, se denota por $ad(X)$ al endomorfismo de $\mathfrak{g}$ definido por

$$\begin{array}{rccc} ad(X): & \mathfrak{g} & \longrightarrow & \mathfrak{g} \\ & Y & \longrightarrow & [X, Y] \end{array}$$

y se le denomina *aplicación adjunta de X*.

La aplicación

$$\mathrm{ad} : \mathfrak{g} \to gl(\mathfrak{g})$$

es una representación de $\mathfrak{g}$, llamada *representación adjunta* del álgebra. El Teorema de Engel dice que "*un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ es nilpotente si y sólo si $ad(X)$ es nilpotente para todo elemento X de $\mathfrak{g}$*".

Se denotará $\mathbf{C}_n$, con $n \in \mathbf{N}$, al conjunto cociente de $\mathbf{C}$ con la relación de equivalencia R_n, definida como $uR_nv \Longleftrightarrow u = wv$ con $u^n = 1$, $\forall u, v \in \mathbf{C}$.

0.2 Invariantes Clásicos.

El problema de la clasificación de álgebras de Lie nilpotentes obliga a distinguir cuando son isomorfas; la decisión no es una cuestión fácil, por lo que se recuerdan los *invariantes* más comunes de un álgebra, es decir, aquellas propiedades que se conservan bajo isomorfismos, de los que destacan por su sencillez la dimensión y el índice de nilpotencia.

Otros invariantes usuales son los proporcionados por la sucesión derivada

$$\mathfrak{g} = \mathcal{D}^0(\mathfrak{g}) \supset \mathcal{D}^1(\mathfrak{g}) \supset \cdots \supset \mathcal{D}^i(\mathfrak{g}) \cdots$$

por la sucesión central descendente

$$\mathfrak{g} = \mathcal{C}^0(\mathfrak{g}) \supset \mathcal{C}^1(\mathfrak{g}) \supset \cdots \supset \mathcal{C}^i(\mathfrak{g}) \cdots$$

así como por la *sucesión central ascendente* que se define como

$$\{0\} = \mathcal{C}_0(\mathfrak{g}) \subset \mathcal{C}_1(\mathfrak{g}) \subset \cdots \subset \mathcal{C}_i(\mathfrak{g}) \cdots$$

donde

$$\begin{cases} \mathcal{C}_0(\mathfrak{g}) = \{0\}, \\ \mathcal{C}_{k+1}(\mathfrak{g}) = \{X \in \mathfrak{g} : [X, \mathfrak{g}] \subseteq \mathcal{C}_k(\mathfrak{g})\}, \quad k \geq 0. \end{cases}$$

Denotando por

$$d_i = dim(\mathcal{D}^i(\mathfrak{g})), \quad c^i = dim(\mathcal{C}^i(\mathfrak{g})), \quad c_i = dim(\mathcal{C}_i(\mathfrak{g}))$$

entonces la sucesión de dimensiones

$$(n, d_1, \ldots, d_{p-1}, c^1, \ldots, c^{s-1}, c_1, \ldots, c_{s-1})$$

es un invariante de $\mathfrak{g}$. La clasificación de álgebras de Lie nilpotentes de dimensiones inferiores o iguales a 6 se puede obtener utilizando solamente estos invariantes.

Se denotan la *subálgebra derivada* de $\mathfrak{g}$ y el *centro* de $\mathfrak{g}$, respectivamente, por

$$[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = \mathcal{C}^1(\mathfrak{g}) = \mathcal{D}^1(\mathfrak{g})$$

$$\mathcal{Z}(\mathfrak{g}) = \mathcal{C}_1(\mathfrak{g})$$

Asimismo, si $\mathfrak{h}$ es una subálgebra de $\mathfrak{g}$, el *centralizador* de $\mathfrak{h}$ en $\mathfrak{g}$ viene dado por

$$Cent_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}) = \{X \in \mathfrak{g} : [X, Y] = 0, \quad \forall Y \in \mathfrak{h}\}$$

Las dimensiones de estos ideales, a veces, resultan ser un invariante bastante útil para distinguir álgebras no isomorfas.

Un invariante más potente es el llamado *la sucesión característica* o *invariante de Goze*, basado en conceptos elementales relacionados con la forma canónica de Jordan y se ha utilizado explícitamente, por primera vez, en los trabajos de Ancochea y Goze [1] y [2].

La sucesión característica se define como el máximo de los símbolos de Segre de las aplicaciones lineales nilpotentes $ad(X)$, siendo X un elemento del complementario de la subálgebra derivada, es decir, si $\mathfrak{g}$ es un álgebra de Lie nilpotente compleja de dimensión finita n, para todo $X \in \mathfrak{g} - [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ se denota por

$$c(X) = (c_1(X), c_2(X), \ldots, 1)$$

la sucesión en orden decreciente de las dimensiones de los subespacios característicos del operador nilpotente $ad(X)$. Ordenando el conjunto de estas sucesiones en orden lexicográfico se define

$$c(\mathfrak{g}) = sup\{c(X) : X \in \mathfrak{g} - [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]\}$$

y a éste se le llama *sucesión característica.* Este invariante se ha utilizado para obtener la clasificación de las álgebras de Lie nilpotentes de dimensión 7, [1].

Evidentemente $c(\mathfrak{g})$ es un invariante para los isomorfismos y, por construcción, existe al menos un vector $X \in \mathfrak{g} - [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ tal que $c(\mathfrak{g}) = c(X)$; todo vector que verifique dicha condición es llamado *vector característico* del álgebra.

El álgebra abeliana de dimensión n es la única de invariante de Goze $(1, \ldots, 1)$, en las álgebras metabelianas la sucesión característica es $(2, 2, \ldots, 2, 1, \ldots 1)$, en las álgebras de Heisenberg $(2, 1, \ldots 1)$, en las álgebras filiformes $(n-1, 1)$ y en las álgebras casifiliformes $(n-2, 1, 1)$.

En [7], [11] y [12], se estudian un tipo particular de álgebras de Lie, aquellas de invariante de Goze $(n-p, 1, \ldots, 1)$, que los autores llaman *p-filiformes.* Las álgebras de Lie abelianas son las $(n-1)$-filiformes, las filiformes son las 1-filiformes y las casifiliformes son las 2-filiformes.

Si $\mathfrak{g}$ es un álgebra de Lie p-filiforme de dimensión n (esto es, nilpotente con sucesión característica $(n-p, 1, \ldots, 1)$), entonces existe una base que denotaremos por

$\{X_0, X_1, \ldots, X_p, Y_1, \ldots, Y_{n-p-1}\}$, verificando

$$[X_0, X_i] = X_{i+1} \quad 1 \leq i \leq p-1$$
$$[X_0, X_{n-p}] = 0$$
$$[X_0, Y_j] = 0 \qquad 1 \leq i \leq n-p-1$$

dicha base se dirá *base adaptada* del álgebra, siendo X_0 un vector característico.

0.3 Álgebras graduadas.

Un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ se dice **Z**-*graduada* si puede ser descompuesta vectorialmente como suma directa $\mathfrak{g} = \bigoplus_{i \in \mathbf{Z}} \mathfrak{g}_i$ donde los $\mathfrak{g}_i$ son los subespacios graduantes $\mathfrak{g}_i$ que verifican $[\mathfrak{g}_i, \mathfrak{g}_j] \subset \mathfrak{g}_{i+j}$, para todo $i, j \in \mathbf{Z}$.

Se dirá entonces que $\bigoplus_{i \in \mathbf{Z}} \mathfrak{g}_i$ o $\bigoplus \mathfrak{g}_i$ es una **Z**-*graduación* o, por abuso de notación, una *graduación*. La graduación se dice *finita* si el conjunto de los índices i para los que $\mathfrak{g}_i \neq \{0\}$ es finito y conexa si existen $n_1, n_2 \in \mathbf{Z}$ tales que $\mathfrak{g}_i \neq \{0\}$ si $n_1 \leq i \leq n_2$ y $\mathfrak{g}_i = \{0\}$ en otro caso.

Un álgebra de Lie se dice **Z**-*filtrada* (o *filtrada*) si existen subespacios S_i, con $i \in \mathbf{Z}$ tales que:

$$\begin{array}{ll} \mathfrak{g} = \bigcup_{i \in \mathbf{Z}} S_i & \\ [S_i, S_j] \subset S_{i+j} & i, j \in \mathbf{Z} \\ S_i \subset S_j & i > j \text{ (filtración descendente)} \end{array}$$

Una filtración descendente $(S_i)_{i \in \mathbf{Z}}$ es *finita* si existen $n_1, n_2 \in \mathbf{Z}$, tales que:

$$\begin{array}{ll} S_i = \mathfrak{g} & \text{si } i \leq n_1 \text{ y} \\ S_i = \{0\} & \text{si } i \geq n_2 \end{array}$$

Si un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ es graduada con $\mathfrak{g} = \bigoplus_{i \in \mathbf{Z}} \mathfrak{g}_i$. puede definirse una filtración asociada a la graduación tomando $S_k = \bigoplus_{i \geq k} \mathfrak{g}_i$.

Si $\mathfrak{g}$ es un álgebra de Lie filtrada, con $\mathfrak{g} = \bigcup_{i \in \mathbf{Z}} S_i$, se puede construir, a partir de ella, un álgebra de Lie graduada, poniendo

$$gr\mathfrak{g} = \bigoplus_{i \in \mathbf{Z}} \mathfrak{g}_i \quad \text{con} \quad \mathfrak{g}_i = S_i/S_{i+1}$$

y definiendo en $gr\mathfrak{g}$ el producto $[\overline{X}, \overline{Y}] = \overline{[X, Y]}$ donde $\overline{[X, Y]}$ es la clase del elemento $[X, Y] \in S_{i+j}$, cuando X e Y son representantes de las clases $\overline{X}$, $\overline{Y}$ en S_i y S_j respectivamente.

Se dice que un álgebra de Lie nilpotente $\mathfrak{g}$ está *graduada naturalmente* si es isomorfa al álgebra graduada $gr\mathfrak{g}$, obtenida de la filtración natural del álgebra. Es decir, $\mathfrak{g}$ es un álgebra graduada naturalmente si, siendo

$$gr\mathfrak{g} = \bigoplus_{i \in \mathbf{Z}} \mathfrak{g}_i \quad \text{con} \quad \mathfrak{g}_i = C^{i-1}(\mathfrak{g})/C^i(\mathfrak{g})$$

se tiene que $\mathfrak{g} \simeq gr\mathfrak{g}$.

Capítulo 1

Álgebras de Lie $(n-5)$-filiformes.

En este capítulo, usando la familia genérica descrita en [8], se van a encontrar todas las álgebras de Lie $(n-5)$-filiformes con derivada máxima. Se da la clasificación de las álgebras p-filiformes con dimensión de la derivada máxima. Además, se encuentran la clasificación completa de las álgebras $(n-5)$-filiformes de dimensión 8, la primera dimensión no conocida hasta el momento.

1.1 Álgebras de Lie $(n-5)$-filiformes con derivada máxima.

Lema 1.1.1.– *[8] La ley de un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ $(n-5)$-filiforme compleja de dimensión $n \geq 6$ viene expresada, salvo antisimetría, en una cierta base adaptada $\{X_0, X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, Y_1, Y_2, \ldots, Y_{n-6}\}$, en función de los siguientes productos*

$$\begin{array}{rcll}
[X_0, X_i] & = & X_{i+1} & 1 \leq i \leq 4 \\
[X_1, X_2] & = & cX_4 + dX_5 + \sum_{k=1}^{n-6} \alpha_k Y_k & \\
[X_1, X_3] & = & cX_5 & \\
[X_1, X_4] & = & eX_5 + \sum_{k=1}^{n-6} \beta_k Y_k & \\
[X_2, X_3] & = & -eX_5 - \sum_{k=1}^{n-6} \beta_k Y_k &
\end{array}$$

$$
\begin{array}{lcll}
[X_1, Y_i] & = & a_{3i}X_3 + a_{2i}X_4 + a_{1i}X_5 & 1 \le i \le n-6 \\
[X_2, Y_i] & = & a_{3i}X_4 + a_{2i}X_5 & 1 \le i \le n-6 \\
[X_3, Y_i] & = & a_{3i}X_5 & 1 \le i \le n-6 \\
[Y_i, Y_j] & = & b_{ij}X_5 & 1 \le i < j \le n-6,
\end{array}
$$

sujeta a las siguientes restricciones

$$
\begin{array}{lcll}
a_{3i}\beta_k & = & 0 & 1 \le i,k \le n-6 \\
a_{3i}\alpha_k & = & 0 & 1 \le i,k \le n-6 \\
a_{1i}\beta_k & = & 0 & 1 \le i,k \le n-6 \\
a_{2i}c\beta_k & = & 0 & 1 \le i,k \le n-6 \\
a_{3i}e & = & 0 & 1 \le i \le n-6 \\
\sum_{k=1}^{n-6} \beta_k a_{2k} & = & 0 & \\
\sum_{k=2}^{n-6} \alpha_k b_{1k} & = & 0 & \\
\sum_{k=i+1}^{n-6} \alpha_k b_{ik} & = & \sum_{r=1}^{i-1} \alpha_r b_{ri} & 2 \le i \le n-7 \\
\sum_{k=1}^{n-7} \alpha_k b_{k,n-6} & = & 0 & \\
\sum_{k=2}^{n-6} \beta_k b_{1k} & = & 0 & \\
\sum_{k=i+1}^{n-6} \beta_k b_{ik} & = & \sum_{r=1}^{i-1} \beta_r b_{ri} & 2 \le i \le n-7 \\
\sum_{k=1}^{n-7} \beta_k b_{k,n-6} & = & 0 &
\end{array}
$$

Es fácil determinar que, cualquiera que sea la dimensión del álgebra, la derivada sólo puede tener dimensión 4, 5 ó 6. A continuación, se van a determinar todas las álgebras $(n-5)$-filiformes en dimensión arbitraria para el caso en que la dimensión de la derivada sea máxima, es decir, 6.

Lema 1.1.2.– *Si $\mathfrak{g}$ es un álgebra de Lie $(n-5)$-filiforme de dimensión n con $dim[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = 6$ su ley puede ser expresada, en una cierta base adaptada, por*

$$
\left\{
\begin{array}{ll}
[X_0, X_i] = X_{i+1} & 1 \le i \le 4 \\
[X_1, X_2] = cX_4 + Y_{n-7} & \\
[X_1, X_3] = cX_5 & \\
[X_1, X_4] = Y_{n-6} & \\
[X_2, X_3] = -Y_{n-6} & \\
[X_1, Y_i] = a_{2i}X_4 & 1 \le i \le n-7 \\
[X_2, Y_i] = a_{2i}X_5 & 1 \le i \le n-7 \\
[Y_i, Y_j] = b_{ij}X_5 & 1 \le i < j \le n-8
\end{array}
\right.
$$

con $a_{2i}c = 0,\ 1 \leq i \leq n-7.$

Demostración: Si en la familia de leyes del teorema 1.1.1, hacemos el siguiente cambio de base

$$\begin{cases} Y'_{n-7} = dX_5 + \sum_{k=1}^{n-6} \alpha_k Y_k \\ Y'_{n-6} = eX_5 + \sum_{k=1}^{n-6} \beta_k Y_k \end{cases}$$

siempre se puede suponer $\alpha_{n-7} = \beta_{n-6} = 1$ y el resto de los α_k, β_k nulos; sustituyendo estos valores de los parámetros, las únicas restricciones que restan son $a_{2i}c = 0$, $1 \leq i \leq n-7$. □

Teorema 1.1.3.– *Si $\mathfrak{g}$ es un álgebra de Lie $(n-5)$-filiforme de dimensión $n \geq 9$ y $dim[\mathfrak{g},\mathfrak{g}] = 6$, será isomorfa a alguna de las familias de leyes siguientes, que son no isomorfas dos a dos*

$$\mu^{1,r}_{(5,1,\ldots,1)} : \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1} & 1 \leq i \leq 4 \\ [X_1, X_2] = Y_{n-7} & \\ [X_1, X_4] = Y_{n-6} & \\ [X_2, X_3] = -Y_{n-6} & \\ [Y_{2i-1}, Y_{2i}] = X_5 & 1 \leq i \leq r-1 \end{cases} \qquad 1 \leq r \leq \lfloor \frac{n-6}{2} \rfloor$$

$$\mu^{2,r}_{(5,1,\ldots,1)} : \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1} & 1 \leq i \leq 4 \\ [X_1, X_2] = Y_{n-7} & \\ [X_1, X_4] = Y_{n-6} & \\ [X_2, X_3] = -Y_{n-6} & \\ [X_1, Y_{n-8}] = X_4 & \\ [X_2, Y_{n-8}] = X_5 & \\ [Y_{2i-1}, Y_{2i}] = X_5 & 1 \leq i \leq r-1 \end{cases} \qquad 1 \leq r \leq \lfloor \frac{n-7}{2} \rfloor$$

$$\mu^{3,r}_{(5,1,\ldots,1)} : \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1} & 1 \leq i \leq 4 \\ [X_1, X_2] = Y_{n-7} & \\ [X_1, X_4] = Y_{n-6} & \\ [X_2, X_3] = -Y_{n-6} & \\ [X_1, Y_{n-7}] = X_4 & \\ [X_2, Y_{n-7}] = X_5 & \\ [Y_{2i-1}, Y_{2i}] = X_5 & 1 \leq i \leq r-1 \end{cases} \qquad 1 \leq r \leq \lfloor \frac{n-6}{2} \rfloor$$

$$\mu^{4,r}_{(5,1,\ldots,1)}: \left\{ \begin{array}{ll} [X_0, X_i] = X_{i+1} & 1 \leq i \leq 4 \\ [X_1, X_2] = X_4 + Y_{n-7} & \\ [X_1, X_3] = X_5 & \\ [X_1, X_4] = Y_{n-6} & \\ [X_2, X_3] = -Y_{n-6} & \\ [Y_{2i-1}, Y_{2i}] = X_5 & 1 \leq i \leq r-1 \end{array} \right. \qquad 1 \leq r \leq \lfloor \frac{n-6}{2} \rfloor$$

Nota 1.1.4.– En dimensión 8, sólo hay tres álgebras de Lie $(n-5)$-filiforme con $dim([\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]) = 6$; $\mu^{1,1}_{(5,1,1,1)}$, $\mu^{3,1}_{(5,1,1,1)}$ y $\mu^{4,1}_{(5,1,1,1)}$.

Nota 1.1.5.– En total, resultan $2dim(\mathfrak{g}) - 13$ álgebras, dos a dos no isomorfas, si $dim(\mathfrak{g})$ es par y $2dim(\mathfrak{g}) - 14$ si $dim(\mathfrak{g})$ es impar.

Demostración: En primer lugar, se va determinar un invariante por el cual se podrá trocear la familia, ese invariante es la nulidad de c. En efecto, pues mediante cualquier cambio de base la constante de estructura $c^5_{1,3}$ es siempre múltiplo de c.

Es fácil probar que cualquier cambio de base genérico puede expresarse como combinación lineal de otros dos. En el primero de ellos dejamos invariante el vector característico X_0 mientras que el resto de generadores se modifican tanto como sea posible; en el segundo de los cambios se mantiene invariante el vector X_1. Se les denominará, respectivamente, cambio de base de Jordan (asociada al vector característico) y cambio de vector característico.

1§) Cambio de base de Jordan. La nueva base se expresa, en función de la antigua, mediante

$$\begin{array}{rcl} X'_0 &=& X_0 \\ X'_1 &=& Q_0X_0 + Q_1X_1 + Q_2X_2 + Q_3X_3 + Q_4X_4 + Q_5X_5 + \sum_{k=1}^{n-6} S_kY_k \\ X'_2 &=& Q_1X_2 + Q_2X_3 + Q_3X_4 + Q_4X_5 \\ X'_3 &=& Q_1X_3 + Q_2X_4 + Q_3X_5 \\ X'_4 &=& Q_1X_4 + Q_2X_5 \\ X'_5 &=& Q_1X_5 \end{array}$$

el resto de vectores de la base son generadores, salvo los vectores Y_{n-6} e Y_{n-7} que están en la derivada y vienen generados, pero para probar la que la nulidad de c es invariante no influye ninguna de las Y_i. Para no salirse de la familia (para que

$[X'_1, X'_3] = c'X'_5)$, hay que exigir $Q_0 = 0$. Y para que sea cambio de base, es preciso que $Q_1 \neq 0$.

Si se efectúa el producto $[X'_1, X'_3]$, y se pone en función de la nueva base, X'_j, se tiene que el nuevo parámetro es $c' = Q_1 c$, resultando ser iguales las nulidades de c y de c'.

2§) Cambio de vector característico. Ahora se tiene que

$$\begin{aligned}
X'_0 &= P_0X_0 + P_1X_1 + P_2X_2 + P_3X_3 + P_4X_4 + P_5X_5 + \sum_{k=1}^{n-6} R_kY_k \\
X'_1 &= X_1 \\
X'_2 &= P_0X_2 - (cP_2 + \sum_{k=1}^{n-7} a_{2k}R_k)X_4 - cP_3X_5 - P_2Y_{n-7} - P_4Y_{n-6} \\
X'_3 &= P_0^2X_3 + (cP_0P_1 - a_{2,n-7}P_1P_2)X_4 - (cP_0P_2 + a_{2,n-7}P_2^2 + 2P_0 \sum_{k=1}^{n-7} a_{2k}R_k)X_5 + \\
&P_0P_1Y_{n-7} - (cP_1P_2 + P_1 \sum_{k=1}^{n-7} a_{2k}R_k - P_0P_3)Y_{n-6} \\
X'_4 &= P_0(P_0^2 + a_{2,n-7}P_1^2)X_4 + 2cP_0^2P_1X_5 + (cP_0P_1^2 - P_0^2P_2 - a_{2,n-7}P_1^2P_2)Y_{n-6} \\
X'_5 &= P_0^2(P_0^2 + a_{2,n-7}P_1^2)X_5 + P_0P_1(P_0^2 + a_{2,n-7}P_1^2)Y_{n-6}
\end{aligned}$$

al igual que en el cambio anterior, no es necesario utilizar el resto de vectores de la base para encontrar el nuevo parámetro c". Hay que exigir que $P_0 \neq 0$ para que haya cambio de base y que $P_1a_{2,n-7} = 0$ para no salirse de la familia. El nuevo parámetro $c" = \frac{c}{P_0^2}$, con lo que las nulidades de c y c'' coinciden. Resulta, por tanto, que la nulidad de c es un invariante para las álgebras de esta familia.

<u>Caso 1:</u> $c = 0$

La ley del álgebra viene determinada por

$$\begin{array}{ll}
[X_0, X_i] = X_{i+1} & 1 \leq i \leq 4 \\
[X_1, X_2] = Y_{n-7} & \\
[X_1, X_4] = Y_{n-6} & \\
[X_2, X_3] = -Y_{n-6} & \\
[X_1, Y_i] = a_{2i}X_4 & 1 \leq i \leq n-7 \\
[X_2, Y_i] = a_{2i}X_5 & 1 \leq i \leq n-7 \\
[Y_i, Y_j] = b_{ij}X_5 & 1 \leq i < j \leq n-8
\end{array}$$

Considerando la dimensión de la subálgebra $[\mathcal{C}^1(\mathfrak{g}), \mathcal{C}^2(\mathfrak{g})]$, se obtiene que

$$dim([\mathcal{C}^1(\mathfrak{g}), \mathcal{C}^2(\mathfrak{g})]) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad a_{2,n-7} = 0 \\ 2 & \text{si} \quad a_{2,n-7} \neq 0 \end{cases}$$

llegando así, a dos familias de leyes no isomorfas entre sí.

(1.1) $a_{2,n-7} = 0$

Considerando el centralizador de $\mathcal{C}^1(\mathfrak{g})$ para este caso, se obtiene que

$$dim(Cent(\mathcal{C}^1(\mathfrak{g}))) = \begin{cases} n-4 & \text{si } a_{2i} = 0 \text{ para todo } i, \quad 1 \leq i \leq n-8 \\ n-5 & \text{si existe } i \text{ tal que } a_{2i} \neq 0 \end{cases}$$

(1.1.1.) Si $a_{2i} = 0$ para todo i, $1 \leq i \leq n-8$.

La ley del álgebra puede ser expresada por

$$\begin{array}{ll} [X_0, X_i] = X_{i+1} & 1 \leq i \leq 4 \\ [X_1, X_2] = Y_{n-7} & \\ [X_1, X_4] = Y_{n-6} & \\ [X_2, X_3] = -Y_{n-6} & \\ [Y_i, Y_j] = b_{ij} X_5 & 1 \leq i < j \leq n-8 \end{array}$$

• si $b_{ij} = 0$ para todo i, j, se obtiene $\mu^{1,1}_{(5,1,\ldots,1)}$.

• si existe $b_{ij} \neq 0$ siempre se puede suponer que $b_{12} \neq 0$. Basta con efectuar el cambio de base definido por

$$\begin{cases} X'_i = X_i & 0 \leq i \leq 5 \\ Y'_1 = Y_i & \\ Y'_2 = Y_j & \\ Y'_i = Y_1 & \\ Y'_j = Y_2 & \\ Y'_k = Y_k & 1 \leq k \leq n-6 \quad k \notin \{1, 2, i, j\} \end{cases}$$

Se puede además suponer $b_{12} = 1$, $b_{1i} = b_{2i} = 0$, $3 \leq i \leq n-8$, sin más que hacer el cambio de base expresado por

$$\begin{cases} Y_1' = \dfrac{1}{b_{12}} Y_1 \\ Y_2' = Y_2 \\ Y_i' = Y_i + \dfrac{b_{2i}}{b_{12}} Y_1 - \dfrac{b_{1i}}{b_{12}} Y_2 \quad 3 \leq i \leq n-8 \end{cases}$$

y se obtiene el álgebra de ley:

$$\begin{array}{ll} [X_0, X_i] = X_{i+1} & 1 \leq i \leq 4 \\ [X_1, X_2] = Y_{n-7} & \\ [X_1, X_4] = Y_{n-6} & \\ [X_2, X_3] = -Y_{n-6} & \\ [Y_1, Y_2] = X_5 & \\ [Y_i, Y_j] = b_{ij} X_5 & 3 \leq i < j \leq n-8 \end{array}$$

* Si $b_{ij} = 0$ para todo i, j, se obtiene $\mu^{1,1}_{(5,1,\ldots,1)}$.

* Si existe $b_{ij} \neq 0$, $3 \leq i < j \leq n-8$, de forma análoga, siempre se puede suponer que $b_{34} \neq 0$, $b_{34} = 1$, $b_{3i} = b_{4i} = 0$, $5 \leq i \leq n-8$ y la ley del álgebra es:

$$\begin{array}{ll} [X_0, X_i] = X_{i+1} & 1 \leq i \leq 4 \\ [X_1, X_2] = Y_{n-7} & \\ [X_1, X_4] = Y_{n-6} & \\ [X_2, X_3] = -Y_{n-6} & \\ [Y_1, Y_2] = X_5 & \\ [Y_3, Y_4] = X_5 & \\ [Y_i, Y_j] = b_{ij} X_5 & 5 \leq i < j \leq n-8 \end{array}$$

Si se continúa el proceso, resulta el álgebra $\mathfrak{g}$ dada isomorfa a alguna de las álgebras $\mu^{1,r}_{(5,1,\ldots,1)}$ que son dos a dos no isomorfas pues

$$dim(\mathcal{Z}(\mathfrak{g})) = n - 2r - 3 \text{ con } 1 \leq r \leq \lfloor \frac{n-6}{2} \rfloor$$

(1.1.2.) Si existe i tal que $a_{2i} \neq 0$.

Siempre se puede suponer $a_{21} \neq 0$. Basta hacer el cambio dado por:

$$\begin{cases} X_i' = X_i & 0 \leq i \leq 5 \\ Y_1' = Y_i & \\ Y_i' = Y_1 & \\ Y_k' = Y_k & 1 \leq k \leq n-6 \quad k \notin \{1, i\} \end{cases}$$

en este caso es posible suponer además que $a_{21} = 1,\ a_{2i} = 0,\ 2 \leq i \leq n-7$, sin más que hacer el cambio de base definido por

$$\begin{cases} Y_1' = \dfrac{1}{a_{21}} Y_1 & \\ Y_i' = a_{21} Y_i - a_{2i} Y_1 & 2 \leq i \leq n-7 \end{cases}$$

y la ley del álgebra vendrá entonces determinada por

$$\begin{array}{ll} [X_0, X_i] = X_{i+1} & 1 \leq i \leq 4 \\ [X_1, X_2] = Y_{n-7} & \\ [X_1, X_4] = Y_{n-6} & \\ [X_2, X_3] = -Y_{n-6} & \\ [X_1, Y_1] = X_4 & \\ [X_2, Y_1] = X_5 & \\ [Y_i, Y_j] = b_{ij} X_5 & 1 \leq i < j \leq n-8 \end{array}$$

$*$ Si $b_{ij} = 0$, para todo i, j, se obtiene $\mu^{2,1}_{(5,1,\ldots,1)}$.

$*$ Si existe $b_{ij} \neq 0$, hay que distinguir dos posibilidades:

- existe j, tal que $b_{1j} \neq 0$, en este caso mediante el cambio de base dado por

$$\begin{cases} X_0' = X_0 + X_1 + Y_1 \\ X_1' = X_1 \\ X_6' = Y_j \end{cases}$$

se obtiene $[X_0', X_i'] = X_{i+1}$ con $1 \leq i \leq 4$ e $i = 6$ y por tanto se tendría en este caso que $c(X_0') = (5, 2, 1, \ldots, 1)$ que es mayor que $(5, 1, \ldots, 1)$ con $X_0' \in \mathfrak{g}' - [\mathfrak{g}', \mathfrak{g}']$, es decir X_0' vector característico y por tanto el invariante de Goze de $\mathfrak{g}'$ coincide con $c(X_0')$ y se llega así a contradicción.

- si $b_{1j} = 0$, para todo j, en este caso siempre se puede suponer $b_{23} \neq 0$, mediante cambios similares a los hechos en situaciones ya analizadas y además también se puede suponer $b_{23} = 1$, $b_{2i} = b_{3i} = 0$, $4 \leq i \leq n-8$, sin más que hacer el cambio dado por

$$\left\{\begin{array}{l} Y_1' = Y_1 \\ Y_2' = \dfrac{1}{b_{23}} Y_2 \\ Y_3' = Y_3 \\ Y_i' = Y_i + \dfrac{b_{3i}}{b_{23}} Y_2 - \dfrac{b_{2i}}{b_{23}} Y_3 \quad 4 \leq i \leq n-8 \end{array}\right.$$

se tiene que la ley del álgebra viene dada por

$$\begin{array}{ll} [X_0, X_i] = X_{i+1} & 1 \leq i \leq 4 \\ [X_1, X_2] = Y_{n-7} & \\ [X_1, X_4] = Y_{n-6} & \\ [X_2, X_3] = -Y_{n-6} & \\ [X_1, Y_1] = X_4 & \\ [X_2, Y_1] = X_5 & \\ [Y_2, Y_3] = X_5 & \\ [Y_i, Y_j] = b_{ij} X_5 & 4 \leq i < j \leq n-8 \end{array}$$

y se llega, de nuevo, a una situación parecida a las ya analizadas.
Es evidente que al final del proceso se obtiene la familia de álgebras $\mu^{2,r}_{(5,1,\ldots,1)}$, previo cambio de base definido por

$$\left\{\begin{array}{ll} Y_i' = Y_{i+1} & 1 \leq i \leq n-9 \\ Y_{n-8}' = Y_1 & \end{array}\right.$$

y que, además, son dos a dos no isomorfas entre sí, puesto que

$$dim(\mathcal{Z}(\mathfrak{g})) = n - 2r - 4, \qquad 1 \leq r \leq \lfloor \frac{n-7}{2} \rfloor$$

(1.2) $a_{2,n-7} \neq 0$

En este caso, se puede conseguir $a_{2,n-7} = 1$ y $a_{2,j} = 0$ para $1 \leq i \leq n-8$. Basta con hacer el cambio de base dado por:

$$\left\{\begin{array}{ll} X_0' = a_{2,n-7} X_0 & \\ X_1' = \sqrt{a_{2,n-7}} X_1 & \\ Y_i' = a_{2,n-7} Y_i - a_{2i} Y_{n-7} & 1 \leq i \leq n-8 \end{array}\right.$$

Así, la ley del álgebra viene dada por

$$
\begin{array}{ll}
[X_0, X_i] = X_{i+1} & 1 \leq i \leq 4 \\
[X_1, X_2] = Y_{n-7} & \\
[X_1, X_4] = Y_{n-6} & \\
[X_2, X_3] = -Y_{n-6} & \\
[X_1, Y_{n-7}] = X_4 & \\
[X_2, Y_{n-7}] = X_5 & \\
[Y_i, Y_j] = b_{ij} X_5 & 1 \leq i < j \leq n-8
\end{array}
$$

de nuevo, se llega a una situación similar a las ya analizadas siguiendo el mismo tratamiento se obtiene $\mu^{3,r}_{(5,1,\ldots,1)}$, que son dos a dos no isomorfas pues

$$
dim(\mathcal{Z}(\mathfrak{g})) = n - 2r - 4, \qquad 1 \leq r \leq E\left(\frac{n-6}{2}\right)
$$

<u>Caso 2:</u> $c \neq 0$

La ley del álgebra viene determinada por

$$
\begin{array}{ll}
[X_0, X_i] = X_{i+1} & 1 \leq i \leq 4 \\
[X_1, X_2] = cX_4 + Y_{n-7} & \\
[X_1, X_3] = cX_5 & \\
[X_1, X_4] = Y_{n-6} & \\
[X_2, X_3] = -Y_{n-6} & \\
[Y_i, Y_j] = b_{ij} X_5 & 1 \leq i < j \leq n-8
\end{array}
$$

mediante el cambio de escala

$$
\begin{cases}
X_i' = \frac{1}{c} X_i & 1 \leq i \leq 5 \\
Y_j' = Y_j & 1 \leq j \leq n-8 \\
Y_{n-7}' = \frac{1}{c^2} Y_{n-7} & \\
Y_{n-6}' = \frac{1}{c^2} Y_{n-6} &
\end{cases}
$$

siempre se puede suponer $c = 1$. De esta forma, se llega a una situación similar a las ya analizadas, y siguiendo con el mismo razonamiento se obtiene la familia de álgebras $\mu^{4,r}_{(5,1,\ldots,1)}$, no isomorfas entre sí, pues

$$dim(\mathcal{Z}(\mathfrak{g})) = n - 2r - 3, \qquad 1 \leq r \leq \lfloor\frac{n-6}{2}\rfloor$$

□

Nota 1.1.6.– Es fácil observar que sólo existen tres álgebras $(n-5)$-filiformes no escindidas si n es par (las de leyes $\mu^{1,\lfloor\frac{n-6}{2}\rfloor}_{(5,1,\ldots,1)}$, $\mu^{3,\lfloor\frac{n-6}{2}\rfloor}_{(5,1,\ldots,1)}$ y $\mu^{4,\lfloor\frac{n-6}{2}\rfloor}_{(5,1,\ldots,1)}$), y una si la dimensión es impar $\mu^{2,\lfloor\frac{n-7}{2}\rfloor}_{(5,1,\ldots,1)}$.

1.2 Álgebras de Lie $(n-5)$-filiformes naturalmente graduadas con derivada máxima.

Se determinan en esta sección todas las álgebras $(n-5)$-filiformes con $dim[\mathfrak{g},\mathfrak{g}] = 6$ que sean naturalmente graduadas.

Es evidente que la graduación correspondiente admite sólo 5 subespacios homogéneos no nulos, $\mathfrak{g}_1$, $\mathfrak{g}_2$, $\mathfrak{g}_3$, $\mathfrak{g}_4$ y $\mathfrak{g}_5$, verificándose que X_0, $X_1 \in \mathfrak{g}_1$ y $X_i \in \mathfrak{g}_i$, $2 \leq i \leq 5$, si $\{X_0, X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, Y_1, \ldots Y_{n-6}\}$ es una base adaptada de $\mathfrak{g}$.

En lo que sigue $dim(\mathfrak{g}) = n \geq 8$, pues $dim[\mathfrak{g},\mathfrak{g}] = 6$.

Proposición 1.2.1.– *Sólo existen dos álgebras de Lie $(n-5)$-filiformes naturalmente graduadas no escindidas con $dim[\mathfrak{g},\mathfrak{g}] = 6$, $\mu^{1,1}_{(5,1,1,1)}$ y $\mu^{3,1}_{(5,1,1,1)}$ en dimensión 8.*

Demostración: Se observa que $\mu^{2,r}_{(5,1,\ldots,1)}$ no contiene ningún álgebra naturalmente graduada pues $[X_1, Y_{n-8}] = X_4$ y $X_i \in \mathfrak{g}_i$ con $i \in \{1,3\}$ por lo que se tendría que $X_4 \in \mathfrak{g}_2$ y se llegaría a contradicción con lo supuesto. De manera análoga $\mu^{4,r}_{(5,1,\ldots,1)}$ no contiene ningún álgebra naturalmente graduada pues de $[X_1, X_3] = X_5$ y de $X_i \in \mathfrak{g}_i$ con $i \in \{1.3\}$ se tendría que $X_5 \in \mathfrak{g}_2$, con lo que se llega a contradicción.

Un razonamiento similar para $r > 1$ lleva a que no hay ningún álgebra naturalmente graduada en la familia $\mu^{1,r}_{(5,1,\ldots,1)}$ y en la familia $\mu^{3,r}_{(5,1,\ldots,1)}$, pues aparece el producto $[Y_1, Y_2] = X_5$ y se puede razonar de manera análoga a como se ha hecho antes.

Sólo falta estudiar las álgebras $\mu^{1,1}_{(5,1,\ldots,1)}$ y $\mu^{3.1}_{(5.1,\ldots,1)}$ que se corresponden con las álgebras escindidas $\mu^{1,1}_{(5,1,1,1)} \oplus \mathbf{C}^{n-8}$ y $\mu^{3,1}_{(5,1,1,1)} \oplus \mathbf{C}^{n-8}$, respectivamente; salvo para $n = 8$, que se tiene $\mu^{1,1}_{(5,1,1,1)}$ y $\mu^{3,1}_{(5,1,1,1)}$ que son evidentemente naturalmente graduadas, véase [9]. □

1.3 Álgebras de Lie 3-filiformes de dimensión 8.

Como se ha dicho a lo largo de la memoria, la clasificación es un problema muy laborioso. Hasta ahora son conocidas las álgebras nilpotentes hasta dimensión 7 [1], [3], de las filiformes se conocen todas hasta dimensión 11, véase [2], [22], [26] y de las p-filiformes se conoce su clasificación para los valores de p, $p \geq n-4$, [7], [10], [11], [12].

Para $p = n - 5$ se acaban de clasificar las álgebras de dimensión de la derivada máxima.

Dentro de las p-filiformes y para dimensiones menores que 9, faltan por encontrar las $(n-5)$-filiformes para $n = 8$, [16], [13] y las $(n-6)$-filiformes también para dimensión 8 (es decir, las 3-filiformes y 2-filiformes, respectivamente, de dimensión 8). Las primeras de éstas se encuentran a continuación y las 2-filiformes se clasifican en el capítulo siguiente.

1.- Caso de álgebras escindidas

Las álgebras 3-filiformes escindidas se encuentran fácilmente.

Nota 1.3.1.– Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie filiforme de dimensión 6. Entonces $\tilde{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g} \oplus \mathbf{C}^2$ es un álgebra de Lie 3-filiforme de dimensión 8.

Nota 1.3.2.– Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie 2-filiforme de dimensión 7. Entonces $\tilde{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g} \oplus \mathbf{C}$ es un álgebra de Lie 3-filiforme de dimensión 8.

La demostración es obvia.

Como la clasificación de las álgebras de Lie filiformes de dimensión 6 ([26], [33]) y la clasificación de las álgebras 2-filiformes de dimensión 7 [3] son conocidas, se puede deducir la clasificación completa de las álgebras 3-filiformes de dimensión 8 escindidas.

En primer apéndice de esta memoria, se presenta la clasificación completa de éstas álgebras (las filiformes de dimensión 6 y las 2-filiformes de dimensión 7) con el fin de unificar notación.

2.- Caso de álgebras no escindidas

Aquí se van a considerar sólo las álgebras no escindidas.

Lema 1.3.3.– *La ley de un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ 3-filiforme compleja con $dim(\mathfrak{g}) = 8$, viene expresada, salvo antisimetría, en una cierta base adaptada $\{X_0, X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, Y_1, Y_2\}$, en función de los siguientes productos*

$$\begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1} & 1 \leq i \leq 4 \\ [X_1, X_2] = cX_4 + dX_5 + \alpha_1 Y_1 + \alpha_2 Y_2 & \\ [X_1, X_3] = cX_5 & \\ [X_1, X_4] = eX_5 + \beta_1 Y_1 + \beta_2 Y_2 & \\ [X_2, X_3] = -eX_5 - \beta_1 Y_1 - \beta_2 Y_2 & \\ [X_1, Y_i] = a_{3i}X_3 + a_{2i}X_4 + a_{1i}X_5 & i \in \{1,2\} \\ [X_2, Y_i] = a_{3i}X_4 + a_{2i}X_5 & i \in \{1,2\} \\ [X_3, Y_i] = a_{3i}X_5 & i \in \{1,2\} \\ [Y_1, Y_2] = bX_5 & \end{cases}$$

sujeta a las siguientes restricciones

$$\begin{array}{ll} a_{3i}e = 0 & i \in \{1,2\} \\ \alpha_i a_{3j} = 0 & i, j \in \{1,2\} \\ \alpha_i b = 0 & i \in \{1,2\} \\ \beta_i a_{3j} = 0 & i, j \in \{1,2\} \\ \beta_i a_{2j} c = 0 & i, j \in \{1,2\} \\ \beta_i a_{1j} = 0 & i, j \in \{1,2\} \\ \beta_i b = 0 & i \in \{1,2\} \\ \beta_1 a_{21} + \beta_2 a_{22} = 0 & \end{array}$$

Aunque la familia genérica de un álgebra $(n-5)$-filiforme, ha sido ya encontrada anteriormente, se hará un pequeño resumen de la demostración. La demostración completa en dimensión arbitraria puede consultarse en [8].

Demostración: Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie nilpotente, compleja, de dimensión 8 e invariante de Goze $(5,1,1,1)$.

Si $X_0 \notin [\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$ es un vector característico y $\{X_0, X_1, \ldots, X_5, Y_1, Y_2\}$ es una base adaptada, se ha de cumplir que

$$\begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1} & 1 \leq i \leq 4 \\ [X_0, X_5] = 0 & \\ [X_0, Y_j] = 0 & 1 \leq j \leq 2 \end{cases}$$

A partir de las identidades de Jacobi en las que interviene X_0 se obtiene una primera expresión de los restantes productos corchete entre elementos de la base. Se tiene en cuenta que $Y_1, Y_2 \notin Im(ad(X_0))$ y aplicando condiciones sencillas de nilpotencia, la expresión de los citados corchetes se simplifica extraordinariamente.

Por ejemplo,

$$[X_0, [X_4, X_5]] = 0 \Longrightarrow [X_4, X_5] = \beta_{45}X_5 + \alpha_{45}^1 Y_1 + \alpha_{45}^2 Y_2$$

y si ahora se calcula

$$[X_0, [X_3, X_5]] = [X_4, X_5]$$

teniendo en cuenta que $Y_1, Y_2 \notin Im(ad(X_0))$, se llega a que $\alpha_{45}^1 = \alpha_{45}^2 = 0$, y, además, por nilpotencia sobre $[X_4, X_5]$, se tendrá que $\beta_{45} = 0$.

De esta forma se obtiene un primer esbozo de la familia. A continuación se aplican condiciones de nilpotencia, que se traducen en condiciones matriciales; el polinomio característico de la matriz $ad(V)$, para cualquier vector V, ha de ser λ^8.

El otro concepto que se maneja es la 3-filiformidad de la familia que se quiere encontrar. Esto se traduce en términos de matrices adjuntas correspondientes a vectores que no están en la derivada, es decir, posibles vectores característicos; las correspondientes matrices no pueden admitir menores no nulos de orden 5, por ejemplo, se calcula la matriz de vectores de la forma $ad(AX_0 + X_i)$ con $A \neq 0$ para garantizar que no está en la derivada, o vectores de la forma $ad(AX_0 + Y_i)$ igualmente con $A \neq 0$ y se impone que no tengan menores de orden 5 distintos de cero; de esta forma se encuentran restricciones para los parámetros.

Finalmente, se deben calcular todas las identidades de Jacobi para cada terna de vectores y de esta forma se tendrían el resto de restricciones.

Es frecuente que deban irse realizando unas operaciones y otras alternativamente atendiendo a las dificultades que se vayan presentando. $\square$

Proposición 1.3.4.– *Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie 3-filiforme compleja con $dim(\mathfrak{g}) = 8$. Entonces existen tres subfamilias, no isomorfas entre sí, cuyas leyes vienen dadas en* *una base adaptada* $\{X_0, X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, Y_1, Y_2\}$ *por*

$$AL3F(6) : \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1} & 1 \leq i \leq 4 \\ [X_1, X_2] = cX_4 + Y_1 & \\ [X_1, X_3] = cX_5 & \\ [X_1, X_4] = Y_2 & \\ [X_2, X_3] = -Y_2 & \\ [X_1, Y_1] = a_{21}X_4 & \\ [X_2, Y_1] = a_{21}X_5 & \end{cases}$$

sujeta a la restricción $ca_{21} = 0.$

$$AL3F(5) : \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1} & 1 \leq i \leq 4 \\ [X_1, X_2] = cX_4 + Y_1 & \\ [X_1, X_3] = cX_5 & \\ [X_1, X_4] = eX_5 + \beta Y_1 & \\ [X_2, X_3] = -eX_5 - \beta Y_1 & \\ [X_1, Y_i] = a_{2i}X_4 + a_{1i}X_5 & i \in \{1, 2\} \\ [X_2, Y_i] = a_{2i}X_5 & i \in \{1, 2\} \end{cases}$$

sujeta a las restricciones

$$\begin{array}{ll} \beta a_{1i} = 0 & i \in \{1, 2\} \\ \beta a_{21} = 0 & \\ \beta a_{22}c = 0 & \end{array}$$

$$AL3F(4) : \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1} & 1 \leq i \leq 4 \\ [X_1, X_2] = cX_4 + dX_5 & \\ [X_1, X_3] = cX_5 & \\ [X_1, X_4] = eX_5 & \\ [X_2, X_3] = -eX_5 & \\ [X_1, Y_i] = a_{3i}X_3 + a_{2i}X_4 + a_{1i}X_5 & i \in \{1, 2\} \\ [X_2, Y_i] = a_{3i}X_4 + a_{2i}X_5 & i \in \{1, 2\} \\ [X_3, Y_i] = a_{3i}X_5 & i \in \{1, 2\} \\ [Y_1, Y_2] = bX_5 & \end{cases}$$

sujeta a las restricciones $a_{3i}e = 0, \quad 0 \leq i \leq 1.$

Demostración: Es fácil probar que

$$dim(\mathcal{D}^1(\mathfrak{g})) = 4 + rango \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{pmatrix}$$

(1) Si $rango \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{pmatrix} = 2$ se tiene que $dim(\mathcal{D}^1(\mathfrak{g})) = 6$ y, además, $\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1 \neq 0$. Sin más que hacer el cambio de base

$$\begin{cases} X_i' = X_i & 0 \leq i \leq 5 \\ Y_1' = dX_5 + \alpha_1 Y_1 + \alpha_2 Y_2 \\ Y_2' = eX_5 + \beta_1 Y_1 + \beta_2 Y_2 \end{cases}$$

se puede suponer $\alpha_1 = 1,\ \alpha_2 = 0,\ \beta_1 = 0,\ \beta_2 = 1,\ d = 0$ y $e = 0$.

Con estas condiciones, se llega a que la familia se puede expresar por

$$\begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1} & 1 \leq i \leq 4 \\ [X_1, X_2] = cX_4 + Y_1 \\ [X_1, X_3] = cX_5 \\ [X_1, X_4] = Y_2 \\ [X_2, X_3] = -Y_2 \\ [X_1, Y_1] = a_{21} X_4 \\ [X_2, Y_1] = a_{21} X_5 \end{cases}$$

sujeta a la restricción $ca_{21} = 0$, obteniéndose la primera familia.

(2) Si $rango \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{pmatrix} = 1$ se tiene que $dim(\mathcal{D}^1(\mathfrak{g})) = 5$ y, además, $\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1 = 0$, con algún α_i ó β_j distinto de 0.

Siempre se puede suponer $\alpha_1 \neq 0$. Caso contrario, se tendrían dos posibilidades

- si $\alpha_2 \neq 0$, se hace el cambio de base

$$\begin{cases} X_i' = X_i & 0 \leq i \leq 5 \\ Y_1' = Y_2 \\ Y_2' = Y_1 \end{cases}$$

- si $\alpha_2 = 0$, se hace el cambio de base

$$\begin{cases} X_0' = X_0 \\ X_1' = X_1 + X_3 \\ Y_1' = Y_1 \\ Y_2' = Y_2 \end{cases}$$

encontrándose los nuevos parámetros

$$\begin{aligned} d' &= d + 2e \\ \alpha_1' &= 2\beta_1 \\ \alpha_2' &= 2\beta_2 \end{aligned}$$

y el resto no varía.

Puesto que $\alpha_1' = 2\beta_1$, si $\beta_1 \neq 0 \Rightarrow \alpha_1' \neq 0$, si $\beta_1 = 0 \Rightarrow \beta_2 \neq 0$ y se hace el cambio de base

$$\begin{cases} X_i' = X_i & 0 \leq i \leq 5 \\ Y_1' = Y_2 \\ Y_2' = Y_1 \end{cases}$$

Así pues, $\alpha_1 \neq 0$ y mediante el cambio de base

$$\begin{cases} X_i' = X_i & 0 \leq i \leq 5 \\ Y_1' = dX_5 + \alpha_1 Y_1 + \alpha_2 Y_2 \\ Y_2' = Y_2 \end{cases}$$

se puede suponer $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 0$ y $d = 0$. Además como $\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1 = 0 \Rightarrow \beta_2 = 0$. Con todo esto, la familia resulta en función de los siguientes productos

$$\begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1} & 1 \leq i \leq 4 \\ [X_1, X_2] = cX_4 + Y_1 \\ [X_1, X_3] = cX_5 \\ [X_1, X_4] = eX_5 + \beta_1 Y_1 \\ [X_2, X_3] = -eX_5 - \beta_1 Y_1 \\ [X_1, Y_i] = a_{2i}X_4 + a_{1i}X_5 & i \in \{1, 2\} \\ [X_2, Y_i] = a_{2i}X_5 & i \in \{1, 2\} \end{cases}$$

sujeta a las siguientes restricciones

$$\begin{aligned} &\beta_1 a_{1i} = 0 \qquad i \in \{1.2\} \\ &\beta_1 a_{21} = 0 \\ &\beta_1 a_{22} c = 0 \end{aligned}$$

obteniéndose la segunda familia de leyes del enunciado (sin más que hacer $\beta = \beta_1$).

(3) Si *rango* $\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{pmatrix} = 0$ se tiene que $dim(\mathcal{D}^1(\mathfrak{g})) = 4$ y además $\alpha_1 = \alpha_2 = \beta_1 = \beta_2 = 0$. Con esto se llega a la tercera familia buscada. □

1.3.1 Álgebras de Lie 3-filiformes de $dim(\mathfrak{g}) = 8$ y $dim([\mathfrak{g},\mathfrak{g}]) = 6$.

En esta sección se enunciarán las álgebras 3-filiformes de $dim(\mathfrak{g}) = 8$ y $dim([\mathfrak{g},\mathfrak{g}]) = 6$. Éstas son un caso particular de las $(n-5)$-filiformes con derivada máxima (veáse teorema 1.1.3) por lo que sólo se van a enunciar.

Teorema 1.3.5.– *[8] Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie 3-filiforme con $dim(\mathfrak{g}) = 8$ y $dim([\mathfrak{g},\mathfrak{g}]) = 6$. Entonces es isomorfa a alguna de las tres álgebras, no isomorfas entre sí, de leyes $\mu^i_{(5,1,1,1)}$, $1 \leq i \leq 3$, dadas por*

$$\mu^1_{(5,1,1,1)} : \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1} & 1 \leq i \leq 4 \\ [X_1, X_2] = Y_1 \\ [X_1, X_4] = Y_2 \\ [X_2, X_3] = -Y_2 \end{cases}$$

$$\mu^2_{(5,1,1,1)} : \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1} & 1 \leq i \leq 4 \\ [X_1, X_2] = Y_1 \\ [X_1, X_4] = Y_2 \\ [X_2, X_3] = -Y_2 \\ [X_1, Y_1] = X_4 \\ [X_2, Y_1] = X_5 \end{cases}$$

$$\mu^3_{(5,1,1,1)} : \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1} & 1 \leq i \leq 4 \\ [X_1, X_2] = X_4 + Y_1 \\ [X_1, X_3] = X_5 \\ [X_1, X_4] = Y_2 \\ [X_2, X_3] = -Y_2 \end{cases}$$

Demostración: Véase demostración del teorema 1.1.3. □

1.3.2 Álgebras de Lie 3-filiformes de $dim(\mathfrak{g}) = 8$ y $dim([\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]) = 5$.

En esta sección, se van a determinar todas las álgebras 3-filiformes de dimensión 8 y dimensión de la derivada 5.

Proposición 1.3.6.– *Sea $\mathfrak{g}$ cualquier álgebra de Lie 3-filiforme compleja con $dim(\mathfrak{g}) = 8$ y $dim([\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]) = 5$. Entonces existen tres subfamilias, no isomorfas entre sí, cuyas leyes vienen dadas en una cierta base adaptada $\{X_0, X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, Y_1, Y_2\}$ por*

$$AL3F(5,3) : \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1} & 1 \leq i \leq 4 \\ [X_1, X_2] = cX_4 + Y_1 & \\ [X_1, X_3] = cX_5 & \\ [X_1, X_4] = eX_5 + \beta Y_1 & \\ [X_2, X_3] = -eX_5 - \beta Y_1 & \end{cases}$$

$$AL3F(5,2) : \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1} & 1 \leq i \leq 4 \\ [X_1, X_2] = cX_4 + Y_1 & \\ [X_1, X_3] = cX_5 & \\ [X_1, X_4] = eX_5 + \beta Y_1 & \\ [X_2, X_3] = -eX_5 - \beta Y_1 & \\ [X_1, Y_i] = a_{2i}X_4 + a_{1i}X_5 & i \in \{1, 2\} \\ [X_2, Y_i] = a_{2i}X_5 & i \in \{1, 2\} \end{cases}$$

con

$$\begin{array}{ll} \beta a_{1i} = 0 & i \in \{1, 2\} \\ \beta a_{21} = 0 & \\ \beta a_{22} c = 0 & \\ a_{21}a_{12} - a_{22}a_{11} = 0 & \text{con algún } a_{ij} \neq 0 \end{array}$$

$$AL3F(5,1) : \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1} & 1 \leq i \leq 4 \\ [X_1, X_2] = cX_4 + Y_1 & \\ [X_1, X_3] = cX_5 & \\ [X_1, X_4] = eX_5 & \\ [X_2, X_3] = -eX_5 & \\ [X_1, Y_i] = a_{2i}X_4 + a_{1i}X_5 & i \in \{1, 2\} \\ [X_2, Y_i] = a_{2i}X_5 & i \in \{1, 2\} \end{cases}$$

con $\quad a_{12}a_{21} - a_{22}a_{11} \neq 0$

Demostración: Mediante un simple cálculo se demuestra que

$$dim(\mathcal{Z}(\mathfrak{g})) = \begin{cases} 3 & \text{si } rango\begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{11} & a_{12} \end{pmatrix} = 0 \\ 2 & \text{si } rango\begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{11} & a_{12} \end{pmatrix} = 1 \\ 1 & \text{si } rango\begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{11} & a_{12} \end{pmatrix} = 2 \end{cases}$$

(1) Si $rango\begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{11} & a_{12} \end{pmatrix} = 0$ se tiene que $a_{21} = a_{22} = a_{11} = a_{12} = 0$, de donde se sigue directamente la familia $AL3F(5,3)$.

(2) Si $rango\begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{11} & a_{12} \end{pmatrix} = 1$ ha de ser $a_{21}a_{12} - a_{22}a_{11} = 0$ con algún $a_{ij} \neq 0$, obteniéndose la familia $AL3F(5,2)$.

(3) Si $rango\begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{11} & a_{12} \end{pmatrix} = 2$ entonces $a_{21}a_{12} - a_{22}a_{11} \neq 0$ teniéndose, por tanto, que $(a_{11}, a_{12}, a_{21}) \neq (0,0,0)$ y por las restricciones se sigue que $\beta = 0$, resultando la familia $AL3F(5,1)$. □

Nota 1.3.7.– Es fácil probar que si $\mathfrak{g}$ es un álgebra de Lie 3-filiforme de $dim(\mathfrak{g}) = 8$ tal que $(dim(\mathcal{D}^1(\mathfrak{g})), dim(\mathcal{Z}(\mathfrak{g}))) = (5,3)$ ($\mathfrak{g} \in AL3F(5,3)$), entonces $\mathfrak{g}$ se puede descomponer como $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \mathbf{C}$, donde $\mathfrak{g}_1$ es un álgebra de Lie 2-filiforme de dimensión 7. Se encuentran las álgebras $\mu^i_{(5,1,1)} \oplus \mathbf{C}$ para $1 \leq i \leq 8$.

Teorema 1.3.8.– *Sea $\mathfrak{g}$ es un álgebra de Lie 3-filiforme de dimensión 8 tal que la $(dim(\mathcal{D}^1(\mathfrak{g})), dim(\mathcal{Z}(\mathfrak{g}))) = (5,2)$. Entonces es isomorfa a una de las siguientes álgebras, no isomorfas entre sí, de leyes $\mu^j_{(5,1,1)} \oplus \mathbf{C}$. $9 \leq j \leq 18$, $j \neq 14$, $\mu^{14,\lambda}_{(5,1,1)} \oplus \mathbf{C}$ con $\lambda \in \mathbf{C}_2$, y $\mu^i_{(5,1,1,1)}$, $4 \leq i \leq 15$ dadas por*

$$\mu^4_{(5,1,1,1)} : \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1} & 1 \leq i \leq 4 \\ [X_1, X_2] = Y_1 \\ [X_1, Y_2] = X_5 \end{cases}$$

$$\mu^5_{(5,1,1,1)}: \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1} & 1 \le i \le 4 \\ [X_1, X_2] = Y_1 \\ [X_1, Y_2] = X_4 \\ [X_2, Y_2] = X_5 \end{cases}$$

$$\mu^6_{(5,1,1,1)}: \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1} & 1 \le i \le 4 \\ [X_1, X_2] = Y_1 \\ [X_1, Y_2] = X_4 + X_5 \\ [X_2, Y_2] = X_5 \end{cases}$$

$$\mu^7_{(5,1,1,1)}: \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1} & 1 \le i \le 4 \\ [X_1, X_2] = X_4 + Y_1 \\ [X_1, X_3] = X_5 \\ [X_1, Y_2] = X_5 \end{cases}$$

$$\mu^8_{(5,1,1,1)}: \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1} & 1 \le i \le 4 \\ [X_1, X_2] = X_4 + Y_1 \\ [X_1, X_3] = X_5 \\ [X_1, Y_2] = X_4 \\ [X_2, Y_2] = X_5 \end{cases}$$

$$\mu^9_{(5,1,1,1)}: \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1} & 1 \le i \le 4 \\ [X_1, X_2] = Y_1 \\ [X_1, X_4] = X_5 \\ [X_2, X_3] = -X_5 \\ [X_1, Y_2] = X_5 \end{cases}$$

$$\mu^{10}_{(5,1,1,1)}: \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1} & 1 \le i \le 4 \\ [X_1, X_2] = Y_1 \\ [X_1, X_4] = X_5 \\ [X_2, X_3] = -X_5 \\ [X_1, Y_2] = X_4 \\ [X_2, Y_1] = X_5 \end{cases}$$

$$\mu^{11}_{(5,1,1,1)}: \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1} & 1 \leq i \leq 4 \\ [X_1, X_2] = Y_1 \\ [X_1, X_4] = X_5 \\ [X_2, X_3] = -X_5 \\ [X_1, Y_2] = X_4 + X_5 \\ [X_2, Y_2] = X_5 \end{cases}$$

$$\mu^{12}_{(5,1,1,1)}: \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1} & 1 \leq i \leq 4 \\ [X_1, X_2] = X_4 + Y_1 \\ [X_1, X_3] = X_5 \\ [X_1, X_4] = X_5 \\ [X_2, X_3] = -X_5 \\ [X_1, Y_2] = X_5 \end{cases}$$

$$\mu^{13}_{(5,1,1,1)}: \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1} & 1 \leq i \leq 4 \\ [X_1, X_2] = X_4 + Y_1 \\ [X_1, X_3] = X_5 \\ [X_1, X_4] = X_5 \\ [X_2, X_3] = -X_5 \\ [X_1, Y_2] = X_4 \\ [X_2, Y_2] = X_5 \end{cases}$$

$$\mu^{14}_{(5,1,1,1)}: \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1} & 1 \leq i \leq 4 \\ [X_1, X_2] = X_4 + Y_1 \\ [X_1, X_3] = X_5 \\ [X_1, X_4] = X_5 \\ [X_2, X_3] = -X_5 \\ [X_1, Y_2] = X_4 - X_5 \\ [X_2, Y_2] = X_5 \end{cases}$$

$$\mu^{15}_{(5,1,1,1)}: \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1} & 1 \leq i \leq 4 \\ [X_1, X_2] = Y_1 \\ [X_1, X_4] = Y_1 \\ [X_2, X_3] = -Y_1 \\ [X_1, Y_2] = X_4 \\ [X_2, Y_2] = X_5 \end{cases}$$

Demostración: Si $\mathfrak{g}$ está en las condiciones anteriores, su ley vendrá dada, salvo antisimetría, por

$$\begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1} & 1 \leq i \leq 4 \\ [X_1, X_2] = cX_4 + Y_1 & \\ [X_1, X_3] = cX_5 & \\ [X_1, X_4] = eX_5 + \beta Y_1 & \\ [X_2, X_3] = -eX_5 - \beta Y_1 & \\ [X_1, Y_i] = a_{2i}X_4 + a_{1i}X_5 & i \in \{1,2\} \\ [X_2, Y_i] = a_{2i}X_5 & i \in \{1,2\} \end{cases}$$

sujeta a las siguientes restricciones

$$\begin{array}{ll} \beta a_{1i} = 0 & i \in \{1,2\} \\ \beta a_{21} = 0 & \\ \beta a_{22}c = 0 & \\ a_{21}a_{12} - a_{22}a_{11} = 0 & \text{con algún } a_{ij} \neq 0 \end{array}$$

Es fácil comprobar que la nulidad de β es un invariante. En efecto, pues

$$dim(\mathcal{C}^3(\mathfrak{g})) = \begin{cases} 2 & \text{si } \beta = 0 \\ 3 & \text{si } \beta \neq 0 \end{cases}$$

<u>Caso 1:</u> ($\beta = 0$) En este caso la familia es

$$\begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1} & 1 \leq i \leq 4 \\ [X_1, X_2] = cX_4 + Y_1 & \\ [X_1, X_3] = cX_5 & \\ [X_1, X_4] = eX_5 & \\ [X_2, X_3] = -eX_5 & \\ [X_1, Y_i] = a_{2i}X_4 + a_{1i}X_5 & i \in \{1,2\} \\ [X_2, Y_i] = a_{2i}X_5 & i \in \{1,2\} \end{cases}$$

sujeta a la siguiente restricción

$$a_{21}a_{12} - a_{22}a_{11} = 0 \quad \text{con algún } a_{ij} \neq 0$$

Utilizando cambios de base genéricos se verá que la nulidad de a_{21} es invariante.

$X_0' = P_0X_0 + P_1X_1 + P_2X_2 + P_3X_3 + P_4X_4 + P_5X_5 + P_6Y_1 + P_7Y_2$
$X_1' = Q_0X_0 + Q_1X_1 + Q_2X_2 + Q_3X_3 + Q_4X_4 + Q_5X_5 + Q_6Y_1 + Q_7Y_2$
$X_2' = (P_0Q_1 - P_1Q_0)X_2 + (P_0Q_2 - P_2Q_0)X_3 + [(P_0Q_3 - P_3Q_0) + (P_1Q_2 - P_2Q_1)c + (P_1Q_6 - P_6Q_1)a_{21} + (P_1Q_7 - P_7Q_1)a_{22}]X_4 + (\cdots)X_5 + (P_1Q_2 - P_2Q_1)Y_1$
$X_3' = P_0(P_0Q_1 - P_1Q_0)X_3 + [P_0(P_0Q_2 - P_2Q_0) + P_1c(P_0Q_1 - P_1Q_0) + P_1a_{21}(P_1Q_2 - P_2Q_1)]X_4 + (\cdots)X_5 + P_1(P_0Q_1 - P_1Q_0)Y_1$
$X_4' = (P_0^2 + P_1^2a_{21})(P_0Q_1 - P_1Q_0)X_4 + [P_0^2(P_0Q_2 - P_2Q_0) + 2P_0P_1c(P_0Q_1 - P_1Q_0) + P_0P_1a_{21}(P_1Q_2 - P_2Q_1) + P_1e(P_0(P_0Q_2 - P_2Q_0) + P_1c(P_0Q_1 - P_1Q_0) + P_1a_{21}(P_1Q_2 - P_2Q_1)) + (P_1^2a_{11} - P_0P_2e + P_1P_2a_{21})(P_0Q_1 - P_1Q_0)]X_5$
$X_5' = (P_0 + P_1e)(P_0^2 + P_1^2a_{21})(P_0Q_1 - P_1Q_0)X_5$
$Y_1' = Q_0(P_0Q_1 - P_1Q_0)X_3 + \frac{1}{P_0 + P_1e}[P_1P_2Q_0Q_1a_{21} - P_1P_2Q_0^2e - P_0P_2Q_1^2a_{21} - P_1P_2Q_1^2ea_{21} + P_1^2Q_1^2ca_{21} + P_1^2Q_0^2c - P_0P_1Q_1^2a_{11} + P_1^2Q_0Q_1a_{11}]X_4 + (\cdots)X_5 + Q_1(P_0Q_1 - P_1Q_0)Y_1$
$Y_2' = S_0X_0 + S_1X_1 + S_2X_2 + S_3X_3 + S_4X_4 + S_5X_5 + S_6Y_1 + S_7Y_2$

para que sea cambio de base ($X_5' \neq 0$) se ha de exigir que

$$(P_0 + P_1e)(P_0^2 + P_1^2a_{21})(P_0Q_1 - P_1Q_0) \neq 0$$

y para no salirse de la familia ($[X_1', X_3'] = c'X_5'$), hay que imponer que:

$$P_0Q_0 + P_1Q_1a_{21} = 0$$

como los cálculos son muy complicados, se completarán los cambios particularizando para valores concretos de algún parámetro y las condiciones sobre ellos.

