

TESIS DOCTORAL

*Método de elementos de
contorno de reciprocidad
dual aplicado a la
termoelasticidad
anisótropa desacoplada*

Presentada por Consolación Pedraza Rodríguez, Ingeniera
Industrial

Dirigida por Francisco García Benítez, Dr. Ingeniero Industrial

Sevilla, Marzo de 2012



Presentada en el departamento de Ingeniería
Mecánica y de los Materiales de la Escuela
Técnica Superior de Ingeniería de la
Universidad de Sevilla

A Alberto, Alberto y Carmen

Agradecimientos

Una vez finalizado este trabajo tras largos años, demasiados, de dedicación resulta necesaria una mirada atrás para agradecer la ayuda prestada a compañeros y amigos. En primer lugar quiero reconocer la labor de mi director el Dr. Francisco García Benítez que ha mostrado una paciencia y comprensión infinitas. En segundo lugar a mi familia que ha tenido que vivir momentos de menor dedicación por mi parte. Tampoco puedo olvidar a los compañeros del Área de Medios Continuos de la Universidad de Málaga: Miguel, Pepe Espejo, Carlos, Jorge, Germán y especialmente a mi compañero Felipe, a Juan (†), mi maestro, y, por supuesto, a Alberto. Por último recordar a los compañeros del área de Transportes de la Universidad de Sevilla, sobre todo a Luis por la tediosa labor de corrección.

Nomenclatura

$\frac{\partial}{\partial x_i}$	Derivada espacial
$\frac{\partial}{\partial t}$	Derivada temporal
∂D	Contorno
α, δ	Parámetros del método de Newmark
α_s	Parte real de la raíz de la ecuación característica
$\alpha_k(r)$	Funciones temporales linealmente independientes
α_{ij}	Coefficiente de dilatación térmica
β_s	Parte imaginaria de la raíz de la ecuación característica
β_{ij}	Matriz de flexibilidad en elasticidad plana
Δt	Incremento de tiempo
δ_i	Función delta de Dirac, toma el valor 1 en r_i y 0 en otro caso
ε_{ij}	Componente del tensor de deformaciones
θ	Parámetro del método de Wilson
θ_u	Parámetro asociado a la discretización temporal de la temperatura
θ_q	Parámetro asociado a la discretización temporal del flujo de calor
$\varphi_k(\xi)$	Función de forma asociada al elemento
$\psi_k(r)$	Solución de la ecuación estática siendo $f_k(r)$ la parte no homogénea
$\eta_k(r)$	Flujo asociado a $\psi_k(r)$
ξ	Variable natural asociada al elemento
ρ	Densidad
σ_{ij}	Componente del tensor de tensiones
ν_{12}	Coefficiente de Poisson
μ_s	Solución de la ecuación característica
ω_{ij}	Matriz de giro
a_k	Término independiente asociado al cambio de curvatura
A_{jk}	Coefficiente de la solución fundamental elástica

b_i	Fuerza volumétrica
BEM	Método de los elementos de contorno
C_{ijkl}	Componentes de la matriz de rigidez elástica del material
c_p	Calor específico
c_i, c_{ij}	Términos independientes asociados al problema térmico y elástico respectivamente
D	Dominio
DRBEM	Método de los elementos de contorno de reciprocidad dual
D_s	Operador
E_1, E_2	Módulo de elasticidad en la dirección de la coordenadas x_1, x_2
$f_k(r)$	Funciones espaciales linealmente independientes
g_{ik}	Coefficiente del flujo de la solución fundamental elástica
G	Matriz de coeficientes del flujo
H	Matriz de coeficientes de la temperatura en el problema térmico o del desplazamiento en el elástico
h	Coefficiente de convección
K_{ij}	Conductividad térmica del material
m_{ij}	Matriz de constantes del material asociadas al problema termoelástico
N	Número de nodos en el contorno
NE	Número de elementos del contorno
n_i	Normal al contorno
NN	Número de puntos utilizados en la integración. Es la suma de N y NP
NP	Número de polos o puntos del dominio utilizados en la integración
p_i	Vector tensión
\bar{p}_i	Vector tensión conocido en el contorno
p_n	Componente normal del vector tensión
p_t	Componente tangencial del vector tensión
p_{ik}^*	Flujo asociado a la solución fundamental del problema elástico
q	Flujo de calor
\bar{q}	Flujo de calor conocido en el contorno

q^*	Flujo asociado a la solución fundamental del problema térmico
Q_{ij}	Matriz de rigidez elástica del problema plano
q_{ik}	Coefficiente de la solución fundamental elástica
$[Q]$	Matriz de cambio de base del elemento continuo al discontinuo
r	Radio anisótropo equivalente en el problema térmico y distancia euclídea en el problema elástico
S_{ij}	Componentes de la matriz inversa de la de conductividad para el problema térmico y de la matriz de flexibilidad para el problema elástico
t	Tiempo
T	Temperatura
\bar{T}	Temperatura conocida en el contorno
T^*	Solución fundamental del problema térmico
u_i	Vector desplazamiento
\bar{u}_i	Vector desplazamiento conocido en el contorno
u_n	Componente normal del vector desplazamiento
u_t	Componente tangencial del vector desplazamiento
u_{ik}^*	Solución fundamental del problema elástico
x_i	Coordenada espacial
z_k	Dirección característica

Índice

Capítulo 1: Introducción	1
1.1. Generalidades	1
1.2. El Método de los Elementos de Contorno	3
1.3. El método de elementos de contorno de reciprocidad dual.....	5
1.4. Objeto y Objetivo de la tesis	7
1.5. Organización del documento.....	7
Capítulo 2: El problema térmico	9
2.1. Generalidades	9
2.2. Formulación del Problema	9
2.3. El Método de Reciprocidad Dual.....	10
2.4. Discretización. Elementos cuadráticos.	13
2.5. Elementos de las Matrices H y G	16
2.6. Elementos de las matrices F, ψ y η	28
2.6.1. Funciones polinómicas	29
2.6.2. Funciones Exponenciales	29
2.6.3. Funciones de Bessel	30
2.6.4. Funciones para problemas con simetría axial.....	31
2.7. Ejemplos prácticos.....	31
2.7.1. Geometría rectangular, problema isótropo	31
2.7.2. Geometría circular. Problema isótropo	42
2.7.3. Geometría rectangular. Problema ortótropo	43
2.7.4. Geometría rectangular, problema anisótropo	45
2.7.5. Geometrías definidas con multicuerpos	47
Capítulo 3: Elastodinámica	53
3.1. Generalidades	53
3.2. Ecuaciones de la Elasticidad Anisótropa en Elastodinámica.....	53
3.3. Ecuaciones de la Elasticidad Bidimensional	54
3.4. El Método de Reciprocidad Dual en Elastodinámica	59
3.5. La solución Fundamental	64
3.6. Elementos de la Matriz G	66
3.7. Elementos de la Matriz H	70
3.8. Discretización en el tiempo	71
3.8.1. El Método de Wilson	72
3.8.2. El Método de Newmark	73
3.8.3. El Método de Houbolt.	73
3.9. Elementos de las Matrices F, ψ y η	74
3.10. Tensiones en el Dominio	75
3.11. Ejemplos prácticos del problema elástico.....	77

3.11.1.	El problema isótropo.....	77
3.11.2.	El problema ortótropo.....	93
3.11.3.	El problema anisótropo.....	96
3.11.4.	Multicuerpos.....	98
Capítulo 4:	El Problema termoelástico	101
4.1.	Generalidades.....	101
4.2.	Ecuaciones de la Termoelasticidad Anisótropa	102
4.3.	El método de reciprocidad dual en termoelasticidad desacoplada	103
4.4.	Derivada de la temperatura	106
4.4.1.	Obtención de $g_{,\alpha}$	108
4.4.2.	Obtención de $h_{,\alpha}$	109
4.4.3.	Resolución de la hipersingularidad.....	110
4.4.4.	Resolución de la singularidad	116
4.4.5.	Obtención de los términos independientes $ckh(P)$ y $ak(P)$	116
4.5.	Puntos internos	119
4.6.	Casos prácticos de la Termoelasticidad	119
4.6.1.	Introducción.....	119
4.6.2.	El problema isótropo.....	120
4.6.3.	Multicuerpo.....	125
4.6.4.	El problema ortótropo y anisótropo.....	127
Capítulo 5:	Conclusiones y desarrollo futuro	131
5.1.	Conclusiones.....	131
5.1.1.	Problema térmico	131
5.1.2.	Problema elástico	132
5.1.3.	El problema termoelástico.....	133
5.2.	Desarrollo Futuro.....	133
Capítulo 6:	Bibliografía.....	135

Índice de figuras

Figura 2.1: Condiciones de contorno que pueden aparecer en un sólido genérico.....	10
Figura 2.2: Discretización con elementos cuadráticos de un sólido genérico.....	13
Figura 2.3: Elemento cuadrático discontinuo	14
Figura 2.4: Bola en torno a la singularidad para obtener el término ci	21
Figura 2.5: Ejemplo teórico	32
Figura 2.6: Ejemplo de material isótropo	33
Figura 2.7: Variación de la temperatura del punto 1. (a) Diferentes discretizaciones temporales con $N = 40$ (b) Diferentes discretizaciones espaciales con $\Delta t = 0.1$	34
Figura 2.8: Variación de la temperatura del punto 2. (a) Diferentes discretizaciones temporales (b) Diferentes discretizaciones espaciales.....	34
Figura 2.9: Variación de la temperatura del punto 3. (a) Diferentes discretizaciones temporales (b) Diferentes discretizaciones espaciales.....	34
Figura 2.10: Variación del flujo de calor del punto 4. (a) Diferentes discretizaciones temporales (b) Diferentes discretizaciones espaciales.....	35
Figura 2.11: Variación de la temperatura de los puntos 1 (a); 2 (b) y 3 (c) y variación del flujo de calor por conductividad del punto 4. (d) frente a pasos de tiempo.....	36
Figura 2.12: Problema sin simetría.	36
Figura 2.13: Discretizaciones con distintos números de polos del problema de la figura 2.12	37
Figura 2.14: Variación de la temperatura de los puntos 1 (a); 2 (b) 3 (c) y 4(d) de la figura 2.12 frente al tiempo.	38
Figura 2.15: Discretizaciones con distintos números de polos y diferentes posiciones de éstos del problema de la figura 2.6.....	39
Figura 2.16: Variación de la temperatura de los puntos 1 (a); 2 (b) y 3 (c) y variación del flujo de calor del punto 4 (d) de la figura 2.12 frente al tiempo.	39
Figura 2.17: Variación de la temperatura de los puntos 1 (a); 2 (b) 3 (c) y flujo de calor del punto 4(d) de la figura 2.12 frente al tiempo.	40
Figura 2.18: Variación de la temperatura del puntos 3 (a) y del flujo de calor del punto 4(b) de la figura 2.12 frente al tiempo.	41
Figura 2.19: Variación de la temperatura de los puntos 1 (a); 2 (b) 3 (c) y del flujo de calor del punto 4(d) de la figura 2.6 frente al tiempo.	42
Figura 2.20: Problema de transferencia de calor en una geometría circular (a) y discretización del dominio correspondiente (b).	43
Figura 2.21: Variación de la temperatura del punto 1 (a) y variación del flujo de calor del punto 2. (b) de la figura 2.20.b frente al tiempo.	43

Figura 2.22: Evolución de la Temperatura para el punto 1 del sólido ortótropo de la figura 2.6 con diferentes discretizaciones (a) $K_x = 0.01$ y $K_y = 0.1$; (b) $K_x = 0.01$ y $K_y = 1$; (c) $K_x = 0.01$ y $K_y = 10$; (d) $K_x = 0.1$ y $K_y = 1$; (e) $K_x = 0.1$ y $K_y = 10$; (f) $K_x = 0.1$ y $K_y = 100$; (g) $K_x = 1$ y $K_y = 10$; (h) $K_x = 1$ y $K_y = 100$; (i) $K_x = 10$ y $K_y = 100$	45
Figura 2.23: Sólido de la figura 2.6 al que se le ha aplicado el cambio de coordenadas de las expresiones [2.91] y [2.92]	47
Figura 2.24: Sólido con multicuerpos (b) frente al mismo sólido simple (a). 48	
Figura 2.25: Puntos en los que se calculará la Temperatura (1 y 2) y el flujo de calor (3) de los sólidos de la figura 2.24.	48
Figura 2.26: Valores de las temperaturas de los puntos 1 y 2 de la figura 3.20 y flujo de calor del punto 3 de la misma figura.	49
Figura 2.27: Sólido con multicuerpos (b) frente al mismo sólido simple (a) ..	49
Figura 2.28: Valores de las temperaturas de los puntos 1 y 2 de la figura 2.27.a y flujo de calor del punto 3 de la misma figura.	50
Figura 2.29: Sólido con multidominio (a) frente al mismo sólido simple (b). 51	
Figura 2.30: Valores de las temperaturas de los puntos 1 (a) y 3(c) de la figura 3.b y flujo de calor del punto 3 (b) de la misma figura.	51
Figura 3.1: Sólido sujeto a diversos tipos de condiciones de contorno	57
Figura 3.2: Sólido sometido a una fuerza unitaria repentina	77
Figura 3.3: Función escalón aplicado en $y = 4$	77
Figura 3.4: Discretización del sólido de la figura 3.2.	79
Figura 3.5. a: Desplazamiento del punto 15 del sólido de la figura 3.2, con la discretización de la figura 3.3.	80
Figura 3.5.b: Fuerza F_y del punto 3 del sólido de la figura 3.2, con la discretización de la figura 3.3.	80
Figura 3.6: Desplazamiento del punto 15 (a) y fuerza F_y del punto 3 del sólido de la figura 3.2, con la discretización de la figura 3.3 y ante diferentes incrementos de tiempo	81
Figura 3.7: Desplazamiento del punto 15 (a) y fuerza F_y del punto 3 del sólido de la figura 3.2, con la discretización de la figura 3.3 y ante diferentes discretizaciones espaciales.	82
Figura 3.8: Sólido de la figura 3.2 con diferentes números de polos: (a) $NP = 1$; (b) $NP = 3$; (c) $NP = 5$; (d) $NP = 7$; (e) $NP = 9$; (f) $NP = 21$	83
Figura 3.9: Desplazamiento del punto 15 (a) y fuerza F_y del punto 3 del sólido de la figura 3.2, con la discretización de la figura 3.3 y ante diferentes discretizaciones espaciales.	84
Figura 3.10.a: Desplazamiento del punto 15 del sólido de la figura 3.2, con la discretización de la figura 3.3 usando las funciones de [3.118].....	86
Figura 3.10.b: Fuerza del punto 3 del sólido de la figura 3.2, con la discretización de la figura 3.3 usando las funciones de [3.118].	86
Figura 3.11.a: Desplazamiento del punto 15 del sólido de la figura 3.2, con la discretización de la figura 3.3 usando los métodos de Houbolt, Newmark y Wilson.....	87

Figura 3.11.b: Fuerza vertical del punto 3 del sólido de la figura 3.2, con la discretización de la figura 3.3 usando los métodos de Houbolt, Newmark y Wilson.	88
Figura 3.12: Placa sometida a la fuerza periódica definida en [3.112](a) y discretización de la misma (b).....	89
Figura 3.13: Desplazamiento horizontal del punto 36 de la figura 3.11.b.calculado mediante diferentes métodos de discretización en el tiempo.	89
Figura 3.14: Ejemplo con contorno curvo (a) y discretizaciones del mismo: (b), (c), (d) y (e).....	90
Figura 3.15.a: Desplazamiento radial de la placa de la figura 3.14.a.con las diferentes discretizaciones espaciales mostradas en 3.14.b, 3.14.c, 3.14.d y 3.14.e.	91
Figura 3.15.b: Fuerza circunferencial de la placa de la figura 3.14.a.con las diferentes discretizaciones espaciales mostradas en 3.14.b, 3.14.c, 3.14.d y 3.14.e.	91
Figura 3.16. Barra simplemente apoyada (a), a la que se le ha aplicado la simetría (b) y discretización de la misma (c)	92
Figura 3.17: Desplazamiento vertical del punto A de las figuras 3.16.a y 3.16.b.	93
Figura 3.18.a: Desplazamiento del punto 15 de la figura 3.3, para el caso de que $E_y = 213334$	94
Figura 3.18.b: Desplazamiento del punto 15 de la figura 3.2, para el caso de que $E_y = 53333.5$	94
Figura 3.19: Fuerza F_y del punto 3 de la figura 3.3, para el caso de que $E_y = 213334$ (a) y de que $E_y = 53333.5$ (b).	95
Figura 3.20: Sólido de la figura 3.2 con ejes de ortotropía OX_1X_2 y de anisotropía OXY	96
Figura 3.21.a: Fuerza F_y del punto 3 (a) y desplazamiento u_y del punto 15 (b) de la figura 3.4 para diversos valores del ángulo θ de la figura 3.7.....	97
Figura 3.21.b: Fuerza F_y del punto 3 (a) y desplazamiento u_y del punto 15 (b) de la figura 3.4 para diversos valores del ángulo θ de la figura 3.7.	97
Figura 3.22: Sólido de la figura 5.2 con varios subdominios. En las figuras (b) y (c) se ha definido un sólido doble porque se ha tenido en cuenta la simetría de la figura, por eso el sólido de la figura 3.21.a. es de dimensiones 2×4 mientras que los de las figuras (b) y (c) son de dimensiones 4×4	98
Figura 3.23.a: Comparación entre el desplazamiento del punto 15 de la figura 3.4 con el desplazamiento de los puntos 15, 21 y 21 de los sólidos (a), (b) y (c) de la figura 3.21.	99
Figura 3.23.b: Comparación entre el desplazamiento del punto 15 de la figura 3.4 con el desplazamiento de los puntos 15, 21 y 21 de los sólidos (a), (b) y (c) de la figura 3.21.	99
Figura 4.1: Bola en el entorno del punto P.....	107

Figura 4.2: <i>Distintas posiciones para el punto colocación. En (a) y (b) son extremos $\xi' = -1$ y $\xi' = 1$, respectivamente y en (c) es un punto intermedio.</i>	111
Figura 4.3: <i>Punto de colocación que pertenece a dos elementos</i>	113
Figura 4.4: <i>Contorno del arco de circunferencia.</i>	117
Figura 4.5: <i>Sólido sometido a un shock térmico(a). Distribución de la temperatura T_1, a lo largo del tiempo (b) y discretización (c)</i>	121
Figura 4.6.a: <i>Desplazamiento del punto 21 de la figura 4.5.c.</i>	122
Figura 4.6.b: <i>Fuerza del punto 5 de la figura 4.4.c.</i>	122
Figura 4.7: <i>Ejemplo con contorno curvo</i>	123
Figura 4.8.a: <i>Desplazamiento radial del sólido de la figura 4.7. según las discretizaciones mostradas en las figuras 3.14.b, 3.14.c, 3.14.d y 3.14.e ..</i>	124
Figura 4.8.b: <i>Fuerza circunferencial del sólido de la figura 4.7.según las discretizaciones mostradas en las figuras 3.14.b, 3.14.c, 3.14.d y 3.14.e ..</i>	124
Figura 4.9: <i>Placa de la figura 4.5 con diferentes subdominios</i>	126
Figura 4.10.a.: <i>Desplazamiento del punto 21 de la figura 4.5.c.con las discretizaciones de la figura 4.9</i>	126
Figura 4.10.b.: <i>Fuerza del punto 5 de la figura 4.5.c.con las discretizaciones de la figura 4.9</i>	127
Figura 4.11.a.: <i>Desplazamiento del punto 21 de la figura 4.5.c para un material ortótropo</i>	128
Figura 4.11.b.: <i>Fuerza del punto 5 de la figura 4.5.c.para un material ortótropo</i>	128
Figura 4.12.a.: <i>Desplazamiento del punto 21 de la figura 4.5.c para un material anisótropo</i>	129
Figura 4.12.b.: <i>Fuerza del punto 5 de la figura 4.4.c.para un material anisótropo</i>	129

Capítulo 1: Introducción

1.1. Generalidades

Desde que el hombre empezó a construir ha sido necesario el conocimiento del comportamiento de los materiales. Dadas las construcciones de los egipcios parece evidente que disponían de reglas empíricas sobre la naturaleza de los materiales, más tarde griegos y romanos avanzaron en el campo de la construcción y no fue hasta 1638 cuando se editó el primer estudio analítico publicado sobre la Resistencia de Materiales *Discorsi e dimostrazioni matematiche in torno à due nuoue fcienze* escrito por Galileo, posteriormente Hooke publica en 1678 *De Potentia Restitutiva* en donde estableció una relación lineal entre las fuerzas y la deformación que éstas producen. Luego en 1744 Euler introduce el cálculo de variaciones. Otras aportaciones importantes durante el siglo XVIII fueron las de Lagrange, más teórico, y Coulomb, más práctico. Ya en el siglo XIX tenemos a Young y Navier.

El origen de la teoría matemática de la Elasticidad se puede situar a principios del siglo XIX principalmente con los trabajos de Cauchy quien introduce los conceptos de tensión y deformación, poco antes Fourier había publicado su trabajo sobre la propagación de calor. Durante el siglo XIX aparecen, entre otros, los trabajos de Poisson, Lamé, Green, Piola, Kirchhoff y Saint-Venant. A mediados del siglo XX el estudio de la Elasticidad cobra de nuevo impulso, posiblemente debido a las aplicaciones tecnológicas de los nuevos materiales que aparecen. Merece especial importancia el estudio de las láminas finas en aeronáutica, la propagación de vibraciones en los cuerpos para el diseño de maquinaria industrial, la propagación de ondas en materiales no homogéneos y anisótropos en geofísica, la transmisión de calor en astronáutica etc.

Es también en este siglo cuando el análisis funcional moderno hace posible el estudio de la existencia, unicidad y comportamiento de las soluciones, permitiendo resolver problemas de estabilidad. Asimismo el desarrollo del análisis numérico proporciona una idea bastante aproximada del comportamiento real de los materiales, posibilitando un gran avance en el diseño de estructuras.

En muchas situaciones de interés práctico, el estado de tensión-deformación de los sólidos está fuertemente influido por fenómenos térmicos, debido a la tendencia de los materiales a dilatarse al aumentar la temperatura. Conviene distinguir dos niveles en cuanto a dicha influencia:

- Por una parte, está el hecho de que el propio proceso de deformación lleva asociados fenómenos térmicos. Para proceder con rigor, el proceso de deformación debiera considerarse como un proceso termodinámico en su conjunto, en el que el trabajo de las fuerzas aplicadas es sólo un término más en las ecuaciones energéticas. Algunas de las conclusiones de este enfoque riguroso son, por ejemplo, que las constantes elásticas son distintas (aunque ligeramente) dependiendo de si el proceso de deformación es adiabático o isoterma, y que con la deformación se genera calor (aunque en cantidad usualmente pequeña) que, a su vez, influencia a la propia deformación, estando acoplados ambos fenómenos.
- Por otra parte, tenemos la posible concurrencia de fenómenos térmicos producidos por causas externas a la deformación, como calentamiento por irradiación solar, cercanía de calderas o motores de combustión, exposición al ambiente de invierno y de verano, etc. Estos efectos son de mucha mayor magnitud que los efectos térmicos asociados a la deformación, y son los únicos que se tienen en cuenta en las aplicaciones usuales de ingeniería.

El modelo de comportamiento termoelástico lineal general puede resumirse en dos ecuaciones (Martínez, 1997) una fundamentalmente térmica (expresa la entropía) pero que contiene un término elástico, y otra fundamentalmente elástica (expresa la tensión) pero que contiene un término térmico. El despreciar los “efectos térmicos asociados a la deformación” se traduce en despreciar la generación de entropía asociada a la deformación frente a la asociada a las variaciones de temperatura en la primera ecuación, que queda solamente con variables térmicas. Ésta puede resolverse en primer lugar, y permite manejar la segunda ecuación con el término térmico ya conocido.

El hecho de que puedan resolverse independientemente (“desacopladamente”) las ecuaciones térmicas y elásticas es lo que hace que este modelo se identifique como “termoelasticidad desacoplada”. Seguidamente, se supone que el problema térmico ha sido resuelto independientemente, de forma que el campo de temperaturas es un dato a efectos operativos, y se obtiene la ecuación de comportamiento elástico en presencia de un campo de temperaturas. Los razonamientos utilizados serán sencillos, si bien la

ecuación que se obtendrá coincide con la que se obtiene del modelo termoelástico acoplado.

1.2. El Método de los Elementos de Contorno

Después de cuatro décadas de desarrollo del método de elementos de contorno (BEM), éste ha encontrado su sitio en el campo de los métodos numéricos para la resolución de ecuaciones diferenciales. Comparado con los métodos numéricos más populares, el método de elementos finitos (FEM) y el método de diferencias finitas (FDM), se puede considerar que éstos son métodos de dominio en tanto en cuanto exigen discretizar todo el dominio frente al BEM que es un método de contorno pues sólo necesita discretizar el contorno, lo que va a reducir un orden el problema. Este método presenta sin embargo, el problema de que las matrices que aparecen son matrices llenas no simétricas; aunque existen métodos que pueden circunvalar esta desventaja (DeFigueiredo & Brebbia, 1991).

Los elementos de contorno tienen una amplia historia, que ha sido descrita por diversos autores (Cruse, 1987, Watson, 2003, Cheng&Cheng, 2005, Hsiao, 2006, Yu et al 2010). Otros autores han descrito la historia de los elementos de contorno aplicado a diversos campos como la resolución de problemas con fuerzas de volumen (Cheng et al., 2001) o el análisis dinámico inelástico (Hatzigeorgieou & Beskos, 2011). Ya, en 1962, Friedman y Shaw resolvieron la función de onda escalar mediante un método conocido con el nombre actual de elementos de contorno. Con anterioridad a estas fechas esta metodología se había desarrollado analíticamente por Rankine (1864), Trefftz (1926) y Von Karman (1927), como más representativos. La creación del término Método de los Elementos de Contorno se debe al esfuerzo colectivo de un grupo de investigadores de la Universidad de Southampton en 1977 (Brebbia, C. A., Domínguez J., Banerjee, P. K. y Butterfield, R.), aunque estos cuatro autores nunca escribieron nada juntos, sí lo hicieron Brebbia, C. A. y Domínguez, J., 1989 y Banerjee, P. K. y Butterfield, R. en 1981. Mención especial merece los trabajos de Cruse y Rizzo a los que se debe la primera formulación integral de contorno para el análisis dinámico de sólidos en 1968. Posteriormente se han escrito numerosos textos sobre el método (Chen & Zhou, 1992).

Para la resolución de los problemas dependientes del tiempo se han seguido diversas aproximaciones tales como:

- El método de la transformada de Fourier (Hosseini-Tehrani & Eslami, 1998) o la transformada de Laplace (Chen & Dargush, 1995; Georgiadiatis et al, 1999; Hosseini-Tehrani & Eslami, 2000; Alburquerque et al, 2003).

- La utilización de una solución fundamental dependiente del tiempo. Mansur & Brebbia (1982) desarrollaron este tipo de funciones en ecuaciones de ondas, más tarde Israíl (1990) estudió el problema de ondas transitorias en el plano mediante la función fundamental dependiente del tiempo
- El método de Reciprocidad Dual, que se ha utilizado en el presente trabajo.
- El método de Reciprocidad Múltiple, propuesto por Nowak y aplicado primero al problema de transferencia de calor transitoria (Nowak, 1992).

Existen otras metodologías mixtas de las anteriores como el método de reciprocidad dual con transformada de Laplace que Zhu (1998) compara con el método que utiliza solución fundamental dependiente del tiempo o que aplican Zhu & Satravaha en 1996 para resolver problemas no lineales, o bien el método de reciprocidad dual en el dominio de la frecuencia (Albuquerque et al., 2003).

Uno de los pilares fundamentales del método de los elementos de contorno se basa en la utilización y obtención de soluciones fundamentales para diversos problemas físicos (Wideberg & Benítez, 1996; Pan et al, 1997; Pan & Amadei, 1999; Manolis & Shaw, 2000; Zhong & Zhang, 2001) y la evaluación de las mismas (Wang & Achenbach, 1992), así como de sus derivadas (Sales & Gray, 1998).

Desde el punto de vista de la aplicación numérica, el método más tradicional utilizado por el método de los elementos de contorno es el de colocación. Entre los primeros trabajos de este ámbito destaca la aplicación elastostática de Rizzo (1967) y el de termoelasticidad de Rizzo & Shippy (1977). Este método consiste en discretizar el contorno en un número determinado de elementos que vienen definidos por una serie de nodos, en los que se supone que se satisface la ecuación integral, por ejemplo la definida en [2.29]. Otra propuesta es el método de Galerkin que no requiere que se verifique la ecuación integral en los nodos pero implica resolver integrales dobles al calcularse tanto la ecuación de potencial como la de flujo. Este último método se ha aplicado a numerosos campos como la elastostática (Parreira & Guiggiani, 1989). Una extensión de él corresponde al método de Galerkin simétrico que utiliza la solución fundamental de Green, que se ha aplicado a diversos campos como conducción de calor (Sutradhar et al, 2005), elastodinámica (Yuan et al, 2003). Pérez-Gavilán & Aliabadi, en 2001, señalan que es idóneo para combinarlo con el método de elementos finitos, aunque hace aparecer integrales hipersingulares (Ademoyero et al, 2001).

La aplicación del BEM al problema de la termoelasticidad ha sido abordada por numerosos investigadores. A Rizzo y Shippy se debe la solución de problemas termoelásticos en régimen estático en 1977; Dargush y Banerjee presentaron en 1989 una solución para problemas termoelásticos en régimen cuasiestático continuando en 1990 con el problema tridimensional y en 1991 con el problema termoplástico; Rodríguez y Sensale en 1997 resolvieron problemas termoelásticos isótropos desacoplados aproximando la temperatura, más tarde Chatterjee y Banerjee en 2007 desarrollaron una metodología para resolver problemas termoelásticos mediante una solución fundamental dependiente del tiempo e integrada paso a paso; Shiah y Tan en 1999 mediante el método de las características transformaron el término termoelástico de anisótropo a isótropo; en 1995 Tanaka y su equipo estudiaron el problema termoelástico acoplado transitorio.

Los problemas termoelástico y termoviscoelástico, utilizando la transformada de Laplace, han sido estudiados por diversos autores (El-Maghraby, 2004, El-Karamany & Ezzat, 2002).

La exactitud del BEM, como en cualquier método numérico, depende de varios factores tales como la representación de la geometría, el esquema numérico, la precisión del procesador y el tipo de discretización. Desde el comienzo de la aplicación del método muchos han sido los investigadores que han intentado predecir este error (Kita & Kamiya, 2003) y mejorarlo con técnicas de refinamiento. Tres estrategias de refinamiento son las más utilizadas: la estrategia h que subdivide algunos de los elementos, (Rencis & Mullen, 1986; Rodríguez & Power, 2001), la estrategia p (Alarcón & Reverter, 1986) que incrementa el orden de las funciones de interpolación, y la estrategia r (Ingber & Mitra, 1992) que recoloca los nodos de los elementos. Hay veces en que se combinan estas estrategias: la h - p (Rank, 1989) y la h - r (Liapis, 1994).

1.3. El método de elementos de contorno de reciprocidad dual

En el presente trabajo se utiliza el Método de Elementos de Contorno de Reciprocidad Dual, en adelante DRBEM. La idea básica de este método desarrollado por Nardini y Brebbia en 1982 es emplear la solución fundamental correspondiente a una ecuación simplificada y tratar los restantes términos así como los términos no homogéneos mediante un procedimiento que considera un desarrollo en serie con funciones de aproximación globales. Una descripción completa del método aparece en Partridge et al., 1992. Este método se utiliza siempre que haya integrales de dominio tal y como aparecen con la presencia de fuerzas de volumen (Cheng

et al., 2001) cuando se utilizan soluciones particulares (Deb, 1996) o al hacerse uso del método de integración radial (Gao, 2002 y 2003). Desde que Nardini y Brebbia introdujeron el método numerosos autores lo han implementado en diversos campos: problemas de conducción de calor (Ang, 2006; Behbahani-nia & Kowasary, 2004; Tanaka & Sing, 2000; Park, 2003; Tanaka et al., 2006; Tanaka et al, 2008), problemas de convección (Choi, 1999), problemas de difusión-convección (Sarler & Kuhn, 1998, Partridge & Sensale, 2000), problemas de fluidos (Wrobel, 2001; Choi & Balaras, 2009), problemas de potencial con fuentes distribuidas arbitrariamente (Niku & Brebbia, 1988), problemas no lineales (Tanaka et al. 2006; Tanaka et al. 2008), problemas de transmisión de calor con condiciones no locales de energía (Ang & Ooi, 2007) así como para resolver problemas que implica el operador biarmónico ∇^4 , especialmente para análisis de flexión de placas (Kamiya & Sawaki, 1988), pandeo (Ezein & Syngellakis, 1992), problema de grandes deflexiones (Wang et al., 2000), problema de vibración (Davis & Moslehy, 1994, Niku & Adey, 1995, Albuquerque et al., 2003), dinámica de fractura (Albuquerque et al., 2004, Vera-Tudela & Telles, 2005), problema elastoplástico transitorio (Owatsiriwong & Park, 2008), entre otros.

Blobner et al, en 2000, lo usaron en combinación con el método integral del dominio en el contorno, BDIM; Bialecki et al, en 2002 lo utilizaron sin matriz inversa; Medeiros et al (2004) en combinación con el método de soluciones fundamentales. Pérez-Gavilán & Aliabadi en 2000 lo usaron con el método de Galerkin para resolver el problema elastodinámico y en 2000 con el método simétrico de Galerkin para resolver el problema elastostático. Chen & Tanaka, 2002, aplicaron el DRBEM con soluciones fundamentales no singulares llegando al *Boundary Knot method* y Chen et al (2001) desarrollaron un método derivado del DRBEM, el *Método de Elementos de Contorno Generalizado* para resolver problemas no homogéneos.

En cuanto a la aportación del DRBEM a la termoelasticidad, en 2002, Park y Banerjee trataron el problema termoelástico desacoplado cuasiestático isótropo y en 2006 el problema poroelástico acoplado; Sladek y Sladek presentaron la formulación para resolver la termoelasticidad acoplada en 1985 pero no lo desarrollaron numéricamente; en 2007, Baranoglu y Mengi utilizaron el DRBEM para resolver problemas de termoviscoelasticidad acoplada en materiales isótropos.

1.4. Objeto y Objetivo de la tesis

El objetivo de esta tesis se ha enfocado en el estudio de la bondad del DRBEM para la resolución de problemas bidimensionales de termoelasticidad desacoplada en materiales anisótropos.

Cuando se utiliza un método numérico para la resolución de un problema físico es conveniente estudiar el alcance del mismo. Este trabajo ha pretendido estudiar cómo influyen los diferentes factores en la aplicación del método, desde la discretización, tanto en el espacio como en el tiempo, el tipo de función de aproximación o los parámetros que definen la discretización de la aceleración en el tiempo.

No ha sido el tipo de elemento un objeto de estudio, pues en todo momento se han usado elementos cuadráticos, pudiendo ser éstos continuos o discontinuos según los casos.

1.5. Organización del documento

Este documento se ha organizado en cinco capítulos más la bibliografía. A continuación se hace una descripción muy somera de los capítulos que siguen al presente.

El capítulo dos está enfocado en el DRBEM aplicado al problema de conducción de calor, estudiando la discretización usada tanto en el espacio como en el tiempo. Se comienza con un estudio teórico y se termina con aplicaciones numéricas. Primero se trata el problema isótropo seguido del ortótropo y anisótropo, terminando con aplicaciones a multicuerpos. Se analiza la influencia de los distintos factores en el método, tales como los diferentes tipos de discretización.

El capítulo tres se centra en el estudio del DRBEM aplicado al problema de dinámica y, de forma análoga a como se hizo en el capítulo dos, se centra en la discretización del espacio y del tiempo.

El capítulo cuatro se dedica al estudio de la termoelasticidad, primero desde un punto de vista teórico, estudiándose las integrales hipersingulares utilizadas y posteriormente se muestran los ejemplos que se han ejecutado.

Capítulo 2: El problema térmico

2.1. Generalidades

Este capítulo se centra en el estudio del problema de conducción plana anisótropa y transitoria.

La primera parte del capítulo se dedica a un estudio teórico del problema, comenzando con un estudio analítico de la ecuación y centrándose en la aplicación del DRBEM.

En la segunda parte del capítulo se analiza la aplicabilidad del método y los factores que lo determinan mediante la resolución de una batería de ejemplos.

2.2. Formulación del Problema

El problema de conducción plana anisótropa transitoria en un dominio como el que se representa en la figura 2.1 viene definido por la ecuación:

$$K_{11} \frac{\partial^2 T}{\partial x_1^2} + 2K_{12} \frac{\partial^2 T}{\partial x_1 \partial x_2} + K_{22} \frac{\partial^2 T}{\partial x_2^2} = \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} \quad [2.1.a]$$

En la ecuación anterior, K_{ij} son las conductividades del material, ρ es la densidad, c_p la conductividad térmica, x_1 y x_2 las coordenadas espaciales, t el tiempo y T es la temperatura. Las condiciones de contorno, según se muestra en la figura 2.1, pueden ser:

$$T = \bar{T} \quad \text{en } \partial D_1 \quad [2.1.b]$$

$$\left(K_{11} \frac{\partial T}{\partial x_1} + K_{12} \frac{\partial T}{\partial x_2} \right) n_1 + \left(K_{12} \frac{\partial T}{\partial x_1} + K_{22} \frac{\partial T}{\partial x_2} \right) n_2 = q = \bar{q} \quad \text{en } \partial D_2 \quad [2.1.c]$$

$$q = h(T - T_\infty) \quad \text{en } \partial D_3 \quad [2.1.d]$$

De las condiciones de contorno descritas en [2.1], las condiciones definidas en [2.1.b] son de temperatura impuesta, las que se describen en [2.1.c] corresponden a calor impuesto y las definidas en [2.1.d] son condiciones de convección.

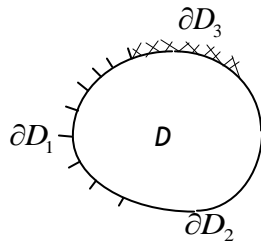


Figura 2.1: Condiciones de contorno que pueden aparecer en un sólido genérico

2.3. El Método de Reciprocidad Dual

Para llegar a desarrollar el DRBEM aplicado al problema descrito en [2.1] se aplica la teoría de los residuos a la expresión [2.1.a].

$$\begin{aligned} -T_i - \int_{\partial D} T \left(\left(K_{11} \frac{\partial T^*}{\partial x_1} + K_{12} \frac{\partial T^*}{\partial x_2} \right) n_1 + \left(K_{12} \frac{\partial T^*}{\partial x_1} + K_{22} \frac{\partial T^*}{\partial x_2} \right) n_2 \right) d\Gamma + \\ + \int_{\partial D} T^* \left(\left(K_{11} \frac{\partial T}{\partial x_1} + K_{12} \frac{\partial T}{\partial x_2} \right) n_1 + \left(K_{12} \frac{\partial T}{\partial x_1} + K_{22} \frac{\partial T}{\partial x_2} \right) n_2 \right) d\Gamma = \rho c_p \int_D T^* \frac{\partial T}{\partial t} d\Omega \end{aligned} \quad [2.2]$$

En la expresión anterior T^* es la solución fundamental del problema de conducción de calor en un medio anisótropo; o sea es una función que verifica la ecuación:

$$K_{11} \frac{\partial^2 T^*}{\partial x_1^2} + 2K_{12} \frac{\partial^2 T^*}{\partial x_1 \partial x_2} + K_{22} \frac{\partial^2 T^*}{\partial x_2^2} + \delta_i = 0 \quad [2.3]$$

donde δ_i es la función δ de Dirac, que toma el valor de la unidad para $r = r_i$ y es nulo en otro caso.

En cuanto al término de la derecha de la igualdad [2.2], éste se resuelve descomponiéndolo en una serie de términos con variables separadas:

$$\dot{T}(x_1, x_2, t) = \sum_{k=1}^{NN} \alpha_k(t) \cdot f_k(x_1, x_2) \quad [2.4]$$

Donde $NN = N$ (número de nodos en el contorno) + NP (número de polos; o sea puntos internos que se usan en la integración). Se escogen funciones f_k de forma que se puedan obtener fácilmente funciones ψ_k , tal que:

$$K_{11} \frac{\partial^2 \psi_k}{\partial x_1^2} + 2K_{12} \frac{\partial^2 \psi_k}{\partial x_1 \partial x_2} + K_{22} \frac{\partial^2 \psi_k}{\partial x_2^2} = f_k \quad [2.5]$$

Introduciendo [2.5] en [2.4] y ésta, a su vez, en [2.2] se obtiene:

$$\begin{aligned} & -T_i - \int_{\partial D} T \left(\left(K_{11} \frac{\partial T^*}{\partial x_1} + K_{12} \frac{\partial T^*}{\partial x_2} \right) n_1 + \left(K_{12} \frac{\partial T^*}{\partial x_1} + K_{22} \frac{\partial T^*}{\partial x_2} \right) n_2 \right) d\Gamma + \\ & + \int_{\partial D} T^* \left(\left(K_{11} \frac{\partial T}{\partial x_1} + K_{12} \frac{\partial T}{\partial x_2} \right) n_1 + \left(K_{12} \frac{\partial T}{\partial x_1} + K_{22} \frac{\partial T}{\partial x_2} \right) n_2 \right) d\Gamma = \quad [2.6] \\ & = \rho c_p \sum_{k=1}^{k=NN} \alpha_k(t) \int_D \left(K_{11} \frac{\partial^2 \psi_k}{\partial x_1^2} + 2K_{12} \frac{\partial^2 \psi_k}{\partial x_1 \partial x_2} + K_{22} \frac{\partial^2 \psi_k}{\partial x_2^2} \right) T^* d\Omega \end{aligned}$$

Si se integra dos veces el término de la derecha, se obtiene:

$$\begin{aligned} & \int_D \left(K_{11} \frac{\partial^2 \psi_k}{\partial x_1^2} + 2K_{12} \frac{\partial^2 \psi_k}{\partial x_1 \partial x_2} + K_{22} \frac{\partial^2 \psi_k}{\partial x_2^2} \right) T^* d\Omega = \\ & = -\psi_{ki} - \int_{\partial D} \psi_k \left(\left(K_{11} \frac{\partial T^*}{\partial x_1} + K_{12} \frac{\partial T^*}{\partial x_2} \right) n_1 + \left(K_{12} \frac{\partial T^*}{\partial x_1} + K_{22} \frac{\partial T^*}{\partial x_2} \right) n_2 \right) d\Gamma + \\ & + \int_{\partial D} T^* \left(\left(K_{11} \frac{\partial \psi_k}{\partial x_1} + K_{12} \frac{\partial \psi_k}{\partial x_2} \right) n_1 + \left(K_{12} \frac{\partial \psi_k}{\partial x_1} + K_{22} \frac{\partial \psi_k}{\partial x_2} \right) n_2 \right) d\Gamma \quad [2.7] \end{aligned}$$

Incluyendo [2.7] en [2.6] y, poniendo la expresión resultante en forma matricial se llega a:

$$-\mathbf{PT} - \hat{\mathbf{H}}\mathbf{T} + \mathbf{Gq} = \rho c_p \left(-\mathbf{P}\Psi - \hat{\mathbf{H}}\Psi + \bar{\mathbf{G}}\eta \right) \alpha \quad [2.8]$$

En la expresión anterior \mathbf{P} es una matriz cuyos términos verifican:

$$P_{ij} = c_i \delta_{ij} \quad [2.9]$$

donde c_i es un parámetro que depende de la posición geométrica del punto de cálculo, tomando en los puntos internos el valor de 2π , y en los puntos del

contorno el valor del ángulo que forma las tangentes del mismo; si el contorno es suave toma el valor de π .

Denotando:

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{H}} + \mathbf{P} &= \mathbf{H} \\ \hat{\bar{\mathbf{H}}} + \mathbf{P} &= \bar{\mathbf{H}}\end{aligned}$$

e introduciendo estas expresiones en [2.8], se llega a:

$$\mathbf{HT} - \mathbf{Gq} = \rho c_p (\bar{\mathbf{H}}\Psi - \bar{\mathbf{G}}\eta)\alpha \quad [2.10]$$

donde $\eta = \frac{\partial \Psi}{\partial n}$.

Por otra parte teniendo en cuenta [2.4] y reescribiendo esta expresión en forma matricial, se obtiene:

$$\dot{\mathbf{T}} = \mathbf{F}\alpha \Rightarrow \alpha = \mathbf{F}^{-1} \dot{\mathbf{T}}$$

Introduciendo ésta en la expresión anterior se alcanza:

$$\mathbf{HT} - \mathbf{Gq} = \rho c_p (\bar{\mathbf{H}}\Psi - \bar{\mathbf{G}}\eta)\mathbf{F}^{-1} \dot{\mathbf{T}} \quad [2.11]$$

Llamando:

$$\rho c_p (\bar{\mathbf{H}}\Psi - \bar{\mathbf{G}}\eta)\mathbf{F}^{-1} = -\mathbf{C} \quad [2.12]$$

y teniendo en cuenta [2.12], la expresión [2.11] queda:

$$(\mathbf{H} + \mathbf{C})\mathbf{T} = \mathbf{Gq} \quad [2.13]$$

La expresión [2.13] se reduce a un sistema de ecuaciones lineales. Para llegar a este sistema hay que hacer una discretización en el espacio y en el tiempo. La discretización en el espacio se tratará detalladamente en el apartado 2.3.

La discretización en el tiempo se realiza, en este trabajo, linealmente, así si m y $m+1$ son dos instantes continuos en el tiempo, se tendrá que las variables \mathbf{T} y \mathbf{q} en el intervalo $[m, m + 1]$ se pueden aproximar como:

$$\mathbf{T} = (1 - \theta_u) \mathbf{T}^m + \theta_u \mathbf{T}^{m+1} \quad [2.14.a]$$

$$\mathbf{q} = (1 - \theta_u) \mathbf{q}^m + \theta_u \mathbf{q}^{m+1} \quad [2.14.b]$$

En las expresiones anteriores θ_u y θ_q son números racionales que toman valores entre 0 y 1 y que no tienen por qué ser iguales. En cuanto a la derivada de la temperatura respecto al tiempo en este intervalo de tiempo, entre m y $m+1$ es, teniendo en cuenta la discretización lineal:

$$\dot{\mathbf{T}} = \frac{\mathbf{T}^{m+1} - \mathbf{T}^m}{\Delta t} \quad [2.15]$$

Teniendo en cuenta esta discretización en el tiempo, la expresión [2.13] toma la forma:

$$\left(\frac{\mathbf{C}}{\Delta t} + \theta_u \mathbf{H} \right) \mathbf{T}^{m+1} - \theta_q \mathbf{G} \mathbf{q}^{m+1} = \left(\frac{\mathbf{C}}{\Delta t} + (1 - \theta_u) \mathbf{H} \right) \mathbf{T}^m - (1 - \theta_q) \mathbf{G} \mathbf{q}^m \quad [2.16]$$

2.4. Discretización. Elementos cuadráticos.

Para definir un modelo discretizado se pueden usar elementos constantes, lineales o cuadráticos, o incluso discretizaciones más complicadas como elementos de Hermite (Miranda-Valenzuela et al, 2001 y 2003). En este trabajo se realiza una variación cuadrática de T y de q en cada elemento del contorno, (Benítez & Alarcón, 1980). En este tipo de discretización cada elemento i viene determinado por tres nodos: 1, 2 y 3, figura 2.2, que van a ser los puntos de integración. Las propiedades de cualquier punto del elemento se pueden aproximar por las propiedades de sus tres nodos. Se realiza, también, una discretización cuadrática de la geometría, o sea de las coordenadas x_1 y x_2 . Sin embargo las funciones de forma que se van a usar para las coordenadas no tienen por qué coincidir con la de las variables implicadas T (temperatura) y q (flujo de calor).

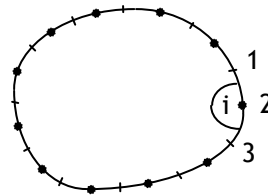


Figura 2.2: Discretización con elementos cuadráticos de un sólido genérico.

