

TESIS

Simulación dinámica del movimiento de vehículos
ferroviarios en vías deformables

Presentada por

Rosario Chamorro Moreno

*para la obtención del
Grado de Doctor Ingeniero Industrial*

Dirigida por

Dr. José Luis Escalona Franco

UNIVERSIDAD DE SEVILLA, 2011

Dedicada a mis padres

Agradecimientos

Mi mayor agradecimiento es para el director de esta Tesis, José Luis Escalona Franco. Gracias por la generosidad con su tiempo, su trabajo y sus conocimientos, he aprendido mucho trabajando con él y espero seguir aprendiendo. Su entusiasmo por el trabajo me ha servido de gran motivación. Especial ha sido su apoyo y comprensión en los momentos en que los he necesitado.

Gracias al Dr. Shabana por permitirme trabajar con él y por su cercanía y amabilidad durante mi estancia en Chicago. Gracias a los compañeros del laboratorio de Ingeniería Mecánica de UIC, en especial a Cheta Rathod y Luis Maqueda. Ambos, junto a Ivana Tonic y Edurne García hicieron de mi estancia en Chicago una experiencia inolvidable.

Gracias a todos los miembros del grupo de Ingeniería Mecánica, en especial a Mercedes García Durán, por quien la Ingeniería Mecánica se cruzó en mi camino, y a mi compañera y amiga Esther Reina Romo, a la que tengo la suerte de tener todos los días muy cerca, por innumerables detalles.

Gracias a mis padres, por ser como son.

Gracias a Silva por quererme tanto y a mi Paula por hacerme tan feliz.

Resumen

Las técnicas de dinámica multicuerpo permiten modelar la interacción rueda-carril de forma muy sofisticada, pudiendo describir los perfiles reales de la rueda y el carril, localizar los puntos de contacto y calcular los vectores y parámetros geométricos que influyen en el cálculo de las fuerzas de contacto normales y tangenciales. Si se considera la flexibilidad de la vía, varían tanto la localización de los puntos de contacto como los vectores y parámetros geométricos, por lo que las fuerzas implicadas en el contacto también varían.

En esta tesis se desarrollan dos métodos para modelar la flexibilidad de la vía. Ambos métodos permiten resolver de forma acoplada la dinámica no lineal del vehículo ferroviario y la vía deformable.

El primer método modela la flexibilidad de la vía mediante la formulación de los sistemas de referencia flotantes, con discretización mediante elementos finitos y síntesis modal. Se realizan dos tipos de interpolaciones: una para describir la geometría de la vía y otra para describir las deformaciones del carril. Este método permite modelar vías muy detalladas en un programa de elementos finitos, pudiendo introducir en un programa de propósito general de sistemas multicuerpo flexibles las características modales obtenidas con los elementos finitos. Sin embargo, no resulta eficaz cuando se quieren modelar vías de gran longitud. El cálculo de movimientos estacionarios para el análisis de estabilidad del sistema ferroviario precisa de vías de gran longitud, por lo que se desarrolla una nueva formulación muy eficaz para este caso: el método de las deformadas móviles.

La segunda formulación que se desarrolla en esta tesis, el método de las deformadas móviles, se basa en la formulación de los sistemas de referencia flotantes con la particularidad de que las deformaciones no se describen en el sistema de referencia local de la vía, sino que se describen en un sistema de referencia móvil. El uso de este sistema de referencia móvil hace que aparezcan términos convectivos en las ecuaciones del movimiento. Este método permite considerar la vía de longitud infinita.

Palabras clave: sistemas multicuerpo, flexibilidad de la vía, vía curva, sistema de la trayectoria, movimiento estacionario, estabilidad, sistema de referencia flotante.

Índice

1	Introducción	1
1.1	Dinámica de vías ferroviarias	3
1.1.1	Orígenes de las vías ferroviarias	3
1.1.2	Vías ferroviarias	4
1.1.3	Modelos de vías ferroviarias	6
1.1.4	Modelos de vías ferroviarias utilizados en dinámica de sistemas multicuerpo	19
1.2	Dinámica de vehículos ferroviarios	21
1.2.1	Modelos de vehículos ferroviarios	21
1.3	Interacción vía-vehículo	23
1.3.1	Fuerza normal de contacto	23
1.3.2	Fuerzas tangenciales de creep	24
1.4	Contacto en dinámica de sistemas multicuerpo	26
1.4.1	Fuerza normal de contacto en dinámica de sistemas multicuerpo	26
1.4.2	Fuerzas tangenciales de creep en dinámica de sistemas multicuerpo	28
1.4.3	Modelos de contacto rueda-carril en dinámica de sistemas multicuerpo	28
1.5	Comportamiento de un vehículo ferroviario	30
1.5.1	Movimiento de lazo	31
1.5.2	Negociado de curvas	32
1.5.3	Posiciones de equilibrio estacionario y estabilidad	33
1.5.4	Irregularidades en la vía y el carril	36
1.6	Motivación y objetivos de este trabajo	37
1.7	Desarrollo de esta tesis	38

1.8	Organización del texto	39
2	Modelado de la flexibilidad de la vía mediante FFRF con discretización mediante elementos finitos y síntesis modal	41
2.1	Introducción	41
2.2	Fases computacionales para simulaciones con vías rígidas	43
2.2.1	Fase de preprocesador	44
2.2.2	Fase de generación de las ecuaciones de movimiento en el programa principal	47
2.3	Fases computacionales para simulaciones con vías deformables	65
2.3.1	Fase de preprocesador	66
2.3.2	Fase de creación de un modelo de vía con elementos finitos	66
2.3.3	Fase de generación de las ecuaciones de movimiento en el programa principal	68
2.4	Resultados numéricos de la aplicación del método	82
2.4.1	Modelo geométrico de la vía	82
2.4.2	Modelo de elementos finitos de la vía	82
2.4.3	Modelo del vehículo ferroviario	86
2.4.4	Resultados numéricos	87
2.5	Validación del método	96
2.5.1	Modelo de la carga móvil	96
2.5.2	Modelo de la masa móvil	103
2.5.3	Modelos computacionales utilizados en la validación	104
2.5.4	Convergencia del método de reducción modal	106
2.5.5	Resultados de la validación del modelo multicuerpo	110
2.5.6	Análisis de las oscilaciones verticales que aparecen en la fuerza normal de contacto	114
2.5.7	Análisis de estabilidad	117
2.6	Resumen y discusión	124
3	Método de las deformadas móviles	127
3.1	Introducción	127
3.2	FFRF	129
3.3	Método de las deformadas móviles	130
3.3.1	Cinemática de la vía deformable	132
3.3.2	Dinámica de la vía deformable	134

3.3.3	Selección de las funciones de forma	139
3.3.4	Cinemática de un cuerpo rígido del vehículo ferroviario	141
3.3.5	Dinámica de un cuerpo rígido del vehículo ferroviario . . .	143
3.3.6	Ecuaciones del movimiento del sistema multicuerpo vehículo- vía	145
3.4	Equilibrio estacionario de un eje ferroviario	146
3.4.1	Dinámica lateral de vehículos ferroviarios en vías de cur- vatura constante con modelos lineales	146
3.4.2	Movimientos estacionarios de vehículos ferroviarios con mo- delos lineales	153
3.4.3	Movimientos estacionarios de vehículos ferroviarios con mo- delos no lineales	153
3.5	Resultados numéricos	155
3.5.1	Modelo del vehículo ferroviario	155
3.5.2	Modelo de vía flexible	156
3.5.3	Modelo de contacto	157
3.5.4	Funciones de forma	157
3.5.5	Resultados del vehículo sobre la vía recta	158
3.5.6	Resultados del vehículo sobre la vía curva	164
3.5.7	Resultados de los movimientos estacionarios	170
3.5.8	Resultados del análisis de estabilidad	170
3.6	Resumen y conclusiones	177
4	Conclusiones generales	181
4.1	Resumen	181
4.2	Conclusiones	182
4.3	Contribuciones originales de esta tesis	183
4.4	Publicaciones	185
4.4.1	Revistas	185
4.4.2	Congresos	185
4.4.3	En preparación	186
4.5	Trabajos futuros	187
	Bibliografía	189

Capítulo 1

Introducción

El transporte ferroviario se ha convertido en las últimas décadas en un medio de transporte muy importante. Gracias al desarrollo de los trenes de alta velocidad, el transporte ferroviario le hace la competencia al transporte aéreo en la media distancia. El desarrollo a su vez de las técnicas computacionales hace que puedan desarrollarse nuevos modelos de vías y de vehículos ferroviarios, estudiarse el desgaste o recrear accidentes ferroviarios sin necesidad de crear un prototipo, lo que supone un gran ahorro para las empresas relacionadas con el ferrocarril.

La ingeniería, con métodos analíticos y numéricos, ha mejorado los métodos empíricos iniciales en el campo de la dinámica de vehículos ferroviarios. Se ha conseguido duplicar la velocidad que alcanzaban los vehículos ferroviarios hace 60 años (Wickens, 2003), estando los trenes de alta velocidad muy desarrollados en algunos países como Japón (Shinkansen), Francia (TGV), Alemania (ICE) y España (AVE). Un ejemplo del desarrollo que han alcanzado los sistemas ferroviarios es el récord de velocidad alcanzado por TGV Alstrom en 2007, llegando a circular un tren sobre carriles en condiciones de prueba a una velocidad de 574.80 Km/h.

Un vehículo ferroviario es un sistema dinámico muy complejo. Además de ser un sistema con muchos grados de libertad se le añade la complicación adicional de la interacción del mismo con la vía. La interacción rueda-carril implica la complicada geometría de la rueda y del carril, e implica la aparición de fuerzas producidas por movimientos relativos entre la rueda y el carril en la zona de contacto. Los vehículos ferroviarios son propensos a una gran variedad de fenómenos dinámicos como inestabilidades y problemas asociados al guiado en curvas, en las que los componentes del vehículo y de la vía sufren una carga excesiva. Al

estudiar la dinámica ferroviaria se pretende alcanzar mayores velocidades, mejorar la seguridad, reducir las fuerzas que se producen, disminuir el desgaste, etc. La investigación en el campo de la dinámica ferroviaria computacional tiene dos objetos principales:

1. Desarrollar modelos matemáticos suficientemente detallados que permitan simular y analizar el comportamiento de un diseño específico o recrear un accidente. Al diseñar vehículos ferroviarios es necesario realizar un análisis dinámico para estudiar la estabilidad y el confort de los pasajeros a distintas velocidades. En general, las ecuaciones diferenciales que gobiernan el movimiento del sistema vehículo-vía son no lineales y no admiten una solución analítica, sino que se resuelven mediante métodos numéricos.
2. Describir complejos fenómenos mediante modelos simplificados de forma que se llegue a la comprensión de la dinámica ferroviaria.

Existen varios programas comerciales que permiten simular el movimiento de vehículos ferroviarios, pudiendo estudiarse distintos parámetros de diseño y el comportamiento del sistema en un entorno virtual. En Schiehlen (1990) y Kortum & Sharp (1993) puede encontrarse un buen resumen de los fundamentos de los programas disponibles. Se hallan entre los más destacados ADAMS/Rail, MEDYNA, SIMPACK, VOCO, VAMPIRE, GENSY y NUCARS (Polach *et al.*, 2006). Todos estos programas, exceptuando VOCO, han participado en el *Benchmark* de Manchester (Iwnicki, 1999), en el que se compararon los resultados que daba cada programa utilizando dos modelos de vehículo y cuatro modelos de vía. Se obtuvieron muy buenos acuerdos en general, aunque algunas variables presentaban una variación considerable de un programa a otro, como la fuerza tangencial que aparece en la pestaña cuando se negocia una vía curva. Esto indica que el comportamiento en curvas de los vehículos ferroviarios es uno de los temas que debe seguir siendo objeto de estudio.

Para poder simular el movimiento de un vehículo ferroviario es necesario un modelo de la vía, un modelo del vehículo y un modelo que represente la interacción entre ambos. Según el objeto de cada estudio se requerirá un modelo más sencillo o más detallado de los mismos. Si interesa la dinámica del vehículo a bajas frecuencias (negociado de curvas, movimiento de lazo, estabilidad, . . .) se modelará de forma más detallada el vehículo. Si el interés del estudio se centra en la dinámica de la vía y en los efectos que se producen a altas frecuencias (ruido,

aparición de irregularidades,...), se desarrollará un modelo más complejo de la vía.

En este capítulo se describe la infraestructura de uno de los tipos de vía más utilizados y se presenta un estado del arte de los modelos utilizados por los investigadores para representar la flexibilidad de la misma. Se describe brevemente los componentes de un vehículo ferroviario y se exponen los modelos más utilizados para el estudio de la dinámica del mismo. También se describe cómo se modela la interacción entre el vehículo y la vía, y se revisan los principales fenómenos dinámicos asociados al vehículo ferroviario: movimiento de lazo, negociado de curvas, estabilidad y desgaste. Al final del capítulo se expone la motivación y los objetivos de esta tesis doctoral.

1.1 Dinámica de vías ferroviarias

En esta sección se presenta brevemente el origen de las vías ferroviarias; se describe la infraestructura de la vía ferroviaria más común y las funciones de la misma; también se presenta el estado del arte de los modelos de vía más utilizados por los investigadores, clasificándolos en modelos continuos y modelos discretos; y se describen los modelos utilizados en dinámica de sistemas multicuerpo.

1.1.1 Orígenes de las vías ferroviarias

El origen del ferrocarril actual lo encontramos en el siglo XVI en las minas alemanas, donde realizaban el transporte subterráneo del mineral en pequeños vagones que rodaban sobre dos maderos planos paralelos con un reborde para evitar descarrilamientos. Estos mineros acudieron a Inglaterra a la explotación de minas de hierro y hulla e introdujeron en este país las vías de madera. Sobre 1630, Baumont, el dueño de una mina de carbón, introdujo las traviesas de madera. La vía consistía en segmentos de madera de 1.83 m de longitud con barras de madera atravesadas para mantener la separación entre carriles. Más tarde se le añadieron trozos de metal a los carriles para evitar el desgaste. En 1767, Reynolds introdujo los carriles de hierro fundido. En 1776, Curr introdujo el carril de hierro fundido con perfil en forma de L. En 1789, Jessop estableció la esencia del sistema rueda-carril actual, las ruedas con pestaña. En 1803, Nixon introdujo carriles de hierro forjado con sección cuadrada. En 1820, Bickenshaw introdujo el carril con sección

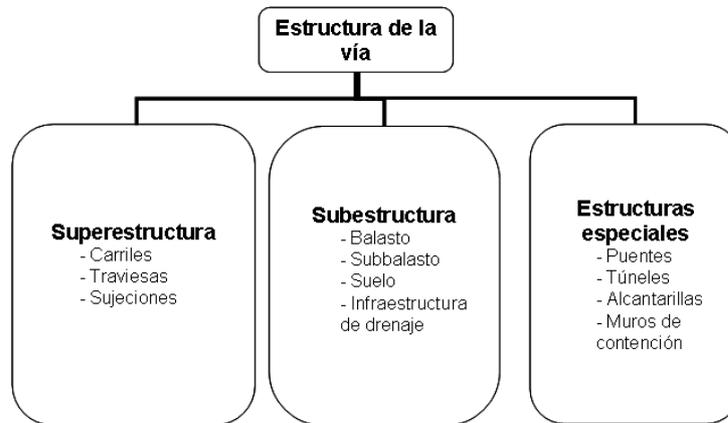


Figura 1.1: Estructura de la vía

en forma de T. En 1855 se introdujeron los carriles de acero (Kerr, 2003).

Se pueden encontrar otras revisiones de la historia de la vía ferroviaria en García-Lomas (1945) y Oliveros *et al.* (1983).

1.1.2 Vías ferroviarias

Se denomina vía ferroviaria a la parte de la infraestructura ferroviaria formada por el conjunto de elementos que sostienen y guían a los vehículos ferroviarios (Shabana & Sany, 2001a). La función principal de la vía ferroviaria es proveer de una superficie duradera y suave al vehículo ferroviario y distribuir las elevadas cargas que producen las ruedas en el terreno para que el suelo, que es el componente más débil de la vía ferroviaria, soporte la carga de la forma más distribuida posible. La estructura de la vía más común puede descomponerse en la superestructura, la subestructura y las estructuras especiales. La superestructura está compuesta por los carriles, las traviesas y las sujeciones. La subestructura se compone del balasto, el subbalasto, el suelo y las instalaciones para el drenaje. Las estructuras especiales son los puentes, túneles, muros de contención, alcantarillas,...(Kerr, 2003). La Fig. 1.1 presenta de forma esquemática los componentes de la estructura de la vía y en la Fig. 1.2 se representa un eje ferroviario sobre la estructura de la vía.

Los carriles son elementos longitudinales de acero que se colocan sobre las traviesas y que guían al vehículo ferroviario. Una de sus funciones principales es transferir la carga de las ruedas del vehículo ferroviario a las traviesas. El sistema de su-

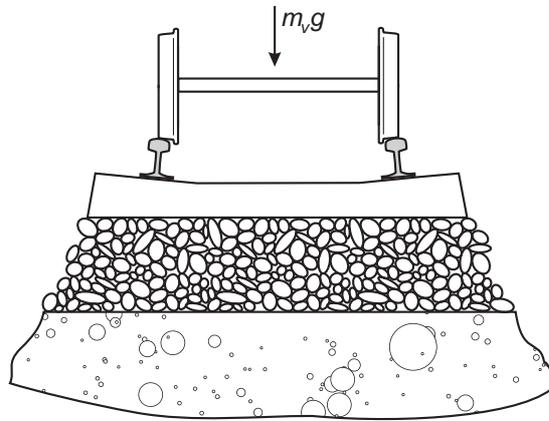


Figura 1.2: Eje ferroviario sobre la estructura de la vía

jeción conecta el carril con las traviesas, anclando la estructura carril-traviesa para evitar movimientos laterales y longitudinales de la misma. Los carriles apoyan en las traviesas, situándose entre ambas placas de asiento. Estas transfieren las fuerzas desde los carriles y sujeciones a las traviesas, y filtran las fuerzas de alta frecuencia. Las traviesas son vigas transversales que descansan sobre el balasto. El material más utilizado actualmente en las traviesas es el hormigón porque no se ve muy afectado por los cambios climáticos. La función de las traviesas consiste en:

1. Sostener los carriles de forma que se mantenga su posición, impidiendo la separación entre ambos y la variación de la inclinación de los carriles.
2. Transmitir al balasto las cargas que produce la circulación de los vehículos ferroviarios.

El balasto consiste en una capa de grava o de piedra machacada, que se tiende sobre la explanación de los ferrocarriles para asentar y sujetar sobre ella las traviesas. La función del balasto consiste en:

1. Limitar el movimiento de las traviesas soportando cargas verticales, longitudinales y laterales producidas por los trenes.
2. Distribuir la carga de las traviesas para proteger al resto de la subestructura de tensiones elevadas y así limitar el continuo asentamiento de la vía.
3. Proveer resistencia para absorber grandes cargas dinámicas.

4. Facilitar el mantenimiento de la vía mediante operaciones de alineación y nivelación.
5. Facilitar el drenaje de la estructura de la vía.
6. Ayudar en las heladas evitando problemas de congelación y descongelación.
7. Absorber el ruido del tráfico.

Bajo el balasto se coloca el subbalasto, que consiste en una grava arenosa con la función de:

1. Evitar daños al suelo sobre el que se coloca toda la infraestructura de la vía por erosión.
2. Drenar el agua de lluvia.
3. Mejorar el reparto de las cargas.
4. Mantener el balasto fuera del alcance de elementos extraños.
5. Retardar el crecimiento de vegetación en la zona de la estructura de la vía.

Se ha descrito la estructura de vías ferroviarias más común, aunque existen otras estructuras, por ejemplo, la que usan algunos trenes de alta velocidad, en la que el balasto es sustituido por una placa de hormigón. En algunos casos el carril va embebido en la placa del hormigón por lo que no son necesarias las traviesas (Shamalta & Metrikine, 2003).

1.1.3 Modelos de vías ferroviarias

La estructura de la vía ferroviaria está formada por diversos componentes, como se vio en la subsección anterior. Dependiendo del estudio que se quiera realizar y del rango de frecuencia en el que se produzca el fenómeno objeto de estudio, los componentes de la vía se modelarán de forma sencilla o más sofisticada. Los problemas asociados a la dinámica ferroviaria pueden agruparse en varios rangos de frecuencia, aunque no existe unanimidad entre los investigadores al denominar dichos rangos. Se presentan a continuación las frecuencias agrupadas en tres grupos según Popp *et al.* (1999):

1. *Rango de baja frecuencia* (0 - 50 Hz). En este rango de frecuencias se estudian los problemas relacionados con el confort del viajero y la estabilidad del vehículo (descarrilamiento, movimiento de lazo del vehículo,...). La vía se comporta como resortes relativamente rígidos, por lo que es suficiente modelar los carriles sobre una base continua (Knothe & Grassie, 1993; Dieterman & Metrikine, 1996). El primer modo de vibración asociado a la frecuencia de resonancia más baja se produce entre 20-40 Hz. Este modo se corresponde con la vibración de la estructura de la vía sobre el suelo (vibran en fase los carriles, placas de asiento, traviesas y balasto sobre el suelo) (Dahlberg, 2006).
2. *Rango de media frecuencia* (50 - 500 Hz). En este rango de frecuencias se originan problemas dinámicos como la corrugación de los carriles, el deterioro del balasto o pérdida de redondez de las ruedas. Las propiedades de las placas de asiento, del balasto y del suelo tienen una gran influencia en la dinámica de la vía en estas frecuencias. Para el análisis de la dinámica vertical sólo es necesario considerar la deformación por flexión. Puede simplificarse el modelo de la vía no considerando los apoyos discretos de las traviesas (Knothe & Grassie, 1993; Dieterman & Metrikine, 1996; Popp *et al.*, 1999). En este rango de frecuencias se producen dos modos de vibración de la vía asociados a dos frecuencias de resonancia. El segundo modo corresponde a la vibración de los carriles, placas de asiento y traviesas sobre el balasto (50-300 Hz), y el tercer modo corresponde a la vibración de los carriles sobre las placas de asiento (300-500 Hz) (Grassie & Cox, 1984; Kaewunruen & Remennikov, 2007).
3. *Rango de alta frecuencia* (500 - 5 KHz). En este rango surgen distorsiones de las sujeciones (Kaewunruen & Remennikov, 2007) y problemas acústicos de ruido (Thompson & Jones, 2000, 2006). La frecuencia más alta de interés se corresponde con la frecuencia más alta que aprecia el oído humano y es la asociada al ruido producido por el contacto de la rueda y el carril, unos 5 KHz (Knothe & Grassie, 1993). Debe modelarse la vía considerando el efecto de los apoyos discretos. Para obtener la deformación de la vía correspondiente a la cuarta frecuencia de resonancia, denominada *articulada – articulada* (800-1000 Hz), en la que los nodos de vibración coinciden con las traviesas, hay que modelar éstas.