Los nuevos parámetros son:

$$c' = \frac{Q_1c}{P_0^2 + P_1^2a_{21}} + \frac{P_1(Q_0c + Q_1a_{11})}{(P_0 + P_1e)(P_0^2 + P_1^2a_{21})}$$

$$e' = \frac{(P_0e - P_1a_{21})(P_0Q_1 - P_1Q_0)}{(P_0 + P_1e)(P_0^2 + P_1^2a_{21})}$$

$$a_{21}' = \frac{(P_0Q_1 - P_1Q_0)^2}{(P_0^2 + P_1^2a_{21})^2}a_{21}$$

Se observa que la nulidad de a_{21} es invariante, también lo es la de la suma $e^2 + a_{21}$, pues

$$e'^2 + a_{21}' = \frac{(P_0Q_1 - P_1Q_0)^2}{(P_0 + P_1e)^2(P_0^2 + P_1^2a_{21})}(e^2 + a_{21})$$

• Si $a_{21} = 0$, los cambios quedarían:

$X_0' = P_0X_0 + P_1X_1 + P_2X_2 + P_3X_3 + P_4X_4 + P_5X_5 + P_6Y_1 + P_7Y_2$
$X_1' = Q_1X_1 + Q_2X_2 + Q_3X_3 + Q_4X_4 + Q_5X_5 + Q_6Y_1 + Q_7Y_2$
$X_2' = P_0Q_1X_2 + P_0Q_2X_3 + [P_0Q_3 + (P_1Q_2 - P_2Q_1)c + (P_1Q_7 - P_7Q_1)a_{22}]X_4 + +(\cdots)X_5 + (P_1Q_2 - P_2Q_1)Y_1$
$X_3' = P_0^2Q_1X_3 + (P_0^2Q_2 + P_0P_1Q_1c)X_4 + (\cdots)X_5 + P_0P_1Q_1Y_1$
$X_4' = P_0^3Q_1X_4 + [P_0^3Q_2 + 2P_0^2P_1Q_1c + P_0^2P_1Q_2e + P_0P_1^2Q_1ce + P_0P_1^2Q_1a_{11} - P_0^2P_2Q_1e - P_1Q_0)]X_5$
$X_5' = P_0^3Q_1(P_0 + P_1e)X_5$

Teniendo esto en cuenta, se tiene que :

$$Y_1' = -\frac{P_0P_1Q_1^2a_{11}}{P_0 + P_1e}X_4 + (\cdots)X_5 + P_0^2Q_1Y_1$$

$$Y_2' = S_3X_3 + S_4X_4 + S_5X_5 + S_6Y_1 + S_7Y_2$$

para no salirse de la familia, $([X_0', Y_2'] = 0)$:

$$P_1S_7a_{22} + P_0S_3 = 0$$
$$P_0S_4 + P_1S_3c + P_1S_4e + P_1S_6a_{11} + P_1S_7a_{12} - P_2S_3e + P_2S_7a_{22} = 0$$

y para que sea cambio de base, $\qquad P_0Q_1(P_0 + P_1e)S_7 \neq 0.$

Así, los parámetros quedan:

$$c' = \frac{Q_1c}{P_0^2} + \frac{P_1Q_1a_{11}}{P_0^2(P_0 + P_1e)}$$

$$e' = \frac{Q_1e}{P_0 + P_1e}$$

$$a_{11}' = \frac{Q_1^2a_{11}}{P_0(P_0 + P_1e)^2}$$

$$a_{22}' = \frac{S_7a_{22}}{P_0^3}$$

$$a_{12}' = \frac{S_6a_{11} + S_7a_{12}}{P_0^2(P_0 + P_1e)^2} - \frac{P_1S_7a_{22}(3P_0c + P_1a_{11})}{P_0^5(P_0 + P_1e)} - \frac{P_1^3S_7ce^2a_{22}}{P_0^5(P_0 + P_1e)^2}$$

Además, es fácil comprobar que la nulidad de $ce + a_{11}$ es invariante, pues

$$c'e' + a'_{11} = \frac{Q_1^2}{P_0^2(P_0 + P_1 e)}(ce + a_{11})$$

Se observa de los cambios de base anteriores que las nulidades de e, a_{11} y a_{22} son invariantes. Teniendo en cuenta que la dimensión del centro es 1, y que $a_{21} = 0$, queda que $a_{22}a_{11} = 0$ con algún $a_{ij} \neq 0$.

Se ilustra a continuación en una tabla la configuración de los parámetros:

$$\begin{cases} e=0 \begin{cases} a_{11}=0 \begin{cases} c=0 \begin{cases} a_{22}=0 \Longrightarrow a_{12}\neq 0 \\ a_{22}\neq 0 \begin{cases} a_{12}=0\\ a_{12}\neq 0\end{cases}\end{cases} \\ c\neq 0 \begin{cases} a_{22}=0\Longrightarrow a_{12}\neq 0 \\ a_{22}\neq 0\ (1) \Longrightarrow a_{12}=0\end{cases}\end{cases} \\ a_{11}\neq 0\ (2) \Longrightarrow c=0;\quad a_{22}=0;\quad a_{12}=0 \end{cases} \\ e\neq 0 \begin{cases} a_{11}=0 \begin{cases} c=0 \begin{cases} a_{22}=0 \Longrightarrow a_{12}\neq 0 \\ a_{22}\neq 0 \begin{cases} a_{12}=0\\ a_{12}\neq 0\end{cases}\end{cases} \\ c\neq 0 \begin{cases} a_{22}=0\Longrightarrow a_{12}\neq 0 \\ a_{22}\neq 0\ (3) \begin{cases} ea_{12}+ca_{22}\neq 0\ (\Longrightarrow a_{12}=0) \\ ea_{12}+ca_{22}= 0\ (\Longrightarrow a_{12}=-\frac{ca_{22}}{e}) \end{cases}\end{cases}\end{cases} \\ a_{11}\neq 0\ (4) \begin{cases} ce+a_{11}\neq 0 \Longrightarrow c=0;\quad a_{22}=0;\quad a_{12}=0 \\ ce+a_{11}=0 \Longrightarrow c=-\frac{a_{11}}{e};\ a_{22}=0;\ a_{12}=0 \end{cases} \end{cases} \end{cases}$$

donde $(1), (2), (3)$ y (4) quiere indicar, respectivamente los casos siguientes:

(1) $e = a_{11} = 0, \quad ca_{22} \neq 0$

Se elige $P_1 = \dfrac{P_0 a_{12}}{3ca_{22}}$ para conseguir $a_{12} = 0$.

(2) $e = 0, \quad a_{11} \neq 0$

Eligiendo $P_1 = -\dfrac{P_0 c}{a_{11}}$ se puede suponer $c = 0$ y como consecuencia de la restricción $a_{22}a_{11} = 0 \longrightarrow a_{22} = 0$ y eligiendo $S_6 = -\dfrac{S_7 a_{12}}{a_{11}}$, se puede suponer $a'_{12} = 0$.

(3) $a_{11} = 0, \quad eca_{22} \neq 0$

Es fácil ver que $e'a'_{12} + c'a'_{22} = \dfrac{Q_1 S_7}{P_0^2(P_0 + P_1 e)^3}(ea_{12} + ca_{22})$ y por tanto la nulidad es invariante. Si $ea_{12} + ca_{22} \neq 0$, eligiendo adecuadamente $P_1 \neq -\dfrac{P_0}{e}$ se puede conseguir $a_{12} = 0$. Si $ea_{12} + ca_{22} = 0$, entonces $a_{12} = -\dfrac{ca_{22}}{e}$.

(4) $ea_{11} \neq 0$

$$c' = \frac{Q_1(P_0 c + P_1(ce + a_{11}))}{P_0^2(P_0 + P_1 e)}$$

y, por tanto, la nulidad de c depende de la nulidad de $ce + a_{11}$. Si $ce + a_{11} = 0$, la nulidad de c es invariante y si $ce + a_{11} \neq 0$, eligiendo $P_1 = -\dfrac{P_0 c}{ce + a_{11}}$, se consigue $c = 0$ y eligiendo $S_6 = -\dfrac{S_7 a_{12}}{a_{11}}$, $a_{12} = 0$.

Una vez estudiados estos casos, es laborioso pero trivial, comprobar que las únicas álgebras o familias de álgebras con $a_{21} = 0$, no isomorfas entre sí, son las que se obtienen a continuación.

(1.1) $e = a_{11} = c = a_{22} = 0, \quad a_{12} \neq 0$
Mediante el cambio de escala:

$$\begin{cases} X'_i = X_i & 0 \leq i \leq 5 \\ Y'_1 = Y_1 & \\ Y'_2 = \dfrac{1}{a_{12}} Y_2 & \end{cases}$$

se obtiene $\mu^4_{(5,1,1,1)}$.

(1.2) $e = a_{11} = c = a_{12} = 0, \quad a_{22} \neq 0$

Mediante el cambio de escala:

$$\begin{cases} X'_i = X_i & 0 \leq i \leq 5 \\ Y'_1 = Y_1 \\ Y'_2 = \dfrac{1}{a_{22}} Y_2 \end{cases}$$

se obtiene $\mu^5_{(5,1,1,1)}$.

(1.3) $e = a_{11} = c = 0, \quad a_{22}a_{12} \neq 0$
Mediante el cambio de escala:

$$\begin{cases} X'_0 = \dfrac{a_{12}}{a_{22}} X_0 \\ X'_1 = X_1 \\ Y'_2 = \dfrac{a_{12}^3}{a_{22}^4} Y_2 \end{cases}$$

se obtiene $\mu^6_{(5,1,1,1)}$.

(1.4) $e = a_{11} = a_{22} = 0, \quad ca_{12} \neq 0$
Mediante el cambio de escala:

$$\begin{cases} X'_0 = X_0 \\ X'_1 = \dfrac{1}{c} X_1 \\ Y'_2 = \dfrac{1}{a_{12}} Y_2 \end{cases}$$

se obtiene $\mu^7_{(5,1,1,1)}$.

(1.5) $e = a_{11} = a_{12} = 0, \quad ca_{22} \neq 0$
Mediante el cambio de escala:

$$\begin{cases} X'_0 = X_0 \\ X'_1 = \dfrac{1}{c} X_1 \\ Y'_2 = \dfrac{1}{a_{22}} Y_2 \end{cases}$$

se obtiene $\mu^8_{(5,1,1,1)}$.

(1.6) $e = c = a_{22} = a_{12} = 0, \quad a_{11} \neq 0$

Mediante un sencillo cambio de escala, se obtiene $\mu^9_{(5,1,1)} \oplus \mathbf{C}$.

(1.7) $a_{11} = c = a_{22} = 0, \quad ea_{12} \neq 0$
Mediante el cambio de escala:

$$\begin{cases} X'_0 = X_0 \\ X'_1 = \dfrac{1}{e} X_1 \\ Y'_2 = \dfrac{1}{a_{12}} Y_2 \end{cases}$$

se obtiene $\mu^9_{(5,1,1,1)}$.

(1.8) $a_{11} = c = a_{12} = 0, \quad ea_{22} \neq 0$
Mediante el cambio de escala:

$$\begin{cases} X'_0 = X_0 \\ X'_1 = \dfrac{1}{e} X_1 \\ Y'_2 = \dfrac{1}{a_{22}} Y_2 \end{cases}$$

se obtiene $\mu^{10}_{(5,1,1,1)}$.

(1.9) $a_{11} = c = 0, \quad ea_{22}a_{12} \neq 0$
Mediante el cambio de escala:

$$\begin{cases} X'_0 = \dfrac{a_{12}}{a_{22}} X_0 \\ X'_1 = \dfrac{a_{12}}{ea_{22}} X_1 \\ Y'_2 = \dfrac{a_{12}^3}{a_{22}^4} Y_2 \end{cases}$$

se obtiene $\mu^{11}_{(5,1,1,1)}$.

(1.10) $a_{11} = a_{22} = 0, \quad eca_{12} \neq 0$
Mediante el cambio de escala:

$$\begin{cases} X'_0 = \dfrac{c}{e} X_0 \\ X'_1 = \dfrac{c}{e^2} X_1 \\ Y'_2 = \dfrac{c^4}{e^4 a_{12}} Y_2 \end{cases}$$

se obtiene $\mu^{12}_{(5,1,1,1)}$.

(1.11) $a_{11} = a_{12} = 0, \quad eca_{22} \neq 0$
Mediante el cambio de escala:

$$\begin{cases} X_0' = \dfrac{c}{e} X_0 \\ X_1' = \dfrac{c}{e^2} X_1 \\ Y_2' = \dfrac{c^3}{e^3 a_{22}} Y_2 \end{cases}$$

se obtiene $\mu^{13}_{(5,1,1,1)}$.

(1.12) $a_{11} = 0, \quad a_{12} = -\dfrac{ca_{22}}{e}, \quad eca_{22} \neq 0$

Utilizando el cambio de base del caso anterior se obtiene $\mu^{14}_{(5,1,1,1)}$.

(1.13) $c = a_{22} = a_{12} = 0, \quad ea_{11} \neq 0$
Mediante un sencillo cambio de escala, se obtiene $\mu^{10}_{(5,1,1)} \oplus \mathbf{C}$.

(1.14) $a_{22} = a_{12} = 0, \quad ea_{11} \neq 0, \quad c = -\dfrac{a_{11}}{e}$
Mediante el cambio de escala del caso (1.13) se llega a $\mu^{11}_{(5,1,1)} \oplus \mathbf{C}$.

- Si $a_{21} \neq 0$, el cambio de base dado por

$$\begin{cases} X_0' = X_0 \\ X_1' = X_1 \\ Y_1' = Y_1 \\ Y_2' = a_{21} Y_2 - a_{22} Y_1 \end{cases}$$

y la restricción $a_{21}a_{12} - a_{22}a_{11} = 0$, permite suponer $a_{22} = a_{12} = 0$. La familia queda:

$$\begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1} & 1 \leq i \leq 4 \\ [X_1, X_2] = cX_4 + Y_1 \\ [X_1, X_3] = cX_5 \\ [X_1, X_4] = eX_5 \\ [X_2, X_3] = -eX_5 \\ [X_1, Y_1] = a_{21}X_4 + a_{11}X_5 \\ [X_2, Y_1] = a_{21}X_5 \end{cases}$$

con $a_{21} \neq 0$. Luego corresponden a las leyes $\mu^i_{(5,1,1)} \oplus \mathbf{C}$ con $12 \leq i \leq 18$. (Véase apéndice A, pag. 187 a 204).

<u>Caso 2:</u> $(\beta \neq 0)$. En este caso y atendiendo a las restricciones, la familia queda:

$$\begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1} & 1 \leq i \leq 4 \\ [X_1, X_2] = Y_1 \\ [X_1, X_4] = eX_5 + \beta Y_1 \\ [X_2, X_3] = -eX_5 - \beta Y_1 \\ [X_1, Y_2] = a_{22} X_4 \\ [X_2, Y_2] = a_{22} X_5 \end{cases}$$

bajo la condición $\beta a_{22} \neq 0$ obsérvese que el cambio de base

$$\begin{cases} X_0' = X_0 \\ X_1' = X_1 - \dfrac{e}{\beta a_{22}} Y_2 \\ Y_2' = Y_2 \end{cases}$$

permite suponer $e = 0$ y con el cambio de escala

$$\begin{cases} X_0' = \dfrac{1}{\sqrt{\beta}} X_0 \\ X_1' = X_1 \\ Y_2' = \dfrac{1}{\beta\sqrt{\beta} a_{22}} Y_2 \end{cases}$$

se llega a $\mu^{15}_{(5,1,1,1)}$. $\square$

Teorema 1.3.9.– *Sea* $\mathfrak{g}$ *es un álgebra de Lie 3-filiforme con* $dim(\mathfrak{g}) = 8$ *y tal que* $(dim(\mathcal{D}^1(\mathfrak{g})), dim(\mathcal{Z}(\mathfrak{g}))) = (5,1)$ *(AL3F(5,1)). Entonces es isomorfa a una de las álgebras, no isomorfas entre sí, de leyes* $\mu^i_{(5,1,1,1)}$, $16 \leq i \leq 25$, $i \neq 21$ *y* $\mu^{21,\lambda}_{(5,1,1,1)}$, *dadas por*

$$\mu^{16}_{(5,1,1,1)} : \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1} & 1 \leq i \leq 4 \\ [X_1, X_2] = Y_1 \\ [X_1, Y_1] = X_5 \\ [X_1, Y_2] = X_4 \\ [X_2, Y_2] = X_5 \end{cases}$$

$$\mu^{17}_{(5,1,1,1)} : \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1} & 1 \leq i \leq 4 \\ [X_1, X_2] = Y_1 \\ [X_1, X_4] = X_5 \\ [X_2, X_3] = -X_5 \\ [X_1, Y_1] = X_5 \\ [X_1, Y_2] = X_4 \\ [X_2, Y_2] = X_5 \end{cases}$$

$$\mu^{18}_{(5,1,1,1)} : \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1} & 1 \leq i \leq 4 \\ [X_1, X_2] = -X_4 + Y_1 \\ [X_1, X_3] = -X_5 \\ [X_1, X_4] = X_5 \\ [X_2, X_3] = -X_5 \\ [X_1, Y_1] = X_5 \\ [X_1, Y_2] = X_4 \\ [X_2, Y_2] = X_5 \end{cases}$$

$$\mu^{19}_{(5,1,1,1)} : \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1} & 1 \leq i \leq 4 \\ [X_1, X_2] = Y_1 \\ [X_1, Y_1] = X_4 \\ [X_1, Y_2] = X_5 \\ [X_2, Y_1] = X_5 \end{cases}$$

$$\mu^{20}_{(5,1,1,1)} : \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1} & 1 \leq i \leq 4 \\ [X_1, X_2] = Y_1 \\ [X_1, Y_1] = X_4 + X_5 \\ [X_1, Y_2] = X_5 \\ [X_2, Y_1] = X_5 \end{cases}$$

$$\mu^{21,\lambda}_{(5,1,1,1)} : \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1} & 1 \leq i \leq 4 \\ [X_1, X_2] = X_4 + Y_1 \\ [X_1, X_3] = X_5 \\ [X_1, Y_1] = X_4 + \lambda X_5 \\ [X_1, Y_2] = X_5 \\ [X_2, Y_1] = X_5 & \lambda \in \mathbf{C}_2 \end{cases}$$

$$\mu^{22}_{(5,1,1,1)}: \begin{cases} [X_0,X_i]=X_{i+1} & 1\le i\le 4\\ [X_1,X_2]=Y_1 \\ [X_1,X_4]=X_5 \\ [X_2,X_3]=-X_5 \\ [X_1,Y_1]=-X_4 \\ [X_1,Y_2]=X_5 \\ [X_2,Y_1]=-X_5 \end{cases}$$

$$\mu^{23}_{(5,1,1,1)}: \begin{cases} [X_0,X_i]=X_{i+1} & 1\le i\le 4\\ [X_1,X_2]=X_4+Y_1 \\ [X_1,X_3]=X_5 \\ [X_1,X_4]=X_5 \\ [X_2,X_3]=-X_5 \\ [X_1,Y_1]=-X_4+X_5 \\ [X_1,Y_2]=X_5 \\ [X_2,Y_1]=-X_5 \end{cases}$$

$$\mu^{24}_{(5,1,1,1)}: \begin{cases} [X_0,X_i]=X_{i+1} & 1\le i\le 4\\ [X_1,X_2]=X_4+Y_1 \\ [X_1,X_3]=X_5 \\ [X_1,X_4]=X_5 \\ [X_2,X_3]=-X_5 \\ [X_1,Y_1]=-X_4-3X_5 \\ [X_1,Y_2]=X_5 \\ [X_2,Y_1]=-X_5 \end{cases}$$

$$\mu^{25}_{(5,1,1,1)}: \begin{cases} [X_0,X_i]=X_{i+1} & 1\le i\le 4\\ [X_1,X_2]=Y_1 \\ [X_1,X_4]=X_5 \\ [X_2,X_3]=-X_5 \\ [X_1,Y_1]=-X_4+X_5 \\ [X_1,Y_2]=X_5 \\ [X_2,Y_1]=-X_5 \end{cases}$$

Demostración: Si $\mathfrak{g}$ está en las condiciones anteriores vendrá dada, salvo antisimetría, por

$$\begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1} & 1 \leq i \leq 4 \\ [X_1, X_2] = cX_4 + Y_1 & \\ [X_1, X_3] = cX_5 & \\ [X_1, X_4] = eX_5 & \\ [X_2, X_3] = -eX_5 & \\ [X_1, Y_i] = a_{2i}X_4 + a_{1i}X_5 & i \in \{1,2\} \\ [X_2, Y_i] = a_{2i}X_5 & i \in \{1,2\} \end{cases}$$

sujeta a la restricción, $a_{21}a_{12} - a_{11}a_{22} \neq 0$

Se observa que son válidos los cambios de base del teorema 1.3.8 (en el caso $\beta = 0$), teniendo, por tanto, que la nulidad de a_{21} es un invariante.

- Si $a_{21} = 0 \Longrightarrow Q_0 = 0$, por la restricción se tiene que $a_{11}a_{22} \neq 0$ y el cambio de base

$$\begin{cases} X_0' = X_0 \\ X_1' = X_1 \\ Y_1' = Y_1 \\ Y_2' = a_{11}Y_2 - a_{12}Y_1 \end{cases}$$

permite suponer $a_{12} = 0$.

Teniendo en cuenta todo esto y adaptando los cambios, los parámetros resultan:

$$c' = \frac{(P_0 + P_1e)Q_1c + P_1Q_1a_{11}}{P_0^2(P_0 + P_1e)}$$

$$e' = \frac{Q_1e}{P_0 + P_1e}$$

$$a_{11}' = \frac{Q_1^2a_{11}}{P_0(P_0 + P_1e)^2}$$

sujetos a las condiciones:

$$P_0Q_1(P_0 + P_1e) \neq 0$$

$$P_0^3S_6a_{11} - 3P_0P_1S_7(P_0 + P_1e)ca_{22} - P_1^2S_7(P_0 + P_1e)a_{11}a_{22} - P_1^3S_7ce^2a_{22} = 0$$

Se observa que la nulidad de e es invariante, así como la nulidad de $ce+a_{11}$ también lo es, pues

$$c'e' + a_{11}' = \frac{Q_1^2}{P_0^2(P_0 + P_1e)}(ce + a_{11})$$

$*$ Si $e = 0$, eligiendo $P_1 = -\dfrac{P_0 c}{a_{11}}$, se consigue $c = 0$.

$*$ Si $e \neq 0$,

– Si $ce + a_{11} \neq 0$, eligiendo $P_1 = -\dfrac{P_0 c}{ce + a_{11}}$ se consigue $c = 0$.

– Si $ce + a_{11} = 0$, entonces $c = -\dfrac{a_{11}}{e}$.

La configuración de los parámetros es la que ilustra la tabla siguiente:

$$a_{21} = 0 \Longrightarrow a_{11}a_{22} \neq 0; \longrightarrow a_{12} = 0 \begin{cases} e = 0 \Longrightarrow c = 0 \\ e \neq 0 \begin{cases} c = 0 \\ c = -\dfrac{a_{11}}{e} \end{cases} \end{cases}$$

Se distinguen así los diferentes casos:

(1.1) $a_{21} = a_{12} = e = c = 0, \qquad a_{11}a_{22} \neq 0$
Mediante el cambio de escala

$$\begin{cases} X_0' = a_{11}X_0 \\ X_1' = a_{11}X_1 \\ Y_2' = \dfrac{a_{11}^3}{a_{22}}Y_2 \end{cases}$$

se obtiene $\mu^{16}_{(5,1,1,1)}$.

(1.2) $a_{21} = a_{12} = c = 0, \qquad a_{11}a_{22}e \neq 0$
Mediante el cambio de escala

$$\begin{cases} X_0' = \dfrac{a_{11}}{e^2}X_0 \\ X_1' = \dfrac{a_{11}}{e^3}X_1 \\ Y_2' = \dfrac{a_{11}^3}{a_{22}e^6}Y_2 \end{cases}$$

se obtiene $\mu^{17}_{(5,1,1,1)}$.

(1.3) $a_{21} = a_{12} = 0, \qquad a_{11}a_{22}e \neq 0, \qquad c = -\dfrac{a_{11}}{e}$

Mediante el cambio de escala anterior se obtiene $\mu^{18}_{(5,1,1,1)}$.

• Si $a_{21} \neq 0$, al igual que en el teorema 1.3.8, la nulidad de $e^2 + a_{21}$ es invariante

$$e'^2 + a'_{21} = \frac{(P_0Q_1 - P_1Q_0)^2}{(P_0 + P_1e)^2(P_0^2 + P_1^2a_{21})}(e^2 + a_{21})$$

y, además, el cambio de base dado por

$$\begin{cases} X'_0 = X_0 \\ X'_1 = X_1 \\ Y'_2 = a_{21}Y_2 - a_{22}Y_1 \end{cases}$$

permite suponer $a_{22} = 0$ y por tanto $a_{12} \neq 0$.

$*$ Si $e^2 + a_{21} \neq 0$, eligiendo $P_1 = \dfrac{P_0e}{a_{21}}$, se consigue $e = 0$. Si en este caso se vuelven a efectuar los cambios de base, para mantener $e = 0$ hay que imponer que $Q_0 = P_1 = 0$, llegando así a:

$$c' = \frac{Q_1c}{P_0^2}$$
$$a'_{11} = \frac{Q_1^2a_{11}}{P_0^3}$$

luego las nulidades son invariantes, y, por tanto, se pueden distinguir los siguientes casos:

(1.4) $a_{11} = a_{22} = e = c = 0, \qquad a_{12}a_{21} \neq 0$
Mediante el cambio de escala

$$\begin{cases} X'_0 = X_0 \\ X'_1 = \dfrac{1}{\sqrt{a_{21}}}X_1 \\ Y'_2 = \dfrac{1}{a_{12}}Y_2 \end{cases}$$

se obtiene $\mu^{19}_{(5,1,1,1)}$.

(1.5) $a_{22} = e = c = 0, \qquad a_{11}a_{12}a_{21} \neq 0$
Mediante el cambio de escala

$$\begin{cases} X'_0 = \dfrac{a_{11}}{a_{21}}X_0 \\ X'_1 = \dfrac{a_{11}}{a_{21}\sqrt{a_{21}}}X_1 \\ Y'_2 = \dfrac{a_{11}^4}{a_{12}a_{21}^4}Y_2 \end{cases}$$

se obtiene $\mu^{20}_{(5,1,1,1)}$.

(1.6) $a_{22} = e = a_{11} = 0, \qquad ca_{12}a_{21} \neq 0$
Mediante el cambio de escala

$$\begin{cases} X_0' = \dfrac{c}{\sqrt{a_{21}}} X_0 \\ X_1' = \dfrac{c}{a_{21}} X_1 \\ Y_2' = \dfrac{c^4}{a_{12}a_{21}^2} Y_2 \end{cases}$$

se obtiene $\mu^{21,0}_{(5,1,1,1)}$.

(1.7) $a_{22} = e = 0, \qquad ca_{11}a_{12}a_{21} \neq 0$
Mediante el cambio de escala del caso anterior se obtiene $\mu^{21,\lambda}_{(5,1,1,1)}$ donde $\lambda \in \mathbf{C}_2 - \{0\}$.

$*$ Si $e^2 + a_{21} = 0 \longrightarrow a_{21} = -e^2$ y, por tanto, $e \neq 0$ y, adaptando los cambios de base del teorema 1.3.8, se obtiene que

$$X_0' = P_0X_0 + P_1X_1 + P_2X_2 + P_3X_3 + P_4X_4 + P_5X_5 + P_6Y_1 + P_7Y_2$$

$$X_1' = Q_0X_0 + Q_1X_1 + Q_2X_2 + Q_3X_3 + Q_4X_4 + Q_5X_5 + Q_6Y_1 + Q_7Y_2$$

$$X_2' = (P_0Q_1 - P_1Q_0)X_2 + (P_0Q_2 - P_2Q_0)X_3 + (P_0Q_3 + P_1Q_2c - P_1Q_6e^2 - P_2Q_1c - P_3Q_0 + P_6Q_1e^2)X_4 + (\ldots)X_5 + (P_1Q_2 - P_2Q_1)Y_1$$

$$X_3' = P_0(P_0Q_1 - P_1Q_0)X_3 + (P_0^2Q_2 - P_0P_2Q_0 + P_0P_1Q_1c - P_1^2Q_0c - P_1^2Q_2e^2 + P_1P_2Q_1e^2)X_4 + (\ldots)X_5 + (P_0P_1Q_1 - P_1^2Q_0)Y_1$$

$$X_4' = (P_0^2 - P_1^2e^2)(P_0Q_1 - P_1Q_0)X_4 + (P_0^3Q_2 - P_0^2P_2Q_0 + 2P_0^2P_1Q_1c - 2P_0P_1^2Q_0c - P_0P_1^2Q_2e^2 + P_0^2P_1Q_2e + P_0P_1^2Q_1ec - P_1^3Q_0ec - P_1^3Q_2e^3 + P_1^2P_2Q_1e^3 + P_0P_1^2Q_1a_{11} - P_1^3Q_0a_{11} - P_0^2P_2Q_1e + P_1^2P_2Q_0e^2)X_5$$

$$X_5' = (P_0 + P_1e)(P_0^2 - P_1^2e^2)(P_0Q_1 - P_1Q_0)X_5$$

$$Y_1' = Q_0(P_0Q_1 - P_1Q_0)X_3 + \frac{1}{P_0 + P_1e}(-P_1P_2Q_0Q_1e^2 - P_0P_2Q_1^2e^2P_1P_2Q_0^2e + P_0P_2Q_1^2e^3 + P_1^2Q_0^2c - P_1^2Q_1^2e^2c - P_0P_1Q_1^2a_{11} + P_1^2Q_0Q_1a_{11})X_4 + (\ldots)X_5 + (P_0Q_1 - P_1Q_0)Q_1Y_1$$

$$Y_2' = S_0X_0 + S_1X_1 + S_2X_2 + S_3X_3 + S_4X_4 + S_5X_5 + S_6Y_1 + S_7Y_2$$

para que sea cambio de base y para mantener $e \neq 0$, hay que imponer que

$$(P_0^2 - P_1^2e^2)(Q_0^2 - Q_1^2e^2)(P_0Q_1 - P_1Q_0)S_7 \neq 0$$

y para no salirse de la familia

$$[X_1', X_3'] = c'X_5' \Longrightarrow P_0Q_0 - P_1Q_1e^2 = 0$$

$$[X_0', Y_2'] = [X_2', Y_2'] = [X_3', Y_2'] = [X_4', Y_2'] = [X_5', Y_2'] = 0 \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow S_0 = S_1 = S_2 = S_3 = S_6 = 0, \quad S_4 = -\frac{P_1S_7a_{12}}{P_0 + eP_1}$$

De esta forma, los parámetros quedan:

$$c' = \frac{1}{(P_0 + P_1e)(P_0^2 - P_1^2e^2)}[P_1(Q_1(a_{11} + ec) + Q_0c) + P_0Q_1c]$$
$$e' = \frac{P_0Q_1 - P_1Q_0}{P_0^2 - P_1^2e^2}e$$
$$a_{11}' = \frac{P_0Q_1 - P_1Q_0}{(P_0 + P_1e)(P_0^2 - P_1^2e^2)^2}[P_1(-Q_1e(a_{11} - 3ec) + Q_0a_{11}) + P_0Q_1a_{11}]$$
$$a_{12}' = \frac{S_7a_{12}}{(P_0 - eP_1)(P_0 + eP_1)}$$

Un sencillo cálculo demuestra que:

$$a_{11}' - e'c' = -\frac{(P_0Q_1 - P_1Q_0)(P_0 - P_1e)(Q_0 - Q_1e)}{(P_0 + P_1e)(P_0^2 - P_1^2e^2)^2e}(a_{11} - ec)$$
$$a_{11}' + 3e'c' = \frac{(P_0Q_1 - P_1Q_0)(P_0 + P_1e)(Q_0 + Q_1e)}{(P_0 + P_1e)(P_0^2 - P_1^2e^2)^2e}(a_{11} + 3ec)$$
$$(a_{11}' - e'c')(a_{11}' + 3e'c') = \frac{(P_0Q_1 - P_1Q_0)^4}{(P_0 + P_1e)^2(P_0^2 - P_1^2e^2)^4}(a_{11} - ec)(a_{11} + 3ec)$$

se observa que las nulidades de las expresiones anteriores son invariantes. Se resumen a continuación los casos a considerar:

$$a_{12}a_{21} \neq 0,\ a_{21} = -e^2 \begin{cases} a_{11} - ec = 0 \begin{cases} a_{11} + 3ec = 0 \\ \\ a_{11} + 3ec \neq 0 \end{cases} \\ \\ a_{11} - ec \neq 0 \begin{cases} a_{11} + 3ec = 0 \\ \\ a_{11} + 3ec \neq 0 \end{cases} \end{cases}$$

(1.8) $a_{12} \neq 0$, $a_{11} - ec = a_{11} + 3ec = 0 \longrightarrow c = a_{11} = 0$ y por tanto $c' = a'_{11} = 0$, sustituyendo en la familia, se tiene que:

$$\begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1} & 1 \leq i \leq 4 \\ [X_1, X_2] = Y_1 \\ [X_1, X_4] = eX_5 \\ [X_2, X_3] = -eX_5 \\ [X_1, Y_1] = -e^2 X_4 \\ [X_1, Y_2] = a_{12} X_5 \\ [X_2, Y_1] = -e^2 X_5 \end{cases}$$

con $ea_{12} \neq 0$.

Mediante el cambio de escala

$$\begin{cases} X'_0 = X_0 \\ X'_1 = \dfrac{1}{e} X_1 \\ Y'_2 = \dfrac{1}{a_{12}} Y_2 \end{cases}$$

se obtiene $\mu^{22}_{(5,1,1,1)}$.

(1.9) $a_{12} \neq 0$, $a_{11} - ec = 0$, $a_{11} + 3ec \neq 0 \longrightarrow a_{11} = ec$ y $eca_{12} \neq 0$, sustituyendo en la familia:

$$\begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1} & 1 \leq i \leq 4 \\ [X_1, X_2] = cX_4 + Y_1 \\ [X_1, X_3] = cX_5 \\ [X_1, X_4] = eX_5 \\ [X_2, X_3] = -eX_5 \\ [X_1, Y_1] = -e^2 X_4 + ecX_5 \\ [X_1, Y_2] = a_{12} X_5 \\ [X_2, Y_1] = -e^2 X_5 \end{cases}$$

con $eca_{12} \neq 0$.

Mediante el cambio de escala

$$\begin{cases} X'_0 = \dfrac{c}{e} X_0 \\ X'_1 = \dfrac{c}{e^2} X_1 \\ Y'_2 = \dfrac{c^4}{e^4 a_{12}} Y_2 \end{cases}$$

se obtiene $\mu^{23}_{(5,1,1,1)}$.

(1.10) $a_{12} \neq 0$, $a_{11} - ec \neq 0$, $a_{11} + 3ec = 0 \longrightarrow a_{11} = -3ec$ y $eca_{12} \neq 0$, sustituyendo en la familia

$$\begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1} & 1 \leq i \leq 4 \\ [X_1, X_2] = cX_4 + Y_1 \\ [X_1, X_3] = cX_5 \\ [X_1, X_4] = eX_5 \\ [X_2, X_3] = -eX_5 \\ [X_1, Y_1] = -e^2 X_4 - 3ecX_5 \\ [X_1, Y_2] = a_{12} X_5 \\ [X_2, Y_1] = -e^2 X_5 \end{cases}$$

con $eca_{12} \neq 0$.

Mediante el cambio de escala anterior se obtiene $\mu^{24}_{(5,1,1,1)}$.

(1.11) $a_{12} \neq 0$, $a_{11} - ec \neq 0$ y $a_{11} + 3ec \neq 0$.

En este caso siempre se pueden elegir los coeficientes del cambio de base para hacer $c' = 0$ y $e' = a'_{11} = a'_{12} = 1$. En efecto:

- Si $c = 0 \Longrightarrow a_{11} \neq 0$ y $c' = \dfrac{P_1 Q_1}{(P_0 + P_1 e)(P_0^2 - P_1^2 e^2)} a_{11}$ y, para mantener $c' = 0$, se tiene que exigir que

$$P_1 Q_1 = 0 \Longrightarrow \begin{cases} P_1 = 0 \Longrightarrow P_0 \neq 0 \neq Q_1 \text{ y } Q_0 = 0 \\ \\ Q_1 = 0 \Longrightarrow P_1 \neq 0 \neq Q_0 \text{ y } P_0 = 0 \end{cases}$$

luego $c' = 0$ y $a'_{11} \neq 0$.

- Si $c \neq 0$, para hacer $c' = 0$ hay que imponer que

$$P_1(Q_1(a_{11} + ec) + Q_0 c) + P_0 Q_1 c = 0$$

si se prueba que se puede elegir siempre

$$Q_0 \neq -\frac{Q_1(a_{11} + ec)}{c}$$

con $Q_1 \neq 0$ y por tanto

$$P_1 = -\frac{P_0 Q_1 c}{Q_1(a_{11} + ec) + Q_0 c}$$

con $P_0 \neq 0$, entonces $c' = 0$. Habrá que comprobar que se mantienen todas las condiciones del cambio y de la familia.

(1.) Hay que mantener $P_0Q_0 - P_1Q_1e^2 = 0$; si se sustituye el valor de P_1,

$$P_0Q_0 + \frac{P_0Q_1^2e^2c}{Q_1(a_{11}+ec)+Q_0c} = 0 \Longrightarrow P_0[Q_0^2c + Q_0Q_1(a_{11}+ec) + Q_1^2e^2c] = 0$$

Si $P_0 = 0 \Longrightarrow P_1 = 0$ $(\longrightarrow\longleftarrow)$ (no sería cambio de base), luego $P_1 \neq 0$. Para mantener $c' = 0$ tendría que ser $Q_1(a_{11}+ec) + Q_0c = 0$, pero por otro lado ha de verificarse que $P_1Q_1e^2 = 0 \longrightarrow Q_1 = 0$ y $Q_0 = 0$ $(\longrightarrow\longleftarrow)$. Con esto se llega a que $P_0 \neq 0$ y para que se conserve la igualdad hay que exigir que $Q_0^2c + Q_0Q_1(a_{11}+ec) + Q_1^2e^2c = 0$, resolviendo la ecuación se obtiene

$$Q_0 = \frac{-Q_1(a_{11}+ec) \pm Q_1\sqrt{(a_{11}+ec)^2 - 4e^2c^2}}{2c}$$

con $Q_1 \neq 0$, ya que si $Q_1 = 0 \Rightarrow Q_0 = 0$ $(\longrightarrow\longleftarrow)$.

Eligiendo

$$P_1 = -\frac{P_0Q_1c}{Q_1(a_{11}+ec)+Q_0c}$$

$$Q_0 = \frac{-Q_1(a_{11}+ec) \pm Q_1\sqrt{(a_{11}+ec)^2 - 4e^2c^2}}{2c}$$

se puede conseguir $c' = 0$. Falta probar que estos valores son compatibles con las restricciones del cambio.

(2.) Si $Q_0 = -\dfrac{Q_1(a_{11}+ec)}{c}$ (sería el valor prohibido para mantener $c' = 0$), operando se llega a que en tal caso $-4e^2c^2 = 0$, contradicción $(\longrightarrow\longleftarrow)$, $ec \neq 0$.

(3.) Si $Q_0 = \pm Q_1e$ (sería el valor prohibido de Q_0 para que sea cambio de base), operando se llega a:

- $Q_0 = Q_1e \Longrightarrow 4(a_{11}+3ec)ec = 0$ $(\longrightarrow\longleftarrow)$ $((a_{11}+3ec)ec \neq 0)$.

- $Q_0 = -Q_1e \Longrightarrow -4(a_{11}-ec)ec = 0$ $(\longrightarrow\longleftarrow)$ $((a_{11}-ec)ec \neq 0)$.

(4.) Hay que mantener $P_0^2 - P_1^2e^2 \neq 0$ por lo que, sustituyendo P_1, se llega a que tienen que ser $Q_0 \neq -\frac{Q_1 a_{11}}{c}$ y $Q_0 \neq -\frac{Q_1(a_{11}+2ec)}{c}$.

- $Q_0 = -\frac{Q_1 a_{11}}{c}$, operando se tendría que $4(a_{11}-ec)ec = 0$ $(\longrightarrow\!\!\longleftarrow)$.

- $Q_0 = -\frac{Q_1(a_{11}+2ec)}{c} \Rightarrow 4(a_1+3ec)ec = 0$ $(\longrightarrow\!\!\longleftarrow)$.

(5.) $P_0Q_1 - P_1Q_0 \neq 0$, si se reescriben

$$P_1 = -\frac{2P_0c}{(a_{11}+ec) \pm \sqrt{(a_{11}+ec)^2 - 4e^2c^2}}$$

$$Q_0 = \frac{-Q_1(a_{11}+ec) \pm \sqrt{(a_{11}+ec)^2 - 4e^2c^2}}{2c}$$

y sustituyendo,

$$P_0Q_1 - P_1Q_0 = \frac{2P_0Q_1\sqrt{(a_{11}-ec)(a_{11}+3ec)}}{(a_{11}+ec) \pm \sqrt{(a_{11}+ec)^2 - 4e^2c^2}} \neq 0.$$

Todo esto lleva a que se pueden elegir P_1 y Q_0 como se indicaba antes y, por tanto, $P_0Q_1 \neq 0$, para conseguir $c' = 0$ y $a'_{11} \neq 0$.

Si se sustituye en la familia queda:

$$\begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1} & 1 \leq i \leq 4 \\ [X_1, X_2] = Y_1 & \\ [X_1, X_4] = eX_5 & \\ [X_2, X_3] = -eX_5 & \\ [X_1, Y_1] = -e^2X_4 + a_{11}X_5 & \\ [X_1, Y_2] = a_{12}X_5 & \\ [X_2, Y_1] = -e^2X_5 & \end{cases}$$

con $ea_{11}a_{12} \neq 0$.

Mediante el cambio de escala dado por

$$\begin{cases} X'_0 = \frac{a_{11}}{e^2}X_0 \\ X'_1 = \frac{a_{11}}{e^3}X_1 \\ Y'_2 = \frac{a_{11}^4}{e^8a_{12}}Y_2 \end{cases}$$

se obtiene $\mu^{25}_{(5,1,1,1)}$.

Nota 1.3.10.– En el caso en que se trabaje en el cuerpo de los reales, el signo del producto $(a_{11}-ec)(a_{11}+3ec)$ es invariante y, por tanto, hay que distinguir dos casos:

(1.11.1) $a_{12}\neq 0$, $\quad (a_{11}-ec)(a_{11}+3ec)>0$. Análogo al caso complejo, y resulta el álgebra cuya ley se expresa exactamente igual a $\mu^{25}_{(5,1,1,1)}$.

(1.11.2) $a_{12}\neq 0$, $\quad (a_{11}-ec)(a_{11}+3ec)<0$. Ahora no se puede hacer $c'=0$, pues quedaría $a'_{11}=\dfrac{Q_1^2}{P_0}a_{11}$ ó $a'_{11}=\dfrac{Q_0^2}{P_1e^3}a_{11}$ y, por tanto, $(a'_{11}-e'c')(a'_{11}+3e'c')=\dfrac{Q_1^4}{P_0^2}a_{11}^2>0$ ó $\dfrac{Q_0^4}{P_1^2e^6}a_{11}^2>0$, en contra de lo supuesto. Siempre se pueden elegir los coeficientes del cambio para poder suponer $a'_{11}=0$ y $c'a'_{12}\neq 0$.

$$a'_{11}=0 \Longrightarrow P_1(-Q_1e(a_{11}-3ec)+Q_0a_{11})+P_0Q_1a_{11}=0$$

- Si $a_{11}=0\Rightarrow c\neq 0$ y para mantener $a'_1=0$ se tendría:

$$P_1Q_1=0\Longrightarrow\begin{cases} P_1=0\Longrightarrow P_0\neq 0\neq Q_1 \ \text{ y } \ Q_0=0\\[2ex] Q_1=0\Longrightarrow P_1\neq 0\neq Q_0 \ \text{ y } \ P_0=0\end{cases}$$

  y, por tanto, $a'_{11}=0$ y $c'\neq 0$.

- Si $a_{11}\neq 0$, hay que elegir

$$Q_0\neq -\frac{Q_1(3e^2c-ea_{11})}{a_{11}} \qquad \text{y} \qquad P_1=-\frac{P_0Q_1a_{11}}{-Q_1e(a_1-3ec)+Q_0a_{11}}$$

  (1.) $P_0Q_0-P_1Q_1e^2=0$, de donde se tiene que:

$$Q_0=\frac{Q_1e(a_{11}-3ec)\pm\sqrt{e^2(a_{11}-3ec)^2-4e^2a_1^2}}{2a_{11}}$$

  Un estudio análogo al realizado en el caso (1.11.1) permite poder hacer un cambio de base eligiendo P_1 y Q_0 como se ha indicado antes y $P_0Q_1\neq 0$ para tener $a'_{11}=0$ y $c'\neq 0$.

  (2.) Si $Q_0=\dfrac{(a_{11}-3ec)Q_1e}{a_{11}}\Longrightarrow 4e^2a_{11}^2=0\ (\longrightarrow\!\longleftarrow)$.

  (3.) Si $Q_0=\pm Q_1e$,

- $Q_0 = Q_1 e \longrightarrow -4e^2 a_{11}(a_{11}+3ec) = 0$ y se llegaría a contradicción, pues $ea_{11}(a_{11}-ec)(a_{11}+3ec) \neq 0$.
- $Q_0 = -Q_1 e \longrightarrow -12e^2 a_{11}(a_{11}-ec) = 0$ y se llegaría a contradicción, pues $ea_{11}(a_{11}-ec)(a_{11}+3ec) \neq 0$.

(4.) $P_0^2 - P_1^2 e^2 \neq 0$, sustituyendo el valor de P_1 se llega a que

$$Q_0 \neq \frac{Q_1 e(2a_{11}-3ec)}{a_{11}} \quad \text{y} \quad Q_0 \neq -\frac{3Q_1 e^2 c}{a_{11}}$$

- $Q_0 = \dfrac{Q_1 e(2a_{11}-3ec)}{a_{11}}$, sustituyendo se tiene que

$$-12e^2 a_{11}(a_{11}-ec) = 0 \qquad (\longrightarrow\!\longleftarrow)$$

- $Q_0 = -\dfrac{3Q_1 e^2 c}{a_{11}}$, entonces $-4e^2 a_{11}(a_{11}+3ec) = 0$, $(\longrightarrow\!\longleftarrow)$.

(5.) $P_0Q_1 - P_1Q_0 \neq 0$, si se reescribe P_1

$$P_1 = -\frac{2P_0 a_{11}}{(3e^2c - ea_{11}) \pm \sqrt{(3e^2c-ea_{11})^2 - 4e^2a_{11}^2}} \quad \text{y}$$

$$Q_0 = \frac{Q_1(ea_{11}-3e^2c) \pm Q_1\sqrt{(3e^2c-ea_{11})^2-4e^2a_{11}^2}}{2a_{11}}$$

sustituyendo en $P_0Q_1 - P_1Q_0$, queda:

$$P_0Q_1 - P_1Q_0 = P_0Q_1\left(\frac{\pm 2\sqrt{-3e^2(a_{11}-ec)(a_{11}+3ec)}}{(ea_{11}-3e^2c) \pm \sqrt{(3e^2c-ea_{11})^2-4e^2a_{11}^2}}\right) \neq 0$$

basta elegir $P_0Q_1 \neq 0$.

Así pues, siempre se puede suponer $a_{11} = 0$ y $c \neq 0$. Sustituyendo en la familia, queda:

$$\begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1} & 1 \leq i \leq 4 \\ [X_1, X_2] = cX_4 + Y_1 \\ [X_1, X_3] = cX_5 \\ [X_1, X_4] = eX_5 \\ [X_2, X_3] = -eX_5 \\ [X_1, Y_1] = -e^2X_4 \\ [X_1, Y_2] = a_{12}X_5 \\ [X_2, Y_1] = -e^2X_5 \end{cases}$$

con $eca_{12} \neq 0$.

Mediante el cambio de escala:

$$\begin{cases} X_0' = \dfrac{c}{e} X_0 \\ X_1' = \dfrac{c}{e^2} X_1 \\ Y_2' = \dfrac{c^4}{e^4 a_{12}} Y_2 \end{cases}$$

se obtiene el álgebra

$$\begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1} & 1 \leq i \leq 4 \\ [X_1, X_2] = X_4 + Y_1 & \\ [X_1, X_3] = X_5 & \\ [X_1, X_4] = X_5 & \\ [X_2, X_3] = -X_5 & \\ [X_1, Y_1] = -X_4 & \\ [X_1, Y_2] = X_5 & \\ [X_2, Y_1] = -X_5 & \end{cases}$$

Siguiendo con la demostración, los casos que se han considerado, atendiendo a la configuración de los parámetros, vienen ilustrados en la tabla siguiente:

$$a_{12} \neq 0 \begin{cases} e^2 + a_{21} \neq 0 \; (\longrightarrow e' = 0) \begin{cases} a_{11} = 0 \begin{cases} c = 0 \\ c \neq 0 \end{cases} \\ a_{11} \neq 0 \begin{cases} c = 0 \\ c \neq 0 \end{cases} \end{cases} \\ e^2 + a_{21} = 0 \Longrightarrow a_{21} = -e^2 \begin{cases} a_{11} - ec = 0 \begin{cases} a_{11} + 3ec = 0 \Longrightarrow c = a_{11} = 0 \\ a_{11} + 3ec \neq 0 \Longrightarrow a_{11} = ec; \; c \neq 0 \end{cases} \\ a_{11} - ec \neq 0 \begin{cases} a_{11} + 3ec = 0 \Longrightarrow a_{11} = -3ec; \; c \neq 0 \\ a_{11} + 3ec \neq 0 \Longrightarrow c' = 0; \; a_{11}' \neq 0 \end{cases} \end{cases} \end{cases}$$

□

1.3.3 Álgebras de Lie 3-filiformes de $dim(\mathfrak{g}) = 8$ y $dim([\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]) = 4$.

En esta sección, se encontrarán todas las álgebras 3-filiformes de dimensión 8 y con derivada mínima, [13].

Proposición 1.3.11.– *Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie 3-filiforme compleja con $dim(\mathfrak{g}) = 8$ y $dim([\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]) = 4$. Entonces existen dos subfamilias, no isomorfas entre sí, cuyas leyes vienen dadas, en una cierta base adaptada $\{X_0, X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, Y_1, Y_2\}$, por*

$$AL3F(4,-,0): \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1} & 1 \leq i \leq 4 \\ [X_1, X_2] = cX_4 + dX_5 \\ [X_1, X_3] = cX_5 \\ [X_1, Y_1] = a_{31}X_3 + a_{21}X_4 + a_{11}X_5 \\ [X_1, Y_2] = a_{22}X_4 + a_{12}X_5 \\ [X_2, Y_1] = a_{31}X_4 + a_{21}X_5 \\ [X_2, Y_2] = a_{22}X_5 \\ [X_3, Y_1] = a_{31}X_5 \\ [Y_1, Y_2] = bX_5 \end{cases}$$

$$AL3F(4,-,1): \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1} & 1 \leq i \leq 4 \\ [X_1, X_2] = cX_4 + dX_5 \\ [X_1, X_3] = cX_5 \\ [X_1, X_4] = eX_5 \\ [X_2, X_3] = -eX_5 \\ [X_1, Y_1] = a_{21}X_4 + a_{11}X_5 \\ [X_1, Y_2] = a_{22}X_4 + a_{12}X_5 \\ [X_2, Y_1] = a_{21}X_5 \\ [X_2, Y_2] = a_{22}X_5 \\ [Y_1, Y_2] = bX_5 \end{cases}$$

con $e \neq 0$

Demostración: Si $\mathfrak{g}$ está en las condiciones anteriores, su ley vendrá dada, salvo antisimetría, por

$$\begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1} & 1 \leq i \leq 4 \\ [X_1, X_2] = cX_4 + dX_5 & \\ [X_1, X_3] = cX_5 & \\ [X_1, X_4] = eX_5 & \\ [X_2, X_3] = -eX_5 & \\ [X_1, Y_i] = a_{3i}X_3 + a_{2i}X_4 + a_{1i}X_5 & i \in \{1,2\} \\ [X_2, Y_i] = a_{3i}X_4 + a_{2i}X_5 & i \in \{1,2\} \\ [X_3, Y_i] = a_{3i}X_5 & i \in \{1,2\} \\ [Y_1, Y_2] = bX_5 & \end{cases}$$

sujeta a las restricciones $\quad a_{3i}e = 0,\ 1 \leq i \leq 2.$

Siempre se puede suponer $a_{32} = 0$. En efecto, pues

– si $a_{32} \neq 0$ y $a_{31} = 0$, se hace el cambio de base

$$\begin{cases} X_i' = X_i & i \in \{0,1\} \\ Y_1' = Y_2 & \\ Y_2' = Y_1 & \end{cases}$$

– si $a_{32} \neq 0$ y $a_{31} \neq 0$, se hace el cambio de base

$$\begin{cases} X_i' = X_i & i \in \{0,1\} \\ Y_1' = Y_1 & \\ Y_2' = a_{31}Y_2 - a_{32}Y_1 & \end{cases}$$

Es fácil comprobar que la nulidad de e es invariante, ya que

$$dim(\mathcal{D}^2(\mathfrak{g})) = \begin{cases} 0 & \text{si } e = 0 \\ 1 & \text{si } e \neq 0 \end{cases}$$

De esta forma, se tienen las dos subfamilias del enunciado, una con $a_{32} = e = 0$ y la otra con $a_{31} = a_{32} = 0$ y $e \neq 0$. $\square$

Proposición 1.3.12.– *Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie 3-filiforme compleja con $dim(\mathfrak{g}) = 8$, $dim([\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]) = 4$ y $dim(\mathcal{D}^2(\mathfrak{g})) = 0$. Entonces existen dos subfamilias, no isomorfas entre sí, cuyas leyes vienen dadas, en una base adaptada $\{X_0, X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, Y_1, Y_2\}$, por*

$$AL3F(4,-,0).1: \begin{cases} [X_0,X_i]=X_{i+1} & 1\le i\le 4\\ [X_1,X_2]=cX_4+dX_5 \\ [X_1,X_3]=cX_5 \\ [X_1,Y_1]=a_{21}X_4+a_{11}X_5 \\ [X_1,Y_2]=a_{12}X_5 \\ [X_2,Y_1]=a_{21}X_5 \\ [Y_1,Y_2]=bX_5 \end{cases}$$

$$AL3F(4,-,0).2: \begin{cases} [X_0,X_i]=X_{i+1} & 1\le i\le 4\\ [X_1,X_2]=cX_4+dX_5 \\ [X_1,X_3]=cX_5 \\ [X_1,Y_1]=a_{31}X_3+a_{21}X_4+a_{11}X_5 \\ [X_1,Y_2]=a_{22}X_4+a_{12}X_5 \\ [X_2,Y_1]=a_{31}X_4+a_{21}X_5 \\ [X_2,Y_2]=a_{22}X_5 \\ [X_3,Y_1]=a_{31}X_5 \\ [Y_1,Y_2]=bX_5 \end{cases}$$

con $a_{31}\neq 0$.

Demostración: Si $\mathfrak{g}$ está en las hipótesis anteriores, su ley vendrá dada salvo antisimetría por:

$$\begin{cases} [X_0,X_i]=X_{i+1} & 1\le i\le 4\\ [X_1,X_2]=cX_4+dX_5 \\ [X_1,X_3]=cX_5 \\ [X_1,Y_1]=a_{31}X_3+a_{21}X_4+a_{11}X_5 \\ [X_1,Y_2]=a_{22}X_4+a_{12}X_5 \\ [X_2,Y_1]=a_{31}X_4+a_{21}X_5 \\ [X_2,Y_2]=a_{22}X_5 \\ [X_3,Y_1]=a_{31}X_5 \\ [Y_1,Y_2]=bX_5 \end{cases}$$

Utilizando cambios de bases genéricos, se va a probar que la nulidad de a_{31} es un invariante, de donde se siguen las dos subfamilias no isomorfas del enunciado, con la salvedad de que, en el caso en que $a_{31}=0$, siempre se puede suponer $a_{22}=0$ gracias al cambio de base

$$\begin{cases} X_0' = X_0 \\ X_1' = X_1 \\ Y_1' = Y_1 \\ Y_2' = a_{21}Y_2 - a_{22}Y_1 \end{cases}$$

para el caso $a_{21}a_{22} \neq 0$; si este producto fuese nulo bastaría, como máximo, con intercambiar los vectores Y_1 e Y_2.

En esta familia existen cuatro generadores X_0, X_1, Y_1, Y_2. Se van a efectuar algunos cálculos para demostrar que la nulidad de a_{31} es invariante; el resto de cálculos se harán en cada caso en concreto.

$X_0' = P_0X_0 + P_1X_1 + P_2X_2 + P_3X_3 + P_4X_4 + P_5X_5 + P_6Y_1 + P_7Y_2$

$X_1' = Q_0X_0 + Q_1X_1 + Q_2X_2 + Q_3X_3 + Q_4X_4 + Q_5X_5 + Q_6Y_1 + Q_7Y_2$

$X_2' = (P_0Q_1 - P_1Q_0)X_2 + [P_0Q_2 - P_2Q_0 + (P_1Q_6 - P_6Q_1)a_{31}]X_3 + [P_0Q_3 - P_3Q_0 + (P_1Q_2-P_2Q_1)c+(P_1Q_6-P_6Q_1)a_{21}+(P_1Q_7-P_7Q_1)a_{22}+(P_2Q_6-P_6Q_2)a_{31}]X_4+(\cdots)X_5$

$X_3' = P_0(P_0Q_1 - P_1Q_0)X_3 + [P_0(P_0Q_2 - P_2Q_0) + P_0(P_1Q_6 - P_6Q_1)a_{31} + (P_0Q_1 - P_1Q_0)(P_1c-P_6a_{31})]X_4+[P_0(P_0Q_3-P_3Q_0)+P_0(P_1Q_2-P_2Q_1)c+P_0(P_1Q_6-P_6Q_1)a_{21}+ P_0(P_1Q_7 - P_7Q_1)a_{22} + (P_0Q_1 - P_1Q_0)(P_1d - P_6a_{21} - P_7a_{22}) + (P_1c - P_6a_{31})[P_0Q_2 - P_2Q_0 + (P_1Q_6 - P_6Q_1)a_{21}] + P_0(P_2Q_6 - P_6Q_2)a_{31})]X_5$

$X_4' = P_0^2(P_0Q_1 - P_1Q_0)X_4 + P_0[P_0(P_0Q_2 - P_2Q_0) + P_0(P_1Q_6 - P_6Q_1)a_{31} + 2(P_0Q_1 - P_1Q_0)(P_1c - P_6a_{31})]X_5$

$X_5' = P_0^3(P_0Q_1 - P_1Q_0)X_5$

$Y_1' = R_0X_0 + R_1X_1 + R_2X_2 + R_3X_3 + R_4X_4 + R_5X_5 + R_6Y_1 + R_7Y_2$

$Y_2' = S_0X_0 + S_1X_1 + S_2X_2 + S_3X_3 + S_4X_4 + S_5X_5 + S_6Y_1 + S_7Y_2$

para no salirse de la familia hay que imponer que:

$[X_1', X_3'] = c'X_5' \Longrightarrow Q_0 = 0$

$[X_4', Y_1'] = 0 \Longrightarrow R_0 = 0$

$[X_0', Y_1'] = 0 \Longrightarrow R_1 = 0$

$[X_0', Y_1'] = 0 \Longrightarrow P_0R_2 + P_1R_6a_{31} = 0$

$[X_0', Y_1'] = 0 \Longrightarrow P_0R_3 + P_1R_2c - P_6R_2a_{31} + P_1R_6a_{21} + P_1R_7a_{22} + P_2R_6a_{31} = 0$

$[X_0', Y_1'] = 0 \Longrightarrow P_0R_4 + P_1R_2d + P_1R_3c - P_6R_2a_{21} - P_7R_2a_{22} - P_6R_3a_{31} + P_1R_6a_{11} + P_1R_7a_{12} + P_2R_6a_{21} + P_2R_7a_{22} + P_3R_6a_{31} + (P_6R_7 - P_7R_6)b = 0$

$[X_4', Y_2'] = 0 \Longrightarrow S_0 = 0$

$[X_0', Y_2'] = 0 \Longrightarrow S_1 = 0$

$[X_3', Y_2'] = 0 \Longrightarrow S_6a_{31} = 0$

$[X_0', Y_2'] = 0 \Longrightarrow S_2 = 0$

$[X_0', Y_2'] = 0 \Longrightarrow P_0S_3 + P_1S_6a_{21} + P_1S_7a_{22} = 0$

$[X_0', Y_2'] = 0 \Longrightarrow P_0S_4 + P_1S_3c - P_6S_3a_{31} + P_1S_6a_{11} + P_1S_7a_{12} + P_2S_6a_{21} + P_2S_7a_{22} + (P_6S_7 - P_7S_6)b = 0$

y para que sea cambio de base $\quad P_0Q_1(R_6S_7 - R_7S_6) \neq 0.$

Teniendo esto en cuenta, se tiene que:

$$a_{31}' = \frac{R_6a_{31}}{P_0^2}$$
$$a_{21}' = \frac{P_0R_6a_{21} - 2P_1R_6ca_{31} + 2P_6R_6a_{31}^2 + P_0R_7a_{22}}{P_0^4}$$

lo que demuestra que la nulidad de a_{31} es invariante, pues

- si $a_{31} = 0$, entonces $a_{31}' = 0$, sin importar la nulidad de R_6
- si $a_{31} \neq 0$, entonces $S_6 = 0 \Longrightarrow R_6 \neq 0$ y por tanto $a_{31}' \neq 0$. □

Proposición 1.3.13.– *Sea $\mathfrak{g}$ cualquier álgebra en $AL3F(4,-,0).1$. Entonces existen cuatro subfamilias, no isomorfas entre sí, cuyas leyes vienen dadas, en una cierta base adaptada $\{X_0, X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, Y_1, Y_2\}$, por*

$$AL3F(4,-,0).1.1 : \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1} & 1 \leq i \leq 4 \\ [X_1, X_2] = dX_5 \\ [X_1, Y_1] = a_{11}X_5 \\ [Y_1, Y_2] = bX_5 \end{cases}$$

$$AL3F(4,-,0).1.2: \begin{cases} [X_0,X_i]=X_{i+1} & 1\leq i\leq 4 \\ [X_1,Y_1]=a_{21}X_4+a_{11}X_5 \\ [X_1,Y_2]=a_{12}X_5 \\ [X_2,Y_1]=a_{21}X_5 \\ [Y_1,Y_2]=bX_5 \end{cases} \qquad con\ a_{21}\neq 0$$

$$AL3F(4,-,0).1.3: \begin{cases} [X_0,X_i]=X_{i+1} & 1\leq i\leq 4 \\ [X_1,X_2]=cX_4 \\ [X_1,X_3]=cX_5 \\ [X_1,Y_1]=a_{11}X_5 \\ [Y_1,Y_2]=bX_5 \end{cases} \qquad con\ c\neq 0$$

$$AL3F(4,-,0).1.4: \begin{cases} [X_0,X_i]=X_{i+1} & 1\leq i\leq 4 \\ [X_1,X_2]=cX_4 \\ [X_1,X_3]=cX_5 \\ [X_1,Y_1]=a_{21}X_4+a_{11}X_5 \\ [X_1,Y_2]=a_{12}X_5 \\ [X_2,Y_1]=a_{21}X_5 \\ [Y_1,Y_2]=bX_5 \end{cases} \qquad con\ ca_{21}\neq 0$$

Demostración: Si $\mathfrak{g}\in AL3F(4,-,0).1$, entonces su ley vendrá dada por

$$AL3F(4,-,0).1: \begin{cases} [X_0,X_i]=X_{i+1} & 1\leq i\leq 4 \\ [X_1,X_2]=cX_4+dX_5 \\ [X_1,X_3]=cX_5 \\ [X_1,Y_1]=a_{21}X_4+a_{11}X_5 \\ [X_1,Y_2]=a_{12}X_5 \\ [X_2,Y_1]=a_{21}X_5 \\ [Y_1,Y_2]=bX_5 \end{cases}$$

Un simple cálculo demuestra que la nulidad de c es un invariante, ya que éste condiciona la dimensión del centralizador de $\mathcal{C}^2(\mathfrak{g})$. pues se verifica que

$$dim\ Cent(\mathcal{C}^2(\mathfrak{g}))=\begin{cases} 7 & \text{si } c=0 \\ 6 & \text{si } c\neq 0 \end{cases}$$

En este caso, se tenía que $a_{31}=0$ y mediante un cambio de base siempre se podía suponer $a_{22}=0$. Si adaptamos los cambios de base hechos en la proposición 1.3.12 al caso $a_{31}=a_{22}=0$, es ya fácil comprobar que

$$a'_{21}=\frac{R_6}{P_0^3}a_{21}$$

con $P_0Q_1(R_6S_7-R_7S_6)\neq 0$. Para mantener $a'_{22}=0$, hay que imponer que $S_6a_{21}=0$. Para estudiar si la nulidad de a_{21} es o no invariante, hay que distinguir dos posibilidades:

- si $a_{21}=0\longrightarrow a'_{22}=0$ (no influye la nulidad de R_6)
- si $a_{21}\neq 0$, entonces $S_6=0$ y puesto que $P_0Q_1(R_6S_7-R_7S_6)\neq 0\Longrightarrow R_6\neq 0$

y en ambas se mantiene la nulidad de a_{21}. Tras estas consideraciones, se llega a las cuatro subfamilias con algunas excepciones, que se detallan a continuación, en cada una de ellas.

1) $(c,a_{21})=(0,0)$

Se llega a la familia $AL3F(4,-,0).1.1$, ya que siempre se puede suponer $a_{12}=0$ gracias al cambio de base

$$\begin{cases} X'_0=X_0\\ X'_1=X_1\\ Y'_1=Y_1\\ Y'_2=a_{11}Y_2-a_{12}Y_1\end{cases}$$

para el caso $a_{12}a_{11}\neq 0$; si este último fuese nulo, bastaría, como máximo, con intercambiar los vectores Y_1 e Y_2.