Para discretizar la coordenada x_k de un nodo perteneciente al elemento i , definido por los nodos 1, 2, y 3, se pondrá ésta en función del valor de las coordenadas de estos nodos, de la siguiente manera:

$$x_k(\xi) = [\varphi_1 \quad \varphi_2 \quad \varphi_3] \begin{bmatrix} x_k^1 \\ x_k^2 \\ x_k^3 \end{bmatrix} \quad [2.17]$$

donde las funciones de forma φ_1 , φ_2 y φ_3 son:

$$\varphi_1 = \frac{(\xi-1)\xi}{2}; \quad \varphi_2 = (1+\xi)(1-\xi); \quad \varphi_3 = \frac{(\xi+1)\xi}{2} \quad [2.18]$$

La variable natural ξ puede tomar cualquier valor entre -1 y 1, correspondiendo el valor de -1 para el nodo 1, el valor de 0 para el nodo 2 y el valor de 1 para el nodo 3, por tanto los valores de x_k^1 , x_k^2 y x_k^3 corresponden a la coordenada k de los nodos 1, 2 y 3, respectivamente.

Bajo la misma hipótesis, se puede discretizar la temperatura y el flujo de calor en cualquier punto del elemento (ξ):

$$T(\xi) = [\varphi'_1 \quad \varphi'_2 \quad \varphi'_3] \begin{bmatrix} T_a \\ T_b \\ T_c \end{bmatrix}; \quad q(\xi) = [\varphi'_1 \quad \varphi'_2 \quad \varphi'_3] \begin{bmatrix} q_a \\ q_b \\ q_c \end{bmatrix} \quad [2.19]$$

En las expresiones anteriores los subíndices a , b y c no corresponden exactamente con los nodos 1, 2, 3; esto es porque se han usado elementos discontinuos. En éstos, figura 2.3, en vez de referir el valor de las variables a sus valores en los extremos se refieren a puntos muy cercanos, coincidiendo el nodo 2 con el b . Esto se hace así porque el flujo de calor no tiene por qué ser el mismo en un nodo para dos elementos continuos como sucede en las esquinas o en problemas con multicuerpos (Atalay et al, 2004)

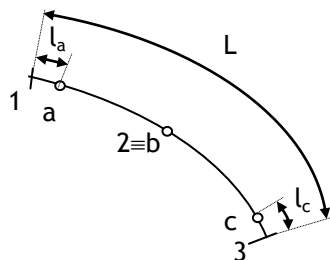


Figura 2.3: Elemento cuadrático discontinuo

Para obtener las funciones de forma ϕ'_1 , ϕ'_2 y ϕ'_3 se expresan los potenciales y los flujos en estos puntos a partir de los potenciales y flujos de los puntos 1, 2 y 3:

$$\begin{pmatrix} T_a \\ T_b \\ T_c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi_1(\xi_a) & \varphi_2(\xi_a) & \varphi_3(\xi_a) \\ \varphi_1(\xi_b) & \varphi_2(\xi_b) & \varphi_3(\xi_b) \\ \varphi_1(\xi_c) & \varphi_2(\xi_c) & \varphi_3(\xi_c) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{pmatrix} \quad [2.20.a]$$

$$\begin{pmatrix} q_a \\ q_b \\ q_c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi_1(\xi_a) & \varphi_2(\xi_a) & \varphi_3(\xi_a) \\ \varphi_1(\xi_b) & \varphi_2(\xi_b) & \varphi_3(\xi_b) \\ \varphi_1(\xi_c) & \varphi_2(\xi_c) & \varphi_3(\xi_c) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix} \quad [2.20.b]$$

Las expresiones anteriores puestas en forma matricial son:

$$\begin{pmatrix} T_a \\ T_b \\ T_c \end{pmatrix} = [\mathbf{Q}] \cdot \begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{pmatrix} \quad [2.21.a]$$

$$\begin{pmatrix} q_a \\ q_b \\ q_c \end{pmatrix} = [\mathbf{Q}] \cdot \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix} \quad [2.21.b]$$

En las expresiones anteriores ξ_a , ξ_b y ξ_c son, respectivamente:

$$\xi_a = -1 + p_a; \quad \xi_b = 0; \quad \xi_c = 1 - p_c \quad [2.22]$$

Siendo p_a y p_c parámetros que verifican:

$$p_a = \frac{l_a}{2L}; \quad p_c = \frac{l_c}{2L} \quad [2.23]$$

En el caso particular de que l_a y l_b sean cantidades nulas el elemento es continuo.

Para obtener las funciones de forma se determina la temperatura y el flujo de calor de un punto cualquiera del elemento en función de los valores en a , b y c , que a su vez se pueden poner en función de los valores en 1, 2 y 3 por [2.21] y se igualan a la temperatura y al flujo de calor puestos en función de los valores de 1, 2 y 3.

$$\begin{aligned}
 T(\xi) &= (\varphi'_1(\xi) \quad \varphi'_2(\xi) \quad \varphi'_3(\xi)) \begin{pmatrix} T_a \\ T_b \\ T_c \end{pmatrix} = (\varphi'_1(\xi) \quad \varphi'_2(\xi) \quad \varphi'_3(\xi)) [\mathbf{Q}] \begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{pmatrix} = \\
 &= (\phi_1(\xi) \quad \phi_2(\xi) \quad \phi_3(\xi)) \begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{pmatrix}
 \end{aligned}
 \tag{2.24.a}$$

$$\begin{aligned}
 q(\xi) &= (\phi'_1(\xi) \quad \phi'_2(\xi) \quad \phi'_3(\xi)) \begin{pmatrix} q_a \\ q_b \\ q_c \end{pmatrix} = (\phi'_1(\xi) \quad \phi'_2(\xi) \quad \phi'_3(\xi)) [\mathbf{Q}] \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix} = \\
 &= (\phi_1(\xi) \quad \phi_2(\xi) \quad \phi_3(\xi)) \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix}
 \end{aligned}
 \tag{2.24.b}$$

Las funciones de forma ϕ'_1 , ϕ'_2 y ϕ'_3 que aparecen en [2.24] se pueden obtener a partir de las funciones de forma ϕ_1 , ϕ_2 y ϕ_3 a partir de la matriz de paso $[\mathbf{Q}]$, quedando las expresiones que aparecen en [2.25]:

$$\begin{aligned}
 \phi'_1 &= \frac{\xi(\xi - 1 + p_c)}{(-1 + p_a)(-2 + p_a + p_c)} \\
 \phi'_2 &= \frac{(-1 + p_a - \xi)(-1 + p_c + \xi)}{(-1 + p_a)(-1 + p_c)} \\
 \phi'_3 &= \frac{\xi(1 - p_a + \xi)}{(-1 + p_c)(-2 + p_a + p_c)}
 \end{aligned}
 \tag{2.25}$$

2.5. Elementos de las Matrices H y G

Para obtener los elementos de las matrices \mathbf{H} y \mathbf{G} es necesario conocer la solución fundamental, solución de la ecuación [2.3], que resulta:

$$T^* = \frac{1}{2\pi\sqrt{|K_{ij}|}} \ln\left(\frac{1}{r}\right)
 \tag{2.26}$$

En la expresión anterior r es lo que se podría denominar radio anisótropo equivalente y toma el valor:

$$r = \left[S_{11} (x_1 - x_1^i)^2 + 2S_{12} (x_1 - x_1^i)(x_2 - x_2^i) + S_{22} (x_2 - x_2^i)^2 \right]^{1/2} \quad [2.27.a]$$

Siendo S_{ij} las componentes de la matriz inversa a la de conductividad:

$$\mathbf{S} = \mathbf{K}^{-1} = \frac{1}{|K_{ij}|} \begin{pmatrix} K_{22} & -K_{12} \\ -K_{12} & K_{11} \end{pmatrix} \quad [2.27.b]$$

donde $|K_{ij}|$ es el determinante de la matriz de conductividad:

$$|K_{ij}| = K_{11}K_{22} - K_{12}^2 \quad [2.27.c]$$

Este determinante ha de ser positivo, pues ha de cumplir la condición elíptica (Clements & Rogers, 1983)

Hay autores que reducen este problema a la resolución de una laplaciana aplicando el método de las características (Shiah & Tan, 1997) con lo que necesitan la solución fundamental del problema isótropo.

En cuanto al flujo de la solución fundamental:

$$\begin{aligned} q^* &= \left(K_{11} \frac{\partial T^*}{\partial x_1} + K_{12} \frac{\partial T^*}{\partial x_2} \right) n_1 + \left(K_{12} \frac{\partial T^*}{\partial x_1} + K_{22} \frac{\partial T^*}{\partial x_2} \right) n_2 = \\ &= -\frac{1}{r^2 \sqrt{|K_{ij}|}} \left[(x_1 - x_1^i) n_1 + (x_2 - x_2^i) n_2 \right] \end{aligned} \quad [2.28]$$

Para determinar los elementos de las matrices \mathbf{G} y \mathbf{H} se debe tener en cuenta que la expresión [2.10] se obtiene de [2.6], por tanto teniendo en cuenta la discretización del contorno en NE elementos, la expresión [2.6] se puede poner como:

$$\begin{aligned} -c^i T_i - \sum_{j=1}^{j=NE} \int_{\partial D_j} T \left(\left(K_{11} \frac{\partial T^*}{\partial x_1} + K_{12} \frac{\partial T^*}{\partial x_2} \right) n_1 + \left(K_{12} \frac{\partial T^*}{\partial x_1} + K_{22} \frac{\partial T^*}{\partial x_2} \right) n_2 \right) d\Gamma + \\ + \sum_{j=1}^{j=NE} \int_{\partial D_j} T^* \left(\left(K_{11} \frac{\partial T}{\partial x_1} + K_{12} \frac{\partial T}{\partial x_2} \right) n_1 + \left(K_{12} \frac{\partial T}{\partial x_1} + K_{22} \frac{\partial T}{\partial x_2} \right) n_2 \right) d\Gamma = [2.29] \\ = \frac{1}{\rho c_p} \sum_{j=1}^{j=NE} \sum_{k=1}^{k=NN} \alpha_k(t) \int_D \left(K_{11} \frac{\partial^2 \psi_k}{\partial x_1^2} + 2K_{12} \frac{\partial^2 \psi_k}{\partial x_1 \partial x_2} + K_{22} \frac{\partial^2 \psi_k}{\partial x_2^2} \right) T^* d\Omega \end{aligned}$$

En la expresión anterior se le ha puesto al término de T_i el coeficiente c^i porque puede tratarse el punto i de un punto del contorno del sólido. Como cada elemento viene definido por tres nodos: los dos extremos y el central, por cada elemento habrá tres términos para las matrices \mathbf{H} y \mathbf{G} . Estos tres

términos se obtienen al sustituir [2.25] en [2.19], así para el elemento j-simo:

$$\int_{\partial D_j} T q^* d\Gamma = \int_{\partial D_j} [\varphi'_1 \quad \varphi'_2 \quad \varphi'_3] q^* \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{bmatrix} d\Gamma = \begin{bmatrix} h_1^{ij} & h_2^{ij} & h_3^{ij} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{bmatrix} \quad [2.30]$$

$$\int_{\partial D_j} q T^* d\Gamma = \int_{\partial D_j} [\varphi'_1 \quad \varphi'_2 \quad \varphi'_3] u^* \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} d\Gamma = \begin{bmatrix} g_1^{ij} & g_2^{ij} & g_3^{ij} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} \quad [2.31]$$

Tanto para los términos de la matriz **H** como para los de la **G** hay que distinguir si el punto *i* pertenece o no al elemento *j* pues en el primer caso aparecen integrales singulares. Para resolver esta singularidad se utiliza un dominio que excluye un círculo de radio infinitesimal, teniendo solución variacional el problema, aunque no exista solución clásica (Chun, 1992).

– **Matriz H, nodo no perteneciente al propio elemento**

En este caso el término que hay que evaluar es:

$$h_k^{ij} = \int_{\partial D_j} \varphi'_k q^* d\Gamma \quad [2.32]$$

La función φ'_k de la integral anterior viene dada por una de las expresiones de [2.25] y, al igual que esta función, el resto del integrando se pondrá en función de la variable natural ξ . Así el diferencial de longitud $d\Gamma$ se puede poner como:

$$d\Gamma = \sqrt{dx_1^2 + dx_2^2} = \sqrt{\left(\frac{\partial x_1}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_2}{\partial \xi}\right)^2} d\xi \quad [2.33]$$

Teniendo en cuenta que las coordenadas se definieron en función de la variable natural ξ según las expresiones definidas en [2.17] con las funciones de forma dadas en [2.18], incluyendo [2.18] en [2.17] y desarrollando se tiene:

$$x_i = \frac{A_i}{2} \xi^2 + B_i \xi + x_i^2 \quad [2.34]$$

donde los coeficientes A_i y B_i toman los valores:

$$\begin{aligned} A_i &= x_i^1 - 2x_i^2 + x_i^3 \\ B_i &= \frac{1}{2}(x_i^3 - x_i^1) \end{aligned} \quad [2.35]$$

Teniendo en cuenta el valor de x_i obtenido en [2.34], la expresión [2.33] se puede poner como:

$$d\Gamma = \sqrt{(A_1\xi + B_1)^2 + (A_2\xi + B_2)^2} d\xi \quad [2.36]$$

A continuación se va a desarrollar la expresión del flujo de la solución fundamental, ecuación [2.28]. Lo primero que se van a obtener son las componentes del vector normal al elemento en el punto de cálculo, n_1 y n_2 . Para ello se partirá del valor de la pendiente del vector tangente que, según el concepto de derivada, es:

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{dx_2/d\xi}{dx_1/d\xi} = \frac{A_2\xi + B_2}{A_1\xi + B_1} \quad [2.37]$$

Con esto ya se puede identificar las componentes de la normal:

$$\begin{aligned} n_1 &= \text{sen}\theta = \frac{\tan^2 \theta}{\sqrt{1 + \tan^2 \theta}} = \frac{(dx_2/dx_1)^2}{\sqrt{1 + (dx_2/dx_1)^2}} = \frac{A_2\xi + B_2}{\sqrt{(A_1\xi + B_1)^2 + (A_2\xi + B_2)^2}} \\ n_2 &= -\cos\theta = -\frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 \theta}} = -\frac{1}{\sqrt{1 + (dx_2/dx_1)^2}} = -\frac{A_1\xi + B_1}{\sqrt{(A_1\xi + B_1)^2 + (A_2\xi + B_2)^2}} \end{aligned} \quad [2.38]$$

Teniendo en cuenta los valores de [2.38] y [2.36] en [2.28], el valor de los términos de la matriz H, [2.32], cuando el nodo no se encuentra en el elemento es:

$$2\pi h_k^{ij} = -\int_{-1}^1 \frac{\varphi'_k(\xi) (x_1 - x_1^i)(A_2\xi + B_2) - (x_2 - x_2^i)(A_1\xi + B_1)}{\sqrt{|K_{ij}|} r^2} d\xi \quad [2.39]$$

– Matriz G, nodo no perteneciente al propio elemento

Para los términos de la matriz G en los que el nodo de cálculo no pertenece al elemento sobre el que se esté integrando se parte de la expresión:

$$g_k^{ij} = \int_{\partial D_j} \varphi'_k T^* d\Gamma \quad [2.40]$$

El valor del diferencial de longitud $d\Gamma$, de la expresión anterior, se obtuvo en [2.36], la solución fundamental viene dada por [2.26], y el valor de r en función de la coordenada natural ξ se obtiene de incluir [2.34] en [2.27.a], con lo que el término de \mathbf{G} es:

$$2\pi g_k^{ij} = - \int_{\partial D_j} \frac{\phi'_k}{\sqrt{|K_{ij}|}} \ln\left(\frac{1}{r}\right) \sqrt{(A_2\xi + B_2)^2 + (A_1\xi + B_1)^2} d\xi \quad [2.41]$$

– **Matriz H, nodo perteneciente al propio elemento**

En este caso el punto de colocación; o sea el nodo de cálculo pertenece al elemento, luego se le puede asociar un valor relativo ξ' de la variable natural con: $-1 \leq \xi' \leq 1$. La expresión [2.32] se puede poner como:

$$2\pi h_k^{ij} = - \int_{\partial D_j} \phi'_k \frac{1}{\sqrt{|K_{ij}|} r(\xi)} \left[\frac{x_1(\xi) - x_1(\xi')}{r(\xi)} n_1 + \frac{x_2(\xi) - x_2(\xi')}{r(\xi)} n_2 \right] d\Gamma \quad [2.42]$$

Si en la integral anterior se tiene en cuenta la expresión de $d\Gamma$ de [2.36], el valor de $r(\xi)$ dado en [2.27.a] y los de n_1 y n_2 de [2.38], se transforma en:

$$2\pi h_k^{ij} = - \int_{-1}^1 \frac{\sqrt{|K_{ij}|} \phi'_k (x_1(\xi) - x_1(\xi'))(A_2\xi + B_2) - (x_2(\xi) - x_2(\xi'))(A_1\xi + B_1)}{\left[K_{22}(x_1(\xi) - x_1(\xi'))^2 - 2K_{12}(x_1(\xi) - x_1(\xi'))(x_2(\xi) - x_2(\xi')) + K_{11}(x_2(\xi) - x_2(\xi'))^2 \right]} d\xi \quad [2.43]$$

Si en la expresión [2.43] se tiene en cuenta [2.34] y se divide numerador y denominador entre $(\xi - \xi')^2$:

$$2\pi h_k^{ij} = - \int_{-1}^1 \frac{\phi'_k \sqrt{|K_{ij}|} (A_1 B_2 - A_2 B_1)}{\left[K_{22} \left(\frac{A_1}{2} (\xi + \xi') + B_1 \right)^2 - 2K_{12} \left(\frac{A_1}{2} (\xi + \xi') + B_1 \right) \left(\frac{A_2}{2} (\xi + \xi') + B_2 \right) + K_{11} \left(\frac{A_2}{2} (\xi + \xi') + B_2 \right)^2 \right]} d\xi \quad [2.44]$$

En el caso de los términos singulares de la matriz \mathbf{H} , la singularidad se ha resuelto dividiendo numerador y denominador entre $(\xi - \xi')^2$, pues se trata de una singularidad evitable que se produce cuando $\xi = \xi'$; pero, como se verá más adelante la resolución de las singularidades de la matriz \mathbf{G} resulta más compleja.

Para el término h_k^{ji} , cuando coinciden los puntos de colocación y de integración, es importante calcular el término c_i de la expresión [2.9]. Este término corresponde a la integral de la expresión [2.45], donde Γ_ε es el arco de circunferencia de radio ε y centro el punto de coordenadas (x'_1, x'_2) representado en la figura 2.4, y resulta:

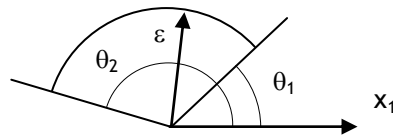


Figura 2.4: Bola en torno a la singularidad para obtener el término c_i

$$\begin{aligned} c_i &= \int_{\Gamma_\varepsilon} \left(\left(K_{11} \frac{\partial u^*}{\partial x_1} + K_{12} \frac{\partial u^*}{\partial x_2} \right) n_1 + \left(K_{12} \frac{\partial u^*}{\partial x_1} + K_{22} \frac{\partial u^*}{\partial x_2} \right) n_2 \right) d\Gamma_\varepsilon = \\ &= -\frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_\varepsilon} \frac{1}{r^2 \sqrt{|K_{ij}|}} \left[(x_1 - x'_1) n_1 + (x_2 - x'_2) n_2 \right] d\Gamma_\varepsilon \end{aligned} \quad [2.45]$$

Como n_1 y n_2 son las componentes de la normal de la línea Γ_ε , o sea, coinciden con la dirección del radio y $d\Gamma_\varepsilon$ no es otra cosa que la diferencial de arco, la integral anterior queda:

$$2\pi c_i = -\frac{1}{\sqrt{|K_{ij}|}} \int_0^{\varepsilon^2} \frac{\varepsilon^2 d\theta}{r^2} \quad [2.46]$$

donde se ha tenido en cuenta que:

$$n_1 = \frac{x_1 - x'_1}{\varepsilon}; n_2 = \frac{x_2 - x'_2}{\varepsilon}; \varepsilon^2 = (x_1 - x'_1)^2 + (x_2 - x'_2)^2; d\Gamma_\varepsilon = \varepsilon d\theta$$

En [2.46] r es el radio anisótropo equivalente definido en [2.27.a], si se expresa éste en coordenadas polares, la expresión [2.46] se transforma en:

$$2\pi c_i = -\sqrt{|K_{ij}|} \int_{\theta} \frac{d\theta}{K_{22} \cos^2 \theta - 2K_{12} \sin \theta \cos \theta + K_{11} \sin^2 \theta}$$

Buscando una primitiva conocida:

$$2\pi c_i = -\frac{K_{11}}{\sqrt{|K_{ij}|}} \int_{\theta} \frac{(1 + \tan^2 \theta)}{\left(\frac{K_{11} \tan \theta - K_{12}}{\sqrt{|K_{ij}|}} \right)^2 + 1} d\theta$$

se obtiene como resultado:

$$2\pi c_i = -\arctan \left(\frac{K_{11} \tan \theta - K_{12}}{\sqrt{|K_{ij}|}} \right)_{\theta_1}^{\theta_2} \quad [2.47]$$

Para la demostración se parte del coseno del ángulo que forman las tangentes al contorno a ambos lados del punto de cálculo. Así, si θ es el ángulo que forman ambas tangentes, y θ_1 y θ_2 el ángulo que forman éstas con la horizontal:

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \\ &= \frac{(K_{11} \operatorname{sen} \theta_1 - K_{12} \cos \theta_1)(K_{11} \operatorname{sen} \theta_2 - K_{12} \cos \theta_2) + (K_{11} K_{22} - K_{12}^2) \cos \theta_1 \cos \theta_2}{\sqrt{(K_{11} \operatorname{sen} \theta_1 - K_{12} \cos \theta_1)^2 + (K_{11} K_{22} - K_{12}^2) \cos^2 \theta_1} \sqrt{(K_{11} \operatorname{sen} \theta_2 - K_{12} \cos \theta_2)^2 + (K_{11} K_{22} - K_{12}^2) \cos^2 \theta_2}} = \\ &= \frac{K_{11} \operatorname{sen} \theta_1 \operatorname{sen} \theta_2 + K_{22} \cos \theta_1 \cos \theta_2 - K_{12} (\cos \theta_1 \operatorname{sen} \theta_2 + \operatorname{sen} \theta_1 \cos \theta_2)}{\sqrt{K_{11} \operatorname{sen}^2 \theta_1 + K_{22} \cos^2 \theta_1 - 2K_{12} \cos \theta_1 \operatorname{sen} \theta_1} \sqrt{K_{11} \operatorname{sen}^2 \theta_2 + K_{22} \cos^2 \theta_2 - 2K_{12} \cos \theta_2 \operatorname{sen} \theta_2}} \end{aligned} \quad [2.48]$$

Si el contorno es suave $\theta_2 - \theta_1 = \pi$ y se cumple que $\cos \theta_2 = -\cos \theta_1$ y $\operatorname{sen} \theta_2 = -\operatorname{sen} \theta_1$. Sustituyendo en [2.48] estos valores de $\cos \theta_2$ y $\operatorname{sen} \theta_2$ se obtiene:

$$\cos \theta = \frac{-K_{11} \operatorname{sen}^2 \theta_1 - K_{22} \cos^2 \theta_1 + 2K_{12} \operatorname{sen} \theta_1 \cos \theta_1}{K_{11} \operatorname{sen}^2 \theta_1 + K_{22} \cos^2 \theta_1 - 2K_{12} \operatorname{sen} \theta_1 \cos \theta_1} = -1$$

Por tanto en este caso:

$$2\pi c_i = -\arctan \left(\frac{K_{11} \tan \theta - K_{12}}{\sqrt{|K_{ij}|}} \right)_{\theta_1}^{\theta_2} \quad [2.49]$$

El resultado de la expresión anterior para contornos suaves coincide con el de problemas de potencial isótropos.

Si la expresión [2.48] se pone en función de las componentes de las normales a los contornos a ambos lados del nodo de cálculo y teniendo en cuenta que las componentes de estas normales son:

$$n_1 = \text{sen}\theta_1; \quad n_2 = -\text{cos}\theta_1; \quad n_1' = \text{sen}\theta_2; \quad n_2' = -\text{cos}\theta_2$$

La expresión final para c_i será:

$$c_i = \arccos \left(\frac{K_{11}n_1n_1' + K_{22}n_2n_2' + K_{12}(n_1n_2' + n_1'n_2)}{\sqrt{K_{11}n_1^2 + K_{22}n_2^2 + 2K_{12}n_1n_2} \sqrt{K_{11}n_1'^2 + K_{22}n_2'^2 + 2K_{12}n_1'n_2'}} \right) \quad [2.50]$$

Obsérvese que la expresión [2.50] es simétrica respecto de los ejes x_1 y x_2 .

– Matriz G, nodo perteneciente al mismo elemento

De forma análoga, a como se hizo para la matriz H, se considerará que el nodo le corresponda un valor ξ' de la variable natural tal que: $-1 \leq \xi' \leq 1$. Las expresiones de $d\Gamma$ y $r(\xi)$ serán iguales que en el caso anterior. Para desarrollar la integral de [2.40] se descompondrá ésta en dos intervalos según la variable natural ξ .

$$g_k^{ij} = \int_{\partial D_j} \varphi'_k T^* d\Gamma = \int_{\xi=-1}^{\xi=\xi'} \varphi'_k T^* d\Gamma + \int_{\xi=\xi'}^{\xi=1} \varphi'_k T^* d\Gamma \quad [2.51]$$

A continuación se estudiará cada una de las dos integrales que aparecen en el término derecho de esta expresión.

$$- \text{Integral} \int_{\xi=-1}^{\xi=\xi'} \varphi'_k T^* d\Gamma$$

Se realiza el cambio de variable:

$$\eta = \frac{\xi' - \xi}{1 + \xi'} \quad \text{o la inversa} \quad \xi = -(1 + \xi')\eta + \xi' \quad [2.52]$$

Con esta nueva variable el diferencial de longitud se transforma en:

$$d\Gamma = \sqrt{(A_1(-(1 + \xi')\eta + \xi') + B_1)^2 + (A_2(-(1 + \xi')\eta + \xi') + B_2)^2} \xi' d\eta \quad [2.53]$$

Y el radio anisótropo equivalente:

$$r(\eta) = \frac{\eta(1+\xi')}{\sqrt{|K_{ij}|}} \left(K_{22} \left(\frac{A_1}{2} [(1+\xi')\eta - 2\xi'] - B_1 \right)^2 - 2K_{12} \left(\frac{A_1}{2} [(1+\xi')\eta - 2\xi'] - B_1 \right) \left(\frac{A_2}{2} [(1+\xi')\eta - 2\xi'] - B_2 \right) + K_{11} \left(\frac{A_2}{2} [(1+\xi')\eta - 2\xi'] - B_2 \right)^2 \right)^{1/2} \quad [2.54]$$

Introduciendo [2.54] en la primera integral de [2.51] y operando se llega a:

$$\begin{aligned} \int_{\xi=-1}^{\xi=\xi'} \frac{\phi'_k}{\sqrt{|K_{ij}|}} \ln \left(\frac{1}{r} \right) d\Gamma &= \int_{\eta=0}^1 \frac{\phi'_k}{\sqrt{|K_{ij}|}} \ln \left(\frac{1}{\eta} \right) d\Gamma + \int_{\xi=-1}^{\xi=\xi'} \frac{\phi'_k}{\sqrt{|K_{ij}|}} \ln \left(\frac{1}{(1+\xi')} \right) d\Gamma + \\ &+ \int_{\xi=-1}^{\xi=\xi'} \frac{\phi'_k}{\sqrt{|K_{ij}|}} \ln \frac{\sqrt{|K_{ij}|}}{\sqrt{\left[K_{22} \left(\frac{A_1}{2} [(1+\xi')\eta - 2\xi'] - B_1 \right)^2 - 2K_{12} \left(\frac{A_1}{2} [(1+\xi')\eta - 2\xi'] - B_1 \right) \left(\frac{A_2}{2} [(1+\xi')\eta - 2\xi'] - B_2 \right) + K_{11} \left(\frac{A_2}{2} [(1+\xi')\eta - 2\xi'] - B_2 \right)^2 \right)}} d\Gamma = \\ &= \int_0^1 f(\eta) d\eta + \int_{-1}^1 h(\xi) d\xi + \int_{-1}^1 g(\xi) d\xi \end{aligned} \quad [2.55]$$

El diferencial de longitud $d\Gamma$, que aparece en las integrales anteriores, se ha puesto en el primer caso en función de la variable η y en las otras dos en función de ξ , de forma que las tres integrales anteriores quedan:

$$\begin{aligned} \int_0^1 f(\eta) d\eta &= \\ &= \int_0^1 \frac{\phi'_k(\eta)}{\sqrt{|K_{ij}|}} \ln \left(\frac{1}{\eta} \right) \sqrt{\left[A_1 (-(\xi'+1)\eta + \xi') + B_1 \right]^2 + \left[A_1 (-(\xi'+1)\eta + \xi') + B_1 \right]^2 (1+\xi')} d\eta \end{aligned} \quad [2.56]$$

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{\xi'} g(\xi) d\xi &= \\ &= \int_{-1}^{\xi'} \frac{\phi'_k}{\sqrt{K_1 K_2}} \ln \left(\left(\sqrt{\left(\frac{A_1 [\xi + \xi'] + B_1}{K_1} \right)^2 + \left(\frac{A_2 [\xi + \xi'] + B_2}{K_2} \right)^2} \right)^{-1} \right) \sqrt{(A_1 \xi + B_1)^2 + (A_2 \xi + B_2)^2} d\xi \end{aligned} \quad [2.57]$$

Obsérvese que la expresión [2.57] no es singular. Para determinar la integral que queda se realiza el cambio de variables:

$$\mu = \frac{2}{1+\xi'} \xi + \frac{1-\xi'}{1+\xi'} \quad \text{o la inversa} \quad \xi = -\frac{1+\xi'}{2} \mu + \frac{1-\xi'}{2} \quad [2.58]$$

$$\int_{-1}^{\xi'} h(\xi) d\xi = \ln \left(\frac{1}{1+\xi'} \right) \frac{1+\xi'}{2} \int_{-1}^1 \frac{\varphi_k(\mu)}{\sqrt{K_1 K_2}} \sqrt{\left[A_1 \left(\frac{1+\xi'}{2} \mu - \frac{1-\xi'}{2} \right) + B_1 \right]^2 + \left[A_2 \left(\frac{1+\xi'}{2} \mu - \frac{1-\xi'}{2} \right) + B_2 \right]^2} d\mu \quad [2.59]$$

Las funciones $\phi(\eta)$ y $\phi(\mu)$ de [2.56] y [2.59], respectivamente, son:

$$\phi_1'(\eta) = \frac{[\xi' - (1+\xi')\eta][-1 + p_c + \xi' - (1+\xi')\eta]}{(-1+p_a)(-2+p_a+p_c)}$$

$$\phi_2'(\eta) = \frac{[-1 + p_a - \xi' + (1+\xi')\eta][-1 + p_c + \xi' - (1+\xi')\eta]}{(-1+p_a)(-1+p_c)} \quad [2.60]$$

$$\phi_3'(\eta) = \frac{[\xi' - (1+\xi')\eta][1 - p_a + \xi' - (1+\xi')\eta]}{(-1+p_c)(-2+p_a+p_c)}$$

$$\phi_1'(\mu) = \frac{\left(-\frac{1+\xi'}{2} \mu + \frac{1-\xi'}{2} \right) \left(-\frac{1+\xi'}{2} \mu - \frac{1+\xi'}{2} + p_c \right)}{(-1+p_a)(-2+p_a+p_c)}$$

$$\phi_2'(\mu) = \frac{\left(\frac{1+\xi'}{2} \mu - \frac{3-\xi'}{2} + p_a \right) \left(-\frac{1+\xi'}{2} \mu - \frac{1+\xi'}{2} + p_c \right)}{(-1+p_a)(-1+p_c)} \quad [2.61]$$

$$\phi_3'(\mu) = \frac{\left(-\frac{1+\xi'}{2} \mu + \frac{1-\xi'}{2} \right) \left(-\frac{1+\xi'}{2} \mu + \frac{3-\xi'}{2} - p_a \right)}{(-1+p_c)(-2+p_a+p_c)}$$

$$- \text{Integral} \int_{\xi=\xi'}^{\xi=1} \varphi_k' T^* d\Gamma$$

Procediendo de forma análoga a la integral anterior, se realiza el cambio de variable:

$$\eta = \frac{\xi' - \xi}{1 - \xi'} \quad \text{o la inversa} \quad \xi = (1 - \xi')\eta + \xi' \quad [2.62]$$

Y se consigue la descomposición:

$$\int_{\xi=\xi'}^{\xi=1} \frac{\varphi'_k}{\sqrt{K_1 K_2}} \ln\left(\frac{1}{r}\right) d\Gamma = \int_0^1 f(\eta) d\eta + \int_{\xi'}^1 g(\xi) d\xi + \int_{\xi'}^1 h(\xi) d\xi \quad [2.63]$$

donde el valor de cada integral anterior es:

$$\int_0^1 f(\eta) d\eta = \int_0^1 \frac{\varphi'_k(\eta)}{\sqrt{K_1 K_2}} \ln\left(\frac{1}{\eta}\right) \sqrt{\left[A_1((-\xi'+1)\eta + \xi') + B_1\right]^2 + \left[A_2((-\xi'+1)\eta + \xi') + B_2\right]^2} (1-\xi') d\eta \quad [2.64]$$

$$\int_{\xi'}^1 g(\xi) d\xi = \int_{\xi'}^1 \varphi'_k \ln\left(\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{A_1}{2} \frac{[\xi+\xi'] + B_1}{K_1}\right)^2 + \left(\frac{A_2}{2} \frac{[\xi+\xi'] + B_2}{K_2}\right)^2}} \right) \sqrt{(A_1 \xi + B_1)^2 + (A_2 \xi + B_2)^2} d\xi \quad [2.65]$$

Observe que el integrando de [2.65] es el mismo que el de [2.57], quedando de la suma de ambos:

$$\int_{-1}^1 g(\xi) d\xi = \int_{-1}^1 \frac{\varphi'_k(\xi)}{\sqrt{K_1 K_2}} \ln\left(\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{A_1}{2} \frac{[\xi+\xi'] + B_1}{K_1}\right)^2 + \left(\frac{A_2}{2} \frac{[\xi+\xi'] + B_2}{K_2}\right)^2}} \right) \sqrt{(A_1 \xi + B_1)^2 + (A_2 \xi + B_2)^2} d\xi \quad [2.66]$$

$$\int_{-1}^{\xi'} h(\xi) d\xi = \ln\left(\frac{1}{1-\xi'}\right) \frac{1-\xi'}{2} \int_0^1 \frac{\phi'_k(\mu)}{\sqrt{K_1 K_2}} \sqrt{\left[A_1\left(\frac{1-\xi'}{2}\mu + \frac{1-\xi'}{2}\right) + B_1\right]^2 + \left[A_2\left(\frac{1-\xi'}{2}\mu + \frac{1-\xi'}{2}\right) + B_2\right]^2} d\mu \quad [2.67]$$

En la integral anterior hubo que hacer el cambio de variable:

$$\mu = \frac{2}{1-\xi'} \xi - \frac{1+\xi'}{1-\xi'} \quad \text{o la inversa} \quad \xi = \frac{1-\xi'}{2} \mu + \frac{1+\xi'}{2} \quad [2.68]$$

En cuanto a las funciones de forma $\phi(\eta)$ y $\phi(\mu)$ de [2.64] y [2.67] respectivamente, son:

$$\begin{aligned}\varphi_3'(\eta) &= \frac{[\xi' + (1 - \xi')\eta][-1 + p_c + \xi' + (1 - \xi')\eta]}{(-1 + p_a)(-2 + p_a + p_c)} \\ \varphi_1'(\eta) &= \frac{[-1 + p_a - \xi' - (1 - \xi')\eta][-1 + p_c + \xi' + (1 - \xi')\eta]}{(-1 + p_a)(-1 + p_c)} \\ \varphi_3'(\eta) &= \frac{[\xi' + (1 - \xi')\eta][-1 + p_a + \xi' + (1 - \xi')\eta]}{(-1 + p_a)(-2 + p_a + p_c)}\end{aligned}\quad [2.69]$$

$$\begin{aligned}\varphi_1'(\mu) &= \frac{\left(\frac{1 - \xi'}{2}\mu + \frac{1 + \xi'}{2}\right)\left(\frac{1 - \xi'}{2}\mu + \frac{-1 + \xi'}{2} + p_c\right)}{(-1 + p_a)(-2 + p_a + p_c)} \\ \varphi_2'(\mu) &= \frac{\left(-\frac{1 - \xi'}{2}\mu - \frac{3 + \xi'}{2} + p_a\right)\left(\frac{1 - \xi'}{2}\mu + \frac{-1 + \xi'}{2} + p_c\right)}{(-1 + p_a)(-1 + p_c)} \\ \varphi_3'(\mu) &= \frac{\left(\frac{1 - \xi'}{2}\mu + \frac{1 + \xi'}{2}\right)\left(\frac{1 - \xi'}{2}\mu + \frac{3 + \xi'}{2} - p_a\right)}{(-1 + p_c)(-2 + p_a + p_c)}\end{aligned}\quad [2.70]$$

Con esto se han obtenido los términos de la matriz **G** cuando el punto de colocación está contenido en el elemento de cálculo. Este término será la suma de las integrales que aparecen en las expresiones [2.56], [2.59], [2.64], [2.66] y [2.67].

Para la resolución de todas las integrales, tanto de los términos de **H** como de **G** se ha utilizado la cuadratura de Gauss para la resolución de integrales del

tipo $\int_{-1}^1 f(x) dx$, excepto para la resolución de las integrales que aparecen en

las expresiones [2.56] y [2.64] en las que se ha usado cuadratura de Gauss

para la resolución de integrales del tipo $\int_0^1 f(x) \ln\left(\frac{1}{x}\right) dx$ (Abramowitz &

Stegun, 1972 y Press et al, 1996).

2.6. Elementos de las matrices F , ψ y η

Para la obtención de los términos de estas matrices se tomarán funciones de r , “radial basis function” siendo r el radio anisótropo equivalente definido en [2.27.a]. Si se introduce la expresión [2.4] en [2.1.a] y si se tiene en cuenta que cada función $f_k(r)$ es independiente de las demás se obtiene, para cada k :

$$\left(K_{11} \frac{\partial^2 f_k}{\partial x_1^2} + 2K_{12} \frac{\partial^2 f_k}{\partial x_1 \partial x_2} + K_{22} \frac{\partial^2 f_k}{\partial x_2^2} \right) \alpha_k(t) = \frac{1}{\rho c_p} \frac{\partial \alpha_k}{\partial t} f_k(r) \quad [2.71]$$

Considerando que la función $f_k(r)$ depende sólo del radio anisótropo equivalente r , la expresión anterior se transforma en:

$$\alpha_k(t) \left\{ \ddot{f}_k(r) + \frac{\dot{f}_k(r)}{r} \right\} = \frac{1}{\rho c_p} \dot{\alpha}_k(t) f_k(r) \quad [2.72]$$

Que se puede transformar en:

$$\frac{\left\{ \ddot{f}_k(r) + \frac{\dot{f}_k(r)}{r} \right\}}{f_k(r)} = \frac{1}{\rho c_p} \frac{\dot{\alpha}_k(t)}{\alpha_k(t)} = -\mu^2 \quad [2.73]$$

O bien:

$$r^2 \ddot{f}_k(r) + r \dot{f}_k(r) + \mu^2 f_k(r) = 0 \quad [2.74]$$

La solución de la ecuación definida en [2.74] es:

$$f_k(r) = J_0(\mu r) \quad [2.75]$$

donde $J_0(z)$ es una función de Bessel de primera especie y orden 0.

Para obtener ψ y η se parte de una función $f(r)$ y se eligen funciones ψ que verifiquen [2.5] y funciones η obtenidas de:

$$\eta = \frac{\partial \psi}{\partial n} = \left(K_{11} \frac{\partial \psi}{\partial x_1} + K_{12} \frac{\partial \psi}{\partial x_2} \right) n_1 + \left(K_{12} \frac{\partial \psi}{\partial x_1} + K_{22} \frac{\partial \psi}{\partial x_2} \right) n_2 \quad [2.76]$$

Para que las funciones ψ dependan de la variable r , el radio anisótropo equivalente, la expresión [2.5] se transforma en:

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d\psi_k(r)}{dr} \right) = f_k(r) \quad [2.77]$$

Las funciones $\psi_k(r)$ que cumplen lo anterior son:

$$\psi_k(r) = -\frac{J_0(\mu r)}{\mu^2} \quad [2.78.a]$$

$$\eta = \frac{x_1 n_1 + x_2 n_2}{r} \frac{J_1(\mu r)}{\mu} \quad [2.78.b]$$

A pesar de lo analizado anteriormente no es la función de Bessel la más usada. La elección del tipo de función de aproximación es fundamental a la hora de determinar la convergencia del método (Aral, 1988; Yamada, 1994; Partridge, 2000; Yang, 2002). A continuación se presentan diferentes tipos de funciones de aproximación, f , así como las funciones ψ y η correspondientes.

2.6.1. Funciones polinómicas

Presentan la tipología genérica siguiente

$$f = 1 + r^2 + r^3 + \dots + r^m \quad [2.79.a]$$

dando lugar a:

$$\psi = \frac{r^2}{4} + \frac{r^3}{9} + \frac{r^4}{16} + \dots + \frac{r^{m+2}}{(m+2)^2} \quad [2.79.b]$$

$$\eta = \left(\frac{1}{2} + \frac{r}{3} + \frac{r^2}{4} + \dots + \frac{r^m}{m+2} \right) (x_1 n_1 + x_2 n_2) \quad [2.79.c]$$

Zhang & Zhu, 1994, analizaron la exactitud del método usando estas funciones en función del grado mayor m .

2.6.2. Funciones Exponenciales

Pueden presentar la forma:

$$f = e^{-\frac{r}{r_0}} \quad [2.80.a]$$

dando lugar a

$$\psi = r_0^2 \left(e^{-\frac{r}{r_0}} - E_1 \left(-\frac{r}{r_0} \right) \right) \quad [2.80.b]$$

$$\eta = -e^{-\frac{r}{r_0}} \left(\frac{r_0^2}{r^2} + \frac{r_0}{r} \right) (x_1 n_1 + x_2 n_2) \quad [2.80.c]$$

En las expresiones [2.80] La constante r_0 representa el valor mayor de todos los radios anisótropos equivalentes. El problema que representa esta función es que el valor que toma ψ y η para $r = 0$ es ∞ . Para resolver este problema se puede utilizar la función siguiente:

$$f = e^{-\frac{r}{r_0}} \left(1 - \frac{r}{r_0} \right) \quad [2.81]$$

2.6.3. Funciones de Bessel

Como se ha indicado al inicio de este apartado interesa tomar funciones $f_k(r)$ que verifiquen la expresión [2.74], ahora bien, como el parámetro μ es desconocido se definen funciones de la forma (Abramowitz & Stegun, 1972):

$$f = J_0 \left(\frac{r}{r_0} \right) \quad [2.82.a]$$

$$\psi = r_0^2 \left(1 - J_0 \left(\frac{r}{r_0} \right) \right) \quad [2.82.b]$$

$$\eta = J_1 \left(\frac{r}{r_0} \right) \frac{r_0}{r} (x_1 n_1 + x_2 n_2) \quad [2.82.c]$$

Además de funciones dependientes de r se han utilizado otras funciones de aproximación, como funciones polinómicas (Cheng et al., 1993, Partridge, 1994), series trigonométricas (Elzein & Syngellakis, 1992, Partridge, 1994) o series hipérblicas, y funciones propias para geometrías determinadas como se desarrolla a continuación.

2.6.4. Funciones para problemas con simetría axial

Estas funciones no van a depender del radio anisótropo equivalente definido en [2.27.a] sino de la diferencia entre el radio del punto de colocación y el de integración según se muestra en la expresión [2.83.a]. En este caso sólo se van a considerar problemas isótropos pues en los problemas anisótropos desaparece la simetría.

En este caso se ha considerado la función de aproximación:

$$f_k = 1 + d_k + d_k^2 \quad [2.83.b]$$

donde

$$d_k = \left[(x_1^2 + x_2^2)^{1/2} - \left((x_1^k)^2 + (x_2^k)^2 \right)^{1/2} \right] = R - R_k \quad [2.83.a]$$

Y con esto quedan las funciones ψ y η :

$$\psi = \frac{1}{K} \left(\frac{R^2}{4} (1 - R_k + R_k^2) + \frac{R^3}{9} (1 - 2R_k) + \frac{R^4}{16} \right) \quad [2.83.c]$$

$$\eta = \left(\frac{R}{2} (1 - R_k + R_k^2) + \frac{R^2}{3} (1 - 2R_k) + \frac{R^3}{4} \right) (x_1 n_1 + x_2 n_2) \quad [2.83.d]$$

2.7. Ejemplos prácticos

2.7.1. Geometría rectangular, problema isótropo

Para ver la validez del método se va a comparar con el modelo teórico desarrollado para un rectángulo, figura 2.5, que se enfría desde una temperatura inicial T_0 a una temperatura final $T = 0$, siendo la condición de contorno la temperatura impuesta de valor $T = 0$ en todo el contorno.

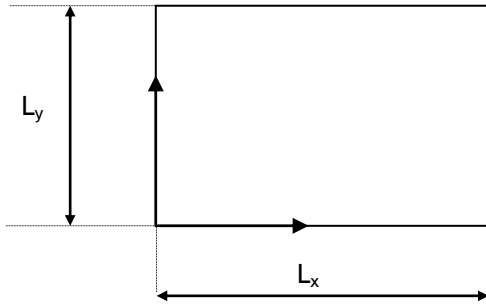


Figura 2.5: Ejemplo teórico

La solución exacta es (Partridge et al, 1992):

$$T = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} A_{nj} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L_x} \operatorname{sen} \frac{j\pi y}{L_y} \exp \left[- \left(\frac{K_x n^2 \pi^2}{L_x^2} + \frac{K_y j^2 \pi^2}{L_y^2} \right) t \right] \quad [2.84.a]$$

donde:

$$A_{nj} = \frac{4T_0}{nj\pi^2} \left[(-1)^n - 1 \right] \left[(-1)^j - 1 \right] \quad [2.84.b]$$

2.7.1.1. Influencia del valor de las constantes y de la discretización.

Al resolver el problema mediante el método de reciprocidad dual hay que elegir una discretización adecuada del contorno, un número conveniente de polos internos y una discretización en el tiempo acertada. Para ello no se puede perder de vista el valor del parámetro μ (Chaudouet, 1987), tomando como:

$$\mu = \frac{(\Delta x)^2}{k} \quad [2.85]$$

En el parámetro anterior Δx es la distancia entre nodos contiguos del contorno. Como en este trabajo se utilizan elementos cuadráticos, que vienen definidos por tres nodos, Δx es la mitad de la longitud del elemento y k es el

cociente entre la conductividad del material y su capacidad calorífica; o sea

$$k = \frac{K}{\rho c_p}$$

El parámetro μ es importante ya que marca el menor tamaño que puede elegirse para la discretización en el tiempo, Δt .

El modelo de la figura 2.6, reproduce $\frac{1}{4}$ del sólido genérico de la figura 2.5, al que se le ha aplicado simetría según el eje OX y según el eje OY ($L_x = 6$; $L_y = 4$). Los polos que se utilizan siempre son 15. El número de elementos de contorno y los intervalos de tiempo variarán para distintas cargas analizadas. Se darán los valores para los cuatro puntos que se indican en la figura. En todos los casos la capacidad calorífica del material es de $\rho c_p = 1$.