Knothe & Grassie (1993) presentan el estado del arte para el rango de alta frecuencia, considerando estos autores que este rango contiene frecuencias superiores a 20 Hz, que es cuando consideran que la dinámica de la vía es más importante que la dinámica del vehículo. Popp *et al.* (1999) presentan el estado del arte de la dinámica vehículo ferroviario-vía en el rango de la media frecuencia.

Las formulaciones para el estudio de la interacción vehículo-vía pueden dividirse, en general, en los dos siguientes grupos:

1. *Formulaciones descritas en el dominio de la frecuencia.* La resolución de problemas en el dominio de la frecuencia es, en general, relativamente simple y más rápida computacionalmente. Se basa en modelos lineales.
2. *Formulaciones descritas en el dominio del tiempo.* Los problemas descritos en el dominio del tiempo permiten el uso del método de los elementos finitos y la inclusión de efectos no lineales.

A continuación se presenta un resumen de los modelos de vía más usados para estudiar la interacción dinámica del vehículo ferroviario y la vía, muchos de ellos resumidos en las siguientes referencias: Knothe & Grassie (1993); Popp *et al.* (1999); Popp & Schiehlen (2003); Iwnicki (2006); Roda (2006).

Carril sobre una base continua

El clásico modelo continuo de vía con longitud infinita ha sido extensamente investigado. El modelo más simple de vía ferroviaria representa los carriles como vigas sobre una base elástica continua. La fuerza distribuida que soporta la viga es proporcional al desplazamiento por deformación que sufre la viga. Este modelo fue introducido por Winkler en 1867 y se sigue utilizando actualmente. El desplazamiento por deformación del carril $u = u(s)$ (s es la coordenada longitudinal) se obtiene de la siguiente ecuación diferencial:

$$EI \frac{d^4 u}{ds^4} + ku = q \quad (1.1)$$

donde $q = q(s)$ es la carga distribuida en el carril, E es el módulo de Young, I es el momento de inercia según el eje respecto al cual se produce la flexión y k es el coeficiente de rigidez de la base. Este modelo es válido únicamente para cargas estáticas. No pueden analizarse efectos dinámicos ya que no se incluyen las fuerzas de inercia.

Mientras el modelo de Winkler describe la base elástica con un único parámetro k , existen otros modelos que son una extensión de éste y que representan la base elástica con distinto número de parámetros. Los modelos propuestos por Filonenko-Borodich en 1940, Pasternak en 1954, Reissner en 1958, Kerr en 1964, y Vlazov y Leontiev en 1966, describen la base elástica mediante dos parámetros k y k_1 , siendo k_1 el parámetro que representa la interacción entre los elementos de resorte de la base de Winkler, siendo esta interacción representada por membranas elásticas, vigas elásticas o por capas elásticas a cortante o cizalladura pura (Kerr, 1964; Aristizábal-Ochoa, 2003). Los modelos nombrados son idénticos matemáticamente, apareciendo el término $-k_1 \frac{\partial^2 u}{\partial s^2}$ en la parte izquierda de la ecuación (1.1). Modelos de dos parámetros han sido utilizados para modelar la base elástica por Ting (1973), Saito & Teresawa (1980), Nielsen & Abrahamsson (1992) y Mallik *et al.* (2006). Kerr (1965) presenta un modelo de tres parámetros. Modela la base elástica como dos capas de resortes con distinta constante de rigidez, conectadas mediante una capa que se deforma a cortante. Modelos de tres parámetros han sido utilizados por Rades (1971), Avramidis & Morfidis (2006) y Morfidis (2010).

Para realizar un análisis dinámico, incluyendo las fuerzas de inercia, el carril puede modelarse como una viga de Euler-Bernouilli o como una viga de Timoshenko (Felszeghy, 1996*a,b*; Mackertich, 1992, 1997, 2003) sobre una base elástica. Haciendo balance de fuerzas y momentos en una sección de la viga se obtiene las ecuaciones de movimiento de la misma. En la viga de Euler-Bernouilli se desprecia el efecto del cortante y la fuerza de inercia de la rotación de la viga. Se denomina viga de Rayleigh aquella que sí considera la fuerza de inercia de la rotación y desprecia el cortante. La viga de Timoshenko incluye tanto los términos de inercia debidos a la rotación de la sección transversal como el efecto del cortante (Fryba, 1972). Knothe & Grassie (1993) afirman que la deformación debida al cortante puede despreciarse para frecuencias inferiores a 500 Hz. Dahlberg (1995) mostró que a una frecuencia de 500 Hz, la viga de Euler-Bernouilli da una frecuencia de 10-15 % superior a ésta.

Entre los modelos continuos, existen modelos más simples, en los que se representa la estructura bajo los carriles con una capa de muelles y/o amortiguadores, y otros modelos más complejos, donde se representa la estructura de la vía con varias capas. En los modelos de varias capas, una capa puede ser un conjunto uniformemente distribuido de muelles-amortiguadores, una masa uniformemente

distribuida o un semi-espacio elástico. A continuación se presentan los modelos utilizados por algunos investigadores clasificándolos en modelos de una capa o de varias capas.

- **Modelos continuos de una capa:**

El modelo continuo de vía sobre una base de Winkler lleva utilizándose más de ocho décadas para modelar la vía. Timoshenko (1926) estudió una viga de Euler-Bernouilli infinita sobre una base de Winkler soportando una carga estática y dinámica. El mismo modelo de vía ha sido utilizado por muchos otros investigadores como Weistman (1971); Choros & Adams (1979); Patil (1988); Duffy (1990); Kaschiev & Mikhajlov (1995). Kenney (1954) resolvió analíticamente el problema de la carga móvil incluyendo amortiguamiento viscoso (ver Fig. 1.3). Kerr (1972) utilizó el mismo modelo con la

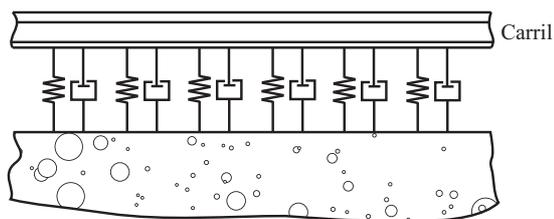


Figura 1.3: Modelo continuo de vía

carga móvil y le añadió una carga constante longitudinal de compresión a la viga. La carga axial representa el efecto de las subidas de temperatura en las zonas donde se sueldan los tramos que configuran los carriles. Fryba (1972) realizó una discusión muy detallada del problema de la carga móvil (constante, armónica, variable en el tiempo) actuando en una viga (finita o infinita) sobre una base elástica continua. Newton & Clark (1979) estudiaron el efecto de irregularidades en la rueda utilizando el modelo de la Fig. 1.3, modelando los carriles como vigas de Euler-Bernouilli y como vigas de Timoshenko. Kerr (2000) propone un método para determinar la rigidez de la base elástica modelando la vía mediante la ecuación (1.1). Wu & Shih (2000) aplican el método de los elementos finitos para modelar la vía como una viga sobre una base de resortes continua; la vía está sometida a varias cargas móviles, tienen en cuenta la inercia de las mismas y modelan la interacción entre las masas móviles y la vía con un modelo lineal.

Feldmann *et al.* (2003) modelan la estructura completa de la vía (carril, placas de asiento, traviesas, balasto, subbalasto y suelo) como un sistema muelle-amortiguador. El coeficiente de rigidez del sistema cambia a lo largo de la vía y su modelo permite detectar fallos en la vía mediante la monitorización de la respuesta dinámica del vehículo al viajar por la misma.

- **Modelos continuos de varias capas:**

Modelos continuos más complejos, que diferencian algunas de las componentes de la estructura de la vía estratificando el modelo, han sido utilizados por varios investigadores. Grassie *et al.* (1982) modelan la vía continua con varias capas: las placas de asiento y el balasto se representan mediante una base continua elástica con amortiguamiento, y las traviesas mediante una masa uniformemente distribuida entre las placas de asiento y el balasto. El mismo modelo pero únicamente con muelles, sin amortiguadores, es utilizado por Wu & Thompson (1999) para el estudio de la dinámica vertical de la vía a altas frecuencias. Sobre esta base descansa el carril que es modelado con dos vigas de Timoshenko infinitas, una para la cabeza del carril y otra para el pie, unidas mediante muelles distribuidos uniformemente, de forma que la sección se puede deformar, que es lo que ocurre a muy altas frecuencias.

Algunos investigadores han modelado alguna de las capas que forman la estructura de la vía como un semi-espacio elástico para el estudio de la transmisión de vibraciones en el suelo. Dieterman & Metrikine (1996) obtuvieron el comportamiento estacionario de una viga sobre un semi-espacio elástico utilizando el concepto de *rigidez equivalente* para el semi-espacio en la zona de contacto con la viga. Con este modelo calcularon la velocidad crítica de una carga móvil que se desplaza sobre una viga de Euler-Bernouilli a velocidad constante. Sheng *et al.* (1999*b,a*) modelan los carriles como vigas de Euler infinitas, las placas de asiento con muelles verticales uniformemente distribuidos, las traviesas con masas distribuidas por unidad de longitud de la vía, el balasto con muelles verticales uniformemente distribuidos y masa por unidad de longitud del carril, y el suelo como un semi-espacio elástico. Estudian la respuesta de la vía ante una carga armónica estática y ante una carga armónica que se desplaza a lo largo de la vía.

Shamalta & Metrikine (2003) modelaron una estructura diferente de vía,

sin traviesas, utilizada por un tren de alta velocidad. La vía consiste en dos carriles embebidos en una placa de hormigón. El modelo está constituido por dos vigas (carriles), unidas mediante elementos viscoelásticos continuos a un elemento placa bajo la cual hay una base elástica (placa de hormigón sobre balasto). Presentan la solución analítica de la deformada estacionaria de la vía en dos dimensiones, vertical y lateral. Comparan la solución vertical 2D con la solución de un modelo 1D, concluyendo que en el rango de bajas frecuencias que analizan, las diferencias de ambos modelos son despreciables, obteniéndose el comportamiento dinámico de la vía mucho más rápidamente en el modelo 1D.

Carril sobre una base discreta

Para poder obtener la frecuencia de resonancia articulada-articulada (ver Fig. 1.4) con el modelo de la vía, deben incluirse los apoyos discretos. Los apoyos discretos pueden ser sistemas de muelle-amortiguador o sistemas muelle-masa-muelle, que modelan las placas de asiento, las traviesas y el balasto. Los modelos discretos de vía pueden clasificarse en función de las distintas formas en que se modela el balasto. Los modelos más utilizados se presentan a continuación, desde los más sencillos, como es el caso en el que se modela el balasto, junto al resto de la estructura de la vía situada bajo los carriles, como un sistema viscoelástico, hasta el modelo más sofisticado, en el que se utiliza la dinámica molecular.

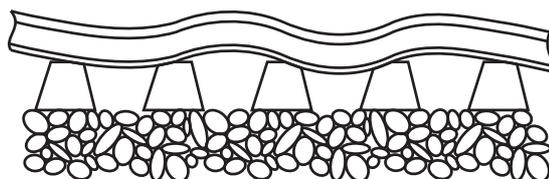


Figura 1.4: Deformación del carril correspondiente a la frecuencia articulada-articulada

- **Carriles apoyados de forma discreta sobre una base viscoelástica**

Uno de los modelos más sencillos de vía sobre apoyos discretos consiste en un sistema muelle-amortiguador bajo el carril en el lugar donde va situada la traviesa. Jezequel (1981) obtuvo la solución analítica de una carga móvil desplazándose sobre una viga de Euler-Bernouilli con apoyos discretos en una base elástica. Zboinski (1998) y Zboinski & Dusza (2006, 2008), han

modelado cada traviesa con sistemas viscoelásticos verticales y laterales para poder simular la dinámica vertical y lateral incluyendo la flexibilidad lateral de la vía. Con este modelo realizan análisis de estabilidad en vías curvas de los vehículos ferroviarios. Dukkipati & Dong (1999) modelan la vía como dos vigas sobre apoyos discretos. Con el modelo discreto obtienen el mismo fenómeno observado en los estudios de la carga móvil sobre vías infinitas continuas con amortiguamiento presentados por Fryba (1972), concluyendo que es aceptable representar la vía con dos vigas sobre una base elástica continua de Winkler, incluyendo amortiguamiento, para obtener la respuesta estacionaria de la misma ante una carga móvil. Una vía con apoyos discretos puede modelarse como una vía continua porque la fuerza dinámica producida por los apoyos discretos es generalmente menor del 5% de la carga estática por lo que puede ser ignorada en la mayoría de los problemas prácticos. Vostroukhov & Metrikine (2003) obtienen de forma semi-analítica la respuesta dinámica estacionaria de una vía con traviesas. Obtienen patrones de deformadas que se repiten periódicamente para distintas velocidades de la carga y para distintos números de carga que representan un eje (una carga móvil), un bogie (dos cargas) o un vagón (cuatro cargas). Comparan el modelo discreto con un modelo homogéneo, concluyendo que el modelo 3D de la vía periódicamente no-homogéneo predice casi los mismos resultados que un modelo homogéneo para valores constantes de la carga. Gómez *et al.* (2006) estudian la dinámica vertical y lateral de la vía flexible modelándola con apoyos discretos. Se basa en los modelos de Gry (1996) y Müller (2000) y los mejora teniendo en cuenta el efecto de vectores residuales en la propagación de ondas. Chaar & Berg (2006) modelan la flexibilidad de la vía mediante los modelos de vía móvil. En estos modelos la vía es un sólido rígido y la flexibilidad se introduce mediante muelles y amortiguadores lineales. Se sitúa el modelo de la vía debajo de cada rueda y se mueven con la velocidad de avance del vehículo. Este modelo permite modelar las traviesas.

- **Balasto modelado junto al suelo como una base viscoelástica bajo las traviesas** (ver Fig. 1.5).

Uno de los modelos discretos extensamente utilizado es el que se muestra en la Fig. 1.5 y se describe a continuación: los carriles se modelan como vigas infinitas, cada placa de asiento se modela como un muelle y un amor-

tiguador en paralelo, y bajo éstos se sitúa una masa discreta que modela cada traviesa. Cada traviesa está sobre una base elástica modelada como otro muelle y amortiguador en paralelo.

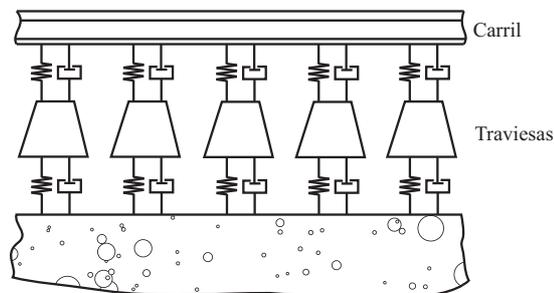


Figura 1.5: Modelo discreto de vía

Newton & Clark (1979) utilizan este modelo para el estudio del efecto en la dinámica de un tipo de irregularidad en la rueda, modelando el carril tanto con vigas de Euler-Bernouilli como con vigas de Timoshenko. Clark *et al.* (1982) y Tunna (1988) utilizan este modelo, aunque los sistemas muelle-amortiguador incluyen únicamente el muelle, para estudiar las fuerzas de interacción rueda-carril debidas a irregularidades en el carril y en la rueda respectivamente. Grassie *et al.* (1982) también utilizan este modelo discreto para el análisis de la dinámica vertical a altas frecuencias y Nielsen & Igeland (1995) estudian la influencia de las imperfecciones en la rueda y el carril. Gry (1996) desarrolla un modelo que considera apoyos discretos, basado en propagación de ondas (Mead, 1970) y que permite la deformación de la sección del carril, para estudiar la reducción de ruido provocado por los trenes. El carril se modela con el método de los elementos finitos modificado (Cheung, 1976). Wu & Thompson (1999) modelan un carril con dos vigas de Timoshenko, como se ha descrito al referir el trabajo de estos investigadores en el apartado de modelos continuos de vías, y además del modelo continuo de base elástica, estudian la dinámica de la vía a altas frecuencias con una base elástica discreta como la de la Fig. 1.5. Wu & Thompson (2000, 2002) y Heckl (2002) utilizan el mismo modelo. Andersson & Abrahamsson (2002) proponen un modelo de contacto lineal modelando la vía como muestra la Fig. 1.5. Young & Li (2003) utilizan este modelo, usando vigas de Timoshenko para modelar los carriles y el mismo tipo de vigas pero de longitud finita para modelar las traviesas, convirtiendo el modelo en 3D.

Utilizan el método de los elementos finitos para discretizar las ecuaciones del movimiento del sistema vehículo-vía. En sus resultados observan que la deformación del carril ocurre en una estrecha zona donde se produce el contacto con la rueda; fuera de esa zona la deformación es prácticamente nula, por lo que consideran que el problema puede resolverse en un dominio finito aunque la vía tenga longitud infinita, mediante condiciones de contorno móviles. Johansson & Nielsen (2003) estudian la influencia en la dinámica de la existencia de una irregularidad en la rueda. La longitud de la vía es finita y el modelo utilizado en el estudio es 2D. Nielsen & Oscarsson (2004) utilizan el mismo modelo de la Fig. 1.5 para comparar los resultados obtenidos numéricamente con resultados experimentales. Estudian la influencia de los parámetros de carga en el comportamiento de algunos componentes de la vía. Sun & Simson (2005) estudian la influencia de distintos parámetros en el inicio de la corrugación. Este modelo de vía también es utilizado por Baeza *et al.* (2006*b*) para el estudio de la interacción dinámica vehículo-vía, siendo el modelo 3D al representar las traviesas como vigas de Euler sobre una base elástica de Winkler (balasto). El modelo de vía utilizado se basa en técnicas de subestructuración, modelando los elementos con comportamiento lineal (carriles y traviesas) con coordenadas modales, e introduciendo elementos de conexión entre estos elementos (contacto rueda-carril, placas de asiento, balasto) mediante sus fuerzas de interacción. Este modelo 3D es utilizado también para el estudio de la respuesta dinámica del sistema vehículo-vía ante cierta irregularidad en la rueda del vehículo (Baeza *et al.*, 2006*a*). Lou *et al.* (2006) utilizan este modelo para realizar un análisis con elementos finitos de la viga sobre apoyos discretos sometida a varias cargas móviles. Kaewunruen & Remennikov (2007) también utilizan este modelo para comparar los resultados numéricos con los obtenidos al realizar un análisis modal experimental sobre la vía, para conocer el estado de la misma. Berggren *et al.* (2008) utilizan este modelo de vía flexible, con vigas de Timoshenko, en la formulación que utilizan para detectar irregularidades en la vía.

- **Balasto modelado como un sistema muelle-masa.**

Zhai & Cai (1997) utilizan un modelo de la vía con apoyos discretos incluyendo el balasto para estudiar el efecto que produce la variación de los parámetros del modelo de la vía en la interacción vehículo-vía (ver Fig. 1.6).

Los carriles se representan mediante vigas infinitas con apoyos discretos en la unión con las traviesas, mediante muelles y amortiguadores en paralelo, y masas discretas. Las tres capas de muelles y amortiguadores representan la flexibilidad y los efectos de amortiguamiento, respectivamente, de las placas de asiento, el balasto y el suelo. Las dos capas de masas discretas bajo el carril representan las traviesas y el balasto respectivamente. Este modelo permite considerar el efecto del cortante del balasto. Con este modelo pueden obtenerse las cuatro primeras frecuencias de resonancia de la vía. Zhai *et al.* (2004) validan el modelo con datos experimentales. Zhai & Wang (2006) estudian con el mismo modelo las interacciones laterales de los trenes en vías de pequeño radio de curvatura. Vías más complejas, modeladas con más capas de sistemas muelle-amortiguador o masas han sido utilizadas por algunos investigadores (Sun & Dhanasekar, 2002).

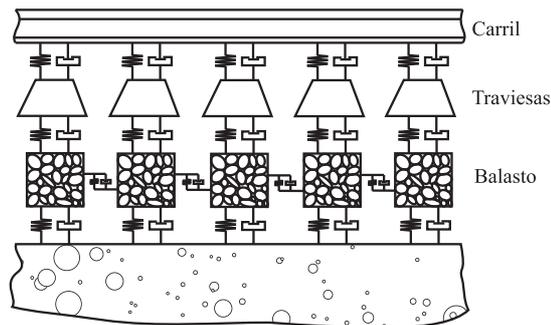


Figura 1.6: Modelo discreto de vía incluyendo la masa y rigidez a cortante del balasto

- **Balasto incluido en un semi-espacio elástico** (ver Fig. 1.7).