2) $(c,a_{21})=(0,a_{21})$ con $a_{21}\neq 0$

Tras el cambio de base

$$\begin{cases} X'_0=X_0\\ X'_1=a_{21}X_1+dY_1\\ Y'_1=Y_1\\ Y'_2=Y_2\end{cases}$$

siempre se puede suponer $d=0$, de donde se sigue el resultado.

3) $(c,a_{21})=(c,0)$ con $c\neq 0$

Mediante el cambio de base

$$\begin{cases} X_0' = X_0 + \dfrac{d}{2c^2} X_1 \\ X_1' = X_1 \\ Y_1' = Y_1 \\ Y_2' = Y_2 \end{cases}$$

se puede así suponer $d = 0$. Además, también se puede suponer $a_{12} = 0$, gracias al cambio de base

$$\begin{cases} X_0' = X_0 \\ X_1' = X_1 \\ Y_1' = Y_1 \\ Y_2' = a_{11}Y_2 - a_{12}Y_1 \end{cases}$$

para el caso $a_{12}a_{11} \neq 0$; si este último fuese nulo, bastaría, como máximo, con intercambiar los vectores Y_1 e Y_2.

4) (c, a_{21}) con $ca_{21} \neq 0$

En este caso, sin más que sustituir los parámetros y haciendo el mismo cambio de base que permitió suponer $d = 0$ en el caso 3), se llega a la familia $AL3F(4, -, 0).1.4$.
□

Teorema 1.3.14.– *Sea $\mathfrak{g}$ cualquier álgebra $AL3F(4, -, 0).1.1$. Entonces es isomorfa a algunas de las álgebras, no isomorfas entre sí, de leyes $\mu^j_{(5,1)} \oplus \mathbf{C}^2$, $1 \leq j \leq 2$, $\mu^k_{(5,1,1)} \oplus \mathbf{C}$, $19 \leq k \leq 20$ y $\mu^i_{(5,1,1,1)}$, $26 \leq i \leq 27$, dadas por*

$$\mu^{26}_{(5,1,1,1)} : \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1} & 1 \leq i \leq 4 \\ [Y_1, Y_2] = X_5 \end{cases}$$

$$\mu^{27}_{(5,1,1,1)} : \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1} & 1 \leq i \leq 4 \\ [X_1, X_2] = X_5 \\ [Y_1, Y_2] = X_5 \end{cases}$$

Demostración: Si $\mathfrak{g}$ está en las hipótesis anteriores, su ley vendrá dada, salvo antisimetría, por

$$\begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1} & 1 \leq i \leq 4 \\ [X_1, X_2] = dX_5 & \\ [X_1, Y_1] = a_{11}X_5 & \\ [Y_1, Y_2] = bX_5 & \end{cases}$$

Se demuestra que las nulidades de d y de b son invariantes. En efecto,

$$dim(\mathcal{C}ent(\mathcal{C}^1(\mathfrak{g}))) = \begin{cases} 7 & \text{si } d = 0 \\ \\ 6 & \text{si } d \neq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b = 0 \begin{cases} a_{11} = 0 & dim\ \mathcal{Z}(\mathfrak{g}) = 3 \\ \\ a_{11} \neq 0 & dim\ \mathcal{Z}(\mathfrak{g}) = 2 \end{cases} \\ \\ b \neq 0 \quad dim\ \mathcal{Z}(\mathfrak{g}) = 1 \end{cases}$$

Además, se observa que para el caso $b = 0$ la nulidad de a_{11} es un invariante, mientras que para $b \neq 0$ siempre se puede suponer $a_{11} = 0$ gracias al cambio de base

$$\begin{cases} X'_0 = X_0 \\ X'_1 = bX_1 + a_{11}Y_2 \\ Y'_1 = Y_1 \\ Y'_2 = Y_2 \end{cases}$$

Todo esto permite distinguir los diferentes casos, atendiendo a la configuración de los parámetros, tal como se ilustra en la siguiente tabla:

$$\begin{cases} d = 0 \begin{cases} b = 0 \begin{cases} a_{11} = 0 \\ \\ a_{11} \neq 0 \end{cases} \\ \\ b \neq 0 \longrightarrow a_{11} = 0 \end{cases} \\ \\ d \neq 0 \begin{cases} b = 0 \begin{cases} a_{11} = 0 \\ \\ a_{11} \neq 0 \end{cases} \\ \\ b \neq 0 \longrightarrow a_{11} = 0 \end{cases} \end{cases}$$

Caso 1: $(d, b, a_{11}) = (0, 0, 0)$, sin más que sustituir se obtiene $\mu^1_{(5,1)} \oplus \mathbf{C}^2$.

Caso 2: $(d, b, a_{11}) = (0, 0, a_{11})$, $a_{11} \neq 0$, se obtiene $\mu^{19}_{(5,1,1)} \oplus \mathbf{C}$, previo cambio de escala.

Caso 3: $(d, b, a_{11}) = (0, b, 0)$, $b \neq 0$
Mediante el cambio de escala

$$\begin{cases} X_0' = X_0 \\ X_1' = X_1 \\ Y_1' = \dfrac{1}{b} Y_1 \\ Y_2' = Y_2 \end{cases}$$

se llega a $\mu^{26}_{(5,1,1,1)}$.

Caso 4: $(d, b, a_{11}) = (d, 0, 0)$, $d \neq 0$, se obtiene $\mu^2_{(5,1)} \oplus \mathbf{C}^2$, previo cambio de escala.

Caso 5: $(d, b, a_{11}) = (d, 0, a_{11})$, $da_{11} \neq 0$, se obtiene $\mu^{20}_{(5,1,1)} \oplus \mathbf{C}$, previo cambio de escala.

Caso 6: $(d, b, a_{11}) = (d, b, 0)$, $db \neq 0$
Mediante el cambio de escala

$$\begin{cases} X_0' = X_0 \\ X_1' = \dfrac{1}{d} X_1 \\ Y_1' = \dfrac{1}{db} Y_1 \\ Y_2' = Y_2 \end{cases}$$

se llega a $\mu^{27}_{(5,1,1,1)}$. □

Teorema 1.3.15.– *Sea $\mathfrak{g}$ cualquier álgebra $AL3F(4, -, 0).1.2$. Entonces es isomorfa a alguna de las álgebras, no isomorfas entre sí, de leyes $\mu^j_{(5,1,1)} \oplus \mathbf{C}$, $21 \leq j \leq 22$ y $\mu^i_{(5,1,1,1)}$, $28 \leq i \leq 30$, dadas por*

$$\mu^{28}_{(5,1,1,1)} : \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1} & 1 \leq i \leq 4 \\ [X_1, Y_1] = X_4 \\ [X_2, Y_1] = X_5 \\ [Y_1, Y_2] = X_5 \end{cases}$$

$$\mu^{29}_{(5,1,1,1)}:\left\{\begin{array}{ll}[X_0,X_i]=X_{i+1} & 1\le i\le 4\\ [X_1,Y_1]=X_4 & \\ [X_1,Y_2]=X_5 & \\ [X_2,Y_1]=X_5 & \end{array}\right.$$

$$\mu^{30}_{(5,1,1,1)}:\left\{\begin{array}{ll}[X_0,X_i]=X_{i+1} & 1\le i\le 4\\ [X_1,Y_1]=X_4 & \\ [X_1,Y_2]=X_5 & \\ [X_2,Y_1]=X_5 & \\ [Y_1,Y_2]=X_5 & \end{array}\right.$$

Demostración: Si $\mathfrak{g}$ está en las hipótesis anteriores, su ley vendrá dada, salvo antisimetría, por

$$\left\{\begin{array}{ll}[X_0,X_i]=X_{i+1} & 1\le i\le 4\\ [X_1,Y_1]=a_{21}X_4+a_{11}X_5 & \\ [X_1,Y_2]=a_{12}X_5 & \\ [X_2,Y_1]=a_{21}X_5 & \\ [Y_1,Y_2]=bX_5 & \end{array}\right.$$

con $a_{21}\neq 0$.

Es fácil comprobar que la nulidad de a_{12} es un invariante. En efecto,

$$dim(Cent(CentC^1(\mathfrak{g})))=\left\{\begin{array}{ll}6 & \text{si } a_{12}=0\\ 4 & \text{si } a_{12}\neq 0\end{array}\right.$$

$*$ Si $a_{12}=0$, la nulidad de b es un invariante, pues

$$dim(\mathcal{Z}(\mathfrak{g}))=\left\{\begin{array}{ll}2 & \text{si } b=0\\ 1 & \text{si } b\neq 0\end{array}\right.$$

- Si $b=0$, la nulidad de a_{11} es un invariante; se adaptan los cambios hechos en la proposición 1.3.12 ($a_{31}=a_{22}=a_{12}=b=c=d=0$) y resulta que cualquier cambio de base admisible ha de ser uno de los siguientes:

$$X_0'=P_0X_0+P_1X_1+P_2X_2+P_3X_3+P_4X_4+P_5X_5+P_6Y_1+P_7Y_2$$

$$X_1'=Q_1X_1+Q_2X_2+Q_3X_3+Q_4X_4+Q_5X_5+Q_6Y_1+Q_7Y_2$$

$$X_2' = P_0Q_1X_2 + P_0Q_2X_3 + [P_0Q_3 + (P_1Q_6 - P_6Q_1)a_{21}]X_4 + (\cdots)X_5$$

$$X_3' = P_0^2Q_1X_3+P_0^2Q_2X_4+(P_0^2Q_3+P_0(P_1Q_6-P_6Q_1)a_{21}+(P_1Q_6-P_6Q_1)a_{21})X_5$$

$$X_4' = P_0^3Q_1X_4 + P_0^3Q_2X_5$$

$$X_5' = P_0^4Q_1X_5$$

$$Y_1' = R_3X_3 + R_4X_4 + R_5X_5 + R_6Y_1 + R_7Y_2$$

$$Y_2' = S_3X_3 + S_4X_4 + S_5X_5 + S_6Y_1 + S_7Y_2$$

y, para no salirse de la familia, hay que imponer que:

$$\begin{aligned} &P_0R_3 + P_1R_6a_{21} = 0\\ &P_0S_3 + P_1S_6a_{21} = 0\\ &P_0R_4 + P_1R_6a_{11} + P_2R_6a_{21} = 0\\ &P_0S_4 + P_1S_6a_{11} + P_2S_6a_{21} = 0 \end{aligned}$$

mientras que para que sea cambio de base

$$P_0Q_1(R_6S_7 - R_7S_6) \neq 0$$

resultando

$$a_{11}' = \frac{R_6a_{11}}{P_0^4}$$

Para mantener las nulidades de a_{22} y de a_{12} hay que imponer que $S_6 = 0$, pues $a_{21} \neq 0$. Por tanto, $R_6 \neq 0$ y la nulidad de a_{11} invariante.

Nota 1.3.16.– En realidad se trata de un caso en el que sólo aparecen álgebras escindidas, obteniéndose $\mu^{21}_{(5,1,1)}\oplus\mathbf{C}$ (si $a_{11} = 0$) y $\mu^{22}_{(5,1,1)}\oplus\mathbf{C}$ (si $a_{11} \neq 0$), previos cambios de escala.

- Si $b \neq 0$, mediante el cambio

$$\left\{\begin{array}{l} X_0' = X_0\\ X_1' = bX_1 + a_{11}Y_2\\ Y_1' = Y_1\\ Y_2' = Y_2 \end{array}\right.$$

se puede suponer $a_{11} = 0$ y $b = 1$.

$*$ Si $a_{12} \neq 0$, el cambio de base

$$\begin{cases} X_0' = X_0 \\ X_1' = X_1 \\ Y_1' = a_{12}Y_1 - a_{11}Y_2 \\ Y_2' = Y_2 \end{cases}$$

permite suponer $a_{11} = 0$. Además, la nulidad de b es un invariante, pues si se adaptan los cambios de base de la proposición 1.3.12, es fácil comprobar que si

$$Y_1' = R_3X_3 + R_4X_4 + R_5X_5 + R_6Y_1 + R_7Y_2$$

$$Y_2' = S_3X_3 + S_4X_4 + S_5X_5 + S_6Y_1 + S_7Y_2$$

con las restricciones

$$P_0R_3 + P_1R_6a_{21} = 0$$
$$P_0S_3 + P_1S_6a_{21} = 0$$
$$P_0R_4 + P_1R_7a_{12} + P_2R_6a_{21} = 0$$
$$P_0S_4 + P_1S_7a_{12} + P_2S_6a_{21} = 0$$

entonces

$$b' = \frac{R_6S_7 - R_7S_6}{P_0^4Q_1}b$$

con $P_0Q_1(R_6S_7 - R_7S_6) \neq 0$.

Se resumen, a continuación, los resultados anteriores en el siguiente esquema

$$\begin{cases} a_{12} = 0 \begin{cases} b = 0 \begin{cases} a_{11} = 0 \\ \\ a_{11} \neq 0 \end{cases} \\ \\ b = 1 \longrightarrow a_{11} = 0 \end{cases} \\ \\ a_{12} \neq 0 \begin{cases} b = 0 \longrightarrow a_{11} = 0 \\ \\ b \neq 0 \longrightarrow a_{11} = 0 \end{cases} \end{cases}$$

Atendiendo a esto, se tienen los siguientes casos

- Caso 1: $(a_{12}, b, a_{11}) = (0, 0, 0)$; se obtiene $\mu^{21}_{(5,1,1)} \oplus \mathbf{C}$.
- Caso 2: $(a_{12}, b, a_{11}) = (0, 0, a_{11})$, $a_{11} \neq 0$; se obtiene $\mu^{22}_{(5,1,1)} \oplus \mathbf{C}$.

- Caso 3: $(a_{12}, b, a_{11}) = (0, b, 0)$, $b = 1$

  Mediante el cambio de escala
$$\begin{cases} X_0' = X_0 \\ X_1' = X_1 \\ Y_1' = \dfrac{1}{a_{21}} Y_1 \\ Y_2' = a_{21} Y_2 \end{cases}$$
  se llega a $\mu^{28}_{(5,1,1,1)}$.

- Caso 4: $(a_{12}, b, a_{11}) = (a_{12}, 0, 0)$, $a_{12} \neq 0$

  Mediante el cambio de escala
$$\begin{cases} X_0' = X_0 \\ X_1' = X_1 \\ Y_1' = \dfrac{1}{a_{21}} Y_1 \\ Y_2' = \dfrac{1}{a_{12}} Y_2 \end{cases}$$
  se llega a $\mu^{29}_{(5,1,1,1)}$.

- Caso 5: $(a_{12}, b, a_{11}) = (a_{12}, b, 0)$, $a_{12} b \neq 0$

  Mediante el cambio de escala
$$\begin{cases} X_0' = X_0 \\ X_1' = \dfrac{b}{a_{12} a_{21}} X_1 \\ Y_1' = \dfrac{1}{a_{21}} Y_1 \\ Y_2' = \dfrac{1}{a_{12}} Y_2 \end{cases}$$
  se llega a $\mu^{30}_{(5,1,1,1)}$. □

Teorema 1.3.17.– *Sea* $\mathfrak{g}$ *cualquier álgebra* $AL3F(4, -, 0).1.3$. *Entonces es isomorfa a alguna de las álgebras, no isomorfas entre sí, de leyes* $\mu^3_{(5,1)} \oplus \mathbf{C}^2$, $\mu^{23}_{(5,1,1)} \oplus \mathbf{C}$ *y* $\mu^{31}_{(5,1,1,1)}$, *dada por*

$$\mu^{31}_{(5,1,1,1)} : \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1} \quad 1 \leq i \leq 4 \\ [X_1, X_2] = X_4 \\ [X_1, X_3] = X_5 \\ [Y_1, Y_2] = X_5 \end{cases}$$

Demostración: Si $\mathfrak{g}$ está en las hipótesis anteriores, su ley vendrá dada, salvo antisimetría, por

$$\begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1} & 1 \leq i \leq 4 \\ [X_1, X_2] = cX_4 \\ [X_1, X_3] = cX_5 \\ [X_1, Y_1] = a_{11}X_5 \\ [Y_1, Y_2] = bX_5 \end{cases}$$

Es fácil comprobar que la nulidad de b es un invariante. En efecto, pues

$$dim(\mathcal{Z}(\mathfrak{g})) = \begin{cases} 2 \text{ ó } 3 & \text{si } b = 0 \\ 1 & \text{si } b \neq 0 \end{cases}$$

- Si $b = 0$; la nulidad de a_{11} es un invariante, pues

$$dim(\mathcal{Z}(\mathfrak{g})) = \begin{cases} 3 & \text{si } a_{11} = 0 \\ 2 & \text{si } a_{11} \neq 0 \end{cases}$$

Nota 1.3.18.– En realidad se trata de álgebras escindidas, $\mu^3_{(5,1)} \oplus \mathbf{C}^2$ (si $a_{11} = 0$) y $\mu^{23}_{(5,1,1)} \oplus \mathbf{C}$ (si $a_{11} \neq 0$).

- Si $b \neq 0$; el cambio de base

$$\begin{cases} X'_0 = X_0 \\ X'_1 = bX_1 + a_{11}Y_2 \\ Y'_1 = Y_1 \\ Y'_2 = Y_2 \end{cases}$$

permite suponer $a_{11} = 0$ y $b = 1$.

En resumen,

$$\begin{cases} b = 0 \begin{cases} a_{11} = 0 \\ a_{11} \neq 0 \end{cases} \\ b = 1 \longrightarrow a_{11} = 0 \end{cases}$$

Atendiendo a la anterior configuración de los parámetros se distinguen los siguientes casos

- Caso 1: $(b, a_{11}) = (0, 0)$, se obtiene $\mu^3_{(5,1)} \oplus \mathbf{C}^2$.

- Caso 2: $(b, a_{11}) = (0, a_{11})$, $a_{11} \neq 0$, se obtiene $\mu^{23}_{(5,1,1)} \oplus \mathbf{C}$.
- Caso 3: $(b, a_{11}) = (b, 0)$, $b = 1$

  Mediante el cambio de escala

$$\begin{cases} X_0' = X_0 \\ X_1' = \dfrac{1}{c} X_1 \\ Y_1' = Y_1 \\ Y_2' = \dfrac{1}{cb} Y_2 \end{cases}$$

  se obtiene $\mu^{31}_{(5,1,1,1)}$. $\square$

Teorema 1.3.19.– *Sea* $\mathfrak{g}$ *cualquier álgebra* $AL3F(4, -, 0).1.4$. *Entonces es isomorfa a algunas de las álgebras, no isomorfas entre sí, de leyes* $\mu^{24}_{(5,1,1)} \oplus \mathbf{C}$ *y* $\mu^{i}_{(5,1,1,1)}$, $32 \leq i \leq 33$, *dadas por*

$$\mu^{32}_{(5,1,1,1)} : \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1} & 1 \leq i \leq 4 \\ [X_1, X_2] = X_4 \\ [X_1, X_3] = X_5 \\ [X_1, Y_1] = X_4 \\ [X_1, Y_2] = X_5 \\ [X_2, Y_1] = X_5 \end{cases}$$

$$\mu^{33}_{(5,1,1,1)} : \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1} & 1 \leq i \leq 4 \\ [X_1, X_2] = X_4 \\ [X_1, X_3] = X_5 \\ [X_1, Y_1] = X_4 \\ [X_2, Y_1] = X_5 \\ [Y_1, Y_2] = X_5 \end{cases}$$

Demostración: Si $\mathfrak{g}$ está en las hipótesis anteriores, su ley vendrá dada, salvo antisimetría, por

$$\begin{cases} [X_0,X_i]=X_{i+1} & 1\le i\le 4 \\ [X_1,X_2]=cX_4 \\ [X_1,X_3]=cX_5 \\ [X_1,Y_1]=a_{21}X_4+a_{11}X_5 \\ [X_1,Y_2]=a_{12}X_5 \\ [X_2,Y_1]=a_{21}X_5 \\ [Y_1,Y_2]=bX_5 \end{cases}$$

$ca_{21}\neq 0.$

Para clasificar esta familia de álgebras se efectuarán cambios de base genéricos. Modificando tanto como sea posible los cuatro generadores, calculando todos los productos corchetes (incluidos aquellos productos que son nulos) e imponiendo las condiciones necesarias, los cambios admisibles quedan reducidos, por razones análogas a los casos ya estudiados, a:

$$X_0'=P_0X_0+P_1X_1+P_2X_2+P_3X_3+P_4X_4+P_5X_5+P_6Y_1+P_7Y_2$$

$$X_1'=Q_1X_1+Q_2X_2+Q_3X_3+Q_4X_4+Q_5X_5+Q_6Y_1+Q_7Y_2$$

$$X_2'=P_0Q_1X_2+P_0Q_2X_3+[P_0Q_3+(P_1Q_2-P_2Q_1)c+(P_1Q_6-P_6Q_1)a_{21}]X_4+[P_0Q_4+(P_1Q_3-P_3Q_1)c+(P_1Q_6-P_6Q_1)a_{11}+(P_1Q_7-P_7Q_1)a_{12}+(P_2Q_6-P_6Q_2)a_{21}+(P_6Q_7-P_7Q_6)b]X_5$$

$$X_3'=P_0^2Q_1X_3+(P_0^2Q_2+P_0P_1Q_1)X_4+(\cdots)X_5$$

$$X_4'=P_0^3Q_1X_4+[P_0^3Q_2+2P_0^2P_1Q_1c]X_5$$

$$Y_1'=R_3X_3+R_4X_4+R_5X_5+R_6Y_1+R_7Y_2$$

$$Y_2'=S_4X_4+S_5X_5+S_7Y_2$$

con las condiciones

$$\begin{aligned} &P_0R_3+P_1R_6a_{21}=0\\ &P_0R_4+P_1R_3c+P_1R_6a_{11}+P_1R_7a_{12}+P_2R_6a_{21}+(P_6R_7-P_7R_6)b=0\\ &P_0S_4+P_1S_1a_{12}+P_6S_7b=0\\ &P_0Q_6a_{21}+2P_1Q_1c^2=0 \end{aligned}$$

evidentemente para que sean cambios de base $P_0Q_1R_6S_7\neq 0$. (Nota: $S_6=0$, pues hay que mantener $[X_2',Y_2']=0$).

Los parámetros resultan:

$$c' = \frac{Q_1 c}{P_0^2}$$

$$a'_{21} = \frac{R_6 a_{21}}{P_0^3}$$

$$a'_{11} = \frac{-3P_1Q_1R_6ca_{21} + P_0Q_1R_6a_{11} + P_0Q_1R_7a_{12} + P_0(Q_6R_7 - Q_7R_6)b}{P_0^5 Q_1}$$

$$a'_{12} = \frac{S_7(Q_1a_{12} + Q_6 b)}{P_0^4 Q_1}$$

$$b' = \frac{R_6 S_7 b}{P_0^4 Q_1}$$

Como $ca_{21} \neq 0$, siempre se puede suponer $a_{11} = 0$, eligiendo P_1. Además, si $b = 0$ la nulidad de a_{12} es invariante mientras si $b \neq 0$, se puede elegir $Q_6 = -\frac{Q_1 a_{12}}{b}$ y entonces $a'_{12} = 0$.

$$a_{11} = 0 \begin{cases} b = 0 \begin{cases} a_{12} = 0 \\ a_{12} \neq 0 \end{cases} \\ b \neq 0 \longrightarrow a_{12} = 0 \end{cases}$$

Atendiendo a esto, se tienen los siguientes casos

- Caso 1: $(b, a_{12}) = (0, 0)$; se obtiene $\mu^{24}_{(5,1,1)} \ominus \mathbf{C}$.
- Caso 2: $(b, a_{12}) = (0, a_{12})$, $a_{12} \neq 0$

  Mediante el cambio de escala

$$\begin{cases} X'_0 = X_0 \\ X'_1 = \frac{1}{c} X_1 \\ Y'_1 = \frac{1}{a_{21}} Y_1 \\ Y'_2 = \frac{1}{a_{12}} Y_2 \end{cases}$$

  se obtiene $\mu^{32}_{(5,1,1,1)}$.

- Caso 3: $(b, a_{12}) = (b, 0)$, $b \neq 0$
  Mediante el cambio de escala

$$\begin{cases} X_0' = X_0 \\ X_1' = \dfrac{1}{c} X_1 \\ Y_1' = \dfrac{1}{a_{21}} Y_1 \\ Y_2' = \dfrac{a_{21}}{cb} Y_2 \end{cases}$$

se obtiene $\mu^{33}_{(5,1,1,1)}$. □

Teorema 1.3.20.– *Sea $\mathfrak{g}$ cualquier álgebra $AL3F(4,-,0).2$. Entonces es isomorfa a alguna de las álgebras, no isomorfas entre sí, de leyes $\mu^j_{(5,1,1)} \oplus \mathbf{C}$, $25 \leq j \leq 27$ y $\mu^i_{(5,1,1,1)}$, $34 \leq i \leq 41$, dadas por*

$$\mu^{34}_{(5,1,1,1)} : \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1} & 1 \leq i \leq 4 \\ [X_1, Y_1] = X_3 \\ [X_2, Y_1] = X_4 \\ [X_3, Y_1] = X_5 \\ [Y_1, Y_2] = X_5 \end{cases}$$

$$\mu^{35}_{(5,1,1,1)} : \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1} & 1 \leq i \leq 4 \\ [X_1, Y_1] = X_3 \\ [X_1, Y_2] = X_5 \\ [X_2, Y_1] = X_4 \\ [X_3, Y_1] = X_5 \end{cases}$$

$$\mu^{36}_{(5,1,1,1)} : \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1} & 1 \leq i \leq 4 \\ [X_1, Y_1] = X_3 \\ [X_1, Y_2] = X_5 \\ [X_2, Y_1] = X_4 \\ [X_3, Y_1] = X_5 \\ [Y_1, Y_2] = X_5 \end{cases}$$

$$\mu^{37}_{(5,1,1,1)} : \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1} & 1 \leq i \leq 4 \\ [X_1, X_2] = X_5 \\ [X_1, Y_1] = X_3 \\ [X_2, Y_1] = X_4 \\ [X_3, Y_1] = X_5 \\ [Y_1, Y_2] = X_5 \end{cases}$$

$$\mu^{38}_{(5,1,1,1)} : \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1} & 1 \leq i \leq 4 \\ [X_1, X_2] = X_5 \\ [X_1, Y_1] = X_3 \\ [X_1, Y_2] = X_5 \\ [X_2, Y_1] = X_4 \\ [X_3, Y_1] = X_5 \end{cases}$$

$$\mu^{39}_{(5,1,1,1)} : \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1} & 1 \leq i \leq 4 \\ [X_1, X_2] = X_5 \\ [X_1, Y_1] = X_3 \\ [X_1, Y_2] = X_5 \\ [X_2, Y_1] = X_4 \\ [X_3, Y_1] = X_5 \\ [Y_1, Y_2] = X_5 \end{cases}$$

$$\mu^{40}_{(5,1,1,1)} : \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1} & 1 \leq i \leq 4 \\ [X_1, Y_1] = X_3 \\ [X_1, Y_2] = X_4 \\ [X_2, Y_1] = X_4 \\ [X_2, Y_2] = X_5 \\ [X_3, Y_1] = X_5 \end{cases}$$

$$\mu^{41}_{(5,1,1,1)} : \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i-1} & 1 \leq i \leq 4 \\ [X_1, Y_1] = X_3 \\ [X_1, Y_2] = X_4 \\ [X_2, Y_1] = X_4 \\ [X_2, Y_2] = X_5 \\ [X_3, Y_1] = X_5 \\ [Y_1, Y_2] = X_5 \end{cases}$$

Demostración: Si $\mathfrak{g}$ está en las hipótesis anteriores, su ley vendrá dada, salvo antisimetría, por

$$\begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1} & 1 \leq i \leq 4 \\ [X_1, X_2] = cX_4 + dX_5 \\ [X_1, X_3] = cX_5 \\ [X_1, Y_1] = a_{31}X_3 + a_{21}X_4 + a_{11}X_5 \\ [X_1, Y_2] = a_{22}X_4 + a_{12}X_5 \\ [X_2, Y_1] = a_{31}X_4 + a_{21}X_5 \\ [X_2, Y_2] = a_{22}X_5 \\ [X_3, Y_1] = a_{31}X_5 \\ [Y_1, Y_2] = bX_5 \end{cases}$$

con $a_{31} \neq 0$.

Se observa que el cambio de base

$$\begin{cases} X_0' = X_0 \\ X_1' = a_{31}X_1 + cY_1 \\ Y_1' = Y_1 \\ Y_2' = Y_2 \end{cases}$$

permite suponer $c = 0$.

Para clasificar esta familia de álgebras se efectuarán cambios de base genéricos. Modificando tanto como sea posible los cuatro generadores, calculando todos los productos corchetes (incluidos aquellos productos que son nulos) e imponiendo las condiciones necesarias, los cambios admisibles quedan reducidos, por razones análogas a los casos ya estudiados, a:

$$X_0' = P_0X_0 + P_1X_1 + P_2X_2 + P_3X_3 + P_4X_4 + P_5X_5 + P_6Y_1 + P_7Y_2$$

$$X_1' = Q_1X_1 + Q_2X_2 + Q_3X_3 + Q_4X_4 + Q_5X_5 + Q_7Y_2$$

$$X_2' = P_0Q_1X_2 + [P_0Q_2 + (P_1Q_6 - P_6Q_1)a_{31}]X_3 + [P_0Q_3 + (P_1Q_6 - P_6Q_1)a_{21} + (P_1Q_7 - P_7Q_1)a_{22} + (P_2Q_6 - P_6Q_2)a_{31}]X_4 + (\cdots)X_5$$

$$X_3' = P_0^2Q_1X_3 + [P_0^2Q_2 + P_0(P_1Q_6 - P_6Q_1)a_{31} - P_0P_6Q_1a_{31}]X_4 + [P_0[P_0Q_3 + (P_1Q_6 - P_6Q_1)a_{21} + (P_1Q_7 - P_7Q_1)a_{22} + (P_2Q_6 - P_6Q_2)a_{31}] - P_0Q_1(P_1d - P_6a_{21} - P_7a_{22}) - P_6[P_0Q_2 + (P_1Q_6 - P_6Q_1)a_{31}]a_{31}]X_5$$

$$X_4' = P_0^3Q_1X_4 + (P_0^3Q_2 + P_0^2P_1Q_6a_{31} - 3P_0^2P_6Q_1a_{31})X_5$$

$$X_5' = P_0^4Q_1X_5$$

$$Y_1' = R_2X_2 + R_3X_3 + R_4X_4 + R_5X_5 + R_6Y_1 + R_7Y_2$$
$$Y_2' = S_3X_3 + S_4X_4 + S_5X_5 + S_7Y_2$$

con las condiciones

$$P_0R_2 + P_1R_6a_{31} = 0$$

$$P_0R_3 + P_1R_6a_{21} + P_1R_7a_{22} + P_2R_6a_{31} - P_6R_2a_{31} = 0$$

$$P_0S_3 + P_1S_7a_{22} = 0$$

$$P_0R_4 + P_1R_2d + P_1R_6a_{11} + P_1R_7a_{12} + P_2R_6a_{21} - P_6R_2a_{21} + P_2R_7a_{22} - P_7R_2a22$$
$$+(P_6R_7 - P_7R_6)b - P_6R_3a_{31} + P_3R_6a_{31} = 0$$

$$P_0S_4 + P_1S_7a_{12} + P_2S_7a_{22} - P_6S_3a_{31} + P_6S_7b = 0$$

y para que sean cambios de base $P_0Q_1R_6S_7 \neq 0$.

Nota: $Q_6 = 0$, para mantener $c' = 0$.

Los parámetros quedan:

$$d' = \frac{Q_1d - Q_7a_{22}}{P_0^3}$$

$$a'_{21} = \frac{2P_6R_6a_{31}^2 + P_0(R_6a_{21} + R_7a_{22})}{P_0^3Q_1}$$

$$a'_{22} = \frac{S_7a_{22}}{P_0^3}$$

$$a'_{12} = \frac{S_7(P_0a_{12} + 3P_6a_{22}a_{31})}{P_0^5}$$

$$b' = \frac{R_6S_7}{P_0^4Q_1}b$$

Siempre se puede elegir P_6 tal que $a'_{21} = 0$ (ya que $a_{31} \neq 0$). Además, resultan invariantes las nulidades de a_{22} y b. Cuando $a_{22} = 0$ resultan invariantes las nulidades de d y a_{12} y se puede elegir P_6 tal que $a'_{21} = 0$ (ya que $a_{31} \neq 0$). Cuando $a_{22} \neq 0$ se pueden elegir Q_7, P_6 y R_7 tales que sean nulos d', a'_{12} y a'_{21}, respectivamente. La situación se ilustra en el esquema siguiente donde. en cada situación se calcula a'_{11}.

$$
\begin{cases}
a_{22}=0 \begin{cases}
d=0 \begin{cases}
a_{12}=0 \begin{cases}
(1)\ b=0 \longrightarrow a_{21}=0 \begin{cases} a_{11}=0 \\ a_{11}\neq 0 \end{cases} \\
(2)\ b\neq 0 \longrightarrow a_{21}=a_{11}=0
\end{cases} \\
a_{12}\neq 0 \begin{cases}
(3)\ b=0 \longrightarrow a_{21}=a_{11}=0 \\
(4)\ b\neq 0 \longrightarrow a_{21}=a_{11}=0
\end{cases}
\end{cases} \\
d\neq 0 \begin{cases}
a_{12}=0 \begin{cases}
(5)\ b=0 \longrightarrow a_{21}=a_{11}=0 \\
(6)\ b\neq 0 \longrightarrow a_{21}=a_{11}=0
\end{cases} \\
a_{12}\neq 0 \begin{cases}
(7)\ b=0 \longrightarrow a_{21}=a_{11}=0 \\
(8)\ b\neq 0 \longrightarrow a_{21}=a_{11}=0
\end{cases}
\end{cases}
\end{cases} \\
a_{22}\neq 0 \longrightarrow d=a_{12}=a_{21}=0\ (9);\ a_{11}=0 \begin{cases} b=0 \\ b\neq 0 \end{cases}
\end{cases}
$$

Los casos a considerar son los que se han señalado como (1), (2), (3), (4), (5), (6), (7), (8), y (9).

(1) Tomando $P_6 = -\dfrac{P_0 a_{21}}{2a_{31}^2}$ se consigue $a'_{21} = 0$. Si se vuelven a efectuar ahora los cambios de base resulta $a'_{11} = \dfrac{R_6 a_{11}}{P_0^4}$, con lo que la nulidad de a_{11} invariante.

(2) Eligiendo P_6 como en el caso anterior se consigue $a'_{21} = 0$ y el cambio dado por

$$
\begin{cases}
X'_0 = X_0 \\
X'_1 = bX_1 + a_{11}Y_2 \\
Y'_1 = Y_1 \\
Y'_2 = Y_2
\end{cases}
$$

permite suponer $a_{11} = 0$.

(3) Al igual que en los casos anteriores se puede suponer $a'_{21} = 0$, eligiendo adecuadamente P_6 y el cambio dado por

$$\begin{cases} X'_0 = X_0 \\ X'_1 = X_1 \\ Y'_1 = a_{12}Y_1 - a_{11}Y_2 \\ Y'_2 = Y_2 \end{cases}$$

permite suponer $a_{11} = 0$.

(4) De modo análogo se puede hacer $a'_{11} = a'_{21} = 0$.

(5) Tomando P_6 como en casos anteriores se obtiene que $a'_{21} = 0$ y el cambio de base dado por

$$\begin{cases} X'_0 = X_0 + \dfrac{a_{11}}{2da_{31}}X_1 \\ X'_1 = X_1 \\ Y'_1 = Y_1 - \dfrac{a_{11}}{2d}X_2 - \dfrac{a_{11}^2}{4da_{31}}X_4 \\ Y'_2 = Y_2 \end{cases}$$

permite suponer $a_{11} = 0$.

(6) Análogo al caso (5).

(7) Tomando P_6 como antes se consigue $a'_{21} = 0$ y el cambio dado por

$$\begin{cases} X'_0 = X_0 \\ X'_1 = X_1 \\ Y'_1 = a_{12}Y_1 - a_{11}Y_2 \\ Y'_2 = Y_2 \end{cases}$$

permite suponer $a_{11} = 0$.

(8) Análogo al caso (7).

(9) Eligiendo $Q_7 = \dfrac{Q_1 d}{a_{22}}$ se puede suponer $d = 0$ y eligiendo R_7 se tiene $a'_{21} = 0$. Si se elige ahora $P_6 = -\dfrac{P_0 a_{12}}{3a_{22}a_{31}}$ se tiene $a'_{12} = 0$ y el cambio de base dado por

$$\begin{cases} X'_0 = X_0 - \dfrac{a_{11}}{2da_{31}}Y_2 \\ X'_1 = X_1 \\ Y'_1 = Y_1 - \dfrac{a_{11}}{2d}X_2 - \dfrac{a_{11}b}{2a_{22}a_{31}}X_4 \\ Y'_2 = Y_2 \end{cases}$$

permite suponer $a_{11} = 0$.

Teniendo en cuenta esto, es laborioso pero trivial ver que las álgebras que a continuación se obtienen son no isomorfas entre sí. Se consideran los siguientes casos:

Caso 1: $a_{22} = d = a_{12} = b = a_{21} = a_{11} = 0$, se obtiene $\mu^{25}_{(5,1,1)} \oplus \mathbf{C}$, previo cambio de escala.

Caso 2: $a_{22} = d = a_{12} = b = a_{21} = 0$, $a_{11} \neq 0$, se obtiene $\mu^{26}_{(5,1,1)} \oplus \mathbf{C}$, previo cambio de escala.

Caso 3: $a_{22} = d = a_{12} = a_{21} = a_{11} = 0$, $b \neq 0$.
Mediante el cambio de escala

$$\begin{cases} X'_i = X_i, \quad 1 \leq i \leq 2 \\ Y'_1 = \dfrac{1}{a_{31}} Y_1 \\ Y'_2 = \dfrac{a_{31}}{b} Y_2 \end{cases}$$

se llega a $\mu^{34}_{(5,1,1,1)}$.

Caso 4: $a_{22} = d = b = a_{21} = a_{11} = 0$, $a_{12} \neq 0$.
Mediante el cambio de escala

$$\begin{cases} X'_i = X_i, \quad 1 \leq i \leq 2 \\ Y'_1 = \dfrac{1}{a_{31}} Y_1 \\ Y'_2 = \dfrac{1}{a_{12}} Y_2 \end{cases}$$

se llega a $\mu^{35}_{(5,1,1,1)}$.

Caso 5: $a_{22} = d = a_{21} = a_{11} = 0$, $a_{12} b \neq 0$.
Mediante el cambio de escala

$$\begin{cases} X'_0 = X_0 \\ X'_1 = \dfrac{b}{a_{31} a_{12}} X_1 \\ Y'_1 = \dfrac{1}{a_{31}} Y_1 \\ Y'_2 = \dfrac{1}{a_{12}} Y_2 \end{cases}$$

se llega a $\mu^{36}_{(5,1,1,1)}$.

Caso 6: $a_{22} = a_{12} = b = a_{21} = a_{11} = 0$, $d \neq 0$, se obtiene $\mu^{27}_{(5,1,1)} \oplus \mathbf{C}$, previo cambio de escala.

Caso 7: $a_{22} = a_{12} = a_{21} = a_{11} = 0$, $db \neq 0$.
Mediante el cambio de escala

$$\begin{cases} X_0' = X_0 \\ X_1' = \dfrac{1}{d} X_1 \\ Y_1' = \dfrac{1}{a_{31}} Y_1 \\ Y_2' = \dfrac{a_{31}}{db} Y_2 \end{cases}$$

se llega a $\mu^{37}_{(5,1,1,1)}$.

Caso 8: $a_{22} = b = a_{21} = a_{11} = 0$, $da_{12} \neq 0$.
Mediante el cambio de escala

$$\begin{cases} X_0' = X_0 \\ X_1' = \dfrac{1}{d} X_1 \\ Y_1' = \dfrac{1}{a_{31}} Y_1 \\ Y_2' = \dfrac{1}{a_{12}} Y_2 \end{cases}$$

se llega a $\mu^{38}_{(5,1,1,1)}$.

Caso 9: $a_{22} = a_{21} = a_{11} = 0$, $da_{12}b \neq 0$.
Mediante el cambio de escala

$$\begin{cases} X_0' = \dfrac{db}{a_{31}a_{12}} X_0 \\ X_1' = \dfrac{d^2b^3}{a_{31}^3 a_{12}^3} X_1 \\ Y_1' = \dfrac{d^2b^2}{a_{31}^3 a_{12}^2} Y_1 \\ Y_2' = \dfrac{d^4b^4}{a_{31}^4 a_{12}^5} Y_2 \end{cases}$$

se llega a $\mu^{39}_{(5,1,1,1)}$.

Caso 10: $d = a_{12} = b = a_{21} = a_{11} = 0$, $a_{22} \neq 0$.

Mediante el cambio de escala

$$\begin{cases} X_i' = X_i, \quad 0 \leq i \leq 1 \\ Y_1' = \dfrac{1}{a_{31}} Y_1 \\ Y_2' = \dfrac{1}{a_{22}} Y_2 \end{cases}$$

se llega a $\mu^{40}_{(5,1,1,1)}$.

<u>Caso 11</u>: $d = a_{12} = a_{21} = a_{11} = 0$, $a_{22}b \neq 0$.
Mediante el cambio de escala

$$\begin{cases} X_0' = X_0 \\ X_1' = \dfrac{b}{a_{22}a_{31}} X_1 \\ Y_1' = \dfrac{1}{a_{31}} Y_1 \\ Y_2' = \dfrac{1}{a_{22}} Y_2 \end{cases}$$

se llega a $\mu^{41}_{(5,1,1,1)}$. □

Proposición 1.3.21.– *Sea* $\mathfrak{g}$ *cualquier álgebra* $AL3F(4,-,1)$. *Entonces existen dos subfamilias, no isomorfas entre sí, cuyas leyes vienen dadas en una base adaptada* $\{X_0, X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, Y_1, Y_2\}$ *por*

$$AL3F(4,-,1).1 : \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1} \qquad 1 \leq i \leq 4 \\ [X_1, X_2] = cX_4 \\ [X_1, X_3] = cX_5 \\ [X_1, X_4] = eX_5 \\ [X_2, X_3] = -eX_5 \\ [X_1, Y_1] = a_{21}X_4 + a_{11}X_5 \\ [X_1, Y_2] = a_{22}X_4 + a_{12}X_5 \\ [X_2, Y_1] = a_{21}X_5 \\ [X_2, Y_2] = a_{22}X_5 \end{cases}$$

con $e \neq 0$

$$AL3F(4,-,1).2:\begin{cases}[X_0,X_i]=X_{i+1} & 1\leq i\leq 4\\ [X_1,X_2]=cX_4\\ [X_1,X_3]=cX_5\\ [X_1,X_4]=eX_5\\ [X_2,X_3]=-eX_5\\ [X_1,Y_1]=a_{21}X_4+a_{11}X_5\\ [X_1,Y_2]=a_{22}X_4+a_{12}X_5\\ [X_2,Y_1]=a_{21}X_5\\ [X_2,Y_2]=a_{22}X_5\\ [Y_1,Y_2]=bX_5\end{cases}$$

con $be\neq 0$

Demostración: Si $\mathfrak{g}$ está en las condiciones anteriores, su ley vendrá dada por

$$\begin{cases}[X_0,X_i]=X_{i+1} & 1\leq i\leq 4\\ [X_1,X_2]=cX_4+dX_5\\ [X_1,X_3]=cX_5\\ [X_1,X_4]=eX_5\\ [X_2,X_3]=-eX_5\\ [X_1,Y_1]=a_{21}X_4+a_{11}X_5\\ [X_1,Y_2]=a_{22}X_4+a_{12}X_5\\ [X_2,Y_1]=a_{21}X_5\\ [X_2,Y_2]=a_{22}X_5\\ [Y_1,Y_2]=bX_5\end{cases}$$

con $e\neq 0$.
El cambio de base dado por

$$\begin{cases}X_0'=X_0\\ X_1'=X_1-\dfrac{d}{2e}X_3\\ Y_1'=Y_1\\ Y_2'=Y_2\end{cases}$$

permite suponer $d=0$, y, además, la nulidad de b es invariante, pues

$$dim(\mathcal{C}ent(\mathcal{C}ent(\mathcal{C}^2(\mathfrak{g}))))=\begin{cases}5 & \text{si } b=0\\ 3 & \text{si } b\neq 0\end{cases}$$

obteniéndose así las dos subfamilias indicadas. □

Proposición 1.3.22.– *Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie 3-filiforme con $dim(\mathfrak{g}) = 8$ y en las condiciones de la familia $AL3F(4,-,1).1$. Entonces, existen tres subfamilias, no isomorfas entre sí, cuyas leyes vienen dadas, en una cierta base adaptada $\{X_0, X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, Y_1, Y_2\}$, por*

$$AL3F(4,-,1).1.1 : \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1} & 1 \leq i \leq 4 \\ [X_1, X_2] = cX_4 \\ [X_1, X_3] = cX_5 \\ [X_1, X_4] = eX_5 \\ [X_2, X_3] = -eX_5 \end{cases}$$
$$con\ e \neq 0$$

$$AL3F(4,-,1).1.2 : \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1} & 1 \leq i \leq 4 \\ [X_1, X_2] = cX_4 \\ [X_1, X_3] = cX_5 \\ [X_1, X_4] = eX_5 \\ [X_2, X_3] = -eX_5 \\ [X_1, Y_1] = a_{21}X_4 + a_{11}X_5 \\ [X_1, Y_2] = a_{22}X_4 + a_{12}X_5 \\ [X_2, Y_1] = a_{21}X_5 \\ [X_2, Y_2] = a_{22}X_5 \end{cases}$$
$$con\ e \neq 0,$$
$$a_{22}a_{11} - a_{21}a_{12} = 0, \ \ existe\ a_{ij} \neq 0$$

$$AL3F(4,-,1).1.3 : \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1} & 1 \leq i \leq 4 \\ [X_1, X_2] = cX_4 \\ [X_1, X_3] = cX_5 \\ [X_1, X_4] = eX_5 \\ [X_2, X_3] = -eX_5 \\ [X_1, Y_1] = a_{21}X_4 + a_{11}X_5 \\ [X_1, Y_2] = a_{22}X_4 + a_{12}X_5 \\ [X_2, Y_1] = a_{21}X_5 \\ [X_2, Y_2] = a_{22}X_5 \end{cases}$$
$$con\ e(a_{22}a_{11} - a_{21}a_{12}) \neq 0$$

Demostración: Si $\mathfrak{g}$ está en las hipótesis de anteriores, su ley vendrá dada, salvo antisimetría, por

$$\begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1} & 1 \leq i \leq 4 \\ [X_1, X_2] = cX_4 \\ [X_1, X_3] = cX_5 \\ [X_1, X_4] = eX_5 \\ [X_2, X_3] = -eX_5 \\ [X_1, Y_1] = a_{21}X_4 + a_{11}X_5 \\ [X_1, Y_2] = a_{22}X_4 + a_{12}X_5 \\ [X_2, Y_1] = a_{21}X_5 \\ [X_2, Y_2] = a_{22}X_5 \end{cases}$$

$e \neq 0.$

Es fácil comprobar que:

$$dim(\mathcal{Z}(\mathfrak{g})) = \begin{cases} 3 & \text{si } rango \begin{pmatrix} a_{22} & a_{12} \\ a_{21} & a_{11} \end{pmatrix} = 0 \\ 2 & \text{si } rango \begin{pmatrix} a_{22} & a_{12} \\ a_{21} & a_{11} \end{pmatrix} = 1 \\ 1 & \text{si } rango \begin{pmatrix} a_{22} & a_{12} \\ a_{21} & a_{11} \end{pmatrix} = 2 \end{cases}$$

y se obtienen las tres subfamilias. □

Teorema 1.3.23.– *Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie 3-filiforme de $dim(\mathfrak{g}) = 8$ y en las condiciones de la familia $AL3F(4, -, 1).1.1$. Entonces es isomorfa a algunas de las dos álgebras, no isomorfas entre sí, de leyes $\mu^4_{(5,1)} \ominus \mathbf{C}^2$ y $\mu^5_{(5,1)} \oplus \mathbf{C}^2$, ambas escindidas.*

Demostración: Si $\mathfrak{g}$ está en las hipótesis de la proposición, su ley vendrá dada, salvo antisimetría, por

$$\begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1} & 1 \leq i \leq 4 \\ [X_1, X_2] = cX_4 \\ [X_1, X_3] = cX_5 \\ [X_1, X_4] = eX_5 \\ [X_2, X_3] = -eX_5 \end{cases}$$

con $e \neq 0.$

Esta familia corresponde a una suma directa de $\mathbf{C}^2$ con las álgebras de leyes $\mu^4_{(5,1)}$ y $\mu^5_{(5,1)}$ (véase apéndice A, pág. 184 a 185). □

Teorema 1.3.24.– *Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie 3-filiforme compleja con $dim(\mathfrak{g}) = 8$ y en las condiciones de la familia $AL3F(4,-,1).1.2$. Entonces es isomorfa a alguna de las álgebras, no isomorfas entre sí, de leyes $\mu^i_{(5,1,1)} \oplus \mathbf{C}$, $28 \leq i \leq 33$, todas escindidas.*

Demostración: Teniendo en cuenta que $dim(\mathcal{Z}(\mathfrak{g})) = 2$, se puede suponer siempre que $Y_2 \in \mathcal{Z}(\mathfrak{g})$. En efecto, ya que

- si $Y_1 \in \mathcal{Z}(\mathfrak{g})$ mediante el cambio $Y_1' = Y_2$, $Y_2' = Y_1$, se tiene que $Y_2' \in \mathcal{Z}(\mathfrak{g})$,
- si $\alpha Y_1 + \beta Y_2 \in \mathcal{Z}(\mathfrak{g})$ con $\alpha\beta \neq 0$, mediante el cambio $Y_1' = Y_1$, $Y_2' = \alpha Y_1 + \beta Y_2$, se tiene que $Y_2' \in \mathcal{Z}(\mathfrak{g})$.

Así pues, siempre se puede suponer $a_{22} = a_{12} = 0$. Luego, si $\mathfrak{g}$ está en las hipótesis de la proposición, su ley se podrá expresar como:

$$\begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1} & 1 \leq i \leq 4 \\ [X_1, X_2] = cX_4 & \\ [X_1, X_3] = cX_5 & \\ [X_1, X_4] = eX_5 & \\ [X_2, X_3] = -eX_5 & \\ [X_1, Y_1] = a_{21}X_4 + a_{11}X_5 & \\ [X_2, Y_1] = a_{21}X_5 & \end{cases}$$

con $e \neq 0$ y $(a_{11}, a_{21}) \neq (0,0)$.

Corresponden a la suma directa de $\mathbf{C}$ con las álgebras de leyes $\mu^i_{(5,1,1)}$, $28 \leq i \leq 33$ (véase apéndice A, pág. 204 a 209). □

Teorema 1.3.25.– *Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie 3-filiforme compleja con $dim(\mathfrak{g}) = 8$ y en las condiciones de la familia $AL3F(4,-,1).1.3$. Entonces es isomorfa a alguna de las álgebras, no isomorfas entre sí, de leyes $\mu^i_{(5,1,1,1)}$, $42 \leq i \leq 43$, dadas por*

$$\mu^{42}_{(5,1,1,1)} : \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1} & 1 \leq i \leq 4 \\ [X_1, X_4] = X_5 & \\ [X_2, X_3] = -X_5 & \\ [X_1, Y_1] = X_4 & \\ [X_1, Y_2] = X_5 & \\ [X_2, Y_1] = X_5 & \end{cases}$$

$$\mu^{43}_{(5,1,1,1)}: \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1} & 1 \leq i \leq 4 \\ [X_1, X_2] = X_4 \\ [X_1, X_3] = X_5 \\ [X_1, X_4] = X_5 \\ [X_2, X_3] = -X_5 \\ [X_1, Y_1] = X_4 \\ [X_1, Y_2] = X_5 \\ [X_2, Y_1] = X_5 \end{cases}$$

Demostración: Si $\mathfrak{g}$ está en las hipótesis de la proposición, su ley vendrá dada, salvo antisimetría, por

$$\begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1} & 1 \leq i \leq 4 \\ [X_1, X_2] = cX_4 \\ [X_1, X_3] = cX_5 \\ [X_1, X_4] = eX_5 \\ [X_2, X_3] = -eX_5 \\ [X_1, Y_1] = a_{21}X_4 + a_{11}X_5 \\ [X_1, Y_2] = a_{22}X_4 + a_{12}X_5 \\ [X_2, Y_1] = a_{21}X_5 \\ [X_2, Y_2] = a_{22}X_5 \end{cases}$$

$$e(a_{22}a_{11} - a_{21}a_{12}) \neq 0.$$

Siempre se puede suponer $a_{21} \neq 0$ pues, en caso contrario, utilizando que $a_{22}a_{11} - a_{21}a_{12} \neq 0$, y que a_{22} tiene que ser no nulo, bastaría intercambiar los vectores Y_1 e Y_2.

Además, siempre se puede considerar que $a_{22} = 0$ y $a_{12} \neq 0$ pues, si $a_{22} \neq 0$, mediante el cambio de base

$$\begin{cases} Y_1' = Y_1 \\ Y_2' = -a_{21}Y_2 + a_{22}Y_1 \end{cases}$$

se podría suponer $a_{22} = 0$ y, aplicando la condición de determinante, $a_{12} \neq 0$. Sustituyendo, la familia queda:

$$\begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1} & 1 \leq i \leq 4 \\ [X_1, X_2] = cX_4 & \\ [X_1, X_3] = cX_5 & \\ [X_1, X_4] = eX_5 & \\ [X_2, X_3] = -eX_5 & \\ [X_1, Y_1] = a_{21}X_4 + a_{11}X_5 & \\ [X_1, Y_2] = a_{12}X_5 & \\ [X_2, Y_1] = a_{21}X_5 & \end{cases}$$

$ea_{21}a_{12} \neq 0$.

Además, mediante el cambio de base

$$\begin{cases} Y_1' = -a_{12}Y_1 + a_{11}Y_2 \\ Y_2' = Y_2 \end{cases}$$

se puede suponer siempre $a_{11} = 0$. Finalmente, la nulidad de c es invariante, ya que si $\mathfrak{g}^* = \mathfrak{g}/\mathcal{Z}(\mathfrak{g})$ se verifica que

$$dim(\mathcal{C}ent(\mathcal{C}^1(\mathfrak{g}^*))) = \begin{cases} 4 & \text{si } c = 0 \\ 3 & \text{si } c \neq 0 \end{cases}$$

<u>Caso 1</u>: $c = 0$
Mediante el cambio de escala

$$\begin{cases} X_0' = X_0 \\ X_1' = \dfrac{1}{e}X_1 \\ Y_1' = \dfrac{1}{a_{21}}Y_1 \\ Y_2' = \dfrac{1}{a_{12}}Y_2 \end{cases}$$

se obtiene $\mu^{42}_{(5,1,1,1)}$.

<u>Caso 2</u>: $c \neq 0$
Mediante el cambio de escala

$$\begin{cases} X_0' = \dfrac{c}{e}X_0 \\ X_1' = \dfrac{c}{e^2}X_1 \\ Y_1' = \dfrac{c^3}{e^3a_{21}}Y_1 \\ Y_2' = \dfrac{c^4}{e^4a_{12}}Y_2 \end{cases}$$

se obtiene $\mu^{43}_{(5,1,1,1)}$. □

Teorema 1.3.26.– *Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie 3-filiforme compleja con $dim(\mathfrak{g}) = 8$ y en las condiciones de la familia $AL3F(4,-,1).2$. Entonces es isomorfa alguna de las álgebras, no isomorfas entre sí, de leyes $\mu^{i}_{(5,1,1,1)}$, $44 \leq i \leq 47$, dadas por*

$$\mu^{44}_{(5,1,1,1)} : \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1} & 1 \leq i \leq 4 \\ [X_1, X_4] = X_5 & \\ [X_2, X_3] = -X_5 & \\ [Y_1, Y_2] = X_5 & \end{cases}$$

$$\mu^{45}_{(5,1,1,1)} : \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1} & 1 \leq i \leq 4 \\ [X_1, X_4] = X_5 & \\ [X_2, X_3] = -X_5 & \\ [X_1, Y_1] = X_4 & \\ [X_2, Y_1] = X_5 & \\ [Y_1, Y_2] = X_5 & \end{cases}$$

$$\mu^{46}_{(5,1,1,1)} : \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1} & 1 \leq i \leq 4 \\ [X_1, X_2] = X_4 & \\ [X_1, X_3] = X_5 & \\ [X_1, X_4] = X_5 & \\ [X_2, X_3] = -X_5 & \\ [Y_1, Y_2] = X_5 & \end{cases}$$

$$\mu^{47}_{(5,1,1,1)} : \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1} & 1 \leq i \leq 4 \\ [X_1, X_2] = X_4 & \\ [X_1, X_3] = X_5 & \\ [X_1, X_4] = X_5 & \\ [X_2, X_3] = -X_5 & \\ [X_1, Y_1] = X_4 & \\ [X_2, Y_1] = X_5 & \\ [Y_1, Y_2] = X_5 & \end{cases}$$

Demostración: Si $\mathfrak{g}$ está en las hipótesis de la proposición, su ley vendrá dada, salvo antisimetría, por

$$\begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1} & 1 \leq i \leq 4 \\ [X_1, X_2] = cX_4 \\ [X_1, X_3] = cX_5 \\ [X_1, X_4] = eX_5 \\ [X_2, X_3] = -eX_5 \\ [X_1, Y_1] = a_{21}X_4 + a_{11}X_5 \\ [X_1, Y_2] = a_{22}X_4 + a_{12}X_5 \\ [X_2, Y_1] = a_{21}X_5 \\ [X_2, Y_2] = a_{22}X_5 \\ [Y_1, Y_2] = bX_5 \end{cases}$$

$be \neq 0$.

Siempre se puede suponer $a_{22} = 0$. En efecto:

· si $a_{22} \neq 0$ y $a_{21} = 0$, se intercambian los vectores Y_1 e Y_2.

· si $a_{22} \neq 0$ y $a_{21} \neq 0$, se hace el cambio

$$\begin{cases} X_0' = X_0 \\ X_1' = X_1 \\ Y_1' = Y_1 \\ Y_2' = a_{22}Y_1 - a_{21}Y_2 \end{cases}$$

Además, el cambio de base

$$\begin{cases} X_0' = X_0 \\ X_1' = X_1 - \dfrac{a_{21}a_{12}}{2eb}X_3 - \dfrac{a_{12}}{b}Y_1 \\ Y_1' = Y_1 \\ Y_2' = Y_2 \end{cases}$$

permite suponer $a_{12} = 0$ y el cambio de base

$$\begin{cases} X_0' = X_0 \\ X_1' = X_1 + \dfrac{a_{11}}{b}Y_2 \\ Y_1' = Y_1 \\ Y_2' = Y_2 \end{cases}$$

permite suponer $a_{11} = 0$.

Se tiene que las nulidades de c y a_{21} son invariantes. Sea $\mathfrak{g}^* = \mathfrak{g}/\mathcal{Z}(\mathfrak{g})$; su ley viene dada por

$$\begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1} & 1 \leq i \leq 3 \\ [X_1, X_2] = cX_4 \\ [X_1, Y_1] = a_{21}X_4 \end{cases}$$

Es fácil comprobar que:

$$dim(\mathcal{Z}(\mathfrak{g}^*)) = \begin{cases} 3 & \text{si } a_{21} = 0 \\ 2 & \text{si } a_{21} \neq 0 \end{cases}$$

y que:

$$dim(Cent\mathcal{C}^1(\mathfrak{g}^*))) = \begin{cases} 6 & \text{si } c = 0 \\ 5 & \text{si } c \neq 0 \end{cases}$$

lo que prueba que ambas nulidades son invariantes para $\mathfrak{g}^*$ y, por tanto, lo son para $\mathfrak{g}$. Esquemáticamente:

$$a_{11} = a_{12} = a_{22} = 0 \begin{cases} c = 0 \begin{cases} a_{21} = 0 \\ a_{21} \neq 0 \end{cases} \\ c \neq 0 \begin{cases} a_{21} = 0 \\ a_{21} \neq 0 \end{cases} \end{cases}$$

Así pues, se tienen los siguientes casos:

<u>Caso 1</u>: $(c, a_{21}) = (0, 0)$
Mediante el cambio de escala

$$\begin{cases} X_0' = X_0 \\ X_1' = \dfrac{1}{e}X_1 \\ Y_1' = \dfrac{1}{eb}Y_1 \\ Y_2' = Y_2 \end{cases}$$

se obtiene $\mu^{44}_{(5,1,1,1)}$.

<u>Caso 2</u>: $(c, a_{21}) = (0, a_{21})$, $a_{21} \neq 0$.
Mediante el cambio de escala

$$\begin{cases} X_0' = X_0 \\ X_1' = \dfrac{1}{e}X_1 \\ Y_1' = \dfrac{1}{a_{21}}Y_1 \\ Y_2' = \dfrac{a_{21}}{be}Y_2 \end{cases}$$

se obtiene $\mu^{45}_{(5,1,1,1)}$.

Caso 3: $(c, a_{21}) = (c, 0)$, $c \neq 0$
Mediante el cambio de escala

$$\begin{cases} X_0' = \dfrac{c}{e} X_0 \\ X_1' = \dfrac{c}{e^2} X_1 \\ Y_1' = \dfrac{c^5}{be^6} Y_1 \\ Y_2' = Y_2 \end{cases}$$

se obtiene $\mu^{46}_{(5,1,1,1)}$.

Caso 4: (c, a_{21}), $ca_{21} \neq 0$
Mediante el cambio de escala

$$\begin{cases} X_0' = \dfrac{c}{e} X_0 \\ X_1' = \dfrac{c}{e^2} X_1 \\ Y_1' = \dfrac{c^3}{e^3 a_{21}} Y_1 \\ Y_2' = \dfrac{c^2 a_{21}}{be^3} Y_2 \end{cases}$$

se obtiene $\mu^{47}_{(5,1,1,1)}$. □

Capítulo 2

Álgebras de Lie $(n-6)$-filiformes.

En este capítulo se determina la familia genérica de álgebras $(n-6)$-filiformes y, para ello se hará uso, esencialmente, de argumentos sobre nilpotencia, sucesión característica y p-filiformidad. También se clasifican las de dimensión 8 (la primera dimensión que no está clasificada).

2.1 Familia de leyes de álgebras $(n-6)$-filiformes.

Dado que un álgebra de Lie p-filiforme de dimensión n admite una base adaptada $\{X_0, X_1, \ldots, X_{n-p}, Y_1, \ldots, Y_{p-1}\}$ para la que los únicos corchetes no nulos de X_0 por elementos de la base son los $[X_0, X_i] = X_{i+1}$, $1 \leq i \leq n-p-1$, la identidad de Jacobi aplicada a una terna (X_0, U, V), con U y V de la base, da un primer esbozo de la familia.

El concepto de nilpotencia se traduce en una condición matricial relativamente sencilla, el polinomio característico de la matriz $ad(U)$, para cualquier vector U, es λ^n. Esta condición puede ser a veces difícil de aplicar, por lo que hay elegir adecuadamente los pasos a seguir e ir aplicando esta condición conforme se va simplificando la familia.

El concepto de p-filiformidad también tiene una traducción matricial en términos de las matrices adjuntas de vectores que no están en la derivada, los posibles vectores característicos; las correspondientes matrices no pueden admitir menores de orden $n-p$ no nulos. Esta propiedad junto con la nilpotencia, bien manejadas proporcionan muchas condiciones sencillas de los parámetros si se aplican a vectores convenientemente elegidos.

Después de estas propiedades o entre ellas, según se simplifique la familia, se hace uso de las identidad de Jacobi aplicada a una terna de vectores de la base, que nos proporciona nuevas restricciones para los parámetros.

A medida que disminuye la p con respecto a n, la familia se va complicando, por lo que es muy difícil su clasificación. Por esta razón, se clasifica la primera dimensión no encontrada, dimensión 8.

Teorema 2.1.1.– *[14] La ley de un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ $(n-6)$-filiforme compleja de dimensión $n \geq 9$ viene expresada, en una cierta base adaptada $\{X_0, X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6, Y_1, Y_2, \ldots, Y_{n-7}\}$, en función de los siguientes productos*

$$\begin{array}{ll}
[X_0, X_i] = X_{i+1} & 1 \leq i \leq 5 \\
[X_1, X_2] = 2b_1X_3 + (b_2+b_3)X_4 + b_4X_5 + b_5X_6 + \sum_{k=1}^{n-7} \alpha_k Y_k & \\
[X_1, X_3] = 2b_1X_4 + (b_2+b_3)X_5 + b_4X_6 & \\
[X_1, X_4] = b_1X_5 + b_2X_6 + \sum_{k=1}^{n-7} \beta_k Y_k & \\
[X_2, X_3] = b_1X_5 + b_3X_6 - \sum_{k=1}^{n-7} \beta_k Y_k & \\
[X_2, X_4] = b_1X_6 & \\
[X_1, Y_i] = a_{4i}X_3 + a_{3i}X_4 + a_{2i}X_5 + a_{1i}X_6 & 1 \leq i \leq n-7 \\
[X_2, Y_i] = a_{4i}X_4 + a_{3i}X_5 + a_{2i}X_6 & 1 \leq i \leq n-7 \\
[X_3, Y_i] = a_{4i}X_5 + a_{3i}X_6 & 1 \leq i \leq n-7 \\
[X_4, Y_i] = a_{4i}X_6 & 1 \leq i \leq n-7 \\
[Y_i, Y_j] = d_{ij}X_6 & 1 \leq i < j \leq n-7
\end{array}$$

sujeta a las siguientes restricciones

$$\begin{array}{lcll}
a_{4i}b_1 & = & 0 & 1 \leq i \leq n-7 \\
a_{4i}\beta_k & = & 0 & 1 \leq i,k \leq n-7 \\
a_{4i}\alpha_k & = & 0 & 1 \leq i,k \leq n-7 \\
a_{2i}\beta_k & = & 0 & 1 \leq i,k \leq n-7 \\
a_{3i}\beta_k(b_2+b_3) & = & 0 & 1 \leq i,k \leq n-7
\end{array}$$

$$\begin{array}{rcll}
\sum_{k=1}^{n-7} a_{3k}\beta_k & = & 0 & \\
\sum_{k=1}^{n-7} d_{ki}\beta_k & = & 0 & 1 \leq i \leq n-7 \\
\sum_{k=1}^{n-7} a_{1k}\beta_k & = & \sum_{k=1}^{n-7} a_{3k}\alpha_k - 2b_1^2 & \\
\sum_{k=1}^{n-7} d_{ki}\alpha_k & = & -3a_{3i}b_1 - 2a_{4i}b_3 & 1 \leq i \leq n-7
\end{array}$$

Demostración: Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie $(n-6)$-filiforme compleja de dimensión n (de invariante de Goze $(6,1,\ldots,1)$).