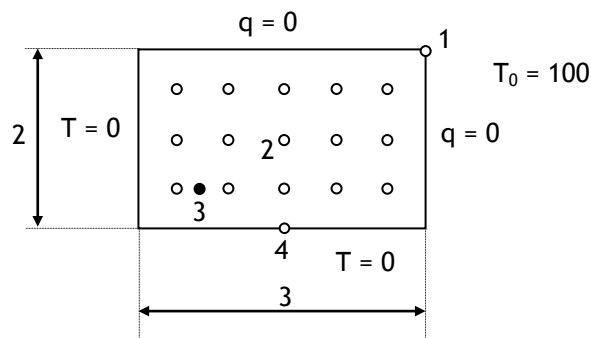


Figura 2.6: Ejemplo de material isotrópico

Para determinar la evolución en el tiempo del problema definido en la figura 2.6, primero se analiza, para una conductividad $K = 1$, la variación de la temperatura en tres puntos: uno del contorno (el punto 1), un polo (el punto 2), y un punto interno que no es un polo (el punto 3); o sea que es un punto que no se utiliza en la discretización sino que se calcula una vez que se conoce la solución en el contorno. Finalmente se obtendrá el valor del flujo de calor en el punto 4. Estos valores se determinarán para diferentes discretizaciones del contorno ($N = 8$; $N = 20$; $N = 40$; $N = 80$; $N = 160$), según se muestra en las figuras 2.7.b, 2.8.b, 2.9.b y 2.10.b y diferentes discretizaciones en el tiempo ($\Delta t = 0.01$; $\Delta t = 0.1$; $\Delta t = 1$), que se representan en las figuras 2.7.a, 2.8.a, 2.9.a y 2.10.a. Para los casos “a” el parámetro es $\mu = 0.0625$ y en los caso “b” se ha tomado un $\Delta t = 0.1$

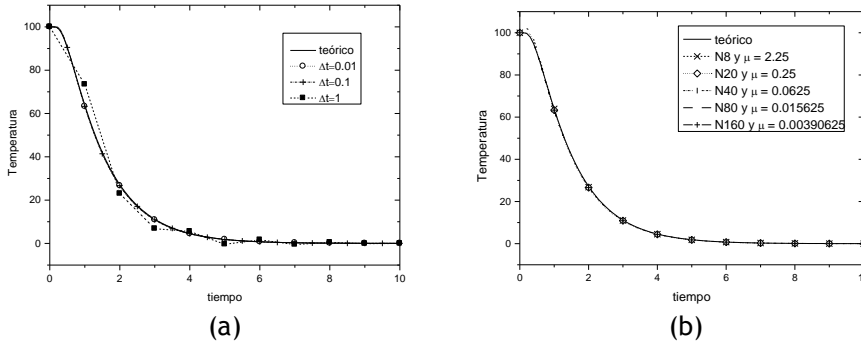


Figura 2.7: Variación de la temperatura del punto 1. (a) Diferentes discretizaciones temporales con $N = 40$ (b) Diferentes discretizaciones espaciales con $\Delta t = 0.1$

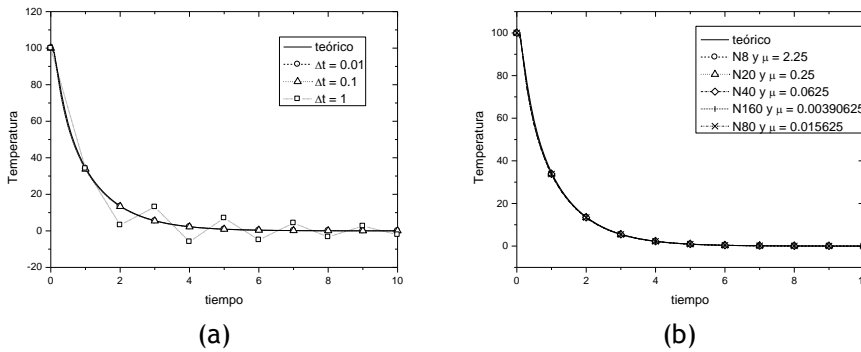


Figura 2.8: Variación de la temperatura del punto 2. (a) Diferentes discretizaciones temporales (b) Diferentes discretizaciones espaciales.

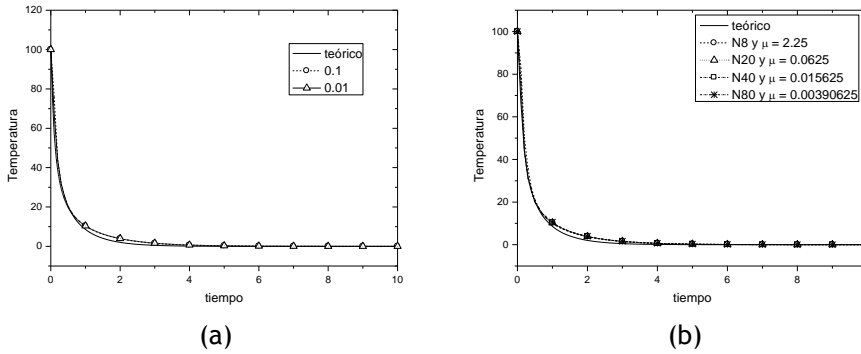


Figura 2.9: Variación de la temperatura del punto 3. (a) Diferentes discretizaciones temporales (b) Diferentes discretizaciones espaciales.

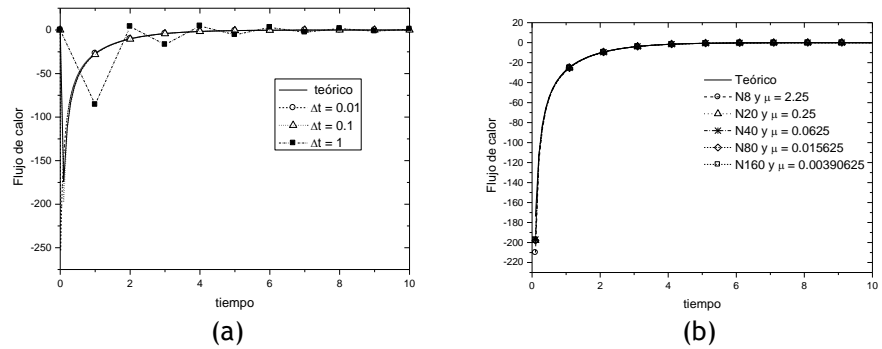
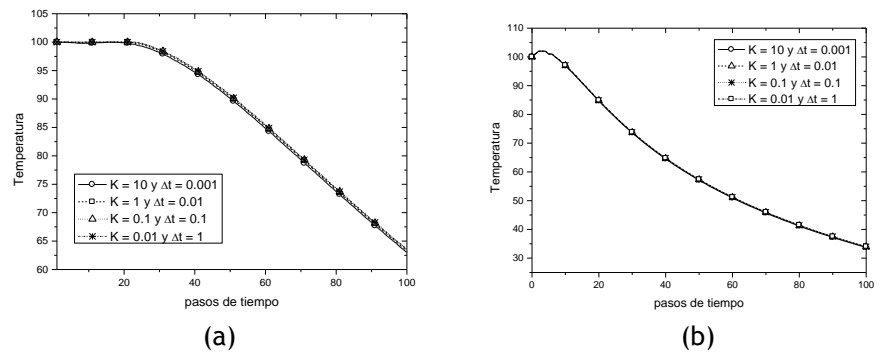


Figura 2.10: Variación del flujo de calor del punto 4. (a) Diferentes discretizaciones temporales (b) Diferentes discretizaciones espaciales.

Los resultados representados en las figuras 2.7.a, 2.8.a, 2.9.a. y 2.10.a son bastante aceptables excepto en el caso de $\Delta t = 1$, que se alejan bastante del resultado teórico pues $\Delta t \gg \mu$. En el caso del punto 3 se ha omitido, esta gráfica por variar bastante del valor teórico.

En cuanto a los resultados representados en las figuras "b" éstos muestran coincidencia con el resultado teórico.

A continuación se considerarán los resultados para $K = 10$, $K = 1$, $K = 0.1$ y $K = 0.01$, siempre con $N = 40$; o sea lo que implica que $\Delta x = 0.125$, con lo que el parámetro μ tomará los valores de 0.0015625, 0.015625, 0.15625 y 1.5625 respectivamente. Se varía el valor de Δt de forma que $\frac{\mu}{\Delta t} = 1.5625$ en todos los casos. Todo esto se refleja en la gráfica 2.11., en la que se representan las temperaturas de los puntos 1, 2 y 3 y el flujo de calor por conductividad (Q/K) del punto 4 frente al número de pasos de tiempo.



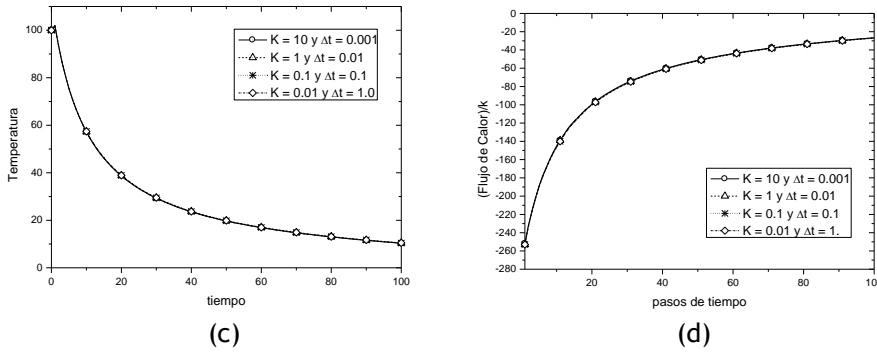


Figura 2.11: Variación de la temperatura de los puntos 1 (a); 2 (b) y 3 (c) y variación del flujo de calor por conductividad del punto 4. (d) frente a pasos de tiempo.

En las gráficas de las figuras 2.11 hay una concordancia, casi perfecta, de resultados, esto es así ya que se está resolviendo la misma ecuación incremental. No da exactamente lo mismo en todos los casos porque los coeficientes de la ecuación y el término independiente se ven multiplicados por un factor diferente en un caso respecto a otro, lo que hace variar ligeramente la solución. Esto es algo que ni se aprecia en las gráficas.

Número de polos o puntos del dominio usados en la discretización.

En cuanto a la influencia del número de polos, se comenzará estudiando el problema de la figura 2.5, sin considerar la simetría aplicada en la figura 2.6, tal y como se muestra en la figura 2.12. Esto se hace así porque al tratarse de un enfriamiento repentino de todo el contorno, las condiciones iniciales vienen descritas por los polos.

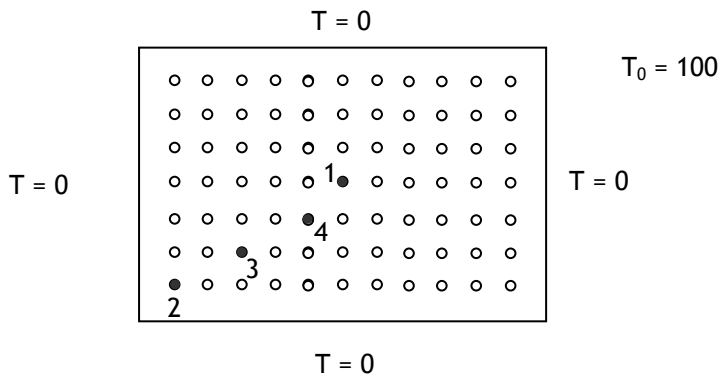


Figura 2.12: Problema sin simetría.

En este caso se ha tomado un intervalo de tiempo $\Delta t = 0.1$ y una conductividad de $K = 1$. Siempre se utilizará la misma discretización exterior ($N = 80$) variándose el número de polos tal y como se muestra en la figura 2.13.

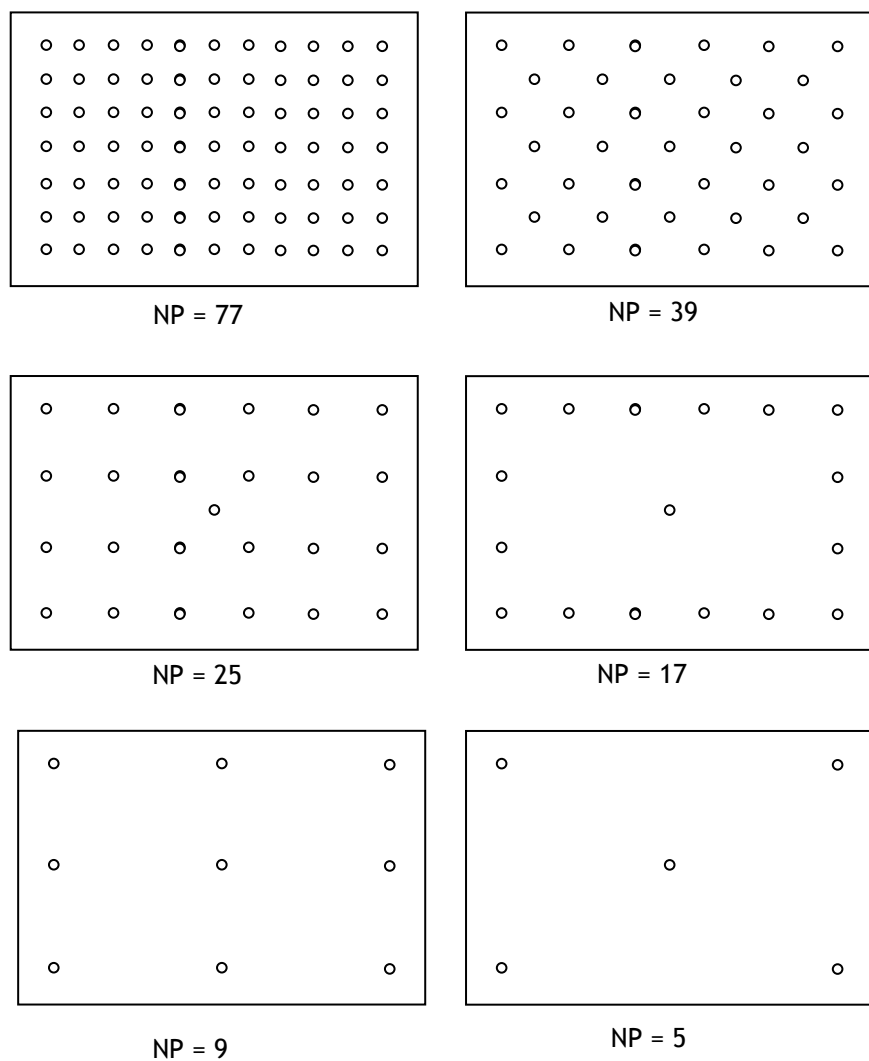


Figura 2.13: Discretizaciones con distintos números de polos del problema de la figura 2.12

Se representa la temperatura de los puntos 1, 2, 3 y 4 de la figura 2.12. Aquí hay que tener muy presente que, dependiendo del número de polos en cuestión, el punto objeto de estudio puede ser un polo, si aparece en la discretización, o un punto interno, en cuyo caso su temperatura se obtiene

después de determinar las temperaturas y flujos de calor de los puntos del contorno. Los resultados se muestran en la figura 2.14.

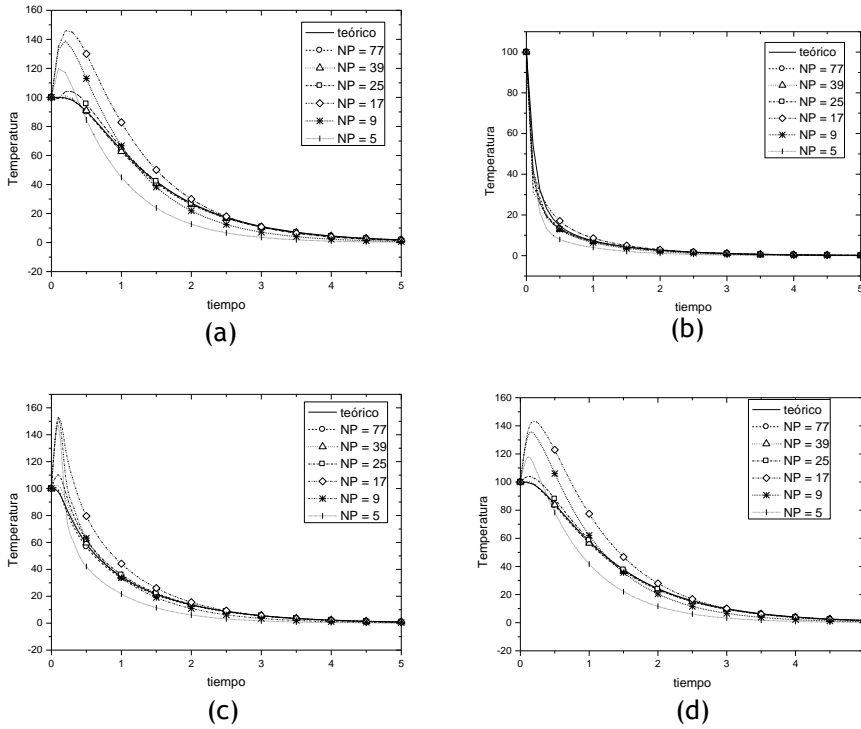


Figura 2.14: Variación de la temperatura de los puntos 1 (a); 2 (b) 3 (c) y 4(d) de la figura 2.12 frente al tiempo.

En las figuras anteriores se aprecia que a partir de $NP = 25$ los resultados se desvían apreciablemente de los teóricos.

A continuación se varía el número de polos para el problema de la figura 2.6, en el que al haber puntos del contorno que reflejan las condiciones iniciales (contorno con $q = 0$) es de suponer que el numero de polos necesarios sea menor. Los distintos modelos se reflejan en la figura 2.15. En todos los casos se elige una discretización externa de $N = 40$ y una conductividad de $K = 1$.

En la figura 2.16 se representa la temperatura de los puntos 1, 2 y 3 y el flujo de calor del punto 4 de la figura 2.5. Se puede observar que en este caso se deben colocar los polos lo más cerca posible del contorno en el que cambia, de repente, las condiciones iniciales, de modo los resultados del modelo (e) con 7 polos cercanos a los contornos que cambian de repente su temperatura son apreciablemente mejores que los proporcionados por la configuración (d) con 9 polos.

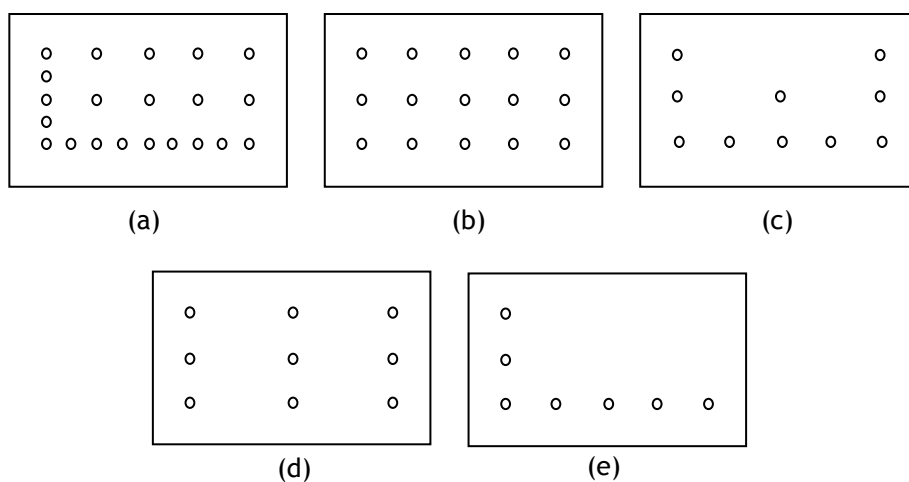


Figura 2.15: Discretizaciones con distintos números de polos y diferentes posiciones de éstos del problema de la figura 2.6

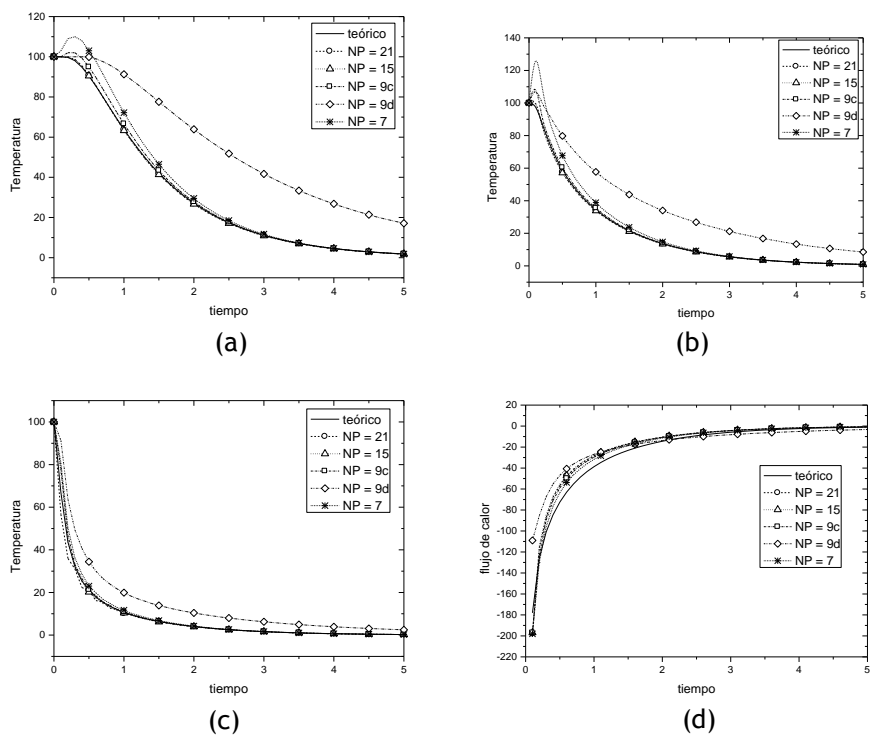


Figura 2.16: Variación de la temperatura de los puntos 1 (a); 2 (b) y 3 (c) y variación del flujo de calor del punto 4 (d) de la figura 2.12 frente al tiempo.

2.7.1.2. Parámetros θ

En este apartado se varía el valor de los parámetros θ_u y θ_q , en el problema de la figura 2.5 con $K = 1$, $\Delta t = 0.1$ y $N = 40$, o sea con $\mu = 0.0625$. Los resultados para las temperaturas de los puntos 1, 2 y 3 y el flujo de calor del punto 4 del sólido de la figura 2.6, se muestran en la figura 2.17.

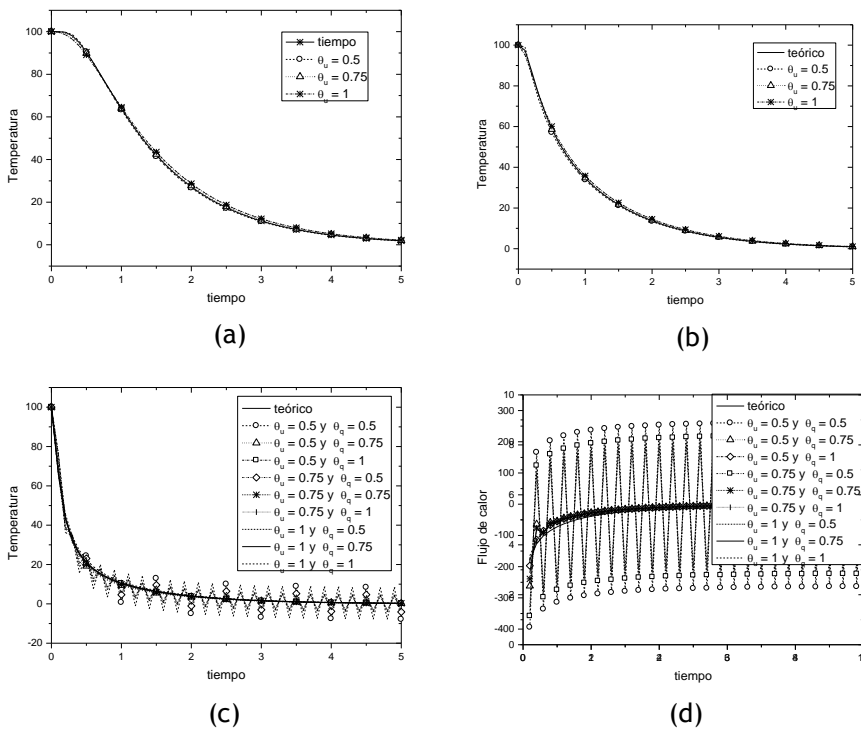


Figura 2.17: Variación de la temperatura de los puntos 1 (a); 2 (b) 3 (c) y flujo de calor del punto 4(d) de la figura 2.12 frente al tiempo.

La figura 2.18 recoge las gráficas 2.17.c-d, en las que se han eliminado los casos que dan lugar a mayor dispersión, que corresponde a $\theta_q = 0.5$.

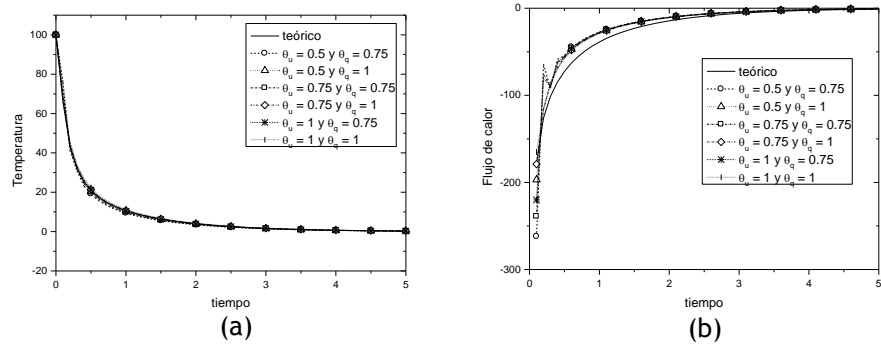


Figura 2.18: Variación de la temperatura del puntos 3 (a) y del flujo de calor del punto 4(b) de la figura 2.12 frente al tiempo.

2.7.1.3. Funciones de aproximación

Las funciones de aproximación más usadas son las polinómicas. En todos los ejemplos anteriores se ha usado una función cuadrática [2.86.a] que ha dado lugar a las funciones ψ y η siguientes

$$f_2 = 1 + r + r^2 \quad [2.86.a]$$

$$\psi_2 = \frac{r^2}{4} + \frac{r^3}{9} + \frac{r^4}{16} \quad [2.86.b]$$

$$\eta_2 = \left(\frac{1}{2} + \frac{r}{3} + \frac{r^2}{4} \right) (x_1 n_1 + x_2 n_2) \quad [2.86.c]$$

En este apartado se investiga la adecuación de otras funciones de aproximación polinómicas, tales como:

$$f_1 = 1 + r \quad [2.87]$$

$$f_3 = 1 + r + r^2 + r^3 \quad [2.88]$$

$$f_4 = 1 - r / r_0 \quad [2.89]$$

En la figura 2.19 se muestran la variación de temperatura de los puntos 1, 2 y 3 y el flujo de calor del punto 4 del dominio representado en la figura 2.6.

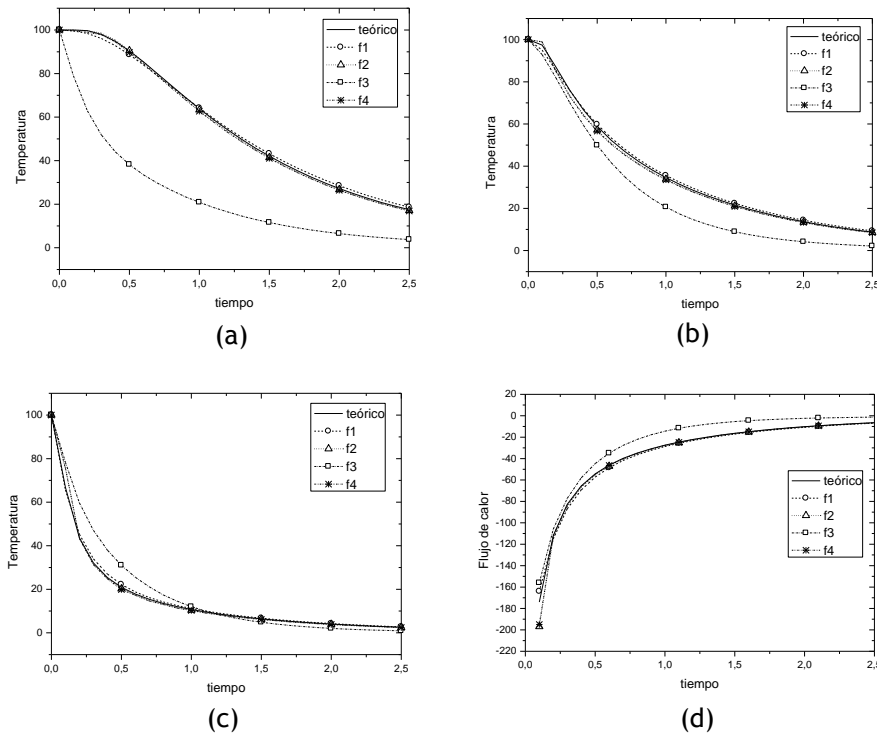


Figura 2.19: Variación de la temperatura de los puntos 1 (a); 2 (b) 3 (c) y del flujo de calor del punto 4(d) de la figura 2.6 frente al tiempo.

Se puede observar en la figura 2.19 que los valores que se acercan más al resultado teórico son los que se han inferido al utilizar las funciones f_2 y f_4 , alejándose bastante los valores correspondientes a la función f_3 que es la función polinómica de mayor grado.

2.7.2. Geometría circular. Problema isótropo

Se va a considerar un círculo de radio $R = 2$; conductividad $K = 1$ y capacidad calorífica $\rho c_p = 1$. Este círculo se encuentra a una temperatura inicial $T_0 = 100$ y sufre un enfriamiento repentino de la superficie a $T = 0$. Se discretizará un cuarto de círculo, de forma que el problema que se estudia es el representado en la figura 2.20.a siendo la discretización la representada en la figura 2.20.b; una segunda discretización con un número de elementos mitad de la anterior también será estudiada.

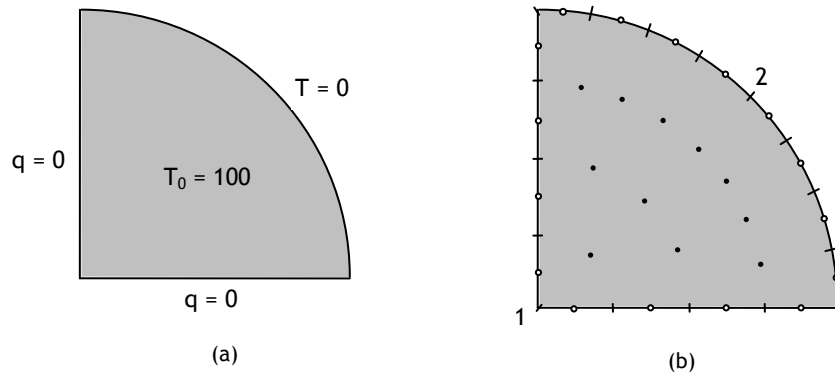


Figura 2.20: Problema de transferencia de calor en una geometría circular (a) y discretización del dominio correspondiente (b).

En las figuras 2.21 se muestra la temperatura del punto 1 de la figura 2.20.b y el flujo de calor del punto 2. Se comparan los resultados que se obtienen con la solución teórica (Polyanin, 2002) y se observa que los resultados se ajustan fielmente a los teóricos, sobre todo la discretización con mayor número de elementos.

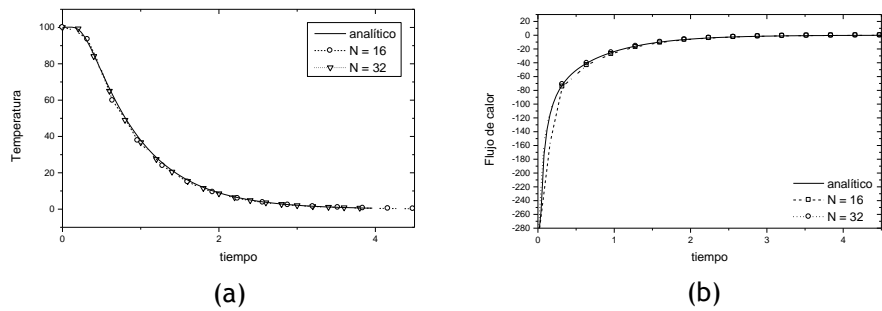


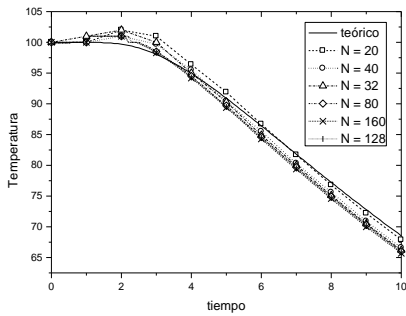
Figura 2.21: Variación de la temperatura del punto 1 (a) y variación del flujo de calor del punto 2. (b) de la figura 2.20.b frente al tiempo.

2.7.3. Geometría rectangular. Problema ortótropo

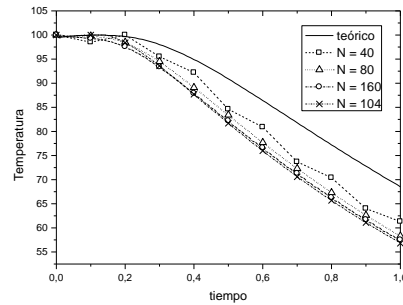
A las dificultades propias del método que aparecen en problemas isotrópicos hay que añadir las derivadas de utilizar constantes diferentes para cada eje.

Se va a considerar el mismo sólido de la figura 2.5, con la consideración de simetría, como se muestra en la figura 2.6. Los polos que se utilizan siempre son los mismos, 15, y se va cambiando la discretización en el contorno. En las discretizaciones con 40, 80 y 160 nodos todos los elementos son iguales mientras que las discretizaciones con 32, 128, 104 y 200 se discretiza más

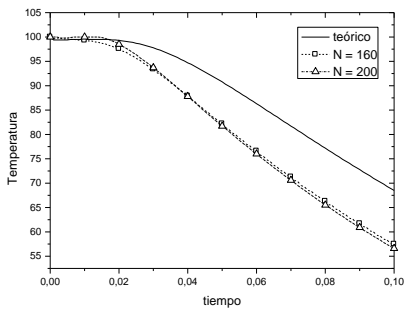
finamente el contorno según el eje OX que presenta una conductividad menor. Se varían las conductividades k_x de 0.01 a 10 y k_y de 0.1 a 100, realizándose todas las combinaciones posibles. Los resultados se muestran en la figura 2.22 cuando la relación $\frac{K_x}{K_y}$ es del orden de 0.1 o 10 los resultados se ajustan a los teóricos, pero si esta relación es muy diferente empieza a haber grandes discrepancias con el resultado teórico, discrepancia que no se resuelve afinando la discretización de las aristas con más conductividad.



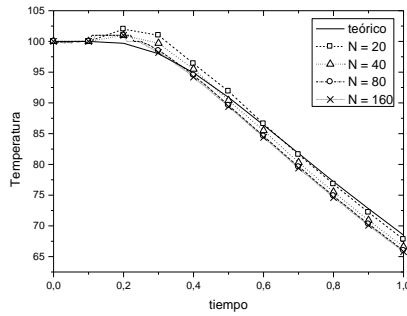
(a)



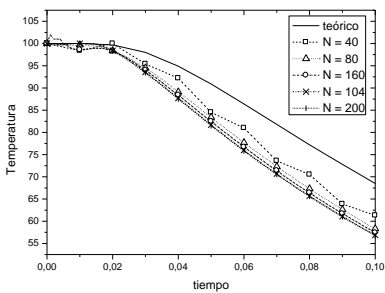
(b)



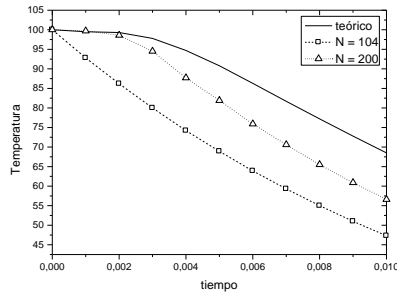
(c)



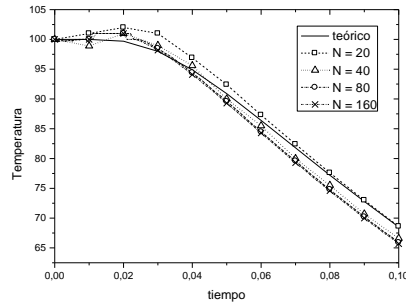
(d)



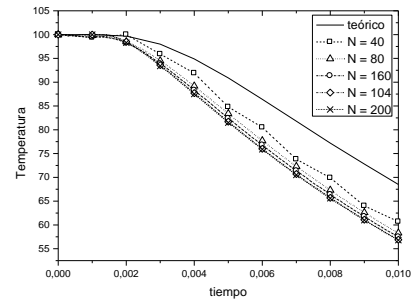
(e)



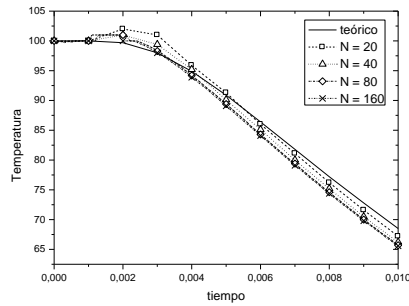
(f)



(g)



(h)



(i)

Figura 2.22: Evolución de la Temperatura para el punto 1 del sólido ortótropo de la figura 2.6 con diferentes discretizaciones (a) $K_x = 0.01$ y $K_y = 0.1$; (b) $K_x = 0.01$ y $K_y = 1$; (c) $K_x = 0.01$ y $K_y = 10$; (d) $K_x = 0.1$ y $K_y = 1$; (e) $K_x = 0.1$ y $K_y = 10$; (f) $K_x = 0.1$ y $K_y = 100$; (g) $K_x = 1$ y $K_y = 10$; (h) $K_x = 1$ y $K_y = 100$; (i) $K_x = 10$ y $K_y = 100$

2.7.4. Geometría rectangular, problema anisótropo

A fin de contrastar la adecuación de la simulación numérica para un material con comportamiento anisótropo se va a realizar una transformación de coordenadas para transformar el problema anisótropo en un problema isótropo equivalente. Se transformará la ecuación [2.1.a] en la ecuación [2.90]:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1'^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2'^2} = \frac{1}{\rho c_p} \frac{\partial u}{\partial t} \quad [2.90]$$

Para ello se debe hacer el cambio de coordenadas:

$$\begin{aligned}x_1' &= (l_1 \cos \theta)x_1 + (l_1 \operatorname{sen} \theta)x_2 \\x_2' &= -(l_2 \operatorname{sen} \theta)x_1 + (l_2 \cos \theta)x_2\end{aligned}\quad [2.91]$$

Si se introduce la transformación de coordenadas [2.91] en [2.1.a] queda:

$$\begin{aligned}& l_1^2 (K_{11} \cos^2 \theta + K_{22} \operatorname{sen}^2 \theta - 2K_{12} \cos \theta \operatorname{sen} \theta) \frac{\partial^2 u}{\partial x_1'^2} + \\& + l_1 l_2 \left((K_{22} - K_{11}) \operatorname{sen} \theta \cos \theta + K_{12} (\cos^2 \theta - \operatorname{sen}^2 \theta) \right) \frac{\partial^2 u}{\partial x_1' \partial x_2'} + \\& l_2^2 (K_{11} \operatorname{sen}^2 \theta + K_{22} \cos^2 \theta - 2K_{12} \cos \theta \operatorname{sen} \theta) \frac{\partial^2 u}{\partial x_2'^2} = \frac{1}{\rho c_p} \frac{\partial u}{\partial t}\end{aligned}$$

Para transformar la expresión anterior en la [2.90] se deben verificar las ecuaciones siguientes:

$$\begin{aligned}l_1^2 (K_{11} \cos^2 \theta + K_{22} \operatorname{sen}^2 \theta - 2K_{12} \cos \theta \operatorname{sen} \theta) &= 1 \\(K_{22} - K_{11}) \operatorname{sen} \theta \cos \theta + K_{12} (\cos^2 \theta - \operatorname{sen}^2 \theta) &= 0 \\l_2^2 (K_{11} \operatorname{sen}^2 \theta + K_{22} \cos^2 \theta - 2K_{12} \cos \theta \operatorname{sen} \theta) &= 1\end{aligned}$$

De la resolución del sistema de tres ecuaciones anterior con tres incógnitas se obtiene:

$$\tan 2\theta = \frac{2K_{12}}{K_{11} - K_{22}} \quad [2.92.a]$$

$$(l_1)^{-2} = \frac{K_{11} + K_{22}}{2} + \frac{K_{11} - K_{22}}{2} \cos 2\theta - K_{12} \operatorname{sen} 2\theta \quad [2.92.b]$$

$$(l_2)^{-2} = \frac{K_{11} + K_{22}}{2} - \frac{K_{11} - K_{22}}{2} \cos 2\theta + K_{12} \operatorname{sen} 2\theta \quad [2.92.c]$$

El problema que se va a estudiar es el sólido de la figura 2.6 con $N = 40$ y con constantes $K_{11} = 2$, $K_{12} = 1$, y $K_{22} = 0.5$. Si a este sólido se le hace la transformación precedente para que quede un sólido isótropo se obtiene el sólido de la figura 2.23.

Se van a comparar los resultados del problema anisótropo de la figura 2.6 con $K_{11} = 2$, $K_{12} = 0.5$, y $K_{22} = 1$, con los resultados del problema isótropo de la

figura 2.23 con $K_{11} = 1$, $K_{12} = 0$, y $K_{22} = 1$, Los resultados de las temperaturas de los puntos 1, 2 y 3 de la figura 2.6 se muestran en la tabla 2.1. Estos valores corresponden a un tiempo $t = 1$. En ambos casos se ha tomado un incremento de tiempo $\Delta t = 0.1$.

Puntos	Anisótropo	Isótropo equivalente
1	44.0870	44.0874
2	25.5104	25.5107
3	9.5693	9.5695

Tabla 2.1: Resultados de las temperaturas de los puntos 1, 2 y 3 de la figura 2.6, considerando el sólido anisótropo y los de los mismos puntos para el sólido isótropo correspondiente, figura 2.23.

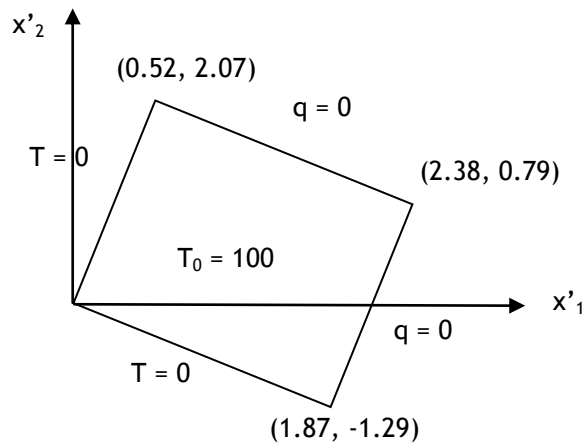


Figura 2.23: Sólido de la figura 2.6 al que se le ha aplicado el cambio de coordenadas de las expresiones [2.91] y [2.92]

Como se observa en la tabla anterior los resultados del problema anisótropo son muy semejantes a los del problema isótropo equivalente, no se ha hecho una representación gráfica de resultados ya que las curvas obtenidas son prácticamente coincidentes.

2.7.5. Geometrías definidas con multicuerpos

En este apartado se van a simular geometrías definidas por cuerpos de distintas características. Inicialmente se simulará una geometría multicuerpo

en la que todos los dominios presentan idénticas características tal como la geometría circular de la figura 2.24.b. En este caso se tomará $K_1 = K_2 = K_3 =$

1 comparándose los resultados obtenidos con los del ejemplo de la figura 2.24.a. En ambos casos se trata de un círculo de radio $R = 2$ con una capacidad calorífica $\rho c_p = 1$, una temperatura inicial $T_0 = 100$ y unas condiciones de contorno aplicadas en $t = 0$, como se muestra en la figura 2.25: un cuarto de círculo a $q = 0$ y los otros tres a $T = 20$. En el caso de la figura simple se emplean 105 polos internos y en el de multicuerpos los mismos polos menos los que corresponden al contorno, o sea 86 polos.

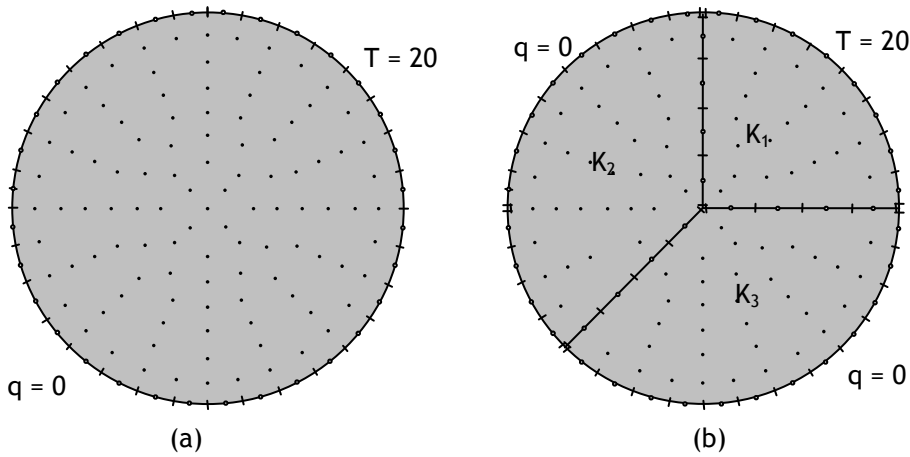


Figura 2.24: Sólido con multicuerpos (b) frente al mismo sólido simple (a).

Los puntos cuyos resultados se contrastarán se indican en la figura 2.25.

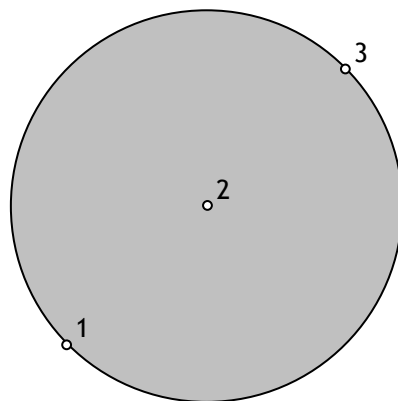


Figura 2.25: Puntos en los que se calculará la Temperatura (1 y 2) y el flujo de calor (3) de los sólidos de la figura 2.24.

En la figura 2.26 se muestran los resultados, prácticamente coincidentes entre los dos casos monocuerpo y multicuerpo.

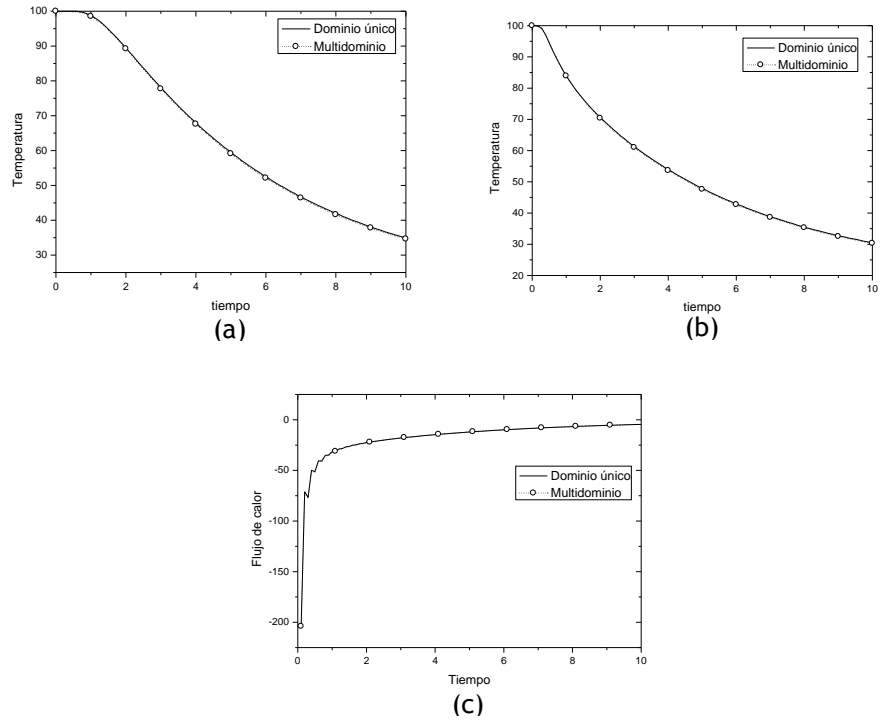


Figura 2.26: Valores de las temperaturas de los puntos 1 y 2 de la figura 3.20 y flujo de calor del punto 3 de la misma figura.