Parte de la estructura de la vía ha sido modelada como un semi-espacio elástico por diversos autores para el estudio de vibraciones inducidas por trenes de alta velocidad. Krylov & Ferguson (1993) y Krylov (1995) realizan un estudio teórico de las vibraciones del suelo producidas por los trenes utilizando el modelo mostrado en la Fig. 1.7. Metrikine & Popp (1999) investigan la vibración estacionaria de una viga de Euler-Bernoulli con soportes discretos sobre un semi-espacio elástico ante una carga móvil que varía armónicamente. Utilizan el concepto de rigidez equivalente (Dieterman & Metrikine, 1996; Metrikine & Dieterman, 1997) del semi-espacio para el análisis del problema. Muestran que el semi-espacio puede ser sustituido

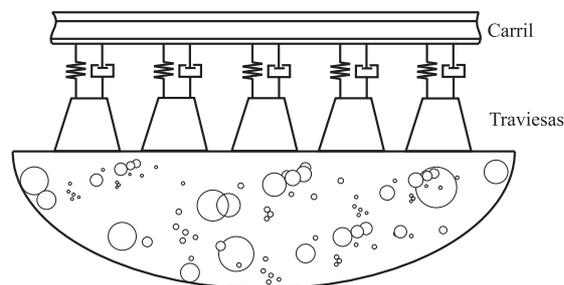


Figura 1.7: Modelo discreto de vía con la subestructura modelada como semi-espacio elástico

por muelles idénticos bajo los soportes del carril, siendo la rigidez equivalente de estos muelles función de la frecuencia de la vibración de la viga y del desfase de las vibraciones de soportes vecinos. El modelo de vía más realista, y el modelo que generalmente requiere más capacidad computacional, es el modelo en el que los carriles y traviesas se representan mediante vigas (o como cuerpos 3D) con elementos elásticos representando las placas de asiento entre los carriles y las traviesas. Las traviesas se embeben en un medio continuo que representa el balasto y el suelo, modelados con elementos tridimensionales. Con este modelo puede estudiarse la propagación de ondas en el terreno. Firuziaan & von Estorff (2003) y Savidis *et al.* (2003) acoplan el método de los elementos finitos y el método de los elementos de contorno para resolver en el dominio del tiempo la interacción no lineal de vehículo ferroviario con la estructura de la vía. Este modelo permite modelar el suelo como un semi-espacio y acoplarlo mediante los elementos de contorno al modelo de elementos finitos del resto de la estructura de la vía ferroviaria. El problema de la carga móvil y de una carga armónica es resuelto por Friedrich & Schmid (2003) aplicando también el método de los elementos finitos y el de los elementos de contorno de forma acoplada, y resuelven el problema en el dominio de la frecuencia. Una comparación de los resultados obtenidos con estos tipos de modelo de vías más sofisticado es mostrado por Ruecker *et al.* (2003) y forman parte de un benchmark (Popp & Schiehlen, 2003). Galvín (2007) desarrolla un modelo numérico para la predicción del nivel de vibraciones inducidas por cargas móviles en el suelo y en estructuras cercanas a la vía, considerando el comportamiento viscoelástico del suelo. El modelo se basa en el método analítico propuesto por Krylov (1995) para caracterizar la carga transmitida por el tren al suelo

a través de las traviesas. El estudio de la propagación de ondas en el suelo lo realiza basándose en la formulación 3D del método de los elementos de contorno en el dominio del tiempo (Domínguez, 1993). El comportamiento de la superestructura lo representa aplicando el método de los elementos finitos (Zienkiewicz, 1977). El modelo presentado es validado con medidas experimentales, unas presentes de la literatura y otras realizadas por el autor. En su trabajo presenta una revisión muy completa de los modelos utilizados para el estudio de las vibraciones producidas por trenes de alta velocidad.

- **Balasto modelado como vigas viscoelásticas discretas.**

Ono & Yamada (1989) utilizan el modelo de la Fig. 1.8 sin el semi-espacio y comparan las vibraciones de la vía obtenidas con su modelo con resultados experimentales. Knothe & Wu (1998) realizan un análisis en el dominio de la frecuencia para estudiar la dinámica vertical de una vía sobre un semi-espacio elástico modelado con varias capas. Modelan el carril como vigas de Timoshenko, las placas de asiento mediante elementos viscoelásticos, las traviesas con masas rígidas, el balasto de forma discreta con vigas cortas elásticas, y el suelo como un semi-espacio elástico (ver Fig. 1.8). El sistema se excita mediante una carga móvil armónica vertical. Comparan su modelo con el modelo de la base viscoelástica de Winkler y concluyen que para frecuencias superiores a 250 Hz, la influencia del suelo es despreciable por lo que no es necesario modelarlo de forma tan precisa y para frecuencias inferiores no aparecen con su modelo los levantamientos de la vía que se aprecia con los modelos de Winkler antes y después de la aplicación de la carga, indicando tracción en el balasto, y que no ocurren en la realidad. El mismo modelo de Knothe & Wu (1998) es usado por Gerstberger *et al.* (2003) para el estudio de la dinámica lateral y vertical de la vía.

- **Balasto modelado con el método de dinámica molecular.**

Kruse & Popp (2003) consideran que los modelos convencionales de vía no representan el balasto de forma satisfactoria ya que siguen sin comprenderse los fenómenos que ocurren dentro de las capas del mismo. Por ello modelan el balasto aplicando el método de la dinámica molecular (Cundall & Strack, 1979), realizando un modelo 2D en el que cada piedra del balasto es considerada. El método de la dinámica molecular fue aplicado por primera

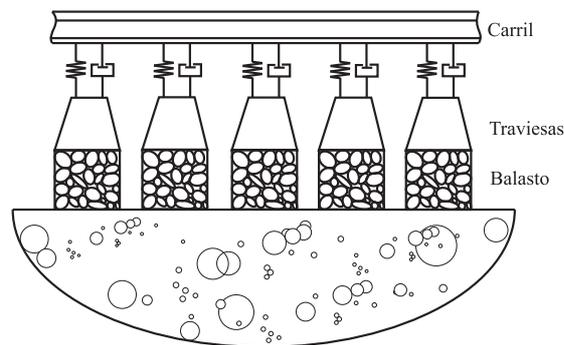


Figura 1.8: Modelo discreto de vía incluyendo el balasto como elemento discreto

vez al balasto por Estrade (1989), pero la potencia de los computadores era muy baja comparada con la de hoy día, y sólo pudieron modelar piedras del balasto circulares y realizar pocas simulaciones.

1.1.4 Modelos de vías ferroviarias utilizados en dinámica de sistemas multicuerpo

La dinámica del sistema vehículo ferroviario-vía flexible puede ser analizada en el marco de la dinámica de sistemas multicuerpo. Cuando el conjunto se modela como un sistema multicuerpo pueden estudiarse las fuerzas de interacción entre la rueda y el carril de forma más exacta, ya que con esta disciplina puede modelarse los perfiles reales de la rueda y el carril, y sus movimientos 3D, permitiendo una detección más precisa del punto de contacto. La localización del punto de contacto con más precisión permite obtener las fuerzas de contacto, tanto normales como tangenciales, de forma más exacta, utilizando un modelo de contacto adecuado. La dinámica de sistemas multicuerpo es muy apropiada para modelar el vehículo de forma detallada, ya que pueden modelarse los ejes, bogies y vagones. La vía, en vez de ser modelada como sistema multicuerpo, es más apropiado modelarla de forma detallada mediante otras técnicas, como puede ser aplicando el método de los elementos finitos, pudiendo aplicarse técnicas de sistema multicuerpo para resolver la interacción vehículo-vía. En los casos en los que no sea necesario complicar el modelo porque el estudio en cuestión no lo requiera, pueden utilizarse los modelos simplificados. Mientras en la disciplina de *dinámica de estructuras* o en *ingeniería civil* el comportamiento de la vía es el objeto de estudio, en la *dinámica de sistemas multicuerpo* el estudio se suele centrar en el comportamiento

del vehículo, siendo importante el modelado de la flexibilidad de la vía para el cálculo de unas fuerzas de interacción suficientemente precisas.

Dietz *et al.* (2002) propusieron una co-simulación modelando el vehículo como sistema multicuerpo y la vía con elementos finitos para calcular la interacción del vehículo con vías flexibles.

Andersson & Abrahamsson (2002) desarrollaron un modelo de contacto lineal incluyendo la detección de la zona de contacto para el análisis de la dinámica longitudinal, lateral y vertical; aplicaron el modelo a un bogie con ejes flexibles viajando sobre una vía rígida o flexible y aplicaron el método de los elementos finitos combinados con el sistema de referencia flotante (Shabana, 2005) para modelar la flexibilidad de la vía. Andersson & Johansson (2004) también modelan la flexibilidad de la vía aplicando la formulación del sistema de referencia flotante para predecir la corrugación de los carriles.

Kato *et al.* (2004) estudiaron las vibraciones en un sistema rueda-vía flexible aplicando la formulación de las coordenadas nodales absolutas (Shabana *et al.*, 1998), con el movimiento restringido a un plano.

Chaar & Berg (2006) utilizaron un modelo de vía móvil, en el que la vía es modelada como sólido rígido y su flexibilidad es introducida mediante amortiguadores y muelles lineales. Los modelos de vía móvil se sitúan bajo cada rueda y siguen al vehículo con la misma velocidad de avance de ésta.

Jin *et al.* (2007) presentan una formulación para predecir el desgaste del carril que se produce cuando un vehículo ferroviario describe una vía curva y utilizan el modelo de la Fig. 1.6 para describir la vía.

El efecto de algún fallo en la vía en el descarrilamiento de un vehículo ferroviario ha sido estudiado por Xiao *et al.* (2008, 2010), modelando el vehículo como un sistema multicuerpo y la vía como una viga de Timoshenko sobre apoyos discretos (ver Fig.1.6). Se consideran las deformaciones del carril vertical, laterales y de torsión utilizando 120 modos para describir cada una. Utilizan una ventana móvil para modelar el acoplamiento vehículo-vía: la vía tiene longitud finita y se van moviendo las traviesas de forma que se obtienen resultados de una vía de longitud infinita.

Sun & Cole (2008) utilizan el modelo de la Fig. 1.5 para estudiar el comportamiento dinámico de la suspensión de un bogie.

1.2 Dinámica de vehículos ferroviarios

El sistema de guiado principal de un vehículo ferroviario consiste en un eje ferroviario rodando sobre una vía con dos carriles. El eje ferroviario es el componente principal del vehículo ferroviario. Aunque existen ejes con ruedas que giran de forma independiente, generalmente los ejes ferroviarios están compuestos de dos ruedas cónicas, rígidamente unidas a un eje, por tanto giran a la misma velocidad angular. Las ruedas tienen una pestaña en la parte interior y normalmente existe una distancia entre la pestaña y el carril de $\pm 7-10$ mm cuando el eje está centrado en la vía. El eje ferroviario tiene una larga historia y evolucionó por prueba y error. Los problemas principales que se querían superar al principio era la disminución de la resistencia a la rodadura y el desgaste de los materiales. No se conocía el nivel de adhesión rueda-carril. Alrededor de 1830 se aumentó la distancia hasta la pestaña para disminuir las fuerzas laterales entre la rueda y el carril. La historia del eje ferroviario puede encontrarse en Wickens (1998). Generalmente, dos ejes ferroviarios unidos a un bastidor mediante un sistema de suspensión, denominado suspensión primaria, forman un bogie. Dos bogies suelen soportar el vehículo ferroviario, estando unidos el vehículo y los bastidores de los bogies mediante la suspensión denominada secundaria. También existen bogies articulados que se sitúan entre dos vehículos consecutivos del tren. Los sistemas de suspensión mejoran la calidad del guiado del vehículo ferroviario, la estabilidad y el confort de los pasajeros.

1.2.1 Modelos de vehículos ferroviarios

Los modelos de vehículos ferroviarios han evolucionado desde el eje sin masa de Klingel hasta modelos de sistemas multicuerpo elásticos muy sofisticados (Popp *et al.*, 1999). Cuando el objeto de estudio es la dinámica de la vía, el vehículo ferroviario suele modelarse de forma muy sencilla, no siendo válidos estos modelos para analizar la dinámica del vehículo, por ejemplo, el modelo de la carga móvil o el modelo de la masa móvil que se verán en lo que sigue. Cuando el objeto de estudio es la dinámica del vehículo ferroviario, el modelo del mismo ha de ser más complejo, incluyendo ejes, bogies e incluso un vehículo ferroviario completo. Los principales modelos se enumeran a continuación:

1. *Modelo de la carga móvil*: en el modelo más sencillo el vehículo es considerado como una carga móvil (su peso) ignorándose su inercia. El problema

de la carga móvil ha sido resuelto por muchos investigadores (Kenney, 1954; Stadler & Shreeves, 1970; Mead, 1970; Weistman, 1971; Fryba, 1972; Sato, 1977; Saito & Teresawa, 1980; Jezequel, 1981; Sato *et al.*, 1988; Dieterman & Metrikine, 1996; Metrikine & Popp, 1999; Sheng *et al.*, 1999*b,a*; Kerr, 2000; Shamalta & Metrikine, 2003; Mallik *et al.*, 2006). Vostroukhov & Metrikine (2003) y Lou *et al.* (2006) aplican varias cargas móviles a la vía.

2. *Modelo de la masa móvil*: en este modelo se tiene en cuenta la inercia del vehículo y ha sido objeto de estudio de diversos investigadores (Clark *et al.*, 1982; Grassie *et al.*, 1982; Grassie & Cox, 1984; Patil, 1988; Tunna, 1988; Ono & Yamada, 1989; Duffy, 1990; Mackertich, 1992; Thompson, 1993*a*; Mackertich, 1997; Coskun, 2000; Mackertich, 2003; Kato *et al.*, 2004; Nielsen & Oscarsson, 2004; Meng *et al.*, 2005). Wu & Thompson (2002) modelan la rueda como una masa que no se mueve y realizan un modelo de interacción con irregularidades móviles. Johansson & Nielsen (2003) modelan dos ejes como dos masas móviles.
3. *Modelo de un eje ferroviario*: muchos estudios consideran un único eje ferroviario como vehículo (Wickens, 1965, 1976; Thompson, 1993*b*; Knudsen *et al.*, 1994; McPhee & Anderson, 1996; Diana *et al.*, 1998; Szolc, 1998; Valtorta *et al.*, 2001; Sugiyama & Shabana, 2007; Pombo & Ambrosio, 2008). El vehículo es modelado como dos ejes conectados con un muelle por De Pater (1987). Wickens (1988) partiendo de las ecuaciones de un eje ferroviario, obtiene la de un vehículo con tres ejes conectados mediante la suspensión. Fisette & Samin (1992) modelan el eje ferroviario con ruedas independientes. Rosenberger *et al.* (2008) lo modelan como dos ejes articulados, sin modelar suspensiones y sin considerar la masa, con las dos ruedas unidas rígidamente al eje o con ruedas independientes.
4. *Modelo de un bogie*: modelos completos de bogies o la mitad de los mismos han sido utilizados por varios investigadores (Boocock, 1969; Newland, 1969; Wickens, 1976; Nielsen & Igeland, 1995; Zboinski, 1998; Valtorta *et al.*, 2001; Szolc, 2001; Andersson & Abrahamsson, 2002; Johansson & Andersson, 2005; True *et al.*, 2005; Zboinski & Dusza, 2006; Zolotas *et al.*, 2006; Pigorini *et al.*, 2007; Sinokrot *et al.*, 2008; Pombo & Ambrosio, 2008; Zboinski & Dusza, 2008).

5. *Modelo de un tren con uno o varios vehículos*: modelos más o menos complejos, incluyendo ejes, bogies y el vehículo han sido utilizados por diversos investigadores (Newton & Clark, 1979; Bell *et al.*, 1981; Zhai & Cai, 1997; Diana *et al.*, 1998; Dukkipati & Dong, 1999; Carlbom, 2001; He & McPhee, 2002; Stichel, 2002; Stribersky *et al.*, 2002; Sun & Dhanasekar, 2002; Sun *et al.*, 2003; Young & Li, 2003; Eberhard *et al.*, 2003; Durali & Shadmehri, 2003; Durali & Bahabadi, 2004; Sun & Simson, 2005; Pombo & Ambrosio, 2005; Chaar & Berg, 2005; Polach, 2006; Baeza *et al.*, 2006*a,b*; Chaar & Berg, 2006; Schupp, 2006; Zhai & Wang, 2006; Jin *et al.*, 2007; Sun & Cole, 2008; Lee & Cheng, 2008; Malvezzi *et al.*, 2008; Sinokrot *et al.*, 2008; Xiao *et al.*, 2008; Kovalev *et al.*, 2009; Zhai *et al.*, 2009; Xiao *et al.*, 2010). Newton & Clark (1979) modelan el vehículo con un solo eje unido mediante suspensión primaria a la masa del bogie y ésta a su vez unida mediante la suspensión secundaria a la masa que representa el vehículo. Arczewski & Fraczek (2005) modelan un tren con tres vehículos, modelando los bogies y dos de los vehículos como sistema multicuerpo y otro de los vehículos lo consideran flexible y lo modelan con elementos finitos. Berggren *et al.* (2008) modelan el vehículo como un eje ferroviario y una masa representando el vehículo unidos por la suspensión primaria.

1.3 Interacción vía-vehículo

Una de las principales dificultades que conlleva el estudio de la dinámica de vehículos ferroviarios es el modelado de la interacción vía-vehículo. En esta sección se revisan las teorías más importantes para describir el contacto.

1.3.1 Fuerza normal de contacto

Cuando dos sólidos no-conformes entran en contacto, se tocan inicialmente en un único punto o a lo largo de una recta. Se denomina contacto no-conforme aquel en el que la forma de los cuerpos en contacto es tan diferente entre sí que ante una carga nula se tocan en un único punto o a lo largo de una línea, mientras que un contacto conforme es aquel en el que los dos cuerpos en contacto se tocan en múltiples puntos ante una carga nula. Bajo la acción de una carga los sólidos no-conformes sufren una deformación en la zona donde se encuentra

el primer punto de contacto, produciéndose el contacto en un área que es finita aunque pequeña comparada con las dimensiones de los dos sólidos. Se requiere una teoría del contacto para predecir la forma del área de contacto y cómo se modifica su tamaño al variar la carga.

En 1882, Hertz presentó una teoría del contacto que se sigue utilizando actualmente: la teoría del contacto elástico (Johnson, 1985). Hertz consideró dos cuerpos convexos elásticos en contacto sobre los que hay aplicada una fuerza normal N . Las hipótesis que asumió Hertz en su teoría son las siguientes:

1. Las deformaciones que se producen son pequeñas y dentro del límite elástico.
2. Cada cuerpo puede considerarse como un semi-espacio, es decir, puede considerarse el área de contacto es mucho menor que el radio característico de cada cuerpo en las proximidades del punto de contacto.
3. Las superficies de los cuerpos son continuas y no-conformes.
4. No se produce fricción en las superficies.

Hertz mostró que la superficie de contacto debía ser elíptica, con semieje mayor a y semieje menor b . La esencia de los resultados de Hertz es la siguiente:

1. El ratio a/b sólo depende de las curvaturas principales de ambos cuerpos.
2. El semieje a es proporcional a $N^{1/3}$ y el producto (ab) es proporcional a $N^{2/3}$ independientemente de la distribución de tensiones tangenciales.
3. La indentación δ es proporcional a $N^{2/3}$.

Cuando no se asume alguna de las hipótesis en las que se basa la teoría de Hertz, las fuerzas normales de contacto se denominan fuerzas no hertzianas (Johnson, 1985). En este caso la superficie de contacto puede no tener forma elíptica. El programa CONTACT, basado en la teoría exacta del contacto de Kalker (Kalker, 1990), incluye el contacto no hertziano.

1.3.2 Fuerzas tangenciales de creep

Las fuerzas tangenciales surgen por distorsiones elásticas en la región de contacto Hertziana y por pequeños deslizamientos relativos en uno de los bordes

de la zona de contacto, lo que produce los *creepages*, llamados también pseudo-deslizamientos relativos, y que se describen en lo que sigue. En el contacto con rodadura, en el que los puntos de contacto no permanecen en reposo como ocurre en el contacto con rodadura sin deslizamiento o rodadura pura, la superficie de contacto se divide en dos partes que se diferencian en el tipo de contacto. En una parte los cuerpos se encuentran adheridos y se producen deformaciones tangenciales elásticas. En la otra parte los cuerpos deslizan entre sí y la ley de fricción de Coulomb se aplica para las tensiones tangenciales. La deformación elástica produce una velocidad de deslizamiento relativa entre los dos cuerpos denominada *creep*. Esta velocidad relativa normalizada con la velocidad de avance del vehículo se denomina *creepage*. Los *creepages* generan fuerzas tangenciales denominadas fuerzas de *creep*. Las fuerzas de *creep* tienen dos componentes en la superficie de contacto, una longitudinal y otra lateral. Las fuerzas tangenciales dan un par que se opone al pivotamiento, denominado *spin creep*.