Si $\{X_0, X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6, Y_1, Y_2, \ldots, Y_{n-7}\}$ es una base adaptada de $\mathfrak{g}$ y $X_0 \notin [\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$ es un vector característico, se ha de cumplir que

$$\left\{\begin{array}{rcll}
[X_0, X_i] & = & X_{i+1} & 1 \leq i \leq 5 \\
[X_0, X_6] & = & 0 & \\
[X_0, Y_j] & = & 0 & 1 \leq j \leq n-7
\end{array}\right.$$

De las identidades de Jacobi para ternas de vectores que incluyan a X_0 se tiene que

$$\begin{array}{ll}
[X_0,[X_i,X_{i+1}]] = [X_i,X_{i+2}] & 1 \leq i \leq 4 \\
[X_0,[X_i,X_j]] = [X_{i+1},X_j] + [X_i,X_{j+1}] & 1 \leq i < j+1 \leq 6 \\
[X_0,[X_i,X_6]] = [X_{i+1},X_6] & 1 \leq i \leq 5 \\
[X_0,[X_i,Y_j]] = [X_{i+1},Y_j] & 1 \leq i \leq 5, \quad 1 \leq j \leq n-7 \\
[X_0,[X_6,Y_j]] = 0 & 1 \leq j \leq n-7 \\
[X_0,[Y_i,Y_j]] = 0 & 1 \leq i < j \leq n-7
\end{array}$$

Así, por ejemplo, como $[X_0,[X_5,X_6]] = 0$, se sigue que

$$[X_5, X_6] = a_1 X_6 + \sum_{i=1}^{n-7} c_i Y_i$$

y como $[X_0,[X_4,X_6]] = [X_5,X_6]$ sigue que $c_i = 0$, $1 \leq i \leq n-7$, pues Y_1, $Y_2,\ldots$, $Y_{n-7} \notin Im(ad(X_0))$ con lo que $[X_5,X_6] = a_1X_6$ y, por nilpotencia, sigue que $a_1 = 0$.

De manera análoga, haciendo uso, sucesivamente, de la identidad de Jacobi, del hecho de que Y_1, $Y_2,\ldots$, $Y_{n-7} \notin Im(ad(X_0))$ y aplicando condiciones evidentes de nilpotencia, se obtiene que la ley de $\mathfrak{g}$ se puede expresar en la base anterior como

$$
\begin{array}{ll}
[X_0, X_i] = X_{i+1} & 1 \leq i \leq 5 \\
[X_1, X_2] = 5a_6X_1 + (a_4 + 3a_7 + 2a_9)X_2 + (a_8 + 2b_1)X_3 + (b_2 + b_3)X_4 + b_4X_5 & \\
\qquad +b_5X_6 + \sum_{k=1}^{n-7} \alpha_k Y_k & \\
[X_1, X_3] = 5a_6X_2 + (a_4 + 3a_7 + 2a_9)X_3 + (a_8 + 2b_1)X_4 + (b_2 + b_3)X_5 + b_4X_6 & \\
[X_1, X_4] = 3a_6X_3 + (a_4 + 2a_7 + a_9)X_4 + (a_8 + b_1)X_5 + b_2X_6 + \sum_{k=1}^{n-7} \beta_k Y_k & \\
[X_1, X_5] = a_6X_4 + (a_4 + a_7)X_5 + a_8X_6 & \\
[X_1, X_6] = a_4X_6 + \sum_{k=1}^{n-7} \gamma_k Y_k & \\
[X_2, X_3] = 2a_6X_3 + (a_7 + a_9)X_4 + b_1X_5 + b_3X_6 - \sum_{k=1}^{n-7} \beta_k Y_k & \\
[X_2, X_4] = 2a_6X_4 + (a_7 + a_9)X_5 + b_1X_6 & \\
[X_2, X_5] = a_6X_5 + a_7X_6 - \sum_{k=1}^{n-7} \gamma_k Y_k & \\
[X_3, X_4] = a_6X_5 + a_9X_6 + \sum_{k=1}^{n-7} \gamma_k Y_k & \\
[X_3, X_5] = a_6X_6 & \\
[X_1, Y_i] = a_{5i}X_2 + a_{4i}X_3 + a_{3i}X_4 + a_{2i}X_5 + a_{1i}X_6 + \sum_{k=1}^{n-7} p_{1i}^k Y_k & 1 \leq i \leq n-7 \\
[X_2, Y_i] = a_{5i}X_3 + a_{4i}X_4 + a_{3i}X_5 + a_{2i}X_6 & 1 \leq i \leq n-7 \\
[X_3, Y_i] = a_{5i}X_4 + a_{4i}X_5 + a_{3i}X_6 & 1 \leq i \leq n-7 \\
[X_4, Y_i] = a_{5i}X_5 + a_{4i}X_6 & 1 \leq i \leq n-7 \\
[X_5, Y_i] = a_{5i}X_6 & 1 \leq i \leq n-7 \\
[Y_i, Y_j] = d_{ij}X_6 + \sum_{k=1}^{n-7} c_{ij}^k Y_k & 1 \leq i < j \leq n-7
\end{array}
$$

De $Jac(X_1, X_3, X_5)$ se obtiene que $a_6 = 0$ y el cambio de base

$$
\begin{cases} X_0' = X_0 \\ X_1' = X_1 - a_8X_0 \end{cases}
$$

permite suponer $a_8 = 0$. Aplicando a continuación condiciones de nilpotencia en $[X_1, X_5]$ se tiene que $a_4 + a_7 = 0$.

Para todo $A \in \mathbf{C} - \{0\}$ se cumple que $AX_0 + Y_i \notin [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$, $1 \leq i \leq n-8$ y la matriz adjunta correspondiente al vector $AX_0 + Y_1$ es

$$
\begin{pmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
0 & A-a_{51} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
0 & -a_{41} & A-a_{51} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
0 & -a_{31} & -a_{41} & A-a_{51} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
0 & -a_{21} & -a_{31} & -a_{41} & A-a_{51} & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
0 & -a_{11} & -a_{21} & -a_{31} & -a_{41} & A-a_{51} & 0 & 0 & d_{12} & \dots & d_{1,n-7} \\
0 & -p_{11}^{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{12}^{1} & \dots & c_{1,n-7}^{1} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & -p_{11}^{n-7} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{12}^{n-7} & \dots & c_{1,n-7}^{n-7}
\end{pmatrix}
$$

Puesto que el invariante de Goze es $(6,1,\dots,1)$, no puede existir un menor de orden 6 distinto de cero. Si se elige A tal que $A - a_{51} \neq 0$, lo que siempre es posible, se tiene que

$$
\begin{vmatrix}
A-a_{51} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-a_{41} & A-a_{51} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-a_{31} & -a_{41} & A-a_{51} & 0 & 0 & 0 \\
-a_{21} & -a_{31} & -a_{41} & A-a_{51} & 0 & 0 \\
-a_{11} & -a_{21} & -a_{31} & -a_{41} & A-a_{51} & d_{1i} \\
-p_{11}^{k} & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{1i}^{k}
\end{vmatrix} = (A-a_{51})^5 c_{1i}^{k} = 0 \Longrightarrow
$$

$\Longrightarrow c_{1i}^{k} = 0$, con $1 \leq k \leq n-7$ y $2 \leq i \leq n-7$.

Se va a probar por inducción finita que se puede admitir siempre que

$$c_{ij}^{k} = 0 \quad 1 \leq k \leq n-7, \quad i+1 \leq j \leq n-7, \quad 1 \leq i \leq n-8$$

Según se ha visto $c_{1i}^{k} = 0$ con $1 \leq k \leq n-7$ y $2 \leq i \leq n-7$.

Supóngase que las matrices $ad(AX_0 + Y_2)$, $ad(AX_0 + Y_3)$,...,$ad(AX_0 + Y_{i-1})$ se han obtenido y, de forma análoga al caso anterior. se ha encontrado que

$$c_{rj}^{k} = 0, \quad 2 \leq r \leq i-1 1 \leq k \leq n-7. \quad r+1 \leq j \leq n-7$$

En consecuencia, la matriz $ad(AX_0 + Y_i)$ es

$$\begin{pmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
0 & A-a_{5i} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
0 & -a_{4i} & A-a_{5i} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
0 & -a_{3i} & -a_{4i} & A-a_{5i} & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
0 & -a_{2i} & -a_{3i} & -a_{4i} & A-a_{5i} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
0 & -a_{1i} & -a_{2i} & -a_{3i} & -a_{4i} & A-a_{5i} & 0 & -d_{1i} & \dots & -d_{i-1,i} & 0 & d_{i,i+1} & \dots & d_{i,n-7} \\
0 & -p_{1i}^1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & c_{i,i+1}^1 & \dots & c_{i,n-7}^1 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & -p_{1i}^{n-7} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & c_{i,i+1}^{n-7} & \dots & c_{i,n-7}^{n-7}
\end{pmatrix}$$

Si se elige A tal que $A - a_{5i} \neq 0$, lo que siempre es posible, se llega a que

$$\begin{vmatrix}
A-a_{5i} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-a_{4i} & A-a_{5i} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-a_{3i} & -a_{4i} & A-a_{5i} & 0 & 0 & 0 \\
-a_{2i} & -a_{3i} & -a_{4i} & A-a_{5i} & 0 & 0 \\
-a_{1i} & -a_{2i} & -a_{3i} & -a_{4i} & A-a_{5i} & d_{ij} \\
-p_{1i}^k & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{ij}^k
\end{vmatrix} = (A-a_{5i})^5 c_{ij}^k = 0 \Longrightarrow$$

$\Longrightarrow c_{ij}^k = 0$, con $1 \leq k \leq n-7$ y $i+1 \leq j \leq n-7$, con lo que se ha probado que es cierto para $1 \leq i \leq n-8$.

Siguiendo el mismo razonamiento, y teniendo en cuenta que $AX_0 + X_1 \notin [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$, que el invariante de Goze es $(6, 1, \dots, 1)$ y que la matriz adjunta correspondiente al vector $AX_0 + X_1$ es

$$\begin{pmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
-1 & A & 2(a_7+a_9) & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{51} & \dots & a_{5,n-7} \\
0 & 0 & A+2b_1 & 2(a_7+a_9) & 0 & 0 & 0 & a_{41} & \dots & a_{4,n-7} \\
0 & 0 & b_2+b_3 & A+2b_1 & a_7+a_9 & 0 & 0 & a_{31} & \dots & a_{3,n-7} \\
0 & 0 & b_4 & b_2+b_3 & A+b_1 & 0 & 0 & a_{21} & \dots & a_{2,n-7} \\
0 & 0 & b_5 & b_4 & b_2 & A & a_4 & a_{11} & \dots & a_{1,n-7} \\
0 & 0 & \alpha_1 & 0 & \beta_1 & 0 & \gamma_1 & p_{11}^1 & \dots & p_{1,n-7}^1 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & 0 & \alpha_{n-7} & 0 & \beta_{n-7} & 0 & \gamma_{n-7} & p_{11}^{n-7} & \dots & p_{1,n-7}^{n-7}
\end{pmatrix}$$

se verifica que $\gamma_k = 0$, $1 \leq k \leq n-7$, pues, si no lo fuera, siempre se podría elegir A tal que

$$\begin{vmatrix} A & 2(a_7+a_9) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A+2b_1 & 2(a_7+a_9) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_2+b_3 & A+2b_1 & a_7+a_9 & 0 & 0 \\ 0 & b_4 & b_2+b_3 & A+b_1 & 0 & 0 \\ 0 & b_5 & b_4 & b_2 & A & a_4 \\ 0 & \alpha_k & 0 & \beta_k & 0 & \gamma_k \end{vmatrix} =$$

$$= A^5\gamma_k + A^4 5b_1\gamma_k + A^3\gamma_k(8b_1^2 - 3(b_2+b_3)(a_7+a_9)) + A^2\gamma_k(2(a_7+a_9)^2 b_4 - $$
$$-4b_1(a_7+a_9)(b_2+b_3)) \neq 0$$

lo que es imposible, al ser el invariante de Goze $(6,1,\ldots,1)$.

Este resultado junto con una simple condición de nilpotencia en $[X_1, X_6]$, permite suponer $a_4 = 0$ y, como $a_4 + a_7 = 0$, se tiene que $a_7 = 0$.

Análogamente, como no puede existir ningún menor de orden 6 no nulo, a la matriz adjunta de $AX_0 + X_2 \notin [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$, $\forall A \in \mathbf{C} - \{0\}$, como

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & A-2a_9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ -1 & -2b_1 & A & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{52} & \ldots & a_{5,n-7} \\ 0 & (b_2+b_3) & 0 & A+a_9 & 0 & 0 & 0 & a_{42} & \ldots & a_{4,n-7} \\ 0 & -b_4 & 0 & b_1 & A+a_9 & 0 & 0 & a_{32} & \ldots & a_{3,n-7} \\ 0 & -b_5 & 0 & b_3 & b_1 & A & 0 & a_{22} & \ldots & a_{2,n-7} \\ 0 & -\alpha_1 & 0 & -\beta_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & -\alpha_{n-7} & 0 & -\beta_{n-7} & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}$$

se cumple que $a_{4i}\beta_k = 0$ para $1 \leq i, k \leq n-7$.

Si en la matriz adjunta del vector $AX_0 + X_1$, se elige un menor de orden 6, hay que imponerle que sea cero por la condición de $(n-6)$-filiformidad, es decir,

$$\begin{vmatrix} A & 2a_9 & 0 & 0 & 0 & a_{5j} \\ 0 & A+2b_1 & 2a_9 & 0 & 0 & a_{4j} \\ 0 & b_2+b_3 & A+2b_1 & a_9 & 0 & a_{3j} \\ 0 & b_4 & b_2+b_3 & A+b_1 & 0 & a_{2j} \\ 0 & b_5 & b_4 & b_2 & A & a_{1j} \\ 0 & \alpha_k & 0 & \beta_k & 0 & p_{1j}^k \end{vmatrix} =$$

$$= A^5 p_{1j}^k + A^4(5b_1 p_{1j}^k - a_{2j}\beta_k - a_{4j}\alpha_k) + A^3(4b_1^2 p_{1j}^k - 2b_1 a_{2j}\beta_k +$$
$$+(b_2+b_3)a_{3j}\beta_k - 2b_1 a_{2j}\beta_k - 3a_9(b_2+b_3)p_{1j}^k + 2a_9(a_{3j}\alpha_k - 3b_1 a_{4j}\alpha_k))+$$
$$+A^2(4b_1^3 p_{1j}^k + 2b_1(b_2+b_3)a_{3j}\beta_k - 4b_1^2 a_{2j}\beta_k - 4a_9 b_1(b_2+b_3)p_{1j}^k - 2a_9^2 a_{2j}\alpha_k -$$
$$-2a_9 b_4 a_{3j}\beta_k + 2a_9 b_1 a_{3j}\alpha_k + 2a_9(b_2+b_3)a_{2j}\beta_k + 2a_9^2 b_4 p_{1j}^k + a_9(b_2+b_3)a_{4j}\alpha_k$$
$$-2b_1^2 a_{4j}\alpha_k) = 0$$

se deduce que

$$\begin{aligned} p_{1j}^k &= 0 \\ a_{2j}\beta_k + a_{4j}\alpha_k &= 0 \\ -4b_1 a_{2j}\beta_k + (b_2+b_3)a_{3j}\beta_k + 2a_9 a_{3j}\alpha_k - 3b_1 a_{4j}\alpha_k &= 0 \\ 2b_1(b_2+b_3)a_{3j}\beta_k - 4b_1^2 a_{2j}\beta_k - 2a_9^2 a_{2j}\alpha_k - 2a_9 b_4 a_{3j}\beta_k + & \\ +2a_9 b_1 a_{3j}\alpha_k + 2a_9(b_2+b_3)a_{2j}\beta_k + a_9(b_2+b_3)a_{4j}\alpha_k - 2b_1^2 a_{4j}\alpha_k &= 0 \end{aligned}$$

con $1 \leq j, k \leq n-7$.

Las dos últimas relaciones junto con $a_{4j}\beta_k = 0$, $1 \leq j, k \leq n-7$, se reducen a

$$\begin{aligned} p_{1j}^k &= 0 \\ a_{2j}\beta_k &= 0 \\ a_{4j}\alpha_k &= 0 \\ a_{4j}\beta_k &= 0 \\ (b_2+b_3)\beta_k a_{3j} + 2a_9 a_{3j}\alpha_k &= 0 \\ 2b_1(b_2+b_3)a_{3j}\beta_k - 2a_9^2 a_{2j}\alpha_k - 2a_9 b_4 a_{3j}\beta_k + 2a_9 b_1 a_{3j}\alpha_k &= 0 \end{aligned}$$

con $1 \leq j, k \leq n-7$.

Dependiendo del rango de la matriz $\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_{n-7} \\ \beta_1 & \beta_2 & \dots & \beta_{n-7} \end{pmatrix}$ se pueden distinguir tres casos

<u>Caso 1:</u> Si $rang = 2$, el cambio de base dado por

$$\begin{cases} \alpha Y'_{n-8} = \sum_{k=1}^{n-7} \alpha_k Y_k \\ \beta Y'_{n-7} = \sum_{k=1}^{n-7} \beta_k Y_k \end{cases}$$

(sin cambiar los otros vectores de la base excepto, si es necesario, permutaciones triviales) permite suponer $\alpha = \beta = 1$.

Caso 2: Si $rang = 1$, existen tres casos,

caso 2.1: si $\alpha_1 = \ldots = \alpha_{n-7} = 0$ y existe k tal que $\beta_k \neq 0$, en este caso, se puede hacer el mismo cambio de base y se puede suponer $\alpha = 0$ y $\beta = 1$.

caso 2.2: si existe k tal que $\alpha_k \neq 0$ y $\beta_i = \lambda\alpha_i$, para todo i, entonces el cambio de base definido por

$$\begin{cases} X_0' = X_0 \\ X_1' = X_1 - \frac{1}{2\lambda}X_3 \end{cases}$$

reduce este caso al caso 2.1.

caso 2.3: si $\beta_1 = \ldots = \beta_{n-7} = 0$ y existe k tal que $\alpha_k \neq 0$, en este caso se puede hacer el mismo cambio de base que se hizo en el caso 1, con lo que se puede suponer $\alpha = 1$ y $\beta = 0$.

Caso 3: si $rang = 0$, $\alpha_i = \beta_j = 0$, resultando $\alpha = \beta = 0$.

Todas estas posibilidades están incluidas en el cambio de base formal definido por

$$\begin{cases} \alpha Y_{n-8}' = \sum_{k=1}^{n-7} \alpha_k Y_k \\ \beta Y_{n-7}' = \sum_{k=1}^{n-7} \beta_k Y_k \end{cases}$$

con $\alpha, \beta \in \{0, 1\}$ (donde los casos $\alpha = 0$ ó $\beta = 0$ no corresponden, propiamente, a un cambio de base).

En consecuencia, el álgebra $\mathfrak{g}$ dada es isomorfa a una de ley

$$\begin{aligned}
&[X_0, X_i] = X_{i+1} && 1 \leq i \leq 5 \\
&[X_1, X_2] = 2a_9X_2 + 2b_1X_3 + (b_2 + b_3)X_4 + b_4X_5 + b_5X_6 + \alpha Y_{n-8} && \\
&[X_1, X_3] = 2a_9X_3 + 2b_1X_4 + (b_2 + b_3)X_5 + b_4X_6 && \\
&[X_1, X_4] = a_9X_4 + b_1X_5 + b_2X_6 + \beta Y_{n-7} && \\
&[X_2, X_3] = a_9X_4 + b_1X_5 + b_3X_6 - \beta Y_{n-7} && \\
&[X_2, X_4] = a_9X_5 + b_1X_6 && \\
&[X_3, X_4] = a_9X_6 &&
\end{aligned}$$

$$\begin{array}{ll}
[X_1, Y_i] = a_{5i}X_2 + a_{4i}X_3 + a_{3i}X_4 + a_{2i}X_5 + a_{1i}X_6 & 1 \leq i \leq n-7 \\
[X_2, Y_i] = a_{5i}X_3 + a_{4i}X_4 + a_{3i}X_5 + a_{2i}X_6 & 1 \leq i \leq n-7 \\
[X_3, Y_i] = a_{5i}X_4 + a_{4i}X_5 + a_{3i}X_6 & 1 \leq i \leq n-7 \\
[X_4, Y_i] = a_{5i}X_5 + a_{4i}X_6 & 1 \leq i \leq n-7 \\
[X_5, Y_i] = a_{5i}X_6 & 1 \leq i \leq n-7 \\
[Y_i, Y_j] = d_{ij}X_6 & 1 \leq i < j \leq n-7
\end{array}$$

con las restricciones

$$\begin{array}{rcl}
a_{2i}\beta & = & 0 \\
a_{4i}\alpha & = & 0 \\
a_{4i}\beta & = & 0 \\
(b_2+b_3)a_{3i}\beta + 2a_9a_{3i}\alpha & = & 0 \\
2b_1(b_2+b_3)a_{3i}\beta - 2a_9b_4a_{3i}\beta - 2a_9^2a_{2i}\alpha + 2a_9b_1a_{3i}\alpha & = & 0
\end{array}$$

para $1 \leq i \leq n-7$.

De $Jac(X_1, X_2, Y_i)$ se deduce que

$$\begin{array}{rcl}
a_9a_{4i} & = & 0 \\
a_9a_{3i} & = & 0 \\
b_1a_{4i} & = & 0 \\
\sum_{k=1}^{n-7} \alpha_k d_{ki} & = & -2a_9a_{2i} - 3b_1a_{3i} + 2b_3a_{4i}
\end{array}$$

De $Jac(X_1, X_2, X_5)$ se deduce que

$$\sum_{k=1}^{n-7} a_{5k}\alpha_k = 0$$

De $Jac(X_1, X_2, X_4)$ se deduce que

$$\begin{array}{c}
a_9 = 0 \\
\sum_{k=1}^{n-7} a_{5k}\beta_k = 0 \\
\sum_{k=1}^{n-7} a_{3k}\beta_k = 0 \\
\sum_{k=1}^{n-7} a_{2k}\beta_k = 0
\end{array}$$

De $Jac(X_1, X_2, X_3)$ se deduce que

$$\sum_{k=1}^{n-7} a_{1k}\beta_k = \sum_{k=1}^{n-7} a_{3k}\alpha_k - 2b_1^2$$

De $Jac(X_1, X_4, Y_i)$ se deduce que

$$\sum_{k=1}^{n-7} \beta_k d_{ki} = 0$$

El resto de identidades de Jacobi se verifica trivialmente. De todas las identidades de Jacobi y de la propiedad de adjunto nilpotencia se tiene que

$$\begin{array}{rcl} a_9 & = & 0 \\ a_{4i}b_1 & = & 0 \\ a_{5,n-8}\alpha & = & 0 \\ a_{5,n-7}\beta & = & 0 \\ a_{3,n-7}\beta & = & 0 \\ a_{2,n-7}\beta & = & 0 \\ d_{i,n-7}\beta & = & 0 \\ a_{1,n-7}\beta - a_{3,n-8}\alpha & = & -2b_1^2 \\ 3a_{3,i}b_1 + d_{i,n-8}\alpha & = & 0 \end{array}$$

donde $1 \leq i \leq n-7$.

El cambio de base definido por

$$\left\{ \begin{array}{ll} X_i' = X_i & 0 \leq i \leq 6 \\ Y_j' = Y_j + a_{5j}X_0 & 1 \leq j \leq n-7 \end{array} \right.$$

permite suponer que $a_{5j} = 0$, con $1 \leq j \leq n-7$, por lo que algunas condiciones desaparecen por verificarse trivialmente y aplicando las demás condiciones se demuestra que todos los menores de orden 6 de la matriz adjunta de cualquier posible vector característico es nulo. □

Nota 2.1.2.– Para el caso de dimensión 8, de manera análoga, se llega a que la ley de un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ (n-6)-filiforme compleja viene expresada en una cierta base adaptada $\{X_0, X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6, Y\}$, por

$$\begin{array}{ll} [X_0, X_i] = X_{i+1} & 1 \leq i \leq 5 \\ [X_1, X_2] = 2b_1X_3 + (b_2 + b_3)X_4 + b_4X_5 + b_5X_6 + \alpha Y & \\ [X_1, X_3] = 2b_1X_4 + (b_2 + b_3)X_5 + b_4X_6 & \\ [X_1, X_4] = b_1X_5 + b_2X_6 + \beta Y & \\ [X_2, X_3] = b_1X_5 + b_3X_6 - \beta Y & \\ [X_2, X_4] = b_1X_6 & \end{array}$$

$$\begin{aligned}
[X_1, Y] &= a_4X_3 + a_3X_4 + a_2X_5 + a_1X_6 \\
[X_2, Y] &= a_4X_4 + a_3X_5 + a_2X_6 \\
[X_3, Y] &= a_4X_5 + a_3X_6 \\
[X_4, Y] &= a_4X_6
\end{aligned}$$

donde los parámetros verifican las restricciones

$$a_3b_1 = a_4b_1 = a_4b_3 = 0$$

$$a_4\alpha = 0$$

$$a_2\beta = a_3\beta = a_4\beta = 0$$

$$a_1\beta = a_3\alpha - 2b_1^2$$

Nota 2.1.3.– Para el caso de dimensión 7, se llega a que la ley de un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ (n-6)-filiforme compleja viene expresada en una cierta base adaptada $\{X_0, X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6\}$, por

$$\begin{aligned}
[X_0, X_i] &= X_{i+1} & 1 \le i \le 5 \\
[X_1, X_2] &= (b_2 + b_3)X_4 + b_4X_5 + b_5X_6 \\
[X_1, X_3] &= (b_2 + b_3)X_5 + b_4X_6 \\
[X_1, X_4] &= b_2X_6 \\
[X_2, X_3] &= b_3X_6
\end{aligned}$$

2.2 Álgebras de Lie 2-filiformes de dimensión 8.

En esta sección, se describen todas las álgebras $(n-6)$-filiformes de dimensión 8. Al igual que se hizo para las álgebras $(n-5)$-filiformes, se va a distinguir las álgebras escindidas de las no escindidas.

1.- Caso de álgebras escindidas

Las álgebras 2-filiformes de dimensión 8 escindidas se encuentran fácilmente.

Nota 2.2.1.– Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie filiforme de dimensión 7. Entonces $\tilde{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g} \oplus \mathbf{C}$ es un álgebra de Lie 2-filiforme de dimensión 8

La demostración es obvia.

La clasificación de las álgebras de Lie filiformes de dimensión 7 ([26]) son conocidas, se puede deducir la clasificación completa de las álgebras 2-filiformes de dimensión 8 escindidas. En el primer apéndice de esta memoria, se presenta la clasificación completa de éstas álgebras (filiformes de dimensión 7) con el fin de unificar notación.

2.- Caso de álgebras no escindidas

Lema 2.2.2.– *La ley de un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ 2-filiforme compleja de $dim(\mathfrak{g}) = 8$, viene expresada, salvo antisimetría, en una cierta base adaptada $\{X_0, X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6, Y\}$, en función de los siguientes productos*

$$
\begin{aligned}
&[X_0, X_i] = X_{i+1} \qquad\qquad 1 \leq i \leq 5\\
&[X_1, X_2] = 2b_1X_3 + (b_2 + b_3)X_4 + b_4X_5 + b_5X_6 + \alpha Y\\
&[X_1, X_3] = 2b_1X_4 + (b_2 + b_3)X_5 + b_4X_6\\
&[X_1, X_4] = b_1X_5 + b_2X_6 + \beta Y\\
&[X_2, X_3] = b_1X_5 + b_3X_6 - \beta Y\\
&[X_2, X_4] = b_1X_6\\
&[X_1, Y] = a_4X_3 + a_3X_4 + a_2X_5 + a_1X_6\\
&[X_2, Y] = a_4X_4 + a_3X_5 + a_2X_6\\
&[X_3, Y] = a_4X_5 + a_3X_6\\
&[X_4, Y] = a_4X_6
\end{aligned}
$$

sujeta a las siguientes restricciones

$$
\begin{gathered}
a_4b_1 = a_4\beta = a_4\alpha = a_2\beta = a_3\beta = 0\\
a_1\beta = a_3\alpha - 2b_1^2\\
3a_3b_1 + 2a_4b_3 = 0
\end{gathered}
$$

Demostración: Véase el teorema 2.1.1. □

Proposición 2.2.3.– *Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie 2-filiforme compleja con $dim(\mathfrak{g}) = 8$. Entonces existen dos subfamilias, no isomorfas entre sí, cuyas leyes vienen dadas, en una base adaptada $\{X_0, X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6, Y\}$, por*

$$
AL2F(6):\begin{cases}
[X_0,X_i]=X_{i+1} & 1\leq i\leq 5\\
[X_1,X_2]=2b_1X_3+(b_2+b_3)X_4+b_4X_5+b_5X_6+\alpha Y\\
[X_1,X_3]=2b_1X_4+(b_2+b_3)X_5+b_4X_6\\
[X_1,X_4]=b_1X_5+b_2X_6+\beta Y\\
[X_2,X_3]=b_1X_5+b_3X_6-\beta Y\\
[X_2,X_4]=b_1X_6\\
[X_1,Y]=a_3X_4+a_2X_5+a_1X_6\\
[X_2,Y]=a_3X_5+a_2X_6\\
[X_3,Y]=a_3X_6
\end{cases}
$$
$$
con \quad a_3b_1=a_2\beta=a_3\beta=0;\ a_1\beta=a_3\alpha-2b_1^2;\ (\alpha,\beta)\neq(0,0)
$$

$$
AL2F(5):\begin{cases}
[X_0,X_i]=X_{i+1} & 1\leq i\leq 5\\
[X_1,X_2]=(b_2+b_3)X_4+b_4X_5+b_5X_6\\
[X_1,X_3]=(b_2+b_3)X_5+b_4X_6\\
[X_1,X_4]=b_2X_6\\
[X_2,X_3]=b_3X_6\\
[X_1,Y]=a_4X_3+a_3X_4+a_2X_5+a_1X_6\\
[X_2,Y]=a_4X_4+a_3X_5+a_2X_6\\
[X_3,Y]=a_4X_5+a_3X_6\\
[X_4,Y]=a_4X_6
\end{cases}
$$
$$
con \quad a_4b_3=0
$$

Demostración: Se observa en la familia de leyes obtenida en el teorema anterior que los vectores $X_2,X_3,X_4,X_5,X_6\in\mathcal{D}^1(\mathfrak{g})$, luego la dimensión es mayor o igual que 5; es más,

$$dim(\mathcal{C}^1(\mathfrak{g}))=5+rango\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}$$

(1)Si $rango\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}=1\Longrightarrow\alpha\neq0$ ó $\beta\neq0\Longrightarrow dim(\mathcal{C}^1(\mathfrak{g}))=6$. Por las restricciones se tiene que $a_4=0$. De esta forma se llega a la familia $AL2F(6)$.

(2) Si $rango\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}=0\Longrightarrow\alpha=\beta=0\Longrightarrow dim(\mathcal{C}^1(\mathfrak{g}))=5$. Si se sustituye en la familia genérica, las restricciones quedan $b_1=0$; $a_4b_3=0$; de donde se obtiene directamente, sin más que sustituir el valor de los parámetros, la subfamilia AL2F(5) del enunciado. □

2.2.1 Álgebras de Lie 2-filiformes de $dim(\mathfrak{g}) = 8$ y $dim([\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]) = 6$.

En esta subsección, se van a determinar todas las álgebras o familias de álgebras 2-filiformes de dimensión 8 y dimensión de la subálgebra derivada 6. En los casos donde sea posible se estudiarán invariantes clásicos, tales como dimensiones de subálgebras conocidas, en otros donde no sea posible, se estudiarán todos los cambios de bases. En algunos casos, algunos parámetros, pueden estudiarse sus nulidades por ambos métodos. En otros casos, debido al gran número de cálculos, es necesario mediante cambios de base concretos, hacer cero aquellos donde se pueda y después aplicar técnicas ya conocidas.

Proposición 2.2.4.– *Sea $\mathfrak{g}$ cualquier álgebra de Lie 2-filiforme compleja con $dim(\mathfrak{g}) = 8$ y $dim([\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]) = 6$. Entonces existen dos subfamilias, no isomorfas entre sí, cuyas leyes vienen dadas, en una cierta base adaptada $\{X_0, X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6, Y\}$, por*

$$AL2F(6,3): \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1} & 1 \leq i \leq 5 \\ [X_1, X_2] = (b_2 + b_3)X_4 + b_4 X_5 + Y \\ [X_1, X_3] = (b_2 + b_3)X_5 + b_4 X_6 \\ [X_1, X_4] = b_2 X_6 \\ [X_2, X_3] = b_3 X_6 \\ [X_1, Y] = a_2 X_5 + a_1 X_6 \\ [X_2, Y] = a_2 X_6 \end{cases}$$

$$AL2F(6,4): \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1} & 1 \leq i \leq 5 \\ [X_1, X_2] = 2b_1 X_3 + (b_2 + b_3)X_4 + b_4 X_5 + b_5 X_6 + \alpha Y \\ [X_1, X_3] = 2b_1 X_4 + (b_2 + b_3)X_5 + b_4 X_6 \\ [X_1, X_4] = b_1 X_5 + b_2 X_6 + \beta Y \\ [X_2, X_3] = b_1 X_5 + b_3 X_6 - \beta Y \\ [X_2, X_4] = b_1 X_6 \\ [X_1, Y] = -\dfrac{2b_1^2}{\beta} X_6 \\ con\ \beta \neq 0 \end{cases}$$

Demostración: Si $\mathfrak{g}$ es un álgebra de Lie 2-filiforme con $dim(\mathfrak{g}) = 8$ y $dim[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = 6$, su ley vendrá dada por

$$AL2F(6):\left\{\begin{array}{ll}[X_0,X_i]=X_{i+1} & 1\leq i\leq 5\\ [X_1,X_2]=2b_1X_3+(b_2+b_3)X_4+b_4X_5+b_5X_6+\alpha Y & \\ [X_1,X_3]=2b_1X_4+(b_2+b_3)X_5+b_4X_6 & \\ [X_1,X_4]=b_1X_5+b_2X_6+\beta Y & \\ [X_2,X_3]=b_1X_5+b_3X_6-\beta Y & \\ [X_2,X_4]=b_1X_6 & \\ [X_1,Y]=a_3X_4+a_2X_5+a_1X_6 & \\ [X_2,Y]=a_3X_5+a_2X_6 & \\ [X_3,Y]=a_3X_6 & \end{array}\right.$$
$$\text{con}\quad a_3b_1=a_2\beta=a_3\beta=0;\ a_1\beta=a_3\alpha-2b_1^2;\ (\alpha,\beta)\neq(0,0)$$

Es fácil comprobar que

$$dim(C^3(\mathfrak{g}))=\left\{\begin{array}{lll}3 & \text{si} & \beta=0\\ 4 & \text{si} & \beta\neq 0\end{array}\right.$$

Caso 1: Si $\beta=0\Longrightarrow\alpha\neq 0$ y, por las restricciones, se tiene $a_3=b_1=0$. Si, además, se hace el cambio de base dado por

$$\left\{\begin{array}{l}X_0'=X_0\\ X_1'=X_1\\ Y'=b_5X_6+\alpha Y\end{array}\right.$$

se puede suponer $b_5=0$ y $\alpha=1$, obteniéndose la familia $AL2F(6,3)$.

Caso 2: Si $\beta\neq 0$, por las restricciones se tiene $a_2=a_3=0$, obteniéndose la familia $AL2F(6,4)$. □

A continuación, se van a estudiar cada una de las familias anteriores "troceando" donde sea posible por invariantes conocidos y donde no, utilizando el *Mathematica* para estudiar los cambios de base genéricos. Se dará una lista completa y exhaustiva de todas las álgebras o familias de álgebras 2-filiformes de dimensión 8 y $dim[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]=6$, no isomorfas entre sí.

Teorema 2.2.5.– *Sea $\mathfrak{g}$ cualquier álgebra en $AL2F(6,3)$. Entonces es isomorfa a una de las siguientes álgebras, no isomorfas entre sí, de leyes $\mu^i_{(6,1,1)}$, $1\leq i\leq 9$, $i\neq 4,6,7$, $\mu^{4,\lambda}_{(6,1,1)}$, $\mu^{6,\delta}_{(6,1,1)}$, $\mu^{7,\lambda,\delta}_{(6,1,1)}$, $\mu^{10,\alpha}_{(6,1,1)}$, $\mu^{11,\nu,\delta}_{(6,1,1)}$, con λ, δ, $\mu\in\mathbf{C}$ y $\alpha\in\mathbf{C}_3$ dadas por*

$$\mu^1_{(6,1,1)}:\left\{\begin{array}{ll}[X_0,X_i]=X_{i+1} & 1\leq i\leq 5\\ [X_1,X_2]=Y & \end{array}\right.$$

$$\mu^2_{(6,1,1)}:\begin{cases}[X_0,X_i]=X_{i+1} & 1\le i\le 5\\ [X_1,X_2]=X_5+Y & \\ [X_1,X_3]=X_6 & \end{cases}$$

$$\mu^3_{(6,1,1)}:\begin{cases}[X_0,X_i]=X_{i+1} & 1\le i\le 5\\ [X_1,X_2]=X_5+Y & \\ [X_1,X_3]=X_6 & \\ [X_1,X_4]=X_6 & \\ [X_2,X_3]=-X_6 & \end{cases}$$

$$\mu^{4,\lambda}_{(6,1,1)}:\begin{cases}[X_0,X_i]=X_{i+1} & 1\le i\le 5\\ [X_1,X_2]=X_4+X_5+Y & \\ [X_1,X_3]=X_5+X_6 & \\ [X_1,X_4]=\lambda X_6 & \\ [X_2,X_3]=(1-\lambda)X_6 & \lambda\in\mathbf{C}\\ [X_1,Y]=2X_6 & \end{cases}$$

$$\mu^5_{(6,1,1)}:\begin{cases}[X_0,X_i]=X_{i+1} & 1\le i\le 5\\ [X_1,X_2]=Y & \\ [X_1,Y]=X_6 & \end{cases}$$

$$\mu^{6,\delta}_{(6,1,1)}:\begin{cases}[X_0,X_i]=X_{i+1} & 1\le i\le 5\\ [X_1,X_2]=Y & \\ [X_1,X_4]=X_6 & \\ [X_2,X_3]=-X_6 & \\ [X_1,Y]=\delta X_6 & \delta\in\mathbf{C}\end{cases}$$

$$\mu^{7,\lambda,\delta}_{(6,1,1)}:\begin{cases}[X_0,X_i]=X_{i+1} & 1\le i\le 5\\ [X_1,X_2]=X_4+Y & \\ [X_1,X_3]=X_5 & \\ [X_1,X_4]=\lambda X_6 & \\ [X_2,X_3]=(1-\lambda)X_6 & \\ [X_1,Y]=\delta X_6 & \lambda,\ \delta\in\mathbf{C}\end{cases}$$

$$\mu^8_{(6,1,1)}:\begin{cases}[X_0,X_i]=X_{i+1} & 1\le i\le 5\\ [X_1,X_2]=Y & \\ [X_1,Y]=X_5 & \\ [X_2,Y]=X_6 & \end{cases}$$

$$\mu^{9}_{(6,1,1)}: \begin{cases} [X_0,X_i]=X_{i+1} & 1\le i\le 5\\ [X_1,X_2]=Y & \\ [X_1,Y]=X_5+X_6 & \\ [X_2,Y]=X_6 & \end{cases}$$

$$\mu^{10,\alpha}_{(6,1,1)}: \begin{cases} [X_0,X_i]=X_{i+1} & 1\le i\le 5\\ [X_1,X_2]=X_5+Y & \\ [X_1,X_3]=X_6 & \\ [X_1,Y]=X_5+\alpha X_6 & \\ [X_2,Y]=X_6 & \alpha\in \mathbf{C}_3 \end{cases}$$

$$\mu^{11,\nu,\delta}_{(6,1,1)}: \begin{cases} [X_0,X_i]=X_{i+1} & 1\le i\le 5\\ [X_1,X_2]=X_4+\nu X_5+Y & \\ [X_1,X_3]=X_5+\nu X_6 & \\ [X_1,X_4]=X_6 & \\ [X_1,Y]=X_5+\delta X_6 & \\ [X_2,Y]=X_6 & \nu,\ \delta\in \mathbf{C} \end{cases}$$

Demostración: Si $\mathfrak{g}\in AL2F(6,3)$, su ley vendrá dada por

$$AL2F(6,3): \begin{cases} [X_0,X_i]=X_{i+1} & 1\le i\le 5\\ [X_1,X_2]=(b_2+b_3)X_4+b_4X_5+Y & \\ [X_1,X_3]=(b_2+b_3)X_5+b_4X_6 & \\ [X_1,X_4]=b_2X_6 & \\ [X_2,X_3]=b_3X_6 & \\ [X_1,Y]=a_2X_5+a_1X_6 & \\ [X_2,Y]=a_2X_6 & \end{cases}$$

Utilizando un programa en cálculo simbólico, concretamente *Mathematica* 3.0, se pueden obtener los nuevos parámetros al efectuar un cambio de base genérico, cambiando los únicos generadores X_0 y X_1. El programa se detallará en un apéndice, aquí tan sólo se hará uso de la salida del programa, es decir, de los nuevos parámetros así como de las restricciones de cambio. En el resto de familias donde se ha utilizado el *Mathematica* 3.0 el programa es similar, aunque cada familia requiere un tratamiento específico.

$$b_2'=\frac{Q_1}{P_0^2}b_2$$

$$b_3'=\frac{(P_0+a_2\,P_1)\,Q_1}{P_0^3}b_3$$

$$b_4' = \frac{1}{P_0^6}((b_4\ P_0^3 - P_1\ (-a_1\ P_0^2 + 2\ b_2^2\ P_0^2 + 4\ b_2\ b_3\ P_0^2 + 2\ b_3^2\ P_0^2 + 4\ a_2\ b_2\ P_0\ P_1 +$$
$$3\ a_2\ b_3\ P_0\ P_1 + a_2^2\ P_1^2))\ Q_1)$$
$$a_1' = \frac{(a_1\ P_0^2 - a_2\ P_1\ (4\ b_2\ P_0 + 2\ b_3\ P_0 + a_2\ P_1))\ Q_1^2}{P_0^6}$$
$$a_2' = \frac{Q_1^2}{P_0^3} a_2$$
con $P_0 Q_1 \neq 0$.

Se deduce claramente que la nulidad de a_2 es invariante. Mediante un simple cálculo se tiene que si $a_2 = 0$, la nulidad de $a_1 - 2(b_2 + b_3)^2$ es invariante, pues

$$\mathrm{a}_1' - 2(\mathrm{b}_2' + \mathrm{b}_3')^2 = \frac{\mathrm{Q}_1^2}{\mathrm{P}_0^4}(\mathrm{a}_1 - 2(\mathrm{b}_2 + \mathrm{b}_3)^2)$$

y también que la nulidad de $b_2 + b_3$ es invariante, pues

$$\mathrm{b}_2' + \mathrm{b}_3' = \frac{\mathrm{Q}_1}{\mathrm{P}_0^2}(\mathrm{b}_2 + \mathrm{b}_3)$$

A partir de estos datos se va estudiando la nulidad del resto de parámetros, con lo que la configuración es la siguiente, que irá detallando después. Primeramente se estudia el caso $a_2 = 0$.

$$\mathrm{a}_2 = 0 \left\{ \begin{array}{l}
a_1 = 2(b_2+b_3)^2 \left\{ \begin{array}{l}
(a)\ b_3 = -b_2 \left\{ \begin{array}{l}
b_2 = 0 \Longrightarrow b_3 = a_1 = 0 \left\{ \begin{array}{l} b_4 = 0 \\ b_4 \neq 0 \end{array} \right. \\
b_2 \neq 0 \Longrightarrow a_1 = 0 \left\{ \begin{array}{l} b_4 = 0 \\ b_4 \neq 0 \end{array} \right.
\end{array} \right. \\
(b)\ b_3 \neq -b_2 \left\{ \begin{array}{l}
b_2 = 0 \Longrightarrow b_3 \neq 0,\ a_1 = 2b_3^2 \left\{ \begin{array}{l} b_4 = 0 \\ b_4 \neq 0 \end{array} \right. \\
b_2 \neq 0 \left\{ \begin{array}{l}
b_3 = 0 \Longrightarrow a_1 = 2b_2^2 \left\{ \begin{array}{l} b_4 = 0 \\ b_4 \neq 0 \end{array} \right. \\
b_3 \neq 0 \Longrightarrow a_1 = 2(b_2+b_3)^2 \left\{ \begin{array}{l} b_4 = 0 \\ b_4 \neq 0 \end{array} \right.
\end{array} \right.
\end{array} \right.
\end{array} \right. \\
a_1 \neq 2(b_2+b_3)^2\ (c)\ \Longrightarrow b_4 = 0 \left\{ \begin{array}{l}
b_3 = -b_2 \Longrightarrow a_1 \neq 0 \left\{ \begin{array}{l} b_2 = 0 \Longrightarrow b_3 = 0 \\ b_2 \neq 0 \Longrightarrow b_3 = -b_2 \neq 0 \end{array} \right. \\
b_3 \neq -b_2 \left\{ \begin{array}{l}
b_2 = 0 \Longrightarrow b_3 \neq 0 \left\{ \begin{array}{l} a_1 = 0 \\ a_1 \neq 0 \end{array} \right. \\
b_2 \neq 0 \left\{ \begin{array}{l}
b_3 = 0 \left\{ \begin{array}{l} a_1 = 0 \\ a_1 \neq 0 \end{array} \right. \\
b_3 \neq 0 \left\{ \begin{array}{l} a_1 = 0 \\ a_1 \neq 0 \end{array} \right.
\end{array} \right.
\end{array} \right.
\end{array} \right.
\end{array} \right.$$

donde (a), (b), y (c) son los casos a considerar.

- Caso (a): Si $a_1 = 2(b_2+b_3)^2$ y $b_3 = -b_2$. Sustituyendo en los parámetros, se tiene que la nulidad de b_2 es invariante, al igual que la de b_4, y $a_1 = 0$.

- Caso (b): Si $a_1 = 2(b_2+b_3)^2$ y $b_3 \neq -b_2$, se sigue teniendo que la nulidad de b_2 es invariante. Si $b_2 = 0$, entonces $b_3 \neq 0$ y $a_1 = 2b_3^2$, además del hecho de que $a_1 = 2(b_2+b_3)^2$ se deduce que siempre la nulidad de b_4 es invariante.

  En el caso de que $b_2 \neq 0$, la nulidad de b_3 es invariante y también lo es la de b_4.

- Caso (c): Si $a_1 \neq 2(b_2+b_3)^2$, eligiendo
$$P_1 = -\frac{b_4 P_0}{a_1 - 2(b_2+b_3)^2}$$
  se puede suponer siempre $b_4 = 1$ y, análogamente a los casos (b) y (c), se sigue teniendo que la nulidad de b_2+b_3 es invariante, al igual que la de b_2.

  Si $b_3 = -b_2$, implica que $a_1 \neq 0$.

  Si $b_3 \neq -b_2$, se tiene que siempre la nulidad de a_1 es invariante.

Atendiendo a la configuración de los parámetros, las álgebras o familias de álgebras, no isomorfas entre sí, son las que a continuación se detallan.

- Caso 1: $a_1 = a_2 = b_2 = b_3 = b_4 = 0$. En este caso sin más que sustituir en la familia se llega a $\mu^1_{(6,1,1)}$.

- Caso 2: $a_1 = a_2 = b_2 = b_3 = 0, \quad b_4 \neq 0$.

  El cambio de escala dado por
$$\begin{cases} X_0' = X_0 \\ X_1' = \dfrac{1}{b_4} X_1 \end{cases}$$
  permite suponer $b_4 = 1$, obteniéndose $\mu^2_{(6,1,1)}$.

- Caso 3: $a_1 = a_2 = b_4 = 0, \quad b_3 = -b_2 \neq 0$.

  El cambio de escala dado por
$$\begin{cases} X_0' = X_0 \\ X_1' = \dfrac{1}{b_2} X_1 \end{cases}$$
  permite suponer $b_4 = 1$, obteniéndose $\mu^{6,0}_{(6,1,1)}$.

- Caso 4: $a_1 = a_2 = 0, \quad b_3 = -b_2 \neq 0, \quad b_4 \neq 0.$
  El cambio de escala dado por
  $$\begin{cases} X_0' = \dfrac{b_4}{b_2} X_0 \\ X_1' = \dfrac{b_4^2}{b_2^3} X_1 \end{cases}$$
  permite suponer $b_2 = b_4 = 1$, obteniéndose $\mu^3_{(6,1,1)}$.

- Caso 5: $a_2 = b_2 = b_4 = 0, \quad b_3 \neq 0, \quad a_1 = 2b_3^2.$
  El cambio de escala dado por
  $$\begin{cases} X_0' = X_0 \\ X_1' = \dfrac{1}{b_3} X_1 \end{cases}$$
  permite suponer $b_3 = 1$, obteniéndose $\mu^{7,0,2}_{(6,1,1)}$.

- Caso 6: $a_2 = b_2 = 0, \quad b_3 b_4 \neq 0, \quad a_1 = 2b_3^2.$
  El cambio de escala dado por
  $$\begin{cases} X_0' = \dfrac{b_4}{b_3} X_0 \\ X_1' = \dfrac{b_4^2}{b_3^3} X_1 \end{cases}$$
  permite suponer $b_3 = b_4 = 1$, obteniéndose $\mu^{4,0}_{(6,1,1)}$.

- Caso 7: $a_2 = b_3 = b_4 = 0, \quad b_2 \neq 0, \quad a_1 = 2b_2^2.$
  El cambio de escala dado en el Caso 3, permite suponer $b_2 = 1$, obteniéndose $\mu^{7,1,2}_{(6,1,1)}$.

- Caso 8: $a_2 = b_3 = 0, \quad b_2 b_4 \neq 0, \quad a_1 = 2b_2^2.$
  El cambio de escala dado en el Caso 4, permite suponer $b_2 = b_4 = 1$, obteniéndose $\mu^{4,1}_{(6,1,1)}$.

- Caso 9: $a_2 = b_4 = 0, \quad (b_2 + b_3) b_2 b_3 \neq 0, \quad a_1 = 2(b_2 + b_3)^2.$
  El cambio de escala dado por
  $$\begin{cases} X_0' = X_0 \\ X_1' = \dfrac{1}{b_2 + b_3} X_1 \end{cases}$$
  permite suponer $b_2 + b_3 = 1$, obteniéndose $\mu^{7,\lambda,2}_{(6,1,1)}$, con $\lambda \in \mathbf{C} - \{0, 1\}$.

- Caso 10: $a_2 = 0, \quad (b_2+b_3)b_2b_3b_4 \neq 0, \quad a_1 = 2(b_2+b_3)^2.$

  El cambio de escala dado por

$$\begin{cases} X_0' = \dfrac{b_4}{b_2+b_3}X_0 \\ X_1' = \dfrac{b_4^2}{(b_2+b_3)^3}X_1 \end{cases}$$

  permite suponer $b_2+b_3 = b_4 = 1$, obteniéndose $\mu^{4,\lambda}_{(6,1,1)}$, con $\lambda \in \mathbf{C} - \{0,1\}$.

- Caso 11: $a_2 = b_2 = b_3 = b_4 = 0, \quad a_1 \neq 0.$

  El cambio de escala dado por

$$\begin{cases} X_0' = X_0 \\ X_1' = \dfrac{1}{a_1}X_1 \end{cases}$$

  permite suponer $a_1 = 1$, obteniéndose $\mu^{5}_{(6,1,1)}$.

- Caso 12: $a_2 = b_4 = 0, \quad b_3 = -b_2, \quad a_1b_2 \neq 0.$

  El cambio de escala dado en el Caso 3, permite suponer $b_2 = 1$, obteniéndose $\mu^{6,\delta}_{(6,1,1)}$, con $\delta \in \mathbf{C} - \{0\}$.

- Caso 13: $a_1 = a_2 = b_2 = b_4 = 0, \quad b_3 \neq 0.$

  El cambio de escala dado en el Caso 5, permite suponer $b_3 = 1$, obteniéndose $\mu^{7,0,0}_{(6,1,1)}$.

- Caso 14: $a_2 = b_2 = b_4 = 0, \quad a_1b_3 \neq 0, \quad a_1 \neq 2b_3^2.$

  El cambio de escala dado en el Caso 5, permite suponer $b_3 = 1$, obteniéndose $\mu^{7,0,\delta}_{(6,1,1)}$, con $\delta \in \mathbf{C} - \{0,2\}$.

- Caso 15: $a_1 = a_2 = b_3 = b_4 = 0, \quad b_2 \neq 0.$

  El cambio de escala dado en el Caso 3, permite suponer $b_2 = 1$, obteniéndose $\mu^{7,1,0}_{(6,1,1)}$.

- Caso 16: $a_2 = b_3 = b_4 = 0, \quad a_1b_2 \neq 0, \quad a_1 \neq 2b_2^2.$

  El cambio de escala dado en el Caso 3, permite suponer $b_2 = 1$, obteniéndose $\mu^{7,1,\delta}_{(6,1,1)}$, con $\delta \in \mathbf{C} - \{0,2\}$.

- Caso 17: $a_1 = a_2 = b_4 = 0, \quad (b_2+b_3)b_2b_3 \neq 0.$

  El cambio de escala dado en el Caso 9, permite suponer $b_2+b_3 = 1$, obteniéndose $\mu^{7,\lambda,0}_{(6,1,1)}$, con $\lambda \in \mathbf{C} - \{0,1\}$.

- Caso 18: $a_2 = b_4 = 0, \quad a_1(b_2+b_3)b_2b_3 \neq 0, \quad a_1 \neq 2(b_2+b_3)^2$.

  El cambio de escala dado en el Caso 9, permite suponer $b_2+b_3 = 1$, obteniéndose $\mu^{7,\lambda,\delta}_{(6,1,1)}$, con $\lambda \in \mathbf{C} - \{0,1\}$ y $\delta \in \mathbf{C} - \{0,2\}$.

En segundo lugar, y por último, se va estudiar el caso $a_2 \neq 0$.

Si se elige

$$P_1 = -\frac{b_3 P_0}{a_2}$$

en b_3', se puede suponer siempre $b_3 = 0$. si se vuelven a efectuar los cambios genéricos, para mantener $b_3 = 0$, hay que suponer $P_1 = 0$, y entonces el resto de parámetros queda como sigue

$$\begin{aligned} b_2' &= \frac{b_2\, Q_1}{P_0^2} \\ b_4' &= \frac{b_4\, Q_1}{P_0^3} \\ a_1' &= \frac{a_1\, Q_1^2}{P_0^4} \\ a_2' &= \frac{a_2\, Q_1^2}{P_0^3} \end{aligned}$$

con $P_0Q_1 \neq 0$.

Es fácil deducir que las nulidades de b_2, b_4 y de a_1 son invariantes. Por tanto, la configuración en este caso de los parámetros es la que sigue

$$a_2 \neq 0 \Longrightarrow b_3 = 0; \begin{cases} b_2 = 0 \begin{cases} b_4 = 0 \begin{cases} a_1 = 0 \\ a_1 \neq 0 \end{cases} \\ b_4 \neq 0 \begin{cases} a_1 = 0 \\ a_1 \neq 0 \end{cases} \end{cases} \\ b_2 \neq 0 \begin{cases} b_4 = 0 \begin{cases} a_1 = 0 \\ a_1 \neq 0 \end{cases} \\ b_4 \neq 0 \begin{cases} a_1 = 0 \\ a_1 \neq 0 \end{cases} \end{cases} \end{cases}$$

Teniendo esto en cuenta, se llega a que las únicas álgebras o familias de álgebras son las siguientes

- Caso 19: $a_1 = b_2 = b_3 = b_4 = 0, \quad a_2 \neq 0$.

  El cambio de escala dado por

$$\begin{cases} X_0' = X_0 \\ X_1' = \sqrt{\dfrac{1}{a_2}} X_1 \end{cases}$$

  permite suponer $a_2 = 1$, y se llega a $\mu^8_{(6,1,1)}$.

- Caso 20: $b_2 = b_3 = b_4 = 0, \quad a_1 a_2 \neq 0$.

  El cambio de escala dado por

$$\begin{cases} X_0' = \dfrac{a_1}{a_2} X_0 \\ X_1' = \sqrt{\dfrac{a_1^3}{a_2^4}} X_1 \end{cases}$$

  permite suponer $a_1 = a_2 = 1$, y se llega a $\mu^9_{(6,1,1)}$.

- Caso 21: $a_1 = b_2 = b_3 = 0, \quad a_2 b_4 \neq 0$.

  El cambio de escala dado por

$$\begin{cases} X_0' = \sqrt[3]{\dfrac{b_4^2}{a_2}} X_0 \\ X_1' = \dfrac{b_4}{a_2} X_1 \end{cases}$$

  permite suponer $a_2 = b_4 = 1$, y se llega a $\mu^{10,0}_{(6,1,1)}$.

- Caso 22: $b_2 = b_3 = 0, \quad a_1 a_2 b_4 \neq 0$.

  El cambio de escala dado en el Caso 21, permite suponer $a_2 = b_4 = 1$, y se llega a $\mu^{10,\alpha}_{(6,1,1)}$, con $\alpha \in \mathbf{C}_3 - \{0\}$.

- Caso 23: $a_1 = b_3 = b_4 = 0, \quad a_2 b_2 \neq 0$.

  El cambio de escala dado por

$$\begin{cases} X_0' = \dfrac{b_2^4}{a_2} X_0 \\ X_1' = \dfrac{b_2^7}{a_2} X_1 \end{cases}$$

  permite suponer $a_2 = b_2 = 1$, y se llega a $\mu^{11,0,0}_{(6,1,1)}$.

- Caso 24: $b_3 = b_4 = 0, \quad a_1a_2b_2 \neq 0$.

  El cambio de escala dado en el Caso 23, permite suponer $a_2 = b_2 = 1$, y se llega a $\mu^{11,0,\delta}_{(6,1,1)}$, con $\delta \in \mathbf{C} - \{0\}$.

- Caso 25: $a_1 = b_3 = 0, \quad a_2b_2b_4 \neq 0$.

  El cambio de escala dado en el Caso 23, permite suponer $a_2 = b_2 = 1$, y se llega a $\mu^{11,\nu,0}_{(6,1,1)}$, con $\nu \in \mathbf{C} - \{0\}$.

- Caso 26: $b_3 = 0, \quad a_1a_2b_2b_4 \neq 0$.

  El cambio de escala dado en el Caso 23, permite suponer $a_2 = b_2 = 1$, y se llega a $\mu^{11,\nu,\delta}_{(6,1,1)}$, con $\nu, \delta \in \mathbf{C} - \{0\}$. □

Proposición 2.2.6.– *Sea $\mathfrak{g}$ cualquier álgebra de Lie en $AL2F(6,4)$. Entonces existen dos subfamilias, no isomorfas entre sí, cuyas leyes vienen dadas, en una cierta base adaptada $\{X_0, X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6, Y\}$, por*

$$AL2F(6,4)(0): \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1} & 1 \leq i \leq 5 \\ [X_1, X_2] = bX_4 + b_4X_5 + b_5X_6 + \alpha Y & \\ [X_1, X_3] = bX_5 + b_4X_6 & \\ [X_1, X_4] = bX_6 + Y & \\ [X_2, X_3] = -Y & \end{cases}$$

$$AL2F(6,4)(1): \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1} & 1 \leq i \leq 5 \\ [X_1, X_2] = 2b_1X_3 + bX_4 + b_4X_5 + b_5X_6 + \alpha Y & \\ [X_1, X_3] = 2b_1X_4 + bX_5 + b_4X_6 & \\ [X_1, X_4] = b_1X_5 + bX_6 + Y & \\ [X_2, X_3] = b_1X_5 + Y & \\ [X_2, X_4] = b_1X_6 & \\ [X_1, Y] = -2b_1^2X_6 & \end{cases}$$
$$\textit{con } b_1 \neq 0$$

Demostración: Si $\mathfrak{g} \in AL2F(6,4)$, su ley vendrá dada por los siguientes productos

$$\begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1} & 1 \leq i \leq 5 \\ [X_1, X_2] = 2b_1X_3 + (b_2+b_3)X_4 + b_4X_5 + b_5X_6 + \alpha Y & \\ [X_1, X_3] = 2b_1X_4 + (b_2+b_3)X_5 + b_4X_6 & \\ [X_1, X_4] = b_1X_5 + b_2X_6 + \beta Y & \\ [X_2, X_3] = b_1X_5 + b_3X_6 - \beta Y & \\ [X_2, X_4] = b_1X_6 & \\ [X_1, Y] = -\dfrac{2b_1^2}{\beta}X_6 & \end{cases}$$
$$\text{con } \beta \neq 0$$

Un sencillo cálculo, prueba que la nulidad de b_1 es invariante, pues

$$dim([\mathcal{C}^1(\mathfrak{g}), \mathcal{C}^3(\mathfrak{g})]) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad b_1 = 0 \\ 1 & \text{si} \quad b_1 \neq 0 \end{cases}$$

Caso 1: Si $b_1 = 0$, mediante el cambio de base dado por

$$\begin{cases} X_0' = X_0 \\ X_1' = X_1 \\ Y' = b_3X_6 + \beta Y \end{cases}$$

se puede considerar $\beta = 1$, obteniéndose la familia $AL2F(6,4)(0)$, sin más que cambiar $b_2 + b_3 = b$.

Caso 2: Si $b_1 = 0$, mediante el cambio de base dado en el caso 1, se puede suponer $\beta = 1$, obteniéndose la familia $AL2F(6,4)(1)$, sin más que cambiar $b_2 + b_3 = b$. □

Esta subdivisión, es esencial para poder encontrar todas las álgebras, como se verá en los teoremas siguientes, pues aunque el tratamiento en el fondo es el mismo, en la forma no y el cálculo se complica sustancialmente cuando $b_1 \neq 0$, ni incluso utilizando el *Mathematica*, se ha podido unificar estas dos subfamilias, para aplicarles el mismo tratamiento. Tanto en una como en otra, se ha hecho imprescindible en tratamiento computacional, sin el cual no se hubiera hecho posible.

Teorema 2.2.7.– *Sea $\mathfrak{g}$ cualquier álgebra en $AL2F(6,4)(0)$. Entonces es isomorfa a una de las siguientes álgebras, no isomorfas entre sí, de leyes $\mu^i_{(6,1,1)}$, $12 \leq i \leq 17$, dadas por*

$$\mu^{12}_{(6,1,1)}:\begin{cases}[X_0,X_i]=X_{i+1} & 1\le i\le 5\\ [X_1,X_4]=Y\\ [X_2,X_3]=-Y\end{cases}$$

$$\mu^{13}_{(6,1,1)}:\begin{cases}[X_0,X_i]=X_{i+1} & 1\le i\le 5\\ [X_1,X_2]=X_6\\ [X_1,X_4]=Y\\ [X_2,X_3]=Y\end{cases}$$

$$\mu^{14}_{(6,1,1)}:\begin{cases}[X_0,X_i]=X_{i+1} & 1\le i\le 5\\ [X_1,X_2]=X_4\\ [X_1,X_3]=X_5\\ [X_1,X_4]=X_6+Y\\ [X_2,X_3]=-Y\end{cases}$$

$$\mu^{15}_{(6,1,1)}:\begin{cases}[X_0,X_i]=X_{i+1} & 1\le i\le 5\\ [X_1,X_2]=X_5\\ [X_1,X_3]=X_6\\ [X_1,X_4]=Y\\ [X_2,X_3]=-Y\end{cases}$$

$$\mu^{16}_{(6,1,1)}:\begin{cases}[X_0,X_i]=X_{i+1} & 1\le i\le 5\\ [X_1,X_2]=X_5+X_6\\ [X_1,X_3]=X_6\\ [X_1,X_4]=Y\\ [X_2,X_3]=-Y\end{cases}$$

$$\mu^{17}_{(6,1,1)}:\begin{cases}[X_0,X_i]=X_{i+1} & 1\le i\le 5\\ [X_1,X_2]=X_4+X_6\\ [X_1,X_3]=X_5\\ [X_1,X_4]=X_6+Y\\ [X_2,X_3]=-Y\end{cases}$$

Demostración: Si $\mathfrak{g}\in AL2F(6,4)(0)$, su ley vendrá dada por los siguientes productos

$$AL2F(6,4)(0):\begin{cases}[X_0,X_i]=X_{i+1} & 1\le i\le 5\\ [X_1,X_2]=bX_4+b_4X_5-b_5X_6+\alpha Y\\ [X_1,X_3]=bX_5+b_4X_6\\ [X_1,X_4]=bX_6+Y\\ [X_2,X_3]=-Y\end{cases}$$

Mediante cambios de base genéricos, cambiando los dos únicos generadores X_0 y X_1, se va estudiar la situación. La notación seguida es la misma que en otras situaciones, es decir,

$$X_0' = P_0X_0 + P_1X_1 + P_2X_2 + P_3X_3 + P_4X_4 + P_5X_5 + P_6X_6 + P_7Y$$

$$X_1' = Q_0X_0 + Q_1X_1 + Q_2X_2 + Q_3X_3 + Q_4X_4 + Q_5X_5 + Q_6X_6 + Q_7Y$$

si se va calculando el resto de vectores de la base (con tratamiento computacional), y se van efectuando los productos e imponiendo todas las condiciones para no salirse de la familia, se obtienen los nuevos parámetros, que se van a detallar

$$b' = \frac{bQ_1}{P_0^2}$$
$$b_4' = \frac{(b_4P_0 - 2b^2P_1)Q_1}{P_0^4}$$
$$b_5' = \frac{(b_5{P_0}^2 - 5bb_4P_0P_1 + 5b^3P_1^2)Q_1}{P_0^6}$$
$$\alpha' = \frac{\alpha P_0^4Q_1^2 - b_4P_0^3P_1Q_1^2 + b^2P_0^2P_1^2Q_1^2 - P_0^4Q_2^2 + 2P_0^4Q_1Q_3}{P_0^6Q_1^2}$$

con $P_0Q_1 \neq 0$, que sería la condición de determinante, y $Q_0 = 0$ para no salirse de la familia.

Si se observa el nuevo parámetro α', se deduce que existe al menos un cambio de base (eligiendo adecuadamente, por ejemplo, Q_3) que permite hacer $\alpha' = 0$ independientemente del resto de parámetros.