Por último se considerará el ejemplo, un poco más complejo, de la geometría elíptica de la figura 2.27.a, con las condiciones de contorno que se muestran en la figura 2.29.a. y con las constantes del material $K_{11} = K_{22} = K_{12} = 1$ y $\rho c_p = 1$. El sólido de la figura 2.27.b. está formado por tres dominios perfectamente unidos entre sí y con las mismas constantes y condiciones de contorno que el sólido de la figura 2.27.a.

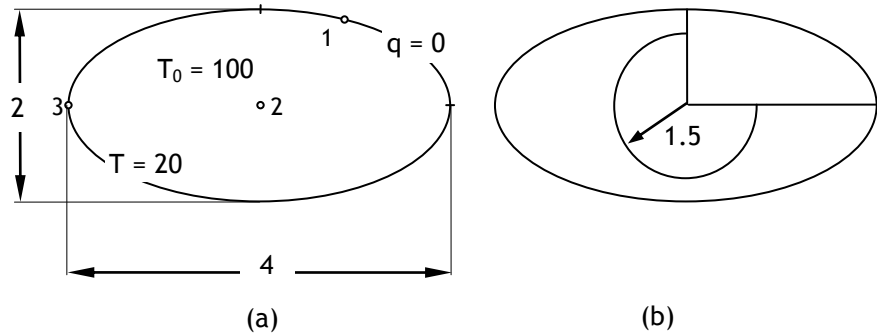


Figura 2.27: Sólido con multicuerpos (b) frente al mismo sólido simple (a)

El sólido de la figura 2.27.a se ha discretizado con 64 elementos de contorno, con 128 nodos externos, y 37 polos internos, mientras que el sólido de 2.27.b, se ha discretizado con 88 elementos (174 nodos externos) y 26 polos internos. Los resultados de las temperaturas del punto 1 y 2 y del flujo del punto 3 de la figura 2.27.a se muestran en la figura 2.28, en la que se observa una buena adecuación de resultados.

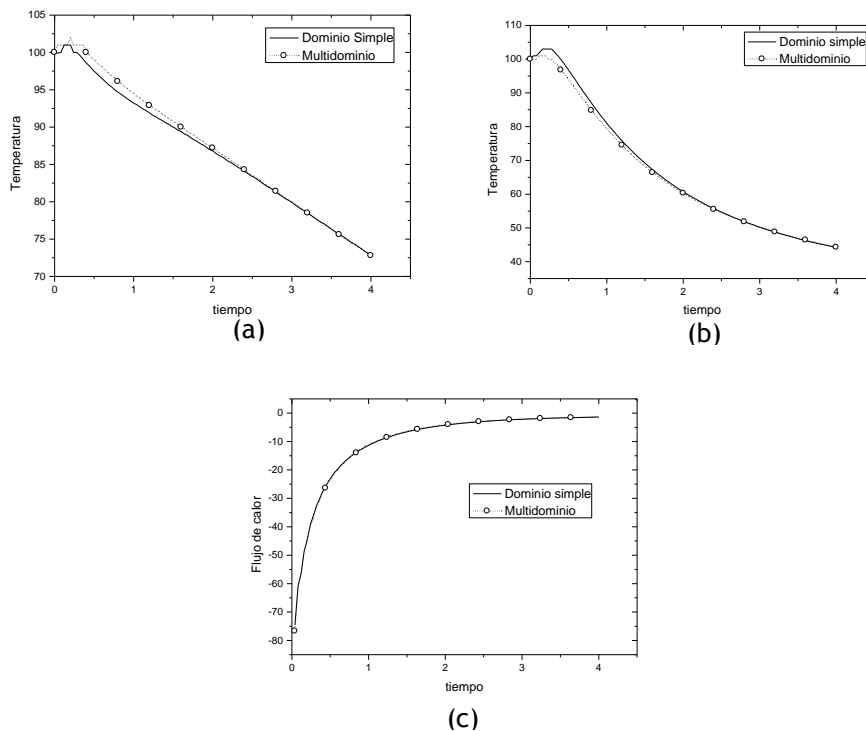


Figura 2.28: Valores de las temperaturas de los puntos 1 y 2 de la figura 2.27.a y flujo de calor del punto 3 de la misma figura.

A continuación se analiza el comportamiento del sólido cuando tiene dominios con constantes muy diferentes. Se considera el mismo sólido de la figura 2.27.a pero subdividido en cuatro dominios como se muestra en la figura 2.29.a con $K_1 = K_2 = K_3 = K$ y $K_4 \gg K$ y las condiciones de contorno mostradas en dicha figura; se compara con el sólido simple de la figura 2.29.b. En el sólido representado en 2.29.a se han incluido 36 polos mientras que en el de 2.29.b 35 polos. Los puntos en los que se representan los resultados son los puntos 1, 2 y 3 de la figura 2.27.a.

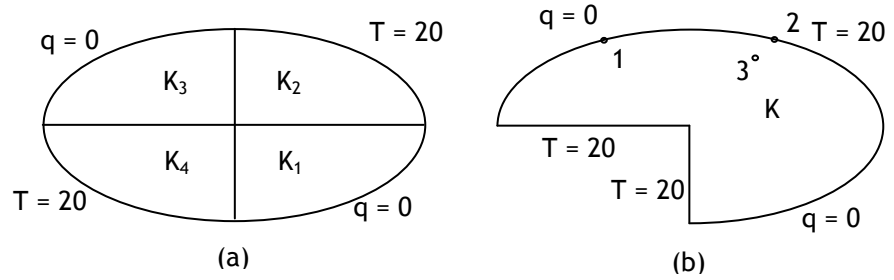


Figura 2.29: Sólido con multidominio (a) frente al mismo sólido simple (b)

Los resultados de las Temperaturas de los puntos 1 y 3 y del flujo de calor del punto 2 se muestran en las gráficas de la figura 2.30, donde se aprecia total coincidencia de resultados.

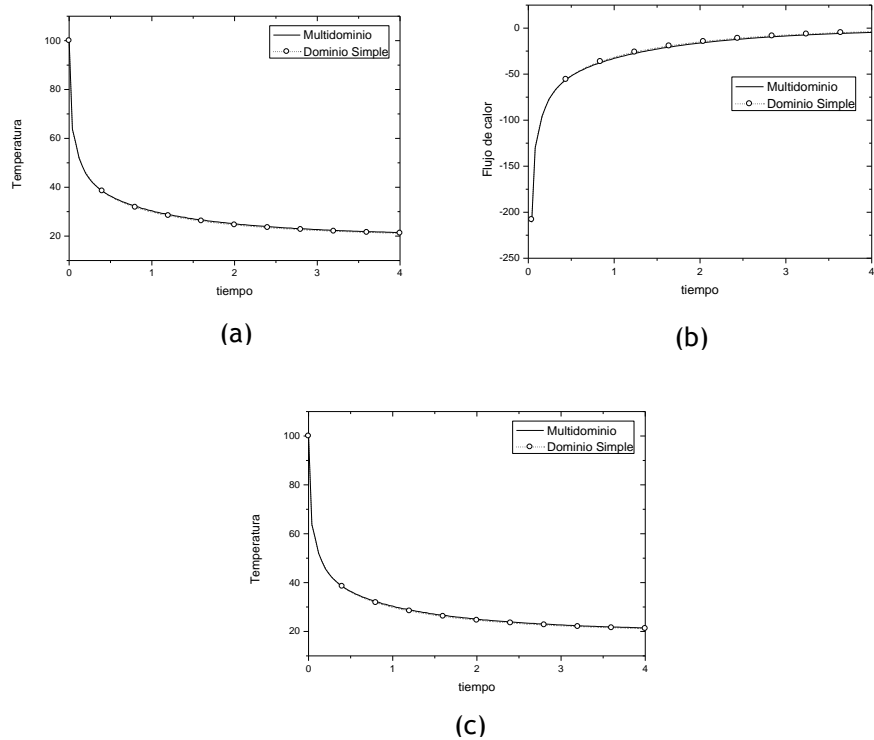


Figura 2.30: Valores de las temperaturas de los puntos 1 (a) y 3(c) de la figura 3.b y flujo de calor del punto 3 (b) de la misma figura.

Capítulo 3: Elastodinámica

3.1. Generalidades

Si el capítulo anterior se dedica al estudio del problema térmico, éste se focaliza en la Elasticidad plana anisótropa lineal; primero desde el punto de vista analítico y después desarrolla el DRBEM para este tipo de problemas. Finalmente se analiza la influencia de los distintos factores que intervienen en el método mediante su aplicación a una serie de ejemplos.

3.2. Ecuaciones de la Elasticidad Anisótropa en Elastodinámica

Las ecuaciones que definen el problema elástico (Fung, 1977) son:

Ecuaciones de equilibrio interno:

$$\sigma_{ij,j} + b_i = \rho \ddot{u}_i \quad [3.1]$$

Relaciones cinemáticas:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad [3.2]$$

Ecuaciones de comportamiento:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad [3.3]$$

En las expresiones anteriores σ_{ij} representa a las componentes del tensor de tensiones, ε_{ij} a las componentes del tensor de deformaciones, u_i a las del vector desplazamiento, b_i a las componentes del vector de fuerzas de volumen, C_{ijkl} a las componentes de la matriz de rigidez del material y ρ es la densidad; los subíndices i, j, k, l pueden tomar los valores 1,2,3. Las

ecuaciones anteriores constituyen un sistema de 15 ecuaciones con 15 incógnitas, las seis tensiones, las seis deformaciones y los tres desplazamientos, siendo las condiciones de contorno, bien en tensiones, bien en desplazamientos, como se indica a continuación:

Condición de contorno en desplazamiento:

$$u_i = \bar{u}_i \quad [3.4]$$

Condición de contorno en tensiones:

$$p_i = \bar{p}_i \quad [3.5]$$

En la expresión [3.5] p_i representa las componentes del vector tensión que se relaciona con el tensor de tensiones y la normal a la superficie exterior n_i a través del lema de Cauchy:

$$p_i = \sigma_{ij} n_j \quad [3.6]$$

El sistema de ecuaciones representado en [3.1], [3.2] y [3.3] se puede reducir a un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas, los tres desplazamientos, si se sustituye [3.2] en [3.3] y el resultado en [3.1], constituyendo las ecuaciones de Navier:

$$C_{ijkl} u_{k,lj} + b_i = \rho \ddot{u}_i \quad [3.7]$$

El objetivo del presente trabajo ha sido resolver el problema plano para el que se pueden reducir las ecuaciones de la elasticidad a un sistema de dos ecuaciones.

3.3. Ecuaciones de la Elasticidad Bidimensional

Estos problemas pueden ser de tensión plana o de deformación plana (Love, 1927).

Tensión plana

Las características básicas de un dominio elástico sometido a un estado de tensión plana son:

- El sólido tiene una dimensión, que se denominará $2h$ y, sin pérdida de generalidad se asumirá que se dispone a lo largo del eje Ox_3 , mucho menor que las otras dos. Éstas constituyen el plano Ox_1x_2 .

- No hay fuerzas de superficie en los planos $x_3 = \pm h$.
- Las fuerzas de volumen no tienen componente según x_3 .
- Las fuerzas de superficie que actúan sobre la superficie cilíndrica son independientes de la coordenada x_3 .

Bajo estas condiciones se puede suponer que las tensiones σ_{33} , σ_{13} y σ_{23} son despreciables frente a σ_{11} , σ_{22} y σ_{12} , por lo tanto:

$$\sigma_{33} = 0; \sigma_{13} = 0; \sigma_{23} = 0 \quad [3.8.a]$$

Las tensiones no nulas son:

$$\sigma_{11} = \sigma_{11}(x_1, x_2); \quad \sigma_{22} = \sigma_{22}(x_1, x_2); \quad \sigma_{12} = \sigma_{12}(x_1, x_2) \quad [3.8.b]$$

Como consecuencia de las relaciones anteriores los desplazamientos son:

$$u_1 = u_1(x_1, x_2); \quad u_2 = u_2(x_1, x_2); \quad u_3 \neq 0 \quad [3.8.c]$$

Los desplazamientos anteriores implican que $\varepsilon_{33} \neq 0$.

Deformación plana

Un dominio elástico está sujeto a un estado de deformación plana cuando:

- Una dimensión, que se puede definir a lo largo del eje x_3 , es mucho mayor que las otras dos.
- El desplazamiento en esta dirección puede suponerse nulo.
- Las fuerzas de volumen y las de superficie que actúan en la superficie cilíndrica no dependen de la coordenada x_3 .

Los desplazamientos son:

$$u_1 = u_1(x_1, x_2); \quad u_2 = u_2(x_1, x_2); \quad u_3 = 0 \quad [3.9.a]$$

Como consecuencia de estos desplazamientos las deformaciones son:

$$\varepsilon_{33} = 0; \quad \varepsilon_{13} = 0; \quad \varepsilon_{23} = 0 \quad [3.9.b]$$

y las deformaciones no nulas:

$$\varepsilon_{11} = \varepsilon_{11}(x_1, x_2); \quad \varepsilon_{22} = \varepsilon_{22}(x_1, x_2); \quad \varepsilon_{12} = \varepsilon_{12}(x_1, x_2) \quad [3.9.c]$$

Hay que tener en cuenta que $\sigma_{33} \neq 0$.

Las leyes constitutivas en elasticidad bidimensional son:

– Ecuaciones de equilibrio interno:

$$\sigma_{\alpha\beta,\beta} + b_\alpha = \rho \ddot{u}_\alpha \quad [3.10]$$

– Relaciones cinemáticas:

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(u_{\alpha,\beta} + u_{\beta,\alpha}) \quad [3.11.a]$$

En las expresiones anteriores los subíndices α y β toman los valores 1,2. Para los casos de tensión plana la expresión [3.11.a] hay que completarla con:

$$\varepsilon_{3\alpha} = \frac{1}{2}(u_{\alpha,3} + u_{3,\alpha}); \varepsilon_{33} = u_{3,3} \quad [3.11.b]$$

La ley de comportamiento se puede reducir a:

$$\sigma_i = Q_{ij} \varepsilon_j \quad [3.12]$$

En la expresión anterior los tensores de tensiones y de deformaciones se expresan como vectores tomando los índices i, j los valores 1, 2, 6, que corresponden a los pares 1 \equiv 11, 2 \equiv 22, 6 \equiv 12. Los coeficientes de la matriz Q , para deformación plana son:

$$Q_{11} = C_{1111}; \quad Q_{12} = C_{1122}; \quad Q_{22} = C_{2222}; \quad Q_{16} = C_{1112}; \quad Q_{26} = C_{2212}; \quad Q_{66} = C_{1212} \quad [3.13]$$

Para tensión plana, renombrando la matriz de rigidez C_{rilmn} como C_{ij} con $i, j = 1, 2, 6$, se tiene:.

$$Q_{ij} = C_{ij} - \frac{C_{i3}C_{3j}}{C_{33}} \quad [3.14]$$

Con estas simplificaciones las ecuaciones del problema elástico en función del campo de desplazamientos, ecuación de Navier, se reducen a las dos ecuaciones:

$$\begin{aligned} Q_{11}u_{1,11} + 2Q_{16}u_{1,12} + Q_{66}u_{1,22} + Q_{16}u_{2,11} + (Q_{12} + Q_{66})u_{2,12} + Q_{62}u_{2,22} &= \rho \ddot{u}_1 \\ Q_{16}u_{1,11} + (Q_{12} + Q_{66})u_{1,12} + Q_{26}u_{1,22} + Q_{66}u_{2,11} + 2Q_{26}u_{2,12} + Q_{22}u_{2,22} &= \rho \ddot{u}_2 \end{aligned} \quad [3.15]$$

Y las condiciones de contorno en un sólido como el de la figura 3.1 son:

$$\begin{aligned} u_n &= \bar{u}_n \\ u_t &= \bar{u}_t \end{aligned} \quad \text{en } \partial D_1 \quad [3.16.a]$$

$$\begin{aligned} p_n &= \bar{p}_n \\ p_t &= \bar{p}_t \end{aligned} \quad \text{en } \partial D_2 \quad [3.16.b]$$

$$\begin{aligned} u_n &= \bar{u}_n \\ p_t &= \bar{p}_t \end{aligned} \quad \text{en } \partial D_3 \quad [3.16.c]$$

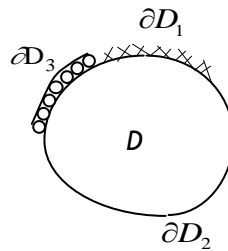


Figura 3.1: Sólido sujeto a diversos tipos de condiciones de contorno

De las condiciones de contorno anteriores, las descritas en [3.16.a] corresponden a desplazamiento impuesto; las descritas en [3.16.b] corresponden a las fuerzas conocidas y, por último, las descritas en [3.16.c] corresponden condiciones mixtas. Los subíndices n y t denotan dirección normal y tangencial al contorno, respectivamente.

Los problemas bidimensionales se suelen resolver mediante funciones de tensión. Así la ecuación [3.10], sin considerar efectos dinámicos ni fuerzas de volumen se reduce a:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} &= 0 \end{aligned} \quad [3.17]$$

En este caso se puede encontrar una función de forma Φ que:

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}, \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \quad [3.18]$$

Si se desarrolla la inversa de la expresión [3.12]:

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ 2\varepsilon_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \beta_{16} \\ \beta_{12} & \beta_{22} & \beta_{26} \\ \beta_{16} & \beta_{26} & \beta_{66} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix} \quad [3.19]$$

La matriz β que aparece en [3.19] es la matriz de flexibilidad que, en tensión plana, coincide con la matriz de flexibilidad tridimensional S y se puede poner en función de las constantes ingenieriles:

$$\begin{aligned} S_{11} &= \frac{1}{E_1}, & S_{12} &= -\frac{\nu_{12}}{E_1} = -\frac{\nu_{21}}{E_2}, \\ S_{16} &= \frac{\eta_{12,1}}{E_1} = \frac{\eta_{1,12}}{G_{12}}, & S_{22} &= \frac{1}{E_2} \\ S_{26} &= \frac{\eta_{12,2}}{E_2} = \frac{\eta_{2,12}}{G_{12}}, & S_{66} &= \frac{1}{G_{12}} \end{aligned} \quad [3.20]$$

Para deformación plana se tiene:

$$\beta_{ij} = S_{ij} - \frac{S_{i3}S_{3j}}{S_{33}} \quad [3.21]$$

Expresión ésta análoga a la [3.14].

Las deformaciones tienen que verificar la ecuación de compatibilidad en el plano:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_1}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_2}{\partial x_1^2} = 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{12}}{\partial x_2 \partial x_1} \quad [3.22]$$

Si se introduce [3.18] y [3.19] en [3.22] se obtiene:

$$\beta_{22} \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x_1^4} - 2\beta_{26} \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x_1^3 \partial x_2} + (2\beta_{12} + \beta_{66}) \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x_1^2 x_2^2} - 2\beta_{16} \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x_2^3 \partial x_1} + \beta_{11} \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x_2^4} = 0 \quad [3.23]$$

Definiendo el operador D_s :

$$D_s = \frac{\partial}{\partial x_2} - \mu_s \frac{\partial}{\partial x_1} \quad [3.24]$$

la expresión [3.23] se puede poner como:

$$D_1 D_2 D_3 D_4 (\Phi) = 0 \quad [3.25]$$

Sustituyendo cada operador por su valor, definido en [3.24] se obtiene:

$$\left(\beta_{22} - 2\beta_{26}\mu + (2\beta_{12} + \beta_{66})\mu^2 - 2\beta_{16}\mu^3 + \beta_{11}\mu^4 \right) \frac{\partial^4 \Phi}{\partial z^4} = 0$$

La resolución de la ecuación anterior pasa por la resolución del polinomio característico:

$$\beta_{22} - 2\beta_{26}\mu + (2\beta_{12} + \beta_{66})\mu^2 - 2\beta_{16}\mu^3 + \beta_{11}\mu^4 = 0 \quad [3.26]$$

La resolución del polinomio [3.26] tiene 4 soluciones y, según demuestra Leknitskii (1963), las cuatro son complejas, por lo que éstas son:

$$\mu_1 = \alpha_1 + i\beta_1, \quad \mu_2 = \alpha_2 + i\beta_2, \quad \bar{\mu}_3 = \mu_1, \quad \bar{\mu}_4 = \mu_2 \quad [3.27]$$

Las direcciones características se denotan por:

$$z_k = x_1 + \mu_k x_2 \quad [3.28]$$

3.4. El Método de Reciprocidad Dual en Elastodinámica

Despreciando el efecto de las fuerzas de volumen, si los términos de [3.10] se multiplican por el campo de desplazamientos u_k^* y ambos términos se integran sobre el volumen, se obtiene:

$$\int_D \sigma_{ij,j} u_k^* dV = \int_D \rho \ddot{u}_i u_k^* dV \quad [3.29]$$

En la ecuación anterior, integrando por partes el término de la izquierda, se deduce:

$$\begin{aligned} \int_D \sigma_{ij,j} u_k^* dV &= \int_D (\sigma_{ij} u_k^*)_{,j} dV - \int_D \sigma_{ij} u_{k,j}^* dV = \\ &= \int_{\partial D} \sigma_{ij} n_j u_k^* dS - \int_D \sigma_{ij} \varepsilon_{kj}^* dV = \int_{\partial D} p_i u_k^* dS - \int_D \sigma_{ij}^* \varepsilon_{kj} dV \end{aligned} \quad [3.30]$$

En la expresión anterior se ha tenido en cuenta el teorema de Gauss y las igualdades:

$$\sigma_{ij} u_{k,j} = \sigma_{ij} (\varepsilon_{kj} + \omega_{kj}) = \sigma_{ij} \varepsilon_{kj} \quad [3.31]$$

$$\sigma_{ij} \varepsilon_{kj}^* = \sigma_{ij}^* \varepsilon_{kj} \quad [3.32]$$

donde ω_{kj} es la matriz de giro.

Por otra parte la última integral de [3.30] se puede poner como:

$$\begin{aligned} \int_D \sigma_{ij}^* \varepsilon_{kj} dV &= \int_D \sigma_{ij}^* u_{k,j} dV = \int_D (\sigma_{ij}^* u_k)_{,j} dV - \int_D \sigma_{ij,j}^* u_k dV = \\ &= \int_{\partial D} \sigma_{ij}^* n_j u_k dS + \int_D b_i^* u_k dV = \int_{\partial D} p_i^* u_k dS + \int_D b_i^* u_k dV \end{aligned} \quad [3.33]$$

donde u_k^* es la solución fundamental de la elasticidad en un medio anisótropo; o sea es un campo de desplazamientos asociado a la ecuación de equilibrio:

$$\sigma_{lkj,j}^* + \Delta e_l = 0 \quad [3.34]$$

En la expresión anterior Δe_l es una fuerza δ de Dirac aplicada en el punto de cálculo en la dirección de e_l , de forma que la solución fundamental se puede expresar como:

$$\begin{aligned} u_k^* &= u_{lk}^* e_l \\ p_k^* &= p_{lk}^* e_l \end{aligned} \quad [3.35]$$

Teniendo en cuenta [3.30], [3.33], [3.34] y [3.35] en [3.29]:

$$c_{lk} u_k + \int_{\partial D} p_{lk}^* u_k d\Gamma = \int_{\partial D} u_{lk}^* p_k d\Gamma - \int_D u_{lk}^* \rho \ddot{u}_k d\Omega \quad [3.36]$$

En la expresión [3.36] c_{lk} es un tensor que depende de la geometría del elemento y de las propiedades del material y que, para pendientes suaves toma el valor de $\delta_{lk}/2$. Un estudio pormenorizado del cálculo de este coeficiente viene desarrollado por Liu (2000).

Tomando como aproximación el desarrollo en variables separadas de la aceleración, de la forma:

$$\ddot{u}_k = \sum_{m=1}^{NN} \alpha_n^m(t) \cdot f_{nk}^m(x_1, x_2) \quad [3.37]$$

siendo $NN = N$ (número de nodos del contorno) + NP (número de polos del dominio).

La integral de dominio de [3.36] se puede poner como:

$$\int_D u_{lk}^* \rho \ddot{u}_k d\Omega = \rho \sum_{m=1}^{NN} \alpha_n^m \int_D u_{lk}^* f_{nk}^m d\Omega \quad [3.38]$$

Las funciones de forma f_{nk} deben ser tales que permitan obtener Ψ_k con facilidad. Éstas deben verificar:

$$C_{ksmr} \Psi_{mn,rs} = f_{nk} \quad [3.39]$$

Sin embargo obtener las funciones Ψ_{nm} es una tarea difícil por lo que en elasticidad anisótropa se procede al revés a como se hacía para el problema del potencial, se supone la función Ψ_{nm} y, a partir de ella y de la expresión [3.39] se obtiene f_{nk} .

Teniendo en cuenta [3.38] en [3.36]:

$$c_{lk} u_k + \int_{\partial D} p_{lk}^* u_k d\Gamma = \int_{\partial D} u_{lk}^* p_k d\Gamma - \rho \sum_{m=1}^{NN} \alpha_n^m \int_D u_{lk}^* f_{nk}^m d\Omega \quad [3.46]$$

Considerando ahora la expresión [3.39] e integrando por partes la integral de dominio de la expresión anterior, resulta:

$$\begin{aligned} \int_D u_{lk}^* f_{nk}^m d\Omega &= \int_D u_{lk}^* C_{ksmr} \Psi_{mn,rs} d\Omega = \int_D \left(u_{lk}^* C_{ksmr} \Psi_{mn,r} \right)_{,s} d\Omega - \int_D u_{lk,s}^* C_{ksmr} \Psi_{mn,r} d\Omega = \\ &= \int_{\partial D} u_{lk}^* C_{ksmr} \Psi_{mn,r} n_s d\Gamma - \int_D u_{lk,s}^* C_{ksmr} \Psi_{mn,r} d\Omega = \int_{\partial D} u_{lk}^* \eta_{kn} d\Gamma - \int_D C_{mrks} u_{lk,s}^* \Psi_{mn,r} d\Omega \end{aligned} \quad [3.41]$$

La segunda integral de la expresión anterior se puede poner como:

$$\begin{aligned} \int_D C_{mrks} u_{lk,s}^* \Psi_{mn,r} d\Omega &= \int_D C_{mrks} \varepsilon_{lks}^* \Psi_{mn,r} d\Omega = \int_D \sigma_{lmr}^* \Psi_{mn,r} d\Omega = \\ &= \int_D \left(\sigma_{lmr}^* \Psi_{mn} \right)_{,r} d\Omega - \int_D \sigma_{lmr,r}^* \Psi_{mn} d\Omega = \int_{\partial D} \sigma_{lmr}^* n_r \Psi_{mn} dS - \int_D \sigma_{lmr,r}^* \Psi_{mn} d\Omega = \\ &= \int_{\partial D} p_{lm}^* \Psi_{mn} dS + \int_D b_{lm}^* \Psi_{mn} d\Omega = \int_{\partial D} p_{lk}^* \Psi_{kn} dS + c_{lk} \Psi_{kn} \end{aligned} \quad [3.42]$$

Teniendo en cuenta [3.41] y [3.42] en [3.40]:

$$c_{lk}u_k + \int_{\partial D} p^*_{lk}u_k d\Gamma = \int_{\partial D} u^*_{lk}p_k d\Gamma - \rho \sum_{m=1}^{NN} \alpha_n^m \left\{ c_{lk}\Psi_{kn}^m - \int_{\partial D} u^*_{lk}\eta_{kn}^m d\Gamma + \int_{\partial D} p^*_{lk}\Psi_{kn}^m d\Gamma \right\} \quad [3.43]$$

En la expresión anterior Ψ y η tienen significado de desplazamiento y vector tensión, respectivamente:

$$u_k^m = \Psi_{kn}^m e_n \quad [3.44]$$

$$p_k^m = \eta_{kn}^m e_n \quad [3.45]$$

$$\eta_{kn} = \hat{\sigma}_{kns} n_s \quad [3.46]$$

En la expresión [3.46] $\hat{\sigma}_{kns}$ es el tensor de tensiones que se obtiene al derivar el campo de desplazamientos ψ_{kn} para obtener las deformaciones correspondientes y, posteriormente, aplicar la ley de comportamiento [3.3].

Si se expresa la expresión [3.43] en forma matricial se llega a:

$$\mathbf{Hu} - \mathbf{Gp} = \rho(\mathbf{H\Psi} - \mathbf{G\eta})\boldsymbol{\alpha} \quad [3.47]$$

Teniendo en cuenta [3.37] $\ddot{\mathbf{u}} = \mathbf{F} \cdot \boldsymbol{\alpha} \Rightarrow \boldsymbol{\alpha} = \mathbf{F}^{-1} \ddot{\mathbf{u}}$, e introduciendo esto en la expresión anterior:

$$\mathbf{Hu} - \mathbf{Gp} = \rho(\mathbf{H\Psi} - \mathbf{G\eta})\mathbf{F}^{-1}\ddot{\mathbf{u}} \quad [3.48]$$

Llamando:

$$\mathbf{M} = -\rho(\mathbf{H\Psi} - \mathbf{G\eta})\mathbf{F}^{-1} \quad [3.49]$$

la expresión [3.48] se reduce a:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{Hu} = \mathbf{Gp} \quad [3.50]$$

La expresión [3.50] se reduce a un sistema de ecuaciones lineales cuando se hace una discretización en el espacio y en el tiempo. La discretización en el espacio se realizará mediante elementos cuadráticos iguales a los considerados en los problemas de potencial, apartado 2.4, en cuanto a la discretización en el tiempo se verá en el apartado 3.7 del presente capítulo.

El vector desplazamiento y el de tensión son:

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi_1' & 0 & \varphi_2' & 0 & \varphi_3' & 0 \\ 0 & \varphi_1' & 0 & \varphi_2' & 0 & \varphi_3' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1^1 \\ u_2^1 \\ u_1^2 \\ u_2^2 \\ u_1^3 \\ u_2^3 \end{pmatrix} = \Phi \mathbf{u}^j \quad [3.51]$$

$$\mathbf{q} = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi_1' & 0 & \varphi_2' & 0 & \varphi_3' & 0 \\ 0 & \varphi_1' & 0 & \varphi_2' & 0 & \varphi_3' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1^1 \\ q_2^1 \\ q_1^2 \\ q_2^2 \\ q_1^3 \\ q_2^3 \end{pmatrix} = \Phi \mathbf{q}^j \quad [3.52]$$

Si se desarrolla la expresión [3.50], teniendo en cuenta [3.51] y [3.52] queda la expresión [3.53], siendo NE el número de elementos:

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}_i \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}_i + \sum_{j=1}^{NE} \int_{\partial D_j} \begin{pmatrix} p_{11}^* & p_{12}^* \\ p_{21}^* & p_{22}^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_1' & 0 & \varphi_2' & 0 & \varphi_3' & 0 \\ 0 & \varphi_1' & 0 & \varphi_2' & 0 & \varphi_3' \end{pmatrix} d\Gamma_j \begin{pmatrix} u_1^1 \\ u_2^1 \\ u_1^2 \\ u_2^2 \\ u_1^3 \\ u_2^3 \end{pmatrix} = \\ & = \sum_{j=1}^{NE} \int_{\partial D_j} \begin{pmatrix} u_{11}^* & u_{12}^* \\ u_{21}^* & u_{22}^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_1' & 0 & \varphi_2' & 0 & \varphi_3' & 0 \\ 0 & \varphi_1' & 0 & \varphi_2' & 0 & \varphi_3' \end{pmatrix} d\Gamma_j \begin{pmatrix} p_1^1 \\ p_2^1 \\ p_1^2 \\ p_2^2 \\ p_1^3 \\ p_2^3 \end{pmatrix} + \\ & \rho \sum_{m=1}^{NN} \left[\sum_{j=1}^{NE} \left\{ \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}_i \begin{pmatrix} \Psi_{11} & \Psi_{12} \\ \Psi_{21} & \Psi_{22} \end{pmatrix}_{ij} - \int_{\Gamma_j} \begin{pmatrix} u_{11}^* & u_{12}^* \\ u_{21}^* & u_{22}^* \end{pmatrix}_i \begin{pmatrix} \varphi_1' & 0 & \varphi_2' & 0 & \varphi_3' & 0 \\ 0 & \varphi_1' & 0 & \varphi_2' & 0 & \varphi_3' \end{pmatrix} d\Gamma \right\} \begin{pmatrix} \eta_{11} & \eta_{12} \\ \eta_{21} & \eta_{22} \end{pmatrix}_{kj} \right] + \\ & + \left[\int_{\partial D_j} \begin{pmatrix} p_{11}^* & p_{12}^* \\ p_{21}^* & p_{22}^* \end{pmatrix}_i \begin{pmatrix} \varphi_1' & 0 & \varphi_2' & 0 & \varphi_3' & 0 \\ 0 & \varphi_1' & 0 & \varphi_2' & 0 & \varphi_3' \end{pmatrix} d\Gamma \right] \left\{ \begin{pmatrix} \Psi_{11} & \Psi_{12} \\ \Psi_{21} & \Psi_{22} \end{pmatrix}_{kj} \right\} \left[\begin{pmatrix} f_{11} & f_{21} \\ f_{21} & f_{22} \end{pmatrix}_k \right]^{-1} \begin{pmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad [3.53]$$

3.5. La solución Fundamental

A la ecuación de equilibrio [3.34], le corresponde la ecuación de Navier:

$$C_{jilk} u_{j,i,k} + \Delta e^j = 0 \quad [3.54]$$

La solución en Elasticidad Bidimensional Anisótropa es (Zhang et al, 1996, p. ej):

$$u_{ji}^*(z_k, z'_k) = 2\text{Re} \left[q_{i1} A_{j1} \ln(z_1 - z'_1) + q_{i2} A_{j2} \ln(z_2 - z'_2) \right] \quad [3.55]$$

En la expresión anterior μ_k son los términos definidos en [3.27] y z_k y z'_k en [3.28].

Los coeficientes q_{ik} son:

$$q_{ik} = \begin{pmatrix} \beta_{11}\mu_k^2 + \beta_{12} - \beta_{16}\mu_k \\ \beta_{12}\mu_k + \beta_{22}/\mu_k - \beta_{26} \end{pmatrix} \quad [3.56]$$

Las constantes β_{ij} son las componentes de la matriz de flexibilidad definida en [3.19]

Y los A_{jk} son las soluciones del siguiente sistema de ecuaciones complejo:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ \mu_1 & -\bar{\mu}_1 & \mu_2 & -\bar{\mu}_2 \\ q_{11} & -\bar{q}_{11} & q_{12} & -\bar{q}_{12} \\ q_{21} & -\bar{q}_{21} & q_{22} & -\bar{q}_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{j1} \\ \bar{A}_{j1} \\ A_{j2} \\ \bar{A}_{j2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta_{j2}/(2\pi i) \\ -\delta_{j1}/(2\pi i) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad [3.57]$$

En cuanto a la tensión fundamental:

$$p_{ji}^*(z_k, z'_k) = 2\text{Re} \left[g_{i1} A_{j1} \frac{1}{z_1 - z'_1} (\mu_1 n_1 - n_2) + g_{i2} A_{j2} \frac{1}{z_2 - z'_2} (\mu_2 n_1 - n_2) \right] \quad [3.58]$$

En la expresión anterior el único factor desconocido es el tensor g_{ik} , donde:

$$[g_{ik}] = \begin{pmatrix} \mu_1 & \mu_2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \quad [3.59]$$

siendo n_k las componentes del vector normal al elemento.

Tanto en la expresión [3.56] como la [3.58] se trabaja con números complejos aunque el resultado final es real. Para ello se va a explicitar ambas expresiones en función de números reales, descomponiendo cada coeficiente en un número real y otro imaginario:

$$\begin{aligned} q_{ik} &= q_{ik}^R + iq_{ik}^I \\ A_{jk} &= A_{jk}^R + iA_{jk}^I \\ g_{ik} &= g_{ik}^R + ig_{ik}^I \end{aligned} \quad [3.60]$$

A continuación se va a transformar la solución fundamental, partiendo de la descomposición en la parte real e imaginaria de:

$$\ln(z_k - z'_k) = \ln[(x_1 - x'_1) + \alpha_k(x_2 - x'_2) + i\beta_k(x_2 - x'_2)] = \ln r_k + i\theta_k \quad [3.61]$$

En [3.61] (LePage, 1980, p. ej):

$$\begin{aligned} r_k &= \sqrt{((x_1 - x'_1) + \alpha_k(x_2 - x'_2))^2 + \beta_k^2(x_2 - x'_2)^2} \\ \theta_k &= \arctan\left(\frac{\beta_k(x_2 - x'_2)}{(x_1 - x'_1) + \alpha_k(x_2 - x'_2)}\right) \end{aligned} \quad [3.61]$$

Teniendo en cuenta [3.61] y [3.60] en [3.55]:

$$\begin{aligned} u_{ji}^* &= 2\left\{ (p_{i1}^R A_{j1}^R - p_{i1}^I A_{j1}^I) \ln r_1 - (p_{i1}^R A_{j1}^I + p_{i1}^I A_{j1}^R) \theta_1 + \right. \\ &\quad \left. (p_{i2}^R A_{j2}^R - p_{i2}^I A_{j2}^I) \ln r_2 - (p_{i2}^R A_{j2}^I + p_{i2}^I A_{j2}^R) \theta_2 \right\} \end{aligned} \quad [3.63]$$

Para la tensión fundamental es necesario desarrollar:

$$\frac{1}{z_k - z'_k} = \frac{(x_1 - x'_1) + \alpha_k(x_2 - x'_2)}{r_k^2} - i \frac{\beta_k(x_2 - x'_2)}{r_k^2} \quad [3.64]$$

donde r_k es el valor que aparece en [3.62].

Teniendo en cuenta [3.64] la expresión [3.58] queda:

$$\begin{aligned}
p_{ij}^* = & (g_{j1}^R A_{i1}^R - g_{j1}^I A_{i1}^I) \frac{[(x_1 - x'_1) + \alpha_1(x_2 - x'_2)](\alpha_1 n_1 - n_2) + \beta_1^2 n_1(x_2 - x'_2)}{r_1^2} + \\
& - (g_{j1}^R A_{i1}^I - g_{j1}^I A_{i1}^R) \frac{[(x_1 - x'_1) + \alpha_1(x_2 - x'_2)]\beta_1 n_1 + \beta_1(x_2 - x'_2)(\alpha_1 n_1 - n_2)}{r_1^2} + \\
& + (g_{j2}^R A_{i2}^R - g_{j2}^I A_{i2}^I) \frac{[(x_1 - x'_1) + \alpha_2(x_2 - x'_2)](\alpha_2 n_1 - n_2) + \beta_2^2 n_1(x_2 - x'_2)}{r_2^2} + \\
& - (g_{j2}^R A_{i2}^I - g_{j2}^I A_{i2}^R) \frac{[(x_1 - x'_1) + \alpha_2(x_2 - x'_2)]\beta_2 n_1 + \beta_2(x_2 - x'_2)(\alpha_2 n_1 - n_2)}{r_2^2}
\end{aligned} \quad [3.65]$$

3.6. Elementos de la Matriz G

Los elementos de la matriz G vienen definidos por la integral:

$$\int_{\partial D_j} \begin{pmatrix} u_{11}^* & u_{12}^* \\ u_{21}^* & u_{22}^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_1' & 0 & \varphi_2' & 0 & \varphi_3' & 0 \\ 0 & \varphi_1' & 0 & \varphi_2' & 0 & \varphi_3' \end{pmatrix} d\Gamma_j = \begin{pmatrix} g_{11}^1 & g_{12}^1 & g_{11}^2 & g_{12}^2 & g_{11}^3 & g_{12}^3 \\ g_{21}^1 & g_{22}^1 & g_{21}^2 & g_{22}^2 & g_{21}^3 & g_{22}^3 \end{pmatrix} \quad [3.66]$$

De forma análoga a como se hizo en el problema térmico hay que distinguir si el nodo i pertenece o no al elemento j , por la aparición de integrales singulares en el primer caso.

– Matriz G, nodo no perteneciente al propio elemento

El término que hay que evaluar será:

$$g_{ij}^k = \int_{\partial D_j} \varphi_k' u_{ij}^* d\Gamma \quad [3.67]$$

La función φ_k' , de la integral anterior, vendrá dada por una de las expresiones de [2.25] y, al igual que esta función, el resto del integrando se pondrá en función de la variable natural ξ , como se hizo en el problema del potencial. El diferencial de longitud $d\Gamma$ se puede poner según la expresión [2.36].

Introduciendo en [3.67] la ecuación [3.63] se puede deducir que la obtención de [3.67] se reduce a las dos integrales siguientes:

$$\int_{\partial D_j} \varphi_m' \ln r_k d\Gamma = \int_{\partial D_j} \varphi_m' \ln r_k \sqrt{(A_2 \xi + B_2)^2 + (A_1 \xi + B_1)^2} d\xi \quad [3.68]$$

$$\int_{\partial D_j} \varphi_m' \theta_k d\Gamma = \int_{\partial D_j} \varphi_m' \theta_k \sqrt{(A_2 \xi + B_2)^2 + (A_1 \xi + B_1)^2} d\xi \quad [3.69]$$

En las expresiones anteriores r_k y θ_k vienen dados en [3.62].

– **Matriz G, nodo perteneciente al mismo elemento**

En este caso las integrales definidas en [3.68] y [3.69] son singulares. Para la integral definida en [3.69] la singularidad es evitable:

$$\int_{\partial D_j} \varphi_m' \theta_k d\Gamma = \int_{\partial D_j} \varphi_m' \arctan \frac{\beta_k (A_2 (\xi + \xi') + B_2)}{(A_1 (\xi + \xi') + B_1) + \alpha_k (A_2 (\xi + \xi') + B_2)} \sqrt{(A_2 \xi + B_2)^2 + (A_1 \xi + B_1)^2} d\xi \quad [3.70]$$

En la expresión anterior se le ha asociado una coordenada natural ξ' a un punto cualquiera del elemento j.

En cuanto a la integral del término logarítmico, [3.68], se resolverá de forma análoga al problema de potencial, descomponiendo la integral en dos intervalos.

$$\int_{\partial D_j} \varphi_k' \ln r_k d\Gamma = \int_{\xi=-1}^{\xi=\xi'} \varphi_k' \ln r_k d\Gamma + \int_{\xi=\xi'}^{\xi=1} \varphi_k' \ln r_k d\Gamma \quad [3.71]$$

– **Integral** $\int_{\xi=-1}^{\xi=\xi'} \varphi_k' \ln r_k d\Gamma$:

Se realiza el cambio de variable definido en [2.52]:

$$\eta = \frac{\xi' - \xi}{1 + \xi'} \quad \text{o a la inversa} \quad \xi = -(1 + \xi')\eta + \xi' \quad [2.52]$$

Con esta nueva variable el diferencial de longitud se transforma en [2.53] y r_k es:

$$r_k^2(\eta) = \eta(1 + \xi') \left[\left(\left(\frac{A_1}{2} [(1 + \xi')\eta - 2\xi'] - B_1 \right) + \alpha_k \left(\frac{A_2}{2} [(1 + \xi')\eta - 2\xi'] - B_2 \right) \right)^2 + \beta_k^2 \left(\frac{A_2}{2} [(1 + \xi')\eta - 2\xi'] - B_2 \right)^2 \right] \quad [3.72]$$

Introduciendo [3.72] y [2.53] en la primera integral de [3.71], ésta se puede descomponer en tres integrales:

$$\int_{\xi=-1}^{\xi=\xi'} \varphi_k' \ln(r_k) d\Gamma = \int_0^1 f(\eta) d\eta + \int_{-1}^1 h(\xi) d\xi + \int_{-1}^1 g(\xi) d\xi \quad [3.73]$$

En las tres integrales en que se ha descompuesto la integral inicial aparece el diferencial de longitud $d\Gamma$, en la primera integral éste se pone en función de la variable η y en las otras dos en función de ξ , de forma que las tres integrales anteriores quedan:

$$\int_0^1 f(\eta) d\eta = - \int_0^1 \varphi_k'(\eta) \ln\left(\frac{1}{\eta}\right) \sqrt{[A_1(-(\xi'+1)\eta + \xi') + B_1]^2 + [A_1(-(\xi'+1)\eta + \xi') + B_1]^2} (1 + \xi') d\eta \quad [3.74]$$

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{\xi'} g(\xi) d\xi &= \\ &= \int_{-1}^{\xi'} \varphi_k'(\xi) \ln \left(\sqrt{\left(\left(\frac{A_1}{2} [(1 + \xi')\eta - 2\xi'] - B_1 \right) + \alpha_k \left(\frac{A_2}{2} [(1 + \xi')\eta - 2\xi'] - B_2 \right) \right)^2 + \beta_k^2 \left(\frac{A_2}{2} [(1 + \xi')\eta - 2\xi'] - B_2 \right)^2} \right) \\ &\quad \cdot \sqrt{(A_1\xi + B_1)^2 + (A_2\xi + B_2)^2} d\xi \end{aligned} \quad [3.75]$$

Para determinar la segunda integral se realiza el cambio de variables:

$$\mu = \frac{2}{1 + \xi'} \xi + \frac{1 - \xi'}{1 + \xi'} \quad \text{o a la inversa} \quad \xi = -\frac{1 + \xi'}{2} \mu + \frac{1 - \xi'}{2} \quad [2.58]$$

$$\int_{-1}^{\xi'} h(\xi) d\xi = \ln(1 + \xi') \frac{1 + \xi'}{2} \int_0^1 \varphi_k'(\mu) \sqrt{[A_1\left(\frac{1 + \xi'}{2} \mu - \frac{1 - \xi'}{2}\right) + B_1]^2 + [A_2\left(\frac{1 + \xi'}{2} \mu - \frac{1 - \xi'}{2}\right) + B_2]^2} d\mu \quad [3.76]$$

Las funciones $\phi'(\eta)$ y $\phi'(\mu)$ de [3.74] y [3.76] vienen definidas en [2.60] y [2.61].

– **Integral** $\int_{\xi=\xi'}^{\xi=1} \varphi_k' \ln r_k d\Gamma$:

Se procede de forma similar a como se hizo en la integral anterior; para esta integral se realiza el cambio de variable:

$$\eta = \frac{\xi' - \xi}{1 - \xi'} \quad \text{o a la inversa} \quad \xi = (1 - \xi')\eta + \xi' \quad [2.62]$$

Se consigue la descomposición:

$$\int_{\xi=\xi'}^{\xi=1} \varphi'_k(\xi) \ln r_k d\Gamma = \int_0^1 f(\eta) d\eta + \int_{\xi'}^1 g(\xi) d\xi + \int_{\xi'}^1 h(\xi) d\xi \quad [3.77]$$

donde el valor de cada integral anterior es:

$$\int_0^1 f(\eta) d\eta = -\int_0^1 \varphi'_k(\eta) \ln \left(\frac{1}{\eta} \right) \sqrt{[A_1((-\xi'+1)\eta + \xi') + B_1]^2 + [A_2((-\xi'+1)\eta + \xi') + B_2]^2} (1-\xi') d\eta \quad [3.78]$$

$$\begin{aligned} \int_{\xi'}^1 g(\xi) d\xi &= \\ &= \int_{\xi'}^1 \varphi'_k(\xi) \ln \left(\sqrt{\left(\frac{A_1}{2} [(1+\xi')\eta - 2\xi'] - B_1 \right) + \alpha_k \left(\frac{A_2}{2} [(1+\xi')\eta - 2\xi'] - B_2 \right)}^2 + \beta_k^2 \left(\frac{A_2}{2} [(1+\xi')\eta - 2\xi'] - B_2 \right)^2} \right) \\ &\quad \cdot \sqrt{(A_1\xi + B_1)^2 + (A_2\xi + B_2)^2} d\xi \end{aligned} \quad [3.79]$$

El integrando de [3.79] es el mismo que el de [3.75], quedando la anterior expresión como suma de ambas.