La ley de Coulomb se utilizaba en el siglo XIX para modelar las fuerzas tangenciales. Carter en 1916 utilizó la relación lineal entre los *creepages* y las fuerzas de *creep* y en 1926 utilizó una relación no lineal. Introdujo la primera teoría de *creep* bidimensional, con una relación en forma cerrada entre el *creepage* longitudinal y la fuerza tangencial (Johnson, 1985). Reynolds sabía que la zona de contacto se divide en zona de adhesión y zona de deslizamiento. En el siglo XX se sabía que era necesaria una teoría sólida y validada del contacto por rodadura tridimensional por lo que en Cambridge, Johnson (1958*b,a*) empezó la investigación en este campo y extendió la teoría de Carter al caso de dos esferas en tres dimensiones sin *spin*. Más tarde, Vermeulen & Johnson (1964) extendieron el método a semi-espacios sin considerar el *spin*, en los que la zona de contacto es asimétrica y se divide en zona de deslizamiento y zona de adhesión, siendo esta última elíptica. En Delf, de Pater animó a Kalker para que estudiase la mecánica del contacto (Knothe & Böhm, 1999). Kalker (1967) sugirió que en el caso de *creepages* muy pequeños, el área de deslizamiento es muy pequeña y podría desprejarse, siendo el área de adhesión el área de contacto total, obteniéndose una relación lineal entre los *creepages* y las fuerzas de *creep*. Basada en la teoría lineal de Kalker y ampliando el trabajo de Vermeulen & Johnson (1964), Shen *et al.* (1983) propusieron la teoría heurística no lineal. Kalker (1990) publica un libro con sus métodos numéricos para la solución del contacto cuando se produce rodadura. El programa FASTSIM se basa en una teoría simplificada y

el programa CONTACT resuelve el contacto sin simplificaciones. El programa USETAB (Kalker, 1996) interpola entre valores de fuerzas de creep previamente calculadas con CONTACT. Según la teoría no lineal de Kalker, las fuerzas de creep dependen de los creepages, las dimensiones de la elipse de la zona de contacto, la fuerza normal y el coeficiente de fricción. Polach (1999) propone un algoritmo computacional para el cálculo no lineal de las fuerzas de creep y el momento de spin. Asume que el área de contacto es elíptica y que los desplazamientos relativos en la zona de adhesión varían linealmente, por lo que también varía linealmente la tensión tangencial. Cuando se alcanza la máxima tensión tangencial comienza el deslizamiento. Este algoritmo es usado en el programa comercial ADAMS/Rail como alternativa paralela al uso del algoritmo FASTSIM de Kalker.

Un resumen de las teorías del contacto más importantes pueden encontrarse en Garg & Dukkipati (1984); Johnson (1985); Ayasse & Chollet (2006); Shabana *et al.* (2008). Knothe (2008) presenta la historia del contacto hasta llegar a Kalker.

1.4 Contacto en dinámica de sistemas multicuerpo

En esta sección se resumen las principales formulaciones que se utilizan en dinámica de sistemas multicuerpo para el cálculo de la fuerza normal y de las fuerzas tangenciales de creep en el contacto rueda-carril. En dinámica de sistemas multicuerpo no se resuelve al mismo tiempo el problema elástico de contacto y el problema dinámico del vehículo debido al coste computacional, sino que se usan teorías para calcular las fuerzas de contacto. La interacción rueda-carril puede producirse en dos zonas de la rueda, la banda de rodadura y la pestaña. Se verá qué formulaciones permiten modelar el contacto en una u otra zona.

1.4.1 Fuerza normal de contacto en dinámica de sistemas multicuerpo

En dinámica de sistemas multicuerpo las formulaciones para resolver la fuerza normal de contacto rueda-carril pueden agruparse en dos grupos principalmente

(Shabana *et al.*, 2008), que llevan a modelos matemáticos diferentes para el cálculo de la fuerza normal de contacto:

1. *Formulaciones de contacto con restricciones* (también denominado contacto rígido). En esta formulación, el contacto rueda-carril se describe mediante restricciones cinemáticas para superficies no conformes (contacto en un punto), y no es necesario realizar una búsqueda del punto de contacto ya que está incorporada en el propio método. Las restricciones cinemáticas que describen el contacto entre los dos cuerpos pueden definirse usando las dos condiciones siguientes:
 - La posición global del punto de contacto perteneciente a la rueda coincide con la posición global del punto de contacto perteneciente al carril.
 - Las normales a las dos superficies de contacto en el punto de contacto son paralelas, es decir, los planos tangentes a las superficies en el punto de contacto son paralelos.

La fuerza normal puede determinarse como la fuerza de reacción que aparece al imponer la restricción asociada al contacto. Con esta formulación se asume que los sólidos no interpenetran y que no se produce separación entre ellos.

2. *Formulaciones de contacto elástico*. En esta otra formulación se asume una fuerza aplicada de contacto definida mediante unos coeficientes de rigidez y de amortiguamiento. Se asume que las superficies sufren pequeñas deformaciones elásticas en el contacto y se permite la separación de los sólidos. Se asume que la fuerza de contacto es función de la indentación entre la rueda y el carril, y puede calcularse aplicando la teoría de Hertz como función de la indentación o asumiendo unos coeficientes de rigidez y amortiguamiento. La localización de los puntos de contacto puede obtenerse consultando tablas precalculadas, aunque existen algoritmos más sofisticados que calculan los puntos de contacto *on line*, en cada instante de tiempo. Las formulaciones que asumen el contacto elástico permiten analizar situaciones como el descarrilamiento o el contacto en la pestaña, ya que se permite la separación entre los sólidos. Estas formulaciones tienen la desventaja de que introducen altas frecuencias en la solución de las ecuaciones de movimiento (este problema no aparece en las formulaciones de contacto con restricciones).

1.4.2 Fuerzas tangenciales de creep en dinámica de sistemas multicuerpo

En dinámica de sistemas multicuerpo se suelen utilizar los métodos ya descritos para el cálculo de las fuerzas tangenciales de creep, siendo los métodos de Kalker los más utilizados.

1.4.3 Modelos de contacto rueda-carril en dinámica de sistemas multicuerpo

Tras el resumen de las principales formulaciones que se utilizan en dinámica de sistemas multicuerpo para el modelado de la interacción vehículo-vía, se presentan algunos de los estudios realizados en los últimos años relativos al contacto rueda-carril modelados como sistemas multicuerpo.

Kik & Piotrowski (1996) proponen un algoritmo en el que el contacto es no-hertziano, pudiendo considerarse casi-hertziano, ya que posee algunas de las características del contacto de Hertz. Las fuerzas tangenciales las calcula con el algoritmo FASTSIM aplicado a superficies de contacto que no son elípticas. Los resultados obtenidos los compara con los resultados del contacto calculados con el programa CONTACT de Kalker (1990), comprobando que el algoritmo propuesto da buenos resultados.

Arnold & Netter (1997) modelan el contacto con el método de las restricciones. Cuando se simula el contacto entre una rueda con perfil gastado y el carril, debido a la complicada geometría el tiempo de resolución de las ecuaciones de movimiento es muy elevado. Por ello, proponen una aproximación de la geometría de la rueda y el carril, que se realiza en un preprocesador. La aproximación de la geometría consigue disminuir el tiempo de computación. El algoritmo propuesto ha sido implementado en el programa comercial de sistemas multicuerpo SIMPACK.

Netter *et al.* (1998) describen un módulo para la resolución del contacto de que dispone SIMPACK en ese momento, que permite modelar el contacto mediante el método de las restricciones y con un método elástico. Para el cálculo de las fuerzas de creep permite usar algoritmos que tienen implementados las teorías de Kalker (FASTSIM, USETAB); las teorías de Vermeulen & Johnson (1964), extendidas por Shen *et al.* (1983); u otras leyes de fricción definidas por el usuario.

Shabana & Sany (2001*b*) presentan la implementación de un modelo de contacto con restricciones en un algoritmo genérico de sistemas multicuerpo. Presen-

tan una formulación aumentada, con coordenadas generalizadas y coordenadas no-generalizadas (se denominan coordenadas no-generalizadas aquellas que no tiene fuerzas de inercia asociadas a ellas), siendo las ecuaciones de restricción adjuntadas al sistema de ecuaciones del movimiento mediante los multiplicadores de Lagrange. Coordenadas no-generalizadas son los parámetros de superficie que describen la posición del punto de contacto en la rueda y el carril.

Escalona (2002) propone una formulación para detectar el punto de contacto *on line*. Parametrizando las superficies de la rueda y el carril se hallan los puntos con máxima interpenetración de las dos superficies y que cumplan unas ecuaciones de restricción que imponen que los vectores geométricos cumplan ciertas condiciones. La formulación permite la detección de varios puntos de contacto tanto en la banda de rodadura como en la pestaña. La localización de puntos de contacto en la pestaña es requerida para el estudio de descarrilamientos, cambios de carril y negociado de curvas.

Andersson & Abrahamsson (2002) proponen un algoritmo para detectar el punto de contacto en la banda de rodadura y poder estudiar la interacción rueda-carril en tres dimensiones. Calculan la fuerza de contacto normal con la teoría de Hertz y las fuerzas de creep con la teoría heurística no lineal (Shen *et al.*, 1983).

Shabana *et al.* (2004) presentan un método de contacto elástico. Las superficies de la rueda y el carril se describen mediante nodos discretos y funciones spline. La fuerza normal de contacto tiene, además de la componente hertziana (proporcional a la indentación), una fuerza de amortiguamiento proporcional a la velocidad de indentación. Las fuerzas de creep se obtienen con el algoritmo USETAB de Kalker. En este trabajo comparan la formulación de contacto elástica con la formulación que modela el contacto mediante restricciones presentada en estudios previos (Shabana & Sany, 2001*b*; Shabana *et al.*, 2001). Como extensión de este trabajo, Shabana *et al.* (2005) presentan dos métodos nuevos para resolver el contacto, uno basado en el método de las restricciones y otro basado en el contacto elástico. Resume dos métodos de contacto mediante restricciones y dos métodos de contacto elásticos, y compara los dos métodos propuestos con los otros dos métodos propuestos anteriormente (Shabana & Sany, 2001*b*; Shabana *et al.*, 2004).

Pombo & Ambrosio (2005, 2008) utilizan una formulación equivalente a la propuesta por Escalona (2002) para obtener el punto de contacto. Para el cálculo de la fuerza de contacto normal utilizan un método elástico que tiene en cuenta

la disipación de energía durante el contacto (Lankarani & Nikravesh, 1990, 1994). Comparan las fuerzas y momento de creep obtenidas con la teoría lineal de Kalker (1990), el método heurístico no lineal (Shen *et al.*, 1983) y la formulación de Polach (1999).

Alonso & Giménez (2005) proponen un algoritmo para resolver el problema normal de contacto aplicable a los casos en los que la superficie indeformada de los sólidos en contacto no puede representarse por una función cuadrática como en la teoría de Hertz, como ocurre en las ruedas nuevas. Alonso & Giménez (2006) modifican el algoritmo propuesto para poder aplicarlo al caso de múltiples contactos. Giménez *et al.* (2005), Alonso & Giménez (2007, 2008*a,b*) proponen mejoras del algoritmo FASTSIM, como es la consideración de un coeficiente de fricción variable, dependiente del deslizamiento local.

Santamaría *et al.* (2006) proponen un método para resolver el problema de contacto con tablas precalculadas utilizando un modelo elástico 3D. El método permite la detección de dos puntos de contacto.

Malvezzi *et al.* (2007) y Auciello *et al.* (2007) presentan un método basado en minimización de la diferencia de las superficies de contacto que sirve para generar tablas que se pueden utilizar para resolver el contacto en estudios de la dinámica ferroviaria. En trabajos posteriores proponen métodos que detectan los puntos de contacto *on line* (Malvezzi *et al.*, 2008). Presentan dos métodos semi-analíticos (DIST y DIFF) para la detección de los puntos de contacto. Ambos métodos consideran conocidas las expresiones analíticas que describen las superficies de la rueda y el carril. El primer método resuelve un sistema de ecuaciones algebraico 4D, basándose en la idea de que los puntos de contacto son los puntos de la superficie de la rueda y el carril que a mayor distancia se encuentran localmente. El segundo método minimiza localmente la distancia entre la diferencia de las superficies y resuelve un sistema de ecuaciones algebraicos 2D. Ambos métodos pueden reducirse a una dimensión y resolverse numéricamente.

1.5 Comportamiento de un vehículo ferroviario

En el estudio de la dinámica de los vehículos ferroviarios, ha sido objeto de mucho interés el movimiento de lazo, el comportamiento en curvas, la estabilidad de los mismos y las irregularidades que se producen en la rueda y el carril. La conicidad de las ruedas es una propiedad fundamental que permite el guiado

del vehículo ferroviario. La conicidad facilita el trazado de curvas pero provoca oscilaciones laterales (movimiento de lazo). Estas oscilaciones provocan fuerzas que pueden dañar la rueda y el carril, pueden alterar el confort de los pasajeros e incluso, en el peor de los casos, provocar descarrilamiento. Negociar una curva de forma inadecuada puede tener consecuencias similares. El diseño de los vehículos ferroviarios se realiza de forma que se resuelva el conflicto de guía y estabilidad lo mejor posible (Wickens, 2003). Dicho conflicto consiste en que la suspensión que limita el movimiento de lazo debe ser muy rígida para evitarlo. Sin embargo, para el buen comportamiento en curvas, la suspensión debe ser muy poco rígida y permitir dicho movimiento de lazo. El efecto de las irregularidades en la geometría tanto de la rueda como del carril es objeto de estudio debido a su influencia en la seguridad y el confort. A continuación se describen cada uno de estos fenómenos.

1.5.1 Movimiento de lazo

Una de las características más importantes del movimiento de los vehículos ferroviarios es el fenómeno de lazo. Se denomina movimiento de lazo al movimiento oscilatorio lateral del vehículo desde la posición centrada en la vía, que es la posición de equilibrio en una vía recta, acoplado a la oscilación del ángulo de lazo. Existe una velocidad crítica del vehículo a partir de la cual el movimiento del vehículo es inestable. El vehículo no debe sobrepasar dicha velocidad para que el movimiento de lazo no empeore el confort de los pasajeros ni ponga en peligro su seguridad.

Para pequeños desplazamientos de un vehículo ferroviario desde el centro de la vía, el guiado se produce mediante fuerzas en la banda de rodadura en combinación con la conicidad de las ruedas. En una rueda nueva el radio decrece entre la pestaña hasta el otro borde. El efecto estabilizador del perfil de la rueda tiene que ver con la diferencia de radios de rodadura entre la rueda derecha y la izquierda. Cuando el radio de rodadura de una rueda es mayor que el de la otra, el eje volverá a la posición de equilibrio y comenzarán oscilaciones del ángulo de lazo.

El problema básico en dinámica lateral es resolver el conflicto entre guiado y estabilidad. Ajustando los valores de las características de la suspensión, se puede llegar a una solución de compromiso para un guiado adecuado en curvas y comportamiento estable en rectas. Por otro lado, la suspensión secundaria aísla el vehículo de las vibraciones inducidas por la vía. La evolución de los bogies

puede encontrarse en Wickens (1998).

Gilchrist (1998) presenta la historia del movimiento de lazo, desde su conocimiento en términos teóricos hasta su solución práctica. El estudio del movimiento de lazo está estrechamente relacionado con el estudio de la estabilidad del vehículo. La estabilidad del vehículo es revisada en una de las subsecciones que siguen.

1.5.2 Negociado de curvas

Un eje sin restricciones negociando una curva adopta una posición radial y se desplaza lateralmente hacia fuera de la curva para conseguir un movimiento de rotación pura, en la que la rodadura se produce aproximadamente sin deslizamiento. Un eje con restricciones en el giro de lazo necesita desplazarse más lateralmente para adoptar la posición radial, apareciendo fuerzas de creep. Si la fuerza de creep necesaria fuera mayor que la fricción tangencial máxima se produce deslizamiento y contacto en la pestaña.

El comportamiento en curvas de los vehículos ferroviarios ha sido objeto de numerosos estudios. Gilchrist (1998) revisa la historia del estudio del negociado de curvas desde el problema en términos teóricos hasta las soluciones efectivas a las que se han llegado con dichos estudios. Las teorías del comportamiento en curvas descritas en su trabajo siguen en uso actualmente, como es el caso de la teoría lineal del negociado de curvas presentada independientemente por Boocock (1969) y Newland (1969). Aplicando esta teoría lineal, Wickens (1976) investigó el diseño de las suspensiones de vehículos ferroviarios que redujeran el conflicto entre la estabilidad dinámica y el negociado de curvas. Bell *et al.* (1981) se centraron en la estabilidad lateral y la mecánica en la curva de vehículos ferroviarios usando modelos lineales. Elkins & Weinstock (1982) demostraron la necesidad de incluir el efecto de un segundo punto de contacto en el estudio del comportamiento en curvas. Dukkipati & Swamy (2001) analizaron la estabilidad y el comportamiento en curvas para el diseño de vehículos diferentes a los convencionales, aplicando fuerzas de creep no lineales. Arrus *et al.* (2002) presentaron el movimiento estacionario de un vehículo con un solo eje en una vía curva con contacto en la pestaña, y estudiaron el efecto de la curvatura cuando se considera fricción. La interacción dinámica lateral de un tren con una vía elástica de pequeño radio de curvatura, aplicando métodos teóricos y comparando los resultados con métodos experimentales, ha sido objeto de estudio de Zhai & Wang (2006).

En el campo de la dinámica de sistemas multicuerpo existen varios estudios que han contribuido a una mejor comprensión de los problemas en el negociado de curvas. Escalona *et al.* (2003) analizaron la configuración estacionaria de un eje en una curva mediante tres métodos. Se asumía que el eje tenía tres puntos de contacto con el carril (una rueda presenta contacto en la banda de rodadura y en la pestaña, y la otra rueda presenta contacto en la banda de rodadura). En el primer método se desarrolla una formulación específica para el cálculo de la configuración de equilibrio. En el segundo método, aplicaban un algoritmo para realizar un análisis dinámico inverso y obtener la configuración estacionaria. En el tercer método, aplicaron un algoritmo para un análisis dinámico directo implantado en un programa de propósito general de sistemas multicuerpo. Compararon las variables cinemáticas y las fuerzas obtenidas con los tres métodos, obteniendo muy buenos acuerdos. Grassie & Elkins (2005) investigaron la responsabilidad de la curvatura de la vía en ciertos daños que aparecen en el carril, usando programas de simulación dinámica de sistemas multicuerpo. He & McPhee (2005) presentaron un método de optimización para el estudio del comportamiento en curvas combinando algoritmos genéticos con dinámica de sistemas multicuerpo. Rosenberger *et al.* (2008) desarrollaron un modelo simplificado de un vehículo, modelado como sistema multicuerpo para el estudio del negociado de curvas y su efecto en el desgaste de la rueda y el carril, y los resultados fueron comparados con los obtenidos con un programa comercial de sistema multicuerpo.

1.5.3 Posiciones de equilibrio estacionario y estabilidad

Los problemas de dinámica de vehículos ferroviarios son parámetro-dependientes. Ejemplo de parámetros son el coeficiente de rozamiento en la superficie de contacto rueda-carril, la rigidez de los muelles de las suspensiones y la velocidad de avance del vehículo. La investigación en dinámica de vehículos ferroviarios debe comenzar con la búsqueda de posibles movimientos estacionarios del sistema dinámico y el valor crítico de los parámetros en los que la dinámica cambia.

La evaluación de la estabilidad es uno de los aspectos más importantes en el diseño de vehículos ferroviarios, ya que es relevante para la seguridad. En la estabilidad de los vehículos ferroviarios influye tanto la cinemática del sistema como la mecánica de contacto. El concepto de estabilidad puede ser explicado de forma sencilla con el movimiento de un eje ferroviario. Un eje ferroviario es estable si ante una pequeña perturbación, ya sea del desplazamiento lateral o del ángulo

de lazo, el eje vuelve a su posición de equilibrio con un movimiento oscilatorio cuya amplitud se va amortiguando. El movimiento del eje se considera inestable si ante una pequeña perturbación, se producen oscilaciones cuya amplitud crece hasta que se ve restringida por el contacto en la pestaña. Aparece un ciclo límite cuando el valor de la amplitud de las oscilaciones producidas ante una pequeña perturbación permanece constante. Resolver el movimiento estacionario en curva de un vehículo ferroviario implica conocer los desplazamientos del vehículo que producen unos creepages, y por tanto unas fuerzas de creep, tales que el sistema esté en equilibrio con las fuerzas producidas por la suspensión y con las fuerzas externas. En el caso de un eje ferroviario sin suspensión, éste, en el caso de una vía con un radio de curvatura suficientemente grande, podrá adoptar una posición radial y desplazarse hacia fuera al negociar una curva, de forma que su conicidad provea la diferencia de radios de rodadura necesaria para evitar el creepage longitudinal. Si el eje tiene que compensar una fuerza lateral, como la fuerza centrífuga, girará un ángulo de lazo tal que genere el creepage lateral y la consiguiente fuerza de creep lateral requerida. Si el eje tiene suspensión, no tiene la libertad de adoptar la posición ideal de equilibrio lateral y de ángulo de lazo, por lo que se generan más desplazamientos y más creepages para alcanzar el equilibrio, lo que puede provocar deslizamientos y contacto en la pestaña. Una de las características más importantes de los sistemas dinámicos no lineales es la dependencia de su comportamiento a largo plazo de las condiciones iniciales. Ésta es una de las características que diferencia un sistema lineal de uno no lineal, ya que la respuesta en el permanente de un sistema lineal no depende de las condiciones iniciales. Las distintas posiciones estacionarias de un sistema no lineal pueden representarse mediante un diagrama de bifurcación. Al realizar un análisis de bifurcación se pretende encontrar las posiciones estacionarias del sistema al variar, dentro de un rango predeterminado, uno de los parámetros del sistema. Los diagramas de bifurcación pueden generarse mediante el *método de la fuerza bruta*, que consiste en realizar integraciones numéricas variando el valor del parámetro que cuya influencia se esté estudiando, o pueden realizarse mediante métodos directos más sofisticados como son las técnicas de continuación.