A la vista de los resultados, se tiene también que la nulidad de b es invariante. Si se efectúan algunos cálculos se demuestra, además, que la nulidad de $4bb_5 - 5b_4^2$ es invariante, pues

$$4b'b_5' - 5{b_4'}^2 = \frac{Q_1^2}{P_0^6}(4bb_5 - 5b_4^2)$$

Caso $4bb_5 - 5b_4^2 = 0.$

- Subcaso $b = 0$. En este subcaso, se tiene que $b_4 = 0$, además, imponiendo esta condición en el nuevo b_5', se llega a

$$b_5' = \frac{Q_1}{P_0^4}b_5$$

lo cual implica que la nulidad de b_5 es invariante.

La situación es la siguiente:

$$\alpha = b = 0 \Longrightarrow b_4 = 0 \begin{cases} b_5 = 0 \\ b_5 \neq 0 \end{cases}$$

con lo que se deduce que las únicas álgebras no isomorfas entre sí en este subcaso son:

- (1) $\alpha = b = b_4 = b_5 = 0$. Sustituyendo directamente en la familia, se obtiene $\mu^{12}_{(6,1,1)}$.
- (2) $\alpha = b = b_4 = 0, \quad b_5 \neq 0$.
  El cambio de escala dado por

$$\begin{cases} X'_0 = X_0 \\ X'_1 = \dfrac{1}{b_5} X_1 \end{cases}$$

  permite suponer $b_5 = 1$, obteniéndose $\mu^{13}_{(6,1,1)}$.

- Subcaso $b \neq 0$. En este caso, si se elige

$$P_1 = \frac{b_4 P_0}{2b^2}$$

se puede suponer $b_4 = 0$. Además, como en este caso $4bb_5 - 5b_4^2 = 0$, se tendría que $b_5 = 0$, y la situación sería

$$\alpha = 0, \quad b \neq 0 \Longrightarrow b_4 = 0; \; b_5 = 0$$

- (3) $\alpha = b_4 = b_5 = 0, \quad b \neq 0$.
  El cambio de escala dado por

$$\begin{cases} X'_0 = X_0 \\ X'_1 = \dfrac{1}{b} X_1 \end{cases}$$

  permite suponer $b = 1$, obteniéndose $\mu^{14}_{(6,1,1)}$.

Caso $\quad 4bb_5 - 5b_4^2 \neq 0.$

- Subcaso $b = 0$. Teniendo en cuenta el caso, se tendría que $b_4 \neq 0$ y se llega a
$$b_5' = \frac{Q_1}{P_0^4} b_5$$
lo que demuestra que la nulidad de b_5 es invariante. La situación es la siguiente:
$$\alpha = b = 0 \Longrightarrow b_4 \neq 0 \begin{cases} b_5 = 0 \\ b_5 \neq 0 \end{cases}$$
  - (4) $\alpha = b = b_5 = 0$, $b_4 \neq 0$.
  El cambio de escala dado por
  $$\begin{cases} X_0' = X_0 \\ X_1' = \dfrac{1}{b_4} X_1 \end{cases}$$
  permite suponer $b_4 = 1$, obteniéndose $\mu^{15}_{(6,1,1)}$.
  - (5) $\alpha = b = 0$, $b_4 b_5 \neq 0$.
  El cambio de escala dado por
  $$\begin{cases} X_0' = \dfrac{b_5}{b_4} X_0 \\ X_1' = \dfrac{b_5^3}{b_4^4} X_1 \end{cases}$$
  permite suponer $b_4 = b_5 = 1$, obteniéndose $\mu^{16}_{(6,1,1)}$.
- Subcaso $b \neq 0$. Eligiendo
$$P_1 = \frac{b_4 P_0}{2b^2}$$
se puede suponer $b_4 = 0$. Teniendo en cuenta el caso en el que se está, se deduce que $b_5 \neq 0$. La situación es:
$$\alpha = 0, \quad b \neq 0 \Longrightarrow b_4 = 0 \Longrightarrow b_5 \neq 0$$
  - (6) $\alpha = b_4 = 0$, $bb_5 \neq 0$.
  El cambio de escala dado por
  $$\begin{cases} X_0' = \sqrt[4]{\dfrac{b_4^2}{b}} X_0 \\ X_1' = \sqrt[4]{\dfrac{b_4^2}{b^3}} X_1 \end{cases}$$
  permite suponer $b = b_5 = 1$, obteniéndose $\mu^{17}_{(6,1,1)}$. $\square$

Teorema 2.2.8.– *Sea $\mathfrak{g}$ cualquier álgebra en $AL2F(6,4)(1)$. Entonces es isomorfa a una de las siguientes álgebras, no isomorfas entre sí, de leyes $\mu^i_{(6,1,1)}$, $18 \leq i \leq 21$, dadas por*

$$\mu^{18}_{(6,1,1)} : \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1} & 1 \leq i \leq 5 \\ [X_1, X_2] = 2X_3 \\ [X_1, X_3] = 2X_4 \\ [X_1, X_4] = X_5 + Y \\ [X_2, X_3] = X_5 - Y \\ [X_2, X_4] = X_6 \\ [X_1, Y] = -2X_6 \end{cases}$$

$$\mu^{19}_{(6,1,1)} : \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1} & 1 \leq i \leq 5 \\ [X_1, X_2] = 2X_3 + X_4 + 2/3X_5 \\ [X_1, X_3] = 2X_4 + X_5 + 2/3X_6 \\ [X_1, X_4] = X_5 + X_6 + Y \\ [X_2, X_3] = X_5 - Y \\ [X_2, X_4] = X_6 \\ [X_1, Y] = -2X_6 \end{cases}$$

$$\mu^{20}_{(6,1,1)} : \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1} & 1 \leq i \leq 5 \\ [X_1, X_2] = 2X_3 + X_5 \\ [X_1, X_3] = 2X_4 + X_6 \\ [X_1, X_4] = X_5 + X_6 + Y \\ [X_2, X_3] = X_5 - Y \\ [X_2, X_4] = X_6 \\ [X_1, Y] = -2X_6 \end{cases}$$

$$\mu^{21}_{(6,1,1)} : \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1} & 1 \leq i \leq 5 \\ [X_1, X_2] = 2X_3 + X_4 \\ [X_1, X_3] = 2X_4 + X_5 \\ [X_1, X_4] = X_5 + X_6 + Y \\ [X_2, X_3] = X_5 - Y \\ [X_2, X_4] = X_6 \\ [X_1, Y] = -2X_6 \end{cases}$$

Demostración: Si $\mathfrak{g} \in AL2F(6,4)(1)$ su ley vendrá dada por los siguientes productos:

$$AL2F(6,4)(1):\begin{cases}[X_0,X_i]=X_{i+1} & 1\leq i\leq 5\\ [X_1,X_2]=2b_1X_3+bX_4+b_4X_5+b_5X_6+\alpha Y & \\ [X_1,X_3]=2b_1X_4+bX_5+b_4X_6 & \\ [X_1,X_4]=b_1X_5+bX_6+Y & \\ [X_2,X_3]=b_1X_5+Y & \\ [X_2,X_4]=b_1X_6 & \\ [X_1,Y]=-2b_1^2X_6 & \end{cases}$$
con $b_1\neq 0$

Utilizando las mismas técnicas que en teoremas anteriores y haciendo cambios de base genéricos, se obtienen los nuevos parámetros. En esta familia se puede observar, a la vista de los resultados, que es imprescindible el uso del ordenador.

Se recuerda que los únicos generadores son X_0 y X_1 y que la notación seguida es:

$$X_0'=P_0X_0+P_1X_1+P_2X_2+P_3X_3+P_4X_4+P_5X_5+P_6X_6+P_7Y$$

$$X_1'=Q_0X_0+Q_1X_1+Q_2X_2+Q_3X_3+Q_4X_4+Q_5X_5+Q_6X_6+Q_7Y$$

Es imprescindible calcular todos los productos, incluso aquellos que son cero, para comprobar que no se sale de la familia, obteniéndose

$$b_1'=\frac{(P_1\,Q_0-P_0\,Q_1)}{(-P_0+b_1\,P_1)\,(P_0+2\,b_1\,P_1)}b_1$$

$$b'=-\frac{(P_1\,Q_0-P_0\,Q_1)}{(P_0+2\,b_1\,P_1)^3}b$$

$$\begin{aligned}b_4'=(&b_4\,P_0^2\,P_1^2\,Q_0^2-2\,b^2\,P_0\,P_1^3\,Q_0^2-2\,\alpha\,b_1^2\,P_0\,P_1^3\,Q_0^2+2\,b_1\,b_4\,P_0\,P_1^3\,Q_0^2+\\ &b^2\,b_1\,P_1^4\,Q_0^2-4\,\alpha\,b_1^3\,P_1^4\,Q_0^2+b_1\,P_0^2\,P_2^2\,Q_0^2+4\,b_1^2\,P_0\,P_1\,P_2^2\,Q_0^2+\\ &4\,b_1^3\,P_1^2\,P_2^2\,Q_0^2-2\,b_1\,P_0^2\,P_1\,P_3\,Q_0^2-8\,b_1^2\,P_0\,P_1^2\,P_3\,Q_0^2-8\,b_1^3\,P_1^3\,P_3\,Q_0^2-\\ &2\,b_4\,P_0^3\,P_1\,Q_0\,Q_1+4\,b^2\,P_0^2\,P_1^2\,Q_0\,Q_1+4\,\alpha\,b_1^2\,P_0^2\,P_1^2\,Q_0\,Q_1-\\ &4\,b_1\,b_4\,P_0^2\,P_1^2\,Q_0\,Q_1+2\,b^2\,b_1^2\,P_1^4\,Q_0\,Q_1-8\,\alpha\,b_1^4\,P_1^4\,Q_0\,Q_1+\\ &4\,b_1^2\,P_0^2\,P_2^2\,Q_0\,Q_1+2\,b_1\,P_0^3\,P_3\,Q_0\,Q_1+4\,b_1^2\,P_0^2\,P_1\,P_3\,Q_0\,Q_1-\\ &8\,b_1^4\,P_1^3\,P_3\,Q_0\,Q_1+b_4\,P_0^4\,Q_1^2-2\,b^2\,P_0^3\,P_1\,Q_1^2-2\,\alpha\,b_1^2\,P_0^3\,P_1\,Q_1^2+\\ &2\,b_1\,b_4\,P_0^3\,P_1\,Q_1^2+b^2\,b_1\,P_0^2\,P_1^2\,Q_1^2-4\,\alpha\,b_1^3\,P_0^2\,P_1^2\,Q_1^2-4\,b^2\,b_1^3\,P_1^4\,Q_1^2+\\ &16\,\alpha\,b_1^5\,P_1^4\,Q_1^2+4\,b_1^3\,P_0^2\,P_2^2\,Q_1^2+16\,b_1^4\,P_0\,P_1\,P_2^2\,Q_1^2+48\,b_1^5\,P_1^2\,P_2^2\,Q_1^2+\end{aligned}$$

$$4\, b_1^2\, P_0^3\, P_3\, Q_1^2 + 16\, b_1^3\, P_0^2\, P_1\, P_3\, Q_1^2 + 16\, b_1^4\, P_0\, P_1^2\, P_3\, Q_1^2 -$$
$$-16\, b_1^5\, P_1^3\, P_3\, Q_1^2 - 2\, b_1\, P_0^3\, P_2\, Q_0\, Q_2 - 12\, b_1^2\, P_0^2\, P_1\, P_2\, Q_0\, Q_2 +$$
$$8\, b_1^4\, P_1^3\, P_2\, Q_0\, Q_2 - 4\, b_1^2\, P_0^3\, P_2\, Q_1\, Q_2 - 24\, b_1^3\, P_0^2\, P_1\, P_2\, Q_1\, Q_2 -$$
$$48\, b_1^4\, P_0\, P_1^2\, P_2\, Q_1\, Q_2 - 80\, b_1^5\, P_1^3\, P_2\, Q_1\, Q_2 + b_1\, P_0^4\, Q_2^2 +$$
$$8\, b_1^2\, P_0^3\, P_1\, Q_2^2 + 24\, b_1^3\, P_0^2\, P_1^2\, Q_2^2 + 32\, b_1^4\, P_0\, P_1^3\, Q_2^2 + 16\, b_1^5\, P_1^4\, Q_2^2)\, /$$
$$\big((P_0 - b_1\, P_1)\, (P_0 + 2\, b_1\, P_1)^5\, (-P_1\, Q_0 + P_0\, Q_1)\big) +$$
$$\frac{2\, b_1\, Q_3}{(-P_0 + b_1\, P_1)\, (P_0 + 2\, b_1\, P_1)^2}$$

$$b_5' = (-b_5\, P_0^3\, P_1^3\, Q_0^3 + 2\, b\, \alpha\, b_1\, P_0^2\, P_1^4\, Q_0^3 + 5\, b\, b_4\, P_0^2\, P_1^4\, Q_0^3 - 6\, b_1\, b_5\, P_0^2\, P_1^4\, Q_0^3 -$$
$$5\, b^3\, P_0\, P_1^5\, Q_0^3 + 2\, b\, \alpha\, b_1^2\, P_0\, P_1^5\, Q_0^3 + 14\, b\, b_1\, b_4\, P_0\, P_1^5\, Q_0^3 -$$
$$12\, b_1^2\, b_5\, P_0\, P_1^5\, Q_0^3 - b^3\, b_1\, P_1^6\, Q_0^3 - 4\, b\, \alpha\, b_1^3\, P_1^6\, Q_0^3 + 8\, b\, b_1^2\, b_4\, P_1^6\, Q_0^3 -$$
$$8\, b_1^3\, b_5\, P_1^6\, Q_0^3 + 3\, b\, b_1\, P_0^2\, P_1^2\, P_2^2\, Q_0^3 + 12\, b\, b_1^2\, P_0\, P_1^3\, P_2^2\, Q_0^3 +$$
$$12\, b\, b_1^3\, P_1^4\, P_2^2\, Q_0^3 + b_1\, P_0^3\, P_2^3\, Q_0^3 + 6\, b_1^2\, P_0^2\, P_1\, P_2^3\, Q_0^3 +$$
$$12\, b_1^3\, P_0\, P_1^2\, P_2^3\, Q_0^3 + 8\, b_1^4\, P_1^3\, P_2^3\, Q_0^3 - 6\, b\, b_1\, P_0^2\, P_1^3\, P_3\, Q_0^3 -$$
$$24\, b\, b_1^2\, P_0\, P_1^4\, P_3\, Q_0^3 - 24\, b\, b_1^3\, P_1^5\, P_3\, Q_0^3 - 3\, b_1\, P_0^3\, P_1\, P_2\, P_3\, Q_0^3 -$$
$$18\, b_1^2\, P_0^2\, P_1^2\, P_2\, P_3\, Q_0^3 - 36\, b_1^3\, P_0\, P_1^3\, P_2\, P_3\, Q_0^3 - 24\, b_1^4\, P_1^4\, P_2\, P_3\, Q_0^3 +$$
$$3\, b_1\, P_0^3\, P_1^2\, P_4\, Q_0^3 + 18\, b_1^2\, P_0^2\, P_1^3\, P_4\, Q_0^3 + 36\, b_1^3\, P_0\, P_1^4\, P_4\, Q_0^3 +$$
$$24\, b_1^4\, P_1^5\, P_4\, Q_0^3 + 3\, b_5\, P_0^4\, P_1^2\, Q_0^2\, Q_1 - 6\, b\, \alpha\, b_1\, P_0^3\, P_1^3\, Q_0^2\, Q_1 -$$
$$15\, b\, b_4\, P_0^3\, P_1^3\, Q_0^2\, Q_1 + 18\, b_1\, b_5\, P_0^3\, P_1^3\, Q_0^2\, Q_1 + 15\, b^3\, P_0^2\, P_1^4\, Q_0^2\, Q_1 -$$
$$6\, b\, \alpha\, b_1^2\, P_0^2\, P_1^4\, Q_0^2\, Q_1 - 42\, b\, b_1\, b_4\, P_0^2\, P_1^4\, Q_0^2\, Q_1 + 36\, b_1^2\, b_5\, P_0^2\, P_1^4\, Q_0^2\, Q_1 +$$
$$3\, b^3\, b_1\, P_0\, P_1^5\, Q_0^2\, Q_1 + 12\, b\, \alpha\, b_1^3\, P_0\, P_1^5\, Q_0^2\, Q_1 - 24\, b\, b_1^2\, b_4\, P_0\, P_1^5\, Q_0^2\, Q_1 +$$
$$24\, b_1^3\, b_5\, P_0\, P_1^5\, Q_0^2\, Q_1 - 6\, b\, b_1\, P_0^3\, P_1\, P_2^2\, Q_0^2\, Q_1 - 18\, b\, b_1^2\, P_0^2\, P_1^2\, P_2^2\, Q_0^2\, Q_1 +$$
$$24\, b\, b_1^4\, P_1^4\, P_2^2\, Q_0^2\, Q_1 + 6\, b_1^2\, P_0^3\, P_2^3\, Q_0^2\, Q_1 + 36\, b_1^3\, P_0^2\, P_1\, P_2^3\, Q_0^2\, Q_1 +$$
$$72\, b_1^4\, P_0\, P_1^2\, P_2^3\, Q_0^2\, Q_1 + 48\, b_1^5\, P_1^3\, P_2^3\, Q_0^2\, Q_1 + 15\, b\, b_1\, P_0^3\, P_1^2\, P_3\, Q_0^2\, Q_1 +$$
$$54\, b\, b_1^2\, P_0^2\, P_1^3\, P_3\, Q_0^2\, Q_1 + 36\, b\, b_1^3\, P_0\, P_1^4\, P_3\, Q_0^2\, Q_1 - 24\, b\, b_1^4\, P_1^5\, P_3\, Q_0^2\, Q_1 +$$
$$3\, b_1\, P_0^4\, P_2\, P_3\, Q_0^2\, Q_1 + 6\, b_1^2\, P_0^3\, P_1\, P_2\, P_3\, Q_0^2\, Q_1 - 36\, b_1^3\, P_0^2\, P_1^2\, P_2\, P_3\, Q_0^2\, Q_1 -$$
$$120\, b_1^4\, P_0\, P_1^3\, P_2\, P_3\, Q_0^2\, Q_1 - 96\, b_1^5\, P_1^4\, P_2\, P_3\, Q_0^2\, Q_1 - 6\, b_1\, P_0^4\, P_1\, P_4\, Q_0^2\, Q_1 -$$

$30\ b_1^2\ P_0^3\ P_1^2\ P_4\ Q_0^2\ Q_1 - 36\ b_1^3\ P_0^2\ P_1^3\ P_4\ Q_0^2\ Q_1 + 24\ b_1^4\ P_0\ P_1^4\ P_4\ Q_0^2\ Q_1 +$

$48\ b_1^5\ P_1^5\ P_4\ Q_0^2\ Q_1 - 3\ b_5\ P_0^5\ P_1\ Q_0\ Q_1^2 + 6\ b\ \alpha\ b_1\ P_0^4\ P_1^2\ Q_0\ Q_1^2 +$

$15\ b\ b_4\ P_0^4\ P_1^2\ Q_0\ Q_1^2 - 18\ b_1\ b_5\ P_0^4\ P_1^2\ Q_0\ Q_1^2 - 15\ b^3\ P_0^3\ P_1^3\ Q_0\ Q_1^2 +$

$6\ b\ \alpha\ b_1^2\ P_0^3\ P_1^3\ Q_0\ Q_1^2 + 42\ b\ b_1\ b_4\ P_0^3\ P_1^3\ Q_0\ Q_1^2 - 36\ b_1^2\ b_5\ P_0^3\ P_1^3\ Q_0\ Q_1^2 -$

$3\ b^3\ b_1\ P_0^2\ P_1^4\ Q_0\ Q_1^2 - 12\ b\ \alpha\ b_1^3\ P_0^2\ P_1^4\ Q_0\ Q_1^2 + 24\ b\ b_1^2\ b_4\ P_0^2\ P_1^4\ Q_0\ Q_1^2 -$

$24\ b_1^3\ b_5\ P_0^2\ P_1^4\ Q_0\ Q_1^2 + 3\ b\ b_1\ P_0^4\ P_2^2\ Q_0\ Q_1^2 - 36\ b\ b_1^3\ P_0^2\ P_1^2\ P_2^2\ Q_0\ Q_1^2 -$

$48\ b\ b_1^4\ P_0\ P_1^3\ P_2^2\ Q_0\ Q_1^2 + 12\ b_1^3\ P_0^3\ P_2^3\ Q_0\ Q_1^2 + 72\ b_1^4\ P_0^2\ P_1\ P_2^3\ Q_0\ Q_1^2 +$

$144\ b_1^5\ P_0\ P_1^2\ P_2^3\ Q_0\ Q_1^2 + 96\ b_1^6\ P_1^3\ P_2^3\ Q_0\ Q_1^2 - 12\ b\ b_1\ P_0^4\ P_1\ P_3\ Q_0\ Q_1^2 -$

$36\ b\ b_1^2\ P_0^3\ P_1^2\ P_3\ Q_0\ Q_1^2 + 48\ b\ b_1^4\ P_0\ P_1^4\ P_3\ Q_0\ Q_1^2 + 12\ b_1^2\ P_0^4\ P_2\ P_3\ Q_0\ Q_1^2 +$

$60\ b_1^3\ P_0^3\ P_1\ P_2\ P_3\ Q_0\ Q_1^2 + 72\ b_1^4\ P_0^2\ P_1^2\ P_2\ P_3\ Q_0\ Q_1^2 -$

$48\ b_1^5\ P_0\ P_1^3\ P_2\ P_3\ Q_0\ Q_1^2 - 96\ b_1^6\ P_1^4\ P_2\ P_3\ Q_0\ Q_1^2 + 3\ b_1\ P_0^5\ P_4\ Q_0\ Q_1^2 +$

$6\ b_1^2\ P_0^4\ P_1\ P_4\ Q_0\ Q_1^2 - 36\ b_1^3\ P_0^3\ P_1^2\ P_4\ Q_0\ Q_1^2 - 120\ b_1^4\ P_0^2\ P_1^3\ P_4\ Q_0\ Q_1^2 -$

$96\ b_1^5\ P_0\ P_1^4\ P_4\ Q_0\ Q_1^2 + b_5\ P_0^6\ Q_1^3 - 2\ b\ \alpha\ b_1\ P_0^5\ P_1\ Q_1^3 - 5\ b\ b_4\ P_0^5\ P_1\ Q_1^3 +$

$6\ b_1\ b_5\ P_0^5\ P_1\ Q_1^3 + 5\ b^3\ P_0^4\ P_1^2\ Q_1^3 - 2\ b\ \alpha\ b_1^2\ P_0^4\ P_1^2\ Q_1^3 -$

$14\ b\ b_1\ b_4\ P_0^4\ P_1^2\ Q_1^3 + 12\ b_1^2\ b_5\ P_0^4\ P_1^2\ Q_1^3 + b^3\ b_1\ P_0^3\ P_1^3\ Q_1^3 +$

$4\ b\ \alpha\ b_1^3\ P_0^3\ P_1^3\ Q_1^3 - 8\ b\ b_1^2\ b_4\ P_0^3\ P_1^3\ Q_1^3 + 8\ b_1^3\ b_5\ P_0^3\ P_1^3\ Q_1^3 +$

$6\ b\ b_1^2\ P_0^4\ P_2^2\ Q_1^3 + 24\ b\ b_1^3\ P_0^3\ P_1\ P_2^2\ Q_1^3 + 24\ b\ b_1^4\ P_0^2\ P_1^2\ P_2^2\ Q_1^3 +$

$8\ b_1^4\ P_0^3\ P_2^3\ Q_1^3 + 48\ b_1^5\ P_0^2\ P_1\ P_2^3\ Q_1^3 + 96\ b_1^6\ P_0\ P_1^2\ P_2^3\ Q_1^3 + 64\ b_1^7\ P_1^3\ P_2^3\ Q_1^3 +$

$3\ b\ b_1\ P_0^5\ P_3\ Q_1^3 + 6\ b\ b_1^2\ P_0^4\ P_1\ P_3\ Q_1^3 - 12\ b\ b_1^3\ P_0^3\ P_1^2\ P_3\ Q_1^3 -$

$24\ b\ b_1^4\ P_0^2\ P_1^3\ P_3\ Q_1^3 + 12\ b_1^3\ P_0^4\ P_2\ P_3\ Q_1^3 + 72\ b_1^4\ P_0^3\ P_1\ P_2\ P_3\ Q_1^3 +$

$144\ b_1^5\ P_0^2\ P_1^2\ P_2\ P_3\ Q_1^3 + 96\ b_1^6\ P_0\ P_1^3\ P_2\ P_3\ Q_1^3 + 6\ b_1^2\ P_0^5\ P_4\ Q_1^3 +$

$36\ b_1^3\ P_0^4\ P_1\ P_4\ Q_1^3 + 72\ b_1^4\ P_0^3\ P_1^2\ P_4\ Q_1^3 + 48\ b_1^5\ P_0^2\ P_1^3\ P_4\ Q_1^3 -$

$3\ b\ b_1\ P_0^3\ P_1^2\ P_2\ Q_0^2\ Q_2 - 18\ b\ b_1^2\ P_0^2\ P_1^3\ P_2\ Q_0^2\ Q_2 - 36\ b\ b_1^3\ P_0\ P_1^4\ P_2\ Q_0^2\ Q_2 -$

$24\ b\ b_1^4\ P_1^5\ P_2\ Q_0^2\ Q_2 - 3\ b_1\ P_0^4\ P_2^2\ Q_0^2\ Q_2 - 24\ b_1^2\ P_0^3\ P_1\ P_2^2\ Q_0^2\ Q_2 -$

$72\ b_1^3\ P_0^2\ P_1^2\ P_2^2\ Q_0^2\ Q_2 - 96\ b_1^4\ P_0\ P_1^3\ P_2^2\ Q_0^2\ Q_2 - 48\ b_1^5\ P_1^4\ P_2^2\ Q_0^2\ Q_2 +$

$3\ b_1\ P_0^4\ P_1\ P_3\ Q_0^2\ Q_2 + 24\ b_1^2\ P_0^3\ P_1^2\ P_3\ Q_0^2\ Q_2 + 72\ b_1^3\ P_0^2\ P_1^3\ P_3\ Q_0^2\ Q_2 +$

$96\ b_1^4\ P_0\ P_1^4\ P_3\ Q_0^2\ Q_2 + 48\ b_1^5\ P_1^5\ P_3\ Q_0^2\ Q_2 + 6\ b\ b_1\ P_0^4\ P_1\ P_2\ Q_0\ Q_1\ Q_2 +$

$36\ b\ b_1^2\ P_0^3\ P_1^2\ P_2\ Q_0\ Q_1\ Q_2 + 72\ b\ b_1^3\ P_0^2\ P_1^3\ P_2\ Q_0\ Q_1\ Q_2 +$

$48\ b\ b_1^4\ P_0\ P_1^4\ P_2\ Q_0\ Q_1\ Q_2 - 12\ b_1^2\ P_0^4\ P_2^2\ Q_0\ Q_1\ Q_2-$
$96\ b_1^3\ P_0^3\ P_1\ P_2^2\ Q_0\ Q_1\ Q_2 - 288\ b_1^4\ P_0^2\ P_1^2\ P_2^2\ Q_0\ Q_1\ Q_2-$
$384\ b_1^5\ P_0\ P_1^3\ P_2^2\ Q_0\ Q_1\ Q_2 - 192\ b_1^6\ P_1^4\ P_2^2\ Q_0\ Q_1\ Q_2 - 3\ b_1\ P_0^5\ P_3\ Q_0\ Q_1\ Q_2-$
$18\ b_1^2\ P_0^4\ P_1\ P_3\ Q_0\ Q_1\ Q_2 - 24\ b_1^3\ P_0^3\ P_1^2\ P_3\ Q_0\ Q_1\ Q_2+$
$48\ b_1^4\ P_0^2\ P_1^3\ P_3\ Q_0\ Q_1\ Q_2 + 144\ b_1^5\ P_0\ P_1^4\ P_3\ Q_0\ Q_1\ Q_2+$
$96\ b_1^6\ P_1^5\ P_3\ Q_0\ Q_1\ Q_2 - 3\ b\ b_1\ P_0^5\ P_2\ Q_1^2\ Q_2 - 18\ b\ b_1^2\ P_0^4\ P_1\ P_2\ Q_1^2\ Q_2-$
$36\ b\ b_1^3\ P_0^3\ P_1^2\ P_2\ Q_1^2\ Q_2 - 24\ b\ b_1^4\ P_0^2\ P_1^3\ P_2\ Q_1^2\ Q_2-$
$12\ b_1^3\ P_0^4\ P_2^2\ Q_1^2\ Q_2 - 96\ b_1^4\ P_0^3\ P_1\ P_2^2\ Q_1^2\ Q_2 - 288\ b_1^5\ P_0^2\ P_1^2\ P_2^2\ Q_1^2\ Q_2-$
$384\ b_1^6\ P_0\ P_1^3\ P_2^2\ Q_1^2\ Q_2 - 192\ b_1^7\ P_1^4\ P_2^2\ Q_1^2\ Q_2 - 6\ b_1^2\ P_0^5\ P_3\ Q_1^2\ Q_2-$
$48\ b_1^3\ P_0^4\ P_1\ P_3\ Q_1^2\ Q_2 - 144\ b_1^4\ P_0^3\ P_1^2\ P_3\ Q_1^2\ Q_2 - 192\ b_1^5\ P_0^2\ P_1^3\ P_3\ Q_1^2\ Q_2-$
$96\ b_1^6\ P_0\ P_1^4\ P_3\ Q_1^2\ Q_2 + 3\ b_1\ P_0^5\ P_2\ Q_0\ Q_2^2 + 30\ b_1^2\ P_0^4\ P_1\ P_2\ Q_0\ Q_2^2+$
$120\ b_1^3\ P_0^3\ P_1^2\ P_2\ Q_0\ Q_2^2 + 240\ b_1^4\ P_0^2\ P_1^3\ P_2\ Q_0\ Q_2^2 + 240\ b_1^5\ P_0\ P_1^4\ P_2\ Q_0\ Q_2^2+$
$96\ b_1^6\ P_1^5\ P_2\ Q_0\ Q_2^2 + 6\ b_1^2\ P_0^5\ P_2\ Q_1\ Q_2^2 + 60\ b_1^3\ P_0^4\ P_1\ P_2\ Q_1\ Q_2^2+$
$240\ b_1^4\ P_0^3\ P_1^2\ P_2\ Q_1\ Q_2^2 + 480\ b_1^5\ P_0^2\ P_1^3\ P_2\ Q_1\ Q_2^2 + 480\ b_1^6\ P_0\ P_1^4\ P_2\ Q_1\ Q_2^2+$
$192\ b_1^7\ P_1^5\ P_2\ Q_1\ Q_2^2 - b_1\ P_0^6\ Q_2^3 - 12\ b_1^2\ P_0^5\ P_1\ Q_2^3 - 60\ b_1^3\ P_0^4\ P_1^2\ Q_2^3-$
$160\ b_1^4\ P_0^3\ P_1^3\ Q_2^3 - 240\ b_1^5\ P_0^2\ P_1^4\ Q_2^3 - 192\ b_1^6\ P_0\ P_1^5\ Q_2^3 - 64\ b_1^7\ P_1^6\ Q_2^3+$
$3\ b\ b_1\ P_0^3\ P_1^3\ Q_0^2\ Q_3 + 18\ b\ b_1^2\ P_0^2\ P_1^4\ Q_0^2\ Q_3 + 36\ b\ b_1^3\ P_0\ P_1^5\ Q_0^2\ Q_3+$
$24\ b\ b_1^4\ P_1^6\ Q_0^2\ Q_3 + 3\ b_1\ P_0^4\ P_1\ P_2\ Q_0^2\ Q_3 + 24\ b_1^2\ P_0^3\ P_1^2\ P_2\ Q_0^2\ Q_3+$
$72\ b_1^3\ P_0^2\ P_1^3\ P_2\ Q_0^2\ Q_3 + 96\ b_1^4\ P_0\ P_1^4\ P_2\ Q_0^2\ Q_3 + 48\ b_1^5\ P_1^5\ P_2\ Q_0^2\ Q_3-$
$6\ b\ b_1\ P_0^4\ P_1^2\ Q_0\ Q_1\ Q_3 - 36\ b\ b_1^2\ P_0^3\ P_1^3\ Q_0\ Q_1\ Q_3 - 72\ b\ b_1^3\ P_0^2\ P_1^4\ Q_0\ Q_1\ Q_3-$
$48\ b\ b_1^4\ P_0\ P_1^5\ Q_0\ Q_1\ Q_3 - 3\ b_1\ P_0^5\ P_2\ Q_0\ Q_1\ Q_3 - 18\ b_1^2\ P_0^4\ P_1\ P_2\ Q_0\ Q_1\ Q_3-$
$24\ b_1^3\ P_0^3\ P_1^2\ P_2\ Q_0\ Q_1\ Q_3 + 48\ b_1^4\ P_0^2\ P_1^3\ P_2\ Q_0\ Q_1\ Q_3+$
$144\ b_1^5\ P_0\ P_1^4\ P_2\ Q_0\ Q_1\ Q_3 + 96\ b_1^6\ P_1^5\ P_2\ Q_0\ Q_1\ Q_3+$
$3\ b\ b_1\ P_0^5\ P_1\ Q_1^2\ Q_3 + 18\ b\ b_1^2\ P_0^4\ P_1^2\ Q_1^2\ Q_3 + 36\ b\ b_1^3\ P_0^3\ P_1^3\ Q_1^2\ Q_3+$
$24\ b\ b_1^4\ P_0^2\ P_1^4\ Q_1^2\ Q_3 - 6\ b_1^2\ P_0^5\ P_2\ Q_1^2\ Q_3 - 48\ b_1^3\ P_0^4\ P_1\ P_2\ Q_1^2\ Q_3-$
$144\ b_1^4\ P_0^3\ P_1^2\ P_2\ Q_1^2\ Q_3 - 192\ b_1^5\ P_0^2\ P_1^3\ P_2\ Q_1^2\ Q_3 - 96\ b_1^6\ P_0\ P_1^4\ P_2\ Q_1^2\ Q_3-$

$$3\ b_1\ P_0^5\ P_1\ Q_0\ Q_2\ Q_3 - 30\ b_1^2\ P_0^4\ P_1^2\ Q_0\ Q_2\ Q_3 - 120\ b_1^3\ P_0^3\ P_1^3\ Q_0\ Q_2\ Q_3 -$$
$$240\ b_1^4\ P_0^2\ P_1^4\ Q_0\ Q_2\ Q_3 - 240\ b_1^5\ P_0\ P_1^5\ Q_0\ Q_2\ Q_3 - 96\ b_1^6\ P_1^6\ Q_0\ Q_2\ Q_3 +$$
$$3\ b_1\ P_0^6\ Q_1\ Q_2\ Q_3 + 30\ b_1^2\ P_0^5\ P_1\ Q_1\ Q_2\ Q_3 + 120\ b_1^3\ P_0^4\ P_1^2\ Q_1\ Q_2\ Q_3 +$$
$$240\ b_1^4\ P_0^3\ P_1^3\ Q_1\ Q_2\ Q_3 + 240\ b_1^5\ P_0^2\ P_1^4\ Q_1\ Q_2\ Q_3 + 96\ b_1^6\ P_0\ P_1^5\ Q_1\ Q_2\ Q_3)\ /$$
$$\left((P_0 - b_1\ P_1)\ (P_0 + 2\ b_1\ P_1)^7\ (-P_1\ Q_0 + P_0\ Q_1)^2\right) +$$
$$\frac{3\ b_1\ Q_4}{(-P_0 + b_1\ P_1)\ (P_0 + 2\ b_1\ P_1)^3}$$

$$\alpha' = (\alpha\ P_0^2\ P_1^2\ Q_0^2 + 3\ \alpha\ b_1\ P_0\ P_1^3\ Q_0^2 - b_4\ P_0\ P_1^3\ Q_0^2 + b^2\ P_1^4\ Q_0^2 + 2\ \alpha\ b_1^2\ P_1^4\ Q_0^2 -$$
$$2\ b_1\ b_4\ P_1^4\ Q_0^2 - P_0^2\ P_2^2\ Q_0^2 - 4\ b_1\ P_0\ P_1\ P_2^2\ Q_0^2 - 4\ b_1^2\ P_1^2\ P_2^2\ Q_0^2 + 2\ P_0^2\ P_1\ P_3\ Q_0^2 +$$
$$8\ b_1\ P_0\ P_1^2\ P_3\ Q_0^2 + 8\ b_1^2\ P_1^3\ P_3\ Q_0^2 - 2\ \alpha\ P_0^3\ P_1\ Q_0\ Q_1 - 6\ \alpha\ b_1\ P_0^2\ P_1^2\ Q_0\ Q_1 +$$
$$2\ b_4\ P_0^2\ P_1^2\ Q_0\ Q_1 - 2\ b^2\ P_0\ P_1^3\ Q_0\ Q_1 - 4\ \alpha\ b_1^2\ P_0\ P_1^3\ Q_0\ Q_1 +$$
$$4\ b_1\ b_4\ P_0\ P_1^3\ Q_0\ Q_1 - 4\ b_1\ P_0^2\ P_2^2\ Q_0\ Q_1 - 16\ b_1^2\ P_0\ P_1\ P_2^2\ Q_0\ Q_1 -$$
$$16\ b_1^3\ P_1^2\ P_2^2\ Q_0\ Q_1 - 2\ P_0^3\ P_3\ Q_0\ Q_1 - 4\ b_1\ P_0^2\ P_1\ P_3\ Q_0\ Q_1 +$$
$$8\ b_1^2\ P_0\ P_1^2\ P_3\ Q_0\ Q_1 + 16\ b_1^3\ P_1^3\ P_3\ Q_0\ Q_1 + \alpha\ P_0^4\ Q_1^2 + 3\ \alpha\ b_1\ P_0^3\ P_1\ Q_1^2 -$$
$$b_4\ P_0^3\ P_1\ Q_1^2 + b^2\ P_0^2\ P_1^2\ Q_1^2 + 2\ \alpha\ b_1^2\ P_0^2\ P_1^2\ Q_1^2 - 2\ b_1\ b_4\ P_0^2\ P_1^2\ Q_1^2 -$$
$$4\ b_1^2\ P_0^2\ P_2^2\ Q_1^2 - 16\ b_1^3\ P_0\ P_1\ P_2^2\ Q_1^2 - 16\ b_1^4\ P_1^2\ P_2^2\ Q_1^2 -$$
$$4\ b_1\ P_0^3\ P_3\ Q_1^2 - 16\ b_1^2\ P_0^2\ P_1\ P_3\ Q_1^2 - 16\ b_1^3\ P_0\ P_1^2\ P_3\ Q_1^2 +$$
$$2\ P_0^3\ P_2\ Q_0\ Q_2 + 12\ b_1\ P_0^2\ P_1\ P_2\ Q_0\ Q_2 + 24\ b_1^2\ P_0\ P_1^2\ P_2\ Q_0\ Q_2 +$$
$$16\ b_1^3\ P_1^3\ P_2\ Q_0\ Q_2 + 4\ b_1\ P_0^3\ P_2\ Q_1\ Q_2 + 24\ b_1^2\ P_0^2\ P_1\ P_2\ Q_1\ Q_2 +$$
$$48\ b_1^3\ P_0\ P_1^2\ P_2\ Q_1\ Q_2 + 32\ b_1^4\ P_1^3\ P_2\ Q_1\ Q_2 - P_0^4\ Q_2^2 -$$
$$8\ b_1\ P_0^3\ P_1\ Q_2^2 - 24\ b_1^2\ P_0^2\ P_1^2\ Q_2^2 - 32\ b_1^3\ P_0\ P_1^3\ Q_2^2 - 16\ b_1^4\ P_1^4\ Q_2^2)\ /$$
$$\left((P_0 + 2\ b_1\ P_1)^4\ (-P_1\ Q_0 + P_0\ Q_1)^2\right) +$$
$$\frac{2\ Q_3}{(P_0 + 2\ b_1\ P_1)\ (-P_1\ Q_0 + P_0\ Q_1)}$$

Además, hay que imponer las siguientes restricciones sobre las coeficientes del cambio

$$P_0 Q_0 + b_1 P_1 Q_0 - 2 b_1^2 P_1 Q_1 = 0$$

para no salirse de la familia ($[X_1', X_5'] = 0$) y

$$(P_0 - b_1P_1)(P_0 + 2b_1P_1)(P_0Q_1 - P_1Q_0) \neq 0$$

para que sea cambio de base.

A partir de estas condiciones y a la vista de los parámetros, se deduce fácilmente que tanto b_5' como α' se pueden hacer 0, eligiendo adecuadamente Q_4 y Q_3, respectivamente.

Utilizando de nuevo el ordenador, se encuentra un útil invariante,

$$-2b'^2 + 3\alpha' b_1'^2 + 3b_1'b_4' = \frac{(P_0Q_1 - P_1Q_0)^2}{(P_0 - b_1P_1)(P_0 + 2b_1P_1)^5}(-2b^2 + 3\alpha b_1^2 + 3b_1b_4)$$

Como se ha dicho anteriormente, se puede elegir Q_3 de forma que se pueda hacer $\alpha = 0$, es fácil comprobar (con ayuda del ordenador), que la nulidad de $-2b^2 + 3b_1b_4$ sigue siendo invariante, y además, también lo es la nulidad de b.

El nuevo parámetro b_4' que resulta al hacer $\alpha' = 0$, es el siguiente:

$$b_4'' = \frac{(P_0Q_1 - P_1Q_0)}{(P_0 + 2b_1P_1)^5}\left(-2(b^2 + b_1b_4)P_1 + b_4P_0\right)$$

Teniendo todo esto en cuenta se puede distinguir los siguientes casos

- **Caso** $-2b^2 + 3b_1b_4 = 0$.
  - Subcaso $b = 0$. En este subcaso y puesto que $b_1 \neq 0$, se tendría $b_4 = 0$, en resumen, $\alpha = b_5 = b = b_4 = 0$ y $b_1 \neq 0$. Mediante un sencillo cambio de escala se consigue $b_1 = 1$,

    $$\begin{cases} X_0' = X_0 \\ X_1' = \dfrac{1}{b_1}X_1 \end{cases}$$

    obteniéndose $\mu^{18}_{(6,1,1)}$.
  - Subcaso $b \neq 0$. En este subcaso se tiene que $b_4 = \dfrac{2b^2}{3b_1}$, en resumen, $\alpha = b_5 = 0$, $bb_1 \neq 0$ y $b_4 = \dfrac{2b^2}{3b_1}$. Mediante un sencillo cambio de escala se consigue $b_1 = b = 1$,

$$\begin{cases} X_0' = \dfrac{b}{b_1} X_0 \\ X_1' = \dfrac{b}{b_1^2} X_1 \end{cases}$$

obteniéndose $\mu^{19}_{(6,1,1)}$.

- **Caso** $-2b^2 + 3b_1 b_4 \neq 0$.
  - Subcaso $b = 0$. En este subcaso, es fácil deducir que $b_4 \neq 0$. En resumen, se tiene $\alpha = b = b_5 = 0$ y $b_1 b_4 \neq 0$. Mediante un sencillo cambio de escala se consigue $b_1 = b_4 = 1$,

$$\begin{cases} X_0' = \sqrt{\dfrac{b_4}{b_1}} X_0 \\ x_1' = \sqrt{\dfrac{b_4}{b_1^3}} X_1 \end{cases}$$

    obteniéndose $\mu^{20}_{(6,1,1)}$.
  - Subcaso $b \neq 0$. En este subcaso, se sabe que $b_4 \neq \dfrac{2b^2}{3b_1}$.
    * Si $b_4 = 0$, para mantener el nuevo $b_4'' = 0$ habría que imponer que $P_1 = 0$ pues $b \neq 0$. Si en estas condiciones se utilizan el resto de restricciones entre los coeficientes del cambio, se tendría que:

$$P_0 Q_1 \neq 0, \qquad Q_0 = 0$$

      y de esta forma se mantiene $b_4'' = 0$.
    * Si $b_4 \neq 0$, resolviendo la ecuación $b_4'' = 0$ en P_0, es decir, eligiendo

$$P_0 = -\frac{2(-b^2 + b_1 b_4) P_1}{b_4}$$

      se puede hacer $b_4'' = 0$.
      Ahora habría que comprobar que ese cambio se puede hacer y si hay que elegir algunos coeficientes para ello.

      1) $P_0 Q_0 + b_1 P_1 Q_0 - 2b_1^2 P_1 Q_1 = 0$, si se sustituye el valor anterior de P_0, se tiene que para mantener esa expresión igual a cero, se debe elegir

$$Q_1 = -\frac{(-2b^2 - b_1 b_4) Q_0}{2b_1^2 b_4}$$

      2) $P_0 Q_1 - P_1 Q_0 \neq 0$, si se sustituye los valores de P_0 y Q_1, se tiene que

$$P_0 Q_1 - P_1 Q_0 = -\frac{b^2(-2b^2 + 3b_1 b_4) P_1 Q_0}{b_1^2 b_4^2} \neq 0$$

lo cual implica que se debe elegir $P_1Q_0 \neq 0$.

3) $P_0 - b_1P_1 \neq 0$, si se sustituye los valores de P_0 y Q_1, se tiene que

$$P_0 - b_1P_1 = -\frac{(-2b^2 + 3b_1b_4)P_1}{b_4} \neq 0$$

4) $P_0 + 2b_1P_1 \neq 0$, si se sustituye los valores de P_0 y Q_1, se tiene que

$$P_0 + 2b_1P_1 = \frac{2b^2P_1}{b_4} \neq 0$$

5) $Q_0 - b_1Q_1 \neq 0$, si se sustituye los valores de P_0 y Q_1, se tiene que

$$Q_0 - b_1Q_1 = \frac{(-2b^2 + 3b_1b_4)Q_0}{2b_1b_4} \neq 0$$

6) $Q_0 + 2b_1Q_1 \neq 0$, si se sustituye los valores de P_0 y Q_1, se tiene que

$$Q_0 + 2b_1Q_1 = \frac{2b^2Q_0}{b_1b_4} \neq 0$$

De esta forma, se demostraría que en el subcaso $bb_1 \neq 0$, siempre se puede hacer $\alpha = b_4 = b_5 = 0$. Mediante un cambio de escala se consigue $b = b_1 = 1$.

$$\begin{cases} X_0' = \sqrt{\dfrac{b}{b_1}}X_0 \\ X_1' = \sqrt{\dfrac{b}{b_1^2}}X_1 \end{cases}$$

obteniéndose $\mu^{21}_{(6,1,1)}$.

2.2.2 Álgebras de Lie 2-filiformes de $dim(\mathfrak{g}) = 8$ y $dim([\mathfrak{g},\mathfrak{g}]) = 5$

Por último se van a encontrar todas las álgebras de Lie 2-filiformes de dimensión 8 con derivada mínima.

Proposición 2.2.9.– *Sea $\mathfrak{g}$ cualquier álgebra de Lie 3-filiforme compleja con $dim(\mathfrak{g}) = 8$ y $dim([\mathfrak{g},\mathfrak{g}]) = 5$. Entonces existen dos subfamilias, no isomorfas entre sí, cuyas* *leyes vienen dadas, en una cierta base adaptada* $\{X_0, X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6, Y\}$, *por*

$$AL2F(5,0): \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1} & 1 \le i \le 5 \\ [X_1, X_2] = b_2X_4 + b_4X_5 + b_5X_6 \\ [X_1, X_3] = b_2X_5 + b_4X_6 \\ [X_1, X_4] = b_2X_6 \\ [X_1, Y] = a_4X_3 + a_3X_4 + a_2X_5 + a_1X_6 \\ [X_2, Y] = a_4X_4 + a_3X_5 + a_2X_6 \\ [X_3, Y] = a_4X_5 + a_3X_6 \\ [X_4, Y] = a_4X_6 \end{cases}$$

$$AL2F(5,1): \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1} & 1 \le i \le 5 \\ [X_1, X_2] = (b_2 + b_3)X_4 + b_4X_5 + b_5X_6 \\ [X_1, X_3] = (b_2 + b_3)X_5 + b_4X_6 \\ [X_1, X_4] = b_2X_6 \\ [X_2, X_3] = b_3X_6 \\ [X_1, Y] = a_3X_4 + a_2X_5 + a_1X_6 \\ [X_2, Y] = a_3X_5 + a_2X_6 \\ [X_3, Y] = a_3X_6 \end{cases}$$
$$\textit{con} \quad b_3 \neq 0$$

Demostración: Si $\mathfrak{g} \in AL2F(5)$, su ley vendrá dada por

$$AL2F(5): \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1} & 1 \le i \le 5 \\ [X_1, X_2] = (b_2 + b_3)X_4 + b_4X_5 + b_5X_6 \\ [X_1, X_3] = (b_2 + b_3)X_5 + b_4X_6 \\ [X_1, X_4] = b_2X_6 \\ [X_2, X_3] = b_3X_6 \\ [X_1, Y] = a_4X_3 + a_3X_4 + a_2X_5 + a_1X_6 \\ [X_2, Y] = a_4X_4 + a_3X_5 + a_2X_6 \\ [X_3, Y] = a_4X_5 + a_3X_6 \\ [X_4, Y] = a_4X_6 \\ \quad \text{con} \quad a_4b_3 = 0 \end{cases}$$

Se observa que

$$dim([\mathcal{C}^1(\mathfrak{g}), \mathcal{C}^1(\mathfrak{g})]) = \begin{cases} 0 & b_3 = 0 \\ 1 & b_3 \neq 0 \end{cases}$$

lo que prueba que la nulidad de b_3 es invariante. Para el caso $b_3 \neq 0$ se tiene que $a_4 = 0$ por la restricción $a_4b_3 = 0$. □

Proposición 2.2.10.– *Sea la familia de álgebras* $AL2F(5,0)$. *Entonces existen tres subfamilias, no isomorfas entre sí, cuyas leyes vienen dadas, en una base adaptada* $\{X_0, X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6, Y\}$, *por*

$$AL2F(5,0)(7): \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1} & 1 \le i \le 5 \\ [X_1, X_2] = b_5 X_6 & \\ [X_1, Y] = a_2 X_5 + a_1 X_6 & \\ [X_2, Y] = a_2 X_6 & \end{cases}$$

$$AL2F(5,0)(6): \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1} & 1 \le i \le 5 \\ [X_1, X_2] = b_2 X_4 + b_4 X_5 + b_5 X_6 & \\ [X_1, X_3] = b_2 X_5 + b_4 X_6 & \\ [X_1, X_4] = b_2 X_6 & \\ [X_1, Y] = a_4 X_3 + a_3 X_4 + a_2 X_5 + a_1 X_6 & \\ [X_2, Y] = a_4 X_4 + a_3 X_5 + a_2 X_6 & \\ [X_3, Y] = a_4 X_5 + a_3 X_6 & \\ [X_4, Y] = a_4 X_6 & \end{cases}$$
$b_2 a_3 - b_4 a_4 = 0$; *con algún elemento no nulo*

$$AL2F(5,0)(5): \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1} & 1 \le i \le 5 \\ [X_1, X_2] = b_2 X_4 + b_4 X_5 + b_5 X_6 & \\ [X_1, X_3] = b_2 X_5 + b_4 X_6 & \\ [X_1, X_4] = b_2 X_6 & \\ [X_1, Y] = a_4 X_3 + a_3 X_4 + a_2 X_5 + a_1 X_6 & \\ [X_2, Y] = a_4 X_4 + a_3 X_5 - a_2 X_6 & \\ [X_3, Y] = a_4 X_5 + a_3 X_6 & \\ [X_4, Y] = a_4 X_6 & \end{cases}$$
$b_2 a_3 - b_4 a_4 \neq 0$

Demostración: Si $\mathfrak{g} \in AL2F(5,0)$, su ley vendrá dada por

$$AL2F(5,0): \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1} & 1 \le i \le 5 \\ [X_1, X_2] = b_2X_4 + b_4X_5 + b_5X_6 \\ [X_1, X_3] = b_2X_5 + b_4X_6 \\ [X_1, X_4] = b_2X_6 \\ [X_1, Y] = a_4X_3 + a_3X_4 + a_2X_5 + a_1X_6 \\ [X_2, Y] = a_4X_4 + a_3X_5 + a_2X_6 \\ [X_3, Y] = a_4X_5 + a_3X_6 \\ [X_4, Y] = a_4X_6 \end{cases}$$

Un sencillo cálculo demuestra que $dim(\mathcal{C}ent\ \mathcal{C}^3(\mathfrak{g}))$ vale

$$dim(\mathcal{C}ent\ \mathcal{C}^3(\mathfrak{g})) = \begin{cases} 7 & \text{si } rango\begin{pmatrix} b_2 & a_4 \\ b_4 & a_3 \end{pmatrix} = 0 \\ 6 & \text{si } rango\begin{pmatrix} b_2 & a_4 \\ b_4 & a_3 \end{pmatrix} = 1 \\ 5 & \text{si } rango\begin{pmatrix} b_2 & a_4 \\ b_4 & a_3 \end{pmatrix} = 2 \end{cases}$$

en cada uno de los casos se obtiene cada familia. □

Teorema 2.2.11.– *Sea $\mathfrak{g}$ cualquier álgebra en $AL2F(5,0)(7)$. Entonces es isomorfa a una de las siguientes álgebras, no isomorfas entre sí, de leyes $\mu^1_{(6,1)} \oplus \mathbf{C}$, $\mu^2_{(6,1)} \oplus \mathbf{C}$ y $\mu^i_{(6,1,1)}$, $22 \le i \le 25$, dadas por*

$$\mu^{22}_{(6,1,1)}: \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1} & 1 \le i \le 5 \\ [X_1, Y] = X_5 \\ [X_2, Y] = X_6 \end{cases}$$

$$\mu^{23}_{(6,1,1)}: \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1} & 1 \le i \le 5 \\ [X_1, Y] = X_6 \end{cases}$$

$$\mu^{24}_{(6,1,1)}: \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1} & 1 \le i \le 5 \\ [X_1, X_2] = X_6 \\ [X_1, Y] = X_6 \end{cases}$$

$$\mu^{25}_{(6,1,1)}: \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1} & 1 \le i \le 5 \\ [X_1, Y] = X_5 + X_6 \\ [X_2, Y] = X_6 \end{cases}$$

Demostración: Si $\mathfrak{g} \in AL2F(5,0)(7)$, su ley vendrá dada por

$$\begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1} \\ [X_1, X_2] = b_5 X_6 \\ [X_1, Y] = a_2 X_5 + a_1 X_6 \\ [X_2, Y] = a_2 X_6 \end{cases}$$

Si se aplican cambios de bases genéricos, cambiando únicamente los generadores, se tiene que:

$$X_0' = P_0X_0 + P_1X_1 + P_2X_2 + P_3X_3 + P_4X_4 + P_5X_5 + P_6X_6 + P_7Y$$

$$X_1' = Q_0X_0 + Q_1X_1 + Q_2X_2 + Q_3X_3 + Q_4X_4 + Q_5X_5 + Q_6X_6 + Q_7Y$$

$$X_2' = (P_0Q_1 - P_1Q_0)X_2 + (P_0Q_2 - P_2Q_0)X_3 + (P_0Q_3 - P_3Q_0)X_4 + [P_0Q_4 - P_4Q_0 + (P_1Q_7 - P_7Q_1)a_2]X_5 + (\ldots)X_6$$

$$X_3' = P_0(P_0Q_1 - P_1Q_0)X_3 + P_0(P_0Q_2 - P_2Q_0)X_4 + P_0(P_0Q_3 - P_3Q_0)X_5 + (\ldots)X_6$$

$$X_4' = P_0^2(P_0Q_1 - P_1Q_0)X_4 + P_0^2(P_0Q_2 - P_2Q_0)X_5 + P_0^2(P_0Q_3 - P_3Q_0)X_6$$

$$X_5' = P_0^3(P_0Q_1 - P_1Q_0)X_5 + P_0^3(P_0Q_2 - P_2Q_0)X_6$$

$$X_6' = P_0^4(P_0Q_1 - P_1Q_0)X_6$$

$$Y' = R_0X_0 + R_1X_1 + R_2X_2 + R_3X_3 + R_4X_4 + R_5X_5 + R_6X_6 + R_7Y$$

para no salirse de la familia hay que imponer que:

De $[X_1', X_5'] = 0 \Longrightarrow Q_0 = 0.$

De $[X_5', Y'] = 0 \Longrightarrow R_0 = 0.$

De $[X_4', Y'] = 0 \Longrightarrow R_1 = 0.$

De $[X_3', Y'] = 0 \Longrightarrow R_2 = 0.$

De $[X_0', Y'] = 0 \Longrightarrow \begin{cases} R_3 = 0 \\ P_0R_4 + P_1R_7a_2 = 0 \\ P_0R_5 + P_1R_7a_1 + P_2R_7a_2 = 0 \end{cases}$

y para que sea cambio de base $P_0Q_1R_7 \neq 0$.

Efectuando los productos, los nuevos parámetros resultan ser:

$$a'_2 = \frac{R_7 a_2}{P_0^4}$$
$$a'_1 = \frac{R_7 a_1}{P_0^5}$$
$$b'_5 = \frac{Q_1 b_5 - Q_7 a_2}{P_0^4}$$

donde se observa que si $a_2 \neq 0$, mediante un cambio de base (eligiendo $Q_7 = \frac{Q_1 b_5}{a_2}$) se puede tener $b'_5 = 0$.

En resumen:

$$\begin{cases} a_1 = 0 \begin{cases} a_2 = 0 \begin{cases} b_5 = 0 \\ b_5 \neq 0 \end{cases} \\ a_2 \neq 0 \Longrightarrow b_5 = 0 \end{cases} \\ a_1 \neq 0 \begin{cases} a_2 = 0 \begin{cases} b_5 = 0 \\ b_5 \neq 0 \end{cases} \\ a_2 \neq 0 \Longrightarrow b_5 = 0 \end{cases} \end{cases}$$

a) $(a_1, a_2, b_5) = (0, 0, 0)$ se obtiene $\mu^1_{(6,1)} \oplus \mathbf{C}$.

b) $(a_1, a_2, b_5) = (0, 0, b_5)$, con $b_5 \neq 0$ se obtiene $\mu^2_{(6,1)} \oplus \mathbf{C}$.

c) $(a_1, a_2, b_5) = (0, a_2, 0)$, con $a_2 \neq 0$. Mediante el cambio de escala dado por

$$\begin{cases} X'_0 = X_0 \\ X'_1 = X_1 \\ Y' = \dfrac{1}{a_2} Y \end{cases}$$

se obtiene, $\mu^{22}_{(6,1,1)}$.

d) $(a_1, a_2, b_5) = (a_1, 0, 0)$, con $a_1 \neq 0$. Mediante el cambio de escala dado por

$$\begin{cases} X'_0 = \dfrac{a_2}{a_1} X_0 \\ X'_1 = X_1 \\ Y' = \dfrac{a_2^3}{a_1^4} Y \end{cases}$$

se obtiene $\mu^{23}_{(6,1,1)}$.

e) $(a_1, a_2, b_5) = (a_1, 0, b_5)$, con $a_1 b_5 \neq 0$. Mediante el cambio de escala dado por

$$\begin{cases} X_0' = X_0 \\ X_1' = \dfrac{1}{b_5} X_1 \\ Y' = \dfrac{1}{a_1} Y \end{cases}$$

se obtiene $\mu^{24}_{(6,1,1)}$.

f) $(a_1, a_2, b_5) = (a_1, a_2, 0)$, con $a_1 a_2 \neq 0$. Mediante el cambio de escala dado por

$$\begin{cases} X_0' = X_0 \\ X_1' = \dfrac{a_1}{a_2} X_1 \\ Y' = \dfrac{a_1^4}{a_2^5} Y \end{cases}$$

se obtiene $\mu^{25}_{(6,1,1)}$. □

Proposición 2.2.12.– *Sea la familia de álgebras $AL2F(5,0)(6)$. Entonces existen cuatro subfamilias, no isomorfas entre sí, cuyas leyes vienen dadas, en una cierta base adaptada $\{X_0, X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6, Y\}$, por*

$$AL2F(5,0)(6).1 : \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1} & 1 \leq i \leq 5 \\ [X_1, X_2] = b_4 X_5 + b_5 X_6 \\ [X_1, X_3] = b_4 X_6 \\ [X_1, Y] = a_2 X_5 + a_1 X_6 \\ [X_2, Y] = a_2 X_6 \end{cases}$$
$$\text{con } \; b_4 \neq 0$$

$$AL2F(5,0)(6).2 : \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1} \\ [X_1, X_2] = b_5 X_6 \\ [X_1, Y] = a_3 X_4 + a_2 X_5 + a_1 X_6 \\ [X_2, Y] = a_3 X_5 + a_2 X_6 \\ [X_3, Y] = a_3 X_6 \end{cases}$$
$$\text{con } \; a_3 \neq 0$$

$$AL2F(5,0)(6).3 : \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1} & 1 \leq i \leq 5 \\ [X_1, X_2] = b_2X_4 + b_5X_6 & \\ [X_1, X_3] = b_2X_5 & \\ [X_1, X_4] = b_2X_6 & \\ [X_1, Y] = a_2X_5 + a_1X_6 & \\ [X_2, Y] = a_2X_6 & \end{cases}$$
$$con \;\; b_2 \neq 0$$

$$AL2F(5,0)(6).4 : \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1} & 1 \leq i \leq 5 \\ [X_1, X_2] = b_5X_6 & \\ [X_1, Y] = a_4X_3 + a_2X_5 + a_1X_6 & \\ [X_2, Y] = a_4X_4 + a_2X_6 & \\ [X_3, Y] = a_4X_5 & \\ [X_4, Y] = a_4X_6 & \end{cases}$$
$$con \;\; a_4 \neq 0$$

Demostración: Si $\mathfrak{g} \in AL2F(5,0)(6)$, su ley vendrá dada en una base adaptada por

$$\begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1} \\ [X_1, X_2] = b_2X_4 + b_4X_5 + b_5X_6 \\ [X_1, X_3] = b_2X_5 + b_4X_6 \\ [X_1, X_4] = b_2X_6 \\ [X_1, Y] = a_4X_3 + a_3X_4 + a_2X_5 + a_1X_6 \\ [X_2, Y] = a_4X_4 + a_3X_5 + a_2X_6 \\ [X_3, Y] = a_4X_5 + a_3X_6 \\ [X_4, Y] = a_4X_6 \end{cases}$$

con $b_2a_3 - b_4a_4 = 0$; y algún elemento no nulo.

Aplicando cambios de base genéricos:

$\mathrm{X}'_0 = \mathrm{P}_0\mathrm{X}_0 + \mathrm{P}_1\mathrm{X}_1 + \mathrm{P}_2\mathrm{X}_2 + \mathrm{P}_3\mathrm{X}_3 + \mathrm{P}_4\mathrm{X}_4 + \mathrm{P}_5\mathrm{X}_5 + \mathrm{P}_6\mathrm{X}_6 + \mathrm{P}_7\mathrm{Y}$

$\mathrm{X}'_1 = \mathrm{Q}_0\mathrm{X}_0 + \mathrm{Q}_1\mathrm{X}_1 + \mathrm{Q}_2\mathrm{X}_2 + \mathrm{Q}_3\mathrm{X}_3 + \mathrm{Q}_4\mathrm{X}_4 + \mathrm{Q}_5\mathrm{X}_5 + \mathrm{Q}_6\mathrm{X}_6 + \mathrm{Q}_7\mathrm{Y}$

$\mathrm{X}'_2 = (\mathrm{P}_0\mathrm{Q}_1 - \mathrm{P}_1\mathrm{Q}_0)\mathrm{X}_2 + (\mathrm{P}_0\mathrm{Q}_2 - \mathrm{P}_2\mathrm{Q}_0 + \mathrm{a}_4(\mathrm{P}_1\mathrm{Q}_7 - \mathrm{P}_7\mathrm{Q}_1))\mathrm{X}_3 + (-\mathrm{P}_3\mathrm{Q}_0 - \mathrm{P}_7(\mathrm{a}_3\mathrm{Q}_1 + \mathrm{a}_4\mathrm{Q}_2) + \mathrm{b}_2(-\mathrm{P}_2\mathrm{Q}_1 + \mathrm{P}_1\mathrm{Q}_2) + \mathrm{P}_0\mathrm{Q}_3 + (\mathrm{a}_3\mathrm{P}_1 + \mathrm{a}_4\mathrm{P}_2)\mathrm{Q}_7)\mathrm{X}_4 + (-\mathrm{P}_4\mathrm{Q}_0 - \mathrm{b}_2\mathrm{P}_3\mathrm{Q}_1 - \mathrm{a}_2\mathrm{P}_7\mathrm{Q}_1 - \mathrm{a}_3\mathrm{P}_7\mathrm{Q}_2 + \mathrm{b}_4(-\mathrm{P}_2\mathrm{Q}_1 + \mathrm{P}_1\mathrm{Q}_2) + \mathrm{b}_2\mathrm{P}_1\mathrm{Q}_3 - \mathrm{a}_4\mathrm{P}_7\mathrm{Q}_3 + \mathrm{P}_0\mathrm{Q}_4 + (\mathrm{a}_2\mathrm{P}_1 + \mathrm{a}_3\mathrm{P}_2 + \mathrm{a}_4\mathrm{P}_3)\mathrm{Q}_7)\ \mathrm{X}_5 + (\ldots)\mathrm{X}_6$

$$X_3' = P_0(-P_1Q_0+P_0Q_1)X_3+(a_4P_1P_7Q_0+b_2P_1(-P_1Q_0+P_0Q_1)+P_0^2Q_2+P_0(-P_2Q_0+a_4(-2P_7Q_1+P_1Q_7)))X_4+(-P_0P_3Q_0+a_3P_1P_7Q_0+a_4P_2P_7Q_0-2a_3P_0P_7Q_1+a_4^2P_7^2Q_1+b_4P_1(-P_1Q_0+P_0Q_1)-2a_4P_0P_7Q_2+P_0^2Q_3+(P_0(a_3P_1+a_4P_2)-a_4^2P_1P_7)Q_7+b_2(-P_1P_2Q_0-P_0P_2Q_1-a_4P_1P_7Q_1+2P_0P_1Q_2+a_4P_1^2Q_7))X_5+(a_2P_7(P_1Q_0-P_0Q_1)+b_5P_1(-P_1Q_0+P_0Q_1)+(-b_2P_1+a_4P_7)P_3Q_0+P_7(a_3Q_1+a_4Q_2)+b_2(P_2Q_1-P_1Q_2)-P_0Q_3-(a_3P_1+a_4P_2)Q_7)+P_0(-P_4Q_0-b_2P_3Q_1-a_2P_7Q_1-a_3P_7Q_2+b_4(-P_2Q_1+P_1Q_2)+b_2P_1Q_3-a_4P_7Q_3+P_0Q_4+(a_2P_1+a_3P_2+a_4P_3)Q_7)+a_3P_7(P_2Q_0-P_0Q_2+a_4(P_7Q_1-P_1Q_7))+b_4P_1(-P_2Q_0+P_0Q_2+a_4(-P_7Q_1+P_1Q_7)))X_6$$

$$X_4' = P_0^2(-P_1Q_0+P_0Q_1)X_4+P_0(2a_4P_1P_7Q_0+2b_2P_1(-P_1Q_0+P_0Q_1)+P_0^2Q_2+P_0(-P_2Q_0+a_4(-3P_7Q_1+P_1Q_7)))X_5+(-P_0^2P_3Q_0+2a_3P_0P_1P_7Q_0+2a_4P_0P_2P_7Q_0-a_4^2P_1P_7^2Q_0-3a_3P_0^2P_7Q_1+3a_4^2P_0P_7^2Q_1+2b_4P_0P_1(-P_1Q_0+P_0Q_1)+b_2^2P_1^2(-P_1Q_0+P_0Q_1)-3a_4P_0^2P_7Q_2+P_0^3Q_3+P_0(P_0(a_3P_1+a_4P_2)-2a_4^2P_1P_7)Q_7+b_2(2a_4P_1^2P_7Q_0+P_0^2(-P_2Q_1+3P_1Q_2)+2P_0P_1(-P_2Q_0+a_4(-2P_7Q_1+P_1Q_7))))X_6$$

$$X_5' = P_0^3(-P_1Q_0+P_0Q_1)X_5+P_0^2(3a_4P_1P_7Q_0+3b_2P_1(-P_1Q_0+P_0Q_1)+P_0^2Q_2+P_0(-P_2Q_0+a_4(-4P_7Q_1+P_1Q_7)))X_6$$

$$X_6' = P_0^4(-P_1Q_0+P_0Q_1)X_6$$

$$Y' = R_0X_0+R_1X_1+R_2X_2+R_3X_3+R_4X_4+R_5X_5+R_6X_6+R_7Y$$

para no salirse de la familia ($[X_1', X_5'] = 0$, $[X_5', Y'] = 0$, $[X_0', Y'] = 0$) hay que imponer que:

$$Q_0 = 0$$
$$R_0 = R_1 = 0$$
$$P_0R_2 + P_1R_7a_4 = 0$$
$$P_0R_3 + P_1R_2b_2 + P_1R_7a_3 + P_2R_7a_4 - Q_7R_2a_4 = 0$$
$$P_0R_4 + P_1R_2b_4 + P_1R_3b_2 + P_1R_7a_2 + P_2R_7a_3 + P_3R_7a_4 - Q_7R_2a_3 - Q_7R_3a_4 = 0$$
$$P_0R_5 + P_1R_2b_5 + P_1R_3b_4 + P_1R_4b_2 + P_1R_7a_1 + P_2R_7a_2 + P_3R_7a_3 + P_4R_7a_4 - Q_7R_2a_2 - Q_7R_3a_3 - Q_7R_4a_4 = 0$$

Además, teniendo en cuenta que ha ser un cambio de base ($X_6' \neq 0$), se tiene que $P_0Q_1 \neq 0$.