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 g(\xi) d\xi &= \\ &= \int_{-1}^1 \varphi'_k(\xi) \ln \left(\sqrt{\left(\frac{A_1}{2} [(1+\xi')\eta - 2\xi'] - B_1 \right) + \alpha_k \left(\frac{A_2}{2} [(1+\xi')\eta - 2\xi'] - B_2 \right)}^2 + \beta_k^2 \left(\frac{A_2}{2} [(1+\xi')\eta - 2\xi'] - B_2 \right)^2} \right) \\ &\quad \cdot \sqrt{(A_1\xi + B_1)^2 + (A_2\xi + B_2)^2} d\xi \end{aligned} \quad [3.80]$$

Por último, para la tercera integral se hace el cambio de variable definido en [2.68]:

$$\mu = \frac{2}{1-\xi'} \xi - \frac{1+\xi'}{1-\xi'} \quad \text{o la inversa} \quad \xi = \frac{1-\xi'}{2} \mu + \frac{1+\xi'}{2} \quad [2.68]$$

$$\int_{-1}^{\xi'} h(\xi) d\xi = \ln(1-\xi') \frac{1-\xi'}{2} \int_0^1 \varphi'_k(\mu) \sqrt{[A_1 \left(\frac{1-\xi'}{2} \mu + \frac{1-\xi'}{2} \right) + B_1]^2 + [A_2 \left(\frac{1-\xi'}{2} \mu + \frac{1+\xi'}{2} \right) + B_2]^2} d\mu \quad [3.81]$$

En cuanto a las funciones de forma $\phi'(\eta)$ y $\phi'(\mu)$ de [3.78] y [3.81] son las mismas que aparecían en las ecuaciones [2.69] y [2.70], respectivamente.

3.7. Elementos de la Matriz H

Cada elemento tendrá 12 términos de la matriz H que son los que se ven a continuación:

$$\int_{\partial D_j} \begin{pmatrix} p_{11}^* & p_{12}^* \\ p_{21}^* & p_{22}^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_1' & 0 & \varphi_2' & 0 & \varphi_3' & 0 \\ 0 & \varphi_1' & 0 & \varphi_2' & 0 & \varphi_3' \end{pmatrix} d\Gamma_j = \begin{pmatrix} h_{11}^1 & h_{12}^1 & h_{11}^2 & h_{12}^2 & h_{11}^3 & h_{12}^3 \\ h_{21}^1 & h_{22}^1 & h_{21}^2 & h_{22}^2 & h_{21}^3 & h_{22}^3 \end{pmatrix}$$

Hay que distinguir si el nodo i pertenece o no al elemento j.

- **Elemento de la matriz H cuando el nodo no pertenece al elemento**

De forma análoga a como se procedió con la matriz G es necesario obtener las integrales:

$$\int_{-1}^1 \varphi_k'(\xi) \frac{[(x_1 - x'_1) + \alpha_k(x_2 - x'_2)](\alpha_k n_1 - n_2) + \beta_k^2(x_2 - x'_2)n_1}{r_k^2} \sqrt{(A_1\xi + B_1)^2 + (A_2\xi + B_2)^2} d\xi \quad [3.82]$$

$$\int_{-1}^1 \varphi_k'(\xi) \frac{[(x_1 - x'_1) + \alpha_k(x_2 - x'_2)]\beta_k n_1 + \beta_k(x_2 - x'_2)(\alpha_k n_1 - n_2)}{r_k^2} \sqrt{(A_1\xi + B_1)^2 + (A_2\xi + B_2)^2} d\xi \quad [3.83]$$

En las expresiones anteriores r_k viene dada en [3.62] y n_1 y n_2 son las componentes de la normal al elemento que vienen determinadas en [2.38].

- **Elemento de la matriz H cuando el nodo pertenece al elemento**

Este caso resulta más complicado que en la matriz G. Las expresiones [3.82] y [3.83] se modificarán poniendo las coordenadas del nodo (x_1, x_2) que pertenece al elemento en función de una coordenada natural ξ' . Se utilizan los valores de n_1 y n_2 dados en [2.38], las coordenadas x_1 y x_2 de la expresión [2.34] y [2.35] y el diferencial de longitud de [2.36] en función de la coordenada natural.

Se comenzará estudiando la expresión [3.83] que presenta una singularidad evitable:

$$\frac{1}{2} \int_{-1}^1 \varphi_k'(\xi) \frac{B_1 A_2 - A_1 B_2}{\left(\frac{A_1}{2}(\xi + \xi') + B_1 + \alpha_k \left(\frac{A_2}{2}(\xi + \xi') + B_2 \right) \right)^2 + \beta_k^2 \left(\frac{A_2}{2}(\xi + \xi') + B_2 \right)^2} d\xi \quad [3.84]$$

En la expresión anterior tanto numerador como denominador se han dividido entre $(\xi - \xi')^2$.

La integral [3.82] sólo se podrá dividir entre $(\xi - \xi')$:

$$\int_{-1}^1 \varphi_k'(\xi) \frac{\left(\left(\frac{A_1}{2}(\xi + \xi') + B_1 \right) + \alpha_k \left(\frac{A_2}{2}(\xi + \xi') + B_2 \right) \right) \left(\alpha_k (A_2 \xi + B_2) + (A_1 \xi + B_1) \right) + \beta_k^2 \left(\frac{A_2}{2}(\xi + \xi') + B_2 \right) (A_2 \xi + B_2)}{(\xi - \xi') \left[\left(\frac{A_1}{2}(\xi + \xi') + B_1 \right) + \alpha_k \left(\frac{A_2}{2}(\xi + \xi') + B_2 \right) \right]^2 + \beta_k^2 \left(\frac{A_2}{2}(\xi + \xi') + B_2 \right)^2} d\xi$$

[3.85]

Como la integral [3.85] es singular, no se puede resolver a menos que se cuente con $\varphi_k'(\xi)$, pues no hay que olvidar que esta función es un producto de dos binomios, pero de los tres nodos que definen el elemento sólo las funciones de forma de dos de ellos tiene el binomio $(\xi - \xi')$. El término h^{ii} carece de él, aunque se puede determinar considerando hipótesis de sólido rígido, (Brebba & Domínguez, 1989):

$$\sum_{j=1}^N h_{mm}^{ij} = 0$$

[3.86]

3.8. Discretización en el tiempo

Para discretizar en el tiempo la expresión [3.50] se va a seguir un método directo, esto es, no se va a transformar la ecuación mediante la transformada de Laplace o de Fourier, sino que se va a tomar el tiempo como variable. Partiendo de que las variables u y p son conocidas en el tiempo t_m , se estimarán en el tiempo t_{m+1} , para lo que se utilizarán métodos propios del Método de los Elementos Finitos. Se estudiará un intervalo de tiempo de 0 a T y, sin pérdida de generalidad, se considerarán intervalos de tiempos iguales, de forma que si hay N intervalos de tiempo el incremento será $\Delta t = \frac{T}{N}$.

Dependiendo de la aproximación que se haga de la aceleración se distinguen diferentes métodos. Tres métodos han sido implementados (Bathe, 1976 o Zienkiewicz, 2004) aunque existen otros métodos que han sido tratados a lo largo de la literatura como el de la solución temporal cuadrática QC (Wang et al, 1997; Yu et al, 1997) para elastodinámica transitoria. Resultan también de interés los métodos desarrollados por Demirel & Wang (1987) de truncamiento para reducir el tiempo de computación o incluso una integración analítica para problemas determinados (Crouch & Tian, 1988).

3.8.1. El Método de Wilson

Éste es un método de aceleración lineal, pues se establece una variación lineal de la aceleración en el intervalo de tiempo que va desde t a $t + \theta\Delta t$, donde $\theta \geq 1$, (Polyzos & Beskos, 1998) pero para que sea incondicionalmente estable $\theta \geq 1.37$, empleándose habitualmente $\theta \geq 1.4$.

Si se considera τ , un incremento de tiempo tal que $0 \leq \tau \leq \theta\Delta t$, una vez conocidas las variables del problema en un tiempo t , se particularizará la ecuación [3.50] al intervalo $t + \tau$:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}_{t+\tau} + \mathbf{H}\mathbf{u}_{t+\tau} = \mathbf{G}\mathbf{q}_{t+\tau} \quad [3.87]$$

donde las ecuaciones en el intervalo $t + \tau$, se pondrán en función de las variables en el intervalo t y de las variables en el intervalo $t + \theta\Delta t$, de la forma.

$$\ddot{\mathbf{u}}_{t+\tau} = \ddot{\mathbf{u}}_t + \frac{\tau}{\theta\Delta t} [\ddot{\mathbf{u}}_{t+\theta\Delta t} - \ddot{\mathbf{u}}_t] \quad [3.88]$$

$$\dot{\mathbf{u}}_{t+\tau} = \dot{\mathbf{u}}_t + \ddot{\mathbf{u}}_t\tau + \frac{\tau^2}{2\theta\Delta t} [\ddot{\mathbf{u}}_{t+\theta\Delta t} - \ddot{\mathbf{u}}_t] \quad [3.89]$$

$$\mathbf{u}_{t+\tau} = \mathbf{u}_t + \dot{\mathbf{u}}_t\tau + \frac{1}{2}\ddot{\mathbf{u}}_t\tau^2 + \frac{1}{6\theta\Delta t} [\ddot{\mathbf{u}}_{t+\theta\Delta t} - \ddot{\mathbf{u}}_t]\tau^3 \quad [3.90]$$

Particularizando el valor de las variables definidas en [3.88], [3.89] y [3.90] para un valor de $\tau = \theta\Delta t$, se obtiene el valor de $\ddot{\mathbf{u}}_{t+\theta\Delta t}$ de [3.90] e introduciendo estos valores en [3.87] se obtiene:

$$\left(\frac{6}{(\theta\Delta t)^2} \mathbf{M} + \mathbf{H} \right) \mathbf{u}_{t+\theta\Delta t} - \mathbf{G}\theta\mathbf{p}_{t+\Delta t} = \mathbf{G}(1-\theta)\mathbf{p}_t + \mathbf{M} \left(\frac{6}{(\theta\Delta t)^2} \mathbf{u}_t + \frac{6}{\theta\Delta t} \dot{\mathbf{u}}_t + 2\ddot{\mathbf{u}}_t \right) \quad [3.91]$$

En la expresión [3.91] se ha realizado una discretización lineal de las tensiones \mathbf{p} :

$$\mathbf{p}_{t+\theta\Delta t} = \mathbf{p}_t + \theta(\mathbf{p}_{t+\Delta t} - \mathbf{p}_t) \quad [3.92]$$

Al finalizar el cálculo de cada intervalo hay que hallar el valor de $\dot{\mathbf{u}}_{t+\Delta t}$ de [3.89] y de $\ddot{\mathbf{u}}_{t+\Delta t}$ de [3.88], para ello hay que particularizar $\theta = 1$. El valor de $\ddot{\mathbf{u}}_{t+\theta\Delta t}$ se despeja de [3.90], habiendo tomado $\tau = \theta\Delta t$.

3.8.2. El Método de Newmark

Es un método que también puede ser incluido entre los métodos de aceleración lineal. Se aproximan tanto los desplazamientos como las velocidades:

$$\dot{\mathbf{u}}_{m+1} = \dot{\mathbf{u}}_m + [(1-\delta)\ddot{\mathbf{u}}_m + \delta\ddot{\mathbf{u}}_{m+1}]\Delta t \quad [3.93]$$

$$\ddot{\mathbf{u}}_{m+1} = \ddot{\mathbf{u}}_m + [(1-\delta)\ddot{\mathbf{u}}_m + \delta\ddot{\mathbf{u}}_{m+1}]\Delta t \quad [3.94]$$

La ecuación [3.50] se particulariza para un tiempo $t+\Delta t$, expresión [3.87] con $\tau = \Delta t$, y se introduce la expresión de $\ddot{\mathbf{u}}_{m+1}$ obtenida de [3.94]:

$$\left(\frac{1}{\alpha\Delta t^2}\mathbf{M} + \mathbf{H}\right)\mathbf{u}_{m+1} - \mathbf{G}\mathbf{p}_{m+1} = \mathbf{M}\left(\frac{1}{\alpha\Delta t^2}\mathbf{u}_m + \frac{1}{\alpha\Delta t}\dot{\mathbf{u}}_m + \left(\frac{1}{2\alpha}-1\right)\ddot{\mathbf{u}}_m\right) \quad [3.95]$$

De los parámetros α y δ depende la consistencia y estabilidad del método. Newmark propone como incondicionalmente estable $\alpha = \frac{1}{4}$ y $\delta = \frac{1}{2}$. En este método hay que calcular velocidades aunque la ecuación carezca de términos de amortiguamiento. En el caso de que $\alpha = \frac{1}{6}$ y $\delta = \frac{1}{2}$ el método de Newmark se corresponde con el de aceleración lineal. Para que sea incondicionalmente estable se debe cumplir:

$$\delta \geq \frac{1}{2}; \quad \alpha \geq \frac{1}{4}(0.5 + \delta)^2 \quad [3.96]$$

3.8.3. El Método de Houbolt.

Este método es implícito; esto es, se determina la aceleración en un tiempo t_{m+1} a partir de los desplazamientos en los periodos de tiempo anteriores, como se muestra, a continuación:

$$\ddot{\mathbf{u}}_{m+1} = \frac{1}{\Delta t^2}(2\mathbf{u}_{m+1} - 5\mathbf{u}_m + 4\mathbf{u}_{m-1} - \mathbf{u}_{m-2}) \quad [3.97]$$

Si se particulariza la ecuación [3.50] en el tiempo t_{m+1} :

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}_{m+1} + \mathbf{H}\mathbf{u}_{m+1} = \mathbf{G}\mathbf{q}_{m+1} \quad [3.98]$$

Introduciendo la expresión [3.97] en la [3.98] se obtiene:

$$\left(\frac{2}{\Delta t^2} \mathbf{M} + \mathbf{H} \right) \mathbf{u}_{m+1} - \mathbf{Gp}_{m+1} = \frac{5}{\Delta t^2} \mathbf{M} \mathbf{u}_m - \frac{4}{\Delta t^2} \mathbf{M} \mathbf{u}_{m-1} + \frac{2}{\Delta t^2} \mathbf{M} \mathbf{u}_{m-2} \quad [3.100]$$

En la expresión anterior los términos que contienen a los desplazamientos \mathbf{u}_{m+1} y fuerzas \mathbf{p}_{m+1} conocidos por condiciones de contorno pasarán junto a los términos que ya aparecen en la derecha como términos conocidos quedando como incógnitas el resto de desplazamientos y fuerzas en el contorno.

Este método presenta el inconveniente de que hay que almacenar los desplazamientos de tres pasos anteriores de tiempo (\mathbf{u}_m , \mathbf{u}_{m-1} y \mathbf{u}_{m-2}) para obtener los desplazamientos del paso actual (\mathbf{u}_{m+1}) como se desprende de [3.100]; por contra en el método de Newmark, expresión [3.91], sólo hay que almacenar variables correspondientes al periodo anterior de tiempo, pero como contrapartida requiere la obtención de velocidades y aceleraciones mediante las expresiones [3.89] y [3.90].

Aunque existen otros métodos de discretización directa del tiempo no se han desarrollado ni han sido implementados en el presente trabajo. Tales métodos son el método discontinuo de Galerkin desarrollado entre otros por Chien et al, 2003, el algoritmo de Green-Newmark implementado por Soares, 2007, etc.

3.9. Elementos de las Matrices F , ψ y η .

En el problema de potencial se elegían los elementos de la matriz F y se resolvía la ecuación [2.5] para obtener los elementos de la matriz ψ , en este caso, este proceso resulta mucho más complicado al serlo la resolución de la ecuación [3.39], por ello se elegirá una función ψ tal como (Nardini & Brebbia, 1982 o Alburquerque, 2002):

$$\psi_{ij} = r^3 \delta_{ij} \quad [3.101]$$

En la expresión anterior r no es el radio anisótropo equivalente que se definía en el problema térmico sino la distancia euclídea entre el punto de integración y el de colocación, dada por:

$$r_k = \sqrt{(x_1 - x'_1)^2 + (x_2 - x'_2)^2} \quad [3.102]$$

A esta función, y siguiendo [3.39] le corresponde:

$$r_k = \sqrt{(x_1 - x'_1)^2 + (x_2 - x'_2)^2} \quad [3.103]$$

Si bien hay autores que han partido directamente de las funciones de aproximación (Agnantiaris et al, 2001, Rashed, 2002) siempre han aplicado este tipo de funciones para comportamiento isótropo.

Considerando ψ_{ij} como un campo de desplazamientos, su derivada permite obtener las deformaciones y la ley de comportamiento las tensiones:

$$\hat{\sigma}_{ikj} = 3r^2 C_{jklm} r_{,l} \delta_{im} \quad [3.104]$$

Una vez obtenidas las tensiones para obtener los vectores tensión correspondientes, funciones η_{ik} , no hay más que aplicar la expresión [3.46].

En la literatura se ha reportado la utilización de diversas funciones de aproximación, a continuación se muestran algunos ejemplos:

$$\psi_{ij} = (A - r) r^4 \mu \delta_{ij} \quad [3.105.a]$$

$$\psi_{ij} = (r^3 + r^2) \delta_{ij} \quad [3.105.b]$$

La función definida en [3.105.a] la utilizó Park, 2002 para el problema axisimétrico isótropo, la expresión [3.105.b] se debe a Kögl & Gaul, 2003 para 3D.

3.10. Tensiones en el Dominio

Para hallar las tensiones, se partirá de la expresión de los desplazamientos en el dominio, se derivarán éstos para obtener deformaciones y, a partir de éstas, aplicando la ley de comportamiento, se obtendrán las tensiones.

Se parte de la expresión del desplazamiento, [3.53], que, para un punto del dominio se queda en:

$$u_i(P) + \int_{\partial D} p_{ik}^*(P, Q) u_k(Q) d\Gamma = \int_{\partial D} u_{ik}^*(P, Q) p_k(Q) d\Gamma - \rho \sum_{m=1}^{np} \left\{ \Psi_{il}(P, S) - \int_{\partial D} u_{in}^*(P, R) \eta_{nl}(R, S) d\Gamma + \int_{\partial D} p_{in}^*(P, R) \Psi_{nl}(R, S) d\Gamma \right\} f_{ik}(S, Q) \ddot{u}_k(Q) \quad [3.106]$$

En la expresión anterior P es el punto de cálculo, y hay que derivar respecto a las coordenadas de éste; Q , R y S son los puntos del contorno y los polos.

Las deformaciones se obtienen de la expresión [3.2], derivando los términos de [3.105] que dependen de las coordenadas del punto P :

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ij}(P) = & \frac{1}{2} \left[- \int_{\partial D} U_{ij}(P, Q) p_l(Q) d\Gamma + \int_{\partial D} P_{ij}(P, Q) u_l(Q) d\Gamma + \right. \\ & \left. + \rho \sum_{m=1}^{np} \left\{ \Phi_{isj}(P, S) - \int_{\partial D} U_{ij}(P, R) \eta_{lr}(R, S) d\Gamma + \int_{\partial D} P_{ij}(P, R) \Psi_{lr}(R, S) d\Gamma \right\} f_{lp}(S, Q) \ddot{u}_p(Q) \right] \end{aligned} \quad [3.107]$$

En la expresión anterior:

$$U_{ij}(P, Q) = \left(\frac{\partial u_{il}^*(P, Q)}{\partial x_j} + \frac{\partial u_{jl}^*(P, Q)}{\partial x_i} \right) = 2 \operatorname{Re} \left\{ \frac{q_{l1} G_{ij1}}{z_1} + \frac{q_{l2} G_{ij2}}{z_2} \right\} \quad [3.108]$$

$$P_{ij}(P, Q) = \left(\frac{\partial p_{il}^*(P, Q)}{\partial x_j} + \frac{\partial p_{jl}^*(P, Q)}{\partial x_i} \right) = 2 \operatorname{Re} \left\{ \frac{\hat{\mu}_{l1} (n_2 - \mu_1 n_1) G_{ij1}}{z_1^2} + \frac{\hat{\mu}_{l2} (n_2 - \mu_1 n_1) G_{ij2}}{z_2^2} \right\} \quad [3.109]$$

$$\Phi_{isj}(P, S) = \psi_{is,j} + \psi_{js,i} = 3r (x_j \delta_{il} + x_i \delta_{jl}) \quad [3.110]$$

En la última igualdad de [3.110] se ha tenido en cuenta la expresión de ψ dada en [3.101].

Los términos q_{lk} de la expresión [3.108] vienen dados por [3.56], y el resto de los términos son:

$$\hat{\mu}_{lk} = \begin{pmatrix} \mu_1 & \mu_2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \quad [3.111]$$

$$\begin{aligned} G_{ij1} &= A_{i1} \tilde{\mu}_{j1} + A_{j1} \tilde{\mu}_{i1} \\ G_{ij2} &= A_{i2} \tilde{\mu}_{j2} + A_{j2} \tilde{\mu}_{i2} \end{aligned} \quad [3.112]$$

Donde los coeficientes A_{jk} se obtuvieron de [3.56] y:

$$\tilde{\mu}_{mn} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \mu_1 & \mu_2 \end{pmatrix} \quad [3.113]$$

Para obtener las tensiones hay que aplicar la ley de comportamiento dada en [3.3] a las componentes del tensor de deformaciones dadas en [3.107] (Avila et al, 1997).

3.11. Ejemplos prácticos del problema elástico

3.11.1. El problema isótropo.

Se considera el sólido cuasi-isótropo de la figura 3.2, (Dominguez, 1997) sometido a una fuerza superficial unitaria repentina en $t = 0$ tal y como se muestra en la figura 3.3. Se va a considerar un sólido con una dimensión, según el eje OZ, mucho menor que las dimensiones representativas en los ejes OX y OY.

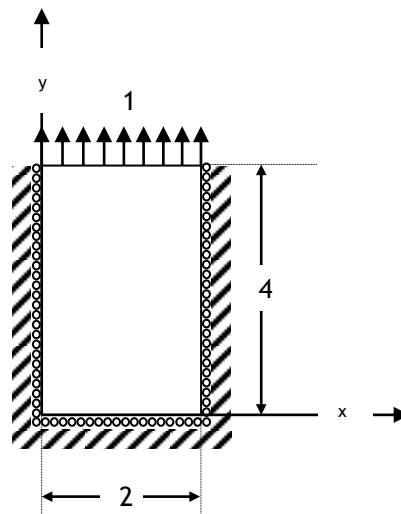


Figura 3.2: Sólido sometido a una fuerza unitaria repentina

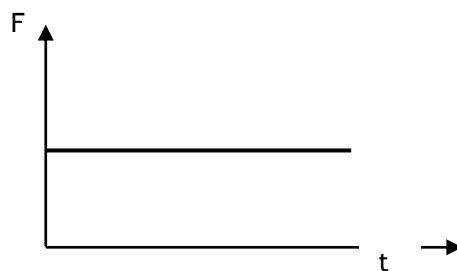


Figura 3.3: Función escalón aplicado en $y = 4$

3.11.1.1. Influencia del valor de las constantes y de la discretización. Parámetro β .

Se van a variar las constantes del material y el número de discretizaciones tanto espaciales como temporales para llegar a unos incrementos de tiempo idóneos. El incremento de tiempo teórico mínimo (Domínguez 1997) es:

$$\Delta t = 0.5 * \Delta x \sqrt{\frac{\rho}{E_{\max}} (1 - \nu^2)} \quad [3.114]$$

Donde Δx es la mitad del tamaño del elemento, ν es el coeficiente de Poisson, ρ es la densidad y E es el módulo de Young.

Después de realizar una batería de ejemplos se llega a los resultados mostrados en la tabla 3.1 en la que se muestran los valores de incrementos de tiempo que son válidos frente a los valores teóricos mínimos. N es el número de nodos del contorno y E_1 , E_2 , G , ν_{12} y ρ son las propiedades del material. En esta tabla se muestran los incrementos de tiempo adecuados en cada caso frente al tiempo mínimo.

Una vez obtenidos los incrementos de tiempo idóneos se van a representar algunos valores de desplazamientos y fuerzas frente a los valores teóricos.

	Incremento de tiempo	Tiempo mínimo
$E_1=106667$; $E_2 =106800$; $G=40000$; $\nu_{12}=0.3333$; $\rho=1$; $N=24$	[0.0006, 0.002]	0.000722
$E_1=106667$; $E_2 =106800$; $G=40000$; $\nu_{12}=0.3333$; $\rho=1$; $N=48$	[0.0006, 0.002]	0.00036
$E_1=106667$; $E_2 =106800$; $G=40000$; $\nu_{12}=0.3333$; $\rho=1$; $N=96$	[0.0006, 0.002]	0.00018
$E_1=106667$; $E_2 =106800$; $G=40000$; $\nu_{12}=0.3333$; $\rho=4$; $N=24$	[0.0015, 0.0035]	0.0015
$E_1=213334$; $E_2 =213600$; $G=80000$; $\nu_{12}=0.3333$; $\rho=1$; $N=24$	[0.0004, 0.001]	0.00051
$E_1=213334$; $E_2 =213600$; $G=80000$; $\nu_{12}=0.3333$; $\rho=4$; $N=24$	[0.0009, 0.0025]	0.00102
$E_1=53333.5$; $E_2=53600$; $G=20000$; $\nu_{12}=0.3333$; $N=24$	[0.0008, 0.002]	0.001

Tabla 3.1: Valores adecuados de incremento de tiempo para diferentes discretiones del problema de la figura 3.2

Para un material cuasi-isótropo con las constantes del material $E_1 = 106667$, $E_2 = 106800$, $\nu = 0.3333$ y $\rho = 1$, se realiza la discretización de la figura 3.4. Se han tomado 24 nodos externos.

El incremento de tiempo elegido es $\Delta t = 0.000722$, que es el que hace que $\beta = 0.5$, considerando el parámetro β definido por (Nardini & Brebbia, 1986, Chaudouet, 1987, Wang et al, 1997):

$$\beta = \sqrt{\frac{E}{(1-\nu^2)\rho}} \frac{\Delta t}{\Delta x} \quad [3.115]$$

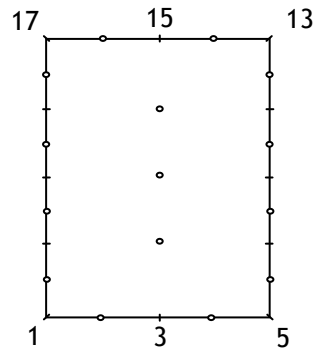


Figura 3.4: Discretización del sólido de la figura 3.2.

En las gráficas de las figuras 3.5 se muestran los valores del desplazamiento del punto 15, así como la tensión σ_y del punto 3. Se han comparado los resultados con la expresión teórica dada en [3.116]. En ambos casos se aprecia unos resultados bastante similares. Se determina es la velocidad del frente de onda, dada en [3.116.a], el desplazamiento hasta que el frente de onda recorre dos veces el sólido [3.116.b] y la fuerza desde que recorre el sólido una vez hasta que lo recorre dos veces más [3.116.c] (Achenbach, 1973).

$$c_L = \sqrt{\frac{E}{1-\nu^2}} = 346.6 \quad [3.116.a]$$

$$u = \frac{c_L}{E} t = \frac{1}{346.6} t \quad [3.116.b]$$

$$F_y = -2P = -2 \quad [3.116.c]$$

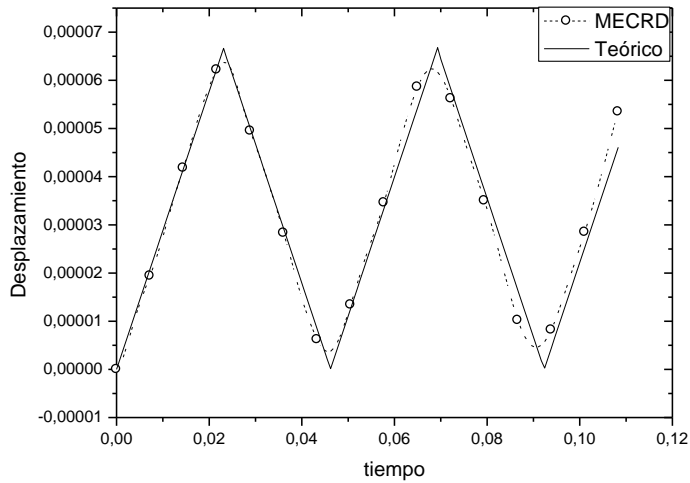


Figura 3.5. a: Desplazamiento del punto 15 del sólido de la figura 3.2, con la discretización de la figura 3.3.

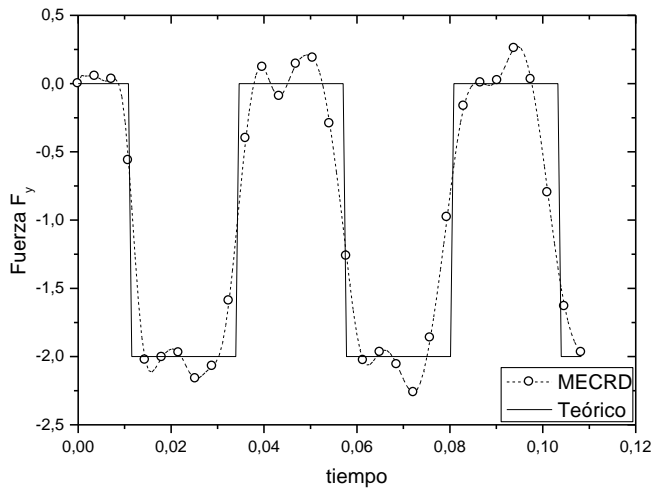
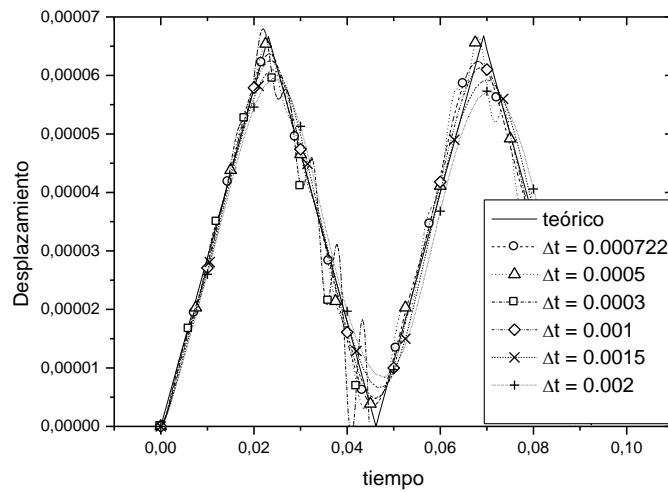


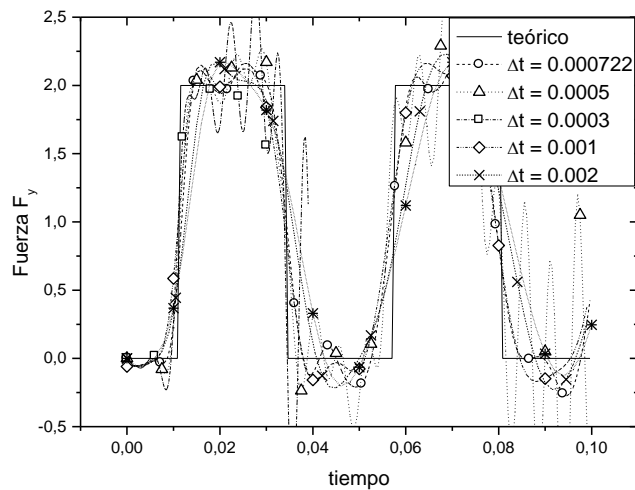
Figura 3.5.b: Fuerza F_y del punto 3 del sólido de la figura 3.2, con la discretización de la figura 3.3.

Tanto en la figura 3.5.a como en la 3.5.b se observan una buena aproximación entre resultados teóricos y numéricos.

Para ver la influencia del incremento de tiempo se ha representado la evolución de los valores anteriores ante diferentes incrementos de tiempo, tal y como se muestra en la figura 3.6.



(a)

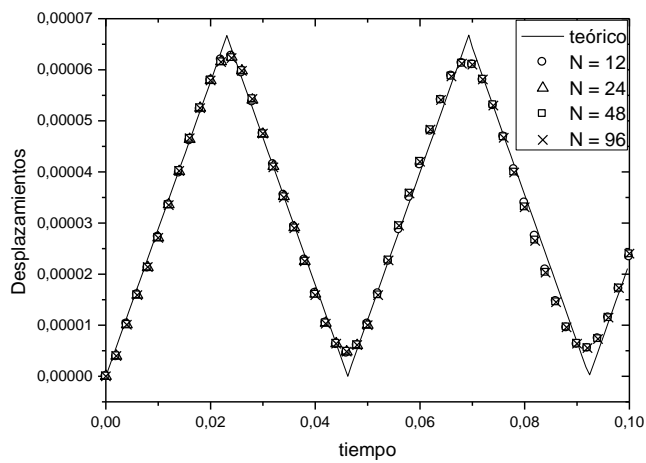


(b)

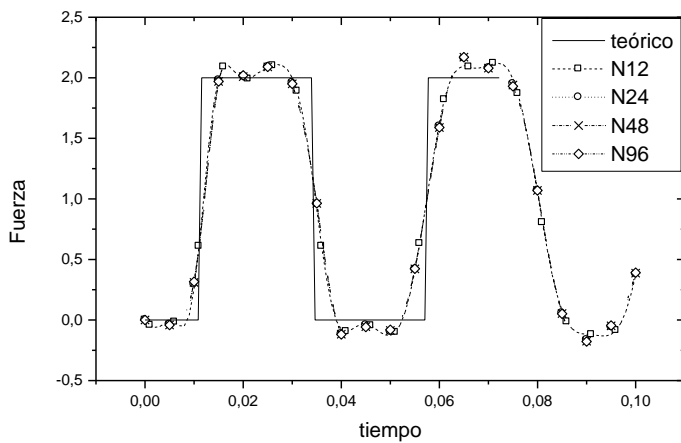
Figura 3.6: Desplazamiento del punto 15 (a) y fuerza F_y del punto 3 del sólido de la figura 3.2, con la discretización de la figura 3.3 y ante diferentes incrementos de tiempo

De las gráficas 3.6 se observan los peores resultados para los incrementos de tiempo menor que el mínimo, tanto es así que para $\Delta t = 0,0003$ la discrepancia es tan grande que se ha dejado de representar la gráfica.

A continuación se analiza la influencia del número de puntos de discretización, representando el desplazamiento del punto 15 y la fuerza F_y del punto 3. En todos los casos se ha utilizado un incremento de tiempo, $\Delta t = 0.001$ para el cual se obtienen valores del parámetro β de 0.347, 0.693, 1.386 y 2.773 para las discretizaciones de $N = 12$, 24, 48 y 96, respectivamente (figura 3.7).



(a)



(b)

Figura 3.7: Desplazamiento del punto 15 (a) y fuerza F_y del punto 3 del sólido de la figura 3.2, con la discretización de la figura 3.3 y ante diferentes discretizaciones espaciales.

En todos los ejemplos representados en las figuras 3.7 se observa una gran adecuación entre resultados teóricos y numéricos.

3.11.1.2. Número de polos o números de puntos del dominio usados en la discretización

En el ejemplo de la figura 3.2 no se requieren gran cantidad de polos, de hecho en la discretización de la figura 3.4 sólo se han utilizado 3 polos. En este caso se va a usar una discretización $N = 12$, con $\Delta t = 0.001$ y se va a variar el número de polos, desde $NP = 1$ hasta $NP = 21$ tal y como se muestra en la figura 3.8.

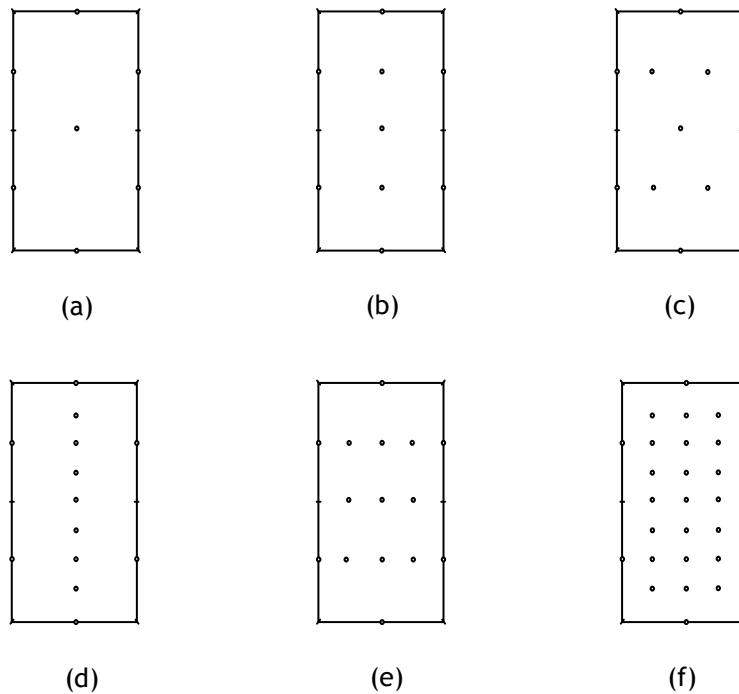
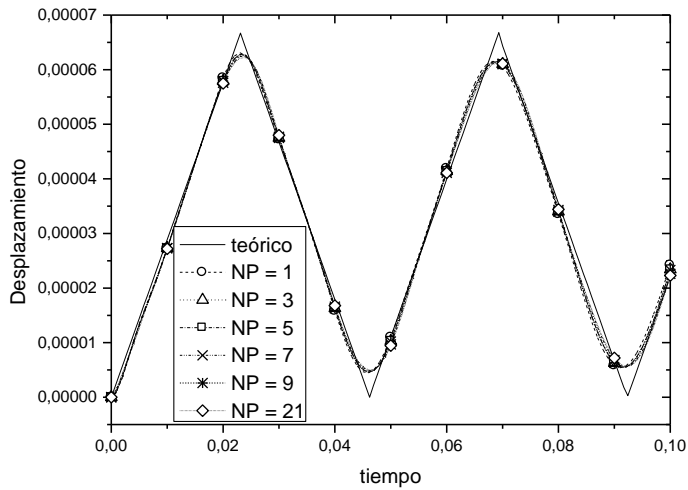
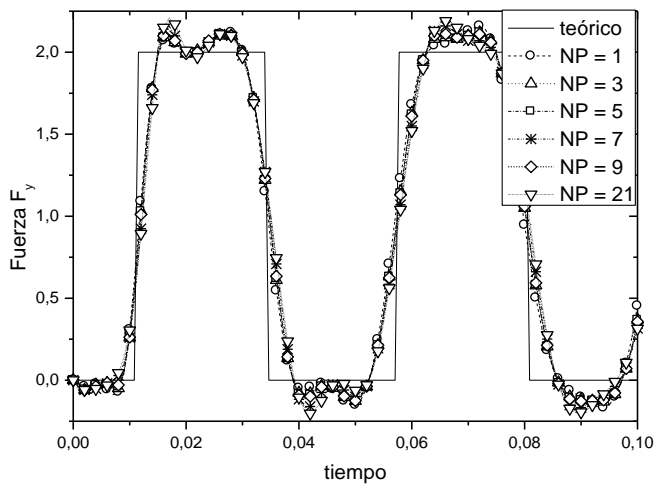


Figura 3.8: Sólido de la figura 3.2 con diferentes números de polos:
(a) $NP = 1$; (b) $NP = 3$; (c) $NP = 5$; (d) $NP = 7$; (e) $NP = 9$; (f) $NP = 21$

Los resultados se muestran en las gráficas de la figura 3.9. En todos los casos se muestra buena aproximación con el resultado teórico.



(a)



(b)

Figura 3.9: Desplazamiento del punto 15 (a) y fuerza F_y del punto 3 del sólido de la figura 3.2, con la discretización de la figura 3.3 y ante diferentes discretizaciones espaciales.

3.11.1.3. Influencia de las funciones de aproximación

Al igual que sucedía con el problema térmico, de la elección de las funciones de aproximación depende, en gran medida, la bondad del método (Park, 2002; Rashed, Y, 2002; Raveendra, 2000). En Elasticidad anisótropa, según se indicó en el apartado 3.8 de la presente memoria, resulta muy complicado

elegir una función de aproximación y obtener a partir de ésta la función ψ , es por ello que se procederá en sentido inverso, es decir se elige la función ψ y a partir de ésta se determinan las funciones f y η . En este trabajo, y por simplicidad, se han elegido funciones ψ que verifican:

$$\psi_{ij} = \varphi(r) \delta_{ij} \quad [3.117]$$

En la expresión anterior r es la distancia eucladiana definida en [2.102]. Se han tomado las siguientes funciones φ :

$$\varphi_1(r) = r^3 \quad [3.118.1]$$

$$\varphi_2(r) = r^3 + r^2 \quad [3.118.2]$$

$$\varphi_3(r) = \sqrt{(r^2 + C^2)^3} \quad [3.118.3]$$

$$\varphi_4(r) = r^4 \ln r \quad [3.118.4]$$

Se han elegido estas cuatro funciones para inferir las funciones de aproximación más comúnmente utilizadas en elasticidad isótropa. La elección de las funciones φ_1 y φ_2 viene justificada por la función cónica definida en [3.119.1], φ_3 por la función multicuadrática definida en [3.119.2] y φ_4 por la solución de placas delgadas definida en [3.119.3].

$$f_1(r) = 1 + r \quad [3.119.1]$$

$$f_3(r) = \sqrt{r^2 + C^2} \quad [3.119.2]$$

$$f_4(r) = r^2 \ln r \quad [3.119.3]$$

La constante C de las expresiones [3.118.3] y [3.119.2] puede tomar cualquier valor, pero se ha demostrado (Samaan et al, 2007) que el valor de 0.01 es bastante adecuado y, por tanto, es el que se ha utilizado en este caso.

En las gráficas de las figuras 3.10 se muestran los valores del desplazamiento del punto 15, así como la tensión σ_y del punto 3.

En estas gráficas se observa una identificación casi exacta con el modelo teórico cuando se usan las funciones φ_1 y φ_3 , la función φ_2 se comporta peor, correspondiendo a la función φ_4 , el peor comportamiento, hasta el punto de que se ha dejado de representar a partir del segundo ciclo. Es por esto que en el resto de este trabajo se ha usado la función φ_1 . Se ha querido representar, en este caso un mayor número de ciclos para comprobar cómo evolucionaba la respuesta del sistema a lo largo del tiempo.

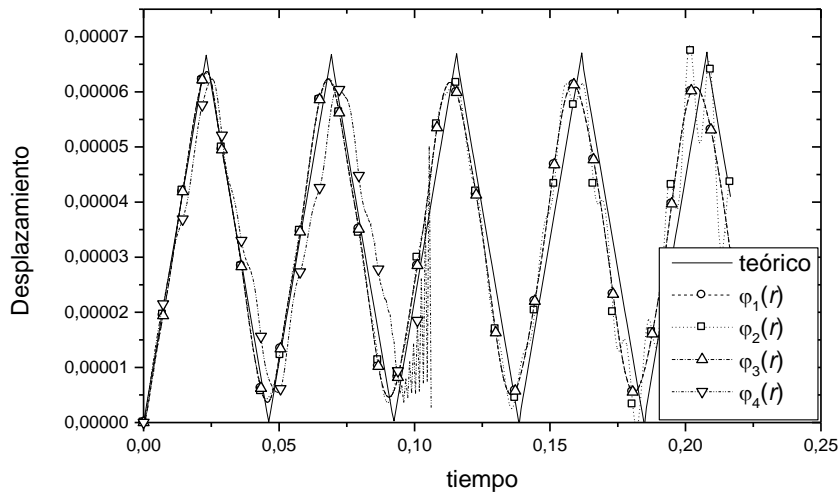


Figura 3.10.a: Desplazamiento del punto 15 del sólido de la figura 3.2, con la discretización de la figura 3.3 usando las funciones de [3.118].

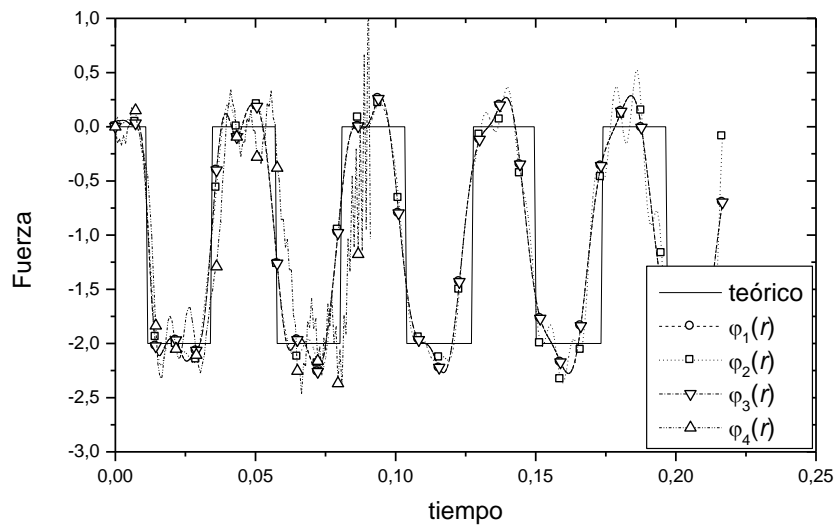


Figura 3.10.b: Fuerza del punto 3 del sólido de la figura 3.2, con la discretización de la figura 3.3 usando las funciones de [3.118].

3.11.1.4. Diferentes discretizaciones en el dominio del tiempo.

Como se afirmó en el apartado 3.7, existen diversos métodos de discretización en el tiempo. Se han implementado los tres métodos que se describen en este apartado: el de Newmark, el de Houbolt y el de Wilson. Como los últimos métodos están parametrizados se han implementado diferentes parámetros. En la gráfica 3.11.a se muestra el desplazamiento vertical del punto 15 de la figura 3.3 y en la 3.11.b la fuerza vertical del punto 3 del sólido de la misma figura.

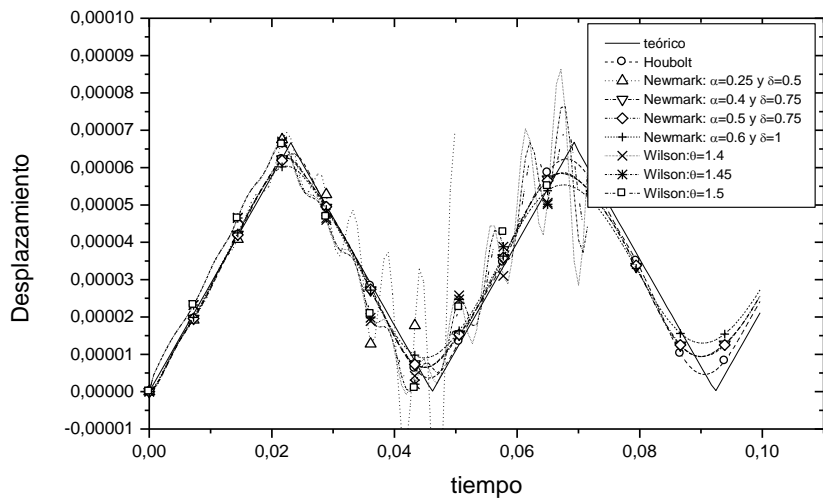


Figura 3.11.a: Desplazamiento del punto 15 del sólido de la figura 3.2, con la discretización de la figura 3.3 usando los métodos de Houbolt, Newmark y Wilson.

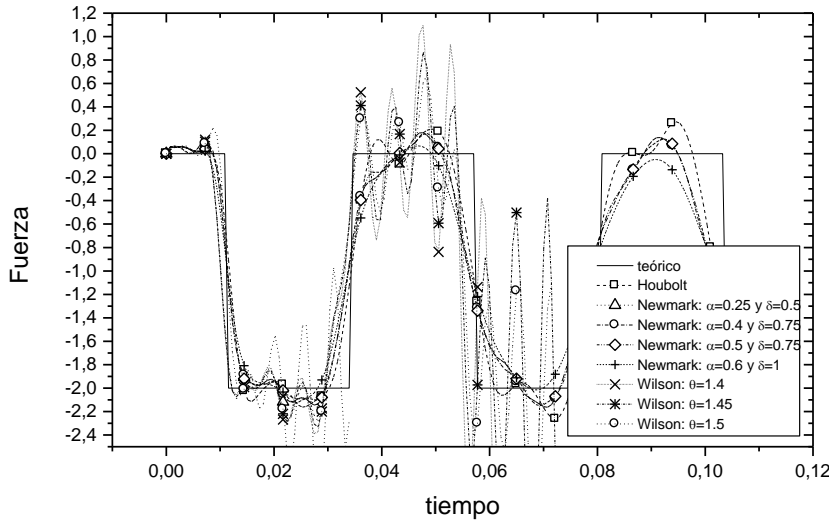


Figura 3.11.b: Fuerza vertical del punto 3 del sólido de la figura 3.2, con la discretización de la figura 3.3 usando los métodos de Houbolt, Newmark y Wilson.