El hecho de que las oscilaciones laterales del eje ferroviario puede producir la inestabilidad del bogie se sabía desde los comienzos de la historia del ferrocarril. Sin embargo, aunque el concepto de estabilidad lo utilizó Redtenbacher por primera vez en el siglo XIX, no fue hasta mediados del siglo XX que se

llegó a la conclusión de que era necesario realizar investigaciones centradas en la estabilidad. Boedecker, Carter, Rocard, Matsudaira, Wickens,... realizaron análisis de estabilidad lineal. La teoría lineal puede dar buenos resultados de estabilidad cuando los desplazamientos son pequeños y pueden despreciarse los efectos no lineales. La historia de los primeros estudios de estabilidad puede encontrarse en Knothe & Böhm (1999). McPhee & Anderson (1996), partiendo de las ecuaciones lineales de un eje sin restricciones, desarrollaron un método para que la integración numérica de las ecuaciones del movimiento fuese más rápida. La formulación se basó en la característica de los autovalores que se obtienen de las ecuaciones del eje (Wickens, 1965) y consiste en reducir las coordenadas modales del sistema, eliminando los autovalores reales negativos de valor muy elevado que se corresponden con respuestas que se amortiguan muy rápidamente. La misma formulación la aplicaron a las ecuaciones lineales de un bogie. Valtorta *et al.* (2001) realizaron un estudio comparativo de los resultados obtenidos con un análisis de estabilidad lineal mediante el cálculo de autovalores y de los resultados obtenidos aplicando una formulación no lineal en la que el contacto está modelado mediante el método de las restricciones. Investigaron el efecto de la suspensión primaria y secundaria en la estabilidad. Escalona & Chamorro (2008) presentaron un método para realizar un análisis de estabilidad cuando la dinámica del sistema vehículo-vía se estudia con un conjunto de coordenadas definidas respecto a un sistema inercial de referencia. El método se basa en dos transformaciones de coordenadas y muestra las ventajas del uso del sistema de referencia de la trayectoria.

Un análisis completo no lineal es esencial cuando se ven implicadas en el movimiento del vehículo ferroviario no linealidades como el deslizamiento o el contacto en la pestaña (Wickens, 1986). Probablemente fue de Pater el primero en realizar un análisis de estabilidad no lineal. True (1999) destacó que la velocidad crítica lineal no es suficiente como criterio para el diseño de vehículos ferroviarios, sino que es necesario el cálculo de la velocidad crítica no lineal. Tradicionalmente el análisis de estabilidad estaba centrado en el estudio de vías rectas, aunque se ha demostrado que es importante considerar el estudio de la estabilidad en curvas (Zboinski & Dusza, 2006). Zboinski (1998) fue el primero en investigar ciclos límite en vías curvas. Franke & Führer (2001) han desarrollado algoritmos para el estudio de movimientos periódicos de sistemas multicuerpo no lineales con restricciones, basados en métodos de disparo. Investigaciones re-

cientes (True *et al.*, 2005) han demostrado que la velocidad crítica de los bogies en curvas con radio de curvatura constante, y en general de valor bastante grande, tienen una velocidad crítica menor que en vías rectas. Polach (2006) demuestra que según el modelo utilizado para describir el contacto rueda-carril se obtienen diferentes resultados de estabilidad, mostrando los diagramas de bifurcación de Hopf obtenidos. Schupp (2006) ha realizado análisis de bifurcación para estudiar el comportamiento de sistemas dinámicos no lineales basados en métodos de continuación.

En la actualidad el análisis de estabilidad lineal está integrado en la mayoría de los programas comerciales de dinámica de sistemas multicuerpo. La integración paso a paso puede realizarse para encontrar ciclos límites para los vehículos ferroviarios. Ninguno de los códigos permite calcular automáticamente la velocidad crítica no lineal (Knothe & Böhm, 1999).

1.5.4 Irregularidades en la vía y el carril

La presencia de irregularidades en la geometría tanto de la rueda como del carril da lugar a procesos dinámicos que pueden producir fuerzas de contacto de gran magnitud. Algunas de las irregularidades que puede sufrir la rueda son las siguientes:

1. Escoriación, debida a fatiga térmica.
2. Exfoliación, debida a fatiga de contacto.
3. Generación de planos debido al desgaste.
4. Pérdida de redondez, como es el caso de las ruedas poligonales.
5. Corrugación.

Entre las irregularidades que pueden aparecer en la vía están las siguientes:

1. Exfoliación y squats, que son hundimientos en la cabeza del carril, ambos efectos debidos a la fatiga de contacto.
2. Desgaste.
3. Corrugación. Sato *et al.* (2002) hacen una revisión de los estudios realizados sobre la corrugación del carril.

Roda (2006) presenta una recopilación de los defectos más habituales en rueda y carril.

Numerosos investigadores han hecho objeto de su estudio el efecto de las irregularidades y se han desarrollado métodos para la detección de fallos. Jin *et al.* (2007) hacen una revisión de los estudios publicados relativos al desgaste de la rueda y el carril, y proponen un método para predecir el desgaste en una vía curva. Berggren *et al.* (2008) presentan un método para evaluar la calidad de la geometría de la vía y detectar corrugación en el carril. Kovalev *et al.* (2009) estudian el desgaste de los perfiles en vehículos ferroviarios que transportan mercancías. Pombo *et al.* (2010) proponen un método computacional para predecir cómo va a evolucionar el perfil de la rueda, cómo se va a desgastar. Estudian la influencia que tienen los parámetros físicos relacionados con las características del vehículo ferroviario y la vía.

1.6 Motivación y objetivos de este trabajo

La dinámica y la estabilidad de los vehículos ferroviarios dependen fuertemente de la interacción rueda-carril. Para evaluar el desgaste que se produce en la rueda y el carril, que se asume función de las fuerzas tangenciales de contacto, es importante considerar la posición real de la rueda en relación con el carril. Las fuerzas de interacción dependen de las propiedades del material de las ruedas y el carril, de las velocidades de creepage, de las dimensiones del área de contacto y de la flexibilidad estructural del carril. La experiencia ha mostrado que es esencial introducir la flexibilidad lateral del carril para obtener estimaciones realistas de las fuerzas que se generan en los impactos en las pestañas de las ruedas (Wickens, 1986).

En este estudio se desarrollan dos formulaciones computacionales que tienen en cuenta el efecto de la flexibilidad estructural del carril, que influye en el modelo de interacción dinámica rueda-carril de tres modos:

1. La deformación del carril lleva a un cambio en la localización del punto de contacto, por lo que se modifica la magnitud de la fuerza normal que se usa para calcular las fuerzas de creep. Estudios previos muestran que un pequeño cambio en la localización del punto de contacto puede tener un efecto significativo en la predicción de las fuerzas del vehículo (Shabana & Rathod, 2007).

2. La flexibilidad del carril puede producir cambios en los creepages, que se usan para calcular las fuerzas de contacto. Las oscilaciones del carril pueden modificar los creepages longitudinal, lateral y spin. Estos creepages intervienen en la formulación de las fuerzas de contacto (Kalker, 1990; Shabana *et al.*, 2008).
3. La dimensión del área de contacto rueda-carril depende de la geometría de la rueda y del carril en el entorno del punto de contacto. Por ejemplo, para determinar las dimensiones de la elipse de contacto, es necesario determinar las curvaturas principales; la formulación de las condiciones de contacto requiere determinar los vectores tangentes, normales, y las derivadas en el punto de contacto de los vectores tangentes y normales. Estas variables geométricas son función de la deformación del carril si se considera la flexibilidad estructural del carril.

Los métodos existentes para modelar la flexibilidad del carril no tienen en cuenta el efecto de la deformación en la geometría del carril o en la dinámica acoplada entre la deformación y los parámetros del contacto. Es más, en algunos programas comerciales de vehículos ferroviarios, simples segmentos rígidos conectados por elementos flexibles son utilizados para modelar la flexibilidad del carril (Shabana, 2008). El principal objetivo de este estudio es desarrollar nuevos procedimientos que permitan modelar la flexibilidad de la vía considerando el acoplamiento dinámico no lineal entre la flexibilidad estructural de la vía y la dinámica no lineal del vehículo. Alcanzar este objetivo permitirá realizar simulaciones más precisas que pueden predecir la dinámica del vehículo y las causas de descarrilamientos y accidentes.

1.7 Desarrollo de esta tesis

Las aportaciones originales de esta tesis comienzan con la implementación de un procedimiento automático para generar modelos deformables de vía de geometría arbitraria en el programa de propósito general de sistemas multicuerpo SAMS2000. Este programa ha sido desarrollado en la Universidad de Illinois en Chicago (UIC). El método describe la deformación de la vía basándose en la *formulación de los sistemas de referencia flotantes* (FFRF) con discretización mediante el método de los elementos finitos y síntesis modal. Permite resolver

de forma acoplada la dinámica no lineal 3D de un vehículo ferroviario sobre una vía deformable de geometría arbitraria. Este procedimiento es validado en el Departamento de Ingeniería Mecánica y de los Materiales de la Universidad de Sevilla (US).

El objeto de estudio en dinámica ferroviaria del departamento de la US, se centra, durante los últimos años, en la estabilidad del vehículo ferroviario. Al validar el método desarrollado en UIC, se concluye que éste no es eficaz para el estudio de la estabilidad del vehículo en vías deformables, por lo que se desarrolla un nuevo procedimiento, denominado *método de las deformadas móviles*, que sí es eficaz. Este método, basado en la FFRF, utiliza coordenadas descritas en el sistema de la trayectoria y describe las deformaciones en dicho sistema de referencia. El método también resuelve de forma acoplada la dinámica no lineal 3D de un vehículo ferroviario sobre una vía deformable de geometría arbitraria. Este método se formula de forma que pueda ser incorporado en un futuro en el módulo ferroviario del programa de propósito general de sistemas multicuerpo, MBMatlab/Rail, desarrollado en el Departamento de Ingeniería Mecánica y de los Materiales de la US.

1.8 Organización del texto

El trabajo desarrollado se describe en los siguientes capítulos. En el Capítulo 2 se presenta la implementación del procedimiento automático para generar vías deformables de geometría arbitraria en SAMS2000 y la validación del procedimiento con dos modelos clásicos: el modelo de la carga móvil y el de la masa móvil. En el Capítulo 3 se desarrolla el método de las deformadas móviles, se aplica a vías rectas y curvas, se calculan movimientos estacionarios y se analiza la estabilidad del vehículo en el entorno de dichos movimientos estacionarios. Por último, en el Capítulo 4 se presenta un resumen del trabajo realizado y las conclusiones obtenidas del mismo.

Capítulo 2

Modelado de la flexibilidad de la vía mediante FFRF con discretización mediante elementos finitos y síntesis modal

2.1 Introducción

El principal objetivo de este capítulo es desarrollar un procedimiento que considere de forma automática la deformación de vías de geometría arbitraria. Este procedimiento se implementa en un programa de propósito general de sistemas multicuerpo concreto, denominado SAMS2000. Este programa, desarrollado en la UIC, como se ha mencionado en el Capítulo 1, permite resolver la dinámica de un sistema multicuerpo con sólidos rígidos y flexibles. Cuando el sistema multicuerpo es un vehículo ferroviario, el programa dispone de un preprocesador que describe vías de geometría arbitraria. La descripción de la geometría de la vía se realiza mediante la consideración de nodos y utilizando la *Formulación de las Coordenadas Nodales Absolutas* (ANCF) (Shabana, 2005). En esta formulación cada nodo geométrico tiene asociadas doce coordenadas, tres de posición y nueve correspondientes a las componentes de una matriz de orientación de un sistema de referencia asociado al nodo. La ANCF se desarrolló para modelar sólidos muy deformables, pero en este caso no se utiliza para describir la deformación sino la geometría de la vía.

En la formulación que se presenta el programa principal utiliza las características modales de la vía, obtenidas con un programa de elementos finitos, para describir las deformaciones. La nueva formulación permite:

- Considerar el acoplamiento dinámico no lineal entre la flexibilidad estructural de la vía y la dinámica 3D no lineal del vehículo. Se considera el efecto de la deformación de la vía en la localización de los puntos de contacto y en el cálculo de los pseudo-deslizamientos relativos y de los parámetros geométricos del carril. Los resultados de las simulaciones serán, por tanto, más precisos.
- Construir en un programa de elementos finitos un modelo de vía tan complejo como se requiera, que pueda incluir traviesas, la flexibilidad estructural de la vía (Terumichi & Suda, 2001; Kato *et al.*, 2004) y propiedades del suelo.
- Considerar la flexión, torsión, tracción y otros modos de deformación del carril.
- El uso de coordenadas modales, por lo que puede reducirse el número de coordenadas de deformación usando sólo las deformadas realmente significativas. Pueden eliminarse los modos de alta frecuencia, que disminuyen la eficiencia computacional y no suelen ser excitados.

En este estudio destacan dos tipos de interpolaciones:

1. La *interpolación de la geometría*. Para describir la geometría del carril (vectores tangentes, normales y sus derivadas) en el punto de contacto con la rueda, este se localiza utilizando la *interpolación de la geometría*, al igual que se hace en vías rígidas. Antes de utilizar la matriz de interpolación de la ANCF las coordenadas de los nodos geométricos que conforman el segmento de vía que contiene al punto de contacto han de actualizarse teniendo en cuenta el desplazamiento por deformación de los mismos. Para actualizar los nodos geométricos se utiliza la interpolación de la deformación que se describe en 2. Los nodos geométricos quedan actualizados interpolando los nodos del modelo de elementos finitos. Usando las coordenadas actualizadas de los nodos geométricos en la interpolación de la geometría es posible obtener sistemáticamente la geometría del carril flexible. Una vez que se

ha localizado el punto de contacto y se ha descrito la geometría del carril en dicho punto no se vuelve a hacer uso de las coordenadas de los nodos geométricos.

2. La *interpolación de la deformación*. Esta se utiliza para obtener la deformación de los nodos geométricos y cuando se necesita calcular el desplazamiento por deformación del punto de contacto perteneciente al carril para resolver las ecuaciones de movimiento. En ella se interpolan los nodos de los elementos finitos usando la FFRF con síntesis modal.

En las siguientes secciones de este capítulo se realiza la descripción del procedimiento para realizar simulaciones de vehículos ferroviarios sobre vías deformables partiendo del procedimiento sobre vías rígidas. Inicialmente, en la Sección 2.2, se describen las fases computacionales necesarias para realizar una simulación sobre una vía rígida. Se describe la cinemática de la vía rígida y del eje ferroviario, que es el componente del vehículo implicado en una de las partes más importantes de la simulación: el contacto. Además de la cinemática se presentan las ecuaciones de movimiento y se describe el cálculo de las fuerzas de contacto, causantes del acoplamiento dinámico entre la rueda y el carril. Conocidas las fases y el procedimiento para vías rígidas, en la Sección 2.3 se describen las fases necesarias para el caso de vías deformables y las modificaciones que se realizan respecto a las vías rígidas para considerar la deformación. Descrito el procedimiento, en la Sección 2.4 es aplicado a un eje ferroviario con suspensiones longitudinales y laterales, y se analiza el efecto de la flexibilidad estructural de la vía en la dinámica del vehículo. En la Sección 2.5 se validan los resultados de la sección anterior. La validación se realiza con el modelo de la carga móvil y el de la masa móvil. En ambos modelos clásicos la vía deformable es modelada como una viga de Euler-Bernoulli sobre una base de Winkler. El capítulo finaliza con la Sección 2.6 en la que se presenta un resumen y la discusión de los resultados obtenidos en la aplicación del procedimiento y en la validación del mismo.

2.2 Fases computacionales para simulaciones con vías rígidas

Para simular el movimiento de un vehículo ferroviario, modelado como un sistema multicuerpo, sobre una vía rígida de geometría arbitraria, generalmente se

distinguen las dos fases computacionales siguientes:

1. Se describe la geometría de la vía en términos de nodos en un preprocesador partiendo de datos de la industria ferroviaria.
2. Se generan automáticamente las ecuaciones de movimiento del sistema multicuerpo vehículo ferroviario-vía rígida en el programa principal. Las ecuaciones de movimiento se resuelven numéricamente.

En las subsecciones que siguen se detallan ambas fases.

2.2.1 Fase de preprocesador

Para la descripción completa de la geometría de una vía se distingue la descripción de la geometría de la superficie del carril y la descripción de la vía propiamente dicha mediante unas líneas características. En el preprocesador de vías únicamente se describen las líneas características discretizándolas como se detalla en las siguientes subsecciones.

Descripción de la geometría de una vía ferroviaria

La geometría de una vía ferroviaria puede describirse definiendo tres líneas espaciales:

1. La línea de referencia de la vía, que es la línea media entre los dos carriles.
2. La línea de referencia del carril izquierdo.
3. La línea de referencia del carril derecho.

Las vías no suelen tener geometría completamente arbitraria, sino que las conforman una serie de segmentos determinados. Cualquiera de las tres líneas que caracterizan la vía puede describirse mediante los siguientes tipos de segmentos:

- Segmentos rectos. La curvatura horizontal, que es la curvatura de la proyección de la línea media de la vía en el plano horizontal (ver Fig. 2.1), es nula en este tipo de segmentos.
- Segmentos de curvatura horizontal constante.

- Segmentos de transición. Estos tramos pueden clasificarse de la siguiente forma:
 - Transiciones horizontales. Los segmentos de transición más utilizados tienen forma de clotoide, en los que la curvatura varía de forma monótona creciente o decreciente (Kraemer *et al.*, 1991). También pueden representarse estos tramos de transición mediante espirales en los que la curvatura varía de forma lineal (Shabana *et al.*, 2008).
 - * De recta a curva. Este tipo de segmentos conectan un tramo recto con uno de curvatura constante, por lo que comienza el tramo de transición con curvatura nula y termina con una curvatura igual a la inversa del radio del tramo curvo.
 - * De curva a recta. Este tipo de segmentos conectan un tramo de curvatura constante con uno recto.
 - * De curva a curva con distinta curvatura.
 - Transiciones verticales.

Los tipos de tramos horizontales descritos pueden representarse mediante una expresión analítica. Dichas expresiones se presentan en Pombo (2004) y Naz (2008).

Descripción computacional de la geometría de una vía ferroviaria

Conocida la geometría real de una vía, esta ha de parametrizarse para realizar una descripción computacional de la misma, generalmente a nivel de preprocesador. En un preprocesador de vías genérico la geometría se describe de dos formas:

- Mediante la expresión analítica de los segmentos que la conforman. Esta descripción está limitada a vías con geometría horizontal.
- De forma aproximada, definiendo únicamente las coordenadas de una serie de nodos. Esta descripción es más genérica, ya que puede describir de forma sistemática vías de geometría arbitraria, incluyendo transiciones verticales. Conocidas las coordenadas de los nodos pueden utilizarse varios métodos de interpolación (Pombo, 2004) para describir un punto arbitrario de las líneas que definen la vía.

El procedimiento que se describe en este capítulo utiliza los datos del preprocesador de vías del programa SAMS2000. Este preprocesador describe la geometría de la vía aplicando la última técnica. Partiendo de datos proporcionados por la industria ferroviaria, cada nodo en el que se han discretizado las líneas características de la vía es descrito mediante tres coordenadas de posición y tres ángulos de Euler que definen la orientación de un sistema de coordenadas en el nodo (Shabana *et al.*, 2008). Los datos que proporciona la industria ferroviaria para la descripción del trazado de la vía son los siguientes (ver Fig. 2.1 y 2.2):

- La longitud de arco s que indica la distancia a la que se encuentra el nodo respecto al comienzo del carril.
- La curvatura horizontal C_H .
- El ángulo de elevación vertical θ .
- El peralte h , que es la diferencia de altura, respecto a la horizontal, de los dos carriles de una misma vía en un punto concreto, medida entre los ejes de las cabezas del carril (UNE-EN13232-1, 2005). El peralte permite calcular el ángulo de bancada ϕ (Ver Fig. 2.2).

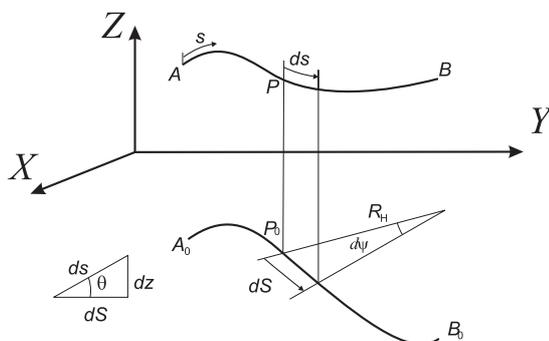


Figura 2.1: Proyección de la curva espacial en el plano horizontal

El preprocesador genera un fichero que contiene los siguientes datos de los nodos que definen las tres líneas que caracterizan la vía:

1. La longitud de arco s .
2. La curvatura horizontal C_H .

3. Las coordenadas de posición x, y, z .
4. Las coordenadas de orientación θ, ϕ, ψ . El ángulo ψ puede verse en la Fig. 2.1.

El procedimiento para obtener los datos del fichero de salida a partir de los datos proporcionados por la industria ferroviaria es descrito por Berzeri *et al.* (2000).

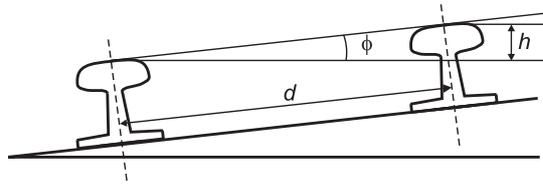


Figura 2.2: Definición de peralte

2.2.2 Fase de generación de las ecuaciones de movimiento en el programa principal

El programa principal necesita 3 ficheros para poder realizar una simulación de un vehículo ferroviario sobre una vía rígida. Los ficheros necesarios contienen la siguiente información:

1. Fichero con los *datos del vehículo* ferroviario (dimensiones, masa, propiedades de inercia, características de las suspensiones,...). Este fichero es generado a partir de los datos introducidos por el usuario a través de la interfaz gráfica del programa.
2. Fichero con los *perfiles* de la rueda y del carril.
3. Fichero generado por el *preprocesador de la vía* para su descripción geométrica.