De esta forma, los nuevos parámetros son:

$$a_4' = \frac{R_7}{P_0^2}a_4$$

$$b_2' = \frac{Q_1 b_2 - Q_7 a_4}{P_0^2}$$

$$a_3' = \frac{P_0 R_7 a_3 + 2P_7 R_7 a_4^2 - 2P_1 R_7 a_4 b_2}{P_0^4}$$

Se observa que la nulidad de a_4 es invariante y se tiene que configuración de los parámetros se puede representar esquemáticamente mediante:

$$\begin{cases} a_4 = 0 \begin{cases} b_2 = 0 \begin{cases} a_3 = 0 & (1) \\ a_3 \neq 0 & (2) \end{cases} \\ b_2 \neq 0 \Longrightarrow a_3 = 0 \quad (3) \end{cases} \\ a_4 \neq 0 \Longrightarrow b_2 = a_3 = b_4 = 0 \quad (4) \end{cases}$$

donde (1), (2), (3) y (4), son los casos que a continuación se detallan.

(1) Si $a_4 = b_2 = a_3 = 0$, por la restricción que hay en la familia AL2F(5,0)(6), se tiene que $b_4 \neq 0$, obteniéndose $AL2F(5,0)(6).1$.

(2) Si $a_4 = b_2 = 0$, $a_3 \neq 0$, se tiene que $b_4' = \dfrac{Q_1 b_4 - Q_7 a_3}{P_0^3}$, lo cual indica que mediante el cambio de base dado por

$$\begin{cases} X_0' = X_0 \\ X_1' = X_1 + \dfrac{b_4}{a_3} Y \\ Y' = Y \end{cases}$$

se puede suponer $b_4' = 0$, obteniéndose $AL2F(5,0)(6).2$.

(3) Si $a_4 = 0$, $b_2 \neq 0$ será $a_3 = 0$ pues $a_3 b_2 - a_4 b_4 = 0$ y se tiene que $b_4' = \dfrac{Q_1(P_0 b_4 - 2P_1 b_2^2)}{P_0^4}$, y puesto que $b_2 \neq 0$, eligiendo $P_1 = \dfrac{P_0 b_4}{2b_2^2}$ y el resto de coeficientes del cambio para no salirse de la familia, se puede conseguir $b_4' = 0$, obteniéndose $AL2F(5,0)(6).3$.

(4) Si $a_4 \neq 0$, se pueden elegir los coeficientes del cambio del tal manera que $a_3 = b_2 = 0$, y por la restricción de la familia, $b_4 = 0$. obteniéndose $AL2F(5,0)(6).4$.
□

Teorema 2.2.13.– *Sea $\mathfrak{g}$ cualquier álgebra en $AL2F(5,0)(6).1$. Entonces será isomorfa a una de las siguientes álgebras, no isomorfas entre sí, de leyes $\mu^3_{(6,1)} \oplus \mathbf{C}$, $\mu^4_{(6,1)} \oplus \mathbf{C}$ y $\mu^i_{(6,1,1)}$, $26 \leq i \leq 29$, dadas por*

$$\mu^{26}_{(6,1,1)} : \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1} & 1 \leq i \leq 5 \\ [X_1, X_2] = X_5 \\ [X_1, X_3] = X_6 \\ [X_1, Y] = X_6 \end{cases}$$

$$\mu^{27}_{(6,1,1)} : \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1} & 1 \leq i \leq 5 \\ [X_1, X_2] = X_5 + X_6 \\ [X_1, X_3] = X_6 \\ [X_1, Y] = X_6 \end{cases}$$

$$\mu^{28}_{(6,1,1)} : \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1} & 1 \leq i \leq 5 \\ [X_1, X_2] = X_5 \\ [X_1, X_3] = X_6 \\ [X_1, Y] = X_5 \\ [X_2, Y] = X_6 \end{cases}$$

$$\mu^{29}_{(6,1,1)} : \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1} & 1 \leq i \leq 5 \\ [X_1, X_2] = X_5 \\ [X_1, X_3] = X_6 \\ [X_1, Y] = X_5 + X_6 \\ [X_2, Y] = X_6 \end{cases}$$

Demostración: Se recuerda que si $\mathfrak{g} \in AL2F(5,0)(6).1$, su ley vendrá dada por

$$AL2F(5,0)(6).1 : \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1} & 1 \leq i \leq 5 \\ [X_1, X_2] = b_4 X_5 + b_5 X_6 \\ [X_1, X_3] = b_4 X_6 \\ [X_1, Y] = a_2 X_5 + a_1 X_6 \\ [X_2, Y] = a_2 X_6 \end{cases}$$
$$\text{con } b_4 \neq 0$$

Adaptando los cambios de base genéricos hechos en 2.2.12 a este caso, se tiene que

$$a'_2 = \frac{R_7}{P_0^4} a_2$$

$$a_1' = \frac{R_7}{P_0^5} a_1$$
$$b_5' = \frac{Q_1 b_5 - Q_7 a_2}{P_0^4}$$

Si $a_2 \neq 0$, si se elige $Q_7 = \dfrac{Q_1 b_5}{a_2}$, se puede suponer $b_5' = 0$. En resumen:

$$b_4 \neq 0 \begin{cases} a_2 = 0 \begin{cases} a_1 = 0 \begin{cases} b_5 = 0 \\ b_5 \neq 0 \end{cases} \\ a_1 \neq 0 \begin{cases} b_5 = 0 \\ b_5 \neq 0 \end{cases} \end{cases} \\ a_2 \neq 0 \Longrightarrow b_5 = 0 \begin{cases} a_1 = 0 \\ a_1 \neq 0 \end{cases} \end{cases}$$

(a) Si $a_2 = a_1 = b_5 = 0$, $b_4 \neq 0$, obteniéndose $\mu^3_{(6,1)} \oplus \mathbf{C}$.

(b) Si $a_2 = a_1 = 0$, $b_4 b_5 \neq 0$, obteniéndose $\mu^4_{(6,1)} \oplus \mathbf{C}$.

(c) Si $a_2 = b_5 = 0$, $b_4 a_1 \neq 0$. El cambio de escala definido por

$$\begin{cases} X_0' = X_0 \\ X_1' = \dfrac{1}{b_4} X_1 \\ Y' = \dfrac{1}{a_1} Y \end{cases}$$

permite suponer $b_4 = a_1 = 1$, obteniéndose $\mu^{26}_{(6,1,1)}$.

(d) Si $a_2 = 0$, $b_4 a_1 b_5 \neq 0$. El cambio de escala definido por

$$\begin{cases} X_0' = \dfrac{b_5}{b_4} X_0 \\ X_1' = \dfrac{b_5^3}{b_4^4} X_1 \\ Y' = \dfrac{b_5^5}{b_4^5 a_1} Y \end{cases}$$

permite suponer $b_4 = b_5 = a_1 = 1$, obteniéndose $\mu^{27}_{(6,1,1)}$.

(e) Si $a_1 = b_5 = 0$, $b_4a_2 \neq 0$. El cambio de escala definido por

$$\begin{cases} X_0' = X_0 \\ X_1' = \dfrac{1}{b_4}X_1 \\ Y' = \dfrac{1}{a_2}Y \end{cases}$$

permite suponer $b_4 = a_2 = 1$, obteniéndose $\mu^{28}_{(6,1,1)}$
(f) Si $b_5 = 0$, $b_4a_2a_1 \neq 0$. El cambio de escala definido por

$$\begin{cases} X_0' = \dfrac{a_1}{a_2}X_0 \\ X_1' = \dfrac{a_1^3}{b_4a_2^3} \\ Y' = \dfrac{a_1^4}{a_2^5}Y \end{cases}$$

permite suponer $b_4 = a_2 = a_1 = 1$, obteniéndose $\mu^{29}_{(6,1,1)}$. □

Teorema 2.2.14.– *Sea $\mathfrak{g}$ cualquier álgebra en $AL2F(5,0)(6).2$. Entonces será isomorfa a una de las siguientes álgebras, no isomorfas entre sí, de leyes $\mu^i_{(6,1,1)}$, $30 \leq i \leq 33$, dadas por*

$$\mu^{30}_{(6,1,1)} : \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1} & 1 \leq i \leq 5 \\ [X_1, Y] = X_4 \\ [X_2, Y] = X_5 \\ [X_3, Y] = X_6 \end{cases}$$

$$\mu^{31}_{(6,1,1)} : \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1} & 1 \leq i \leq 5 \\ [X_1, Y] = X_4 + X_5 \\ [X_2, Y] = X_5 + X_6 \\ [X_3, Y] = X_6 \end{cases}$$

$$\mu^{32}_{(6,1,1)} : \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1} & 1 \leq i \leq 5 \\ [X_1, X_2] = X_6 \\ [X_1, Y] = X_4 \\ [X_2, Y] = X_5 \\ [X_3, Y] = X_6 \end{cases}$$

$$\mu^{33}_{(6,1,1)} : \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1} & 1 \leq i \leq 5 \\ [X_1, X_2] = X_6 \\ [X_1, Y] = X_4 + X_5 \\ [X_2, Y] = X_5 + X_6 \\ [X_3, Y] = X_6 \end{cases}$$

Demostración: Si $\mathfrak{g} \in AL2F(5,0)(6).2$, su ley vendrá dada por

$$AL2F(5,0)(6).2: \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1} \\ [X_1, X_2] = b_5 X_6 \\ [X_1, Y] = a_3 X_4 + a_2 X_5 + a_1 X_6 \\ [X_2, Y] = a_3 X_5 + a_2 X_6 \\ [X_3, Y] = a_3 X_6 \end{cases}$$
$$\text{con } \ a_3 \neq 0$$

Adaptando los cambios de bases hechos en 2.2.12 a este caso, se tiene que los nuevos parámetros son:

$$b_5' = \frac{Q_1 b_5}{P_0^4}$$
$$a_3' = \frac{R_7 a_3}{P_0^3}$$
$$a_2' = \frac{R_7 a_2}{P_0^4}$$
$$a_1' = \frac{R_7 (P_0 a_1 + 3 P_7 a_3^2)}{P_0^6}$$

Puesto que $a_3 \neq 0$, eligiendo $P_7 = -\dfrac{P_0 a_1}{3a_3^2}$ se consigue $a_1' = 0$.

Se tiene, por tanto

$$a_3 \neq 0 \Longrightarrow a_1 = 0 \begin{cases} b_5 = 0 \begin{cases} a_2 = 0 \\ a_2 \neq 0 \end{cases} \\ b_5 \neq 0 \begin{cases} a_2 = 0 \\ a_2 \neq 0 \end{cases} \end{cases}$$

Se distinguen pues, cuatro casos:

(a) $b_5 = a_2 = a_1 = 0$, $a_3 \neq 0$. El cambio de escala dado por

$$\begin{cases} X_0' = X_0 \\ X_1' = X_1 \\ Y' = \dfrac{1}{a_3} Y \end{cases}$$

permite suponer $a_3 = 1$, obteniéndose $\mu^{30}_{(6,1,1)}$.

(b) $b_5 = a_1 = 0$, $a_3 a_2 \neq 0$. El cambio de escala dado por:

$$\begin{cases} X_0' = \dfrac{a_2}{a_3} X_0 \\ X_1' = X_1 \\ Y' = \dfrac{a_2^3}{a_3^4} Y \end{cases}$$

permite suponer $a_3 = a_2 = 1$, obteniéndose $\mu^{31}_{(6,1,1)}$.

(c) $a_1 = a_2 = 0$, $a_3 b_5 \neq 0$. El cambio de escala dado por:

$$\begin{cases} X_0' = X_0 \\ X_1' = \dfrac{1}{b_5} X_1 \\ Y' = \dfrac{1}{a_3} Y \end{cases}$$

permite suponer $a_3 = b_5 = 1$, obteniéndose $\mu^{32}_{(6,1,1)}$.

(d) $a_1 = 0$, $a_3 b_5 a_2 \neq 0$. El cambio de escala dado por:

$$\begin{cases} X_0' = \dfrac{a_2}{a_3} X_0 \\ X_1' = \dfrac{a_2^4}{a_3^4 b_5} X_1 \\ Y' = \dfrac{a_2^3}{a_3^4} Y \end{cases}$$

permite suponer $b_5 = a_3 = a_2 = 1$, obteniéndose $\mu^{33}_{(6,1,1)}$. □

Teorema 2.2.15.– *Sea $\mathfrak{g}$ cualquier álgebra en $AL2F(5,0)(6).3$. Entonces será isomorfa a una de las siguientes álgebras, no isomorfas entre sí, de leyes $\mu^{8,1}_{(6,1)} \oplus \mathbf{C}$, $\mu^{7}_{(6,1)} \oplus \mathbf{C}$ y $\mu^{i}_{(6,1,1)}$, $34 \leq i \leq 37$, dadas por*

$$\mu^{34}_{(6,1,1)} : \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1} & 1 \leq i \leq 5 \\ [X_1, X_2] = X_4 \\ [X_1, X_3] = X_5 \\ [X_1, X_4] = X_6 \\ [X_1, Y] = X_6 \end{cases}$$

$$\mu^{35}_{(6,1,1)} : \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1} & 1 \leq i \leq 5 \\ [X_1, X_2] = X_4 + X_6 \\ [X_1, X_3] = X_5 \\ [X_1, X_4] = X_6 \\ [X_1, Y] = X_6 \end{cases}$$

$$\mu^{36}_{(6,1,1)} : \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1} & 1 \leq i \leq 5 \\ [X_1, X_2] = X_4 \\ [X_1, X_3] = X_5 \\ [X_1, X_4] = X_6 \\ [X_1, Y] = X_5 \\ [X_2, Y] = X_6 \end{cases}$$

$$\mu^{37}_{(6,1,1)} : \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1} & 1 \leq i \leq 5 \\ [X_1, X_2] = X_4 \\ [X_1, X_3] = X_5 \\ [X_1, X_4] = X_6 \\ [X_1, Y] = X_5 + X_6 \\ [X_2, Y] = X_6 \end{cases}$$

Demostración: Si $\mathfrak{g} \in AL2F(5,0)(6).3$, su ley vendrá dada por

$$AL2F(5,0)(6).3 : \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1} & 1 \leq i \leq 5 \\ [X_1, X_2] = b_2 X_4 + b_5 X_6 \\ [X_1, X_3] = b_2 X_5 \\ [X_1, X_4] = b_2 X_6 \\ [X_1, Y] = a_2 X_5 + a_1 X_6 \\ [X_2, Y] = a_2 X_6 \end{cases}$$
con $b_2 \neq 0$

Adaptando los cambios de base hechos en 2.2.12, los nuevos parámetros son:

$$b'_5 = \frac{Q_1 b_5 - Q_7 a_2}{P_0^4}$$
$$a'_2 = \frac{R_7}{P_0^4} a_2$$
$$a'_1 = \frac{R_7}{P_0^5} a_1$$

Por tanto, si $a_2 \neq 0$, eligiendo $Q_7 = \dfrac{Q_1 b_5}{a_2}$ se puede suponer $b'_5 = 0$.

En resumen:

$$b_2 \neq 0 \begin{cases} a_2 = 0 \begin{cases} b_5 = 0 \begin{cases} a_1 = 0 \\ a_1 \neq 0 \end{cases} \\ b_5 \neq 0 \begin{cases} a_1 = 0 \\ a_1 \neq 0 \end{cases} \end{cases} \\ a_2 \neq 0 \Longrightarrow b_5 = 0 \begin{cases} a_1 = 0 \\ a_1 \neq 0 \end{cases} \end{cases}$$

(1) Si $a_2 = b_5 = a_1 = 0$, $b_2 \neq 0$, obteniéndose $\mu^{8,1}_{(6,1)} \oplus \mathbf{C}$.

(2) Si $a_2 = b_5 = 0$, $b_2 a_1 \neq 0$. El cambio de escala definido por

$$\begin{cases} X_0' = X_0 \\ X_1' = \dfrac{1}{b_2} X_1 \\ Y' = \dfrac{1}{a_1} Y \end{cases}$$

permite suponer $a_1 = b_2 = 1$, obteniéndose $\mu^{34}_{(6,1,1)}$.

(3) Si $a_2 = a_1 = 0, b_2 b_5 \neq 0$, obteniéndose $\mu^{7}_{(6,1)} \oplus \mathbf{C}$.

(4) Si $a_2 = 0$, $b_2 b_5 a_1 \neq 0$. El cambio de escala definido por

$$\begin{cases} X_0' = \sqrt{\dfrac{b_5}{b_2}} X_0 \\ X_1' = \dfrac{b_5}{b_2^2} X_1 \\ Y' = \dfrac{b_5^2}{b_2^2 a_1} \sqrt{\dfrac{b_5}{b_2}} Y \end{cases}$$

permite suponer $b_2 = b_5 = a_1 = 1$, obteniéndose $\mu^{35}_{(6,1,1)}$.

(5) Si $b_5 = a_1 = 0$, $b_2 a_2 \neq 0$. El cambio de escala definido por

$$\begin{cases} X_0' = X_0 \\ X_1' = \dfrac{1}{b_2} X_1 \\ Y' = \dfrac{1}{a_2} Y \end{cases}$$

permite suponer $b_2 = a_2 = 1$, obteniéndose $\mu^{36}_{(6,1,1)}$.

(6) Si $b_5 = 0$, $b_2 a_2 a_1 \neq 0$. El cambio de escala definido por

$$\begin{cases} X_0' = \dfrac{a_1}{a_2} X_0 \\ X_1' = \dfrac{a_1^2}{a_2^2 b_2} X_1 \\ Y' = \dfrac{a_1^4}{a_2^5} Y \end{cases}$$

permite suponer $b_2 = a_2 = a_1 = 1$, obteniéndose $\mu^{37}_{(6,1,1)}$. □

Teorema 2.2.16.– *Sea* $\mathfrak{g}$ *cualquier álgebra en* $AL2F(5,0)(6).4$. *Entonces será isomorfa a una de las siguientes álgebras, no isomorfas entre sí, de leyes* $\mu^{i}_{(6,1,1)}$, $38 \le i \le 42$, $i \ne 40$ *y* $\mu^{40,\lambda}_{(6,1,1)}$, *con* $\lambda \in \mathbf{C}_2$, *dadas por*

$$\mu^{38}_{(6,1,1)} : \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1} & 1 \le i \le 5 \\ [X_1, Y] = X_3 & \\ [X_2, Y] = X_4 & \\ [X_3, Y] = X_5 & \\ [X_4, Y] = X_6 & \end{cases}$$

$$\mu^{39}_{(6,1,1)} : \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1} & 1 \le i \le 5 \\ [X_1, Y] = X_3 + X_6 & \\ [X_2, Y] = X_4 & \\ [X_3, Y] = X_5 & \\ [X_4, Y] = X_6 & \end{cases}$$

$$\mu^{40,\lambda}_{(6,1,1)} : \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1} & 1 \le i \le 5 \\ [X_1, Y] = X_3 + X_5 + \lambda X_6 & \\ [X_2, Y] = X_4 + X_6 & \\ [X_3, Y] = X_5 & \\ [X_4, Y] = X_6 & \lambda \in \mathbf{C}_2 \end{cases}$$

$$\mu^{41}_{(6,1,1)} : \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1} & 1 \le i \le 5 \\ [X_1, X_2] = X_6 & \\ [X_1, Y] = X_3 & \\ [X_2, Y] = X_4 & \\ [X_3, Y] = X_5 & \\ [X_4, Y] = X_6 & \end{cases}$$

$$\mu^{42}_{(6,1,1)} : \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1} & 1 \le i \le 5 \\ [X_1, X_2] = X_6 & \\ [X_1, Y] = X_3 + X_5 & \\ [X_2, Y] = X_4 + X_6 & \\ [X_3, Y] = X_5 & \\ [X_4, Y] = X_6 & \end{cases}$$

Demostración: Si $\mathfrak{g} \in AL2F(5,0)(6).4$, su ley vendrá dada por

$$AL2F(5,0)(6).4 : \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1} & 1 \leq i \leq 5 \\ [X_1, X_2] = b_5 X_6 \\ [X_1, Y] = a_4 X_3 + a_2 X_5 + a_1 X_6 \\ [X_2, Y] = a_4 X_4 + a_2 X_6 \\ [X_3, Y] = a_4 X_5 \\ [X_4, Y] = a_4 X_6 \end{cases}$$
$$\text{con} \quad a_4 \neq 0$$

Adaptando los cambios de bases hechos en el teorema 2.2.12, a la familia $AL2F(5,0)(6).4$, los parámetros quedan:

$$\begin{aligned} b_5' &= \frac{Q_1 b_5}{P_0^4} \\ a_4' &= \frac{R_7 a_4}{P_0^2} \\ a_2' &= \frac{R_7 a_2}{P_0^4} \\ a_1' &= \frac{R_7(P_0 a_1 - 2P_1 a_4 b_5)}{P_0^6} \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta los parámetros, se puede resumir la situación como sigue;

$$a_4 \neq 0 \begin{cases} b_5 = 0 \begin{cases} a_1 = 0 \begin{cases} a_2 = 0 \\ a_2 \neq 0 \end{cases} \\ a_1 \neq 0 \begin{cases} a_2 = 0 \\ a_2 \neq 0 \end{cases} \end{cases} \\ b_5 \neq 0 \Longrightarrow a_1 = 0 \begin{cases} a_2 = 0 \\ a_2 \neq 0 \end{cases} \end{cases}$$

(1) Si $b_5 = a_1 = a_2 = 0$, $a_4 \neq 0$, el cambio de escala definido mediante

$$\begin{cases} X_0' = X_0 \\ X_1' = X_1 \\ Y' = \dfrac{1}{a_4} Y \end{cases}$$

permite suponer $a_4 = 1$, obteniéndose $\mu^{38}_{(6,1,1)}$.

(2) Si $b_5 = a_1 = 0$, $a_4 a_2 \neq 0$, el cambio de escala definido mediante

$$\begin{cases} X_0' = \sqrt{\dfrac{a_2}{a_4}} X_0 \\ X_1' = X_1 \\ Y' = \dfrac{a_2}{a_4^2} Y \end{cases}$$

permite suponer $a_4 = a_2 = 1$, obteniéndose $\mu^{40,0}_{(6,1,1)}$.

(3) Si $b_5 = a_2 = 0$, $a_4 a_1 \neq 0$, el cambio de escala definido mediante

$$\begin{cases} X_0' = \sqrt[3]{\dfrac{a_1}{a_4}} X_0 \\ X_1' = X_1 \\ Y' = \dfrac{1}{a_4} \sqrt[3]{\left(\dfrac{a_1}{a_4}\right)^2} Y \end{cases}$$

permite suponer $a_4 = a_1 = 1$, obteniéndose $\mu^{39}_{(6,1,1)}$.

(4) Si $b_5 = 0$, $a_4 a_1 a_2 \neq 0$, el cambio de escala definido mediante

$$\begin{cases} X_0' = \sqrt{\dfrac{a_2}{a_4}} X_0 \\ X_1' = X_1 \\ Y' = \dfrac{a_2}{a_4^2} Y \end{cases}$$

permite suponer $a_4 = a_2 = 1$, obteniéndose $\mu^{40,\lambda}_{(6,1,1)}$, con $\lambda \in \mathbf{C}_2 - \{0\}$.

(5) Si $a_1 = a_2 = 0$, $a_4 b_5 \neq 0$, el cambio de escala definido mediante

$$\begin{cases} X_0' = X_0 \\ X_1' = \dfrac{1}{b_5} X_1 \\ Y' = \dfrac{1}{a_4} Y \end{cases}$$

permite suponer $a_4 = b_5 = 1$, obteniéndose $\mu^{41}_{(6,1,1)}$.

(6) Si $a_1 = 0$, $a_4b_5a_2 \neq 0$, el cambio de escala definido mediante

$$\begin{cases} X_0' = \sqrt{\dfrac{a_2}{a_4}}X_0 \\ X_1' = \dfrac{a_2^2}{a_4^2b_5}X_1 \\ Y' = \dfrac{a_2}{a_4^2}Y \end{cases}$$

permite suponer $a_4 = a_2 = b_5 = 1$, obteniéndose $\mu^{42}_{(6,1,1)}$. □

Proposición 2.2.17.– *Sea la familia de álgebras $AL2F(5,0)(5)$. Entonces existen cuatro subfamilias, no isomorfas entre sí, cuyas leyes vienen dadas, en una cierta base adaptada $\{X_0, X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6, Y\}$, por*

$$AL2F(5,0)(5).1 : \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1} & 1 \leq i \leq 5 \\ [X_1, X_2] = b_2X_4 + b_4X_5 + b_5X_6 \\ [X_1, X_3] = b_2X_5 + b_4X_6 \\ [X_1, X_4] = b_2X_6 \\ [X_1, Y] = a_3X_4 + a_2X_5 + a_1X_6 \\ [X_2, Y] = a_3X_5 + a_2X_6 \\ [X_3, Y] = a_3X_6 \end{cases}$$
$$b_2a_3 \neq 0$$

$$AL2F(5,0)(5).2 : \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1} & 1 \leq i \leq 5 \\ [X_1, X_2] = b_4X_5 + b_5X_6 \\ [X_1, X_3] = b_4X_6 \\ [X_1, Y] = a_4X_3 + a_3X_4 + a_2X_5 + a_1X_6 \\ [X_2, Y] = a_4X_4 + a_3X_5 + a_2X_6 \\ [X_3, Y] = a_4X_5 + a_3X_6 \\ [X_4, Y] = a_4X_6 \end{cases}$$
$$a_4b_4 \neq 0$$

Demostración: Si $\mathfrak{g} \in AL2F(5,0)(5)$, su ley vendrá dada por

$$AL2F(5,0)(5): \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1} & 1 \leq i \leq 5 \\ [X_1, X_2] = b_2X_4 + b_4X_5 + b_5X_6 \\ [X_1, X_3] = b_2X_5 + b_4X_6 \\ [X_1, X_4] = b_2X_6 \\ [X_1, Y] = a_4X_3 + a_3X_4 + a_2X_5 + a_1X_6 \\ [X_2, Y] = a_4X_4 + a_3X_5 + a_2X_6 \\ [X_3, Y] = a_4X_5 + a_3X_6 \\ [X_4, Y] = a_4X_6 \end{cases}$$
$$b_2a_3 - b_4a_4 \neq 0$$

Se observa que los cambios hechos en 2.2.12, son válidos para este caso, por lo que se tiene que la nulidad de a_4 es invariante y además, si $a_4 \neq 0$, eligiendo $Q_7 = \dfrac{Q_1b_2}{a_4}$, se puede suponer $b_2 = 0$, puesto que

$$b_2' = \frac{b_2Q_1 - a_4Q_7}{P_0^2}$$

De esta forma, se tienen las dos familias del enunciado (la primera con $a_4 = 0$, y la segunda con $a_4 \neq 0$, $b_2 = 0$), teniendo en cuenta que $b_2a_3 - b_4a_4 \neq 0$. □

Teorema 2.2.18.– *Sea $\mathfrak{g}$ cualquier álgebra en $AL2F(5,0)(5).1$. Entonces será isomorfa a una de las siguientes álgebras, no isomorfas entre sí, de leyes $\mu^i_{(6,1,1)}$, $43 \leq i \leq 44$, dadas por*

$$\mu^{43}_{(6,1,1)}: \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1} & 1 \leq i \leq 5 \\ [X_1, X_2] = X_4 \\ [X_1, X_3] = X_5 \\ [X_1, X_4] = X_6 \\ [X_1, Y] = X_4 \\ [X_2, Y] = X_5 \\ [X_3, Y] = X_6 \end{cases}$$

$$\mu^{44}_{(6,1,1)}: \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1} & 1 \leq i \leq 5 \\ [X_1, X_2] = X_4 \\ [X_1, X_3] = X_5 \\ [X_1, X_4] = X_6 \\ [X_1, Y] = X_4 + X_6 \\ [X_2, Y] = X_5 \\ [X_3, Y] = X_6 \end{cases}$$

Demostración: Si $\mathfrak{g} \in AL2F(5,0)(5).1$, su ley vendrá dada por

$$AL2F(5,0)(5).1: \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1} & 1 \leq i \leq 5 \\ [X_1, X_2] = b_2X_4 + b_4X_5 + b_5X_6 \\ [X_1, X_3] = b_2X_5 + b_4X_6 \\ [X_1, X_4] = b_2X_6 \\ [X_1, Y] = a_3X_4 + a_2X_5 + a_1X_6 \\ [X_2, Y] = a_3X_5 + a_2X_6 \\ [X_3, Y] = a_3X_6 \end{cases}$$
$$a_3b_2 \neq 0$$

Se deduce fácilmente que los cambios de base hechos en 2.2.12 para $a_4 = 0$ son también válidos para esta familia y, de esta forma, los parámetros quedan:

$$b'_2 = \frac{b_2Q_1}{P_0^2}$$
$$b'_4 = \frac{b_4P_0Q_1 - 2b_2^2P_1Q_1 - a_3P_0Q_7}{P_0^4}$$
$$b'_5 = \frac{b_5P_0^2Q_1 + 5b_2^3P_1^2Q_1 - a_2P_0^2Q_7 - 5b_2b_4P_0P_1Q_1 + 2a_3b_2P_0P_7Q_1 + 3a_3b_2P_0P_1Q_7}{P_0^6}$$
$$a'_3 = \frac{a_3R_7}{P_0^3}$$
$$a'_2 = \frac{(a_2P_0 - 3a_3b_2P_1)R_7}{P_0^5}$$
$$a'_1 = \frac{(a_1P_0^2 - 4a_2b_2P_0P_1 - 3a_3b_4P_0P_1 + 9a_3b_2^2P_1^2 + 3a_3^2P_0P_7)R_7}{P_0^5}$$

con la única restricción que $\quad P_0Q_1R_7 \neq 0.$

Como $a_3b_2 \neq 0$, eligiendo $Q_7 = \dfrac{(b_4P_0 - 2b_2^2P_1)Q_1}{a_3P_0}$, permite suponer $b_4 = 0$. Si se elige $P_1 = \dfrac{a_2P_0}{3a_3b_2}$, se puede hacer $a_2 = 0$, si en b'_5 se elige P_7, de forma que haga $b'_5 = 0$, se puede suponer $b_5 = 0$. Teniendo en cuenta todo esto, los cambios conducen a que la nulidad de a_1 es invariante.

$$b_2a_3 \neq 0 \Longrightarrow b_4 = b_5 = a_2 = 0 \begin{cases} a_1 = 0 \\ a_1 \neq 0 \end{cases}$$

(1) Si $b_5 = a_2 = a_1 = 0$, $b_2 a_3 \neq 0$, el cambio de escala definido mediante

$$\begin{cases} X_0' = X_0 \\ X_1' = \dfrac{1}{b_2} X_1 \\ Y' = \dfrac{1}{a_3} Y \end{cases}$$

permite suponer $b_2 = a_3 = 1$. Se tiene $\mu^{43}_{(6,1,1)}$.

(2) Si $b_5 = a_2 = 0$, $b_2 a_3 a_1 \neq 0$, el cambio de escala definido mediante

$$\begin{cases} X_0' = \sqrt{\dfrac{a_1}{a_3}} X_0 \\ X_1' = \dfrac{a_1}{a_3 b_2} X_1 \\ Y' = \dfrac{a_1}{a_3^2} \sqrt{\dfrac{a_1}{a_3}} Y \end{cases}$$

permite suponer $b_2 = a_3 = a_1 = 1$. Se tiene $\mu^{44}_{(6,1,1)}$. □

Teorema 2.2.19.– *Sea $\mathfrak{g}$ cualquier álgebra en $AL2F(5,0)(5).2$. Entonces será isomorfa a una de las siguientes álgebras, no isomorfas entre sí, de leyes $\mu^i_{(6,1,1)}$, $45 \leq i \leq 46$ y $\mu^{47,\lambda}_{(6,1,1)}$ con $\lambda \in \mathbf{C}$, dadas por*

$$\mu^{45}_{(6,1,1)} : \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1} & 1 \leq i \leq 5 \\ [X_1, X_2] = X_5 \\ [X_1, X_3] = X_6 \\ [X_1, Y] = X_3 \\ [X_2, Y] = X_4 \\ [X_3, Y] = X_5 \\ [X_4, Y] = X_6 \end{cases}$$

$$\mu^{46}_{(6,1,1)} : \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1} & 1 \leq i \leq 5 \\ [X_1, X_2] = X_5 \\ [X_1, X_3] = X_6 \\ [X_1, Y] = X_3 + X_6 \\ [X_2, Y] = X_4 \\ [X_3, Y] = X_5 \\ [X_4, Y] = X_6 \end{cases}$$

$$\mu^{47,\lambda}_{(6,1,1)} : \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1} & 1 \leq i \leq 5 \\ [X_1, X_2] = X_5 & \\ [X_1, X_3] = X_6 & \\ [X_1, Y] = X_3 + \lambda X_6 & \\ [X_2, Y] = X_4 & \\ [X_3, Y] = X_5 & \\ [X_4, Y] = X_6 & \lambda \in \mathbb{C} \end{cases}$$

Demostración: Si $\mathfrak{g} \in AL2F(5,0)(5).2$, su ley vendrá dada por

$$AL2F(5,0)(5).2 : \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1} & 1 \leq i \leq 5 \\ [X_1, X_2] = b_4X_5 + b_5X_6 & \\ [X_1, X_3] = b_4X_6 & \\ [X_1, Y] = a_4X_3 + a_3X_4 + a_2X_5 + a_1X_6 & \\ [X_2, Y] = a_4X_4 + a_3X_5 + a_2X_6 & \\ [X_3, Y] = a_4X_5 + a_3X_6 & \\ [X_4, Y] = a_4X_6 & \end{cases}$$
$$a_4b_4 \neq 0$$

Adaptando los cambios hechos en 2.2.12, para $a_4 \neq 0$ y $b_2 = 0$ (para mantener $b_2 = 0$, es necesario exigir al volver a realizar los cambios, que sea $Q_7 = 0$), se tiene que los nuevos parámetros son

$$b'_4 = \frac{b_4Q_1}{P_0^3}$$
$$b'_5 = \frac{b_5P_0Q_1 + 3a_4b_4P_7Q_1}{P_0^5}$$
$$a'_3 = \frac{(a_3P_0 + 2a_4^2P_7)R_7}{P_0^4}$$
$$a'_2 = \frac{(a_2P_0^2 + 5a_3a_4P_0P_7 + a_4(-2b_4P_0P_1 + 5a_4^2P_7^2))R_7}{P_0^6}$$
$$a'_1 = \frac{(a_1P_0^2 - 3a_3b_4P_0P_1 - 2a_4b_5P_0P_1 + 3a_3^2P_0^2P_7 + 6a_2a_4P_0P_7 - 12a_4^2b_4P_1P_7}{P_0^7} +$$
$$+ \frac{21a_3a_4^2P_0P_7^2 + 14a_4^4P_7^3)R_7}{P_0^8}$$

con $P_0Q_1R_7 \neq 0$.

La configuración de los parámetros puede quedar reflejada de la siguiente manera:

$$a_4b_4 \neq 0 \Longrightarrow (1)a_2 = a_3 = 0 \begin{cases} b_5 = 0 \begin{cases} a_1 = 0 \\ a_1 \neq 0 \end{cases} \\ b_5 \neq 0 \begin{cases} a_1 = 0 \\ a_1 \neq 0 \end{cases} \end{cases}$$

(1) Si se elige $P_7 = \dfrac{-a_3P_0}{2a_4^2}$ en a_3', entonces se puede hacer siempre $a_3 = 0$. Si se repiten los cambios, para mantener $a_3 = 0$, hay que imponer $P_7 = 0$. Si todo esto se sustituye en los parámetros, se puede elegir $P_1 = \dfrac{a_2P_0}{2a_4b_4}$ para poder hacer $a_2 = 0$. Una vez hechos estos cambios particulares, para mantener los ceros, hay que imponer $Q_7 = P_1 = P_7 = 0$, y así se tiene que las nulidades de b_5 y a_1 son invariantes.

Teniendo en cuenta todo lo anterior, las álgebras que se van a obtener son no isomorfas entre sí. Éstas son:

- Caso 1: $a_3 = a_2 = a_1 = b_5 = 0, \qquad a_4b_4 \neq 0.$

  El cambio de escala definido por:

$$\begin{cases} X_0' = X_0 \\ X_1' = \dfrac{1}{b_4}X_1 \\ Y' = \dfrac{1}{a_4}Y \end{cases}$$

  permite suponer $a_4 = b_4 = 1$, obteniéndose $\mu^{45}_{(6,1.1)}$.

- Caso 2: $a_3 = a_2 = b_5 = 0, \qquad a_4a_1b_4 \neq 0.$

  El cambio de escala definido por:

$$\begin{cases} X_0' = \sqrt[3]{\dfrac{a_1}{a_4}}X_0 \\ X_1' = \dfrac{a_1}{a_4b_4}X_1 \\ Y' = \dfrac{1}{a_4}\sqrt[3]{\left(\dfrac{a_1}{a_4}\right)^2}Y \end{cases}$$

  permite suponer $a_4 = a_1 = b_4 = 1$, obteniéndose $\mu^{46}_{(6,1,1)}$.

- Caso 3: $a_3 = a_2 = a_1 =, a_4 b_4 b_5 \neq 0$.

  El cambio de escala definido por:

$$\begin{cases} X_0' = \dfrac{b_5}{b_4} X_0 \\ X_1' = \dfrac{b_5^3}{b_4^4} X_1 \\ Y' = \dfrac{b_5^2}{a_4 b_4^2} Y \end{cases}$$

  permite suponer $a_4 = b_4 = b_5 = 1$, obteniéndose $\mu^{47,0}_{(6,1,1)}$.

- Caso 4: $a_3 = a_2 = 0$, $a_4 a_1 b_4 b_5 \neq 0$. El mismo cambio de escala anterior permite suponer $a_4 = b_4 = b_5 = 1$, obteniéndose $\mu^{47,\lambda}_{(6,1,1)}$, con $\lambda \in \mathbf{C} - \{0\}$. □

Proposición 2.2.20.– *Sea la familia de álgebras $AL2F(5,1)$. Entonces existen cuatro subfamilias, no isomorfas entre sí, cuyas leyes vienen dadas, en una base adaptada $\{X_0, X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6, Y\}$, por*

$$AL2F(5,1)(7,4) \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1} & 1 \leq i \leq 5 \\ [X_1, X_2] = b_3 X_4 + b_4 X_5 + b_5 X_6 \\ [X_1, X_3] = b_3 X_5 + b_4 X_6 \\ [X_2, X_3] = b_3 X_6 \\ [X_1, Y] = a_2 X_5 + a_1 X_6 \\ [X_2, Y] = a_2 X_6 \end{cases}$$
$$\text{con } \; b_3 \neq 0$$

$$AL2F(5,1)(7,3) \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1} & 1 \leq i \leq 5 \\ [X_1, X_2] = b_3 X_4 + b_4 X_5 + b_5 X_6 \\ [X_1, X_3] = b_3 X_5 + b_4 X_6 \\ [X_2, X_3] = b_3 X_6 \\ [X_1, Y] = a_3 X_4 + a_2 X_5 + a_1 X_6 \\ [X_2, Y] = a_3 X_5 + a_2 X_6 \\ [X_3, Y] = a_3 X_6 \end{cases}$$
$$\text{con } \; a_3 b_3 \neq 0$$

$$AL2F(5,1)(6,4)\left\{\begin{array}{ll}[X_0,X_i]=X_{i+1} & 1\leq i\leq 5\\ [X_1,X_2]=(b_2+b_3)X_4+b_4X_5+b_5X_6 & \\ [X_1,X_3]=(b_2+b_3)X_5+b_4X_6 & \\ [X_1,X_4]=b_2X_6 & \\ [X_2,X_3]=b_3X_6 & \\ [X_1,Y]=a_2X_5+a_1X_6 & \\ [X_2,Y]=a_2X_6 & \end{array}\right.$$

$$con \quad b_2b_3\neq 0$$

$$AL2F(5,1)(6,3)\left\{\begin{array}{ll}[X_0,X_i]=X_{i+1} & 1\leq i\leq 5\\ [X_1,X_2]=(b_2+b_3)X_4+b_4X_5+b_5X_6 & \\ [X_1,X_3]=(b_2+b_3)X_5+b_4X_6 & \\ [X_1,X_4]=b_2X_6 & \\ [X_2,X_3]=b_3X_6 & \\ [X_1,Y]=a_3X_4+a_2X_5+a_1X_6 & \\ [X_2,Y]=a_3X_5+a_2X_6 & \\ [X_3,Y]=a_3X_6 & \end{array}\right.$$

$$con \quad a_3b_2b_3\neq 0$$

Demostración: Si $\mathfrak{g}$ está en las condiciones anteriores, es decir, si $\mathfrak{g}\in AL2F(5,1)$, su ley vendrá dada por

$$AL2F(5,1):\left\{\begin{array}{ll}[X_0,X_i]=X_{i+1} & 1\leq i\leq 5\\ [X_1,X_2]=(b_2+b_3)X_4+b_4X_5+b_5X_6 & \\ [X_1,X_3]=(b_2+b_3)X_5+b_4X_6 & \\ [X_1,X_4]=b_2X_6 & \\ [X_2,X_3]=b_3X_6 & \\ [X_1,Y]=a_3X_4+a_2X_5+a_1X_6 & \\ [X_2,Y]=a_3X_5+a_2X_6 & \\ [X_3,Y]=a_3X_6 & \end{array}\right.$$

$$\text{con} \quad b_3\neq 0$$

Se tiene fácilmente que las nulidades de b_2 y de a_3 son invariantes, pues

$$dim(Cent(\mathcal{C}^3(\mathfrak{g})=\left\{\begin{array}{ll}7 & \text{si } b_2=0\\ & \\ 6 & \text{si } b_2\neq 0\end{array}\right.$$

$$dim(Cent(\mathcal{C}^1(\mathfrak{g}) = \begin{cases} 4 & \text{si } a_3 = 0 \\ \\ 3 & \text{si } a_3 \neq 0 \end{cases}$$

de ahí la notación seguida. Para cada uno de los casos se obtienen, respectivamente, las familias del enunciado. □

Teorema 2.2.21.– *Sea $\mathfrak{g}$ cualquier álgebra en $AL2F(5,1)(7,4)$. Entonces será isomorfa a una de las siguientes álgebras, no isomorfas entre sí, de leyes $\mu^{8,0}_{(6,1)} \oplus \mathbf{C}$ y $\mu^i_{(6,1,1)}$, $48 \leq i \leq 50$, dadas por*

$$\mu^{48}_{(6,1,1)} : \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1} & 1 \leq i \leq 5 \\ [X_1, X_2] = X_4 \\ [X_1, X_3] = X_5 \\ [X_2, X_3] = X_6 \\ [X_1, Y] = X_6 \end{cases}$$

$$\mu^{49}_{(6,1,1)} : \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1} & 1 \leq i \leq 5 \\ [X_1, X_2] = X_4 \\ [X_1, X_3] = X_5 \\ [X_2, X_3] = X_6 \\ [X_1, Y] = X_5 \\ [X_2, Y] = X_6 \end{cases}$$

$$\mu^{50}_{(6,1,1)} : \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1} & 1 \leq i \leq 5 \\ [X_1, X_2] = X_4 \\ [X_1, X_3] = X_5 \\ [X_2, X_3] = X_6 \\ [X_1, Y] = X_5 + X_6 \\ [X_2, Y] = X_6 \end{cases}$$

Demostración: Si $\mathfrak{g} \in AL2F(5,1)(7,4)$, su ley vendrá dada por

$$AL2F(5,1)(7,4) \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1} & 1 \leq i \leq 5 \\ [X_1, X_2] = b_3 X_4 + b_4 X_5 + b_5 X_6 \\ [X_1, X_3] = b_3 X_5 + b_4 X_6 \\ [X_2, X_3] = b_3 X_6 \\ [X_1, Y] = a_2 X_5 + a_3 X_6 \\ [X_2, Y] = a_2 X_6 \end{cases}$$

con $b_3 \neq 0$

Si se efectúan los cambios de base genéricos (con ayuda del paquete de cálculo simbólico *Mathematica* 3.0), en la familia $AL2F(5,1)(7)$, y luego se particulariza para $a_3 = 0$ o bien para la otra familia con $a_3 \neq 0$, se llega a que

$$X_0' = P_0X_0 + P_1X_1 + P_2X_2 + P_3X_3 + P_4X_4 + P_5X_5 + P_6X_6 + P_7Y$$

$$X_1' = Q_1X_1 + Q_2X_2 + Q_3X_3 + Q_4X_4 + Q_5X_5 + Q_6X_6 + Q_7Y$$

$$X_2' = P_0Q_1X_2 + P_0X_3 + (b_3(P_1Q_2 - P_2Q_1) + P_0Q_3 + a_3(P_1Q_7 - P_7Q_1))X_4 + (-a_2P_7Q_1 - a_3P_7Q_2 + b_4(P_1Q_2 - P_2Q_1) + b_3(P_1Q_3 - P_3Q_1) + P_0Q_4 + a_2P_1Q_7 + a_3P_2Q_7)X_5 + (-b_4P_3Q_1 - a_1P_7Q_1 - b_3P_3Q_2 - a_2P_7Q_2 + b_5(P_1Q_2 - P_2Q_1) + b_4P_1Q_3 + b_3P_2Q_3 - a_3P_7Q_3 + P_0Q_5 + a_1P_1Q_7 + a_2P_2Q_7 + a_3P_3Q_7)X_6$$

$$X_3' = P_0^2Q_1X_3 + P_0(b_3P_1Q_1 + P_0Q_2)X_4 + P_0(b_4P_1Q_1 - 2a_3P_7Q_1 + b_3(2P_1Q_2 - P_2Q_1) + b_3P_1Q_3 + P_0Q_4 + a_2P_1Q_7 + a_3P_2Q_7)X_6$$

$$X_4' = P_0^3Q_1X_4 + P_0^2(2b_3P_1Q_1 + P_0Q_2)X_5 + P_0^2(2b_4P_1Q_1 + 2b_3P_1Q_2 + P_0Q_3 + a_3(-3P_7Q_1 + P_1Q_7))X_6$$

$$X_5' = P_0^4Q_1X_5 + P_0^3(2b_3P_1Q_1 + P_0Q_2)X_6$$

$$X_6' = P_0^5Q_1X_6$$

$$Y' = R_3X_3 + R_4X_4 + R_5X_5 + R_6X_6 + R_7Y$$

con $P_0Q_1R_7 \neq 0$. Y para no salirse de la familia ($[X_0', Y'] = 0$), hay que elegir los R_i, de la siguiente forma

$$R_3 = -\frac{a_3P_1R_7}{P_0}$$
$$R_4 = -\frac{a_2P_0P_1R_7 - a_3b_3P_1^2R_7 + a_3P_0P_2R_7}{P_0^2}$$
$$R_5 = -\frac{a_1P_0P_1R_7 - a_3b_4P_1^2R_7 + a_2P_0P_2R_7 - a_3b_3P_1P_2R_7 + a_3P_0P_3R_7 + a_3^2P_1P_7R_7}{P_0^2}$$

La familia que se va a tratar es $AL2F(5,1)(7,4)$, que corresponde a $a_3 = 0$, y $b_3 \neq 0$. Si se efectúan todos los productos, se tiene que los nuevos parámetros son de la forma:

$$b_3' = \frac{b_3Q_1}{P_0^2}$$
$$b_4' = \frac{b_4P_0Q_1 - 2b_3^2P_1Q_1}{P_0^4}$$
$$b_5' = \frac{b_5P_0^2Q_1^2 + 4b_3^3P_1^2Q_1^2 - a_2P_0^2Q_1Q_7 - 4b_3b_4P_0P_1Q_1^2 + b_3P_0^2Q_2^2 - 2b_3P_0^2Q_1Q_3}{P_0^6Q_1}$$

$$a'_1 = \frac{a_1P_0R_7 - 2a_2b_3P_1R_7}{P_0^6}$$

$$a'_2 = \frac{a_2R_7}{P_0^4}$$

Si se elige $P_1 = \dfrac{b_4P_0}{2b_3^2}$ en b'_4, se puede hacer entonces $b'_4 = 0$ y por tanto se puede considerar $b_4 = 0$.

Si se vuelven a efectuar los cambios de base, para mantener $b_4 = 0$, hay que imponer $P_1 = 0$.

En este caso se tiene que

$$b'_5 = \frac{b_5P_0^2Q_1^2 - a_2P_0^2Q_1Q_7 + b_3P_0^2Q_2^2 - 2b_3P_0^2Q_1Q_3}{P_0^6Q_1}$$

y si se elige $\quad Q_3 = \dfrac{-b_4^2Q_1^2 + b_3b_5Q_1^2 + b_3^2Q_2^2 + a_2b_3Q_1Q_7}{2b_3^2Q_1}$, se puede suponer siempre $b_5 = 0$.

Después de todo esto, queda que las nulidades de a_1 y de a_2 son invariantes, teniendo por tanto la siguiente configuración

$$b_4 = b_5 = 0 \begin{cases} a_2 = 0 \begin{cases} a_1 = 0 \\ a_1 \neq 0 \end{cases} \\ a_2 \neq 0 \begin{cases} a_1 = 0 \\ a_1 \neq 0 \end{cases} \end{cases}$$

Teniendo en cuenta esto, se llega a que las únicas álgebras no isomorfas entre sí son las que se detallan a continuación:

- Caso 1: $b_4 = b_5 = a_2 = a_1 = 0$, $b_3 \neq 0$, se obtiene $\mu_{(6,1)}^{8,0} \oplus \mathbf{C}$.
- Caso 2: $b_4 = b_5 = a_2 = 0$, $b_3a_1 \neq 0$.
  El cambio de escala dado por

$$\begin{cases} X'_0 = X_0 \\ X'_1 = \dfrac{1}{b_3}X_1 \\ Y' = \dfrac{1}{a_1}Y \end{cases}$$

permite suponer $b_3 = a_1 = 1$, obteniéndose $\mu^{48}_{(6,1,1)}$.

- Caso 3: $b_4 = b_5 = a_1 = 0$, $b_3 a_2 \neq 0$.

  El cambio de escala dado por

$$\begin{cases} X'_0 = X_0 \\ X'_1 = \dfrac{1}{b_3} X_1 \\ Y' = \dfrac{1}{a_2} Y \end{cases}$$

  permite suponer $b_3 = a_2 = 1$, obteniéndose $\mu^{49}_{(6,1,1)}$.

- Caso 4: $b_4 = b_5 = 0$, $b_3 a_2 a_1 \neq 0$.

  El cambio de escala dado por

$$\begin{cases} X'_0 = \dfrac{a_1}{a_2} X_0 \\ X'_1 = \dfrac{a_1^2}{a_2^2 b_3} X_1 \\ Y' = \dfrac{a_1^4}{a_2^5} Y \end{cases}$$

  permite suponer $b_3 = a_2 = 1$, obteniéndose $\mu^{50}_{(6,1,1)}$. □

Teorema 2.2.22.– *Sea $\mathfrak{g}$ cualquier álgebra en $AL2F(5,1)(7,3)$. Entonces será isomorfa al álgebra de ley $\mu^{51}_{(6,1,1)}$, dada por*

$$\mu^{51}_{(6,1,1)} : \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1} & 1 \leq i \leq 5 \\ [X_1, X_2] = X_4 \\ [X_1, X_3] = X_5 \\ [X_2, X_3] = X_6 \\ [X_1, Y] = X_4 \\ [X_2, Y] = X_5 \\ [X_3, Y] = X_6 \end{cases}$$

Demostración: Si $\mathfrak{g} \in AL2F(5,1)(7,3)$, su ley vendrá dada por

$$
AL2F(5,1)(7,3)\begin{cases}
[X_0,X_i]=X_{i+1} & 1\le i\le 5\\
[X_1,X_2]=b_3X_4+b_4X_5+b_5X_6 & \\
[X_1,X_3]=b_3X_5+b_4X_6 & \\
[X_2,X_3]=b_3X_6 & \\
[X_1,Y]=a_3X_4+a_2X_5+a_1X_6 & \\
[X_2,Y]=a_3X_5+a_2X_6 & \\
[X_3,Y]=a_3X_6 &
\end{cases}
$$
$$\text{con}\quad a_3b_3\neq 0$$

Son válidos los cambios hechos en el teorema 2.2.21, por tanto, los parámetros quedan,

$$
\begin{aligned}
b_3' &= \frac{b_3Q_1}{P_0^2}\\
b_4' &= \frac{b_4P_0Q_1-2b_3^2P_1Q_1-a_3P_0Q_7}{P_0^4}\\
b_5' &= \frac{b_5P_0^2Q_1^2+4b_3^3P_1^2Q_1^2-a_2P_0^2Q_1Q_7-4b_3b_4P_0P_1Q_1^2+3a_3b_3P_0P_7Q_1^2+b_3P_0^2Q_2^2}{P_0^6Q_1}-\\
&\quad -\frac{2b_3P_0Q_3+a_3b_3P_1Q_7}{P_0^5}\\
a_1' &= \frac{a_1P_0R_7-2a_2b_3P_1R_7-3a_3b_4P_0P_1R_7+6a_3b_3^2P_1^2R_7+3a_3^2P_0P_7R_7}{P_0^6}\\
a_2' &= \frac{a_2P_0R_7-3a_3b_3P_1R_7}{P_0^4}\\
a_3' &= \frac{a_3R_7}{P_0^3}
\end{aligned}
$$

Si se elige $Q_7=\dfrac{b_4P_0Q_1-2b_3^2P_1Q_1}{a_3P_0}$, se puede suponer $b_4=0$. Si, además, en b_5' se elige adecuadamente Q_3, entonces se puede suponer siempre $b_5=0$. Se observa también que si se elige en a_2', $P_1=\dfrac{a_2P_0}{3a_3b_3}$, se puede suponer siempre $a_2=0$, y, por último, si se vuelven a repetir los cambios de base, para mantener los parámetros nulos, hay que imponer que $P_1=0$, además de otras condiciones y por tanto basta elegir en a_1', $P_7=-\dfrac{a_1P_0}{3a_3}$ para conseguir siempre $a_1=0$.

En resumen, se tiene que $a_3b_3\neq 0$ y $b_4=b_5=a_1=a_2=0$ y mediante el cambio de escala dado por

$$\begin{cases} X_0' = X_0 \\ X_1' = \dfrac{1}{b_3} X_1 \\ Y' = \dfrac{1}{a_3} Y \end{cases}$$

se obtiene $\mu^{51}_{(6,1,1)}$. □

Teorema 2.2.23.– *Sea* $\mathfrak{g}$ *cualquier álgebra en* $AL2F(5,1)(6,4)$. *Entonces será isomorfa a una de las siguientes álgebras, no isomorfas entre sí, de leyes* $\mu^5_{(6,1)} \oplus \mathbf{C}$, $\mu^6_{(6,1)} \oplus \mathbf{C}$, $\mu^{8,\delta}_{(6,1)} \oplus \mathbf{C}$, *con* $\delta\mathbf{C}$, $\mu^i_{(6,1,1)}$, $52 \leq i \leq 55$, *y* $\mu^{j,\lambda}_{(6,1,1)}$, $56 \leq j \leq 58$, *con* $\lambda \in \mathbf{C} - \{0,1\}$, *dadas por*

$$\mu^{52}_{(6,1,1)} : \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1} & 1 \leq i \leq 5 \\ [X_1, X_4] = X_6 \\ [X_2, X_3] = -X_6 \\ [X_1, Y] = X_6 \end{cases}$$

$$\mu^{53}_{(6,1,1)} : \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1} & 1 \leq i \leq 5 \\ [X_1, X_4] = X_6 \\ [X_2, X_3] = -X_6 \\ [X_1, Y] = X_5 \\ [X_2, Y] = X_6 \end{cases}$$

$$\mu^{54}_{(6,1,1)} : \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1} & 1 \leq i \leq 5 \\ [X_1, X_2] = X_5 \\ [X_1, X_3] = X_6 \\ [X_1, X_4] = X_6 \\ [X_2, X_3] = -X_6 \\ [X_1, Y] = X_6 \end{cases}$$

$$\mu^{55}_{(6,1,1)} : \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1} & 1 \leq i \leq 5 \\ [X_1, X_2] = X_5 \\ [X_1, X_3] = X_6 \\ [X_1, X_4] = X_6 \\ [X_2, X_3] = -X_6 \\ [X_1, Y] = X_5 \\ [X_2, Y] = X_6 \end{cases}$$

$$\mu^{56,\lambda}_{(6,1,1)} : \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1} & 1 \le i \le 5 \\ [X_1, X_2] = X_4 & \\ [X_1, X_3] = X_5 & \\ [X_1, X_4] = \lambda X_6 & \\ [X_2, X_3] = (1-\lambda) X_6 & \\ [X_1, Y] = X_6 & \lambda \in \mathbf{C} - \{0,1\} \end{cases}$$

$$\mu^{57,\lambda}_{(6,1,1)} : \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1} & 1 \le i \le 5 \\ [X_1, X_2] = X_4 & \\ [X_1, X_3] = X_5 & \\ [X_1, X_4] = \lambda X_6 & \\ [X_2, X_3] = (1-\lambda) X_6 & \\ [X_1, Y] = X_5 & \\ [X_2, Y] = X_6 & \lambda \in \mathbf{C} - \{0,1\} \end{cases}$$

$$\mu^{58,\lambda}_{(6,1,1)} : \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1} & 1 \le i \le 5 \\ [X_1, X_2] = X_4 & \\ [X_1, X_3] = X_5 & \\ [X_1, X_4] = \lambda X_6 & \\ [X_2, X_3] = (1-\lambda) X_6 & \\ [X_1, Y] = X_5 + X_6 & \\ [X_2, Y] = X_6 & \lambda \in \mathbf{C} - \{0,1\} \end{cases}$$

Demostración: Si $\mathfrak{g} \in AL2F(5,1)(6,4)$, su ley vendrá dada por

$$AL2F(5,1)(6,4) \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1} & 1 \le i \le 5 \\ [X_1, X_2] = (b_2+b_3) X_4 + b_4 X_5 + b_5 X_6 & \\ [X_1, X_3] = (b_2+b_3) X_5 + b_4 X_6 & \\ [X_1, X_4] = b_2 X_6 & \\ [X_2, X_3] = b_3 X_6 & \\ [X_1, Y] = a_2 X_5 + a_1 X_6 & \\ [X_2, Y] = a_2 X_6 & \end{cases}$$

con $b_2 b_3 \neq 0$

El cambio de base dado por

$$\begin{cases} X_0' = X_0 \\ X_1' = X_1 + \dfrac{b_5}{2b_3} X_3 \\ Y' = Y \end{cases}$$

permite suponer siempre $b_5 = 0$.

Se va a estudiar ahora diferentes invariantes, para ir separando adecuadamente la familia hasta conseguir las álgebras o familias de álgebras del enunciado.

Si se calcula $Cent(\mathcal{C}^4(\mathfrak{g}))$, se tiene que una base está formada por los vectores $\{X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6, Y\}$, si se vuelve a calcular el centralizador de ese espacio, se llega a lo siguiente

$$dim(Cent(Cent(\mathcal{C}^4(\mathfrak{g})))) = \begin{cases} 3 & \text{si} \quad a_2 = 0 \\ 2 & \text{si} \quad a_2 \neq 0 \end{cases}$$

lo que demuestra que la nulidad de a_2 es invariante. Si, además, en el caso en que $a_2 = 0$ se calcula el centro, se tiene que

$$dim(\mathcal{Z}(\mathfrak{g})) = \begin{cases} 2 & \text{si} \quad a_1 = 0 \\ 1 & \text{si} \quad a_1 \neq 0 \end{cases}$$

lo que lleva a que si $a_2 = 0$, la nulidad de a_1 es invariante.

Si se considera ahora $\mathfrak{g}^* = \mathfrak{g}/\mathcal{Z}(\mathfrak{g})$, en cada uno de los casos anteriores, se tiene que

$$dim[\mathcal{C}^3(\mathfrak{g}^*), Cent(\mathcal{C}^3(\mathfrak{g}^*))] = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad b_2 + b_3 = 0 \\ 1 & \text{si} \quad b_2 + b_3 \neq 0 \end{cases}$$

lo que demuestra, igualmente, que la nulidad de $b_2 + b_3$ es invariante.

Si $b_2 + b_3 = 0$, se tiene que la nulidad de b_4 es invariante pues

$$dim(Cent(\mathcal{C}^1(\mathfrak{g}^*))) = \begin{cases} 6 & \text{si} \quad b_4 = 0 \\ 5 & \text{si} \quad b_4 \neq 0 \end{cases}$$

Además, si $b_2 + b_3 = 0$ y $a_2 \neq 0$, el cambio de base dado por

$$\begin{cases} X_0' = X_0 + \dfrac{a_1}{2a_2b_2}X_1 \\ X_1' = X_1 - \dfrac{a_1b_4}{2a_2^2}Y \\ Y' = -\dfrac{a_1}{2b_3}X_4 - \dfrac{a_1^2}{4a_2b_2}X_5 + Y \end{cases}$$

permite suponer $a_1 = 0$.

En resumen, se tiene el esquema siguiente para el caso $b_2 + b_3 = 0$

$$b_2 + b_3 = 0 \begin{cases} b_4 = 0 \begin{cases} a_2 = 0 \begin{cases} a_1 = 0 \\ a_1 \neq 0 \end{cases} \\ a_2 \neq 0 \Longrightarrow a_1 = 0 \end{cases} \\ b_4 \neq 0 \begin{cases} a_2 = 0 \begin{cases} a_1 = 0 \\ a_1 \neq 0 \end{cases} \\ a_2 \neq 0 \Longrightarrow a_1 = 0 \end{cases} \end{cases}$$

donde (1) indica el caso a considerar

De esta forma, las álgebras o familias de álgebras que se tienen son las correspondientes a los siguientes casos:

- Caso 1: $b_2 + b_3 = b_4 = a_2 = a_1 = 0$, $b_3 = -b_2 \neq 0$, obteniéndose $\mu_{(6,1)}^5 \oplus \mathbf{C}$.
- Caso 2: $b_2 + b_3 = b_4 = a_2 = 0$, $b_3 = -b_2 \neq 0$, y $a_1 \neq 0$.

  El cambio de escala dado por

$$\begin{cases} X_0' = X_0 \\ X_1' = \dfrac{1}{b_2}X_1 \\ Y' = \dfrac{1}{a_1}Y \end{cases}$$

  permite suponer $b_2 = a_1 = 1$, y $b_3 = -1$, obteniéndose $\mu_{(6,1,1)}^{52}$.
- Caso 3: $b_2 + b_3 = b_4 = a_1 = 0$, $b_3 = -b_2 \neq 0$, y $a_2 \neq 0$.

El cambio de escala dado por

$$\begin{cases} X_0' = X_0 \\ X_1' = \dfrac{1}{b_2} X_1 \\ Y' = \dfrac{1}{a_2} Y \end{cases}$$

permite suponer $b_2 = a_1 = 1$, y $b_3 = -1$, obteniéndose $\mu^{53}_{(6,1,1)}$.

- Caso 4: $b_2 + b_3 = a_2 = a_1 = 0$, $b_3 = -b_2 \neq 0$, y $b_4 \neq 0$, obteniéndose $\mu^{6}_{(6,1)} \oplus \mathbf{C}$.
- Caso 5: $b_2 + b_3 = a_2 = 0$, $b_3 = -b_2 \neq 0$, y $b_4 a_1 \neq 0$.

  El cambio de escala dado por

$$\begin{cases} X_0' = \dfrac{b_4}{b_2} X_0 \\ X_1' = \dfrac{b_4^2}{b_2^3} X_1 \\ Y' = \dfrac{b_4^5}{a_1 b_2^5} Y \end{cases}$$

  permite suponer $b_2 = b_4 = a_1 = 1$, y $b_3 = -1$, obteniéndose $\mu^{54}_{(6,1,1)}$.

- Caso 6: $b_2 + b_3 = a_1 = 0$, $b_3 = -b_2 \neq 0$, y $b_4 a_2 \neq 0$.