En las figuras 3.11.a y 3.11.b se observan que los métodos que más se acercan al resultado teórico son el método de Houbolt y el de Newmark para valores de parámetros $\alpha = 0.4$ y $\delta = 0.75$, $\alpha = 0.5$ y $\delta = 0.75$ ó $\alpha = 0.6$ y $\delta = 1$, distorsionándose los resultados para $\alpha = 0.25$ y $\delta = 0.5$, en cuanto al método de Wilson se distorsiona para cualquier valor del parámetro θ .

Para estudiar más detalladamente la bondad de los diferentes métodos de discretización en el tiempo, se va a considerar la placa cuadrada de la figura 3.12.a con la discretización que se indica en la figura 3.12.b. La placa se encuentra sometida a una fuerza periódica en el lado izquierdo igual a (Tanaka, 2001):

$$F_y = -2P = -2 \tag{3.120}$$

Se va a tomar $P=1$, $a=1$ es la longitud del lado de la placa, $E=10$ es el módulo de elasticidad transversal, $\rho=1$ es la densidad y $A=1$ es la sección transversal. Los resultados del desplazamiento en el punto 36 de la figura 3.12.b para diferentes métodos de discretización en el tiempo, y siempre considerando un incremento de tiempo $\Delta t = 0.015$, se muestra en la figura 3.13. La solución teórica de ese desplazamiento es:

$$u = \frac{8}{\pi^2} \frac{Pa}{EA} \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{(-1)^{i-1}}{(2i-1)^2 - 9/16} \right) \sin\left(\frac{2i-1}{2a} \pi x_1\right) \left(\cos \frac{3\pi}{8a} \sqrt{\frac{E}{\rho}} t - \cos \frac{(2i-1)\pi}{2a} \sqrt{\frac{E}{\rho}} t \right) \quad [3.117]$$

En la figura 3.13 se observa buena adecuación entre resultados teóricos y experimentales, para los métodos de Houbolt y Newmark, pero para el método de Wilson la adecuación desaparece a partir del primer ciclo.

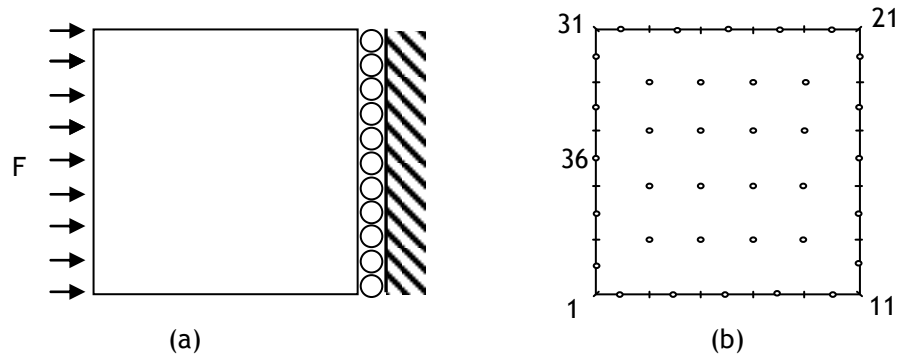


Figura 3.12: Placa sometida a la fuerza periódica definida en [3.112](a) y discretización de la misma (b).

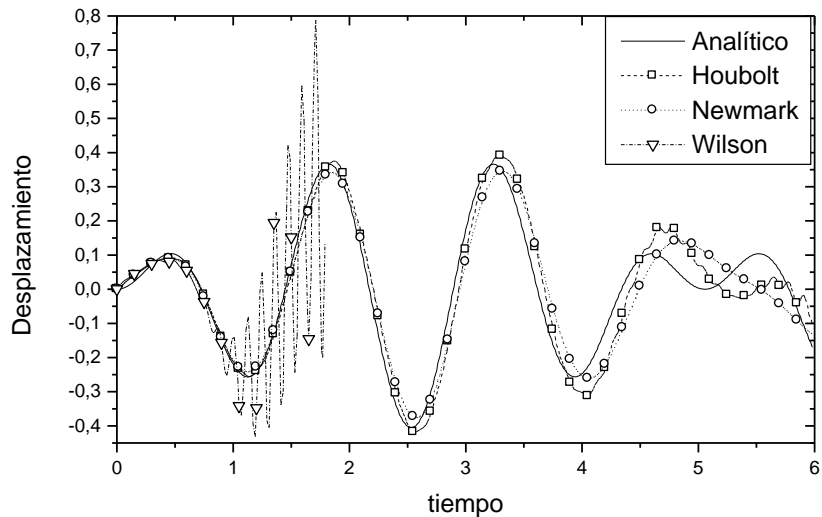


Figura 3.13: Desplazamiento horizontal del punto 36 de la figura 3.11.b. calculado mediante diferentes métodos de discretización en el tiempo.

3.11.1.5. Otras geometrías

Corona circular

Se considera una corona circular que, de repente, se somete a una fuerza radial de tracción $F = 1$. Para discretizarla se considera la condición de simetría, quedando un cuarto de corona como se muestra en la figura 3.14.a. o incluso un octavo de corona, figura 3.14.e. Se consideran diversas discretizaciones: 3.14.b, 3.14.c, 3.14.d y 3.14.e. Las características del material son $E_1 = 9.9$, $E_2 = 10$, $\nu = 0.25$ y $\rho = 1$. En todos los casos se ha elegido un incremento de tiempo $\Delta t = 0.025$.

En las figuras 3.15 se representa el desplazamiento radial y la fuerza circunferencial de la placa de la figura 3.14.a con las discretizaciones mostradas en 3.14.b, 3.14.c, 3.14.d y 3.14.e.

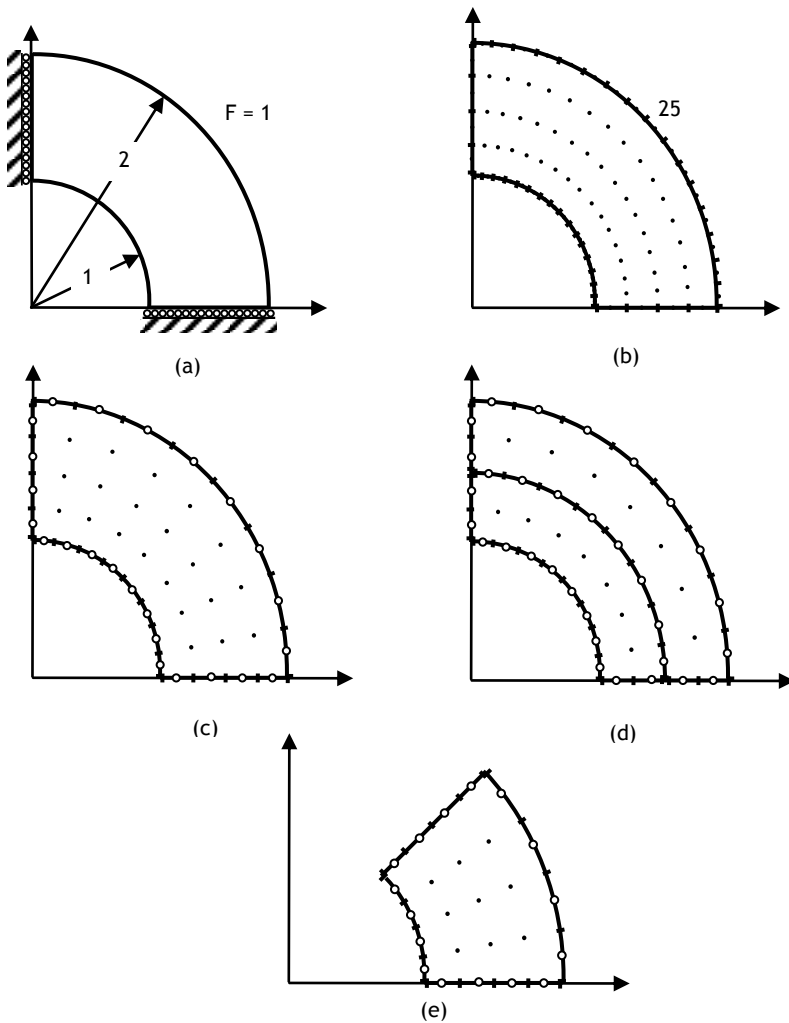


Figura 3.14: Ejemplo con contorno curvo (a) y discretizaciones del mismo: (b), (c), (d) y (e)

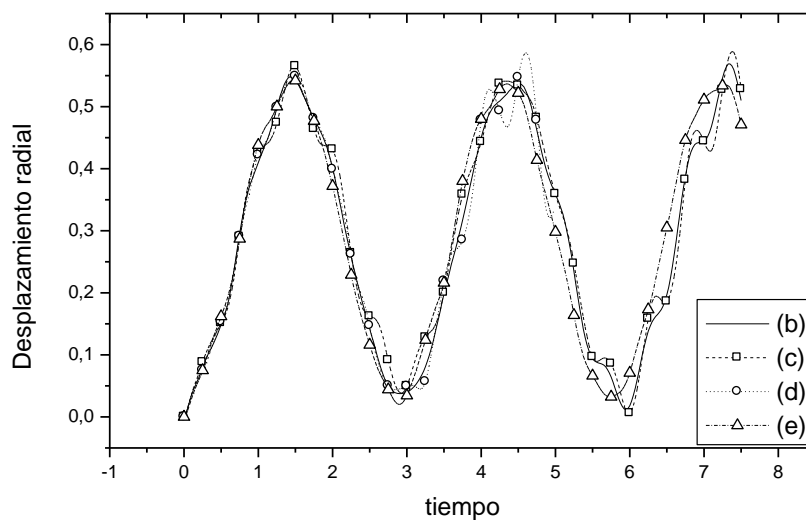


Figura 3.15.a: Desplazamiento radial de la placa de la figura 3.14.a. con las diferentes discretizaciones espaciales mostradas en 3.14.b, 3.14.c, 3.14.d y 3.14.e.

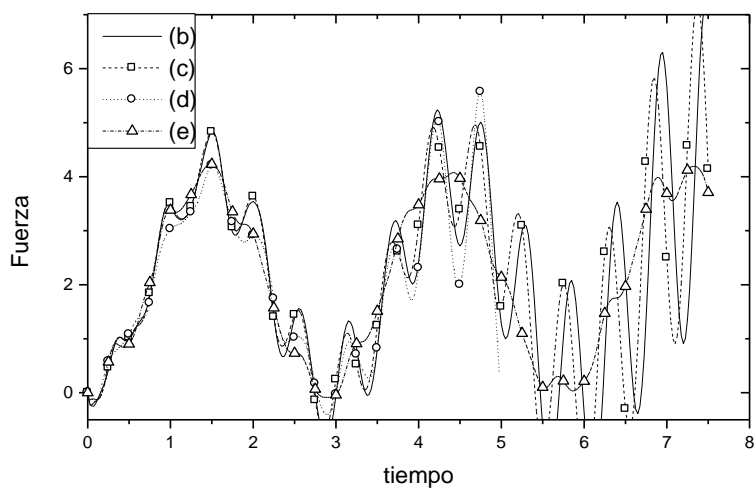


Figura 3.15.b: Fuerza circunferencial de la placa de la figura 3.14.a. con las diferentes discretizaciones espaciales mostradas en 3.14.b, 3.14.c, 3.14.d y 3.14.e.

En las figuras 3.15 se observa que los valores asociados a la discretización 3.14.d resultan tan distorsionados que no se han representado los últimos valores. También se observa distorsión para los últimos valores, sobre todo, en las fuerzas. Hay que tener en cuenta que, en todos los casos se ha tomado el mismo valor de incremento de tiempo, lo cual, no siempre resulta adecuado.

Barra biapoyada

En este caso se considera la barra biapoyada, de la figura 3.16.a, sometida a una carga de Heaviside uniforme de valor $w = 0.01$. Las propiedades del material son $\nu = 0.3333$, $E = 100$ y $\rho = 1.5$. Considerando simetría, la figura 3.16.b representa el modelo simulado, cuya discretización se muestra en la figura 3.16.c.

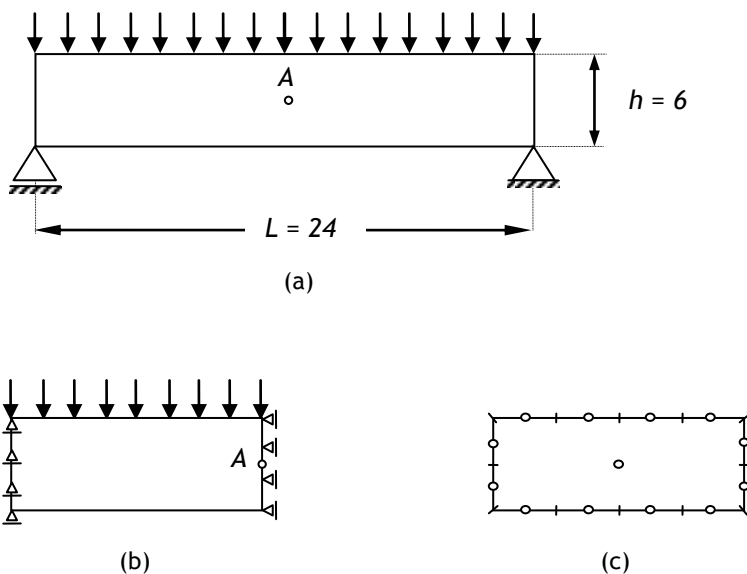


Figura 3.16. Barra simplemente apoyada (a), a la que se le ha aplicado la simetría (b) y discretización de la misma (c)

Para la discretización de la figura 3.16.c se obtiene un incremento de tiempo mínimo $\Delta t = 0.0866$, por lo que se toma un incremento de tiempo $\Delta t = 0.1$, sin embargo para este incremento de tiempo no se obtienen buenos resultados, sólo en el primer ciclo, por lo que se aumenta el incremento de tiempo a $\Delta t = 0.4$. Los resultados del desplazamiento vertical del punto central de la barra se muestran en la figura 3.17.

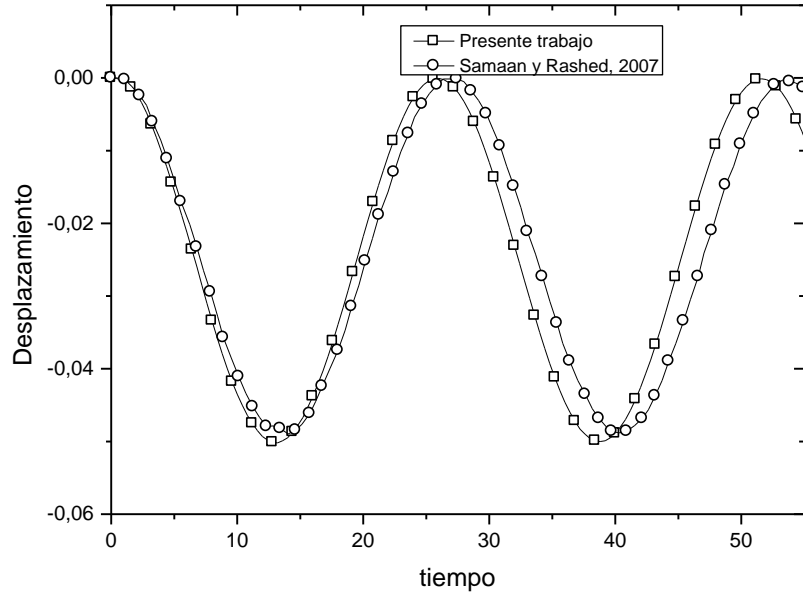


Figura 3.17: Desplazamiento vertical del punto A de las figuras 3.16.a y 3.16.b.

3.11.2. El problema ortótropo

Para este caso, al igual que para el caso isótropo, se analizan los incrementos de tiempos para los que la resolución del problema presenta un comportamiento estable así como los valores adecuados de la constante G . Este análisis no se llevó a cabo para el caso de materiales isótropos al venir fijado el valor de G . Los datos se muestran en la tabla 3.2.

	Incremento de G	Incremento de Tiempo
$E_1=106667$; $E_2=213334$ $\nu_{12}=0.3333$; $\rho=1$	[80000, 100000]	[0.0006, 0.001]
$E_1=106667$; $E_2=53333.5$ $\nu_{12}=0.3333$; $\rho=1$	[15000, 25000]	[0.0007, 0.002]

Tabla 3.2: Valores adecuados de incremento de tiempo y de G en materiales ortótropos y para la geometría de la figura 3.2 con la discretización de la figura 3.3.

Se ha comparado también para diversos polos (nodos internos utilizados en la integración) y se ha comprobado que no mejora sustancialmente el resultado aumentando el número de polos.

En las gráficas de la figura 3.18 se representa el desplazamiento del punto 15 de la discretización de la figura 3.3, para el sólido de la figura 3.2. En las gráficas de la figura 3.19 se representa la fuerza normal del punto 3. En ambos casos se considera un módulo de Elasticidad $E_x = 106667$ y un coeficiente de Poisson $\nu_{xy} = 0.3333$

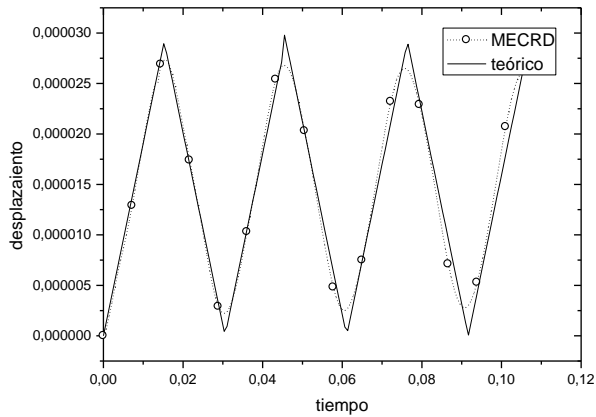


Figura 3.18.a: Desplazamiento del punto 15 de la figura 3.3, para el caso de que $E_y = 213334$

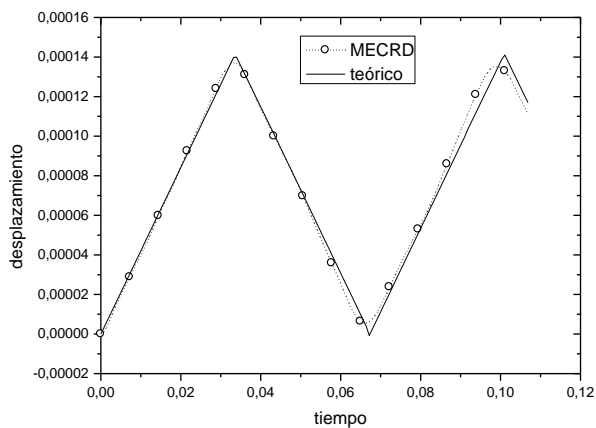
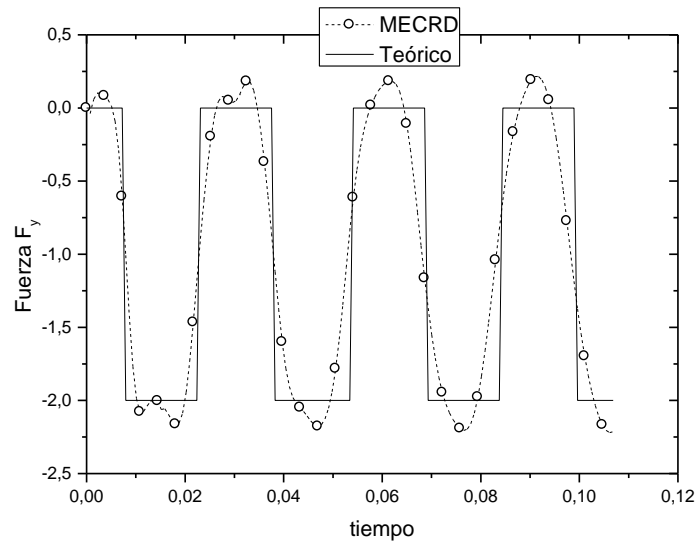
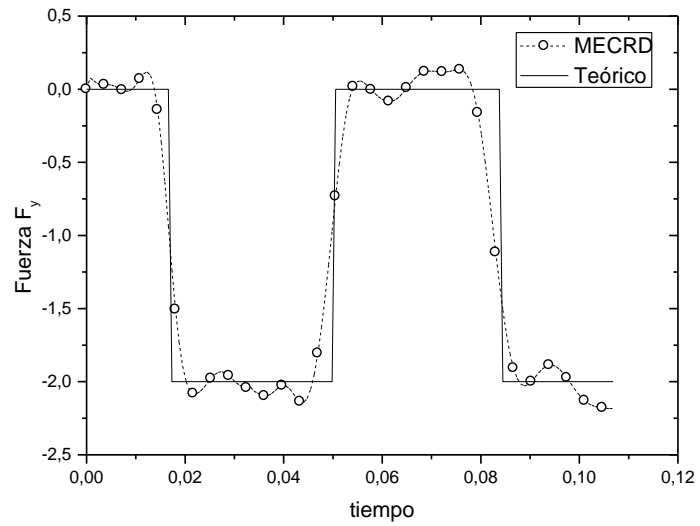


Figura 3.18.b: Desplazamiento del punto 15 de la figura 3.2, para el caso de que $E_y = 53333.5$.



(a)



(b)

Figura 3.19: Fuerza F_y del punto 3 de la figura 3.3, para el caso de que $E_y = 213334$ (a) y de que $E_y = 53333.5$ (b).

3.11.3. El problema anisótropo

Se considera el problema de la figura 3.2 con las constantes de un material ortótropo $E_1 = 106777$, $E_2 = 213554$, $\nu_{12} = 0.3333$ y $G_{12} = 65000$, según los ejes de ortotropía x_1 y x_2 mostrados en la figura 3.20. Si las coordenadas de los nodos se expresan en los ejes x e y de la figura 3.20, hay que girar las constantes del material y el problema se transforma en anisótropo. En la figura 3.21.a se muestra la fuerza F_y del punto 3 de la figura 3.4 y en la figura 3.21.b el desplazamiento del punto 15. Se gira el sólido con tres ángulos: a) $\theta = 0$ que representa los ejes de ortotropía, b) $\theta = \frac{\pi}{12}$, en cuyo caso las constantes del material toman los valores $E_1 = 114351$, $E_2 = 213554$, $G_{12} = 60200.4$, $\nu_{12} = 0.321878$, $\eta_{12,1} = -0.255335$ y $\eta_{12,2} = -0.0231199$ y c) $\theta = \frac{\pi}{6}$, que supone un valor de las constantes de $E_1 = 114351$, $E_2 = 213554$, $G_{12} = 60200.4$, $\nu_{12} = 0.321878$, $\eta_{12,1} = -0.255335$ y $\eta_{12,2} = -0.0231199$. En estas figuras se observa que los valores, para los tres ángulos, son prácticamente coincidentes.

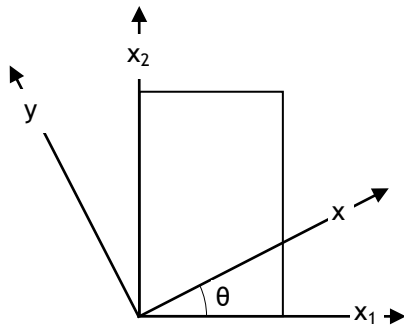


Figura 3.20: Sólido de la figura 3.2 con ejes de ortotropía OX_1X_2 y de anisotropía OXY

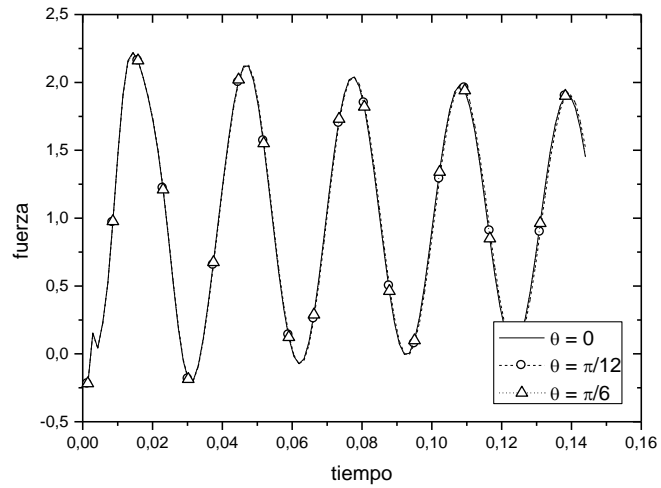


Figura 3.21.a: Fuerza F_y del punto 3 (a) y desplazamiento u_y del punto 15 (b) de la figura 3.4 para diversos valores del ángulo θ de la figura 3.7

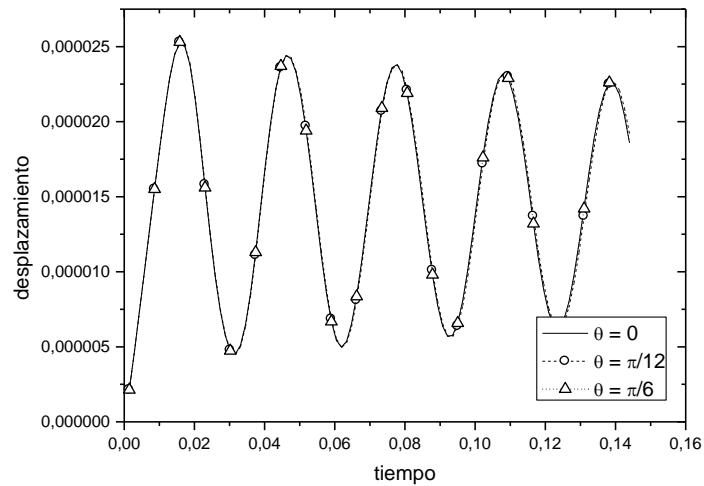


Figura 3.21.b: Fuerza F_y del punto 3 (a) y desplazamiento u_y del punto 15 (b) de la figura 3.4 para diversos valores del ángulo θ de la figura 3.7.

3.11.4. Multicuerpos

Se procederá igual que en el apartado 2.10. Se considerará primero el sólido de la figura 3.2 a la que se le harán una serie de particiones según se observa en la figura 3.22.

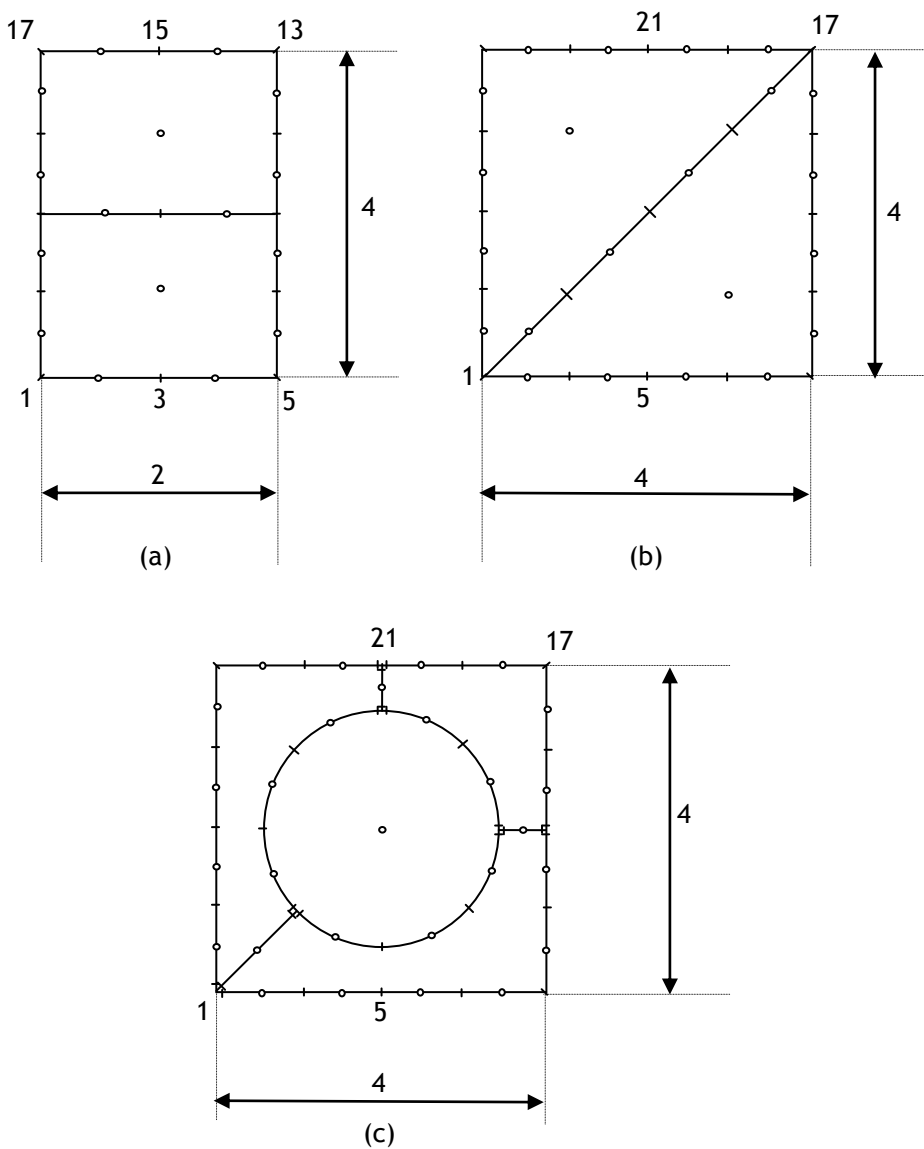


Figura 3.22: Sólido de la figura 5.2 con varios subdominios. En las figuras (b) y (c) se ha definido un sólido doble porque se ha tenido en cuenta la simetría de la figura, por eso el sólido de la figura 3.21.a. es de dimensiones 2x4 mientras que los de las figuras (b) y (c) son de dimensiones 4x4.

Los desplazamientos del punto 15 de la figura 3.4 y la tensión del punto 3 se han comparado con los desplazamientos y tensiones correspondientes a lo de la figura 3.22. Estos resultados aparecen en las figuras 3.23.a y 3.23.b, respectivamente. En ambos casos se observa una adecuación entre los resultados para un solo cuerpo y un sólido multicuerpo

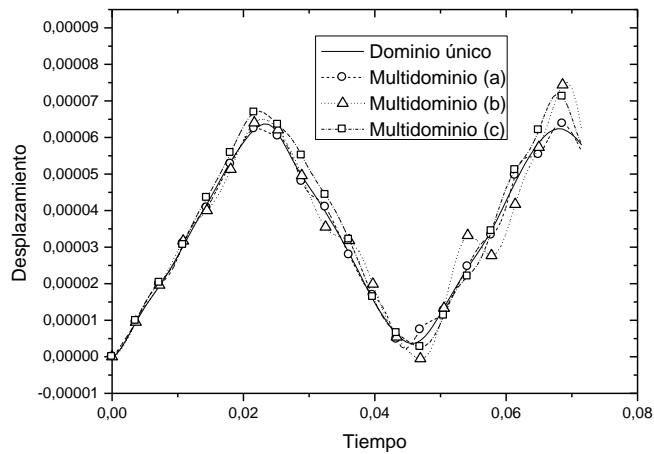


Figura 3.23.a: Comparación entre el desplazamiento del punto 15 de la figura 3.4 con el desplazamiento de los puntos 15, 21 y 21 de los sólidos (a), (b) y (c) de la figura 3.21.

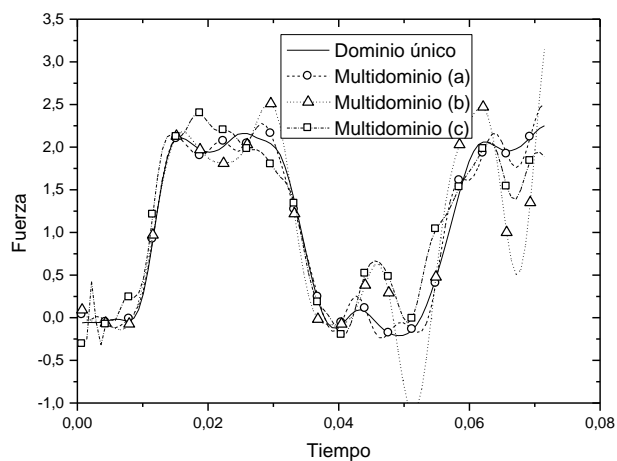


Figura 3.23.b: Comparación entre el desplazamiento del punto 15 de la figura 3.4 con el desplazamiento de los puntos 15, 21 y 21 de los sólidos (a), (b) y (c) de la figura 3.21.

En las representaciones de las figuras 3.23 se observa buena aproximación entre resultados del sólido monocuerpo con los de los sólidos multicuerpos excepto para la fuerza del segundo ciclo del sólido 3.22.b, como se muestra en la figura 3.23.b.

Capítulo 4: El problema termoelástico

4.1. Generalidades

Este capítulo aúna los esfuerzos de los dos capítulos anteriores y estudia la termoelasticidad desacoplada, o sea la incidencia del problema térmico en el problema elástico y no viceversa; pues se trata de un problema desacoplado. Para ver esta influencia resulta necesario derivar el campo de temperaturas con la consecuente aparición de integrales hipersingulares, a las que se dedica una parte importante en el presente capítulo. La resolución de éstas, al igual que la de integrales singulares, se puede hacer mediante diversos métodos, (Karami&Derakhsham, 1999):

1. Integración por partes. El orden de la singularidad se reduce en uno al hacer una integración por partes. Mediante este método aparecen nuevas variables tales como el gradiente de los desplazamientos (Nishimura & Kobayashi, 1989; Polch et al, 1987).
2. Solución particular. Puede ser la solución particular de un movimiento como sólido rígido y/o desplazamiento constante o deformación constante en los problemas elásticos y potencial constante en los problemas clásicos (Rudolphi, 1991; Bialecki, 1991; Bonnet, 1993; García-Sánchez, 2005). Este procedimiento se observa desde el comienzo de la aplicación del método (Banerjee & Butterfield, 1981 ó Brebbia & Domínguez, 1989)
3. Métodos de transformación. Estos métodos están basados en operaciones numéricas y algebraicas sumando y restando términos (Guiggiani & Casalini, 1987; Guiggiani & Gigante, 1990; Guiggiani et al, 1992; García-Sánchez, 2005; Sáez, 1997). En este trabajo se ha usado un método de transformación para la resolución de las integrales hipersingulares.
4. Método del límite. Este método consiste en traer el punto singular del contorno al dominio. Se obtienen las expresiones analíticas para integrales singulares en términos de un radio infinitesimal en torno al punto singular (Gray & Soucie, 1993).

5. Parte finita de Hardamard. Este método emplea una formulación especial para determinar singularidades en términos del radio en torno al punto singular (Toh & Mukherjee, 1994).

El cálculo de estas integrales está sujeto a un error residual que ha sido analizado por Menon et al, 1999. Gran parte de los estudios sobre integrales hipersingulares y supersingulares han surgido como consecuencia de la aplicación del método de los elementos de contorno a la mecánica de fractura para la que resulta especialmente adecuado (Mukherjee et al, 1999). También el DRBEM ha sido aplicado a la mecánica de la fractura sírvase de ejemplo Sollero & Aliabadi, (1995) y Erba & Aliabadi, (2000)

El capítulo comienza con un desarrollo teórico, se sigue con la aplicación del DRBEM a la termoelasticidad desacoplada y se termina simulando una serie de ejemplos prácticos.

4.2. Ecuaciones de la Termoelasticidad Anisótropa

Una vez desarrollado los problemas térmico y elástico se ha procedido al desarrollo del problema termoelástico. Para la formulación del mismo son válidas las expresiones [3.1] y [3.2], la [3.3] se debe sustituir por la [4.2]:

- Ecuaciones de equilibrio interno:

$$\sigma_{ij,j} = \rho \ddot{u}_i \quad [4.1]$$

- Ecuaciones de compatibilidad:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad [3.2]$$

- Ecuaciones de comportamiento:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl} - m_{ij} T_{,j} \quad [4.2]$$

Ecuación de conducción de calor:

$$K_{ij} \frac{\partial^2 T}{\partial x_i \partial x_j} = \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} + m_{ij} T_{,0} \dot{u}_{i,j} \quad [4.3]$$

La Ecuación [4.1] no es exactamente igual a la que se vio en el capítulo 3 pues en este caso ya se han despreciado las fuerzas de volumen. Las ecuaciones anteriores constituyen un sistema de 16 ecuaciones con 16 incógnitas, las seis tensiones, las seis deformaciones, los tres desplazamientos y la temperatura, siendo las condiciones de contorno, bien en tensiones, bien en desplazamientos, en el caso del problema elástico o bien en temperatura o calor en el caso del problema térmico.

Los únicos parámetros no considerados hasta ahora son la matriz de constantes del material m_{ij} y la temperatura de referencia T_0 . Las constantes del material m_{ij} se pueden expresar en función de la matriz de rigidez C_{ijkl} y de la matriz de dilatación térmica α_{ij} :

$$m_{ij} = C_{ijkl} \alpha_{kl} \quad [4.4]$$

De igual forma que sucedía con el problema elástico (introduciendo [3.2] en [4.2] y el resultado en [4.1]) también el termoelástico se puede reducir, según la formulación de Navier, a un sistema de cuatro ecuaciones con cuatro incógnitas, los tres desplazamientos y la temperatura:

$$C_{ijkl} u_{k,lj} - m_{ij} T_{,j} = \rho \ddot{u}_k \quad [4.5.a]$$

$$K_{ij} T_{,ij} = \rho c_p \dot{T} + m_{ij} T_0 \dot{u}_{i,j} \quad [4.5.b]$$

Ahora bien, suele suceder que el último término de la expresión [4.5.b] sea despreciable con lo que se llegaría a las ecuaciones de la termoelasticidad desacoplada:

$$C_{ijkl} u_{k,lj} - m_{ij} T_{,j} = \rho \ddot{u}_k \quad [4.6.a]$$

$$K_{ij} T_{,ij} = \rho c_p \dot{T} \quad [4.6.b]$$

4.3. El método de reciprocidad dual en termoelasticidad desacoplada

Se trata de resolver por el Método de Reciprocidad Dual el sistema de ecuaciones [4.6]. En los capítulos anteriores se ha resuelto el problema definido por la ecuación [4.6.b], que corresponde a la ecuación de conducción de calor transitoria. Sólo queda por resolver el sistema [4.6.a].

Si los términos de [4.1] se multiplican por el campo de desplazamientos u_k^* y se integran en el volumen, se obtiene:

$$\int_D \sigma_{kj,j} u_k^* dV = \int_D \rho \ddot{u}_i u_k^* dV \quad [3.29]$$

En la expresión anterior u_k^* se puede expresar como en [3.35]

$$u_k^* = u_{lk}^* e_l \quad [3.35]$$

donde u_{lk}^* es la solución fundamental del problema elástico definida en [3.55].

De manera similar a como se actuó en el capítulo 3 se puede llegar a:

$$c_{ik} u_k + \int_{\partial D} p_{lk}^* u_k d\Gamma = \int_{\partial D} u_{lk}^* p_k d\Gamma - \int_D u_{lk}^* (\rho \ddot{u}_k + m_{ij} T_{,j}) d\Omega \quad [4.7]$$

En la expresión anterior p_{lk}^* es la tracción fundamental definida en [3.58]. Desarrollando en variables separadas el factor que multiplica a la solución fundamental en la integral de volumen:

$$\rho \ddot{u}_k + m_{ij} T_{,j} = \sum_{m=1}^{NN} \alpha_n^m(t) \cdot f_{nk}^m(x_1, x_2) \quad [4.8]$$

siendo $NN = N$ (número de nodos del contorno) + NP (número de polos del dominio). Con la expresión anterior la integral de dominio de [4.7] se puede poner como:

$$\int_D u_{lk}^* [\rho \ddot{u}_k + m_{ij} T_{,j}] d\Omega = \sum_{m=1}^{NN} \alpha_n^m \int_D u_{lk}^* f_{nk}^m \quad [4.9]$$

Al igual que en el problema elástico, se toman funciones f_{nk} de tal forma que se puedan deducir con facilidad Ψ_{mn} que verifiquen:

$$C_{ksmr} \Psi_{mn,rs} = f_{nk} \quad [3.39]$$

También, al igual que en el problema elástico, se parte de una función Ψ_{nm} conocida y, a partir de ella y de la expresión [3.39] se obtiene f_{nk} .

Incluyendo [4.9] en [4.7]:

$$c_{lk} u_k + \int_{\partial D} p_{lk}^* u_k d\Gamma = \int_{\partial D} u_{lk}^* p_k d\Gamma - \sum_{m=1}^{NN} \alpha_n^m \int_D u_{lk}^* f_{nk}^m d\Omega \quad [4.10]$$

Teniendo en cuenta la expresión [3.40] e integrando por partes la integral de dominio de la expresión anterior, resulta:

$$\int_D u_{lk}^* f_{nk}^m d\Omega = \int_{\partial D} u_{lk}^* \eta_{kn} d\Gamma - \int_D C_{mrks} u_{lk,s}^* \Psi_{m,r} d\Omega \quad [3.41]$$

La segunda integral de la expresión anterior se puede poner como:

$$\int_D C_{mrks} u_{lk,s}^* \Psi_{m,r} d\Omega = \int_{\partial D} p_{lk}^* \Psi_{kn} dS + c_{lk} \Psi_{kn} \quad [3.42]$$

Considerando [3.41] y [3.42] en [4.10]:

$$c_{lk} u_k + \int_{\partial D} p_{lk}^* u_k d\Gamma = \int_{\partial D} u_{lk}^* p_k d\Gamma - \sum_{m=1}^{NN} \alpha_n^m \left\{ c_{lk} \Psi_{kn}^m - \int_{\partial D} u_{lk}^* \eta_{kn}^m d\Gamma + \int_{\partial D} p_{lk}^* \Psi_{kn}^m d\Gamma \right\} \quad [4.11]$$

La expresión anterior coincide, aparentemente, con la expresión [3.43] y, al igual que ésta se puede expresar en forma matricial:

$$\mathbf{Hu} - \mathbf{Gp} = \rho(\mathbf{H\Psi} - \mathbf{G\eta})\boldsymbol{\alpha} \quad [3.47]$$

Teniendo en cuenta [4.7] $\rho\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{m}d\mathbf{T} = \mathbf{F} \cdot \boldsymbol{\alpha} \Rightarrow \boldsymbol{\alpha} = \mathbf{F}^{-1}(\rho\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{m}d\mathbf{T})$, e introduciendo esto en la expresión anterior:

$$\mathbf{Hu} - \mathbf{Gp} = \rho(\mathbf{H\Psi} - \mathbf{G\eta})\mathbf{F}^{-1} \left(\ddot{\mathbf{u}} + \frac{\mathbf{m}d\mathbf{T}}{\rho} \right) \quad [4.12]$$

Denotando:

$$\mathbf{M} = -\rho(\mathbf{H\Psi} - \mathbf{G\eta})\mathbf{F}^{-1} \quad [3.49]$$

La expresión [4.12] queda:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{Hu} + \mathbf{M} \frac{\mathbf{m}d\mathbf{T}}{\rho} = \mathbf{Gp} \quad [4.13]$$

La expresión anterior se reduce a un sistema de ecuaciones lineales, en el que las incógnitas serán los desplazamientos o las fuerzas en el contorno. En cuanto a la derivada de la temperatura, ésta se ha obtenido de la ecuación de conducción de calor que se habrá resuelto para un tiempo determinado. Para la discretización en el espacio se hace uso de la aproximación cuadrática; para la discretización en el tiempo se siguen las mismas hipótesis que en el capítulo 3.

4.4. Derivada de la temperatura

Se supone que la temperatura, T , se comporta como una función diferenciable en el punto de cálculo y que satisface, junto a su derivada, la condición de Hölder, esto es que $T \in C^{1,\alpha}$ en P :

$$|T(Q) - T(P)| \leq K |x_i(P) - x_i(Q)|^\alpha \quad [4.14]$$

con $K, \alpha > 0$

Las condiciones de Hölder hacen posible un desarrollo de T y de q , en el entorno del punto P :

$$\begin{aligned} T(Q) &= T(P) + T_{,h}(P)(x_h(Q) - x_h(P)) + O(r^{1+\alpha}) \\ q(Q) &= K_{ih} T_{,i}(P) n_h(Q) = K_{ih} T_{,i}(P) n_h(Q) + O(r^\alpha) \end{aligned} \quad [4.15]$$

donde $0 \leq \alpha \leq 1$.

La ecuación integral del potencial se puede poner como:

$$\begin{aligned} \int_{\partial D} [T(Q) \cdot q^*(P, Q) - T^*(P, Q) q(Q)] d\Gamma &= \rho c_p \int_D \frac{\partial T}{\partial t} T^*(P, Q) d\Omega = \\ &= \sum_{m=1}^{mp} \left\{ - \int_{\partial D} T^*(P, R) \eta(R, S) d\Gamma + \int_{\partial D} q^*(P, R) \Psi(R, S) d\Gamma \right\} f(S, Q) \dot{T}(Q) \end{aligned} \quad [4.16]$$

En la expresión anterior T es la temperatura, q el calor, T^* la solución fundamental y q^* el flujo de la solución fundamental.

Si el primer término de la igualdad anterior se deriva según $x_k(P)$:

$$\int_{\partial D} [T(Q) \cdot q^*_{,k}(P, Q) - T^*_{,k}(P, Q) q(Q)] d\Gamma \quad [4.17]$$

Teniendo en cuenta los desarrollos de $T(Q)$ y $q(Q)$ realizados en [4.15]:

$$\begin{aligned} & \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\partial D_\varepsilon} [q_{,k}^*(P, Q)T(Q) - T_{,k}^*(P, Q)q(Q)] d\Gamma + \right. \\ & + \int_{\partial D_\varepsilon} [q_{,k}^*(P, Q)[T(Q) - T(P) - T_{,h}(P)(x_h(Q) - x_h(P))] - T_{,k}^*(P, Q)[q(Q) - K_{lh}T_{,h}(P)n_l(Q)]] d\Gamma + \\ & \left. + T_{,h}(P) \int_{\partial D_\varepsilon} ([x_h(Q) - x_h(P)]q_{,k}^*(P, Q) - K_{lh}n_l(Q)T_{,k}^*(P, Q)) d\Gamma + T(P) \int_{\partial D_\varepsilon} q_{,k}^*(P, Q) d\Gamma \right\} \end{aligned} \quad [4.18]$$

Para simplificar la expresión anterior se elegirá como D_ε una bola de radio ε centrada en el punto P , figura 4.1. Gracias al desarrollo que se ha hecho de $T(Q)$ y de $q(Q)$ se puede llegar a:

$$\int_{\partial D_\varepsilon} [q_{,k}^*(P, Q)[T(Q) - T(P) - T_{,h}(P)(x_h(Q) - x_h(P))] - T_{,k}^*(P, Q)[q(Q) - K_{lh}T_{,h}(P)n_l(Q)]] d\Gamma \approx O(\varepsilon^\alpha) \quad [4.19]$$

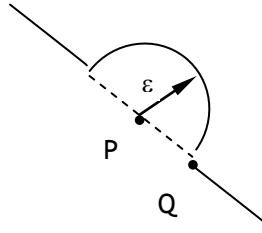


Figura 4.1: Bola en el entorno del punto P

Por otro lado:

$$\int_{\partial D_\varepsilon} ([x_h(Q) - x_h(P)]q_{,k}^*(P, Q) - K_{lh}n_l(Q)T_{,k}^*(P, Q)) d\Gamma = c_{kh}(P) + O(\varepsilon) \quad [4.20]$$

siendo $c_{kh}(P) = c(P) \delta_{kh}$. En los contornos suaves $c_{kh}(P) = 0.5 \delta_{kh}$. Para finalizar la última integral queda:

$$\int_{\partial D_\varepsilon} q_{,k}^*(P, Q) d\Gamma = \frac{b_k(P)}{\varepsilon} + a_k(P) + O(\varepsilon) \quad [4.21]$$

Los coeficientes a_k y b_k también dependen del contorno, en concreto a_k sólo toma un valor distinto de cero cuando en el punto de cálculo hay variación de curvatura (Mantic & Paris, 1995).