Con estos 3 ficheros se generan las ecuaciones de movimiento del sistema vehículo-vía rígida.

Descripción geométrica de una vía rígida

Resolver el contacto rueda-carril requiere la descripción geométrica de ambos sólidos en el punto de contacto. Para obtener las fuerzas que aparecen debidas al contacto es necesario, además de localizar el contacto, definir los vectores tangentes, normales y sus derivadas.

A continuación se describen los sistemas de referencia que se utilizan en la descripción geométrica de la vía, cómo se localiza y orienta el sistema de referencia del perfil partiendo de los datos de los nodos geométricos que proporciona el preprocesador de la vía, cómo se localiza un punto de la superficie del carril y la obtención de los parámetros geométricos.

- *Sistemas de referencia*

Para la descripción de la geometría de la vía se utilizan los siguientes sistemas de referencia (ver Fig. 2.3):

1. Sistema de referencia inercial XYZ .
2. Sistema de referencia local asociado a la vía $X^rY^rZ^r$. Este sistema se localiza al comienzo de la línea media entre los dos carriles.
3. Sistema de referencia del perfil del carril $X^{rp}Y^{rp}Z^{rp}$. El origen de este sistema se localiza en la línea que define cada carril. La posición y orientación de este sistema permite situar y orientar el perfil del carril en el recorrido de la vía.

- *Coordenadas de los nodos geométricos*

El fichero de la geometría de la vía generado en el preprocesador es utilizado por el programa principal para la descripción geométrica de la vía. Dicho fichero define para cada nodo el vector posición respecto al sistema local de la vía y tres ángulos de Euler, que definen la matriz de orientación del sistema de referencia del perfil del carril situado en el nodo con respecto al sistema de referencia local de la vía. Partiendo de dichos datos el programa principal caracteriza cada nodo geométrico por 12 coordenadas, 3 coordenadas de posición y 9 componentes de la matriz de orientación \mathbf{A} correspondiente. En general, el sistema de coordenadas en el nodo es diferente del sistema de referencia de Frenet usado en teoría de curvas (Rathod &

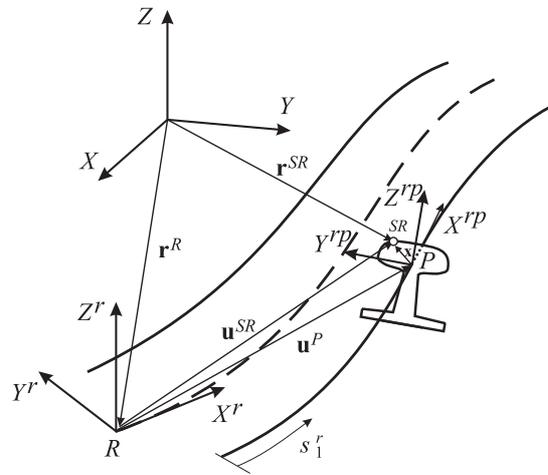


Figura 2.3: Sistemas de referencia para la descripción cinemática del carril

Shabana, 2006) y del que hablan los textos de geometría diferencial (Larson *et al.*, 1999).

Partiendo del sistema local de la vía, la secuencia de las rotaciones de los ángulos de Euler para obtener la orientación del sistema del perfil del carril es la siguiente (ver Fig. 2.4):

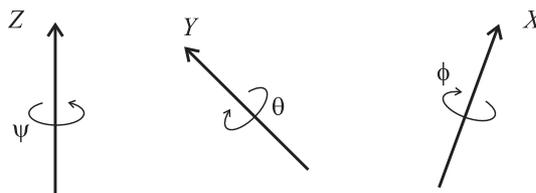


Figura 2.4: Ángulos de Euler

1. Rotación ψ respecto al eje Z (sentido antihorario).
2. Rotación θ respecto al eje $-Y$ (sentido horario).
3. Rotación ϕ respecto al eje $-X$ (sentido horario).

Las matrices correspondientes a cada rotación son las siguientes:

$$\begin{aligned}\mathbf{A}_\psi &= \begin{bmatrix} \cos\psi & -\operatorname{sen}\psi & 0 \\ \operatorname{sen}\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \\ \mathbf{A}_\theta &= \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & -\operatorname{sen}\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \operatorname{sen}\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix}, \\ \mathbf{A}_\phi &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\phi & \operatorname{sen}\phi \\ 0 & -\operatorname{sen}\phi & \cos\phi \end{bmatrix}.\end{aligned}\quad (2.1)$$

Esta secuencia de rotaciones define la siguiente matriz de orientación del sistema de coordenadas localizado en el nodo ($\mathbf{A} = \mathbf{A}_\psi \mathbf{A}_\theta \mathbf{A}_\phi$), en la que se ha sustituido \cos por c y sen por s :

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} c\psi c\theta & -s\psi c\phi + c\psi s\theta s\phi & -s\psi s\phi - c\psi s\theta c\phi \\ s\psi c\theta & c\psi c\phi + s\psi s\theta s\phi & c\psi s\phi - s\psi s\theta c\phi \\ s\theta & -c\theta s\phi & c\theta c\phi \end{bmatrix}\quad (2.2)$$

- *Posición y orientación del sistema de referencia del perfil* (ver Fig. 2.5)

Sea P un punto arbitrario perteneciente a una de las líneas que define los carriles y en el que se sitúa el origen del sistema de referencia del perfil del carril. El vector posición \mathbf{r}_g^P del punto P en coordenadas globales viene dado por la siguiente expresión:

$$\mathbf{r}_g^P = \mathbf{r}^R + \mathbf{A}^r \bar{\mathbf{u}}^{rP}\quad (2.3)$$

donde el subíndice g hace referencia a la descripción geométrica, \mathbf{r}^R es la posición del sistema local de la vía cuyo origen se sitúa en el punto R , \mathbf{A}^r es la matriz de orientación del sistema local de la vía respecto al sistema de referencia global, y $\bar{\mathbf{u}}^{rP}$ es el vector posición del punto P respecto al sistema local de la vía. El punto P está localizado en uno de los segmentos que conforman las líneas de los carriles y que se define mediante 2 nodos geométricos (de la geometría de la vía se conocen únicamente las coordenadas de los no-

dos geométricos). Sean n_j y n_k los nodos entre los que se halla el punto P . El vector posición $\bar{\mathbf{u}}^{rP}$ se calcula realizando una interpolación de las coordenadas correspondientes a los nodos n_j y n_k . La interpolación que se realiza es la utilizada en la formulación de las coordenadas nodales absolutas. El vector posición $\bar{\mathbf{u}}^{rP}$ se calcula como sigue:

$$\bar{\mathbf{u}}^{rP} = \mathbf{S}_g \mathbf{e} \quad (2.4)$$

donde \mathbf{S}_g es la matriz de funciones de forma que depende de la posición del punto P respecto al nodo n_j ($\mathbf{S}_g = \mathbf{S}_g(\mathbf{x})$, siendo $\mathbf{x} = [x \ y \ z]^T$), y \mathbf{e} es un vector que contiene las coordenadas de los nodos n_j y n_k . La matriz \mathbf{S}_g

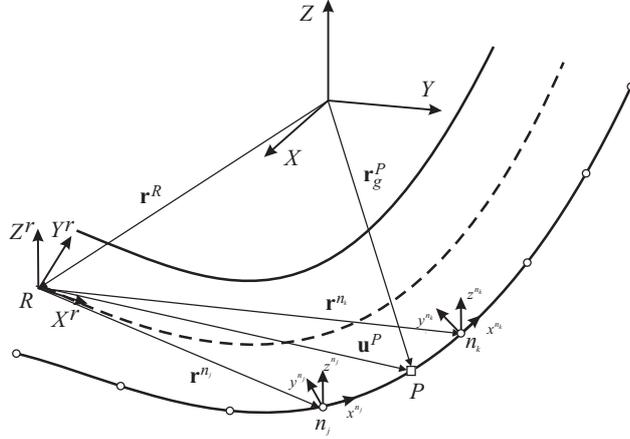


Figura 2.5: Posición y orientación del sistema de referencia del perfil

se define como sigue:

$$\mathbf{S}_g = \begin{bmatrix} s_1 \mathbf{I} & s_2 \mathbf{I} & s_3 \mathbf{I} & s_4 \mathbf{I} & s_5 \mathbf{I} & s_6 \mathbf{I} & s_7 \mathbf{I} & s_8 \mathbf{I} \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

donde las funciones de forma s_i , $i = 1, 2, \dots, 8$ se presentan a continuación:

$$\left. \begin{aligned} s_1 &= 1 - 3\xi^2 + 2\xi^3, & s_2 &= l(\xi - 2\xi^2 + \xi^3), \\ s_3 &= l(\eta - \xi\eta), & s_4 &= l(\zeta - \xi\zeta), \\ s_5 &= 3\xi^2 - 2\xi^3, & s_6 &= l(-\xi^2 + \xi^3), \\ s_7 &= l\xi\eta, & s_8 &= l\xi\zeta \end{aligned} \right\} \quad (2.6)$$

donde

$$\xi = x/l, \quad \eta = y/l, \quad \zeta = z/l \quad (2.7)$$

donde l es la longitud del segmento. El vector de coordenadas nodales \mathbf{e} se define como:

$$\mathbf{e} = \left[\bar{\mathbf{r}}^{rn_j T} \quad \bar{\mathbf{i}}^{rn_j T} \quad \bar{\mathbf{j}}^{rn_j T} \quad \bar{\mathbf{k}}^{rn_j T} \quad \bar{\mathbf{r}}^{rn_k T} \quad \bar{\mathbf{i}}^{rn_k T} \quad \bar{\mathbf{j}}^{rn_k T} \quad \bar{\mathbf{k}}^{rn_k T} \right]^T \quad (2.8)$$

donde $\bar{\mathbf{r}}^{rn_j}$ y $\bar{\mathbf{r}}^{rn_k}$ son los vectores de posición en el sistema local de la vía de los nodos n_j y n_k , respectivamente, e $\bar{\mathbf{i}}^{rn_j}$, $\bar{\mathbf{j}}^{rn_j}$ y $\bar{\mathbf{k}}^{rn_j}$, e $\bar{\mathbf{i}}^{rn_k}$, $\bar{\mathbf{j}}^{rn_k}$ y $\bar{\mathbf{k}}^{rn_k}$ son los vectores unitarios que definen los ejes de los sistemas de referencia de los perfiles del carril situados en los nodos n_j y n_k , y que se corresponden con las columnas de las matrices \mathbf{A}^{n_j} y \mathbf{A}^{n_k} , respectivamente. Las matrices \mathbf{A}^{n_j} y \mathbf{A}^{n_k} se obtienen de la ecuación (2.2) sustituyendo los ángulos de Euler de los nodos n_j y n_k , respectivamente.

Por tanto, se ha aplicado la formulación de las coordenadas nodales absolutas para la descripción geométrica de las líneas que definen los carriles, realizándose la interpolación de la geometría. Esta interpolación permite posicionar el origen del sistema de referencia del perfil del carril.

Para obtener la orientación del sistema del perfil \mathbf{A}^{rp} cuyo origen se halla en el punto P se obtienen los ángulos de Euler correspondientes, realizando una interpolación lineal entre los ángulos de Euler de los nodos n_j y n_k como sigue:

$$\begin{aligned} \psi^P &= (1 - \xi)\psi^{n_j} + \xi\psi^{n_k}, \\ \theta^P &= (1 - \xi)\theta^{n_j} + \xi\theta^{n_k}, \\ \phi^P &= (1 - \xi)\phi^{n_j} + \xi\phi^{n_k}. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Conocidos los ángulos de Euler ψ^P , θ^P y ϕ^P se calcula la matriz de orientación del perfil aplicando la ecuación (2.2).

- *Descripción cinemática de la superficie del carril*

La superficie del carril se describe con dos parámetros de superficie s_1^r y s_2^r (ver Fig. 2.6). El parámetro de superficie s_1^r representa la longitud de arco de la curva espacial del carril. El parámetro s_2^r es la distancia

en dirección Y de un punto de la superficie del carril en el sistema de referencia del perfil X^{rp} , Y^{rp} , Z^{rp} , cuya posición y orientación dependen de s_1^r y se obtienen como se ha descrito en la subsección anterior, mediante la interpolación de la geometría y la interpolación lineal, respectivamente. El perfil del carril se describe mediante funciones *spline* f que interpolan puntos tomados de perfiles de carriles comerciales, quedando definido el perfil mediante $f(s_2^r)$. Por tanto, la posición de un punto cualquiera SR perteneciente a la superficie del carril en el sistema de referencia del perfil $\bar{\mathbf{x}}^{rpSR}$ (ver Fig. 2.3) vendrá dado por la siguiente expresión:

$$\bar{\mathbf{x}}^{rpSR} = \begin{bmatrix} 0 & s_2^r & f(s_2^r) \end{bmatrix}^T \quad (2.10)$$

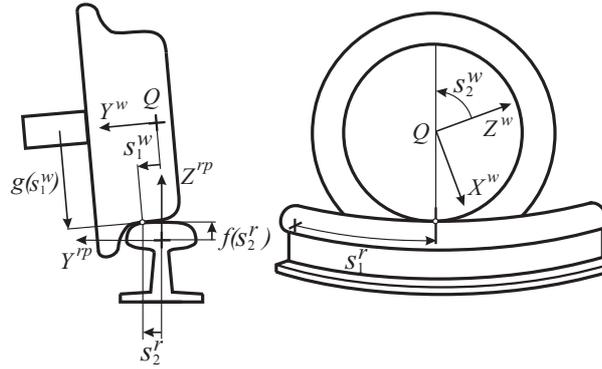


Figura 2.6: Descripción paramétrica de las superficies de la rueda y el carril

- *Posición de un punto de la superficie del carril*

Sea SR un punto de la superficie del carril, perteneciente a una sección transversal que contiene al punto P de la línea media. La posición $\bar{\mathbf{u}}^{rSR}$ en el sistema local de la vía (ver Fig. 2.3) viene dada por la siguiente expresión:

$$\bar{\mathbf{u}}^{rSR}(s_1^r, s_2^r) = \bar{\mathbf{u}}^{rP}(s_1^r) + \mathbf{A}^{rp}(s_1^r)\bar{\mathbf{x}}^{rpSR}(s_2^r) \quad (2.11)$$

donde entre paréntesis se indica de qué parámetro de superficie depende cada término.

- *Vectores y parámetros geométricos*

Conocida la posición de un punto arbitrario de la superficie del carril en el sistema local de la vía $\bar{\mathbf{u}}^{rSR}$ pueden calcularse los siguientes parámetros geométricos asociados a él:

1. Vectores tangentes y normales al carril: $\bar{\mathbf{t}}_1^r$, $\bar{\mathbf{t}}_2^r$ y $\bar{\mathbf{n}}^r$. Estos vectores se calculan como sigue:

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{t}}_1^r &= \frac{\partial \bar{\mathbf{u}}^{rSR}}{\partial s_1^r}, \\ \bar{\mathbf{t}}_2^r &= \frac{\partial \bar{\mathbf{u}}^{rSR}}{\partial s_2^r},\end{aligned}\tag{2.12}$$

$$\bar{\mathbf{n}}^r = \bar{\mathbf{t}}_1^r \times \bar{\mathbf{t}}_2^r.$$

2. Primeras derivadas de los vectores tangentes y normales al carril: $\bar{\mathbf{t}}_{1,1}^r$, $\bar{\mathbf{t}}_{1,2}^r$, $\bar{\mathbf{t}}_{2,1}^r$, $\bar{\mathbf{t}}_{2,2}^r$, $\bar{\mathbf{n}}_{,1}^r$ y $\bar{\mathbf{n}}_{,2}^r$. Se calculan como sigue:

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{t}}_{1,1}^r &= \frac{\partial \bar{\mathbf{t}}_1^r}{\partial s_1^r}, & \bar{\mathbf{t}}_{1,2}^r &= \frac{\partial \bar{\mathbf{t}}_1^r}{\partial s_2^r}, \\ \bar{\mathbf{t}}_{2,1}^r &= \frac{\partial \bar{\mathbf{t}}_2^r}{\partial s_1^r}, & \bar{\mathbf{t}}_{2,2}^r &= \frac{\partial \bar{\mathbf{t}}_2^r}{\partial s_2^r}, \\ \bar{\mathbf{n}}_{,1}^r &= \frac{\partial \bar{\mathbf{n}}^r}{\partial s_1^r}, & \bar{\mathbf{n}}_{,2}^r &= \frac{\partial \bar{\mathbf{n}}^r}{\partial s_2^r}.\end{aligned}\tag{2.13}$$

3. Segundas derivadas de los vectores tangentes y normales al carril: $\bar{\mathbf{t}}_{1,11}^r$, $\bar{\mathbf{t}}_{1,12}^r$, $\bar{\mathbf{t}}_{1,21}^r$, $\bar{\mathbf{t}}_{1,22}^r$, $\bar{\mathbf{t}}_{2,11}^r$, $\bar{\mathbf{t}}_{2,12}^r$, $\bar{\mathbf{t}}_{2,21}^r$, $\bar{\mathbf{t}}_{2,22}^r$, $\bar{\mathbf{n}}_{,11}^r$, $\bar{\mathbf{n}}_{,12}^r$, $\bar{\mathbf{n}}_{,21}^r$ y $\bar{\mathbf{n}}_{,22}^r$. Se calculan como sigue:

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{t}}_{1,11}^r &= \frac{\partial^2 \bar{\mathbf{t}}_1^r}{\partial s_1^{r2}}, & \bar{\mathbf{t}}_{1,12}^r &= \bar{\mathbf{t}}_{1,21}^r = \frac{\partial^2 \bar{\mathbf{t}}_1^r}{\partial s_1^r \partial s_2^r}, & \bar{\mathbf{t}}_{1,22}^r &= \frac{\partial^2 \bar{\mathbf{t}}_1^r}{\partial s_2^{r2}}, \\ \bar{\mathbf{t}}_{2,11}^r &= \frac{\partial^2 \bar{\mathbf{t}}_2^r}{\partial s_1^{r2}}, & \bar{\mathbf{t}}_{2,12}^r &= \bar{\mathbf{t}}_{2,21}^r = \frac{\partial^2 \bar{\mathbf{t}}_2^r}{\partial s_1^r \partial s_2^r}, & \bar{\mathbf{t}}_{2,22}^r &= \frac{\partial^2 \bar{\mathbf{t}}_2^r}{\partial s_2^{r2}}, \\ \bar{\mathbf{n}}_{,11}^r &= \frac{\partial^2 \bar{\mathbf{n}}^r}{\partial s_1^{r2}}, & \bar{\mathbf{n}}_{,12}^r &= \bar{\mathbf{n}}_{,21}^r = \frac{\partial^2 \bar{\mathbf{n}}^r}{\partial s_1^r \partial s_2^r}, & \bar{\mathbf{n}}_{,22}^r &= \frac{\partial^2 \bar{\mathbf{n}}^r}{\partial s_2^{r2}}.\end{aligned}\tag{2.14}$$

Cinemática de una vía rígida

El vector de posición \mathbf{r}^{SR} en coordenadas globales de un punto cualquiera SR perteneciente a la superficie del carril viene dado por:

$$\mathbf{r}^{SR} = \mathbf{r}^R + \mathbf{A}^r \bar{\mathbf{u}}^{rSR}\tag{2.15}$$

donde $\bar{\mathbf{u}}^{rSR}$ es la posición local del punto de la superficie del carril SR calculada con la ecuación (2.11).

Cinemática de un eje ferroviario rígido

El vector de posición \mathbf{r}^{SW} (ver Fig. 2.7) en coordenadas globales de un punto cualquiera SW perteneciente a la superficie de la rueda viene dado por la siguiente expresión:

$$\mathbf{r}^{SW} = \mathbf{r}^W + \mathbf{A}^w \bar{\mathbf{u}}^{wSW} \quad (2.16)$$

donde \mathbf{r}^W es el vector de posición en coordenadas globales del origen W del sistema local del eje ferroviario, \mathbf{A}^w es la matriz de orientación del sistema local del eje y $\bar{\mathbf{u}}^{wSW}$ es la posición del punto de la superficie de la rueda SW en las coordenadas del sistema local.

Al igual que puede describirse el carril de forma paramétrica puede parametrizarse la superficie de la rueda. La superficie de la rueda es de revolución, obtenida al completar una rotación de 360° la curva que define el perfil de la misma alrededor de su eje. La superficie de la rueda puede ser descrita con dos parámetros de superficie s_1^w y s_2^w , definidos en un sistema local de referencia asociado al eje ferroviario X^w, Y^w, Z^w cuyo origen se sitúa en el punto Q (ver Fig. 2.6). El parámetro de superficie s_1^w es la distancia en dirección Y^w de un punto de la superficie de la rueda medida desde el punto Q , y s_2^w representa la orientación angular del plano radial que contiene al punto de la superficie. El perfil de la rueda se describe mediante funciones *spline g* que interpolan puntos tomados de perfiles de ruedas comerciales, quedando definido el perfil mediante $g(s_1^w)$. En función de los dos parámetros de superficie, la posición local del punto de la superficie de la rueda derecha queda como sigue:

$$\bar{\mathbf{u}}^{wSW} = \begin{bmatrix} g(s_1^w) \operatorname{sen} s_2^w & -L + s_1^w & -g(s_1^w) \operatorname{cos} s_2^w \end{bmatrix} \quad (2.17)$$

donde L es la distancia entre el origen del sistema local del eje y el punto Q de la rueda (ver Fig. 2.7).