  El cambio de escala dado por

$$\begin{cases} X_0' = \dfrac{b_4}{b_2} X_0 \\ X_1' = \dfrac{b_4^2}{b_2^3} X_1 \\ Y' = \dfrac{b_4^5}{a_2 b_2^5} Y \end{cases}$$

  permite suponer $b_2 = b_4 = a_2 = 1$, y $b_3 = -1$, obteniéndose $\mu^{55}_{(6,1,1)}$.

Si se considera ahora el caso $b_2 + b_3 \neq 0$, por el cambio de base del comienzo de la demostración, se puede siempre suponer $b_5 = 0$. Además si se hace el cambio de base dado por

$$\begin{cases} X_0' = X_0 + \dfrac{b_4}{2(b_2+b_3)^2}X_1 \\ X_1' = X_1 \\ Y' = -\dfrac{a_2b_4}{2(b_2+b_3)^2}X_4 + \dfrac{a_2b_4^2 - 2a_1b_4(b_2+b_3)^2}{4(b_2+b_3)^4}X_5 + Y \end{cases}$$

permite suponer $b_4 = 0$. Por tanto la familia queda

$$\begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1} & 1 \leq i \leq 5 \\ [X_1, X_2] = (b_2+b_3)X_4 \\ [X_1, X_3] = (b_2+b_3)X_5 \\ [X_1, X_4] = b_2X_6 \\ [X_2, X_3] = b_3X_6 \\ [X_1, Y] = a_2X_5 + a_1X_6 \\ [X_2, Y] = a_2X_6 \end{cases}$$
$$\text{con } (b_2+b_3)b_2b_3 \neq 0$$

una vez llegado a este punto, para estudiar las nulidades de a_2 y a_1, es necesario utilizar cambios de base genéricos en esta familia. siguiendo la misma notación que en teoremas anteriores, se comprueba que los nuevos parámetros son

$$\begin{aligned} (b_2+b_3)' &= \frac{Q_1}{P_0^2}(b_2+b_3) \\ b_2' &= \frac{Q_1}{P_0^2}b_2 \\ b_3' &= \frac{Q_1}{P_0^2}b_3 \\ a_2' &= \frac{R_7}{P_0^4}b_2 \\ a_1' &= \frac{R_7}{P_0^4}a_1 \end{aligned}$$

lo que demuestra que las nulidades de a_1 y a_2 son invariantes. Teniendo por tanto,

$$(b_2+b_3) \neq 0 \Longrightarrow b_4 = b_5 = 0 \begin{cases} a_2 = 0 \begin{cases} a_1 = 0 \\ a_1 \neq 0 \end{cases} \\ a_2 \neq 0 \begin{cases} a_1 = 0 \\ a_1 \neq 0 \end{cases} \end{cases}$$

Por esta razón, los casos a considerar son los siguientes

- Caso 7: $b_4 = b_5 = a_2 = a_1 = 0$, $(b_2 + b_3)b_2b_3 \neq 0$, obteniéndose $\mu_{(6,1)}^{8,\lambda}$, con $\lambda \in \mathbf{C} - \{0,1\}$.

- Caso 8: $b_4 = b_5 = a_2 = 0$, $(b_2 + b_3)b_2b_3a_1 \neq 0$.
El cambio de escala dado por

$$\begin{cases} X_0' = X_0 \\ X_1' = \dfrac{1}{(b_2+b_3)}X_1 \\ Y' = \dfrac{1}{a_1}Y \end{cases}$$

permite suponer $b_2 + b_3 = a_1 = 1$, obteniéndose $\mu_{(6,1,1)}^{56,\lambda}$, con $\lambda \in \mathbf{C} - \{0,1\}$.

- Caso 9: $b_4 = b_5 = a_1 = 0$, $(b_2 + b_3)b_2b_3a_2 \neq 0$.
El cambio de escala dado por

$$\begin{cases} X_0' = X_0 \\ X_1' = \dfrac{1}{(b_2+b_3)}X_1 \\ Y' = \dfrac{1}{a_2}Y \end{cases}$$

permite suponer $b_2 + b_3 = a_2 = 1$, obteniéndose $\mu_{(6,1,1)}^{57,\lambda}$, con $\lambda \in \mathbf{C} - \{0,1\}$.

- Caso 10: $b_4 = b_5 = 0$, $(b_2 + b_3)b_2b_3a_2a_1 \neq 0$.
El cambio de escala dado por

$$\begin{cases} X_0' = \dfrac{a_1}{a_2}X_0 \\ X_1' = \dfrac{a_1^2}{a_2^2(b_2+b_3)}X_1 \\ Y' = \dfrac{a_1^4}{a_2^5}Y \end{cases}$$

permite suponer $b_2 + b_3 = a_2 = a_1 = 1$, obteniéndose $\mu_{(6,1,1)}^{58,\lambda}$, con $\lambda \in \mathbf{C} - \{0,1\}$.

Resta, por último, indicar que los cambios de base genéricos usados en la demostración se han hecho para la familia inicial utilizando un programa de cálculo formal *Mathematica* 3.0, y se ha trabajado con todos los parámetros iniciales, en vez de hacerlo ya para casos concretos. □

Teorema 2.2.24.– *Sea $\mathfrak{g}$ cualquier álgebra en $AL2F(5,1)(6,3)$. Entonces será isomorfa a una de las siguientes álgebras, no isomorfas entre sí, de leyes $\mu^i_{(6,1,1)}$, $59 \leq i \leq 60$ y $\mu^{61,\lambda}_{(6,1,1)}$, con $\lambda \in \mathbf{C} - \{0,1\}$, dadas por*

$$\mu^{59}_{(6,1,1)}: \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1} & 1 \leq i \leq 5 \\ [X_1, X_4] = X_6 \\ [X_2, X_3] = -X_6 \\ [X_1, Y] = X_4 \\ [X_2, Y] = X_5 \\ [X_3, Y] = X_6 \end{cases}$$

$$\mu^{60}_{(6,1,1)}: \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1} & 1 \leq i \leq 5 \\ [X_1, X_4] = X_6 \\ [X_2, X_3] = -X_6 \\ [X_1, Y] = X_4 + X_5 \\ [X_2, Y] = X_5 + X_6 \\ [X_3, Y] = X_6 \end{cases}$$

$$\mu^{61,\lambda}_{(6,1,1)}: \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1} & 1 \leq i \leq 5 \\ [X_1, X_2] = X_4 \\ [X_1, X_3] = X_5 \\ [X_1, X_4] = \lambda X_6 \\ [X_2, X_3] = (1-\lambda) X_6 \\ [X_1, Y] = X_4 \\ [X_2, Y] = X_5 \\ [X_3, Y] = X_6 & \lambda \in \mathbf{C} - \{0,1\} \end{cases}$$

Demostración: Si $\mathfrak{g} \in AL2F(5,1)(6,3)$, su ley vendrá dada por

$$\begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1} & 1 \leq i \leq 5 \\ [X_1, X_2] = (b_2 + b_3) X_4 + b_4 X_5 + b_5 X_6 \\ [X_1, X_3] = (b_2 + b_3) X_5 + b_4 X_6 \\ [X_1, X_4] = b_2 X_6 \\ [X_2, X_3] = b_3 X_6 \\ [X_1, Y] = a_3 X_4 + a_2 X_5 + a_1 X_6 \\ [X_2, Y] = a_3 X_5 + a_2 X_6 \\ [X_3, Y] = a_3 X_6 \\ \qquad \text{con} \;\; a_3 b_2 b_3 \neq 0 \end{cases}$$

Si se trabaja de manera similar a como se ha hecho en familias anteriores (utilizando los mismos coeficientes para los cambios), con ayuda del *Mathematica*, y teniendo en cuenta que los generadores de esta familia son X_0, X_1, Y, se tiene que los nuevos parámetros de la familia son:

$$b_2' = \frac{Q_1}{P_0^2} b_2$$

$$b_3' = \frac{Q_1}{P_0^2} b_3$$

$$b' = \frac{Q_1}{P_0^2}(b_2 + b_3)$$

$$b_4' = -\frac{-b_4\ P_0\ Q_1 + a_3\ P_0\ Q_7 + 2\ (b_2+b_3)^2\ P_1\ Q_1}{P_0^4}$$

$$b_5' = \frac{1}{P_0^6\ Q_1}(b_5\ P_0^2\ Q_1^2 - 4\ b_3\ b_4\ P_0\ P_1\ Q_1^2 + 5\ b_2^3\ P_1^2\ Q_1^2 + 14\ b_2^2\ b_3\ P_1^2\ Q_1^2 + 4\ b_3^3\ P_1^2\ Q_1^2 + 3\ a_3\ b_3\ P_0\ P_7\ Q_1^2 b_3\ P_0^2\ Q_2^2 - 2\ b_3\ P_0^2\ Q_1\ Q_3 - a_2\ P_0^2\ Q_1\ Q_7 + a_3\ b_3\ P_0\ P_1\ Q_1\ Q_7 + b_2\ Q_1\ (-5\ b_4\ P_0\ P_1\ Q_1 + 13\ b_3^2\ P_1^2\ Q_1 + 2\ a_3\ P_0\ P_7\ Q_1 + 3\ a_3\ P_0\ P_1\ Q_7))$$

$$a_1' = \frac{1}{P_0^7}((a_1\ P_0^2 - 2\ a_2\ (2\ b_2 + b_3)\ P_0\ P_1 + 3\ a_3\ (-b_4\ P_0\ P_1 + 3\ b_2^2\ P_1^2 + 5\ b_2\ b_3\ P_1^2 + 2\ b_3^2\ P_1^2 + a_3\ P_0\ P_7))\ R_7)$$

$$a_2 = \frac{(a_2\ P_0 - 3\ a_3\ (b_2+b_3)\ P_1)\ R_7}{P_0^5}$$

$$a_3' = \frac{R_7}{P_0^3} a_3$$

con $P_0 Q_1 R_7 \neq 0$.

Un análisis profundo y que se detallará más adelante, permite llegar a la configuración siguiente de los parámetros:

$$b_2 + b_3 = 0 \Longrightarrow b_3 = -b_2,\ a_3 b_2 \neq 0\ (1) \Longrightarrow b_4 = b_5 = a_1 = 0 \begin{cases} a_2 = 0 \\ a_2 \neq 0 \end{cases}$$

$$a_3 b_2 b_3 (b_2 + b_3) \neq 0\ (2) \Longrightarrow b_4 = b_5 = a_1 = a_2 = 0$$

donde (1) y (2) indican los casos a considerar.

- (1) Si $b_2 + b_3 = 0 \Longrightarrow b_3 = -b_2$, los parámetros quedan

$$b'_5 = \frac{1}{P_0^5 Q_1}(b_5 P_0 Q_1^2 - a_2 P_0 Q_1 Q_7 - b_2(b_4 P_1 Q_1^2 + a_3 P_7 Q_1^2 + P_0 Q_2^2 - 2P_0 Q_1 Q_3 - 2a_3 P_1 Q_1 Q_7))$$

$$b'_4 = \frac{b_4 Q_1 - a_3 Q_7}{P_0^3}$$

$$a'_2 = \frac{a_2 R_7}{P_0^4}$$

$$a'_1 = \frac{(a_1 P_0 - 2a_2 b_2 P_1 + 3a_3(-b_4 P_1 + a_3 P_7))R_7}{P_0^6}$$

Si se elige en b'_5,

$$Q_3 = -\frac{b_5 P_0 Q_1^2 - a_2 P_0 Q_1 Q_7 - b_2(b_4 P_1 Q_1^2 + a_3 P_7 Q_1^2 + P_0 Q_2^2 - 2a_3 P_1 Q_1 Q_7)}{2b_2 P_0 Q_1}$$

permite suponer siempre $b_5 = 0$.

De manera análoga, eligiendo en b'_4

$$Q_7 = \frac{b_4 Q_1}{a_3}$$

se puede suponer $b_4 = 0$.

Si se hace igual en a'_1 y se elige

$$P_7 = -\frac{a_1 P_0 - 2a_2 b_2 P_1 - 3a_3 b_4 P_1}{3a_3^2}$$

se puede suponer $a_1 = 0$.

- (2) Si $b_2 + b_3 \neq 0$, eligiendo $P_1 = \dfrac{a_2 P_0}{3a_3(b_2 + b_3)^2}$ en a'_2, se puede siempre suponer $a_2 = 0$. Si se elige también en a'_1, después de sustituir el valor anterior para P_1, P_7 como

$$P_7 = -\frac{-a_2^2\ b_2\ P_0 + 3\ a_1\ a_3\ (b_2 + b_3)\ P_0 - 3\ a_2\ a_3\ b_4\ P_0}{9\ a_3^3\ (b_2 + b_3)}$$

se puede suponer $a_1 = 0$. Si se sigue sustituyendo estos valores en los parámetros y se elige en b'_4 Q_7 de la siguiente forma

$$Q_7 = \frac{-2\ a_2\ (b_2 + b_3)\ Q_1 + 3\ a_3\ b_4\ Q_1}{3\ a_3^2}$$

se tiene $b_4 = 0$ y se repite lo mismo en b_5' y se elige

$$Q_3 = \frac{a_2^2(7b_2^2 + 16b_2b_3 + 8b_3^2)Q_1^2 - 9a_2a_3(b_2+b_3)b_4Q_1^2}{18a_3^2b_3(b_2+b_3)Q_1} -$$

$$-\frac{3a_3(b_2+b_3)(a_1(2b_2+3b_3)Q_1^2 - 3a_3(b_5Q_1^2 + b_3Q_2^2))}{18a_3^2b_3(b_2+b_3)Q_1}$$

En resumen, se tiene que siempre se puede suponer $a_1 = a_2 = b_4 = b_5 = 0$ y en estas condiciones, queda $a_3b_2b_3(b_2+b_3) \neq 0$

Con todas estas consideraciones, las únicas álgebras o familia de álgebras no isomorfas entre sí, son las que a continuación se detallan

- Caso 1: $b_4 = b_5 = a_1 = a_2 = 0$, $b_3 = -b_2$, $a_3b_2 \neq 0$.
  El cambio de escala dado por
  $$\begin{cases} X_0' = X_0 \\ X_1' = \dfrac{1}{b_2}X_1 \\ Y' = \dfrac{1}{a_3}Y \end{cases}$$
  permite suponer $a_3 = b_2 = 1$, obteniéndose $\mu^{59}_{(6,1,1)}$.
- Caso 2: $b_4 = b_5 = a_1 = 0$, $b_3 = -b_2, a_2a_3b_2 \neq 0$.
  El cambio de escala dado por
  $$\begin{cases} X_0' = \dfrac{a_2}{a_3}X_0 \\ X_1' = \dfrac{a_2^2}{a_3^2b_2}X_1 \\ Y' = \dfrac{a_2^3}{a_3^4}Y \end{cases}$$
  permite suponer $a_2 = a_3 = b_2 = 1$, obteniéndose $\mu^{60}_{(6,1,1)}$.
- Caso 3: $b_4 = b_5 = a_1 = a_2 = 0$, $a_3b_2b_3(b_2+b_3) \neq 0$.
  El cambio de escala dado en el caso 1 permite suponer $a_3 = b_2 + b_3 = 1$, $b_2 = \lambda$, $b_3 = 1 - \lambda$, obteniéndose $\mu^{61,\lambda}_{(6,1,1)}$, con $\lambda \in \mathbf{C} - \{0,1\}$. □

Capítulo 3

Tratamiento Computacional.

Como se ha comprobado ampliamente en los capítulos 1 y 2, las clasificaciones obtenidas para dimensión 8 no habrían sido posibles sin la ayuda computacional. Entendámonos, no estamos diciendo que "a mano" serían menos fiables y podría haber errores; la importancia es mayor, ya que muchos de los tratamientos realizados no habrían sido posible sin la ayuda de un programa informático y el uso de un paquete de cálculo simbólico (el *Mathematica* 3.0 en nuestro caso).

A modo de ejemplo, se detalla a continuación uno de los programas utilizados en esta memoria. El programa corresponde al usado para clasificar una familia concreta, pero sirve para ilustrar los demás, [15].

(** CAMBIO DE BASE EN LA FAMILIA (6,1,1) CON DIMENSIÓN DE DERIVADA 6, AL2F(6,3) **)

```
dim=8;
base=Table[x[i],{i,0,dim-1}];
P[i_] := Subscript[P, i];
Q[i_] := Subscript[Q, i];
a[i_] := Subscript[a, i];
b[i_] := Subscript[b, i];
B[i_] := Subscript[c, i];
A[i_] := Subscript[d, i];
x[i_] := Subscript[x, i];
y[i_] := Subscript[y, i];
Y[i_] := Subscript[Y, i];
t[i_] := Subscript[t, i];
```

(*bilinealidad y antisimetría*)

```
mu[0,x_]:=0;
mu[x_,0]:=0;
mu[x_,x_]:=0;
mu[x_,y_]:=Simplify[-mu[y,x]]/;OrderedQ[{y,x}];
mu[x_+y_,z_]:=Simplify[mu[x,z]+mu[y,z]];
mu[z_,x_+y_]:=Simplify[mu[z,x]+mu[z,y]];
mu[x_,a_ y_]:=a mu[x,y];
mu[a_ x_,y_]:=a mu[x,y];
```

(*(n-6)-filiforme*)

```
For[i=1, i<=5,i++,
        mu[x[0],x[i]]=x[i+1]
        ];

For[i=6, i<=dim-1, i++,
        mu[x[0],x[i]]=0
        ];
```

(*Demás productos corchetes*)

```
mu[x[i_],x[j_]]:=0;
mu[x[1],x[2]]:=(b[2]+b[3])x[4]+b[4] x[5]+x[7];
mu[x[1],x[3]]:=(b[2]+b[3])x[5]+b[4]x[6];
mu[x[1],x[4]]:=b[2] x[6];
mu[x[2],x[3]]:=b[3] x[6];
mu[x[1],x[7]]:= a[2] x[5]+a[1] x[6];
mu[x[2],x[7]]:=a[2] x[6];
```

(*Cambio de base*)

```
y[0]=P[0] x[0]+P[1] x[1]+P[2] x[2]+P[3] x[3]+P[4] x[4]+P[5] x[5]+
        P[6] x[6]+P[7] x[7];
y[1]=Q[0] x[0]+Q[1] x[1]+Q[2] x[2]+Q[3] x[3]+Q[4] x[4]+Q[5] x[5]+
```

```
        Q[6] x[6]+Q[7] x[7];
y[2]=Collect[mu[y[0],y[1]],base];
y[3]=Collect[mu[y[0],y[2]],base];
y[4]=Collect[mu[y[0],y[3]],base];
y[5]=Collect[mu[y[0],y[4]],base];
y[6]=Collect[mu[y[0],y[5]],base];
```

(*Nueva base*)

```
base1:=Table[y[i],{i,0,dim-1}];

verbase:=
        For[i=0,i<=6,i++,
                Print["y[",i,"]:=",y[i]
           ]
           ];
```

(*Poner x5 y x6 en función de y5 e y6, que ha habido que renombrarlas Y5 y Y6*)

```
sol:=Solve[{Y[5]== y[5],Y[6]==y[6]},
                          {x[5],x[6]}];
```

(*Impongo que no se salga de la familia*)

```
mu2:=mu[y[1],y[5]]/.sol;
sol1:=Solve[mu2==0,Q[0]];
t[0]=y[0]/.Part[sol1,1];
t[1]=y[1]/.Part[sol1,1];
t[2]=y[2]/.Part[sol1,1];
t[3]=y[3]/.Part[sol1,1];
t[4]=y[4]/.Part[sol1,1];
t[5]=y[5]/.Part[sol1,1];
t[6]=y[6]/.Part[sol1,1];


base2:=Table[t[i],{i,0,7}];


base3:=Table[Y[i],{i,0,7}];
```

(*Se sacan los nuevos coeficientes, B2 que sería b2, B3 que sería b3, B4 que sería b4, A2 que sería a2 y A1 que sería a1*)

```
a[2,3]=Part[mu[t[2],t[3]]/.sol,1
        ]/.Part[sol1,1
                ];
```

(*el producto de t2 por t3 en las Y*)

```
B3=Coefficient[
               a[2,3],Y[6]
                ];
```

(*el coeficiente nuevo correspondiente a b3*)

```
a[1,4]=Part[mu[t[1],t[4]]/.sol,1
        ]/.Part[sol1,1
                ];
```

(*el producto de t1 por t4 en las Y*)

```
B2=Coefficient[
               a[1,4],Y[6]
               ];
```

(*el coeficiente nuevo correspondiente a b2*)

```
a[1,3]=Collect[
                Part[mu[t[1],t[3]]/.sol,1
                ],base3
                        ]/.Part[sol1,1
                 ];
```

(*el producto t1 por t3 en las Y*)

```
B4=Coefficient[Simplify[Collect[
                a[1,3]-(B2+B3)Y[5],base3
                ]],Y[6]
        ];
```

(*el coeficiente nuevo correspondiente a b4*)

(*Definición de y7, realmente t7*)

```
t[7]=Collect[
        Simplify[mu[t[1],t[2]]-(B2+B3)t[4]-B4 t[5]
                ],base
        ];
```

(*aquí tendría ya calculado el producto t1 por t2*)

(*Condición de cambio de base*)

```
e[i_,k_]:=e[i,k]=Coefficient[t[i],x[k]
                                   ];
        For[i=0,i<=7,i++,
           For[k=0,k<=7,k++
              ]
           ];

matrizcambio:=Table[
                e[i,k],{i,0,7},{k,0,7}
                ];


detcambio:=Simplify[
                Det[matrizcambio
                       ]
                ]
Print["condicioncambio->",detcambio!=0];
```

(*Se resuelve ahora un sistema para calcular las x en función de las t*)

```
solucion=Solve[{Y[0]==t[0],Y[1]==t[1],Y[2]==t[2],Y[3]==t[3],Y[4]==t[4],
      Y[5]==t[5],Y[6]==t[6],Y[7]==t[7]},
      {x[0],x[1],x[2],x[3],x[4],x[5],x[6],x[7]}];


   (*Calcular los restantes productos corchetes*)


If[mu[t[0], t[7]] == 0, Print["[t[0],t[7]]=0"],
  Print[{}], lista1=Coefficient[
        Part[mu[t[0],t[7]]/.solucion,1
            ],base3
             ]
             ];

If[mu[t[2], t[4]] == 0, Print["[t[2],t[4]]=0"],
      Print[{}],
      lista1 = Coefficient[
      Part[mu[t[2], t[4]] /. solucion, 1],
          base3]];

If[mu[t[2],t[5]]==0,
    Print["[t[2],t[5]]=0"],Print[{}],
     lista2=Coefficient[Part[mu[t[2],t[5]]/.solucion,1
         ],base3
         ]
         ];


If[mu[t[3],t[4]]==0,
    Print["[t[3],t[4]]=0"],Print[{}],
    lista3=Coefficient[Part[mu[t[3],t[4]]/.solucion,1
         ],base3
         ]
         ];

If[mu[t[3],t[5]]==0,
    Print["[t[3],t[5]]=0"],Print[{}],
     lista4=Coefficient[Part[mu[t[3],t[5]]/.solucion,1
         ],base3
         ]
         ];
```

```
If[mu[t[3],t[7]]==0,
   Print["[t[3],t[7]]=0"],Print[{}],
   lista5=Coefficient[Part[mu[t[3],t[7]]/.solucion,1
   ],base3
   ]
   ];

If[mu[t[4],t[5]]==0,
    Print["[t[4],t[5]]=0"],Print[{}],
    lista6=Coefficient[Part[mu[t[4],t[5]]/.solucion,1
     ],base3
      ]
      ];

If[mu[t[4],t[7]]==0,
    Print["[t[4],t[7]]=0"],Print[{}],
    lista7=Coefficient[Part[mu[t[4],t[7]]/.solucion,1
     ],base3
     ]
     ];

lista8=Coefficient[Part[mu[t[5],t[7]]/.solucion,1
                                        ],base3
                                ];

If[mu[t[5],t[7]]==0,
    Print["[t[5],t[7]]=0"],Print[{}],lista8
         ];
```

(*Calcular A2 y A1, correspondientes a a2 y a1*)

```
lista9=Coefficient[
        Collect[Part[mu[t[2],t[7]]/.solucion,1],
            base3],
             base3];

a[2,7]=If[mu[t[2],t[7]]==0,
          Print["[t[2],t[7]]=0"],Print[{}],lista9
          ];
```

(*Calculo t2 por t7*)

```
A2=Part[a[2,7],7];
```

(*Encuentro el nuevo a2*)

```
lista10=Coefficient[
          Collect[Part[mu[t[1],t[7]]/.solucion,1],
```

```
a[1,7]=If[
       mu[t[1],t[7]]==0,Print["[t[1],t[7]]=0"],
        Print[{}],lista10
        ];
```

```
A1=Simplify[Part[a[1,7],7]];
```

(*Encuentro el nuevo a1*)

```
comproba:=If[A2==Part[a[1,7],7],Print[OK],
                Print[{}],
                Print[error]
        ];
```

(*Sacar todos los coeficientes*)

```
Map[(#[[1]] -> #[[2]])&,
      Transpose[{{B_2, B_3, B_4, A_1, A_2}, {B2, B3, B4, A1, A2}}]]
        }]
```

Problemas abiertos.

Si se desea conocer mejor un cierto conjunto de estructuras algebraicas, es claro que su clasificación es uno de los primeros problemas a abordar. Son muchos los autores que han trabajado en el problema de la clasificación de las álgebras de Lie nilpotentes.

En los últimos tiempos el estudio de la clasificación de las álgebras de Lie nilpotentes se ha centrado en las filiformes, por ser éstas las más estructuradas.

Recientemente, un nuevo invariante ha sido introducido por Goze y Ancochea [3] para el estudio de álgebras de Lie nilpotentes: *la sucesión característica* o *invariante de Goze.* Utilizando este invariante Cabezas y Gómez estudian unas familias de álgebras que ellos llaman p-filiformes y que generalizan a las filiformes. Esta elección les ha permitido obtener clasificaciones en dimensión arbitraria en algunos casos.

Entre los problemas que de una forma "natural" podrían ser considerados una continuación de esta memoria, merecen señalarse:

- Clasificar las álgebras de Lie $(n-5)$-filiformes en dimensión arbitraria. Abordar este trabajo con las técnicas usadas aquí para el caso de dimensión de la derivada máxima parece complicado pero, acaso otros métodos pueden funcionar mejor. Por ejemplo, se podría seguir el método de extensiones centrales que introducen Cabezas y Gómez para el caso de las álgebras de Lie $(n-4)$-filiformes [11] o diseñar algún "ad hoc".
- Clasificar, siquiera parcialmente, las $(n-6)$-filiformes. Tal vez el caso de la derivada máxima sea el más fácilmente atacable.
- Clasificar las álgebras de Lie p-filiformes en dimensión 9. El uso de técnicas computacionales parece aquí imprescindible.
- El tratamiento computacional abre las puertas a considerar problemas diferentes y/o aumentan la dimensión concreta en otros.

- Otro problema a tratar podría ser el estudiar ciertas propiedades cohomológicas a partir, acaso, de la determinación de las correspondientes álgebras de derivaciones.

- Estudio de componentes irreducibles que cortan a las álgebras de Lie p-filiformes para ciertos valores de p (en función de la dimensión), pues se conocen las ecuaciones polinómicas (restricciones) que verifican.

- Finalmente, se podría pensar en considerar el estudio de subfamilias de álgebras "relevantes", pues la clasificación exhaustiva empieza a perder interés.

- Un problema más interesante pero quizás mucho más complicado es el de estudiar las estructuras de familias de álgebras p-filiformes para valores concretos de p, en la línea de trabajo de Khakimdjanov [26]. Esto daría una nueva perspectiva a otros muchos problemas y en un primer momento, se limitaría al caso $p = 2$.

Apéndice A

Álgebras filiformes y casifiliformes de dimensiones 6 y 7.

En este apéndice se obtendrán todas las álgebras filiformes y casifiliformes de dimensiones 6 y 7. Éstas álgebras han sido ya estudiadas por diferentes autores, las filiformes de dimensión 6 (invariante de Goze $(5,1)$) pueden verse en [26] ó [33], las filiformes de dimensión 7 (invariante de Goze $(6,1)$) en [3] ó [26] y las casifiliformes de dimensión 7 (invariante de Goze $(5,1,1)$) en [3]. Se incluyen en esta memoria con el único fin de unificar notación.

A.1 Álgebras de Lie filiformes de dimensión 6 (invariante de Goze $(5,1)$)

Lema A.1.1.– *[8] La ley de un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ filiforme compleja de dimensión $n=6$ viene expresada, salvo antisimetría, en una cierta base adaptada $\{X_0, X_1, X_2, X_3, X_4, X_5\}$, en función de los siguientes productos*

$$\left\{\begin{array}{lcll} [X_0, X_i] & = & X_{i+1} & 1 \leq i \leq 4 \\ [X_1, X_2] & = & cX_4 + dX_5 & \\ [X_1, X_3] & = & cX_5 & \\ [X_1, X_4] & = & eX_5 & \\ [X_2, X_3] & = & -eX_5 & \end{array}\right.$$

Teorema A.1.2.– *Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie filiforme con $dim(\mathfrak{g}) = 6$. Entonces es isomorfa a algunas de las álgebras, no isomorfas entre sí, de leyes $\mu^i_{(5,1)}$, $1 \le i \le 5$, dadas por*

$$\mu^1_{(5,1)} : \left\{ \; [X_0, X_i] = X_{i+1} \quad 1 \le i \le 4 \right.$$

$$\mu^2_{(5,1)} : \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1} & 1 \le i \le 4 \\ [X_1, X_2] = X_5 & \end{cases}$$

$$\mu^3_{(5,1)} : \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1} & 1 \le i \le 4 \\ [X_1, X_2] = X_4 & \\ [X_1, X_3] = X_5 & \end{cases}$$

$$\mu^4_{(5,1)} : \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1} & 1 \le i \le 4 \\ [X_1, X_4] = X_5 & \\ [X_2, X_3] = -X_5 & \end{cases}$$

$$\mu^5_{(5,1)} : \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1} & 1 \le i \le 4 \\ [X_1, X_2] = X_4 & \\ [X_1, X_3] = X_5 & \\ [X_1, X_4] = X_5 & \\ [X_2, X_3] = -X_5 & \end{cases}$$

Demostración: La demostración es un sencillo cálculo, pues en la familia tan sólo tenemos tres parámetros y puede hacerse, bien a mano o usando una adaptación de los programas utilizados en capítulos anteriores.

Si en la familia del lema A.1.1 se hacen cambios de base genéricos, cambiando los dos únicos generadores X_0 y X_1 y usando la misma notación que en capítulos precedentes, se llega a que los nuevos parámetros son:

$$\begin{aligned} c' &= \frac{c\, Q_1}{P_0^2}, \\ d' &= -\frac{-d\, P_0^2\, Q_1^2 + 2\, c^2\, P_0\, P_1\, Q_1^2 + c^2\, e\, P_1^2\, Q_1^2 + e\, P_0^2\, Q_2^2 - 2\, e\, P_0^2\, Q_1\, Q_3}{P_0^4\, (P_0 + e\, P_1)\, Q_1}, \\ e' &= \frac{e\, Q_1}{P_0 + e\, P_1} \end{aligned}$$

Una sencilla discusión, permite distinguir los siguientes casos que van a dar las álgebras no isomorfas.

$$
\begin{cases}
e=0 \begin{cases} c=0 \begin{cases} d=0 \\ \\ d\neq 0 \end{cases} \\ \\ c\neq 0 \longrightarrow d=0 \end{cases} \\ \\
e\neq 0 \begin{cases} c=0 \longrightarrow d=0 \\ \\ c\neq 0 \longrightarrow d=0 \end{cases}
\end{cases}
$$

Haciendo, cuando sea necesario, un simple cambio de escala, se obtienen todas las álgebras del enunciado.

$\square$

A.2 Álgebras de Lie casifiliformes de dimensión 7 (invariante de Goze $(5,1,1)$)

Lema A.2.1.– *[8] La ley de un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ $(n-5)$-filiforme compleja de dimensión $n=7$ viene expresada, salvo antisimetría, en una cierta base adaptada $\{X_0, X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, Y\}$, en función de los siguientes productos*

$$
\begin{cases}
[X_0, X_i] &=& X_{i+1} & 1\leq i\leq 4 \\
[X_1, X_2] &=& cX_4 + dX_5 + \alpha Y \\
[X_1, X_3] &=& cX_5 \\
[X_1, X_4] &=& eX_5 + \beta Y \\
[X_2, X_3] &=& -eX_5 - \beta Y \\
[X_1, Y] &=& a_3X_3 + a_2X_4 + a_1X_5 \\
[X_2, Y] &=& a_3X_4 + a_2X_5 \\
[X_3, Y] &=& a_3X_5
\end{cases}
$$

sujeta a las siguientes restricciones

$$
\begin{array}{rcl}
a_i\beta &=& 0 \quad 1\leq i\leq 3 \\
a_3\alpha &=& 0 \\
a_3 e &=& 0
\end{array}
$$

Proposición A.2.2.– *Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie 2-filiforme compleja con dim$(\mathfrak{g}) = 7$. Entonces existen dos subfamilias, no isomorfas entre sí, cuyas leyes vienen dadas, en una base adaptada $\{X_0, X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, Y\}$, por*

$$
(1)\left\{\begin{array}{lcll}
[X_0, X_i] & = & X_{i+1} & 1 \le i \le 4 \\
[X_1, X_2] & = & cX_4 + Y & \\
[X_1, X_3] & = & cX_5 & \\
[X_1, X_4] & = & eX_5 + \beta Y & \\
[X_2, X_3] & = & -eX_5 - \beta Y & \\
[X_1, Y] & = & a_2X_4 + a_1X_5 & \\
[X_2, Y] & = & a_2X_5 &
\end{array}\right.
$$
$$a_i\beta = 0, \qquad 1 \le i \le 2$$

$$
(2)\left\{\begin{array}{lcll}
[X_0, X_i] & = & X_{i+1} & 1 \le i \le 4 \\
[X_1, X_2] & = & cX_4 + dX_5 & \\
[X_1, X_3] & = & cX_5 & \\
[X_1, X_4] & = & eX_5 & \\
[X_2, X_3] & = & -eX_5 & \\
[X_1, Y] & = & a_3X_3 + a_2X_4 + a_1X_5 & \\
[X_2, Y] & = & a_3X_4 + a_2X_5 & \\
[X_3, Y] & = & a_3X_5 &
\end{array}\right.
$$
$$a_3e = 0$$

Demostración: Si $\mathfrak{g}$ está en las hipótesis anteriores, su ley vendrá dada por

$$
\left\{\begin{array}{lcll}
[X_0, X_i] & = & X_{i+1} & 1 \le i \le 4 \\
[X_1, X_2] & = & cX_4 + dX_5 + \alpha Y & \\
[X_1, X_3] & = & cX_5 & \\
[X_1, X_4] & = & eX_5 + \beta Y & \\
[X_2, X_3] & = & -eX_5 - \beta Y & \\
[X_1, Y] & = & a_3X_3 + a_2X_4 + a_1X_5 & \\
[X_2, Y] & = & a_3X_4 + a_2X_5 & \\
[X_3, Y] & = & a_3X_5 &
\end{array}\right.
$$

sujeta a las siguientes restricciones

$$
\begin{array}{lcl}
a_3\beta & = & 0 \\
a_3\alpha & = & 0 \\
a_1\beta & = & 0 \\
a_2\beta & = & 0 \\
a_3e & = & 0
\end{array}
$$

Es fácil comprobar que

$$dim([\mathfrak{g},\mathfrak{g}]) = 4 + rang \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

- Caso 1: Si $rang \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = 1 \Longrightarrow dim([\mathfrak{g},\mathfrak{g}]) = 5$. En este caso siempre se puede suponer $\alpha \neq 0$ pues, caso contrario, sería $\beta \neq 0$ y bastaría con hacer el cambio de base dado por
$$\begin{cases} X_0' = X_0 \\ X_1' = X_1 + X_3 \end{cases}$$
y, teniendo en cuenta las restricciones, se tendrá $a_3 = 0$; además, el cambio dado por
$$Y' = dX_5 + \alpha Y$$
permite suponer $d = 0$ y $\alpha = 1$. Todas estas consideraciones llevan a la familia (1) del enunciado.

- Caso 2: Si $rang \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = 0 \Longrightarrow dim([\mathfrak{g},\mathfrak{g}]) = 4$. En este caso se tiene $\alpha = \beta = 0$ y directamente se obtiene la familia (2) del enunciado. □

Teorema A.2.3.– *Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie 2-filiforme con $dim(\mathfrak{g}) = 7$ y en las condiciones de la familia (1). Entonces es isomorfa a algunas de las álgebras, no isomorfas entre sí, de leyes $\mu^i_{(5,1,1)}$, $1 \leq i \leq 18$, $i \neq 14$ y $\mu^{14,\lambda}_{(5,1,1)}$, dadas por*

$$\mu^1_{(5,1,1)} : \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1} & 1 \leq i \leq 4 \\ [X_1, X_2] = Y \end{cases}$$

$$\mu^2_{(5,1,1)} : \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1} & 1 \leq i \leq 4 \\ [X_1, X_2] = Y \\ [X_1, X_4] = X_5 \\ [X_2, X_3] = -X_5 \end{cases}$$

$$\mu^3_{(5,1,1)} : \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1} & 1 \leq i \leq 4 \\ [X_1, X_2] = X_4 + Y \\ [X_1, X_3] = X_5 \end{cases}$$

$$\mu^4_{(5,1,1)}: \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1} & 1 \leq i \leq 4 \\ [X_1, X_2] = X_4 + Y \\ [X_1, X_3] = X_5 \\ [X_1, X_4] = X_5 \\ [X_2, X_3] = -X_5 \end{cases}$$

$$\mu^5_{(5,1,1)}: \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1} & 1 \leq i \leq 4 \\ [X_1, X_2] = Y \\ [X_1, X_4] = Y \\ [X_2, X_3] = -Y \end{cases}$$

$$\mu^6_{(5,1,1)}: \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1} & 1 \leq i \leq 4 \\ [X_1, X_2] = Y \\ [X_1, X_4] = X_5 + Y \\ [X_2, X_3] = -X_5 - Y \end{cases}$$

$$\mu^7_{(5,1,1)}: \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1} & 1 \leq i \leq 4 \\ [X_1, X_2] = X_4 + Y \\ [X_1, X_3] = X_5 \\ [X_1, X_4] = Y \\ [X_2, X_3] = -Y \end{cases}$$

$$\mu^8_{(5,1,1)}: \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1} & 1 \leq i \leq 4 \\ [X_1, X_2] = X_4 + Y \\ [X_1, X_3] = X_5 \\ [X_1, X_4] = \sqrt{2}X_5 + Y \\ [X_2, X_3] = -\sqrt{2}X_5 - Y \end{cases}$$

$$\mu^9_{(5,1,1)}: \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1} & 1 \leq i \leq 4 \\ [X_1, X_2] = Y \\ [X_1, Y] = X_5 \end{cases}$$

$$\mu^{10}_{(5,1,1)}: \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1} & 1 \leq i \leq 4 \\ [X_1, X_2] = Y \\ [X_1, X_4] = X_5 \\ [X_2, X_3] = -X_5 \\ [X_1, Y] = X_5 \end{cases}$$

$$\mu_{(5,1,1)}^{11}:\begin{cases}[X_0,X_i]=X_{i+1} & 1\leq i\leq 4\\ [X_1,X_2]=-X_4+Y & \\ [X_1,X_3]=-X_5 & \\ [X_1,X_4]=X_5 & \\ [X_2,X_3]=-X_5 & \\ [X_1,Y]=X_5 & \end{cases}$$

$$\mu_{(5,1,1)}^{12}:\begin{cases}[X_0,X_i]=X_{i+1} & 1\leq i\leq 4\\ [X_1,X_2]=Y & \\ [X_1,Y]=X_4 & \\ [X_2,Y]=X_5 & \end{cases}$$

$$\mu_{(5,1,1)}^{13}:\begin{cases}[X_0,X_i]=X_{i+1} & 1\leq i\leq 4\\ [X_1,X_2]=Y & \\ [X_1,Y]=X_4+X_5 & \\ [X_2,Y]=X_5 & \end{cases}$$

$$\mu_{(5,1,1)}^{14,\lambda}:\begin{cases}[X_0,X_i]=X_{i+1} & 1\leq i\leq 4\\ [X_1,X_2]=X_4+Y & \\ [X_1,X_3]=X_5 & \\ [X_1,Y]=X_4+\lambda X_5 & \\ [X_2,Y]=X_5 & \lambda\in\mathbf{C}_2\end{cases}$$

$$\mu_{(5,1,1)}^{15}:\begin{cases}[X_0,X_i]=X_{i+1} & 1\leq i\leq 4\\ [X_1,X_2]=Y & \\ [X_1,X_4]=X_5 & \\ [X_2,X_3]=-X_5 & \\ [X_1,Y]=-X_4 & \\ [X_2,Y]=-X_5 & \end{cases}$$

$$\mu^{16}_{(5,1,1)}: \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1} & 1 \leq i \leq 4 \\ [X_1, X_2] = X_4 + Y \\ [X_1, X_3] = X_5 \\ [X_1, X_4] = X_5 \\ [X_2, X_3] = -X_5 \\ [X_1, Y] = -X_4 + X_5 \\ [X_2, Y] = -X_5 \end{cases}$$

$$\mu^{17}_{(5,1,1)}: \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1} & 1 \leq i \leq 4 \\ [X_1, X_2] = X_4 + Y \\ [X_1, X_3] = X_5 \\ [X_1, X_4] = X_5 \\ [X_2, X_3] = -X_5 \\ [X_1, Y] = -X_4 - 3X_5 \\ [X_2, Y] = -X_5 \end{cases}$$

$$\mu^{18}_{(5,1,1)}: \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1} & 1 \leq i \leq 4 \\ [X_1, X_2] = Y \\ [X_1, X_4] = X_5 \\ [X_2, X_3] = -X_5 \\ [X_1, Y] = -X_4 + X_5 \\ [X_2, Y] = -X_5 \end{cases}$$

Demostración: Si $\mathfrak{g}$ está en las condiciones anteriores, su ley vendrá dada por

$$\begin{cases} [X_0, X_i] & = & X_{i+1} & 1 \leq i \leq 4 \\ [X_1, X_2] & = & cX_4 + Y \\ [X_1, X_3] & = & cX_5 \\ [X_1, X_4] & = & eX_5 + \beta Y \\ [X_2, X_3] & = & -eX_5 - \beta Y \\ [X_1, Y] & = & a_2 X_4 + a_1 X_5 \\ [X_2, Y] & = & a_2 X_5 \end{cases}$$
$$a_i \beta = 0, \qquad 1 \leq i \leq 2$$

Es fácil comprobar que

$$dim(\mathcal{Z}(\mathfrak{g})) = 4 + rango \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

De esta forma, se pueden distinguir dos casos.

- Caso 1: Si $a_1 = a_2 = 0$, se obtiene las álgebras $\mu^i_{(5,1,1)}$, con $1 \le i \le 8$.

  En este caso la ley de $\mathfrak{g}$ vendrá dada, salvo antisimetría, por los siguientes productos

$$\begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1} & 1 \le i \le 4 \\ [X_1, X_2] = cX_4 + Y \\ [X_1, X_3] = cX_5 \\ [X_1, X_4] = eX_5 + \beta Y \\ [X_2, X_3] = -eX_5 - \beta Y \end{cases}$$

Un sencillo cálculo permite ver que la nulidad del par (e,β) es un invariante, pues

$$dim(\mathcal{D}^2(\mathfrak{g})) = \begin{cases} 0 & \text{si } (e,\beta) = (0,0) \\ 1 & \text{si } (e,\beta) \neq (0,0) \end{cases}$$

en particular, la nulidad del parámetro β es otro invariante puesto que condiciona $dim(\mathcal{C}^3(\mathfrak{g}))$

$$dim(\mathcal{C}^3(\mathfrak{g})) = \begin{cases} 2 & \text{si } \beta = 0 \\ 3 & \text{si } \beta \neq 0 \end{cases}$$

Por tanto, se empezará distinguiendo dos casos dependiendo de si β es igual o distinto de 0; también, dentro del caso $\beta = 0$ se volverán a distinguir dos casos, dependiendo esta vez de la nulidad del parámetro e. Se probará mediante cambios de base genéricos que la nulidad de c es un invariante. Como los únicos generadores son X_0, y X_1, un cambio de base genérico viene dado por

$X_0' = P_0X_0 + P_1X_1 + P_2X_2 + P_3X_3 + P_4X_4 + P_5X_5 + P_6Y$

$X_1' = Q_0X_0 + Q_1X_1 + Q_2X_2 + Q_3X_3 + Q_4X_4 + Q_5X_5 + Q_6Y$

$X_2' = (P_0Q_1 - P_1Q_0)X_2 + (P_0Q_2 - P_2Q_0)X_3 + [(P_0Q_3 - P_3Q_0) + (P_1Q_2 - P_2Q_1)c)]X_4 + (\cdots)X_5 + (\cdots)Y$

$X_3' = P_0(P_0Q_1 - P_1Q_0)X_3 + [P_0(P_0Q_2 - P_2Q_0) + P_1c(P_0Q_1 - P_1Q_0)]X_4 + (\cdots)X_5 + (\cdots)Y$

$X_4' = P_0^2(P_0Q_1 - P_1Q_0)X_4 + [(P_0 + P_1e)(P_0(P_0Q_2 - P_2Q_0) + P_1c(P_0Q_1 - P_1Q_0)) + (P_0P_1c - P_0P_2e)(P_0Q_1 - P_1Q_0)]X_5 + [P_0P_1(P_0Q_2 - P_2Q_0) + (P_1c - P_0P_2)(P_0Q_1 - P_1Q_0)]\beta Y$

$X_5' = P_0^2(P_0 + P_1e)(P_0Q_1 - P_1Q_0)X_5 + P_0^2P_1(P_0Q_1 - P_1Q_0)\beta Y$

$Y' = (2P_0Q_1Q_3e - P_0Q_2^2e - \dfrac{P_1^2Q_1^2c^2e}{P_0} - 2P_1Q_1^2c^2)X_5 + (P_0Q_1^2 - P_0Q_2^2\beta + 2P_0Q_1Q_3\beta - \dfrac{P_1^2Q_1^2c^2\beta}{P_0})Y$

Para no salirse de la familia ($[X_1', X_3'] = c'X_5'$) hay que imponer que $Q_0 = 0$ y para que sea cambio de base que

$$P_0Q_1(P_0 + P_1e)(P_0^2Q_1^2 - P_0^2Q_2^2\beta + 2P_0^2Q_1Q_3\beta + P_0P_1Q_1^2e + P_1^2Q_1^2c^2\beta) \neq 0$$

Se tiene que los nuevos parámetros son:

$$c' = \frac{Q_1c}{P_0^2}$$

$$e' = \frac{Q_1^3(P_0e + 2P_1c^2\beta)}{P_0^2Q_1^2 - P_0^2Q_2^2\beta + 2P_0^2Q_1Q_3\beta + P_0P_1Q_1^2e + P_1^2Q_1^2c^2\beta}$$

$$\beta' = \frac{P_0^4Q_1^2\beta}{P_0^2Q_1^2 - P_0^2Q_2^2\beta + 2P_0^2Q_1Q_3\beta + P_0P_1Q_1^2e + P_1^2Q_1^2c^2\beta}$$

(de nuevo se prueba que la nulidad de β es invariante, así como la de c, y que en el caso $\beta = 0$ lo es también la nulidad de e).

Se observa que para el caso $c\beta \neq 0$, tomando $P_1 = -\dfrac{P_0e}{2c^2\beta}$, siempre se puede suponer $e = 0$, salvo el caso $e = c\sqrt{2\beta}$ ya que en tal caso mediante ningún cambio de base admisible se podría hacer igual a 0, pues en tal caso se anularía la condición de cambio de base. La configuración de los parámetros es la siguiente:

$$\begin{cases} \beta = 0 \begin{cases} c = 0 \begin{cases} e = 0 \\ e \neq 0 \end{cases} \\ c \neq 0 \begin{cases} e = 0 \\ e \neq 0 \end{cases} \end{cases} \\ \beta \neq 0 \begin{cases} c = 0 \begin{cases} e = 0 \\ e \neq 0 \end{cases} \\ c \neq 0 \begin{cases} e \neq c\sqrt{2\beta} (\longrightarrow e' = 0) \\ e = c\sqrt{2\beta} \end{cases} \end{cases} \end{cases}$$

(1) $(\beta, c, e) = (0, 0, 0)$

Sustituyendo los valores de estos parámetros en la familia se obtiene $\mu^1_{(5,1,1)}$

(2) $(\beta, c, e) = (0, 0, e)$, $e \neq 0$

Siempre se puede considerar $e = 1$, mediante el cambio de escala

$$\begin{cases} X_0' = X_0 \\ X_1' = \dfrac{1}{e} X_1 \end{cases}$$

Sustituyendo los valores de estos parámetros en la familia se obtiene $\mu^2_{(5,1,1)}$

(3) $(\beta, c, e) = (0, c, 0)$, $c \neq 0$

Mediante el cambio de escala

$$\begin{cases} X_0' = X_0 \\ X_1' = \dfrac{1}{c} X_1 \end{cases}$$

se puede suponer $c = 1$, obteniéndose $\mu^3_{(5,1,1)}$.

(4) $(\beta, c, e) = (0, c, e)$, $ce \neq 0$

Con el cambio de escala que a continuación se detalla

$$\begin{cases} X_0' = \dfrac{c}{e} X_0 \\ \\ X_1' = \dfrac{c}{e^2} X_1 \end{cases}$$

siempre se puede suponer $c = e = 1$, obteniéndose $\mu^4_{(5,1,1)}$.

(5) $(\beta, c, e) = (\beta, 0, 0)$, $\beta \neq 0$

Mediante el cambio de escala

$$\begin{cases} X_0' = \dfrac{1}{\sqrt{\beta}} X_0 \\ X_1' = X_1 \end{cases}$$

siempre se puede suponer $\beta = 1$, obteniéndose $\mu^5_{(5,1,1)}$

(6) $(\beta, c, e) = (\beta, 0, e)$, $\beta e \neq 0$

Mediante el cambio de escala

$$\begin{cases} X_0' = \dfrac{1}{\sqrt{\beta}} X_0 \\ X_1' = \dfrac{1}{\sqrt{\beta} e} X_1 \end{cases}$$

siempre se puede suponer $\beta = e = 1$, obteniéndose $\mu^6_{(5,1,1)}$.

(7) (β, c, e), $\beta c \neq 0$, $e \neq c\sqrt{2\beta}$

En tal caso, según se indicó anteriormente se suponer $e = 0$ y mediante el cambio de escala

$$\left\{ \begin{array}{l} X'_0 = \dfrac{1}{\sqrt{\beta}} X_0 \\ X'_1 = \dfrac{1}{\beta c} X_1 \end{array} \right.$$

se puede suponer $c = \beta = 1$ llegando a $\mu^7_{(5,1,1)}$.

(8) $(\beta, c, e) = (\beta, c, c\sqrt{2\beta})$, $\beta c \neq 0$

Mediante el cambio de escala del caso anterior se puede tomar $\beta = c = 1$ y $e = \sqrt{2}$, llegando a $\mu^8_{(5,1,1)}$.

- Caso 2: Si $(a_1, a_2) \neq (0,0)$, por las restricciones, $\beta = 0$. De esta forma, la familia queda

$$\left\{ \begin{array}{lcll} [X_0, X_i] & = & X_{i+1} & 1 \leq i \leq 4 \\ [X_1, X_2] & = & cX_4 + Y & \\ [X_1, X_3] & = & cX_5 & \\ [X_1, X_4] & = & eX_5 & \\ [X_2, X_3] & = & -eX_5 & \\ [X_1, Y] & = & a_2X_4 + a_1X_5 & \\ [X_2, Y] & = & a_2X_5 & \end{array} \right.$$
$$(a_1, a_2) \neq (0,0)$$

Para estudiar las nulidades de los parámetros, se van a hacer uso de los cambios de base genéricos y, en este caso, se obtienen las álgebras $\mu^i_{(5,1,1)}$, con $9 \leq i \leq 18$, $i \neq 14$ y $\mu^{14,\lambda}_{(5,1,1)}$ con $\lambda \in \mathbf{C}_2$.

$$X'_0 = P_0X_0 + P_1X_1 + P_2X_2 + P_3X_3 + P_4X_4 + P_5X_5 + P_6Y$$

$$X'_1 = Q_0X_0 + Q_1X_1 + Q_2X_2 + Q_3X_3 + Q_4X_4 + Q_5X_5 + Q_6Y$$

$$X'_2 = (P_0Q_1 - P_1Q_0)X_2 + (P_0Q_2 - P_2Q_0)X_3 + [(P_0Q_3 - P_3Q_0) + (P_1Q_2 - P_2Q_1)c + (P_1Q_6 - P_6Q_1)a_2]X_4 + (\cdots)X_5 + (P_1Q_2 - P_2Q_1)Y$$

$$X'_3 = P_0(P_0Q_1 - P_1Q_0)X_3 + [P_0(P_0Q_2 - P_2Q_0) + P_1c(P_0Q_1 - P_1Q_0) + P_1a_2(P_1Q_2 - P_2Q_1)]X_4 + (\cdots)X_5 + P_1(P_0Q_1 - P_1Q_0)Y$$

$$X'_4 = (P_0^2 + P_1^2a_2)(P_0Q_1 - P_1Q_0)X_4 + [(P_0 + P_1e)[P_0(P_0Q_2 - P_2Q_0) + P_1c(P_0Q_1 - P_1Q_0) + P_1a_2(P_1Q_2 - P_2Q_1)] + P_0P_1c(P_0Q_1 - P_1Q_0) + P_1^2a_1(P_0Q_1 - P_1Q_0) - P_0P_2e(P_0Q_1 - P_1Q_0) + P_1P_2a_2(P_0Q_1 - P_1Q_0)]X_5$$

$$X'_5 = (P_0 + P_1e)(P_0^2 + P_1^2a_2)(P_0Q_1 - P_1Q_0)X_5$$

$Y' = Q_0(P_0Q_1 - P_1Q_0)X_3 + \dfrac{1}{P_0 + P_1e}[P_1P_2Q_0Q_1a_2 - P_1P_2Q_0^2e - P_0P_2Q_1^2a_2 - P_1P_2Q_1^2ea_2 + P_1^2Q_1^2ca_2 + P_1^2Q_0^2c + P_1^2Q_0Q_1a_1 - P_0P_1Q_1^2a_1)]X_4 + (\cdots)X_5 + Q_1(P_0Q_1 - P_1Q_0)Y$

para que sea cambio de base

$$(P_0 + P_1e)(P_0^2 + P_1^2a_2)(P_0Q_1 - P_1Q_0) \neq 0$$

y para no salirse de la familia hay que imponer que:

$$P_0Q_0 + P_1Q_1a_2 = 0$$

Los parámetros son:

$$c' = \frac{Q_1c}{P_0^2 + P_1^2a_2} + \frac{P_1(Q_0c + Q_1a_1)}{(P_0 + P_1e)(P_0^2 + P_1^2a_2)}$$

$$e' = \frac{(P_0e - P_1a_2)(P_0Q_1 - P_1Q_0)}{(P_0 + P_1e)(P_0^2 + P_1^2a_2)}$$

$$a_2' = \frac{(P_0Q_1 - P_1Q_0)^2a_2}{(P_0^2 + P_1^2a_2)^2}$$

Se observa que la nulidad de a_2 es invariante.

- $a_2 = 0$, en este caso, teniendo en cuenta la familia que se está clasificando, se tiene $a_1 \neq 0$ y, adaptando los cambios para este caso $Q_0 = 0$, se deduce que la nulidad de e es invariante. Además, un sencillo cálculo demuestra que

$$a_1' = \frac{Q_1^2a_1}{P_0(P_0 + P_1e)}$$

y que si $e \neq 0$, se tiene que la nulidad de $ce + a_1$ es invariante

$$c'e' + a_1' = \frac{Q_1^2(ce + a_1)}{P_0^2(P_0 + P_1e)}$$

Se resumen a continuación en una tabla los casos a considerar

$$a_2 = 0 \Longrightarrow a_1 \neq 0 \begin{cases} e = 0 \ (1) \Longrightarrow c = 0 \\ e \neq 0 \begin{cases} ce + a_1 \neq 0(2) \Longrightarrow c = 0 \\ ce + a_1 = 0 \Longrightarrow c = -\dfrac{a_1}{e} \end{cases} \end{cases}$$

En (1) y (2) eligiendo adecuadamente los coeficientes del cambio ($P_1 = -\dfrac{cP_0}{a_1}$ y $P_1 = -\dfrac{cP_0}{ce + a_1}$, respectivamente) se puede conseguir $c = 0$.

$*$ $a_2 = e = c = 0, \quad a_1 \neq 0.$
Mediante el cambio de escala dado por

$$\begin{cases} X_0' = X_0 \\ X_1' = \dfrac{1}{\sqrt{a_1}} X_1 \end{cases}$$

se consigue $a_1 = 1$, obteniéndose $\mu^9_{(5,1,1)}$.

$*$ $a_2 = c = 0, \quad ea_1 \neq 0.$
Mediante el cambio de escala dado por

$$\begin{cases} X_0' = \dfrac{a_1}{e^2} X_0 \\ X_1' = \dfrac{a_1}{e^3} X_1 \end{cases}$$

se consigue $a_1 = e = 1$, obteniéndose $\mu^{10}_{(5,1,1)}$.

$*$ $a_2 = 0, \quad c = -\dfrac{a_1}{e}, \quad ea_1 \neq 0.$
Mediante el cambio de escala dado en el caso anterior, se consigue $a_1 = e = 1, \ c = -1$, obteniéndose $\mu^{11}_{(5,1,1)}$.

– $a_2 \neq 0$. Un sencillo cálculo demuestra que la nulidad de $e^2 + a_2$ es invariante pues se tiene que:

$$e'^2 + a_2' = \frac{(P_0 Q_1 - P_1 Q_0)^2}{(P_0 + P_1 e)^2 (P_0^2 + P_1^2 a_2)} (e^2 + a_2)$$

de esta forma se distinguen dos casos:

$*$ Si $e^2 + a_2 \neq 0$, eligiendo $P_1 = \dfrac{P_0 e}{a_2}$, se consigue $e = 0$. Si en este caso se vuelven a efectuar los cambios de base, para mantener $e = 0$ hay que imponer que $Q_0 = P_1 = 0$, llegando así a:

$$c' = \frac{Q_1 c}{P_0^2}$$

$$a_1' = \frac{Q_1^2 a_1}{P_0^3}$$

y, por tanto, las nulidades de a_1 y c son invariantes. Se tienen los siguientes casos:

(1) $e = a_1 = c = 0, \quad a_2 \neq 0$
Mediante el cambio de escala:

$$\begin{cases} X_0' = X_0 \\ X_1' = \dfrac{1}{\sqrt{a_2}} X_1 \end{cases}$$

se obtiene $\mu^{12}_{(5,1,1)}$.

(2) $e = a_1 = 0, \quad a_2 c \neq 0$
Mediante el cambio de escala:

$$\begin{cases} X'_0 = \dfrac{c}{\sqrt{a_2}} X_0 \\ X'_1 = \dfrac{c}{a_2} X_1 \end{cases}$$

se obtiene $\mu^{14,0}_{(5,1,1)}$.

(3) $e = c = 0, \quad a_2 a_1 \neq 0$
Mediante el cambio de escala:

$$\begin{cases} X'_0 = \dfrac{a_1}{a_2} X_0 \\ X'_1 = \dfrac{a_1}{a_2\sqrt{a_2}} X_1 \end{cases}$$

se obtiene $\mu^{13}_{(5,1,1)}$.

(4) $e = 0, \quad a_2 a_1 c \neq 0$
Mediante el cambio de escala del caso (1.16) se obtiene $\mu^{14,\lambda}_{(5,1,1)}$ donde $\lambda \in \mathbf{C}_2 - \{0\}$.

$*$ Si $e^2 + a_2 = 0 \longrightarrow a_2 = -e^2$ y, por tanto, $e \neq 0$. Adaptando los cambios de base para $a_2 = -e^2$, se tiene que:

$$X'_0 = P_0X_0 + P_1X_1 + P_2X_2 + P_3X_3 + P_4X_4 + P_5X_5 + P_6Y$$

$$X'_1 = Q_0X_0 + Q_1X_1 + Q_2X_2 + Q_3X_3 + Q_4X_4 + Q_5X_5 + Q_6Y$$

$$X'_2 = (P_0Q_1 - P_1Q_0)X_2 + (P_0Q_2 - P_2Q_0)X_3 + (P_0Q_3 + P_1Q_2c - P_1Q_6e^2 - P_2Q_1c - P_3Q_0 + P_6Q_1e^2)X_4 + (\ldots)X_5 + (P_1Q_2 - P_2Q_1)Y$$

$$X'_3 = P_0(P_0Q_1 - P_1Q_0)X_3 + (P_0^2Q_2 - P_0P_2Q_0 + P_0P_1Q_1c - P_1^2Q_0c - P_1^2Q_2e^2 + P_1P_2Q_1e^2)X_4 + (\ldots)X_5 + (P_0P_1Q_1 - P_1^2Q_0)Y$$

$$X'_4 = (P_0^2 - P_1^2e^2)(P_0Q_1 - P_1Q_0)X_4 + (P_0^3Q_2 - P_0^2P_2Q_0 + 2P_0^2P_1Q_1c - 2P_0P_1^2Q_0c - P_0P_1^2Q_2e^2 + P_0^2P_1Q_2e + P_0P_1^2Q_1ec - P_1^3Q_0ec - P_1^3Q_2e^3 + P_1^2P_2Q_1e^3 + P_0P_1^2Q_1a_1 - P_1^3Q_0a_1 - P_0^2P_2Q_1e + P_1^2P_2Q_0e^2)X_5$$

$$X'_5 = (P_0 + P_1e)(P_0^2 - P_1^2e^2)(P_0Q_1 - P_1Q_0)X_5$$

$$Y' = Q_0(P_0Q_1 - P_1Q_0)X_3 + \frac{1}{P_0 + P_1e}(-P_1P_2Q_0Q_1e^2 - P_1P_2Q_0^2e + P_0P_2Q_1^2e^3 + P_1^2Q_0^2c - P_1^2Q_1^2e^2c - P_0P_1Q_1^2a_1 + P_1^2Q_0Q_1a_1)X_4 + (\ldots)X_5 + (P_0q_1 - P_1Q_0)Q_1Y$$

para que sea cambio de base y para mantener $e \neq 0$, hay que imponer que

$$(P_0^2 - P_1^2e^2)(Q_0^2 - Q_1^2e^2)(P_0Q_1 - P_1Q_0) \neq 0$$

y para no salirse de la familia, $\quad P_0Q_0 - P_1Q_1e^2 = 0$.

Los parámetros quedan:

$$c' = \frac{1}{(P_0 + P_1e)(P_0^2 - P_1^2e^2)}[P_1(Q_1(a_1 + ec) + Q_0c) + P_0Q_1c]$$

$$e' = \frac{P_0Q_1 - P_1Q_0}{P_0^2 - P_1^2e^2}e$$

$$a_1' = \frac{P_0Q_1 - P_1Q_0}{(P_0 + P_1e)(P_0^2 - P_1^2e^2)}[P_1(-Q_1e(a_1 - 3ec) + Q_0a_1) + P_0Q_1a_1]$$

Un sencillo cálculo demuestra que:

$$a_1' - e'c' = -\frac{(P_0Q_1 - P_1Q_0)(P_0 - P_1e)(Q_0 - Q_1e)}{(P_0 + P_1e)(P_0^2 - P_1^2e^2)^2e}(a_1 - ec)$$

$$a_1' + 3e'c' = \frac{(P_0Q_1 - P_1Q_0)(P_0 + P_1e)(Q_0 + Q_1e)}{(P_0 + P_1e)(P_0^2 - P_1^2e^2)^2e}(a_1 + 3ec)$$

$$(a_1' - e'c')(a_1' + 3e'c') = \frac{(P_0Q_1 - P_1Q_0)^4}{(P_0 + P_1e)^2(P_0^2 - P_1^2e^2)^4}(a_1 - ec)(a_1 + 3ec)$$

se observa que las nulidades de las expresiones anteriores son invariantes. Teniendo esto en cuenta, se pueden distinguir los siguientes casos:

Subcaso 1.1: $\quad a_1 - ec = a_1 + 3ec = 0 \longrightarrow c = a_1 = 0$ y, por tanto, $c' = a_1' = 0$. Sustituyendo en la familia se tiene que:

$$\begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1} & 1 \leq i \leq 4 \\ [X_1, X_2] = Y \\ [X_1, X_4] = eX_5 \\ [X_2, X_3] = -eX_5 \\ [X_1, Y] = -e^2X_4 \\ [X_2, Y] = -e^2X_5 \end{cases}$$

con $e \neq 0$.

Mediante el cambio de escala

$$\begin{cases} X_0' = X_0 \\ X_1' = \dfrac{1}{e}X_1 \end{cases}$$

se obtiene $\mu^{15}_{(5,1,1)}$.

Subcaso 1.2: $a_1 - ec = 0$, $a_1 + 3ec \neq 0 \longrightarrow a_1 = ec$ y $ec \neq 0$. Sustituyendo en la familia:

$$\begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1} & 1 \leq i \leq 4 \\ [X_1, X_2] = cX_4 + Y & \\ [X_1, X_3] = cX_5 & \\ [X_1, X_4] = eX_5 & \\ [X_2, X_3] = -eX_5 & \\ [X_1, Y] = -e^2X_4 + ecX_5 & \\ [X_2, Y] = -e^2X_5 & \end{cases}$$

con $ec \neq 0$.

Mediante el cambio de escala

$$\begin{cases} X_0' = \dfrac{c}{e}X_0 \\ X_1' = \dfrac{c}{e^2}X_1 \end{cases}$$

se obtiene $\mu^{16}_{(5,1,1)}$.

Subcaso 1.3: $a_1 - ec \neq 0$, $a_1 + 3ec = 0 \longrightarrow a_1 = -3ec$ y $ec \neq 0$. Sustituyendo en la familia

$$\begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1} & 1 \leq i \leq 4 \\ [X_1, X_2] = cX_4 + Y & \\ [X_1, X_3] = cX_5 & \\ [X_1, X_4] = eX_5 & \\ [X_2, X_3] = -eX_5 & \\ [X_1, Y] = -e^2X_4 - 3ecX_5 & \\ [X_2, Y] = -e^2X_5 & \end{cases}$$

con $ec \neq 0$.

Mediante el cambio de escala anterior se obtiene $\mu^{17}_{(5,1,1)}$.

Subcaso 1.4: $a_1 - ec \neq 0$ y $a_1 + 3ec \neq 0$.