Teniendo todo esto en cuenta y desarrollando de forma análoga la expresión de la derecha, queda la expresión final:

$$\begin{aligned}
& c_{kh}(P)T_{,h}(P) + a_k(P)T(P) + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\partial D - \partial D_\varepsilon} T(Q) \cdot q_{,\alpha}^*(P, Q) d\Gamma - \int_{\partial D - \partial D_\varepsilon} T_{,\alpha}^*(P, Q) q(Q) d\Gamma + \frac{b_k(P)}{\varepsilon} T(P) \right\} = \\
& -\rho c_p \sum_{m=1}^{NN} \left\{ c_{kh}(P) \Psi_{,h}(P, S) + a_k(P) \Psi(P, S) + \right. \\
& \left. + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ - \int_{D - \partial D_\varepsilon} T_{,k}^*(P, R) \eta(R, S) d\Gamma + \int_{D - \partial D_\varepsilon} q_{,k}^*(P, R) \Psi(R, S) d\Gamma + \frac{b_k(P)}{\varepsilon} \Psi(P, S) \right\} \right\} * f^{-1}(S, Q) \dot{u}(Q)
\end{aligned} \tag{4.22}$$

donde $\partial D - \partial D_\varepsilon$ es el contorno si se excluye una bola en el entorno del punto de cálculo. Es obvio que si se trata de un punto interno, ésta coincide con ∂D . Se puede observar que en la expresión anterior hay que derivar tanto la solución fundamental como su derivada. Considerando una discretización cuadrática se trata de hallar expresiones equivalentes a las de [2.30] y [2.31]:

$$\int_{\partial D} T q_{,\alpha}^* d\Gamma = \int_{\partial D} \begin{bmatrix} \varphi'_1 & \varphi'_2 & \varphi'_3 \end{bmatrix} q_{,\alpha}^* \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{bmatrix} d\Gamma = \begin{bmatrix} h_{1,\alpha}^{ij} & h_{2,\alpha}^{ij} & h_{3,\alpha}^{ij} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{bmatrix} \tag{4.23}$$

$$\int_{\partial D} q u_{,\alpha}^* d\Gamma = \int_{\partial D} \begin{bmatrix} \varphi'_1 & \varphi'_2 & \varphi'_3 \end{bmatrix} u_{,\alpha}^* \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} d\Gamma = \begin{bmatrix} g_{1,\alpha}^{ij} & g_{2,\alpha}^{ij} & g_{3,\alpha}^{ij} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{bmatrix} \tag{4.24}$$

donde i denota punto de colocación y j punto de integración

4.4.1. Obtención de $g_{,\alpha}$

Es preciso derivar la solución fundamental, para lo cual será necesario hallar la derivada del radio anisótropo equivalente:

$$r_{,\alpha} = \frac{S_{\alpha\beta} (x_\beta(P) - x_\beta(Q))}{r} \tag{4.25}$$

La derivada de la solución fundamental queda:

$$2\pi u_{,\alpha}^* = \frac{1}{\sqrt{|K_{ij}|}r^2} S_{j\alpha} (x_j(Q) - x_j(P)) \quad [4.26]$$

Con esto el valor de $g_{,\alpha}$ cuando el punto de colocación no pertenece al elemento queda:

$$2\pi g_{,\alpha} = \int_{-1}^1 \frac{\Phi_k}{\sqrt{|K_{ij}|}r^2} S_{j\alpha} (x_j(Q) - x_j(P)) \sqrt{(A_1\xi + B_1)^2 + (A_2\xi + B_2)^2} d\xi \quad [4.27]$$

Si pertenece al elemento:

$$2\pi g_{,\alpha} = \int_{-1}^1 \frac{\phi_k S_{j\alpha} \left(\frac{A_j}{2} (\xi + \xi') + B_j \right)}{\sqrt{|K_{ij}|} (\xi - \xi') S_{ij} \left(\frac{A_i}{2} (\xi + \xi') + B_i \right) \left(\frac{A_j}{2} (\xi + \xi') + B_j \right)} \sqrt{(A_1\xi + B_1)^2 + (A_2\xi + B_2)^2} d\xi \quad [4.28]$$

La expresión anterior presenta una singularidad en $\xi = \xi'$ que es evitable cuando el punto de colocación y de observación no coinciden al aparecer el binomio $\xi - \xi'$ en la función de forma ϕ_k . Cuando ambos puntos coinciden se resolverá como se indica en 4.3.3.

4.4.2. Obtención de $h_{,\alpha}$

Se procederá de forma análoga a como se hizo en 4.4.1, comenzando por derivar el flujo de la solución fundamental:

$$2\pi q_{,\alpha}^* = \frac{1}{\sqrt{|K_{ij}|}r^2} \left\{ n_{\alpha} - 2S_{\alpha j} \frac{(x_j(Q) - x_j(P))(x_i(Q) - x_i(P))}{r^2} n_i \right\} \quad [4.29]$$

Con lo que la derivada de la componente de la matriz H, cuando ambos nodos no pertenecen al mismo elemento, es:

$$2\pi h_{,\alpha} = \int_{-1}^1 \frac{\Phi_k}{\sqrt{|K_{ij}|}r^2} \left\{ S_{\alpha\beta} \frac{(x_{\beta}(Q) - x_{\beta}(P))^2}{r^2} - \delta_{\alpha\beta} \right\} \epsilon_{\beta\gamma 3} (A_{\gamma}\xi + B_{\gamma}) d\xi \quad [4.30]$$

Para obtener [4.30] se ha tenido en cuenta la definición de n_i dada en [2.38] y que $\varepsilon_{\beta\gamma 3}$ es el índice de permutación.

Si ambos nodos pertenecen al mismo elemento:

$$2\pi h_{,\alpha} = \int_{-1}^1 \frac{\phi_k}{\sqrt{|K_{ij}|} S_{ij} \left(\frac{A_i}{2} (\xi + \xi') + B_i \right) \left(\frac{A_j}{2} (\xi + \xi') + B_j \right) (\xi - \xi')^2} \cdot \left\{ S_{\alpha\beta} \left(\frac{A_\beta}{2} (\xi + \xi') + B_\beta \right)^2 - \delta_{\alpha\beta} S_{ij} \left(\frac{A_i}{2} (\xi + \xi') + B_i \right) \left(\frac{A_j}{2} (\xi + \xi') + B_j \right) \right\} \varepsilon_{\beta\gamma 3} (A_\gamma \xi + B_\gamma) d\xi \quad [4.31]$$

La expresión anterior presenta una hipersingularidad en $\xi = \xi'$ que pasa a singularidad cuando el nodo entrante y saliente no coinciden, en este caso se resolverá como se indica en 4.4.4; la resolución de la hipersingularidad se muestra en 4.4.3.

4.4.3. Resolución de la hipersingularidad

Se va a intentar resolver el siguiente término de la expresión [4.22]:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\partial D - \partial D_\varepsilon} T(Q) \cdot q_{,k}^*(P, Q) d\Gamma + \frac{b_k(P)}{\varepsilon} T(P) \right\} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{-1}^1 \frac{f(\xi, \xi')}{(\xi - \xi')^2} d\xi + \varphi(\xi') \frac{b_k(P)}{\varepsilon} \right\} T(Q) \quad [4.32]$$

En la expresión anterior se ha tenido en cuenta que la integral toma la forma que aparece en la expresión [4.31]. Esta integral es una integral hipersingular que se puede desarrollar de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} & \int_{-1}^1 \frac{f(\xi, \xi')}{(\xi - \xi')^2} d\xi + \varphi(\xi') \frac{b_k(P)}{\varepsilon} = \\ & = \underbrace{\int_{-1}^1 C(\xi, \xi') d\xi}_{I_0} + \underbrace{\int_{-1}^1 \frac{B(\xi')}{(\xi - \xi')} d\xi}_{I_{-1}} + \underbrace{\int_{-1}^1 \frac{A(\xi')}{(\xi - \xi')^2} d\xi + \varphi(\xi') \frac{b_k(P)}{\varepsilon}}_{I_{-2}} = I_0 + I_{-1} + I_{-2} \end{aligned} \quad [4.33]$$

con $\xi, \xi' \in [-1, 1]$

La resolución de la primera integral I_0 no presenta dificultad al ser una integral regular y se puede resolver mediante cuadratura de Gauss.

Para resolver las otras dos integrales hay que distinguir si el nodo está en el extremo del elemento o en su interior (figura 4.2).

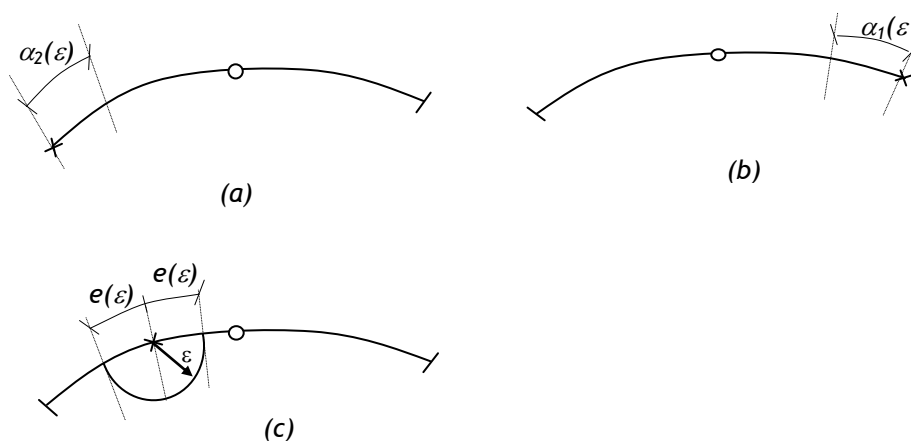


Figura 4.2: Distintas posiciones para el punto colocación. En (a) y (b) son extremos $\xi' = -1$ y $\xi' = 1$, respectivamente y en (c) es un punto intermedio.

Antes de resolver cualquiera de las otras dos integrales, para los puntos extremos del elemento, se va a tener en cuenta una serie de consideraciones:

Se denominará:

$$\begin{aligned} \delta &= \xi - \xi' \\ \rho &= |\delta| = \delta \operatorname{sgn}(\delta) \end{aligned} \tag{4.34}$$

El radio de la bola que se toma en torno al punto P será:

$$\varepsilon = \left[\sum (x_m(Q) - x_m(P))^2 \right]^{\frac{1}{2}} = \left[\sum_{m=1}^2 a_m(\xi')\delta + b_m(\xi')\delta^2 \right]^{\frac{1}{2}} \tag{4.35}$$

donde:

$$\begin{aligned}
 a_m(\xi') &= \left(\xi' - \frac{1}{2}\right)x_m^1 - 2\xi'x_m^2 + \left(\xi' + \frac{1}{2}\right)x_m^3 \\
 b_m(\xi') &= \frac{x_m^1}{2} - x_m^2 + \frac{x_m^3}{2}
 \end{aligned}
 \tag{4.36}$$

Se realiza un desarrollo en serie de Mc Lauren de ρ en función de la variable ε :

$$\rho = \rho(0) + \rho'(0)\varepsilon + \frac{\rho''(0)}{2}\varepsilon^2 + O(\varepsilon^3)$$

En la expresión anterior se tiene en cuenta [4.34]. Para obtener $\rho'(0)$ y $\rho''(0)$ se determina $\delta'(0)$ y $\delta''(0)$ derivando la expresión [4.35] respecto a ε dos veces. Teniendo todo esto en cuenta el desarrollo de ρ queda:

$$\rho = \varepsilon\beta_m + \varepsilon^2\gamma_m \operatorname{sgn}(\delta) + O(\varepsilon^3) \tag{4.37}$$

Dado que interesa el valor de ρ en los puntos extremos, en concreto para $\alpha_1(\varepsilon)$ y $\alpha_2(\varepsilon)$, cuando $\xi' = 1$ y $\xi' = -1$, respectivamente, se ha asignado el subíndice m a los coeficientes, subíndice que puede tomar los valores de 1 ó de 2. Los valores de estos coeficientes son:

$$\beta_m = \frac{1}{A} \quad \text{y} \quad \gamma_m = -\frac{C}{A^4} \tag{4.38}$$

con:

$$\begin{aligned}
 A &= \sum_{m=1}^2 a_m a_m \\
 C &= \sum_{m=1}^2 a_m b_m
 \end{aligned}
 \tag{4.39}$$

También es interesante determinar el valor de la inversa de ρ . De [4.37] se llega a:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{\varepsilon\beta_m} \left(\frac{1}{1 + \frac{\varepsilon\gamma_m \operatorname{sgn}(\delta)}{\beta_m}} \right) + O(\varepsilon^3) = \frac{1}{\varepsilon\beta_m} g(\varepsilon) + O(\varepsilon^3)$$

Si en la expresión anterior se hace un desarrollo en serie en torno a $\varepsilon = 0$, de la función $g(\varepsilon)$ se obtiene:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{\varepsilon\beta_m} \left(1 - \frac{\varepsilon\gamma_m \operatorname{sgn}(\delta)}{\beta_m} \right) + O(\varepsilon^3) \quad [4.40]$$

4.4.3.1. Determinación de I-1

Si $\xi' = -1$, tal como se muestra en la figura 4.2.a:

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-1+\alpha_2(\varepsilon)}^1 \frac{B(\xi')}{(\xi - \xi')} d\xi &= B_2(-1) \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-1+\alpha_2(\varepsilon)}^1 \frac{1}{(\xi + 1)} d\xi = B_2(-1) \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \ln \left| \frac{2}{\alpha_2(\varepsilon)} \right| \right\} = \\ &= B_2(-1) \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \ln \left| \frac{2}{\varepsilon\beta_2} \right| \right\} \end{aligned} \quad [4.41]$$

Si $\xi' = 1$, tal como se muestra en la figura 4.2.b:

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-1}^{1-\alpha_1(\varepsilon)} \frac{B(\xi')}{(\xi - \xi')} d\xi &= B_1(1) \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{-1}^{1-\alpha_1(\varepsilon)} \frac{1}{(\xi - 1)} d\xi \right\} = B_1(1) \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \ln \left| \frac{\alpha_1(\varepsilon)}{2} \right| \right\} = \\ &= B_1(1) \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \ln \left| \frac{\varepsilon\beta_1}{2} \right| \right\} \end{aligned} \quad [4.42]$$

Ahora bien, si el punto de colocación está en un extremo de un elemento, es como si se encontrase en la unión de dos, figura 4.3, luego hay que sumar las integrales de [4.41] y [4.42] y si se tiene en cuenta que $B_2(-1) = B_1(1) = B$:

$$B_1(1) \int_{-1}^{1-\alpha_1(\varepsilon)} \frac{1}{(\xi - 1)} d\xi + B_2(-1) \int_{-1+\alpha_2(\varepsilon)}^1 \frac{1}{(\xi + 1)} d\xi = B \ln \left| \frac{\beta_1}{\beta_2} \right| \quad [4.43]$$

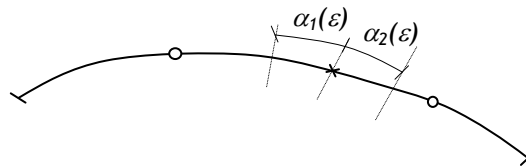


Figura 4.3: Punto de colocación que pertenece a dos elementos

Si $-1 < \xi' < 1$, tal y como aparece en la figura 4.2.:

$$\begin{aligned}
\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-1}^1 \frac{B(\xi')}{(\xi - \xi')} d\xi &= B(\xi') \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\int_{-1}^{\xi' - e(\varepsilon)} \frac{1}{(\xi - \xi')} d\xi + \int_{\xi' + e(\varepsilon)}^1 \frac{1}{(\xi - \xi')} d\xi \right) = \\
&= B(\xi') \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\ln \left| \frac{e(\varepsilon)}{1 + \xi'} \right| + \ln \left| \frac{1 - \xi'}{e(\varepsilon)} \right| \right) = B(\xi') \ln \left| \frac{1 - \xi'}{1 + \xi'} \right|
\end{aligned} \tag{4.44}$$

4.4.3.2. Determinación de I-2

Al igual que se hizo para la integral anterior habrá que distinguir para las distintas posiciones que puede tomar el punto.

Si $\xi' = -1$:

$$\begin{aligned}
&\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{-1 + \alpha_2(\varepsilon)}^1 \frac{A(\xi')}{(\xi - \xi')^2} d\xi + \varphi(\xi') \frac{b_k(P)}{\varepsilon} \right\} = \\
&= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ A_2(-1) \int_{-1 + \alpha_2(\varepsilon)}^1 \frac{1}{(\xi + 1)^2} d\xi + \varphi(\xi') \frac{b_k(P)}{\varepsilon} \right\} = \\
&= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ A_2(-1) \left(\frac{1}{\alpha_2(\varepsilon)} - \frac{1}{2} \right) + \varphi(\xi') \frac{b_k(P)}{\varepsilon} \right\} = \\
&= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ A_2(-1) \left[\frac{1}{\varepsilon \beta_2} \left(1 - \frac{\gamma_2}{\beta_2} \varepsilon \right) \right] + \varphi(\xi') \frac{b_k(P)}{\varepsilon} \right\}
\end{aligned} \tag{4.45}$$

Para $\xi' = 1$:

$$\begin{aligned}
&\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{-1}^{1 - \alpha_1(\varepsilon)} \frac{A(\xi')}{(\xi - \xi')^2} d\xi \right\} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ A_1(1) \int_{-1}^{1 - \alpha_1(\varepsilon)} \frac{1}{(\xi - 1)^2} d\xi \right\} = \\
&= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ A_1(1) \left(\frac{1}{\alpha_1(\varepsilon)} - \frac{1}{2} \right) \right\} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ A_1(1) \left[\frac{1}{\varepsilon \beta_1} \left(1 + \frac{\gamma_1}{\beta_1} \varepsilon \right) \right] \right\}
\end{aligned} \tag{4.46}$$

En las dos expresiones anteriores se ha tenido en cuenta [4.40] y la definición de la función signo.

Como el punto se encuentra en la unión de ambos elementos hay que sumar [4.45] y [4.46]:

$$\begin{aligned}
& \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{-1+\alpha_2(\varepsilon)}^1 \frac{A(\xi')}{(\xi - \xi')^2} d\xi + \int_{-1}^{1-\alpha_1(\varepsilon)} \frac{A(\xi')}{(\xi - \xi')^2} d\xi + \varphi_1(\xi') \frac{b_k(P)}{\varepsilon} \right\} = \\
& = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ A_2(-1) \int_{-1+\alpha_2(\varepsilon)}^1 \frac{1}{(\xi+1)^2} d\xi + A_1(1) \int_{-1}^{1-\alpha_1(\varepsilon)} \frac{1}{(\xi-1)^2} d\xi + \varphi_1(\xi') \frac{b_k(P)}{\varepsilon} \right\} = \\
& = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ A_2(-1) \left(\frac{1}{\alpha_2(\varepsilon)} - \frac{1}{2} \right) + A_1(1) \left(\frac{1}{\alpha_1(\varepsilon)} - \frac{1}{2} \right) + \varphi_1(\xi') \frac{b_k(P)}{\varepsilon} \right\} = \\
& \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ A_2(-1) \left[\frac{1}{\varepsilon \beta_2} \left(1 - \frac{\gamma_2 \operatorname{sgn}(\delta)}{\beta_2} \varepsilon \right) \right] + A_1(1) \left[\frac{1}{\varepsilon \beta_1} \left(1 - \frac{\gamma_1 \operatorname{sgn}(\delta)}{\beta_1} \varepsilon \right) \right] + \varphi_1(\xi') \frac{b_k(P)}{\varepsilon} \right\} = \\
& \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\varepsilon} \right) \left\{ \sum_{m=1}^2 \frac{A_m(\xi')}{\beta_m} + \varphi_1(\xi') b_k(P) \right\} - \sum_{m=1}^2 A_m(\xi') \left(\frac{1}{2} + \frac{\gamma_m \operatorname{sgn}(\delta)}{\beta_m^2} \right) = \\
& = - \sum_{m=1}^2 A_m(\xi') \left(\frac{1}{2} + \frac{\gamma_m \operatorname{sgn}(\delta)}{\beta_m^2} \right)
\end{aligned} \tag{4.47}$$

En la expresión anterior se ha tenido en cuenta que el término que está dentro del límite se anula.

Si $-1 < \xi' < 1$:

$$\begin{aligned}
& \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{-1}^1 \frac{A(\xi')}{(\xi - \xi')^2} d\xi + \varphi(\xi') \frac{b_k(P)}{\varepsilon} \right\} = A(\xi') \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{-1}^{\xi'-e(\varepsilon)} \frac{1}{(\xi - \xi')^2} d\xi + \int_{\xi'+e(\varepsilon)}^1 \frac{1}{(\xi - \xi')^2} d\xi \right\} = \\
& = -A(\xi') \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{\xi - \xi'} \Big|_{-1}^{\xi'-e(\varepsilon)} + \frac{1}{\xi - \xi'} \Big|_{\xi'+e(\varepsilon)}^1 \right\} = \\
& = -A(\xi') \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ -\frac{1}{e(\varepsilon)} - \frac{1}{-1 - \xi'} + \frac{1}{1 - \xi'} + \frac{1}{e(\varepsilon)} \right\} = A(\xi') \left\{ \frac{1}{-1 - \xi'} - \frac{1}{1 - \xi'} \right\}
\end{aligned} \tag{4.48}$$

En la expresión anterior se ha tenido en cuenta que la función $b_k(P)$ es nula para pendientes suaves.

La fórmula final, para puntos extremos, se obtiene de [4.33], [4.43] y [4.47] y toma la forma:

$$\begin{aligned}
& \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\partial D - \partial D_\varepsilon} q_{*k}^*(P, Q) d\Gamma + \varphi(\xi') \frac{b_k(P)}{\varepsilon} \right\} = \\
& = \sum_{m=1}^2 \int_{-1}^1 C_m(\xi, \xi') d\xi + B \ln \left| \frac{\beta_1}{\beta_2} \right| - \sum_{m=1}^2 A_m(\xi') \left(\frac{1}{2} + \frac{\gamma_m \operatorname{sgn}(\delta)}{\beta_m^2} \right)
\end{aligned} \tag{4.49}$$

Y, para puntos intermedios, teniendo en cuenta [4.33], [4.44] y [4.48] queda:

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\partial D - \partial D_\varepsilon} q_{,k}^*(P, Q) d\Gamma + \varphi(\xi') \frac{b_k(P)}{\varepsilon} \right\} = \\ = \int_{-1}^1 C(\xi, \xi') d\xi + B(\xi') \ln \left| \frac{1 - \xi'}{1 + \xi} \right| + A(\xi') \left\{ \frac{1}{-1 - \xi'} - \frac{1}{1 - \xi'} \right\} \end{aligned} \quad [4.50]$$

4.4.4. Resolución de la singularidad

Se trata de resolver el siguiente término de la expresión [4.22]:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\partial D - \partial D_\varepsilon} u_{,k}^*(P, Q) q(Q) d\Gamma \right\} = \int_{-1}^1 \frac{f(\xi, \xi')}{(\xi - \xi')} d\xi \quad [4.51]$$

Como la integral anterior es una integral que presenta una singularidad fuerte, se puede descomponer de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \frac{f(\xi, \xi')}{(\xi - \xi')} d\xi = \int_{-1}^1 C(\xi, \xi') d\xi + \int_{-1}^1 \frac{B(\xi')}{(\xi - \xi')} d\xi = I_0 + I_{-1} \\ \xi, \xi' \in [-1, 1] \end{aligned} \quad [4.52]$$

La expresión anterior se resuelve como la [4.33] pero sin aparecer la integral hipersingular I_{-2} .

También surge una integral singular fuerte en expresiones del tipo:

$$\int_{\partial D - \partial D_\varepsilon} T(Q) \cdot q_{,k}^*(P, Q) d\Gamma$$

cuando, tanto el punto de colocación como el de integración, pertenecen al mismo elemento pero no coinciden. En este caso si el punto de colocación es extremo no hay que sumar las integrales de los elementos adyacentes y habría una expresión para $\xi' = -1$ y otra para $\xi' = 1$.

4.4.5. Obtención de los términos independientes $ckh(P)$ y $ak(P)$

Para obtener los términos independientes que se indican, habrá que resolver las integrales que aparecen en los términos [4.20] y [4.21]. Ambas integrales

se realizan en contornos muy pequeños en torno al punto P y se suelen tomar arcos de circunferencia tal y como se hizo en la figura 2.4, esta figura aparece más detallada en la figura 4.4 porque aquí hay que incluir el concepto de curvatura.

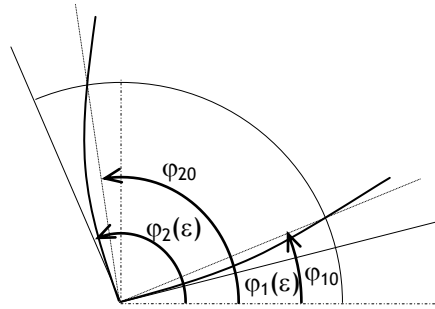


Figura 4.4. Contorno del arco de circunferencia.

Así para determinar $c_{kh}(P)$ se parte de [4.20] y se tiene en cuenta que se trabaja con un arco de circunferencia con lo que:

$$n_i = -\frac{x_i(Q) - x_i(P)}{\epsilon}; \epsilon^2 = (x_i(Q) - x_i(P))(x_i(Q) - x_i(P)); d\Gamma_\epsilon = \epsilon d\theta \quad [4.53]$$

Incluyendo lo anterior en [4.29]:

$$n_i = -\frac{x_i(Q) - x_i(P)}{\epsilon} \quad [4.54]$$

Y en [4.26]:

$$2\pi T_{,\alpha}^* = \frac{1}{\sqrt{|K_{ij}|} f(\theta) \epsilon} S_{j\alpha} n_\alpha \quad [4.55]$$

donde:

$$f(\theta) = S_{11} \cos^2 \theta + 2S_{12} \sin \theta \cos \theta + S_{11} \sin^2 \theta \quad [4.56]$$

Con todo esto la expresión [4.20] queda:

$$\frac{1}{2\pi\sqrt{|k_{ij}|}} \int_{\phi_1}^{\phi_2} \frac{1}{f(\theta)} \left(n_k n_h - 2 \frac{S_{kj}}{f(\theta)} n_j n_h - K_{th} S_{jk} n_i n_j \right) d\theta = c_{kh}(P) \quad [4.57]$$

Para obtener $a_k(P)$ se va a desarrollar la expresión [4.21]:

$$\begin{aligned} \int_{\partial D_\varepsilon} q^*_{,k}(P, Q) d\Gamma &= \int_{\phi_1(\varepsilon)}^{\phi_2(\varepsilon)} q^*_{,k}(P, Q) \varepsilon d\theta = \int_{\phi_1(\varepsilon)}^{\phi_2(\varepsilon)} \frac{1}{\sqrt{|K_{ij}|} f(\theta) \varepsilon} \left\{ n_k - 2 \frac{S_{kj} n_j}{f(\theta)} \right\} d\theta = \\ &= \frac{1}{\varepsilon} \int_{\phi_1(\varepsilon)}^{\phi_2(\varepsilon)} f_k(\theta) d\theta \end{aligned} \quad [4.58]$$

La expresión anterior se puede poner como:

$$\frac{1}{\varepsilon} \int_{\phi_1(\varepsilon)}^{\phi_2(\varepsilon)} f_k(\theta) d\theta = \frac{1}{\varepsilon} \left(\int_{\phi_1(\varepsilon)}^{\phi_{10}} f_k(\theta) d\theta + \int_{\phi_{20}}^{\phi_2(\varepsilon)} f_k(\theta) d\theta + \int_{\phi_{10}}^{\phi_{20}} f_k(\theta) d\theta \right)$$

donde la primitiva de $f_k(\theta)$ es:

$$\int f_k(\theta) d\theta = F_k(\theta)$$

Por otra parte si se hace un desarrollo en serie de Taylor $F_k(\theta)$:

$$\begin{aligned} F_k(\phi_1(\varepsilon)) &= F_k(\phi_{10}) + \frac{dF_k(\phi_1)}{d\theta} \frac{d\phi_1}{d\varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} \varepsilon + O(\varepsilon^2) = F_k(\phi_{10}) + f_k(\phi_{10}) \frac{\kappa_1(0)}{2} \varepsilon + O(\varepsilon^2) \\ F_k(\phi_2(\varepsilon)) &= F_k(\phi_{20}) + \frac{dF_k(\phi_2)}{d\theta} \frac{d\phi_2}{d\varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} \varepsilon + O(\varepsilon^2) = F_k(\phi_{20}) + f_k(\phi_{20}) \frac{\kappa_2(0)}{2} \varepsilon + O(\varepsilon^2) \end{aligned}$$

donde κ es la curvatura.

Teniendo en cuenta lo anterior la expresión [4.58] se puede poner como:

$$\frac{1}{\varepsilon} \int_{\phi_1(\varepsilon)}^{\phi_2(\varepsilon)} f_k(\theta) d\theta = \frac{F_k(\phi_{20}) - F_k(\phi_{10})}{\varepsilon} - \frac{f_k(\phi_{10}) \kappa_1(0) + f_k(\phi_{20}) \kappa_2(0)}{2} = \frac{b_k(P)}{\varepsilon} + a_k(P) \quad [4.59]$$

De la expresión [4.59] se desprende que para la obtención de a_k no es necesario realizar ninguna integral. En cuanto al cálculo de la curvatura se hará según la fórmula:

$$\kappa(\xi) = \frac{-x_1'' x_2' + x_2'' x_1'}{(x_1' + x_2')^{3/2}} \quad [4.60]$$

Las derivadas de las variables anteriores se realizarán respecto a la variable natural ξ considerando que se ha hecho una discretización cuadrática de la geometría, expresión [3.33].

4.5. Puntos internos

Para obtener los desplazamientos y las tensiones de los puntos internos se procede como en el apartado 3.10 utilizando las expresiones [3.106], para el cálculo de los desplazamientos, y [3.107] para el cálculo de las deformaciones. A estas expresiones es necesario añadirles los términos de las derivadas de la temperatura, quedando para el desplazamiento la expresión [4.61] y para la deformación la [4.62]:

$$u_i(P) + \int_{\partial D} p_{ik}^*(P, Q) u_k(Q) d\Gamma = \int_{\partial D} u_{ik}^*(P, Q) p_k(Q) d\Gamma - \sum_{m=1}^{mp} \left\{ \Psi_{il}(P, S) - \int_{\partial D} u_{in}^*(P, R) \eta_{nl}(R, S) d\Gamma + \int_{\partial D} p_{in}^*(P, R) \Psi_{nl}(R, S) d\Gamma \right\} \cdot f_{ik}(S, Q) (\rho \ddot{u}_k(Q) + m_{kj} T_{,j}) \quad [4.61]$$

$$\varepsilon_{ij}(P) = \frac{1}{2} \left[- \int_{\partial D} U_{ij}(P, Q) p_l(Q) d\Gamma + \int_{\partial D} P_{ij}(P, Q) u_l(Q) d\Gamma + \sum_{m=1}^{mp} \left\{ \Phi_{isj}(P, S) - \int_{\partial D} U_{ij}(P, R) \eta_{lr}(R, S) d\Gamma + \int_{\partial D} P_{ij}(P, R) \Psi_{lr}(R, S) d\Gamma \right\} \cdot f_{ip}(S, Q) [\rho \ddot{u}_p(Q) + m_{pl} T_{,l}(Q)] \right] \quad [4.62]$$

La determinación de las tensiones en función de las deformaciones obtenidas en [4.62] se realiza a través de [4.2]. En las expresiones anteriores los términos U_{ij} , P_{ij} y Ψ_{ij} vienen definidos en [3.108], [3.109] y [3.110] respectivamente.

4.6. Casos prácticos de la Termoelasticidad

4.6.1. Introducción

Al igual que se hizo en el capítulo 2 con el problema térmico y en el capítulo 3 con el problema elástico, en el presente capítulo se analizan diferentes problemas. No se aborda un estudio del comportamiento del método ante

diferentes discretizaciones espaciales y temporales así como la influencia de las distintas funciones de aproximación puesto que esto ya se ha llevado a cabo en los capítulos antes mencionados.

Se considerarán diferentes geometrías y problemas tanto isótropos como ortótropos y anisótropos, así como problemas con multicuerpos.

4.6.2. El problema isótropo

Se va a comenzar simulando la laja de la figura 4.5.a, a la que se somete a un shock térmico, tal y como se muestra en la figura 4.5.b. La discretización que se utiliza es la de la figura 4.5.c

En la figura 4.5.a. se aprecian las condiciones de contorno del problema elástico. Para el problema térmico, hay un shock térmico en $x_2 = 1$ de $T = 1$ para el instante $t = 0$, tal y como se muestra en la figura 4.5.b; y el resto del contorno presenta flujo de calor $q = 0$. Las constantes del material son $E = 10$, $\nu = 0.25$, $K = 1$, $\rho c = 1$, $\rho = 1$, $\alpha = 0.02$.

El incremento de tiempo que se usa es $\Delta t = 0.01$. Los tiempos óptimos mínimos para el problema térmico y el elástico son:

$$\Delta t)_T = \frac{\rho c}{K} (\Delta x)^2 = 0.015625 \quad [4.63.a]$$

$$\Delta t)_e = 0.5 * \Delta x \sqrt{\frac{\rho}{E_{\max}} (1 - \nu^2)} = 0.019 \quad [4.63.b]$$

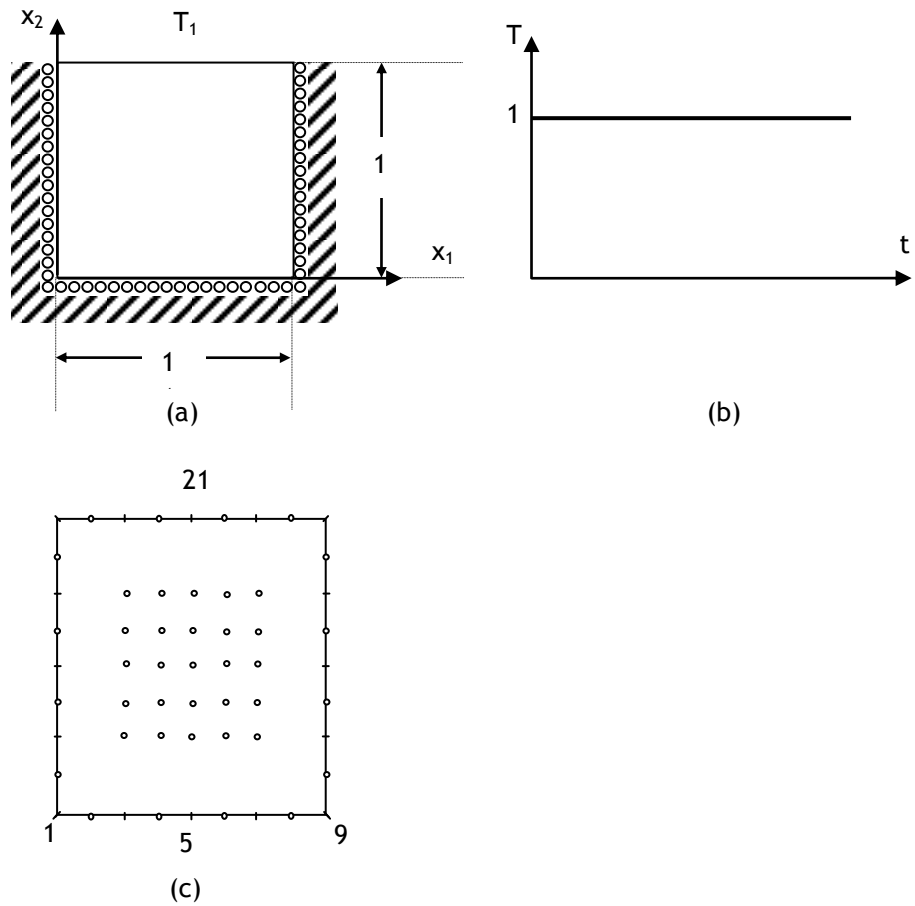


Figura 4.5: Sólido sometido a un shock térmico(a). Distribución de la temperatura T_1 , a lo largo del tiempo (b) y discretización (c)

En la figura 4.6 se muestra el desplazamiento, a lo largo del tiempo, del punto 21 de la figura 4.5.c con la discretización mostrada en la misma y con las condiciones de contorno que se muestran en la figura 4.5.a. Se compara con el resultado teórico (Polyanin, 2002):

$$u = -\frac{4l^2 T_1 \gamma}{\pi b} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{a \lambda_n \sin(\lambda_n b t) - b \cos(\lambda_n b t) + b e^{-a \lambda_n^2 t}}{a^2 \lambda_n^2 + b^2} * \sin(\lambda_n x)$$

[4.64.a]

donde:

$$\lambda_n = \frac{\pi(2n+1)}{2l} \quad [4.64.b]$$

$$a = \frac{K}{\rho c_p} \quad [4.64.c]$$

$$b^2 = \frac{\lambda + 2G}{\rho} \quad [4.64.d]$$

$$\gamma = \frac{\alpha(3\lambda + 2G)}{\rho} \quad [4.64.e]$$

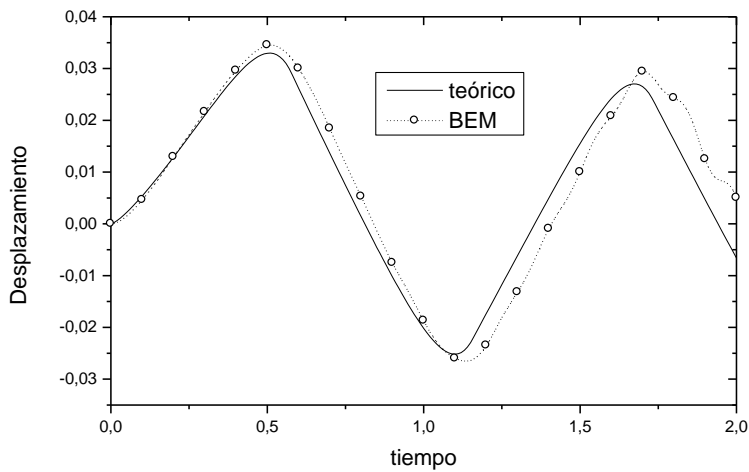


Figura 4.6.a: Desplazamiento del punto 21 de la figura 4.5.c.

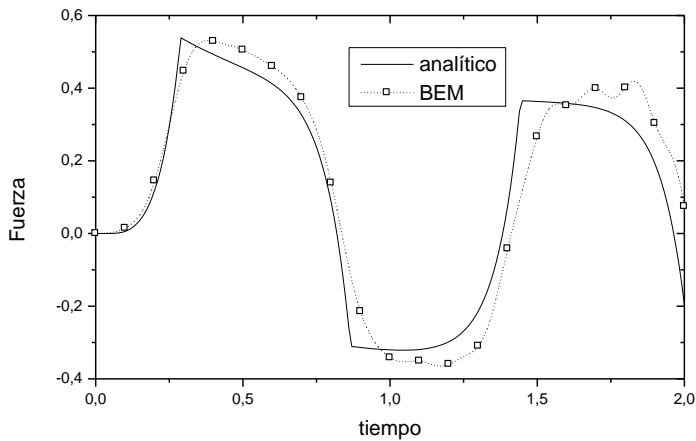


Figura 4.6.b: Fuerza del punto 5 de la figura 4.4.c.

En las gráficas de la figura 4.6. no se observa una aproximación exacta, aunque también hay que tener en cuenta que la solución analítica es aproximada.

A continuación se van a comprobar los resultados de un problema con simetría de revolución. Las constantes del material son $E = 10$, $\nu = 0.25$, $K = 1$, $\rho c = 1$, $\rho = 1$, $\alpha = 0.02$. Se considera una corona circular con ambos contornos libres de fuerzas. El sólido tiene una temperatura inicial $T_0 = 0$ y, de repente, se somete el contorno exterior a una temperatura $T = 1$ en $t = 0$. Se aplica simetría, quedando un cuarto de corona. Geométricamente este sólido se corresponde con el de la figura 4.7.

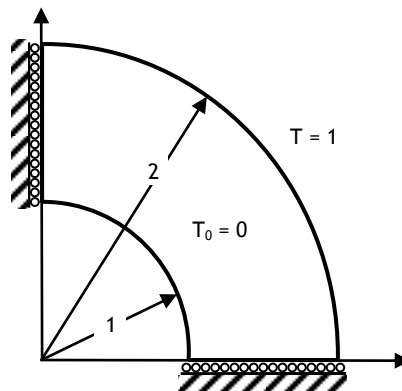


Figura 4.7: Ejemplo con contorno curvo

Al igual que se hizo en el capítulo 3, se van a considerar las distintas discretizaciones representadas en la figura 3.14: 3.14.b, 3.14.c, 3.14.d y 3.14.e. En todos los casos se toma un incremento de tiempo $\Delta t = 0.02$. Los resultados de los desplazamientos radiales se muestran en la figura 4.8.a y los de las fuerzas diferenciales en la figura 4.8.b

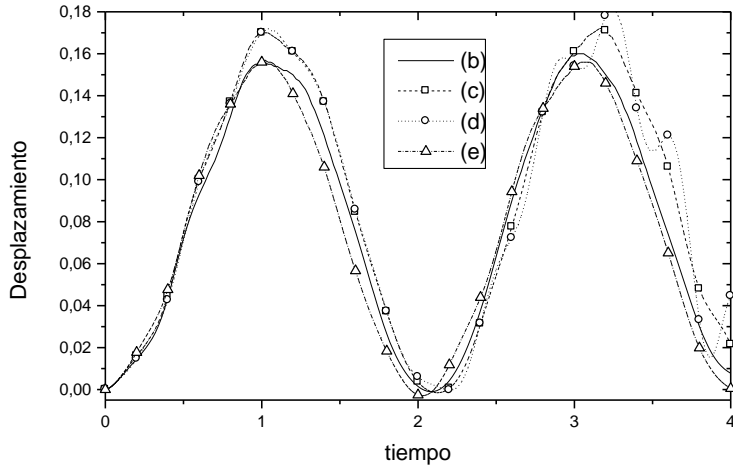


Figura 4.8.a: Desplazamiento radial del sólido de la figura 4.7. según las discretizaciones mostradas en las figuras 3.14.b, 3.14.c, 3.14.d y 3.14.e

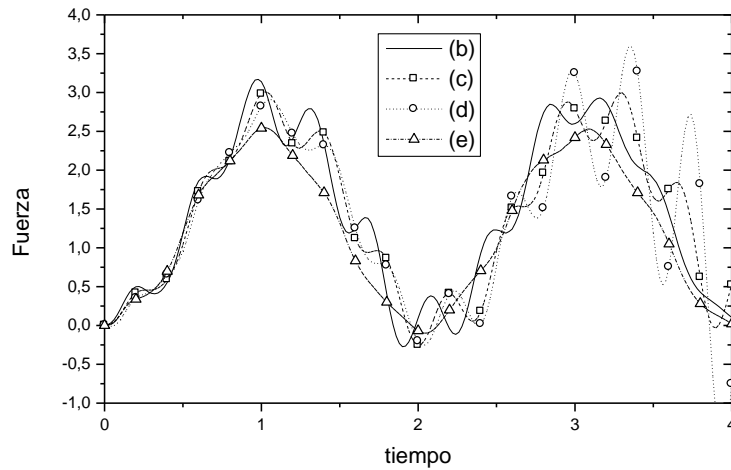


Figura 4.8.b: Fuerza circunferencial del sólido de la figura 4.7. según las discretizaciones mostradas en las figuras 3.14.b, 3.14.c, 3.14.d y 3.14.e

De las figuras 4.8 se desprende que existe una buena aproximación entre las distintas discretizaciones, teniendo presente que ésta es susceptible de mejorar al cambiar el incremento de tiempo.

Un aspecto que hay que tener en cuenta es la diferencia entre el valor del parámetro μ , que marca el incremento de tiempo mínimo del problema térmico y del incremento de tiempo mínimo de la elasticidad. Para entender esta cuestión se van a considerar los valores reales de un material, en el caso de un acero, por ejemplo, de propiedades:

$$\text{Densidad: } \rho = 7850 \frac{\text{K}}{\text{m}^3} \quad [4.65.a]$$

$$\text{Conductividad: } K = 54 \frac{\text{W}}{\text{m}^{\circ}\text{C}} \quad [4.65.b]$$

$$\text{Calor específico: } c_p = 465 \frac{\text{J}}{\text{K}^{\circ}\text{C}} \quad [4.65.c]$$

$$\text{Módulo de Elasticidad: } E = 210\text{GPa} \quad [4.65.d]$$

$$\text{Coeficiente de Poisson: } \nu = 0.3 \quad [4.65.e]$$

El parámetro μ y el incremento tiempo mínimo Δt del problema elástico son:

$$\mu = 67597(\Delta x)^2 \text{ y } \Delta t = 9.22 \cdot 10^{-5} \Delta x \quad [4.66]$$

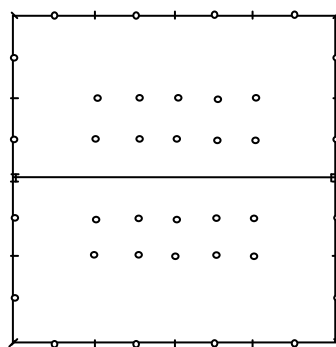
En las expresiones [4.66] el parámetros μ y Δt se miden en segundo si el intervalo Δx va en metros. Para hacer coincidir ambos parámetros el intervalo Δx ha de ser:

$$\Delta x = 1.364 \cdot 10^{-9} \text{m} \quad [4.67]$$

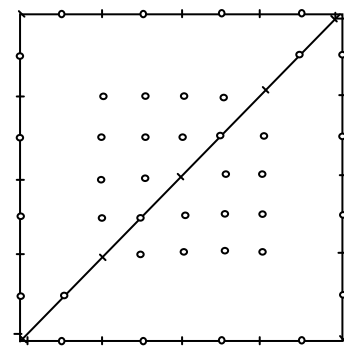
Este valor de Δx resulta excesivamente pequeño.

4.6.3. Multicuerpo

Se va a considerar el sólido de la figura 4.5 dividido en una serie de dominios tal y como se muestra en la figura 4.9.



(a)



(b)

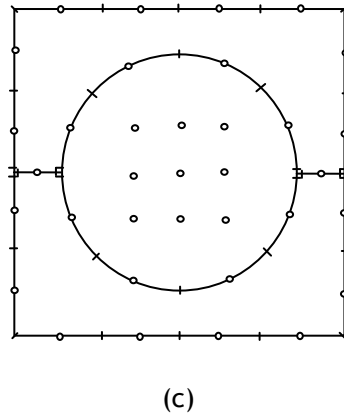


Figura 4.9: Placa de la figura 4.5 con diferentes subdominios

Los resultados del desplazamiento del punto 21 de la figura 4.5 con los diferentes subdominios representados en la figura 4.9. se muestran en la figura 4.10.a. También se van a representar las fuerzas normales del punto 5 en la figura 4.10.b.

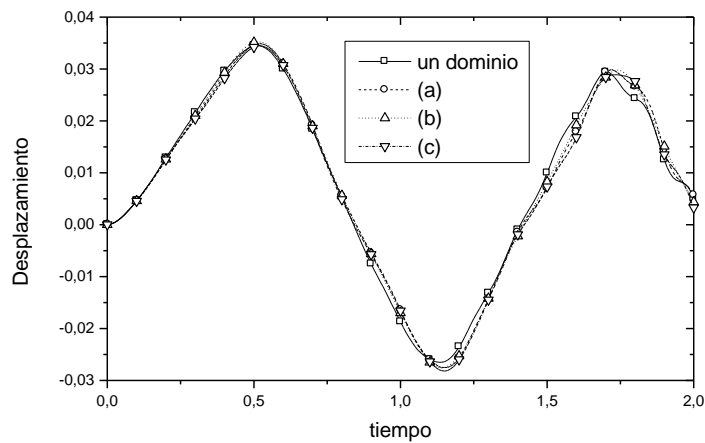


Figura 4.10.a.: Desplazamiento del punto 21 de la figura 4.5.c. con las discretizaciones de la figura 4.9

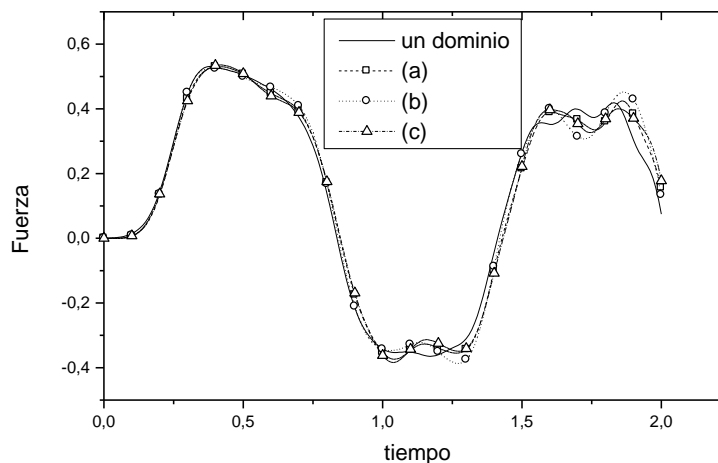


Figura 4.10.b.: Fuerza del punto 5 de la figura 4.5.c. con las discretizaciones de la figura 4.9

La adecuación de todos los problemas es bastante aceptable.