Ecuaciones de movimiento del sistema vehículo-vía rígida

Un vehículo ferroviario está formado por varios sólidos, que pueden ser rígidos o flexibles, conectados mediante pares cinemáticos y elementos de fuerza como

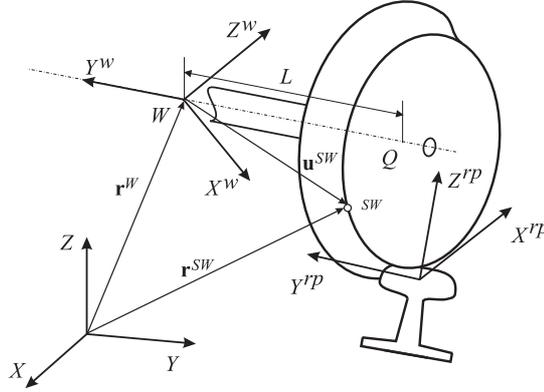


Figura 2.7: Descripción cinemática del eje ferroviario

muelles, amortiguadores y actuadores. Considerando que el vehículo está formado únicamente por n sólidos rígidos, cada sólido descrito por 6 coordenadas (3 coordenadas de posición y 3 coordenadas de orientación, correspondientes al sistema de referencia local asociado a cada sólido), y está sujeto a n_ϕ ecuaciones de restricción, el número de grados de libertad n_{gdl} del sistema vehículo-vía vendrá dado por la siguiente ecuación:

$$n_{gdl} = 6(n + 1) - n_\phi \quad (2.18)$$

donde se han considerado las 6 coordenadas (3 de posición y 3 de orientación) del sistema local asociado a la vía. Téngase en cuenta que el sistema de referencia local de la vía puede cambiar su posición y orientación permitiendo estudiar el efecto de un terremoto, por ejemplo.

Se presentan a continuación las ecuaciones de movimiento del sistema vehículo-vía rígida en forma matricial, asumiendo que todos los sólidos que forman el vehículo son rígidos:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M} & \phi_q^T \\ \phi_q & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{q}} \\ \boldsymbol{\lambda} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_v \\ \boldsymbol{\gamma} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_c \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_{susp} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_{aplic} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (2.19)$$

donde \mathbf{M} es la matriz de masa de los sólidos que forman el sistema, ϕ_q es la matriz jacobiana del vector de ecuaciones de restricción (pares cinemáticos, velocidad de avance,...) con respecto a las coordenadas generalizadas de referencia, \mathbf{q} son las coordenadas generalizadas de referencia de posición y orientación de los sistemas de referencia locales asociados a cada uno de los sólidos que forman

el vehículo y a la vía, λ son los multiplicadores de Lagrange, γ es el término que aparece al derivar dos veces las ecuaciones de restricción, \mathbf{Q}_v es el vector de fuerzas generalizadas de inercia cuadráticas en velocidad, \mathbf{Q}_c es el vector de fuerzas generalizadas de contacto rueda-carril, \mathbf{Q}_{susp} es el vector de fuerzas generalizadas correspondientes a las suspensiones del vehículo, y \mathbf{Q}_{aplic} es el vector de otras fuerzas generalizadas externas aplicadas incluyendo el peso. Las fuerzas de contacto aparecen como fuerzas externas debido a que se utiliza un método elástico, que se describe en las subsecciones siguientes, para la localización de puntos de contacto. El sistema (2.19) está formado por $6(n + 1) + n_\phi$ ecuaciones diferenciales algebraicas (DAE), de las cuales se obtienen las aceleraciones y los multiplicadores de Lagrange. Los multiplicadores de Lagrange pueden usarse para el cálculo de las fuerzas de reacción asociadas a las restricciones. Mediante integración numérica, se obtienen las coordenadas de posición y velocidad de los sólidos que componen el vehículo en cada instante de tiempo y de la vía.

Fuerzas generalizadas de contacto asociadas a las coordenadas generalizadas de la vía

El vector \mathbf{Q}_c definido en la subsección anterior es la suma de las fuerzas generalizadas de todos los contactos que se producen entre las ruedas y los carriles del sistema vehículo-vía asociadas a las coordenadas generalizadas del sistema. Es importante mencionar que estas fuerzas son el único acoplamiento existente entre la dinámica del vehículo y la vía.

Sea CR un punto de contacto del carril (ver Fig. 2.8). A continuación se

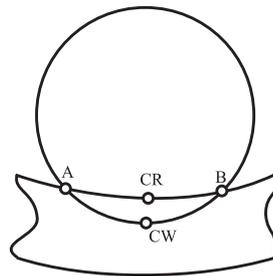


Figura 2.8: Puntos de contacto

calculan las fuerzas generalizadas en dicho punto asociadas a las coordenadas generalizadas del carril. Las coordenadas generalizadas de la vía \mathbf{q}_r , contenidas en el vector de coordenadas generalizadas del sistema \mathbf{q} que aparecen en las

ecuaciones de movimiento (2.19), vienen dadas por:

$$\mathbf{q}_r = \begin{bmatrix} \mathbf{r}^R \\ \boldsymbol{\theta}^r \end{bmatrix} \quad (2.20)$$

donde \mathbf{r}^R es la posición global del origen R del sistema de referencia local de la vía, y $\boldsymbol{\theta}^r$ son coordenadas de orientación de dicho sistema respecto al sistema global. Sea \mathbf{Q}_c^{CR} la fuerza generalizada asociada a las coordenadas generalizadas de la vía correspondiente al punto de contacto CR . El vector \mathbf{Q}_c^{CR} incluye las fuerzas generalizadas normales y tangenciales de contacto rueda-carril, \mathbf{Q}_r^{CR} , y el momento generalizado de pivotamiento del contacto, \mathbf{Q}_θ^{CR} , correspondientes a las coordenadas \mathbf{r}^R y $\boldsymbol{\theta}^r$, respectivamente. Las fuerzas generalizadas se calculan aplicando el principio de los trabajos virtuales. El trabajo virtual producido por un vector de fuerzas se define como el producto escalar del vector de fuerzas y el vector de desplazamiento virtual de la posición del punto de aplicación de la carga. Ambos vectores han de definirse en el mismo sistema de referencia. El trabajo virtual de un momento que actúa en un sólido rígido se define como el producto escalar entre el momento y el desplazamiento virtual de las coordenadas de orientación del sólido. El trabajo virtual δW^{CR} producido por las fuerzas \mathbf{F}^{CR} y por el momento \mathbf{M}^{CR} de contacto en el punto CR viene dado por la siguiente expresión:

$$\delta W^{CR} = \mathbf{F}^{CR T} \delta \mathbf{r}^{CR} + \mathbf{M}^{CR T} \delta \boldsymbol{\theta}^r \quad (2.21)$$

siendo \mathbf{r}^{CR} la posición global del punto de contacto CR . Expresando el trabajo virtual en función de los desplazamientos virtuales de las coordenadas generalizadas de la vía, se obtienen las expresiones que relacionan las fuerzas y momentos asociados al contacto \mathbf{F}^{CR} y \mathbf{M}^{CR} , con las fuerzas y momentos generalizadas \mathbf{Q}_r^{CR} y \mathbf{Q}_θ^{CR} , respectivamente. El desplazamiento virtual del vector de posición CR viene dado por:

$$\delta \mathbf{r}^{CR} = \delta(\mathbf{r}^R + \mathbf{A}^r \bar{\mathbf{u}}^{rCR}) \quad (2.22)$$

La ecuación anterior en función de las coordenadas generalizadas queda de la siguiente forma:

$$\delta \mathbf{r}^{CR} = \delta \mathbf{r}^R - \mathbf{A}^r \bar{\mathbf{u}}^{rCR} \bar{\mathbf{G}}^r \delta \boldsymbol{\theta}^r \quad (2.23)$$

donde \mathbf{G}^r es la matriz que relaciona la velocidad angular de la vía $\boldsymbol{\omega}^r$ con las velocidades generalizadas de orientación de la misma $\dot{\boldsymbol{\theta}}^r$, la barra sobre los vectores

y matrices indican que están expresados en coordenadas locales de la vía, y la tilde indica que es la matriz antisimétrica asociada al vector. A continuación se presenta cómo se ha obtenido el segundo término de la ecuación (2.23). Sean las coordenadas de un vector $\bar{\mathbf{u}}$ las siguientes:

$$\bar{\mathbf{u}} = \begin{bmatrix} u_x & u_y & u_z \end{bmatrix}. \quad (2.24)$$

La matriz antisimétrica $\tilde{\bar{\mathbf{u}}}$ viene dada por:

$$\tilde{\bar{\mathbf{u}}} = \begin{bmatrix} 0 & -u_z & u_y \\ u_z & 0 & -u_x \\ -u_y & u_x & 0 \end{bmatrix}. \quad (2.25)$$

El segundo término de la ecuación (2.23) se ha obtenido como sigue (Shabana, 1994):

$$\dot{\mathbf{A}}^r \bar{\mathbf{u}}^{rCR} = \mathbf{A}^r (\bar{\boldsymbol{\omega}}^r \times \bar{\mathbf{u}}^{rCR}) = -\mathbf{A}^r \tilde{\bar{\mathbf{u}}}^{rCR} \bar{\boldsymbol{\omega}}^r. \quad (2.26)$$

Relacionando la velocidad angular de la vía con las velocidades generalizadas de orientación mediante la matriz \mathbf{G}^r , la ecuación anterior queda como sigue:

$$\dot{\mathbf{A}}^r \bar{\mathbf{u}}^{rCR} = -\mathbf{A}^r \tilde{\bar{\mathbf{u}}}^{rCR} \bar{\mathbf{G}}^r \dot{\boldsymbol{\theta}}^r. \quad (2.27)$$

Expresando esta ecuación en función de los desplazamientos virtuales se obtiene el segundo término de la ecuación (2.23):

$$\delta \mathbf{A}^r \bar{\mathbf{u}}^{rCR} = -\mathbf{A}^r \tilde{\bar{\mathbf{u}}}^{rCR} \bar{\mathbf{G}}^r \delta \boldsymbol{\theta}^r. \quad (2.28)$$

Sustituyendo la ecuación (2.23) en (2.21) queda:

$$\delta W^{CR} = \mathbf{F}^{CR^T} \delta \mathbf{r}^R + (\mathbf{M}^{CR^T} - \mathbf{F}^{CR^T} \mathbf{A}^r \tilde{\bar{\mathbf{u}}}^{rCR} \bar{\mathbf{G}}^r) \delta \boldsymbol{\theta}^r. \quad (2.29)$$

La ecuación (2.29) se escribe en función de las fuerzas generalizadas de la siguiente forma:

$$\delta W^{CR} = \mathbf{Q}_r^{CR^T} \delta \mathbf{r}^R + \mathbf{Q}_\theta^{CR^T} \delta \boldsymbol{\theta}^r \quad (2.30)$$

identificándose los términos que multiplican a los desplazamientos virtuales de las coordenadas generalizadas en la ecuación (2.29) con las fuerzas generalizadas

correspondientes como sigue:

$$\begin{aligned}\mathbf{Q}_r^{CR^T} &= \mathbf{F}^{CR^T}, \\ \mathbf{Q}_\theta^{CR^T} &= \mathbf{M}^{CR^T} - \mathbf{F}^{CR^T} \mathbf{A}^r \tilde{\mathbf{u}}^{rCR} \bar{\mathbf{G}}^r\end{aligned}\quad (2.31)$$

donde \mathbf{F}^{CR} y \mathbf{M}^{CR} se determinan usando los métodos descritos en la sección siguiente.

Fuerzas de contacto

Para calcular las fuerzas generalizadas del contacto es necesario calcular el vector de fuerzas \mathbf{F}^{CR} y el vector de momentos \mathbf{M}^{CR} . El vector de fuerzas incluye las fuerzas normales y tangenciales del contacto, y el vector momento corresponde al momento de pivotamiento del contacto. El cálculo de las fuerzas y momento de contacto realizado en este estudio implica los siguientes tres pasos:

1. Cálculo de la posición de los puntos de contacto en las superficies de la rueda y el carril. La localización de los puntos de contacto se realiza *on line* para cada instante de tiempo (Shabana & Sany, 2001*b*; Escalona, 2002; Escalona *et al.*, 2003; Shabana *et al.*, 2004, 2005).
2. Cálculo de la fuerza de contacto normal usando la teoría de Hertz. La indentación entre la rueda y el carril calculada en la simulación dinámica y la descripción geométrica de la rueda y el carril permite determinar la fuerza normal de contacto y las dimensiones de la elipse de contacto (Johnson, 1985).
3. Cálculo de las fuerzas tangenciales de contacto y el momento de pivotamiento mediante la teoría no lineal de Kalker usando tablas precalculadas (Kalker, 1996). Este procedimiento requiere el previo conocimiento de la fuerza normal de contacto, los pseudo-deslizamientos relativos, las dimensiones de la elipse de contacto, el coeficiente de fricción y las propiedades del material de la rueda y el carril.

En las siguientes subsecciones se desarrollan estos tres pasos.

Posición del punto de contacto

El programa principal permite localizar el punto de contacto mediante varios métodos (Escalona, 2002; Escalona *et al.*, 2003; Shabana *et al.*, 2004, 2005), tanto elásticos como de restricciones. El método usado en el estudio que se presenta en este capítulo es el método elástico propuesto por Escalona (2002). Consiste en resolver un problema de minimización en el que se localizan los puntos de la superficie de la rueda y del carril que presentan máxima indentación. Los cuatro parámetros de superficie que caracterizan cada punto de contacto, dos parámetros de superficie de la rueda y dos parámetros de superficie del carril, se calculan en cada instante de tiempo resolviendo las siguientes cuatro ecuaciones algebraicas:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{t}_1^{rT} \mathbf{r}^{wr} = 0, \\ \mathbf{t}_2^{rT} \mathbf{r}^{wr} = 0, \\ \mathbf{t}_1^{wT} \mathbf{n}^r = 0, \\ \mathbf{t}_2^{wT} \mathbf{n}^r = 0 \end{array} \right. \quad (2.32)$$

donde \mathbf{t}_1^i y \mathbf{t}_2^i ($i = w, r$) son, respectivamente, las tangentes a las superficies de la rueda y del carril en el punto de contacto, $\mathbf{r}^{wr} = \mathbf{r}^{CW} - \mathbf{r}^{CR}$ es el vector que define la posición relativa del punto de contacto perteneciente a la rueda con respecto al punto de contacto perteneciente al carril, y \mathbf{n}^r es el vector normal unitario a la superficie del carril. Las dos primeras ecuaciones del sistema (2.32) se cumplen para los puntos que presentan máxima indentación, pero también para puntos que coincidan en el espacio y no son puntos de contacto (ver puntos *A* y *B* en la Fig. 2.8). Para descartar estos últimos puntos se añaden las dos últimas ecuaciones, que se cumplen únicamente para los puntos de contacto.

Los vectores tangentes y normales, y el vector de posición relativa dependen de los parámetros de superficie, por lo que el sistema de ecuaciones algebraicas no lineales anterior puede expresarse en forma vectorial como sigue:

$$\mathbf{E} = \mathbf{0} \quad (2.33)$$

siendo el vector \mathbf{E} función del vector $\mathbf{s} = [s_1^w \ s_2^w \ s_1^r \ s_2^r]^T$, que contiene los 4 parámetros de superficie ($\mathbf{E} = \mathbf{E}(\mathbf{s})$). La ecuación (2.33) puede resolverse me-

diante el método iterativo de Newton-Raphson, lo que permite obtener los cuatro parámetros de superficie que caracterizan al punto de contacto. Este método requiere partir de un valor de \mathbf{s} suficientemente cercano a la solución buscada, evaluar la matriz jacobiana \mathbf{E}_s de las ecuaciones algebraicas no lineales y resolver iterativamente el siguiente sistema de ecuaciones para obtener las diferencias de Newton $\Delta\mathbf{s}$:

$$\mathbf{E}_s \Delta\mathbf{s} = -\mathbf{E} \quad (2.34)$$

donde las componentes de $\Delta\mathbf{s}$ vienen dadas por:

$$\Delta\mathbf{s} = \left[\Delta s_1^w \quad \Delta s_2^w \quad \Delta s_1^r \quad \Delta s_2^r \right]^T. \quad (2.35)$$

La matriz jacobiana \mathbf{E}_s se obtiene como sigue:

$$\mathbf{E}_s = \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \mathbf{s}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{E}_1}{\partial s_1^w} & \frac{\partial \mathbf{E}_1}{\partial s_2^w} & \frac{\partial \mathbf{E}_1}{\partial s_1^r} & \frac{\partial \mathbf{E}_1}{\partial s_2^r} \\ \frac{\partial \mathbf{E}_2}{\partial s_1^w} & \frac{\partial \mathbf{E}_2}{\partial s_2^w} & \frac{\partial \mathbf{E}_2}{\partial s_1^r} & \frac{\partial \mathbf{E}_2}{\partial s_2^r} \\ \frac{\partial \mathbf{E}_3}{\partial s_1^w} & \frac{\partial \mathbf{E}_3}{\partial s_2^w} & \frac{\partial \mathbf{E}_3}{\partial s_1^r} & \frac{\partial \mathbf{E}_3}{\partial s_2^r} \\ \frac{\partial \mathbf{E}_4}{\partial s_1^w} & \frac{\partial \mathbf{E}_4}{\partial s_2^w} & \frac{\partial \mathbf{E}_4}{\partial s_1^r} & \frac{\partial \mathbf{E}_4}{\partial s_2^r} \end{bmatrix} \quad (2.36)$$

siendo \mathbf{E}_1 , \mathbf{E}_2 , \mathbf{E}_3 y \mathbf{E}_4 las componentes del vector \mathbf{E} y que se corresponden con cada una de las cuatro ecuaciones algebraicas de (2.32). Por tanto, el sistema de ecuaciones (2.34), que se resuelve iterativamente, queda como sigue:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{t}_1^{rT} \mathbf{t}_1^w & \mathbf{t}_1^{rT} \mathbf{t}_2^w & \frac{\partial \mathbf{t}_1^{rT}}{\partial s_1^r} \mathbf{r}^{wr} - \mathbf{t}_1^{rT} \mathbf{t}_1^r & \frac{\partial \mathbf{t}_1^{rT}}{\partial s_2^r} \mathbf{r}^{wr} - \mathbf{t}_1^{rT} \mathbf{t}_2^r \\ \mathbf{t}_2^{rT} \mathbf{t}_1^w & \mathbf{t}_2^{rT} \mathbf{t}_2^w & \frac{\partial \mathbf{t}_2^{rT}}{\partial s_1^r} \mathbf{r}^{wr} - \mathbf{t}_2^{rT} \mathbf{t}_1^r & \frac{\partial \mathbf{t}_2^{rT}}{\partial s_2^r} \mathbf{r}^{wr} - \mathbf{t}_2^{rT} \mathbf{t}_2^r \\ \frac{\partial \mathbf{t}_1^{wT}}{\partial s_1^w} \mathbf{n}^r & \frac{\partial \mathbf{t}_1^{wT}}{\partial s_2^w} \mathbf{n}^r & \frac{\partial \mathbf{n}^{rT}}{\partial s_1^r} \mathbf{t}_1^w & \frac{\partial \mathbf{n}^{rT}}{\partial s_2^r} \mathbf{t}_1^w \\ \frac{\partial \mathbf{t}_2^{wT}}{\partial s_1^w} \mathbf{n}^r & \frac{\partial \mathbf{t}_2^{wT}}{\partial s_2^w} \mathbf{n}^r & \frac{\partial \mathbf{n}^{rT}}{\partial s_1^r} \mathbf{t}_2^w & \frac{\partial \mathbf{n}^{rT}}{\partial s_2^r} \mathbf{t}_2^w \end{bmatrix} \Delta\mathbf{s} = -\mathbf{E}. \quad (2.37)$$

La solución alcanza la convergencia si la violación de las ecuaciones es menor que

cierta tolerancia que se especifica.

Una vez que se ha determinado el vector de parámetros de superficie que permite localizar el punto de contacto, la indentación δ entre la rueda y el carril puede calcularse como sigue:

$$\delta = \mathbf{r}^{wr^T} \mathbf{n}^r. \quad (2.38)$$

Si la indentación δ es positiva o nula ($\delta \geq 0$) indica que los parámetros obtenidos corresponden a un punto de contacto. En caso contrario, no se produce penetración entre la rueda y el carril, por lo que no se produce contacto.

Vectores geométricos asociados al punto de contacto

Los vectores tangentes y normales a la superficie de la rueda que se utilizan para localizar el punto de contacto se calculan como sigue:

$$\mathbf{t}_1^w = \frac{\partial \mathbf{r}^{CW}}{\partial s_1^w}, \quad \mathbf{t}_2^w = \frac{\partial \mathbf{r}^{CW}}{\partial s_2^w}, \quad \mathbf{n}^w = \mathbf{t}_1^w \times \mathbf{t}_2^w. \quad (2.39)$$

La obtención de los vectores tangentes y normales a la superficie del carril ha sido descrita en la subsección correspondiente a la descripción geométrica del carril. Se calcularon los vectores en el sistema local de la vía, por lo que para describirlos en el sistema global se multiplican por la matriz \mathbf{A}^r .