En este caso siempre se pueden elegir los coeficientes del cambio de base para conseguir $c' = 0$ y $e' = a_1' = 1$. En efecto:

• Si $c = 0 \Longrightarrow a_1 \neq 0$ y $c' = \dfrac{P_1Q_1}{(P_0 + P_1e)(P_0^2 - P_1^2e^2)}a_1$ y, para mantener $c' = 0$, se tiene que exigir que

$$P_1Q_1 = 0 \Longrightarrow \begin{cases} P_1 = 0 \Longrightarrow P_0 \neq 0 \neq Q_1 \text{ y } Q_0 = 0 \\ \\ Q_1 = 0 \Longrightarrow P_1 \neq 0 \neq Q_0 \text{ y } P_0 = 0 \end{cases}$$

luego $c' = 0$ y $a'_1 \neq 0$.

• Si $c \neq 0$ para hacer $c' = 0$, hay que imponer que

$$P_1(Q_1(a_1 + ec) + Q_0 c) + P_0 Q_1 c = 0$$

si se prueba que se puede elegir siempre

$$Q_0 \neq -\frac{Q_1(a_1 + ec)}{c}$$

con $Q_1 \neq 0$ y por tanto

$$P_1 = -\frac{P_0 Q_1 c}{Q_1(a_1 + ec) + Q_0 c}$$

con $P_0 \neq 0$, entonces $c' = 0$. Habrá que comprobar que se mantienen todas las condiciones del cambio y de la familia.

(1.) Como hay que mantener $P_0 Q_0 - P_1 Q_1 e^2 = 0$, se sustituye el valor de P_1, y se llega a

$$P_0 Q_0 + \frac{P_0 Q_1^2 e^2 c}{Q_1(a_1 + ec) + Q_0 c} = 0 \Longrightarrow P_0[Q_0^2 c + Q_0 Q_1(a_1 + ec) + Q_1^2 e^2 c] = 0$$

Si $P_0 = 0 \Longrightarrow P_1 = 0$ $(\longrightarrow\!\!\longleftarrow)$ (no sería cambio de base), luego $P_1 \neq 0$. Para mantener $c' = 0$ tendría que ser $Q_1(a_1 + ec) + Q_0 c = 0$ pero, por otro lado, ha de verificarse que $P_1 Q_1 e^2 = 0 \longrightarrow Q_1 = 0$ y $Q_0 = 0$ $(\longrightarrow\!\!\longleftarrow)$. Con esto se llega a que $P_0 \neq 0$ y para que se conserve la igualdad hay que exigir que $Q_0^2 c + Q_0 Q_1(a_1 + ec) + Q_1^2 e^2 c = 0$; resolviendo la ecuación se obtiene

$$Q_0 = \frac{-Q_1(a_1 + ec) \pm Q_1\sqrt{(a_1 + ec)^2 - 4e^2c^2}}{2c}$$

con $Q_1 \neq 0$, ya que si $Q_1 = 0 \Rightarrow Q_0 = 0$ $(\longrightarrow\!\!\longleftarrow)$.

Eligiendo

$$P_1 = -\frac{P_0 Q_1 c}{Q_1(a_1 + ec) + Q_0 c}$$

$$Q_0 = \frac{-Q_1(a_1 + ec) \pm Q_1\sqrt{(a_1 + ec)^2 - 4e^2c^2}}{2c}$$

se puede conseguir $c' = 0$. Falta probar que estos valores son compatibles con las restricciones del cambio.

(2.) Si $Q_0 = -\dfrac{Q_1(a_1 + ec)}{c}$ (sería el valor prohibido para mantener $c' = 0$), operando se llega a que en tal caso $-4e^2c^2 = 0$, lo que es una contradicción, ya que $ec \neq 0$.

(3.) Si $Q_0 = \pm Q_1 e$ (sería el valor prohibido de Q_0 para ser cambio de base), operando se llega a:

- $Q_0 = Q_1 e \Longrightarrow 4(a_1 + 3ec)ec = 0$ $(\longrightarrow\!\longleftarrow)$ $((a_1 + 3ec)ec \neq 0)$.
- $Q_0 = -Q_1 e \Longrightarrow -4(a_1 - ec)ec = 0$ $(\longrightarrow\!\longleftarrow)$ $((a_1 - ec)ec \neq 0)$.

(4.) Hay que mantener $P_0^2 - P_1^2 e^2 \neq 0$ por lo que, sustituyendo P_1, se llega a que tiene que ser $Q_0 \neq -\frac{Q_1 a_1}{c}$ y $Q_0 \neq -\frac{Q_1(a_1 + 2ec)}{c}$.

- $Q_0 = -\frac{Q_1 a_1}{c}$, operando se tendría que $4(a_1 - ec)ec = 0$ $(\longrightarrow\!\longleftarrow)$.
- $Q_0 = -\frac{Q_1(a_1 + 2ec)}{c} \Rightarrow 4(a_1 + 3ec)ec = 0$ $(\longrightarrow\!\longleftarrow)$.

(5.) $P_0 Q_1 - P_1 Q_0 \neq 0$, si se reescribe

$$P_1 = -\frac{2P_0 c}{(a_1 + ec) \pm \sqrt{(a_1 + ec)^2 - 4e^2c^2}}$$

$$Q_0 = \frac{-Q_1(a_1 + ec) \pm \sqrt{(a_1 + ec)^2 - 4e^2c^2}}{2c}$$

y sustituyendo,

$$P_0 Q_1 - P_1 Q_0 = \frac{2P_0 Q_1 \sqrt{(a_1 - ec)(a_1 + 3ec)}}{(a_1 + ec) \pm \sqrt{(a_1 + ec)^2 - 4e^2c^2}} \neq 0.$$

Todo esto lleva a que se pueden elegir P_1 y Q_0 como se indicaba antes y, por tanto, $P_0 Q_1 \neq 0$, para conseguir $c' = 0$ y $a_1' \neq 0$.
Si se sustituye en la familia queda:

$$\begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1} & 1 \leq i \leq 4 \\ [X_1, X_2] = Y & \\ [X_1, X_4] = eX_5 & \\ [X_2, X_3] = -eX_5 & \\ [X_1, Y] = -e^2 X_4 + a_1 X_5 & \\ [X_2, Y] = -e^2 X_5 & \end{cases}$$

con $ea_1 \neq 0$.

Mediante el cambio de escala dado por

$$\begin{cases} X_0' = \frac{a_1}{e^2} X_0 \\ X_1' = \frac{a_1}{e^3} X_1 \end{cases}$$

se obtiene $\mu^{18}_{(5,1,1)}$.

Nota A.2.4.– En el caso de que se trabajara sobre el cuerpo de los reales, en el subcaso 1.4, habría que distinguir dos casos, pues el signo de $(a_1 - ec)(a_1 + 3ec)$ sería invariante, por lo que en este caso se tendrían dos álgebras.

(1.4.1) $(a_1 - ec)(a_1 + 3ec) > 0$. Análogo al caso complejo

(1.4.2) $(a_1 - ec)(a_1 + 3ec) < 0$. Siempre se pueden elegir los coeficientes del cambio para poder suponer $a_1' = 0$ y $c' \neq 0$.

$$a_1' = 0 \Longrightarrow P_1(-Q_1e(a_1 - 3ec) + Q_0a_1) + P_0Q_1a_1 = 0$$

$*$ Si $a_1 = 0 \Rightarrow c \neq 0$ y para mantener $a_1' = 0$ se tendría que exigir que

$$P_1Q_1 = 0 \Longrightarrow \begin{cases} P_1 = 0 \Longrightarrow P_0 \neq 0 \neq Q_1 \ \text{ y } \ Q_0 = 0 \\ \\ Q_1 = 0 \Longrightarrow P_1 \neq 0 \neq Q_0 \ \text{ y } \ P_0 = 0 \end{cases}$$

y, por tanto, $a_1' = 0$ y $c' \neq 0$.

$*$ Si $a_1 \neq 0$, hay que elegir

$$Q_0 \neq -\frac{Q_1(3e^2c - ea_1)}{a_1} \quad \text{y} \quad P_1 = -\frac{P_0Q_1a_1}{-Q_1e(a_1 - 3ec) + Q_0a_1}$$

(1.) $P_0Q_0 - P_1Q_1e^2 = 0$, de donde se tiene que:

$$Q_0 = \frac{Q_1e(a_1 - 3ec) \pm \sqrt{e^2(a_1 - 3ec)^2 - 4e^2a_1^2}}{2a_1}$$

Un estudio análogo al realizado en el caso (1.4.1) permite poder hacer un cambio de base eligiendo P_1 y Q_0 como se ha indicado antes y $P_0Q_1 \neq 0$ para tener $a_1' = 0$ y $c' \neq 0$.

(2.) Si $Q_0 = \dfrac{(a_1 - 3ec)Q_1e}{a_1} \Longrightarrow 4e^2a_1^2 = 0$ $(\longrightarrow\!\longleftarrow)$.

(3.) Si $Q_0 = \pm Q_1e$,

- $Q_0 = Q_1e \longrightarrow -4e^2a_1(a_1 + 3ec) = 0$ y se llegaría a contradicción pues $ea_1(a_1 - ec)(a_1 + 3ec) \neq 0$.
- $Q_0 = -Q_1e \longrightarrow -12e^2a_1(a_1 - ec) = 0$ y se llegaría a contradicción pues $ea_1(a_1 - ec)(a_1 + 3ec) \neq 0$.

(4.) $P_0^2 - P_1^2 e^2 \neq 0$, sustituyendo el valor de P_1 se llega a que

$$Q_0 \neq \frac{Q_1 e(2a_1 - 3ec)}{a_1} \qquad \text{y} \qquad Q_0 \neq -\frac{3Q_1 e^2 c}{a_1}$$

· $Q_0 = \dfrac{Q_1 e(2a_1 - 3ec)}{a_1}$, sustituyendo se tiene $-12e^2 a_1(a_1 - ec) = 0$ $(\longrightarrow\!\!\longleftarrow)$.

· $Q_0 = -\dfrac{3Q_1 e^2 c}{a_1}$, entonces $-4e^2 a_1(a_1 + 3ec) = 0$ $(\longrightarrow\!\!\longleftarrow)$.

(5.) $P_0 Q_1 - P_1 Q_0 \neq 0$, si se reescribe P_1

$$P_1 = -\frac{2P_0 a_1}{(3e^2 c - ea_1) \pm \sqrt{(3e^2 c - ea_1)^2 - 4e^2 a_1^2}}$$

$$Q_0 = \frac{Q_1(ea_1 - 3e^2 c) \pm Q_1\sqrt{(3e^2 c - ea_1)^2 - 4e^2 a_1^2}}{2a_1}$$

sustituyendo en $P_0 Q_1 - P_1 Q_0$, queda:

$$P_0 Q_1 - P_1 Q_0 = P_0 Q_1 \left(\frac{\pm 2\sqrt{-3e^2(a_1 - ec)(a_1 + 3ec)}}{(ea_1 - 3e^2 c) \pm \sqrt{(3e^2 c - ea_1)^2 - 4e^2 a_1^2}} \right) \neq 0$$

sin más que elegir $P_0 Q_1 \neq 0$.

Así pues, siempre se puede suponer $a_1 = 0$ y $c \neq 0$. Sustituyendo en la familia, queda:

$$\begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1} & 1 \leq i \leq 4 \\ [X_1, X_2] = cX_4 + Y \\ [X_1, X_3] = cX_5 \\ [X_1, X_4] = eX_5 \\ [X_2, X_3] = -eX_5 \\ [X_1, Y] = -e^2 X_4 \\ [X_2, Y] = -e^2 X_5 \end{cases}$$

con $ec \neq 0$.

Mediante el cambio de escala:

$$\begin{cases} X_0' = \dfrac{c}{e} X_0 \\ X_1' = \dfrac{c}{e^2} X_1 \end{cases}$$

se obtiene

$$\overline{\mu}^{18}_{(5,1,1)}:\begin{cases}[X_0,X_i]=X_{i+1} & 1\leq i\leq 4\\ [X_1,X_2]=X_4+Y\\ [X_1,X_3]=X_5\\ [X_1,X_4]=X_5\\ [X_2,X_3]=-X_5\\ [X_1,Y]=-X_4\\ [X_2,Y]=-X_5\end{cases}$$

Siguiendo con la demostración, del subcaso (1.4), la configuración de los parámetros es la siguiente:

$$\begin{cases} e^2+a_2\neq 0\ (\longrightarrow e'=0) \begin{cases} a_1=0\begin{cases}c=0\\ c\neq 0\end{cases}\\ a_1\neq 0\begin{cases}c=0\\ c\neq 0\end{cases}\end{cases}\\ e^2+a_2=0 \quad\Longrightarrow a_2=-e^2\begin{cases} a_1-ec=0\begin{cases}a_1+3ec=0\longrightarrow c=a_1=0\\ a_1+3ec\neq 0\longrightarrow a_1=ec;\ c\neq 0\end{cases}\\ a_1-ec\neq 0\begin{cases}a_1+3ec=0\longrightarrow a_1=-3ec;\ c\neq 0\\ a_1+3ec\neq 0\longrightarrow c'=0;\ a_1'\neq 0\end{cases}\end{cases}\end{cases}$$

□

Teorema A.2.5.– *Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie 2-filiforme con $dim(\mathfrak{g})=7$ y en las condiciones de la familia (2). Entonces es isomorfa a algunas de las álgebras, no isomorfas entre sí, $\mu^i_{(5,1)}\oplus\mathbf{C}$, $1\leq i\leq 5$ y $\mu^i_{(5,1,1)}$, $19\leq i\leq 33$ dadas por*

$$\mu^{19}_{(5,1,1)}:\begin{cases}[X_0,X_i]=X_{i+1} & 1\leq i\leq 4\\ [X_1,Y]=X_5\end{cases}$$

$$\mu^{20}_{(5,1,1)} : \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1} & 1 \le i \le 4 \\ [X_1, X_2] = X_5 \\ [X_1, Y] = X_5 \end{cases}$$

$$\mu^{21}_{(5,1,1)} : \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1} & 1 \le i \le 4 \\ [X_1, Y] = X_4 \\ [X_2, Y] = X_5 \end{cases}$$

$$\mu^{22}_{(5,1,1)} : \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1} & 1 \le i \le 4 \\ [X_1, Y] = X_4 + X_5 \\ [X_2, Y] = X_5 \end{cases}$$

$$\mu^{23}_{(5,1,1)} : \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1} & 1 \le i \le 4 \\ [X_1, X_2] = X_4 \\ [X_1, X_3] = X_5 \\ [X_1, Y] = X_5 \end{cases}$$

$$\mu^{24}_{(5,1,1)} : \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1} & 1 \le i \le 4 \\ [X_1, X_2] = X_4 \\ [X_1, X_3] = X_5 \\ [X_1, Y] = X_4 \\ [X_2, Y] = X_5 \end{cases}$$

$$\mu^{25}_{(5,1,1)} : \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1} & 1 \le i \le 4 \\ [X_1, Y] = X_3 \\ [X_2, Y] = X_4 \\ [X_3, Y] = X_5 \end{cases}$$

$$\mu^{26}_{(5,1,1)} : \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1} & 1 \le i \le 4 \\ [X_1, Y] = X_3 + X_5 \\ [X_2, Y] = X_4 \\ [X_3, Y] = X_5 \end{cases}$$

$$\mu^{27}_{(5,1,1)} : \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1} & 1 \le i \le 4 \\ [X_1, X_2] = X_5 \\ [X_1, Y] = X_3 \\ [X_2, Y] = X_4 \\ [X_3, Y] = X_5 \end{cases}$$

$$\mu^{28}_{(5,1,1)}: \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1} & 1 \leq i \leq 4 \\ [X_1, X_4] = X_5 & \\ [X_2, X_3] = -X_5 & \\ [X_1, Y] = X_5 & \end{cases}$$

$$\mu^{29}_{(5,1,1)}: \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1} & 1 \leq i \leq 4 \\ [X_1, X_4] = X_5 & \\ [X_2, X_3] = -X_5 & \\ [X_1, Y] = X_4 & \\ [X_2, Y] = X_5 & \end{cases}$$

$$\mu^{30}_{(5,1,1)}: \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1} & 1 \leq i \leq 4 \\ [X_1, X_4] = X_5 & \\ [X_2, X_3] = -X_5 & \\ [X_1, Y] = X_4 + X_5 & \\ [X_2, Y] = X_5 & \end{cases}$$

$$\mu^{31}_{(5,1,1)}: \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1} & 1 \leq i \leq 4 \\ [X_1, X_2] = X_4 & \\ [X_1, X_3] = X_5 & \\ [X_1, X_4] = X_5 & \\ [X_2, X_3] = -X_5 & \\ [X_1, Y] = X_4 - X_5 & \\ [X_2, Y] = X_5 & \end{cases}$$

$$\mu^{32}_{(5,1,1)}: \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1} & 1 \leq i \leq 4 \\ [X_1, X_2] = X_4 & \\ [X_1, X_3] = X_5 & \\ [X_1, X_4] = X_5 & \\ [X_2, X_3] = -X_5 & \\ [X_1, Y] = X_5 & \end{cases}$$

$$\mu^{33}_{(5,1,1)} : \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1} & 1 \leq i \leq 4 \\ [X_1, X_2] = X_4 \\ [X_1, X_3] = X_5 \\ [X_1, X_4] = X_5 \\ [X_2, X_3] = -X_5 \\ [X_1, Y] = X_4 \\ [X_2, Y] = X_5 \end{cases}$$

Demostración: Si $\mathfrak{g}$ está en las condiciones anteriores, su ley vendrá dada por

$$\begin{cases} [X_0, X_i] &= X_{i+1} & 1 \leq i \leq 4 \\ [X_1, X_2] &= cX_4 + dX_5 \\ [X_1, X_3] &= cX_5 \\ [X_1, X_4] &= eX_5 \\ [X_2, X_3] &= -eX_5 \\ [X_1, Y] &= a_3X_3 + a_2X_4 + a_1X_5 \\ [X_2, Y] &= a_3X_4 + a_2X_5 \\ [X_3, Y] &= a_3X_5 \end{cases}$$

$$a_3 e = 0$$

Utilizando las técnicas y notaciones ya conocidas y el paquete de cálculo simbólico *Mathematica*, se obtienen los siguientes nuevos valores de los parámetros

$$c' = \frac{c\ Q_1 - a_3\ Q_6}{P_0^2}$$

$$d' = \frac{1}{P_0^4\ (P_0 + e\ P_1)\ Q_1}(d\ P_0^2\ Q_1^2 - 2\ c^2\ P_0\ P_1\ Q_1^2 - c^2\ e\ P_1^2\ Q_1^2 - e\ a_2\ P_0\ P_6\ Q_1^2 + 2\ c\ a_3\ P_0\ P_6\ Q_1^2 - e\ P_0^2\ Q_2^2 + 2\ e\ P_0^2\ Q_1\ Q_3 - a_2\ P_0^2\ Q_1\ Q_6 + e\ a_2\ P_0\ P_1\ Q_1\ Q_6 + 2\ c\ a_3\ P_0\ P_1\ Q_1\ Q_6 - 2\ a_3^2\ P_0\ P_6\ Q_1\ Q_6$$

$$e' = \frac{e\ Q_1}{P_0 + e\ P_1}$$

$$a_1' = \frac{1}{P_0^6\ (P_0 + e\ P_1)^2\ Q_1}((a_1\ P_0^4\ Q_1 - 3\ c\ a_2\ P_0^3\ P_1\ Q_1 - 2\ d\ a_3\ P_0^3\ P_1\ Q_1 - 3\ c\ e\ a_2\ P_0^2\ P_1^2\ Q_1 + 5\ c^2\ a_3\ P_0^2\ P_1^2\ Q_1 - c\ e^2\ a_2\ P_0\ P_1^3\ Q_1 + 5\ a_2\ a_3\ P_0^3\ P_6\ Q_1 - 10\ c\ a_3^2\ P_0^2\ P_1\ P_6\ Q_1 + 5\ a_3^3\ P_0^2\ P_6^2\ Q_1)\ R_6)$$

$$a_2' = \frac{(a_2\ P_0^2\ Q_1 + e\ a_2\ P_0\ P_1\ Q_1 - 2\ c\ a_3\ P_0\ P_1\ Q_1 + 2\ a_3^2\ P_0\ P_6\ Q_1)\ R_6}{P_0^4\ (P_0 + e\ P_1)\ Q_1}$$

$$a_3' = \frac{a_3\ R_6}{P_0\ (P_0 + e\ P_1)}$$

con $P_0 Q_1 R_6 (P_0 + eP_1) \neq 0$.

Un sencillo cálculo muestra que en el caso $e \neq 0$ la nulidad de $ea_1 + ca_2$ es invariante pues

$$e'a_1' + c'a_2' = \frac{Q_1 R_6 (ea_1 + ca_2)}{P_0^2 (P_0 + eP_1)^3}$$

A la vista de los resultados, es laborioso pero trivial discutir la configuración de los parámetros que se detalla a continuación

$$e = 0 \left\{ \begin{array}{l}
a_3 = 0 \left\{ \begin{array}{l}
c = 0 \left\{ \begin{array}{l}
a_2 = 0 \left\{ \begin{array}{l}
a_1 = 0 \left\{ \begin{array}{l} d = 0 \\ d \neq 0 \end{array} \right. \\
a_1 \neq 0 \left\{ \begin{array}{l} d = 0 \\ d \neq 0 \end{array} \right.
\end{array} \right. \\
a_2 \neq 0 \Longrightarrow d = 0 \left\{ \begin{array}{l} a_1 = 0 \\ a_1 \neq 0 \end{array} \right.
\end{array} \right. \\
c \neq 0 \left\{ \begin{array}{l}
a_2 = 0 \Longrightarrow d = 0 \left\{ \begin{array}{l} a_1 = 0 \\ a_1 \neq 0 \end{array} \right. \\
a_2 \neq 0 \Longrightarrow a_1 = d = 0
\end{array} \right.
\end{array} \right. \\
a_3 \neq 0 \Longrightarrow a_2 = c = 0 \left\{ \begin{array}{l}
d = 0 \left\{ \begin{array}{l} a_1 = 0 \\ a_1 \neq 0 \end{array} \right. \\
d \neq 0 \Longrightarrow a_1 = 0
\end{array} \right.
\end{array} \right.$$

$$
e \neq 0 \Longrightarrow a_3 = d = 0 \begin{cases} c = 0 \begin{cases} a_2 = 0 \begin{cases} a_1 = 0 \\ a_1 \neq 0 \end{cases} \\ a_2 \neq 0 \begin{cases} a_1 = 0 \\ a_1 \neq 0 \end{cases} \end{cases} \\ c \neq 0 \begin{cases} ea_1 + ca_2 = 0 \begin{cases} a_2 = 0 \Longrightarrow a_1 = 0 \\ a_2 \neq 0 \Longrightarrow a_1 = -\dfrac{ca_2}{e} \end{cases} \\ ea_1 + ca_2 \neq 0 \begin{cases} a_2 = 0 \Longrightarrow a_1 \neq 0 \\ a_2 \neq 0 \Longrightarrow a_1 = 0 \end{cases} \end{cases} \end{cases}
$$

Sólo queda obtener las álgebras correspondientes a cada caso distinguido, previo cambio de escala, encontrándose las álgebras del enunciado

□

A.3 Álgebras de Lie filiformes de dimensión 7 (invariante de Goze $(6,1)$)

Lema A.3.1.– *La ley de un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ filiforme compleja de dimensión $n = 7$ viene expresada, en una cierta base adaptada $\{X_0, X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6\}$, en función de los siguientes productos*

$$
\begin{aligned}
&[X_0, X_i] = X_{i+1} && 1 \leq i \leq 5 \\
&[X_1, X_2] = (b_2 + b_3)X_4 + b_4 X_5 + b_5 X_6 && \\
&[X_1, X_3] = (b_2 + b_3)X_5 + b_4 X_6 && \\
&[X_1, X_4] = b_2 X_6 && \\
&[X_2, X_3] = b_3 X_6 &&
\end{aligned}
$$

Teorema A.3.2.– *Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie filiforme con $\dim(\mathfrak{g}) = 7$. Entonces es isomorfa a algunas de las álgebras, no isomorfas entre sí, de leyes $\mu^i_{(6,1)}$, $1 \leq i \leq 7$ y*

$\mu_{(6,1)}^{8,\lambda}$ *con* $\lambda \in \mathbf{C}$, *dadas por*

$$\mu_{(6,1)}^{1}: \left\{ [X_0, X_i] = X_{i+1} \quad 1 \leq i \leq 5 \right.$$

$$\mu_{(6,1)}^{2}: \left\{ \begin{array}{ll} [X_0, X_i] = X_{i+1} & 1 \leq i \leq 5 \\ [X_1, X_2] = X_6 & \end{array} \right.$$

$$\mu_{(6,1)}^{3}: \left\{ \begin{array}{ll} [X_0, X_i] = X_{i+1} & 1 \leq i \leq 5 \\ [X_1, X_2] = X_5 & \\ [X_1, X_3] = X_6 & \end{array} \right.$$

$$\mu_{(6,1)}^{4}: \left\{ \begin{array}{ll} [X_0, X_i] = X_{i+1} & 1 \leq i \leq 5 \\ [X_1, X_2] = X_5 + X_6 & \\ [X_1, X_3] = -X_6 & \end{array} \right.$$

$$\mu_{(6,1)}^{5}: \left\{ \begin{array}{ll} [X_0, X_i] = X_{i+1} & 1 \leq i \leq 5 \\ [X_1, X_4] = X_6 & \\ [X_2, X_3] = -X_6 & \end{array} \right.$$

$$\mu_{(6,1)}^{6}: \left\{ \begin{array}{ll} [X_0, X_i] = X_{i+1} & 1 \leq i \leq 5 \\ [X_1, X_2] = X_5 & \\ [X_1, X_3] = X_6 & \\ [X_1, X_4] = X_6 & \\ [X_2, X_3] = -X_6 & \end{array} \right.$$

$$\mu_{(6,1)}^{7}: \left\{ \begin{array}{ll} [X_0, X_i] = X_{i+1} & 1 \leq i \leq 5 \\ [X_1, X_2] = X_4 + X_6 & \\ [X_1, X_3] = X_5 & \\ [X_1, X_4] = X_6 & \end{array} \right.$$

$$\mu_{(6,1)}^{8}: \left\{ \begin{array}{ll} [X_0, X_i] = X_{i+1} & 1 \leq i \leq 5 \\ [X_1, X_2] = X_4 & \\ [X_1, X_3] = X_5 & \\ [X_1, X_4] = \lambda X_6 & \\ [X_2, X_3] = (1 - \lambda) X_6 & \end{array} \right.$$

Demostración: La demostración es un sencillo cálculo, pues en la familia tan sólo tenemos tres parámetros, bien directamente o usando una adaptación de los programas utilizados en capítulos anteriores, lo cual facilita los cálculos.

Si en la familia de la lema A.3.1 se hacen cambios de base genéricos, modificando los dos únicos generadores X_0 y X_1 y usando la misma notación que en capítulos precedentes, se llega a que los nuevos parámetros son:

$$
\begin{aligned}
b_2' &= \frac{b_2\ Q_1}{P_0^2}\\
b_3' &= \frac{b_3\ Q_1}{P_0^2}\\
(b_2+b_3)' &= \frac{(b_2+b_3)\ Q_1}{P_0^2}\\
b_4' &= \frac{(b_4\ P_0 - 2(\ b_2+\ b_3)^2\ P_1)\ Q_1}{P_0^4}\\
b_5' &= \frac{1}{P_0^9\ Q_1^3}\big(b_5\ P_0^5\ Q_1^4 - 5\ b_2\ b_4\ P_0^4\ P_1\ Q_1^4 - 4\ b_3\ b_4\ P_0^4\ P_1\ Q_1^4 + 5\ b_2^3\ P_0^3\ P_1^2\ Q_1^4 +\\
&\quad +14\ b_2^2\ b_3\ P_0^3\ P_1^2\ Q_1^4 + 13\ b_2\ b_3^2\ P_0^3\ P_1^2\ Q_1^4 + 4\ b_3^3\ P_0^3\ P_1^2\ Q_1^4 + b_3\ P_0^5\ Q_1^2\ Q_2^2 -\\
&\quad -2\ b_3\ P_0^5\ Q_1^3\ Q_3\big)
\end{aligned}
$$

con $P_0 Q_1 \neq 0$.

Una sencilla discusión permite distinguir los siguientes casos que van a proporcionan álgebras no isomorfas.

$$
b_2+b_3=0 \begin{cases}
b_2 = 0 \Longrightarrow b_3 = 0 \begin{cases}
b_4 = 0 \begin{cases} b_5 = 0 \\ b_5 \neq 0 \end{cases} \\
b_4 \neq 0 \begin{cases} b_5 = 0 \\ b_5 \neq 0 \end{cases}
\end{cases} \\
b_2 \neq 0 \Longrightarrow b_3 = -b_2 \Longrightarrow b_5 = 0 \begin{cases} b_4 = 0 \\ b_4 \neq 0 \end{cases}
\end{cases}
$$

$$
b_2 + b_3 \neq 0 \begin{cases} b_2 = 0 \Longrightarrow b_3 \neq 0 \Longrightarrow b_5 = 0 \\ \\ b_2 \neq 0 \begin{cases} b_3 = 0 \begin{cases} b_5 = 0 \\ \\ b_5 \neq 0 \end{cases} \\ \\ b_3 \neq 0 \Longrightarrow b_5 = 0 \end{cases} \end{cases}
$$

Haciendo, cuando sea necesario, un simple cambio de escala, se obtienen todas las álgebras del enunciado. □

Apéndice B

Listado de leyes de álgebras p-filiformes.

Finalmente, y para concluir esta memoria, se presentan las listas de todas las álgebras o familias de álgebras que se han encontrado a lo largo del trabajo, para facilitar su localización.

B.1 Álgebras de Lie $(n-5)$-filiformes.

B.1.1 Álgebras de Lie $(n-5)$-filiformes de derivada máxima.

$$\mu_{(5,1,\dots,1)}^{1,r} : \left\{ \begin{array}{ll} [X_0, X_i] = X_{i+1} & 1 \le i \le 4 \\ [X_1, X_2] = Y_{n-7} & \\ [X_1, X_4] = Y_{n-6} & \\ [X_2, X_3] = -Y_{n-6} & \\ [Y_{2i-1}, Y_{2i}] = X_5 & 1 \le i \le r-1 \end{array} \right. \qquad 1 \le r \le \lfloor \frac{n-6}{2} \rfloor$$

$$\mu^{2,r}_{(5,1,\ldots,1)}: \begin{cases} [X_0,X_i]=X_{i+1} & 1\le i\le 4\\ [X_1,X_2]=Y_{n-7} & \\ [X_1,X_4]=Y_{n-6} & \\ [X_2,X_3]=-Y_{n-6} & \\ [X_1,Y_{n-8}]=X_4 & \\ [X_2,Y_{n-8}]=X_5 & \\ [Y_{2i-1},Y_{2i}]=X_5 & 1\le i\le r-1 \end{cases} \qquad 1\le r\le \lfloor\frac{n-7}{2}\rfloor$$

$$\mu^{3,r}_{(5,1,\ldots,1)}: \begin{cases} [X_0,X_i]=X_{i+1} & 1\le i\le 4\\ [X_1,X_2]=Y_{n-7} & \\ [X_1,X_4]=Y_{n-6} & \\ [X_2,X_3]=-Y_{n-6} & \\ [X_1,Y_{n-7}]=X_4 & \\ [X_2,Y_{n-7}]=X_5 & \\ [Y_{2i-1},Y_{2i}]=X_5 & 1\le i\le r-1 \end{cases} \qquad 1\le r\le \lfloor\frac{n-6}{2}\rfloor$$

$$\mu^{4,r}_{(5,1,\ldots,1)}: \begin{cases} [X_0,X_i]=X_{i+1} & 1\le i\le 4\\ [X_1,X_2]=X_4+Y_{n-7} & \\ [X_1,X_3]=X_5 & \\ [X_1,X_4]=Y_{n-6} & \\ [X_2,X_3]=-Y_{n-6} & \\ [Y_{2i-1},Y_{2i}]=X_5 & 1\le i\le r-1 \end{cases} \qquad 1\le r\le \lfloor\frac{n-6}{2}\rfloor$$

B.1.2 Álgebras de Lie de invariante de Goze $(5,1,1,1)$.

a) Dimensión de la derivada 6.

$$\mu^{1}_{(5,1,1,1)}: \begin{cases} [X_0,X_i]=X_{i+1} & 1\le i\le 4\\ [X_1,X_2]=Y_1 & \\ [X_1,X_4]=Y_2 & \\ [X_2,X_3]=-Y_2 & \end{cases}$$

$$\mu^2_{(5,1,1,1)}: \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1} & 1 \leq i \leq 4 \\ [X_1, X_2] = X_4 + Y_1 & \\ [X_1, X_3] = X_5 & \\ [X_1, X_4] = Y_2 & \\ [X_2, X_3] = -Y_2 & \end{cases}$$

$$\mu^3_{(5,1,1,1)}: \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1} & 1 \leq i \leq 4 \\ [X_1, X_2] = Y_1 & \\ [X_1, X_4] = Y_2 & \\ [X_2, X_3] = -Y_2 & \\ [X_1, Y_1] = X_4 & \\ [X_2, Y_1] = X_5 & \end{cases}$$

$$\mu^4_{(5,1,1,1)}: \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1} & 1 \leq i \leq 4 \\ [X_1, X_2] = Y_1 & \\ [X_1, Y_2] = X_5 & \end{cases}$$

b) Dimensión de la derivada 5.

$$\mu^5_{(5,1,1,1)}: \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1} & 1 \leq i \leq 4 \\ [X_1, X_2] = Y_1 & \\ [X_1, Y_2] = X_4 & \\ [X_2, Y_2] = X_5 & \end{cases}$$

$$\mu^6_{(5,1,1,1)}: \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1} & 1 \leq i \leq 4 \\ [X_1, X_2] = Y_1 & \\ [X_1, Y_2] = X_4 + X_5 & \\ [X_2, Y_2] = X_5 & \end{cases}$$

$$\mu^7_{(5,1,1,1)}: \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1} & 1 \leq i \leq 4 \\ [X_1, X_2] = X_4 + Y_1 & \\ [X_1, X_3] = X_5 & \\ [X_1, Y_2] = X_5 & \end{cases}$$

$$\mu^{8}_{(5,1,1,1)} : \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1} & 1 \leq i \leq 4 \\ [X_1, X_2] = X_4 + Y_1 \\ [X_1, X_3] = X_5 \\ [X_1, Y_2] = X_4 \\ [X_2, Y_2] = X_5 \end{cases}$$

$$\mu^{9}_{(5,1,1,1)} : \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1} & 1 \leq i \leq 4 \\ [X_1, X_2] = Y_1 \\ [X_1, X_4] = X_5 \\ [X_2, X_3] = -X_5 \\ [X_1, Y_2] = X_5 \end{cases}$$

$$\mu^{10}_{(5,1,1,1)} : \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1} & 1 \leq i \leq 4 \\ [X_1, X_2] = Y_1 \\ [X_1, X_4] = X_5 \\ [X_2, X_3] = -X_5 \\ [X_1, Y_2] = X_4 \\ [X_2, Y_1] = X_5 \end{cases}$$

$$\mu^{11}_{(5,1,1,1)} : \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1} & 1 \leq i \leq 4 \\ [X_1, X_2] = Y_1 \\ [X_1, X_4] = X_5 \\ [X_2, X_3] = -X_5 \\ [X_1, Y_2] = X_4 + X_5 \\ [X_2, Y_2] = X_5 \end{cases}$$

$$\mu^{12}_{(5,1,1,1)} : \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1} & 1 \leq i \leq 4 \\ [X_1, X_2] = X_4 + Y_1 \\ [X_1, X_3] = X_5 \\ [X_1, X_4] = X_5 \\ [X_2, X_3] = -X_5 \\ [X_1, Y_2] = X_5 \end{cases}$$

$$\mu^{13}_{(5,1,1,1)}:\begin{cases}[X_0,X_i]=X_{i+1} & 1\le i\le 4\\ [X_1,X_2]=X_4+Y_1\\ [X_1,X_3]=X_5\\ [X_1,X_4]=X_5\\ [X_2,X_3]=-X_5\\ [X_1,Y_2]=X_4\\ [X_2,Y_2]=X_5\end{cases}$$

$$\mu^{14}_{(5,1,1,1)}:\begin{cases}[X_0,X_i]=X_{i+1} & 1\le i\le 4\\ [X_1,X_2]=X_4+Y_1\\ [X_1,X_3]=X_5\\ [X_1,X_4]=X_5\\ [X_2,X_3]=-X_5\\ [X_1,Y_2]=X_4-X_5\\ [X_2,Y_2]=X_5\end{cases}$$

$$\mu^{15}_{(5,1,1,1)}:\begin{cases}[X_0,X_i]=X_{i+1} & 1\le i\le 4\\ [X_1,X_2]=Y_1\\ [X_1,X_4]=Y_1\\ [X_2,X_3]=-Y_1\\ [X_1,Y_2]=X_4\\ [X_2,Y_2]=X_5\end{cases}$$

$$\mu^{16}_{(5,1,1,1)}:\begin{cases}[X_0,X_i]=X_{i+1} & 1\le i\le 4\\ [X_1,X_2]=Y_1\\ [X_1,Y_1]=X_5\\ [X_1,Y_2]=X_4\\ [X_2,Y_2]=X_5\end{cases}$$

$$\mu^{17}_{(5,1,1,1)}:\begin{cases}[X_0,X_i]=X_{i+1} & 1\le i\le 4\\ [X_1,X_2]=Y_1\\ [X_1,X_4]=X_5\\ [X_2,X_3]=-X_5\\ [X_1,Y_1]=X_5\\ [X_1,Y_2]=X_4\\ [X_2,Y_2]=X_5\end{cases}$$

$$\mu^{18}_{(5,1,1,1)} : \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1} & 1 \leq i \leq 4 \\ [X_1, X_2] = -X_4 + Y_1 & \\ [X_1, X_3] = -X_5 & \\ [X_1, X_4] = X_5 & \\ [X_2, X_3] = -X_5 & \\ [X_1, Y_1] = X_5 & \\ [X_1, Y_2] = X_4 & \\ [X_2, Y_2] = X_5 & \end{cases}$$

$$\mu^{19}_{(5,1,1,1)} : \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1} & 1 \leq i \leq 4 \\ [X_1, X_2] = Y_1 & \\ [X_1, Y_1] = X_4 & \\ [X_1, Y_2] = X_5 & \\ [X_2, Y_1] = X_5 & \end{cases}$$

$$\mu^{20}_{(5,1,1,1)} : \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1} & 1 \leq i \leq 4 \\ [X_1, X_2] = Y_1 & \\ [X_1, Y_1] = X_4 + X_5 & \\ [X_1, Y_2] = X_5 & \\ [X_2, Y_1] = X_5 & \end{cases}$$

$$\mu^{21,\lambda}_{(5,1,1,1)} : \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1} & 1 \leq i \leq 4 \\ [X_1, X_2] = X_4 + Y_1 & \\ [X_1, X_3] = X_5 & \\ [X_1, Y_1] = X_4 + \lambda X_5 & \\ [X_1, Y_2] = X_5 & \\ [X_2, Y_1] = X_5 & \lambda \in \mathbf{C}_2 \end{cases}$$

$$\mu^{22}_{(5,1,1,1)} : \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1} & 1 \leq i \leq 4 \\ [X_1, X_2] = Y_1 & \\ [X_1, X_4] = X_5 & \\ [X_2, X_3] = -X_5 & \\ [X_1, Y_1] = -X_4 & \\ [X_1, Y_2] = X_5 & \\ [X_2, Y_1] = -X_5 & \end{cases}$$

$$\mu^{23}_{(5,1,1,1)}:\begin{cases}[X_0,X_i]=X_{i+1} & 1\le i\le 4\\ [X_1,X_2]=X_4+Y_1\\ [X_1,X_3]=X_5\\ [X_1,X_4]=X_5\\ [X_2,X_3]=-X_5\\ [X_1,Y_1]=-X_4+X_5\\ [X_1,Y_2]=X_5\\ [X_2,Y_1]=-X_5\end{cases}$$

$$\mu^{24}_{(5,1,1,1)}:\begin{cases}[X_0,X_i]=X_{i+1} & 1\le i\le 4\\ [X_1,X_2]=X_4+Y_1\\ [X_1,X_3]=X_5\\ [X_1,X_4]=X_5\\ [X_2,X_3]=-X_5\\ [X_1,Y_1]=-X_4-3X_5\\ [X_1,Y_2]=X_5\\ [X_2,Y_1]=-X_5\end{cases}$$

$$\mu^{25}_{(5,1,1,1)}:\begin{cases}[X_0,X_i]=X_{i+1} & 1\le i\le 4\\ [X_1,X_2]=Y_1\\ [X_1,X_4]=X_5\\ [X_2,X_3]=-X_5\\ [X_1,Y_1]=-X_4+X_5\\ [X_1,Y_2]=X_5\\ [X_2,Y_1]=-X_5\end{cases}$$

c) Dimensión de la derivada 4.

$$\mu^{26}_{(5,1,1,1)}:\begin{cases}[X_0,X_i]=X_{i+1} & 1\le i\le 4\\ [Y_1,Y_2]=X_5\end{cases}$$

$$\mu^{27}_{(5,1,1,1)}:\begin{cases}[X_0,X_i]=X_{i+1} & 1\le i\le 4\\ [X_1,X_2]=X_5\\ [Y_1,Y_2]=X_5\end{cases}$$

$$\mu^{28}_{(5,1,1,1)}: \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1} & 1 \leq i \leq 4 \\ [X_1, Y_1] = X_4 \\ [X_2, Y_1] = X_5 \\ [Y_1, Y_2] = X_5 \end{cases}$$

$$\mu^{29}_{(5,1,1,1)}: \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1} & 1 \leq i \leq 4 \\ [X_1, Y_1] = X_4 \\ [X_1, Y_2] = X_5 \\ [X_2, Y_1] = X_5 \end{cases}$$

$$\mu^{30}_{(5,1,1,1)}: \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1} & 1 \leq i \leq 4 \\ [X_1, Y_1] = X_4 \\ [X_1, Y_2] = X_5 \\ [X_2, Y_1] = X_5 \\ [Y_1, Y_2] = X_5 \end{cases}$$

$$\mu^{31}_{(5,1,1,1)}: \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1} & 1 \leq i \leq 4 \\ [X_1, X_2] = X_4 \\ [X_1, X_3] = X_5 \\ [Y_1, Y_2] = X_5 \end{cases}$$

$$\mu^{32}_{(5,1,1,1)}: \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1} & 1 \leq i \leq 4 \\ [X_1, X_2] = X_4 \\ [X_1, X_3] = X_5 \\ [X_1, Y_1] = X_4 \\ [X_1, Y_2] = X_5 \\ [X_2, Y_1] = X_5 \end{cases}$$

$$\mu^{33}_{(5,1,1,1)}: \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1} & 1 \leq i \leq 4 \\ [X_1, X_2] = X_4 \\ [X_1, X_3] = X_5 \\ [X_1, Y_1] = X_4 \\ [X_2, Y_1] = X_5 \\ [Y_1, Y_2] = X_5 \end{cases}$$

$$\mu^{34}_{(5,1,1,1)} : \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1} & 1 \leq i \leq 4 \\ [X_1, Y_1] = X_3 & \\ [X_2, Y_1] = X_4 & \\ [X_3, Y_1] = X_5 & \\ [Y_1, Y_2] = X_5 & \end{cases}$$

$$\mu^{35}_{(5,1,1,1)} : \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1} & 1 \leq i \leq 4 \\ [X_1, Y_1] = X_3 & \\ [X_1, Y_2] = X_5 & \\ [X_2, Y_1] = X_4 & \\ [X_3, Y_1] = X_5 & \end{cases}$$

$$\mu^{36}_{(5,1,1,1)} : \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1} & 1 \leq i \leq 4 \\ [X_1, Y_1] = X_3 & \\ [X_1, Y_2] = X_5 & \\ [X_2, Y_1] = X_4 & \\ [X_3, Y_1] = X_5 & \\ [Y_1, Y_2] = X_5 & \end{cases}$$

$$\mu^{37}_{(5,1,1,1)} : \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1} & 1 \leq i \leq 4 \\ [X_1, X_2] = X_5 & \\ [X_1, Y_1] = X_3 & \\ [X_2, Y_1] = X_4 & \\ [X_3, Y_1] = X_5 & \\ [Y_1, Y_2] = X_5 & \end{cases}$$

$$\mu^{38}_{(5,1,1,1)} : \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i-1} & 1 \leq i \leq 4 \\ [X_1, X_2] = X_5 & \\ [X_1, Y_1] = X_3 & \\ [X_1, Y_2] = X_5 & \\ [X_2, Y_1] = X_4 & \\ [X_3, Y_1] = X_5 & \end{cases}$$

$$\mu^{39}_{(5,1,1,1)}: \begin{cases} [X_0,X_i]=X_{i+1} & 1\le i\le 4\\ [X_1,X_2]=X_5 \\ [X_1,Y_1]=X_3 \\ [X_1,Y_2]=X_5 \\ [X_2,Y_1]=X_4 \\ [X_3,Y_1]=X_5 \\ [Y_1,Y_2]=X_5 \end{cases}$$

$$\mu^{40}_{(5,1,1,1)}: \begin{cases} [X_0,X_i]=X_{i+1} & 1\le i\le 4\\ [X_1,Y_1]=X_3 \\ [X_1,Y_2]=X_4 \\ [X_2,Y_1]=X_4 \\ [X_2,Y_2]=X_5 \\ [X_3,Y_1]=X_5 \end{cases}$$

$$\mu^{41}_{(5,1,1,1)}: \begin{cases} [X_0,X_i]=X_{i+1} & 1\le i\le 4\\ [X_1,Y_1]=X_3 \\ [X_1,Y_2]=X_4 \\ [X_2,Y_1]=X_4 \\ [X_2,Y_2]=X_5 \\ [X_3,Y_1]=X_5 \\ [Y_1,Y_2]=X_5 \end{cases}$$

$$\mu^{42}_{(5,1,1,1)}: \begin{cases} [X_0,X_i]=X_{i+1} & 1\le i\le 4\\ [X_1,X_4]=X_5 \\ [X_2,X_3]=-X_5 \\ [X_1,Y_1]=X_4 \\ [X_1,Y_2]=X_5 \\ [X_2,Y_1]=X_5 \end{cases}$$

$$\mu^{43}_{(5,1,1,1)}: \begin{cases} [X_0,X_i]=X_{i+1} & 1\le i\le 4\\ [X_1,X_2]=X_4 \\ [X_1,X_3]=X_5 \\ [X_1,X_4]=X_5 \\ [X_2,X_3]=-X_5 \\ [X_1,Y_1]=X_4 \\ [X_1,Y_2]=X_5 \\ [X_2,Y_1]=X_5 \end{cases}$$

$$\mu^{44}_{(5,1,1,1)}: \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1} & 1 \leq i \leq 4 \\ [X_1, X_4] = X_5 \\ [X_2, X_3] = -X_5 \\ [Y_1, Y_2] = X_5 \end{cases}$$

$$\mu^{45}_{(5,1,1,1)}: \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1} & 1 \leq i \leq 4 \\ [X_1, X_4] = X_5 \\ [X_2, X_3] = -X_5 \\ [X_1, Y_1] = X_4 \\ [X_2, Y_1] = X_5 \\ [Y_1, Y_2] = X_5 \end{cases}$$

$$\mu^{46}_{(5,1,1,1)}: \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1} & 1 \leq i \leq 4 \\ [X_1, X_2] = X_4 \\ [X_1, X_3] = X_5 \\ [X_1, X_4] = X_5 \\ [X_2, X_3] = -X_5 \\ [Y_1, Y_2] = X_5 \end{cases}$$

$$\mu^{47}_{(5,1,1,1)}: \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1} & 1 \leq i \leq 4 \\ [X_1, X_2] = X_4 \\ [X_1, X_3] = X_5 \\ [X_1, X_4] = X_5 \\ [X_2, X_3] = -X_5 \\ [X_1, Y_1] = X_4 \\ [X_2, Y_1] = X_5 \\ [Y_1, Y_2] = X_5 \end{cases}$$

B.2 Álgebras de Lie $(n-6)$-filiformes.

B.2.1 Álgebras de Lie de invariante de Goze $(6,1,1)$.

a) Dimensión de la derivada 6.

$$\mu^{1}_{(6,1,1)}: \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1} & 1 \leq i \leq 5 \\ [X_1, X_2] = Y \end{cases}$$

$$\mu^2_{(6,1,1)} : \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1} & 1 \leq i \leq 5 \\ [X_1, X_2] = X_5 + Y & \\ [X_1, X_3] = X_6 & \end{cases}$$

$$\mu^3_{(6,1,1)} : \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1} & 1 \leq i \leq 5 \\ [X_1, X_2] = X_5 + Y & \\ [X_1, X_3] = X_6 & \\ [X_1, X_4] = X_6 & \\ [X_2, X_3] = -X_6 & \end{cases}$$

$$\mu^{4,\lambda}_{(6,1,1)} : \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1} & 1 \leq i \leq 5 \\ [X_1, X_2] = X_4 + X_5 + Y & \\ [X_1, X_3] = X_5 + X_6 & \\ [X_1, X_4] = \lambda X_6 & \\ [X_2, X_3] = (1-\lambda)X_6 & \lambda \in \mathbf{C} \\ [X_1, Y] = 2X_6 & \end{cases}$$

$$\mu^5_{(6,1,1)} : \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1} & 1 \leq i \leq 5 \\ [X_1, X_2] = Y & \\ [X_1, Y] = X_6 & \end{cases}$$

$$\mu^{6,\delta}_{(6,1,1)} : \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1} & 1 \leq i \leq 5 \\ [X_1, X_2] = Y & \\ [X_1, X_4] = X_6 & \\ [X_2, X_3] = -X_6 & \\ [X_1, Y] = \delta X_6 & \delta \in \mathbf{C} \end{cases}$$

$$\mu^{7,\lambda,\delta}_{(6,1,1)} : \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1} & 1 \leq i \leq 5 \\ [X_1, X_2] = X_4 + Y & \\ [X_1, X_3] = X_5 & \\ [X_1, X_4] = \lambda X_6 & \\ [X_2, X_3] = (1-\lambda)X_6 & \\ [X_1, Y] = \delta X_6 & \lambda,\ \delta \in \mathbf{C} \end{cases}$$

$$\mu^8_{(6,1,1)} : \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1} & 1 \leq i \leq 5 \\ [X_1, X_2] = Y & \\ [X_1, Y] = X_5 & \\ [X_2, Y] = X_6 & \end{cases}$$

$$\mu^{9}_{(6,1,1)}:\begin{cases}[X_0,X_i]=X_{i+1} & 1\le i\le 5\\ [X_1,X_2]=Y & \\ [X_1,Y]=X_5+X_6 & \\ [X_2,Y]=X_6 & \end{cases}$$

$$\mu^{10,\alpha}_{(6,1,1)}:\begin{cases}[X_0,X_i]=X_{i+1} & 1\le i\le 5\\ [X_1,X_2]=X_5+Y & \\ [X_1,X_3]=X_6 & \\ [X_1,Y]=X_5+\alpha X_6 & \\ [X_2,Y]=X_6 & \alpha\in\mathbf{C}_3\end{cases}$$

$$\mu^{11,\nu,\delta}_{(6,1,1)}:\begin{cases}[X_0,X_i]=X_{i+1} & 1\le i\le 5\\ [X_1,X_2]=X_4+\nu X_5+Y & \\ [X_1,X_3]=X_5+\nu X_6 & \\ [X_1,X_4]=X_6 & \\ [X_1,Y]=X_5+\delta X_6 & \\ [X_2,Y]=X_6 & \nu,\ \delta\in\mathbf{C}\end{cases}$$

$$\mu^{12}_{(6,1,1)}:\begin{cases}[X_0,X_i]=X_{i+1} & 1\le i\le 5\\ [X_1,X_4]=Y & \\ [X_2,X_3]=-Y & \end{cases}$$

$$\mu^{13}_{(6,1,1)}:\begin{cases}[X_0,X_i]=X_{i+1} & 1\le i\le 5\\ [X_1,X_2]=X_6 & \\ [X_1,X_4]=Y & \\ [X_2,X_3]=Y & \end{cases}$$

$$\mu^{14}_{(6,1,1)}:\begin{cases}[X_0,X_i]=X_{i+1} & 1\le i\le 5\\ [X_1,X_2]=X_4 & \\ [X_1,X_3]=X_5 & \\ [X_1,X_4]=X_6+Y & \\ [X_2,X_3]=-Y & \end{cases}$$

$$\mu^{15}_{(6,1,1)}:\begin{cases}[X_0,X_i]=X_{i+1} & 1\le i\le 5\\ [X_1,X_2]=X_5 & \\ [X_1,X_3]=X_6 & \\ [X_1,X_4]=Y & \\ [X_2,X_3]=-Y & \end{cases}$$

$$\mu^{16}_{(6,1,1)}:\begin{cases}[X_0,X_i]=X_{i+1} & 1\le i\le 5\\ [X_1,X_2]=X_5+X_6 & \\ [X_1,X_3]=X_6 & \\ [X_1,X_4]=Y & \\ [X_2,X_3]=-Y & \end{cases}$$

$$\mu^{17}_{(6,1,1)}: \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1} & 1 \leq i \leq 5 \\ [X_1, X_2] = X_4 + X_6 \\ [X_1, X_3] = X_5 \\ [X_1, X_4] = X_6 + Y \\ [X_2, X_3] = -Y \end{cases}$$

$$\mu^{18}_{(6,1,1)}: \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1} & 1 \leq i \leq 5 \\ [X_1, X_2] = 2X_3 \\ [X_1, X_3] = 2X_4 \\ [X_1, X_4] = X_5 + Y \\ [X_2, X_3] = X_5 - Y \\ [X_2, X_4] = X_6 \\ [X_1, Y] = -2X_6 \end{cases}$$

$$\mu^{19}_{(6,1,1)}: \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1} & 1 \leq i \leq 5 \\ [X_1, X_2] = 2X_3 + X_4 + 2/3X_5 \\ [X_1, X_3] = 2X_4 + X_5 + 2/3X_6 \\ [X_1, X_4] = X_5 + X_6 + Y \\ [X_2, X_3] = X_5 - Y \\ [X_2, X_4] = X_6 \\ [X_1, Y] = -2X_6 \end{cases}$$

$$\mu^{20}_{(6,1,1)}: \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1} & 1 \leq i \leq 5 \\ [X_1, X_2] = 2X_3 + X_5 \\ [X_1, X_3] = 2X_4 + X_6 \\ [X_1, X_4] = X_5 + X_6 + Y \\ [X_2, X_3] = X_5 - Y \\ [X_2, X_4] = X_6 \\ [X_1, Y] = -2X_6 \end{cases}$$

$$\mu^{21}_{(6,1,1)}: \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1} & 1 \leq i \leq 5 \\ [X_1, X_2] = 2X_3 + X_4 \\ [X_1, X_3] = 2X_4 + X_5 \\ [X_1, X_4] = X_5 + X_6 + Y \\ [X_2, X_3] = X_5 - Y \\ [X_2, X_4] = X_6 \\ [X_1, Y] = -2X_6 \end{cases}$$

b) Dimensión de la derivada 5.

$$\mu^{22}_{(6,1,1)}:\begin{cases}[X_0,X_i]=X_{i+1} & 1\leq i\leq 5\\ [X_1,Y]=X_5\\ [X_2,Y]=X_6\end{cases}$$

$$\mu^{23}_{(6,1,1)}:\begin{cases}[X_0,X_i]=X_{i+1} & 1\leq i\leq 5\\ [X_1,Y]=X_6\end{cases}$$

$$\mu^{24}_{(6,1,1)}:\begin{cases}[X_0,X_i]=X_{i+1} & 1\leq i\leq 5\\ [X_1,X_2]=X_6\\ [X_1,Y]=X_6\end{cases}$$

$$\mu^{25}_{(6,1,1)}:\begin{cases}[X_0,X_i]=X_{i+1} & 1\leq i\leq 5\\ [X_1,Y]=X_5+X_6\\ [X_2,Y]=X_6\end{cases}$$

$$\mu^{26}_{(6,1,1)}:\begin{cases}[X_0,X_i]=X_{i+1} & 1\leq i\leq 5\\ [X_1,X_2]=X_5\\ [X_1,X_3]=X_6\\ [X_1,Y]=X_6\end{cases}$$

$$\mu^{27}_{(6,1,1)}:\begin{cases}[X_0,X_i]=X_{i+1} & 1\leq i\leq 5\\ [X_1,X_2]=X_5+X_6\\ [X_1,X_3]=X_6\\ [X_1,Y]=X_6\end{cases}$$

$$\mu^{28}_{(6,1,1)}:\begin{cases}[X_0,X_i]=X_{i+1} & 1\leq i\leq 5\\ [X_1,X_2]=X_5\\ [X_1,X_3]=X_6\\ [X_1,Y]=X_5\\ [X_2,Y]=X_6\end{cases}$$

$$\mu^{29}_{(6,1,1)}:\begin{cases}[X_0,X_i]=X_{i+1} & 1\leq i\leq 5\\ [X_1,X_2]=X_5\\ [X_1,X_3]=X_6\\ [X_1,Y]=X_5+X_6\\ [X_2,Y]=X_6\end{cases}$$

$$\mu^{30}_{(6,1,1)}: \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1} & 1 \le i \le 5 \\ [X_1, Y] = X_4 \\ [X_2, Y] = X_5 \\ [X_3, Y] = X_6 \end{cases}$$

$$\mu^{31}_{(6,1,1)}: \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1} & 1 \le i \le 5 \\ [X_1, Y] = X_4 + X_5 \\ [X_2, Y] = X_5 + X_6 \\ [X_3, Y] = X_6 \end{cases}$$

$$\mu^{32}_{(6,1,1)}: \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1} & 1 \le i \le 5 \\ [X_1, X_2] = X_6 \\ [X_1, Y] = X_4 \\ [X_2, Y] = X_5 \\ [X_3, Y] = X_6 \end{cases}$$

$$\mu^{33}_{(6,1,1)}: \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1} & 1 \le i \le 5 \\ [X_1, X_2] = X_6 \\ [X_1, Y] = X_4 + X_5 \\ [X_2, Y] = X_5 + X_6 \\ [X_3, Y] = X_6 \end{cases}$$

$$\mu^{34}_{(6,1,1)}: \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1} & 1 \le i \le 5 \\ [X_1, X_2] = X_4 \\ [X_1, X_3] = X_5 \\ [X_1, X_4] = X_6 \\ [X_1, Y] = X_6 \end{cases}$$

$$\mu^{35}_{(6,1,1)}: \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1} & 1 \le i \le 5 \\ [X_1, X_2] = X_4 + X_6 \\ [X_1, X_3] = X_5 \\ [X_1, X_4] = X_6 \\ [X_1, Y] = X_6 \end{cases}$$

$$\mu^{36}_{(6,1,1)}:\begin{cases}[X_0,X_i]=X_{i+1} & 1\le i\le 5\\ [X_1,X_2]=X_4\\ [X_1,X_3]=X_5\\ [X_1,X_4]=X_6\\ [X_1,Y]=X_5\\ [X_2,Y]=X_6\end{cases}$$

$$\mu^{37}_{(6,1,1)}:\begin{cases}[X_0,X_i]=X_{i+1} & 1\le i\le 5\\ [X_1,X_2]=X_4\\ [X_1,X_3]=X_5\\ [X_1,X_4]=X_6\\ [X_1,Y]=X_5+X_6\\ [X_2,Y]=X_6\end{cases}$$

Bibliografía

[1] J.M. Ancochea and M. Goze. *Sur la classification des algèbres de Lie nilpotentes de dimension 7.* C. R. Acad. Sci. París, 302:611–613, 1986.

[2] J.M. Ancochea and M. Goze. Classification des algèbres de lie filiformes de dimension 8. *Archiv Math.*, 50:511–525, 1988.

[3] J.M. Ancochea and M. Goze. *Classification des algèbres de Lie nilpotentes complexes de dimension 7.* Archiv. Math., 52:2:175–185, 1989.

[4] J.M. Ancochea and M. Goze. On the varietes of nilpotent lie algebras of dimension 7 and 8. *J. of Pure and Appl. algebra*, 77:131–140, 1992.

[5] G.G.A. Bäuerle and E.A. De Kerf. *Lie Algebras Part 1.* Studies in Mathematical Physics I. Elsevier, 1990.

[6] J.G.F. Belifante and B. Kolman. *A survey of Lie Groups and Lie Algebras with Applications and Computational Methods.* SIAM, Philadelphia, 1989.

[7] J.M. Cabezas. *Una generalización de las álgebras de Lie filiformes.* PhD thesis, Universidad de Sevilla, 1996.

[8] J.M. Cabezas, L.M. Camacho, J.R. Gómez and R.M. Navarro. *A class of nilpotent Lie algebras.* Aceptado para su publicación en Communications in Algebra, 2000.

[9] J.M. Cabezas, L.M. Camacho, J.R. Gómez, R.M. Navarro and E. Pastor. *Low-dimensional naturally graded 3-filiform Lie algebras.* SAGA V Meeting, León, Junio, 1999.

[10] J.M. Cabezas and J.R. Gómez. *Las álgebras de Lie $(n-3)$-filiformes como extensiones por derivaciones.* Extracta Mathematicae, 13(3):383–391, 1998.

[11] J.M. Cabezas and J.R. Gómez. *(n-4)-filiform Lie algebras.* Communications in Algebra, 27(10):4803–4819, 1999.

[12] J.M. Cabezas, J.R. Gómez and A. Jiménez-Merchán. *Family of p-filiform Lie algebras.* Algebra and Operator Theory, Kluwer Ac. Pub., 93-102, 1998.

[13] L.M. Camacho, J.R. Gómez and R.M. Navarro. *3-filiform Lie algebras of dimension* 8 *with minimal derived algebra.* ILAS'99 Meeting, Barcelona, Julio, 1999.

[14] L.M. Camacho, J.R. Gómez and R.M. Navarro. *Family of laws of (n-6)-filiform Lie algebras.* SAGA V Meeting, León, Junio, 1999.

[15] L.M. Camacho, J.R. Gómez and R.M. Navarro. *The use of Mathematica for the classification of some nilpotente Lie algebras.* IMACS-ACA'99 Meeting, El Escorial, Junio, 1999.

[16] L.M. Camacho, J.R. Gómez and R.M. Navarro. *3-filiform Lie algebra of dimension 8.* Annales Mathématiques Blaise Pascal, 6(2), 1999 ó 2000.

[17] F.J. Castro, J.R. Gómez, A. Jiménez-Merchán, J. Nú nez and G. Valeiras. *Determinación de familias de leyes de álgebras de Lie filiformes.* Encuentro de Análisis Matricial y Aplicaciones. Vitoria-Gasteiz, 1995.

[18] A. Cerezo. Les algèbres de lie nilpotentes réelles et complexes de dimension 6. Preprint nº 27. Université de Nice., 1984.

[19] Y. Chow. *General theory of Lie algebras (vol. 1 y 2).* Gordon and Breach, 1978.

[20] J. Dixmier. *Sur les représentationes unitaires des groupes de Lie nilpotentes III. Canadian J. Math.*, 10:321–348, 1958.

[21] J.R. Gómez. *Clasificación de las álgebras de Lie nilpotente complejas de dimensión* 9. PhD thesis, Universidad Sevilla, 1990.

[22] J.R. Gómez and F.J. Echarte. Classification of complex filiform lie algebras of dimension 9. *Rend. Sem. Fac. Sc. Univ. Cagliari*, 61:1:21–29, 1991.

[23] J.R. Gómez, M. Goze and Y. Khakimdjanov. *On the k-abelian filiform Lie algebras.* Communications in Algebra, 25(2):431–450, 1997.

[24] J.R. Gómez, A. Jiménez-Merchán and Y. Khakimdjanov. *Symplectic Structures on the Filiform Lie Algebras.* Aceptado para su publicación en Journal of Pure and Applied Algebra.

[25] J.R. Gómez, A. Jiménez-Merchán and Y. Khakimdjanov. *On the Variety of Nilpotent Lie Algebras Laws of Dimension 11.* Rendiconti Cagliari, 66:137–142, 1996.

[26] J.R. Gómez, A. Jiménez-Merchán and Y. Khakimdjanov. *Low-Dimensional Filiform Lie Algebras Laws.* Journal of Pure and Applied Algebra, 130:133–158, 1998.

[27] J.R. Gómez and I. Rodríguez. *A special case of family of Lie algebras with nilindex* 3. ILAS'99 Meeting, Barcelona, Julio, 1999.

[28] J.R. Gómez and I. Rodríguez. *Metabelian Lie algebras with maximal derived.* ILAS'99 Meeting, Barcelona, Julio, 1999.

[29] J.R. Gómez and I. Rodríguez. *Model metabelian Lie algebras.* SAGA V Meeting, León, Junio, 1999.

[30] M. Goze and Y. Khakimdjanov. *Nilpotent Lie Algebras.* Kluwer Academic Publishers, 1996.

[31] J.E. Humphreys. *Introduction to Lie Algebras and Representation Theory.* Springer-Verlag. Graduate Texts in Mathematics 9, 1987.

[32] N. Jacobson. *Lie Algebras.* Dover Publications, Inc. New York, 1979.

[33] V.V. Morosov. *Clasificación de las álgebras de Lie nilpotentes de dimensión 6 (en ruso en el original). Isvestia Vys. Ucheb. Zav.*, 4:161–171, 1958.

[34] O.A. Nielsen. *Unitary representation and coadjoint orbits of low- dimensional nilpotent Lie groups.* Queen's papers in pure and appl. Math., 63, 1983.

[35] M. Romdhani. *Classification of real and complex nilpotent Lie algebras of dimension 7.* Linear and multilinear alg., 24:167–189, 1989.

[36] D.H. Sattinger and O.L. Weaver. *Lie Groups and Algebras with Applications to Physics, Geometry, and Mechanics.* Springer-Verlag New York Inc., 1986.

[37] K.A. Umlauf. *Tber die Zusammensetzung der endlichen continuienlichen transformationsgruppen insbesondqre der gruppen von range null.* PhD thesis, Leipzig, 1891.

[38] M. Vergne. *Variété des algèbres de Lie nilpotentes.* PhD thesis, París, 1966.

UNIV[illegible]

Reunido el T[illegible] firmantes en el día de la [illegible] Tesis Doctoral de

D. LUISA MARÍA CAMACHO SANTANA

titulada ALGEBRAS DE LIE p-FILIFORMES

acordó otorgarle la [illegible] SOBRESALIENTE CUM LAUDE

Sevilla, 2 de febrero 2000

El Vocal,

El Vocal,

El Vocal,

El Presidente

El Secretario,

[illegible] Mª Cabezas Mtz. de Aragón

El Doctorado,

Luisa Mª Camacho