4.6.4. El problema ortótropo y anisótropo

Se va a resolver, nuevamente, el problema de la figura 4.5., pero cambiando las constantes del material que serán para el caso ortótropo $E_1 = 10$, $E_2 = 20$, $\nu_{12} = 0.25$, $G_{12} = 5$, $K_1 = 1$, $K_2 = 2$, $\rho c = 1$, $\rho = 1$, $\alpha_1 = 0.02$ y $\alpha_2 = 0.01$. Se utilizará un incremento de tiempo $\Delta t = 0.015$ y el desplazamiento del punto 21 y la fuerza del punto 5 se representan en las gráficas 4.10.a y 4.10.b, respectivamente.

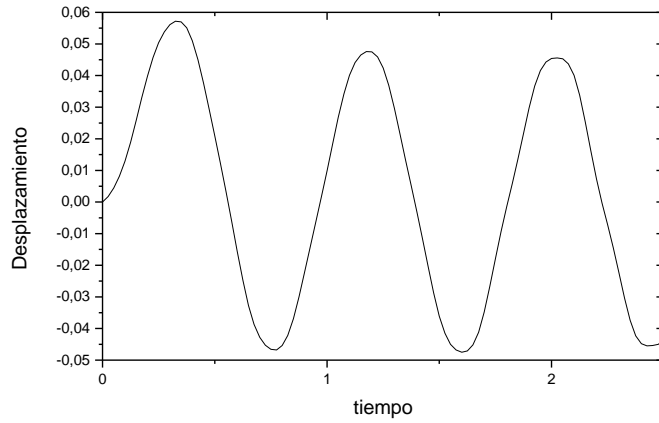


Figura 4.11.a.: Desplazamiento del punto 21 de la figura 4.5.c para un material ortótropo

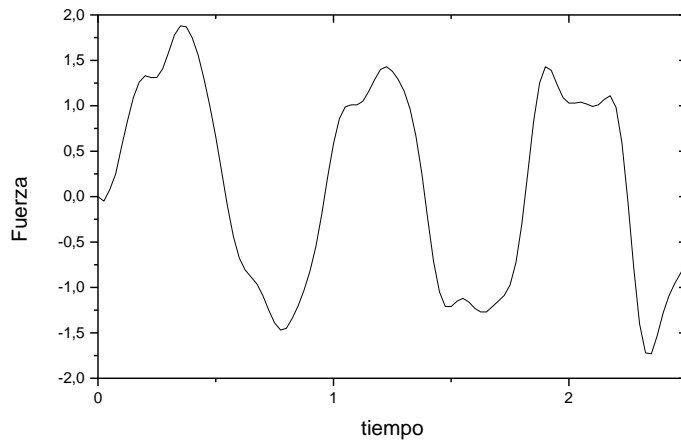


Figura 4.11.b.: Fuerza del punto 5 de la figura 4.5.c para un material ortótropo

El problema anisótropo que se resolverá tendrá $E_1 = 10$, $E_2 = 20$, $\nu_{12} = 0.25$, $G_{12} = 5$, $\eta_{12,1} = -0.25$, $\eta_{12,2} = -0.023$, $K_1 = 1$, $K_2 = 2$, $K_{12} = 0.5$, $\rho_c = 1$, $\rho = 1$, $\alpha_1 = 0.02$, $\alpha_2 = 0.01$ y $\alpha_{12} = 0.01$.

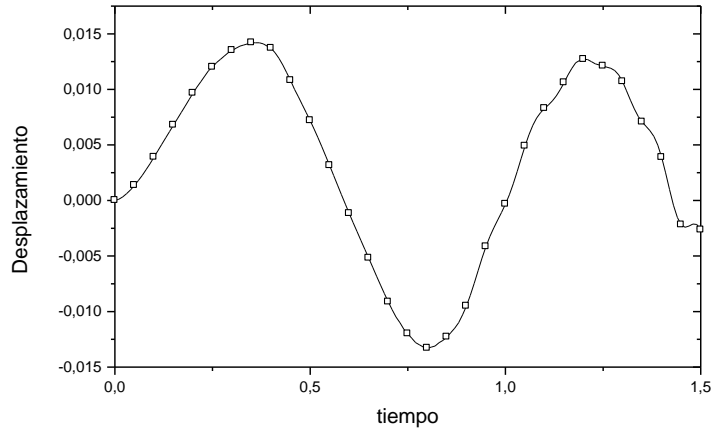


Figura 4.12.a.: Desplazamiento del punto 21 de la figura 4.5.c para un material anisótropo

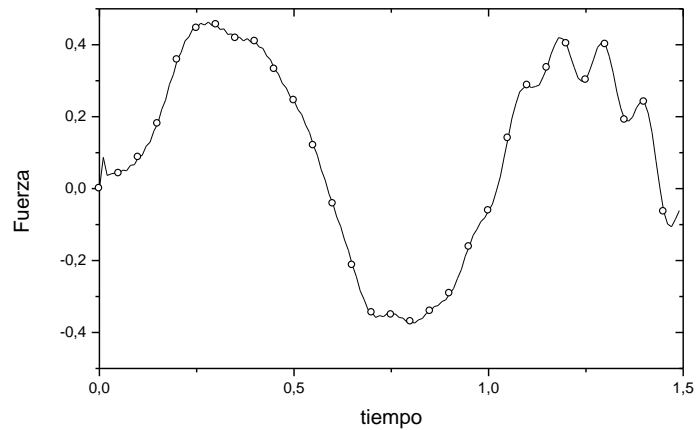


Figura 4.12.b.: Fuerza del punto 5 de la figura 4.4.c para un material anisótropo

Aunque los resultados que se muestran en la figura 4.11 y 4.12 no han sido comparados con otros se observa un comportamiento bastante adecuado exceptuando en el segundo ciclo de la fuerza en el problema anisótropo, figura 4.12.b en el que aparecen altibajos inesperados.

Capítulo 5: Conclusiones y desarrollo futuro

5.1. Conclusiones

En el presente trabajo se ha pretendido realizar un estudio pormenorizado del método de reciprocidad dual realizando una discretización en el tiempo y con una integración paso a paso para los problemas:

- Problema de conducción térmica,
- Problema elástico,
- Problema de termoelasticidad desacoplada.

A continuación, se van a analizar las conclusiones obtenidas para los diferentes problemas.

5.1.1. Problema térmico

Se ha analizado la bondad del método frente a diferentes factores:

- **Parámetro μ .** Éste problema resulta idóneo para utilizar este método aunque se comporta mejor para valores de incremento de tiempo cercanos al parámetro μ , que se definió en [2.85]. Si el valor de incremento de tiempo que se toma es muy pequeño, siempre en comparación con μ , las variables del problema comienzan tomando un valor inaceptable para los primeros incrementos de tiempo hasta pasado un intervalo del orden de μ , en el que los valores obtenidos son aceptables. Si se utilizan incrementos de tiempo muy superiores a μ los resultados no son adecuados.

$$\mu = \frac{(\Delta x)^2}{k} \quad [2.85]$$

- **Número de polos.** Se ha comprobado la bondad del método frente al número de polos o de puntos del dominio. Se ha puesto de manifiesto que en aquéllos problemas en los que se cambia una condición de contorno resulta conveniente colocar más polos cerca del contorno en el que se produce esta variación.

- **Parámetro θ .** Para valores de $\theta > 0.5$ el comportamiento del método resulta incondicionalmente estable, demostrándose que para $\theta_u < 0.5$ y para $\theta_q \leq 0.5$ se producen problemas de inestabilidad.
- **Funciones aproximantes** La dependencia de estas funciones es notable, recomendándose las funciones polinómicas por su simplicidad y buen resultado, si bien éstas deben ser, como mucho, de segundo orden. Aunque se han implementado funciones más complejas, como funciones exponenciales y funciones de Bessel, éstas no han dado mejores resultados, sino todo lo contrario.
- **Problema ortótropo y anisótropo.** Aunque toda la casuística anterior se ha aplicado al problema isótropo, se ha comprobado la bondad de este método frente al problema ortótropo y anisótropo si bien hay que tener en cuenta que, cuando la relación de rigideces en los diferentes ejes es muy grande; del orden de 100, el método no proporciona valores adecuados.
- **Multicuerpos.** El comportamiento de la metodología numérica ante dominios formados por materiales diferentes es bastante bueno.

5.1.2. Problema elástico

Al igual que con el problema térmico se han analizado diferentes factores que influyen en el comportamiento del método:

- **Parámetro β .** Si en el problema térmico el parámetro μ es el que marca cómo deben estar relacionadas las discretizaciones en el espacio y en el tiempo, en el problema elástico es el parámetro β , que se definió en [3.115]. La dependencia de este parámetro es aún más acentuada que en el problema térmico. En consonancia con este parámetro se encuentra el tiempo mínimo definido en [3.114]:

$$\Delta t = 0.5\Delta x \sqrt{\frac{\rho}{E_{max}}(1 - \nu^2)} \quad [3.114]$$

- **Número de polos.** Hay problemas que necesitan un número mayor de polos que otros que prácticamente no los necesitan, así un dominio al que se le somete, de repente, a un sistema de fuerzas equilibradas necesita más polos que uno al que se somete sólo a parte del contorno.
- **Discretización en el tiempo.** Se han implementado diversos métodos de discretización en el tiempo: Houbolt, Newmark y Wilson. Se ha comprobado como el método de Houbolt es un método incondicionalmente estable y los métodos de Newmark y Wilson dependen del valor de sus parámetros, α y δ para el método de Newmark y, θ para el de Wilson. Se comprueba que Newmark funciona

adecuadamente para las condiciones definidas en [3.96], en cuanto al método de Wilson aunque se considere incondicionalmente estable cuando $\theta \geq 1.37$ sólo simula adecuadamente en los primeros instantes.

$$\delta \geq \frac{1}{2}; \alpha \geq \frac{1}{4}(0.5 + \delta)^2 \quad [3.96]$$

- **Funciones de aproximación.** En el caso de las funciones de aproximación de la elasticidad se ha tomado una función ψ conocida y a partir de ella se ha obtenido la función de aproximación. Se han analizado diversas funciones, siendo las de mejor comportamiento las definidas en [3.118.1] y [3.118.3] con $C = 0.01$. Hay que tener en cuenta que la función ψ_{ij} viene definida en [3.117]:

$$\psi_{ij} = \varphi(r) \delta_{ij} \quad [3.117]$$

$$\varphi_1(r) = r^3 \quad [3.118.1]$$

$$\varphi_3(r) = \sqrt{(r^2 + C^2)^3} \quad [3.118.3]$$

- **Problema ortótropo y anisótropo.** En este caso el comportamiento del método es adecuado siempre que la relación de rigideces, como en el caso del problema térmico no sea muy elevada.
- **Multicuerpos.** La metodología desarrollada, para dominios formados por materiales diferentes, presenta un comportamiento muy bueno.

5.1.3. El problema termoelástico

En este tipo de problemas los parámetros citados en los apartados precedentes influyen en la bondad de la metodología en los mismos términos. Adicionalmente hay que hacer especial mención en la diferencia entre el valor del parámetro μ , que marca el incremento de tiempo mínimo del problema térmico y del incremento de tiempo mínimo de la elasticidad.

5.2. Desarrollo Futuro

El presente trabajo tiene muchas ramificaciones posibles:

- Ampliar el estudio de las funciones aproximantes, sobre todo para el problema elástico.

- Ampliar los tipos de discretizaciones en el tiempo, por ejemplo empleando discretización de Galerkin; aunque los estudios publicados al respecto no indiquen que mejore el comportamiento del método.
- Sería muy interesante poder realizar una discretización diferente para el problema térmico y el elástico; aunque la dificultad estriba en la gran diferencia que existe entre los incrementos de tiempo adecuados para cada uno de estos problemas.
- Incluir el efecto de fuerzas de volumen para el problema elástico y de fuente de calor en el problema térmico.
- Se podría intentar ampliar el estudio a termoelasticidad acoplada.
- Utilizar otros algoritmos de cálculo, en este trabajo se han seguido los que define Press et al, 1996

Capítulo 6: Bibliografía

- [1] Abramowitz M, Stegun IA, *Handbook of Mathematical Functions*, Dover Publications, Inc., New York, 1972, ninth printing
- [2] Achenbach JD, *Wave Propagation in Elastic Solids*, Novena Edición, Elsevier Science Publishers, B. V., Amsterdam, 1993
- [3] Ademoyero OO, Bartholomew-Biggs MC, Davies AJ, *Computational Linear Algebra Issues in the Galerkin Boundary Element Method* An Intern. Journal COMPUTERS AND MATHEMATICS with applications, 2001, v 42, pp 1267-1283
- [4] Agnantiaris JP, Polyzos D, Beskos DE, *Free vibration analysis of non-symmetric and axisymmetric structures by the dual reciprocity BEM*, Engineering Analysis with Boundary Elements, 2001, v 25, pp 713-723
- [5] Akama M, Mori T, *Boundary Element analysis of surface initiated rolling contact fatigue cracks in wheel/rail contact systems* Wear, 2002, v 253, pp 35-41
- [6] Aköz AY, Taucher TR, *Plane Deformation of an Orthotropic Elastic Semispace Subject to Distributed Surface Loads*, Journal of Applied Mechanics, 1973, December, pp 1135-1137
- [7] Alarcón E, Reverter A, *p-Adaptative boundary elements*, Int. J. Numer. Methods Engng, 1986, v 23, pp 801-829
- [8] Albuquerque E L, Sollero P, Aliabadi M H, *The Boundary Element method applied to time dependent problems in anisotropic materials*, Int. Journal of Solids and Structures, 2002, v 39, pp 1405-142
- [9] Albuquerque EL, Sollero P, Fedelinski P, *Dual Reciprocity Boundary Element Method in Laplace domain applied to anisotropic dynamic crack problems*, Computers & Structures, 2003, v 81, pp 1703-1713
- [10] Albuquerque EL, Sollero P, Fedelinski P, *Free vibration analysis of anisotropic material structures using the boundary element method*, Engineering Analysis with Boundary Elements, 2003, v 27, pp 997-985

- [11]Albuquerque EL, Sollero P, Aliabadi MH, *Dual Boundary Element Method for Anisotropic Dynamic Fractura Mechanics*, Int. Journal for Numerical Methods in Engineering, 2004 **
- [12]Ang WT, *Non-steady state heat conduction across an imperfect interface: a dual-reciprocity boundary element approach*, Engineering Analysis with Boundary Elements, 2006, v 30, pp 781-789
- [13]Ang WT, Ooi EA, *A dual-reciprocity boundary element approach for solving axisymmetric heat equation subject to specification of energy*, Engineering Analysis with Boundary Elements, 2008, v 32, pp 210-215
- [14]Aral MM, Tang YA, *Boundary only procedure for time-dependent diffusion equations* Appl. Math. Modelling, 1988, v 12, pp 610-618.
- [15]Atalay M Akif, Aydin E, Dylara, Aydin Murat, *Multi-region heat conduction problems by boundary element method*, Journal of Heat and Mass Transfer, 2004, v 47, pp 1549-1553
- [16]Avila R, Mantic V, Paris F, *Application of the boundary element method to elastic orthotropic materials in 2D: numerical aspects*, Boundary Elements XIX, 1997, pp 55-64
- [17]Banerjee PK, Butterfield R, *Boundary Element Methods in Engineering Science*, McGraw-Hill Book Company (UK) Limited, 1981.
- [18]Baranoglu B, Mengi Y, *The use of dual reciprocity boundary element method in coupled thermoviscoelasticity*, Computer methods in applied mechanics and engineering, 2006, v 196, pp 379-392
- [19]Bathe KJ, Wilson EL, *Numerical Methods in Finite Element Analysis*, Prentice-Hall, New Jersey, 1976
- [20]Behbahani-nia A, Kowsary F, *A dual reciprocity BE-based sequential function specification solution method for inverse heat conduction problems*. Int. J. Heat Transfer, 2004, v 47, pp 1247-1255
- [21]Benítez, FG, Alarcón E, *Simulación Numérica por el Método de los Elementos de Contorno. Utilización de Elementos Isoparamétricos Parabólicos*, I Simposium Nacional sobre Modelado y Simulación en al Industria y Servicios públicos, 1980, v 1, pp 147-152

- [22] Benjumea R, Sikarskie DL, *On the Solution of Plane, Orthotropic Elasticity Problems by an Integral Method*, Journal of Applied Mechanics, 1972, Septiembre, pp 801-808
- [23] Bialecki R, Dallner R, Kulin G, *New applications of the hypersingular equations in the boundary element method*. Comput. Meth Appl Mech Engng, 1993, v 103, pp 399-416
- [24] Bialecki R A, Jurgas P, Kuhn G, *Dual Reciprocity BEM without matrix inversion for transient heat conduction*, Engineering analysis with boundary elements, 2002, v 26, pp 227-236
- [25] Blobner J, Hribersek M, Kuhn G, *Dual reciprocity BEM-BDIM technique for conjugate heat transfer computations*, Computer methods in applied mechanics and engineering, 2000, v 190, pp 1105-1116
- [26] Bonnet M, Bui HD, *Regularization of the displacement and traction BIE for 3D elastodynamics using indirect methods*, Kane JH, Maier G, Tosaka, Atluri SN, editors. Advances in boundary element techniques, Berlin: Springer, 1993, pp 1-29
- [27] Brebbia CA, Domínguez J, *Boundary elements. An introductory course*, Segunda edición, Computational mechanics publications, Southampton y Mc.Graw-Hill, New York, 1992
- [28] Brebbia CA, Nardini D, *Solution of Parabolic and Hyperbolic Time Dependent Problems using Boundary Elements*, Computers & Mathematics. with Applications., 1986, v 12, pp 1061-1072
- [29] Brebbia CA, Nardini D, *Dynamic analysis in solid mechanics by an alternative boundary element procedure*, Engineering Analysis with Boundary Elements, 1983, v 2, pp 228-233
- [30] Chatterjee J, Ma F, Henry DP, Banerjee PK, *Two and three dimensional transient heat conduction and thermoelastic analyses by BEM via efficient time convolution*, Computer methods in applied mechanics and engineering, 2007, v 196, pp 1061-1072
- [31] Chaudouet A, *Three-dimensional transient-elastic analyses by the BIE method*, Int. Journal for Numerical Methods in Engineering, 1987, v 24, pp 25-45

- [32]Chen G, Zhou J, *Boundary Element Methods*, Academic Press Limited, 1992
- [33]Chen J, Dargush GF, *Boundary Element Method for Dynamic Poroelastic and Thermoelastic Analyses*, Int. Journal of Solids Structures, 1995, v 15, pp 2257-2278
- [34]Chen L, Kassab DW, Nicholson DW, Chopra MB, *Generalized Boundary Element Method for Solids exhibiting Nonhomogeneities*, Engineering Analysis with Boundary Elements, 2001, v 25, pp 407-422
- [35]Chen W, Tanaka M, *A Meshless, Integration-Free, and Boundary-Only RBF Technique*, An Int. J. Computers & Mathematics with Applications, 2002, v 43, pp 379-391
- [36]Cheng AHD, Cheng DT, *Heritage and Early History of the Boundary Element Method*, Engineering Analysis with Boundary Elements, 2005 v 29, pp 268-302
- [37]Cheng AHD, Lafe O, Grilli S, *Dual-reciprocity BEM based on global interpolation functions*. Engineering Analysis with Boundary Elements, 1993, v 13, pp 303-311
- [38]Cheng AHD, Chen CS, Golberg MA, Rashed YF, *BEM for thermoelasticity and elasticity with body force-a revisit*, Engineering Analysis with Boundary Elements, 2001, v 25, pp 377-387
- [39]Chien CC, Chen Y-H, Chuang CC, *Dual Reciprocity BEM analysis of 2D transient elastodynamics problems by time-discontinuous Galerkin FEM*, Engineering Analysis with Boundary Elements, 2003, v 27, pp 611-624
- [40]Choi CY, *Dual reciprocity boundary element analysis for the laminar forced heat convection problem in concentric annulus*. KSME Int. J., 1999, v 13, pp 496-503
- [41]Choi CY, Balaras EA, *A dual reciprocity boundary element formulation using the fractional step method for the incompressible Navier-Stokes equations* Engineering Analysis with Boundary Elements, 2009, v 33, pp 741-749
- [42]Chun, Young W, *Two-dimensional Heat Transfer Problem Using Boundary Integral Equation*, Journal of the Franklin Institute, 1992, v 329 pp 1147-1152

- [43] Clements D L, Rogers C, *A Boundary Integral Equation for the Solution of a Class of Problems in Anisotropic Inhomogeneous Thermoelasticity and Elastostatics*, Quarterly of Applied Mathematics, 1983, April, pp 99-105
- [44] Crouch SL, Tian Y, *A Two-dimensional Direct Boundary Integral Method for Elastodynamics*, Int. J. Rock Mech. Sci. & Geomech. Abstr., 1988, v 25, pp 149-158
- [45] Cruse TA, *Recent advances in boundary element analysis methods*, Comp. Meth. Appl. Mech. Eng., 1987, v 62, pp 227-244
- [46] Cruse T, Rizzo FJ, *A Direct Formulation and Numerical Solution of the General Transient Elastodynamic Problem*, J. Math. Anal. Appl., 1968, v 22, pp 244-341
- [47] Dargush GH, Banerjee PK, *Boundary Element Methods for Three Dimensional Thermoelasticity*, Int. J. Solids Structures, 1991 v 28, pp 549-565
- [48] Dargush GH, Banerjee PK, *Boundary Element Methods in Three Dimensional Thermoelasticity*, Int. J. Solids Structures, 1991 v 26, pp 199-216
- [49] Dargush GH, Banerjee PK, *Development of Boundary Element Method for Time-Dependent Planar Thermoelasticity*, Int. J. Solids Structures, 1989 v 25, pp 999-1021
- [50] Davies TW, Moslehy, FA, *Modal analysis of plates using the dual boundary element method*, Engineering Analysis with Boundary Elements, 1994, v 14, pp 357-362
- [51] DeFigueiredo TGB, Brebbia CA, *A New Variational Boundary Element Model for Potential Problems*, Engineering Analysis with Boundary Elements, 1991, v 8, pp 45-50
- [52] Deb A, *Boundary Element Analysis of Anisotropic Bodies under Thermo-Mechanical Body Force Loadings*, Computers & Structures, 1996, v 58, pp 715-726
- [53] Demirel V, Wang S, *An efficient boundary element method for two dimensional transient wave propagation problems*, Appl. Math. Modelling, 1987, v 11, pp 411-416
- [54] Domínguez J, *Boundary Elements I Dynamics*, 1993. Computational mechanics publications, Southampton, Boston y Elsevier Applied Science, New York, 1997

- [55]El-Karamany Ahmed S, *Boundary integral equation formulation for the generalized micro-polar thermoviscoelasticity*, International Journal of Engineering Science, 2004, v 42, pp157-186
- [56]El-Karamany Ahmed S, Ezzat Magdy A, *On the Boundary integral formulation of thermo-viscoelasticity theory*, International Journal of Engineering Science, 2002, v 40, pp 1943-1956
- [57]El-Maghraby NM, *Two-dimensional problem in generalized thermoelasticity with heat sources*, Journal of Thermal Stresses, 2004, v 27, pp 227-239
- [58]Elzein A, Syngellakis, *Dual reciprocity in boundary element formulations of the plate buckling problem*, Engineering Analysis with Boundary Elements, 1992, v 9, pp 175-184
- [59]Erba DN Dell, Aliabadi MH, *On the solution of three-dimensional thermoelastic mixed-mode edge crack problems by the dual boundary element method*, Engineering Fracture Mechanics, 2000, v 66, pp 269-285
- [60]Fung YC, *Foundations of Solid Mechanics*, Segunda Edición, Prentice Hall, New Jersey, 1977
- [61]Gao Xiao-Wei, *The radial integration method for evaluation of domain integrals with boundary-only discretation*, Engineering Analysis with Boundary Elements, 2002, v 26, pp 905-916
- [62]Gao Xiao-Wei, *Boundary element analysis in thermoelasticity with and without internal cells*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2003, v 57, pp 975-990
- [63]García-Sánchez Felipe, *Estudio numérico de problemas de fractura en materiales anisótropos elásticos y piezoeléctricos*, Tesis doctoral, Universidad de Sevilla, 2005.
- [64]Georgiadis HG, Rigatos AP, Brock LM, *Thermoelastodynamic disturbances in a half-space under the action of a buried thermal-mechanical line source*, Int. J. Of Solids and Structures, 1999, v 36, pp 3639-3660
- [65]Gray LJ, Soucie CS, *A hermite interpolation algorithm for hypersingular boundary integrals*, Int. J. Numer Meth Engng, 1997, v 17, pp 2357-2367

- [66]Guiggiani M, *Hypersingular boundary integral equation have adicional free term*. Comp. Mech, 1995, v 16, pp 245-248
- [67]Guiggiani M, Casalini P, *Direct computation of Cauchy principal value integral in advanced boundary element*, Int. J. Number Meth Engng 1987, v 24, pp 1711-1720
- [68]Guiggiani M, Gigante A, *A general algorithm for multidimensional Cauchy principal value integrals in the boundary element method*, J. Appl Mech Trans ASME, 1992, v 57, pp 906-915
- [69]Guiggiani M, Krishnasamy G, Rudolphi TJ, Rizzo FJ, *A general algorithm for the numerical solution of hypersingular boundary integral equations*. Trans ASME, 1992, v 59, pp 604-614
- [70]Hamina M, *An Approximation method for the hypersingular heat operator equation*, Journal of Computational and Applied Mathematics, 2000, v 115, pp 229-243
- [71]Hatzigeorgiou G, Beskos DE, *Dynamic inelastic structural analysis by the BEM: a review*, Engineering Analysis with Boundary Elements, 2011, v 35, pp 159-169
- [72]Hosseini Tehrani P, Reza Eslami M, *Two-dimensional time-harmonic dynamic coupled thermoelasticity analysis by boundary element method formulation*, Engineering Analysis with Boundary Elements, 1998, v 22, pp 245-250
- [73]Hosseini-Tehrani P, Eslami MR, *BEM analysis of thermal and mechanical shock in a two-dimentional finite domain considering coupled thermoelasticity*, Engineering Analysis with Boundary Elements, 2000 v 24, pp 249-257
- [74]Hsiao GC, *Boundary element methods-An overview*. Appl. Numer. Math 2006, v 56, pp 1356-1369
- [75]Inger MS, Mitra AK, *Grid optimization for the boundary element method*, Int. J. Numr. Meth Engng, 1986, v 23, pp 2021-2036
- [76]Israil ASM, Banerjee PK, *Two-dimensional transient wave propagation problems by time-domain BEM*, International Journal of Solids Structures, 1990, v 26, pp 851-864

- [77] Kamiya N, Sawaki Y, *The plate bending analysis by dual reciprocity boundary elements*, Engineering Analysis with Boundary Elements, 1988, v 5, pp 36-40
- [78] Karami G, Derakhshan D, *An efficient method to evaluate hypersingular and supersingular integrals in boundary integral equations analysis*, Engineering Analysis with Boundary Elements, 1999, v 23, pp 317-326
- [79] Kita E, Kamiya N, *Error estimation and adaptive mesh refinement in boundary element method, an overview*, 2001, Engineering Analysis with Boundary Elements, 2003, v 25, pp 479-495
- [80] Kögl M, Gaul L, *Free Vibration Analysis of Anisotropic Solids with the Boundary Element Method*, Engineering Analysis with Boundary Elements, 2003, v 27, pp 107-114
- [81] Lekhnitskii SG, *Theory of elasticity of an anisotropic elastic body*, Holden-Day, San Francisco, 1963.
- [82] LePage WR, *Complex Variables and the Laplace Transform for Engineers*, Dover, 1980
- [83] Liapis S, *A Review of Stimulation and Adaptivity in the Boundary Element Method*, Engineering Analysis with Boundary Elements, 1994, v 14, pp 315-323
- [84] Liu YJ, *On the simple-solution method and non-singular nature of the BIE/BEM - a review and some new results*, Engineering Analysis with Boundary Elements, 2000, v 24, pp 789-795
- [85] Love AEH, *A treatise on the mathematical theory of elasticity*, Dover Publications, New York, 1944.
- [86] Lykotrafitis G, Georgiadis HG, *The three-dimensional steady-state thermo-elastodynamic problem of moving sources over a half space*, Int. J. Of Solids and Structures, 2003, v 40, pp 899-940
- [87] Lykotrafitis G, Georgiadis HG, Brock, L M, *Tree-dimensional thrmoeelastic wave motions in a half-space under the action of a buried source*, Int. J. Of Solids and Structures, 2001, v 38, pp 4857-4878
- [88] Manolis G D, Shaw RP, *Fundamental Solutions for Variable density two-dimensional elastodynamic problems*, Engineering Analysis with Boundary Elements, 2000, v 24, pp 739-750

- [89]Mansur WJ, Brebbia CA, *Numerical Implementation of the Boundary Element Method for two dimensional transient scalar wave propagation problems*, Applied Math. Modelling, 1982, v 6, pp 299-306
- [90]Mansur WJ, Brebbia CA, *Formulation of the Boundary Element Method for transient problems governed by the scalar wave equation*, Applied Math. Modelling, 1982, v 6, pp 307-311
- [91]Mantic V, París F, *Existence and evaluation of the two free terms in the hypersingular boundary integral equation of potential theory*, Engineering Analysis with Boundary Elements, 1995, v 16, pp 253-260
- [92]Mantic V, París F, *Integral kernels in the 2D Somigliana displacement and stress identities for anisotropic materials*, Computational Mechanics, 1998, v 22, pp 77-87
- [93]Martínez Sáez F, *Sobre la termoelasticidad de materiales simples*, Tesis doctoral, Universidad de Politécnica de Cataluña, 1997.
- [94]Medeiros Glauceny C de, Partridge Paul W, Brandao Jorge O, *The method of fundamental solutions with dual reciprocity for some problems in elasticity*, Engineering Analysis with Boundary Elements, 2004, v 28, pp 453-461
- [95]Menon G, Pulino GH, Mukherjee S, *Analysis of hypersingular residual error estimates in boundary element methods for potential problems*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 1999, v 173 pp 449-443
- [96]Merkel M, Bulgakov V, Kuhn G, *Iterative Solution of Large-Scale 3D-BEM industrial problems*, Engineering Analysis with Boundary Elements, 1998, v 22, pp 183-197
- [97]Miranda-Valenzuela JC, Muci-Küchler KH, Soriano-Soriano S, *Efficient computation of boundary stresses and error indicators in two-dimensional thermoelasticity*, Engineering Analysis with Boundary Elements, 2003, v 27, pp 159-173
- [98]Miranda-Valenzuela JC, Muci-Küchler KH, Soriano-Soriano S, *Adaptative meshing for two-dimensional thermoelastic problems using Hermite boundary elements*, Advances in Engineering Software, 2001, v 32, pp 171-188

- [99] Morvan D, *Application of the B.E.M. to the Resolution of an Unsteady Diffusion Problem*, Heat Transfer, Fluid Flow & Electrical Applications, 15-27
- [100] Mukherjee Yu Xie, Shah Ketan, Mukherjee Subrata, *Thermoelastic fracture mechanics with regularized hypersingular boundary integral equations*, Engineering Analysis with Boundary Elements, 1999, v 23, pp 89-96
- [101] Mukherjee SK, *Mean value theorems for integral equations in 2D potential theory*, Engineering Analysis with Boundary Elements, 2003, v 27, pp 183-191
- [102] Mukhopadhyay NK, Maiti SK, Kakodkar A, *Modified crack closure integral based computation of stress intensity factors for 2-D thermoelastic problems through boundary element method*, Nuclear Engineering and Design, 1999, v 187, pp 277-290
- [103] Nardini D, Brebbia CA, *A new approach to free vibration analysis using boundary elements*, Appl. Math. Modelling, 1982, v 7, pp 157-162
- [104] Niku SM, Adey RA, *Computational aspect of the dual reciprocity method for dynamics*, Engineering Analysis with Boundary Elements, 1996, v 18, pp 43-61
- [105] Niku SM, Brebbia CA, *Dual reciprocity boundary element formulation for potential problems with arbitrary distributed sources*, Engineering Analysis with Boundary Elements, 1988, v 5, pp 46-48
- [106] Nishimura N, Kobayashi S, *A regularized boundary integral equation method for elastodynamic crack problems*. Comp. Mech., 1989, v 4, pp 867-871
- [107] Nowak AJ, *Solving linear heat conduction problems by the multiple reciprocity method*. Wrobel L. C. & Brebbia C. A. editors. Boundary element methods in heat transfer. Southampton, Boston: CMP: 1992, pp 63-132
- [108] Owatsiriwong A, Park KH, *A BEM formulation for transient dynamic elastoplastic analysis via particular integrals*, Int. J. of Solids and Structures, 2008, v 45, pp 2561-2582

- [109] Pan E, *A BEM analysis of fracture mechanics in 2D anisotropic piezoelectric solids*, Engineering Analysis with Boundary Elements, 1999 v 23, pp 67-76
- [110] Pan E, Amadei B, *Boundary Element Analysis of Fracture Mechanics in Anisotropic Bimaterials*, Engineering Analysis with Boundary Elements, 1999, v 23, pp 683-691
- [111] Pan E, Chen Chao-Shi, Amadei B, *A BEM Formulation for Anisotropic half-plane problems*, Engineering Analysis with Boundary Elements, 1997, v 20, pp 185-195
- [112] Park KH, *A BEM formulation for axisymmetric elasticity with arbitrary body force using particular integrals*, Computers & Structures, 2002, v 80, pp 2507-2514
- [113] Park KH, *A BEM formulation for inhomogeneous potential problems by particular integrals*, Applied Mathematical Modelling, 2003, v 27, pp 293-306
- [114] Park KH, Banerjee PK, *A simple BEM formulation for poroelasticity via particular integrals*, Int. J. of Solids and Structures, 2006, v 43, pp 3613-3625
- [115] Park KH, Banerjee PK, *Two and three-dimensional transient thermoelastic analysis by BEM via particular integrals*, Int. J. of Solids and Structures, 2002, v 39, pp 2871-2892
- [116] Parreira P, Guiggiani M, *On the implementation of the Galerkin approach in the boundary element method*. *Comp Struct*, 1989, v 33, pp 269-279
- [117] Partridge PW, Brebbia CA, Wrobel LC, *The Dual Reciprocity Boundary Element Method*, Computational Mechanics Publications, Southampton, Boston, Elsevier Applied Science, London, New York, 1992
- [118] Partridge PW, *Dual reciprocity BEM: local versus global approximation functions for diffusion, convection and other problems*, Engineering Analysis with Boundary Elements, 1994, v 14, pp 349-356
- [119] Partridge PW, *Towards criteria for selecting approximation functions in the dual reciprocity method*, Engineering Analysis with Boundary Elements, 2000, v 24, pp 519-529

- [120] Partridge PW, Sensale B, *The Method of Fundamental solution with dual reciprocity for diffusion and diffusion-convection using subdomains*, Engineering Analysis with Boundary Elements, 2000, v 24, pp 633-641
- [121] Pérez MM, Wrobel LC, *A general integral equation formulation for homogeneous orthotropic potential problems*, Engineering Analysis with Boundary Elements, 1992, v 10, pp 323-332
- [122] Pérez-Gavilán JJ, Aliabadi MH, *A Galerkin boundary element formulation with dual reciprocity for elastodynamics*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2000, v 48, pp 1331-1344
- [123] Pérez-Gavilán JJ, Aliabadi MH, *A symmetric Galerkin formulation and dual reciprocity for 2D elastostatics*, Engineering Analysis with Boundary Elements, 2001, v 25, pp 229-235
- [124] Pérez-Gavilán JJ, Aliabadi MH, *A symmetric Galerkin BEM multi-connected bodies: a new approach*, Engineering Analysis with Boundary Elements, 2001, v 25, pp 633-638
- [125] Polch E, Cruse TA, Huang CJ, *Traction BIE solution for flats cracks*, Comput Mech, v 2, 1987, pp 253-267
- [126] Polyanin AD, *Handbook of Linear Partial Differential Equations for Engineers and Scientists*, Chapman & Hall/CRC, Boca Ratón, Florida, 2002
- [127] Polyzos D, Beskos DE, *A new time domain boundary element formulation for generalized dynamic coupled thermoelasticity*, Engineering Analysis with Boundary Elements, 1998, v 22, pp 111-116
- [128] Press WH, Teukolsky SA, Vetterling WT, Flannery BP, *Numerical Recipes in C*, Quinta Edición, Cambridge University Press, 1996
- [129] Quatember Ralf, Wendland Wolfgang L, *Domain Decomposition Methods for Three-Dimensional Thermoelastic Problems on Parallel Computers*, Ninth International Conference on Domain Decomposition Methods, 1998, pp 784-791
- [130] Quintanilla R, *Structural Stability and Convergence in Thermoelasticity and Heat Conduction with Relaxation Times*, Applicable Analysis, 2004
- [131] Rank E, *Adaptative h-, p- and hp- versions for boundary integral element methods*, Int. J. Numer. Meth Engng, 1989, v 28, pp 1335-1349

- [132] Rashed Youssef F, *BEM for dynamic analysis using compact supported radial basis functions*, Computers & Structures, 2002, v 80, pp 1351-1367
- [133] Rashed Youssef F, *Transient dynamic boundary element analysis using Gaussian-based mass matrix*, Engineering Analysis with Boundary Elements, 2002, v 83, pp 135-155
- [134] Raveendra ST, *The use of a piecewise continuous polynomial basis function for the surface reduction of integral equations in thermoelastic analysis*, Computers & Structures, 2000, v 77, pp 601-614
- [135] Rencis JJ, Mullen RL, *Solution of elasticity problems by a self-adaptative mesh refinement technique for boundary element computation*, Int. J. Numr. Meth Engng, 1986, v 23, pp 1509-1527
- [136] Rizzo FJ, *An integral equation approach to boundary value problems of classic elastostatics*, Q. J. Appl Math, 1967, v 25, pp 83-95
- [137] Rizzo FJ, Shippy DJ, *An advanced boundary integral equation method for three-dimensional thermoelasticity.*, Int. J. Numr. Meth Engng, 1977, v 11, pp 1753-1768
- [138] Rodríguez JJ, Power H, *h-Adaptive mesh refinement strategy for the boundary element method based on local error analysis*, Engineering Analysis with Boundary Elements, 2001, v 25, pp 565-579
- [139] Rodríguez Baccino G, Sensale B, *Método de Reciprocidad Dual Aplicado a Problemas de Tensiones Térmicas*, Anales del 3^{er} Congreso de Métodos Numéricos para Ingeniería, Zaragoza, v1, pp 363-372, 1996
- [140] Rodolphi TJ, *The use of simple solution in the regularization of hypersingular boundary integral equations*, Math Comput Model, 1991, v 15, pp 269-278
- [141] Sáez A, *Análisis numérico de problemas elastodinámicos en materiales transversalmente isótropos*, Tesis doctoral, Universidad de Sevilla, 1997.
- [142] Sales Mark A, Gray LJ, *Evaluation of the anisotropic Green's function and its derivatives*, Computers & Structures, 1998, v 69, pp 247-254

- [143] Samaan Morcos F, Rashed Youssef F, *BEM for transient 2D elastodynamics using multiquadric functions*, Int. Journal of Solids and Structures, 2007, v 44, pp 8517-8531
- [144] Samaan MF, Rashed YF, Ahmed, MA, *The dual reciprocity method applied to free vibrations of 2D structures using compact supported radial basis functions*, Comput. Mech., 2007, v 41, pp 85- 105
- [145] Sarler B, Kuhn G, *Dual reciprocity boundary element method for convective-diffusive solid-liquid phase change problems. Part 1. Formulation*. Engineering Analysis with Boundary Elements, 1998, v 21, pp 53-63
- [146] Sarler B, Kuhn G, *Dual reciprocity boundary element method for convective-diffusive solid-liquid phase change problems. Part 2. Numerical examples*. Engineering Analysis with Boundary Elements, 1998, v 21, pp 53-63
- [147] Shiagh YC, Tan CL, *Exact Boundary Integral Transformation of the Thermoelastic Domain Integral in BEM for Anisotropic Elasticity*, Computational Mechanics, 1999, v 23, pp 87-96
- [148] Shiah YC, Tan CL, *Determination of interior point stresses in two dimensional BEM thermoelastic analysis of anisotropic bodies*, Int. J. Of Solids and Structures, 1999, v 37, pp 809-829
- [149] Shiah YC, Tan CL, B.E.M. *Treatment of two-dimensional anisotropic field problems by direct domain mapping*, Engineering Analysis with Boundary Elements, 1997, v 20, pp 347-351
- [150] Sladek V, Sladek J, *A new approach to transient dynamic analysis of thermoelasticity by the boundary element method*. Engineering Analysis with Boundary Elements, 1985, v 2, pp 221-229
- [151] Soares Júnior D, *A time-marching scheme based on implicit Green's functions for elastodynamic analysis with the domain boundary element method*, Computational Mechanics, 2007, v 40, pp 827-835
- [152] Sollero P, Aliabadi MH, *Anisotropic analysis of cracks in composite laminates using the dual boundary element method*, 1995, v 31, pp 229-233
- [153] Sutradhar A, Paulino GH, Gray LJ, *On hypersingular surface integrals in the symmetric Galerkin boundary element method: application to heat*

- conduction in exponentially graded materials*. Int. J. Numer. Meth Eng., 2005, v 62, pp 122-157
- [154] Tafreshi A, *Shape design sensitivity analysis of 2D anisotropic structures using the boundary element method*, Engineering Analysis with Boundary Elements, 2002, v 26, pp 237-251
- [155] Tan CL, Gao YL, *Boundary Element Analysis of Plane anisotropic bodies with stress concentrations and cracks*, Composites Structures, 1992, v 20, pp 17-28
- [156] Tan CL, Gao YL, *Boundary integral equation fracture mechanics analysis of plane orthotropic bodies*, International Journal of Fracture, 1992, v 53, pp 343-365
- [157] Tanaka M, Chen W, *Coupling dual reciprocity BEM and differential quadrature method for time-dependent diffusion problems*, Applied Mathematical Modelling, 2001, v 25, pp 257-268
- [158] Tanaka Masataka, Chen W, *Dual Reciprocity BEM applied to transient elastodynamic problems with differential quadrature method in time*, Computer methods in applied mechanics and engineering, 2001, v 190, pp 2331-2347
- [159] Tanaka M, Kurokawa K, Mastsumoto T, *A time-stepping DRBEM for transient heat conduction in anisotropic solids*, Engineering Analysis with Boundary Elements, 2008, v 32, pp 1046-1053
- [160] Tanaka M, Mastsumoto T, Moradi M, *Application of boundary element method to 3-D problems of coupled thermoelasticity*, Engineering Analysis with Boundary Elements, 1995, v 16, pp 297-303
- [161] Tanaka M, Matsumoto T, Takakuwa S, *Dual reciprocity BEM for time-stepping approach to the transient heat conduction problem in nonlinear materials*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2006, v 195, pp 4953-4961
- [162] Tanaka M, Singh KM, *Application of DRBEM and Iterative Regularization to Inverse Heat Conduction*, International Symposium on inverse Problems in Engineering Mechanics, 2000, pp 81-90
- [163] Toh KC, Mukherjee S, *Hypersingular and finite part integral in the boundary element method*, Int J. Solid Struct, 1994, v 17, pp 2299-2312

- [164] Vable Madhukar, Sikarskie DL, *Stress Analysis in Plane Orthotropic Material by the Boundary Element Method*, Int. Journal Solids Structures, 1988, v 24, pp 1-11
- [165] Vera-Tudela CAR, Telles JCF, *A numerical Green's function and dual reciprocity BEM method to solve elastodynamic crack problems*, Engineering Analysis with Boundary Elements, 2005, v 29, pp 204-209
- [166] Wang CY, Achenbach JD, *A new look at 2D time-domain elastodynamic Green's functions for general anisotropic solids*, Wave Motion, 1992, v 16, pp 389-405
- [167] Wang W, Ji X, Tanaka M, *A dual reciprocity boundary element approach for the problems of large deflection of thin elastic plates*, Comp. Mech., 2000, v 26, pp 58-65
- [168] Wang CC, Wang HC, Liou GS, *Quadratic time domain BEM formulation for 2D Elastodynamic transient analysis*, Int. J. Solids Structures, 1997, v 34, pp 129-151
- [169] Watson JO, *Boundary Element from 1960 to the present day*. Electron J. Bound. Elemen., 2003, v 1, pp 34-46
- [170] Widagdo D, Aliabadi MH, *Boundary Element Analysis of cracked panels repaired by mechanically fastened composite patches*, Engineering Analysis with Boundary Elements, 2001, v 25, pp 339-345
- [171] Wideberg J, Benitez FG, *Elastic stress and displacement distribution in an orthotropic layer due to a concentrated load*, Engineering Analysis with Boundary Elements, 1996, v 17, pp 205-221
- [172] Wrobel LC, *The Boundary Element Method, Volume 1, Applications in Thermo-Fluids and Acoustics*, John Wiley & Sons Ltd, Sussex, 2001
- [173] Wrobel LC, Brebbia CA, *The dual reciprocity boundary element formulation for non linear diffusion problems*. Comp. Meth. Appl Mech Eng., 1987, v 65, pp 147-164
- [174] Yamada T, Wrobel LC, Power H, *On the convergence of the dual reciprocity boundary element method*, Engineering Analysis with Boundary Elements, 1994, v 13, pp 291-298

- [175] Yang MT, Park KH, Banerjee PK, *2D and 3D transient heat conduction analysis by BEM via particular integrals*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2002, v 191, pp 1701-1722
- [176] Yu KH, Kadarman AH, Djodjodhardjo H, *Development and Implementation of some BEM variants-A critical review*, Engineering Analysis with Boundary Elements, 2010, v 34, pp 884-899
- [177] Yu G, Mansur WJ, Carrer JAM, Gong L, *Time weighing in time domain BEM*, Engineering Analysis with Boundary Elements, 1998, v 22, pp 175-181
- [178] Yuan W, Zhao Z, Lie ST, Yu G, *Numerical implementation of the symmetric galerkin boundary element method in 2D elastodynamics*. Int. J. Numer Meth Eng., 2003, v 58, pp 1049-1060
- [179] Zhang JJ, Afagh FF, Tan CL, *Boundary Integral Transformation of Body-Force Volume integral in BEM for 2D anisotropic elasticity*, Mechanics Research Communications, 1996, v 23-2, pp 227-232
- [180] Zhang Y, Zhu S, *On the choice of interpolation functions used in the dual reciprocity boundary element method.*, Engineering Analysis with Boundary Elements, 1994, v 13, pp 387-396
- [181] Zhong Ming, Zhang Yogyuan, *Fundamental solution and boundary integral equation of 3-D coupled thermoelasticity with non-small temperature changes in laplace transform domain*, Applied Mathematical Modelling, 2001, v 25, pp 347-353
- [182] Zhu Song-Ping, *Solving Transient Diffusion Problems: Time-Dependent Fundamental Solution Approaches versus LTDRM approaches*, Engineering Analysis with Boundary Elements, 1998, v 21, pp 87-90
- [183] Zhu Songping, Zhang Yinglong, *Solving general field equations in infinite domains with dual reciprocity boundary element method*, Engineering Analysis with Boundary Elements, 1993, v 12, pp 241-250
- [184] Zhu Songping, Satravaha Pornchal, *An efficient computational method for modelling transient heat conduction with nonlinear source terms*, Appl. Math. Modelling, 1996, v 20, pp 513-522
- [185] Zienkiewicz OC, Taylor RL, *El Método de los Elementos Finitos*, Quinta Edición, Centro Internacional de Métodos Numéricos en Ingeniería, Barcelona, 2004