Fuerza de contacto normal

Una vez que se ha localizado el punto de contacto y se han calculado los vectores y parámetros geométricos asociados a él, puede calcularse la fuerza normal de contacto. La componente normal de la fuerza de contacto se calcula mediante la siguiente expresión:

$$F_n = F_h + F_d = K_h \delta^{3/2} + C_h \dot{\delta} |\delta| \quad (2.40)$$

donde F_h es la fuerza normal de contacto calculada mediante la teoría de Hertz (Johnson, 1985), F_d es una fuerza de amortiguamiento, K_h es la constante de Hertz que depende de las curvaturas principales y de las propiedades elásticas del material, y C_h es una constante de amortiguamiento. La velocidad de indentación $\dot{\delta}$ se calcula como sigue:

$$\dot{\delta} = \dot{\mathbf{r}}^{wr^T} \mathbf{n}^r \quad (2.41)$$

donde $\dot{\mathbf{r}}^{wr^T}$ se calcula como sigue:

$$\dot{\mathbf{r}}^{wr} = \dot{\mathbf{r}}^{CW} - \dot{\mathbf{r}}^{CR}. \quad (2.42)$$

Aunque la velocidad de indentación se denota con $\dot{\delta}$, es importante observar que no coincide con la derivada con respecto al tiempo de la indentación (2.38) pues no se tiene en cuenta la derivada temporal del vector normal. Las velocidades $\dot{\mathbf{r}}^{CW}$ y $\dot{\mathbf{r}}^{CR}$ se calculan, respectivamente, con las siguientes expresiones:

$$\dot{\mathbf{r}}^{CR} = \dot{\mathbf{r}}^R + \tilde{\omega}^r \mathbf{u}^{CR}, \quad (2.43)$$

$$\dot{\mathbf{r}}^{CW} = \dot{\mathbf{r}}^W + \tilde{\omega}^w \mathbf{u}^{CW}. \quad (2.44)$$

El término $|\delta|$ se incluye en la fuerza de amortiguamiento para garantizar que la fuerza normal F_n es nula cuando lo es la indentación.

Fuerzas de contacto tangencial y momento de pivotamiento

Las fuerzas de contacto tangenciales y el momento de pivotamiento se calculan utilizando la subrutina USETAB en la que se desarrolla la teoría no lineal de Kalker con tablas precalculadas (Kalker, 1996). Los datos de entrada que necesita la subrutina son los siguientes:

- Fuerza normal de contacto (Johnson, 1985).
- Dimensiones de la elipse de contacto (Johnson, 1985).
- Pseudo-deslizamientos relativos (Garg & Dukkipati, 1984). Estos son velocidades relativas entre la rueda y el carril en el punto de contacto, normalizados con la velocidad de avance del vehículo V . Se calculan como se indica a continuación:

$$\begin{aligned} \xi_x &= \frac{(\dot{\mathbf{r}}^{CW} - \dot{\mathbf{r}}^{CR})^T \mathbf{t}_1^r}{V}, \\ \xi_y &= \frac{(\dot{\mathbf{r}}^{CW} - \dot{\mathbf{r}}^{CR})^T \mathbf{t}_2^r}{V}, \\ \xi_z &= \frac{(\boldsymbol{\omega}^{CW} - \boldsymbol{\omega}^{CR})^T \mathbf{n}^r}{V} \end{aligned} \quad (2.45)$$

donde ξ_x es el pseudo-deslizamiento longitudinal, ξ_y el transversal y ξ_z el de pivotamiento, y \mathbf{t}_1^r , \mathbf{t}_2^r y \mathbf{n}^r los vectores unitarios tangentes y normal, respectivamente, a la superficie del carril.

- Coeficiente de fricción entre las dos superficies en contacto.
- Propiedades de los materiales de la rueda y el carril.

Las fuerzas tangenciales y el momento de pivotamiento que obtiene la subrutina forman parte de los vectores \mathbf{F}^{CR} y \mathbf{M}^{CR} utilizados para calcular las fuerzas generalizadas del contacto.

2.3 Fases computacionales para simulaciones con vías deformables

En este capítulo se desarrolla un método para generar de forma automática vías deformables de geometría arbitraria. Se ha descrito en la primera parte de este capítulo el procedimiento para realizar simulaciones de vehículos ferroviarios, modelados como sistemas multicuerpo, sobre una vía rígida de geometría arbitraria. En esta sección se van a describir las fases computacionales para realizar simulaciones con vías deformables, y se verán las modificaciones que surgen en el procedimiento y en el código debido a la consideración de la flexibilidad de la vía con respecto al caso de vías rígidas. Las fases en el caso de vías deformables son las siguientes:

1. Se describe la geometría de la vía en términos de nodos en un preprocesador partiendo de datos de la industria ferroviaria.
2. Se diseña un modelo de elementos finitos de la vía en un programa de elementos finitos. Se realiza un análisis modal para obtener las frecuencias naturales y los modos de vibración de la vía.
3. Se generan automáticamente las ecuaciones de movimiento del sistema multicuerpo vehículo ferroviario-vía deformable en el programa principal. Las ecuaciones de movimiento se resuelven numéricamente.

En las subsecciones que siguen se describen estas fases.

2.3.1 Fase de preprocesador

En esta fase, en la que se describe la geometría de la vía en términos de nodos, denominados nodos geométricos, se sigue el mismo procedimiento descrito para el caso de una vía rígida. Por tanto, partiendo de tres datos proporcionados por la industria ferroviaria, cada nodo geométrico es caracterizado mediante tres coordenadas de posición y tres ángulos de Euler que definen la orientación de un sistema de coordenadas en el nodo (Shabana *et al.*, 2008). La flexibilidad de la vía no se considera en esta primera fase de la simulación, por lo que la descripción de los nodos geométricos es exactamente igual para una vía rígida que para una vía deformable.

2.3.2 Fase de creación de un modelo de vía con elementos finitos

En esta fase se obtienen las características dinámicas de la vía, calculando los modos de vibración y las frecuencias naturales. Los pasos a seguir en esta fase son los siguientes:

1. Se realiza un modelo de la vía en elementos finitos. En un programa comercial de elementos finitos (en este estudio se ha utilizado ANSYS), se modela la vía describiéndola con un conjunto de elementos finitos. Cada nodo tiene 6 grados de libertad, correspondientes a 3 coordenadas de posición y 3 coordenadas de orientación. La Fig. 2.9 muestra las coordenadas de los nodos l y m que definen un elemento finito.

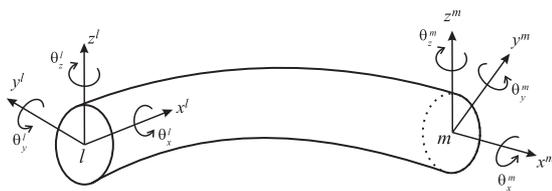


Figura 2.9: Elemento finito viga

2. Se realiza un análisis modal del modelo de elementos finitos. Especificando unas condiciones de contorno para la vía, se realiza un análisis modal obteniéndose las frecuencias naturales de vibración de la vía y los modos de vibración correspondientes a dichas frecuencias. Las frecuencias y modos

permiten determinar la matriz modal, la matriz de masa modal y la de rigidez modal.

3. Se normalizan los autovectores respecto a la matriz de rigidez modal. El programa de elementos finitos proporciona la matriz modal normalizada respecto a la matriz de masa. Para normalizar los modos de vibración respecto a la matriz de rigidez, dividimos cada autovector por la frecuencia natural correspondiente. Normalizando respecto a la matriz de rigidez, la matriz modal de rigidez es una matriz identidad y la matriz de masa modal es diagonal y viene dada por:

$$\mathbf{M}_m = \begin{bmatrix} 1/\omega_1^2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1/\omega_2^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1/\omega_3^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1/\omega_n^2 \end{bmatrix} \quad (2.46)$$

donde ω_i ($i = 1, \dots, n$) son las distintas frecuencias naturales.

4. Se genera un fichero para el preprocesador de sólidos flexibles del programa principal. Los datos que necesita el programa principal para calcular las deformaciones de la vía se obtienen introduciendo la información proporcionada por el programa de elementos finitos en un preprocesador que se utiliza en el caso de que el sistema contenga algún sólido flexible denominado PRESAMS. El fichero que se introduce en PRESAMS consta de los siguientes datos obtenidos del programa de elementos finitos:
 - (a) Número de nodos n_{EF} del modelo de elementos finitos.
 - (b) Grados de libertad n_{gdl} de los nodos de los elementos finitos.
 - (c) Posición inicial de los nodos en el modelo de elementos finitos.
 - (d) Vector de coordenadas modales \mathbf{p}_{f0} en el instante inicial.
 - (e) Vector de velocidades modales $\dot{\mathbf{p}}_{f0}$ en el instante inicial.
 - (f) Matriz modal \mathbf{B} obtenida del análisis modal en el programa de elementos finitos. La matriz \mathbf{B} tiene un número de filas igual a los grados de libertad de cada nodo de los elementos finitos por el número de nodos ($n_{filas} = n_{gdl}n_{EF}$), y el número de columnas viene dado por el número

de modos significativos de vibración que se consideren. Por tanto, es importante destacar que es aquí donde se realiza la síntesis modal, ya que \mathbf{B} es una submatriz de la matriz de autovectores que contiene un conjunto incompleto de estos. Al considerar la flexibilidad de la vía, el número de grados de libertad asociados a las coordenadas elásticas puede ser muy elevado. La síntesis modal permite disminuir el número de coordenadas elásticas utilizando los modos de vibración significativos. Las primeras n_{gdl} filas corresponden al nodo denominado 1 en el modelo (primero las correspondientes a las coordenadas de posición y después las correspondientes a las de orientación).

- (g) Matriz modal de masa.
- (h) Matriz modal de rigidez.
- (i) Matriz modal de amortiguamiento.
- (j) Masas nodales.
- (k) Vector de fuerzas nodales.

5. Se ejecuta el preprocesador de sólidos flexibles. El preprocesador PRESAMS genera un fichero que contiene la información que se le ha introducido proporcionada por el programa de elementos finitos y descrita anteriormente, y las integrales de las funciones de forma constantes que aparecen en las ecuaciones de movimiento de los sistemas con sólidos flexibles (Shabana, 2005). De esta forma PRESAMS calcula dichas integrales invariantes una única vez y no han de calcularse al resolver numéricamente las ecuaciones de movimiento en cada instante de tiempo.

2.3.3 Fase de generación de las ecuaciones de movimiento en el programa principal

El programa principal necesita 4 ficheros, uno más que en el caso de vías rígidas, para poder realizar una simulación de un vehículo ferroviario sobre una vía deformable. Los ficheros necesarios contienen la siguiente información:

1. Fichero con los *datos del vehículo* ferroviario (dimensiones, masa, propiedades de inercia, características de las suspensiones,...).
2. Fichero con los *perfiles* de la rueda y del carril.

3. Fichero generado por el *preprocesador de la vía* para su descripción geométrica.
4. Fichero generado por el *preprocesador de sólidos flexibles* a partir de los datos obtenidos del modelo de la vía en el programa de elementos finitos.

Con estos 4 ficheros se generan las ecuaciones de movimiento del sistema vehículo-vía deformable.

Descripción geométrica de una vía deformable

Se ha visto que resolver el contacto entre la rueda y el carril requiere la descripción geométrica de la superficie de ambos sólidos. La consideración de la flexibilidad de la vía conlleva un cambio en la localización de los puntos de las superficies y por tanto también un cambio de los parámetros geométricos que las describen (vectores tangentes, normales, curvaturas principales...). Para la descripción geométrica de la superficie del carril vamos a utilizar los mismos sistemas de referencia representados en la Fig. 2.3 y descritos para la vía rígida: el sistema inercial, el local de la vía y el del perfil del carril. Se considera que la flexibilidad de la vía no deforma el perfil del carril sino que modifica la posición y orientación del sistema de referencia del perfil $X^{rp}Y^{rp}Z^{rp}$. Para obtener la posición actualizada del origen del sistema de referencia del perfil se utilizan dos tipos de interpolaciones, la interpolación geométrica y la interpolación de la deformación. Esta última interpolación se realiza partiendo de los datos que proporciona el preprocesador de la vía y de las características dinámicas que proporciona el programa de elementos finitos. Para obtener la nueva orientación del sistema del perfil se realiza una interpolación lineal. En las subsecciones siguientes se detallan las distintas interpolaciones.

En el procedimiento que se describe para modelar la deformación del carril se utilizan dos modelos de la vía:

1. El *modelo geométrico*. Este modelo es el descrito para el caso de vías rígidas, en el que la vía se describe en términos de *nodos geométricos*, caracterizados por las coordenadas de posición y orientación que proporciona el preprocesador de vías.
2. El *modelo de elementos finitos*. Este modelo se crea en un programa comercial de elementos finitos. La vía se describe en términos de *nodos de*

los elementos finitos.

Aunque los nodos geométricos y los nodos de los elementos finitos pueden coincidir, el procedimiento desarrollado en este capítulo considera que son diferentes, para que puedan crearse los dos modelos de vías implicados de forma independiente.

- *Coordenadas de los nodos geométricos*

El fichero de la geometría de la vía generado en el preprocesador es utilizado por el programa principal para la descripción geométrica de la vía. Se ha visto que dicho fichero define, para cada nodo geométrico, el vector posición respecto al sistema local de la vía y tres ángulos de Euler, que definen la matriz de orientación del sistema de referencia del perfil del carril situado en el nodo con respecto al sistema de referencia local asociado a la vía. Cada nodo geométrico está caracterizado, por tanto, por 12 coordenadas (3 coordenadas de posición y las 9 componentes de la matriz de orientación \mathbf{A} correspondiente). El fichero que contiene las coordenadas de los nodos geométricos no varía, sino que almacena un valor constante de las coordenadas. El valor de dichas coordenadas constantes es el mismo en una vía rígida y en la misma vía considerada deformable.

- *Actualización de la posición y orientación del sistema de referencia del perfil*

Tal y como se ha mencionado anteriormente, la geometría del carril es descrita mediante la formulación de las coordenadas nodales absolutas. Las deformaciones se describen utilizando la formulación de los sistemas de referencia flotantes con discretización mediante elementos finitos y síntesis modal.

Se supone conocido el parámetro longitud de arco s_1^r que permite localizar una sección del carril. Conocido s_1^r se puede identificar el segmento geométrico en el que se halla el origen P del sistema de referencia del perfil $X^{rp}Y^{rp}Z^{rp}$, definido por 2 nodos geométricos. Las coordenadas de los 2 nodos geométricos son conocidas (son las mismas coordenadas de los nodos geométricos de un carril rígido). Las coordenadas de los dos nodos geométricos han de actualizarse al considerar la deformación del carril (ver Fig. 2.10).

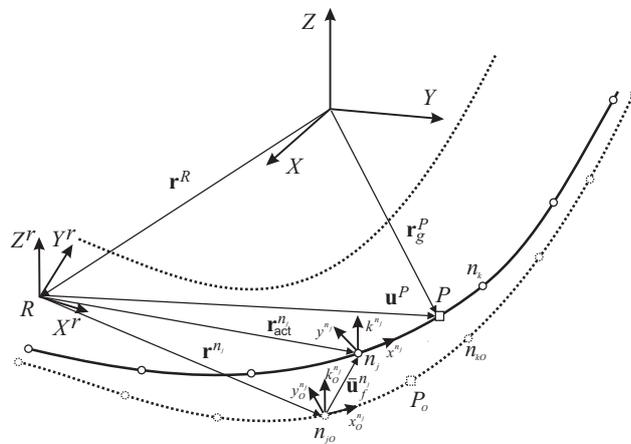


Figura 2.10: Posición y orientación del sistema de referencia del perfil del carril deformable

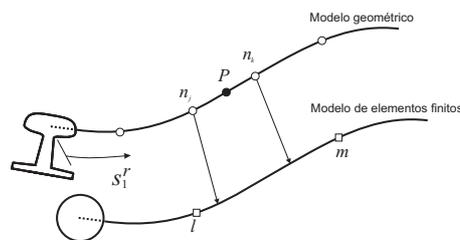


Figura 2.11: Modelos geométrico y de los elementos finitos de un carril

Para dicha actualización se utiliza el modelo de los elementos finitos. A cada nodo geométrico le corresponde un elemento finito, definido por dos nodos (los nodos de elementos finitos), como muestra la Fig. 2.11. Conocidas las coordenadas de los nodos del elemento finito, los desplazamientos por deformación y las coordenadas de orientación, puede realizarse una interpolación con la matriz propia de los elementos finitos, de forma que la posición del nodo geométrico queda actualizada, y puede realizarse otra interpolación (lineal en el caso del presente estudio) para actualizar las coordenadas de orientación del nodo geométrico. Actualizadas las coordenadas de ambos nodos geométricos, la interpolación de la formulación de las coordenadas nodales absolutas permite obtener la posición actualizada de P , y otra interpolación (lineal en el caso de este estudio) permite actualizar la orientación del sistema $X^{rp}Y^{rp}Z^{rp}$ correspondiente a s_1^r .

A continuación se describen los pasos detallados de la actualización de la geometría descrita. El procedimiento para actualizar la geometría de la vía como resultado de la deformación de la misma es el siguiente:

1. Dado s_1^r se determina el segmento geométrico en el que se halla el origen P del sistema de referencia del perfil del carril. El valor de s_1^r se obtiene de resolver el problema de la localización del punto de contacto. Se parte de una estimación inicial del parámetro de superficie s_1^r y su valor va variando en las distintas iteraciones. Del segmento geométrico se conocen las coordenadas \mathbf{e} , definidas en la ecuación (2.8), de los nodos geométricos n_j y n_k . Es decir, del nodo geométrico n_j se conoce la posición en el sistema local de la vía $\bar{\mathbf{r}}^{rn_j}$ y la matriz de orientación \mathbf{A}^{n_j} , cuyas columnas $\bar{\mathbf{i}}^{rn_j}$, $\bar{\mathbf{j}}^{rn_j}$ y $\bar{\mathbf{k}}^{rn_j}$ forman parte del vector \mathbf{e} ; y del nodo geométrico n_k se conoce $\bar{\mathbf{r}}^{rn_k}$ y \mathbf{A}^{n_k} .
2. Se actualiza la posición $\bar{\mathbf{r}}^{rn_j}$ del nodo n_j calculando el desplazamiento por deformación del nodo. Conocida la posición $\bar{\mathbf{r}}^{rn_j}$ del nodo n_j considerando la vía rígida, es decir la posición indeformada del nodo geométrico, se determina el elemento finito que contiene al nodo geométrico. Sean l y m los nodos de dicho elemento finito, cuyas coordenadas vienen dadas por:

$$\mathbf{q}_f^l = \left[x^l \quad y^l \quad z^l \quad \theta_x^l \quad \theta_y^l \quad \theta_z^l \right]^T \quad (2.47)$$

y

$$\mathbf{q}_f^m = \left[x^m \quad y^m \quad z^m \quad \theta_x^m \quad \theta_y^m \quad \theta_z^m \right]^T \quad (2.48)$$

Estas coordenadas son parte del vector de las coordenadas nodales \mathbf{q}_f , denominado vector de coordenadas elásticas. Este vector contiene las coordenadas de todos los nodos del modelo de elementos finitos, y puede calcularse en función de las coordenadas modales \mathbf{p}_f aplicando síntesis modal. Las coordenadas modales son consideradas coordenadas generalizadas, y son conocidas de las ecuaciones de movimiento. Por tanto, el vector \mathbf{q}_f se calcula como sigue:

$$\mathbf{q}_f = \mathbf{B}\mathbf{p}_f \quad (2.49)$$

donde \mathbf{B} es la matriz modal, obtenida del análisis modal realizado

en el programa de elementos finitos. El desplazamiento por deformación del nodo en coordenadas locales $\bar{\mathbf{r}}_f^{rn_j}$ se obtiene interpolando las coordenadas nodales del elemento finito usando la clásica matriz de interpolación \mathbf{S}_{EF} del método de los elementos finitos (Shabana, 2005) como sigue:

$$\bar{\mathbf{r}}_f^{rn_j} = \mathbf{S}_{EF} \begin{bmatrix} \mathbf{q}_f^l \\ \mathbf{q}_f^m \end{bmatrix} \quad (2.50)$$

donde la matriz de interpolación \mathbf{S}_{EF} viene dada por:

$$\mathbf{S}_{EF} = \begin{bmatrix} 1 - \xi & 0 & 0 \\ 6(\xi - \xi^2)\eta & 1 - 3\xi^2 + 2\xi^3 & 0 \\ 6(\xi - \xi^2)\xi & 0 & 1 - 3\xi^2 + 2\xi^3 \\ 0 & -(1 - \xi)l\zeta & -(1 - \xi)l\eta \\ (1 - 4\xi + 3\xi^2)l\zeta & 0 & (-\xi + 2\xi^2 - \xi^3)l \\ (-1 + 4\xi - 3\xi^2)l\eta & (\xi - 2\xi^2 + \xi^3)l & 0 \\ \xi & 0 & 0 \\ 6(-\xi + \xi^2)\eta & 3\xi^2 - 2\xi^3 & 0 \\ 6(-\xi + \xi^2)\zeta & 0 & 3\xi^2 - 2\xi^3 \\ 0 & -l\xi\zeta & -l\xi\eta \\ (-2\xi + 3\xi^2)l\zeta & 0 & (\xi^2 - \xi^3)l \\ (2\xi - 3\xi^2)l\eta & (-\xi^2 + \xi^3)l & 0 \end{bmatrix}^T \quad (2.51)$$

y las coordenadas nodales se obtienen a partir de las coordenadas

modales de la siguiente forma:

$$\mathbf{q}_f^l = \mathbf{B}_l \mathbf{p}_f \quad (2.52)$$

$$\mathbf{q}_f^m = \mathbf{B}_m \mathbf{p}_f \quad (2.53)$$

siendo \mathbf{B}_l y \mathbf{B}_m particiones de la matriz modal \mathbf{B} correspondientes a las 6 filas de las coordenadas de los nodos l y m , respectivamente.

La posición actualizada $\bar{\mathbf{r}}_{act}^{rnj}$ del nodo geométrico n_j se calcula como sigue:

$$\bar{\mathbf{r}}_{act}^{rnj} = \bar{\mathbf{r}}^{rnj} + \bar{\mathbf{r}}_f^{rnj}. \quad (2.54)$$

3. Actualización de la orientación \mathbf{A}^{n_j} del sistema de referencia asociado al nodo n_j . Conocidas las coordenadas nodales \mathbf{q}_f^l y \mathbf{q}_f^m de los nodos l y m , respectivamente, del elemento finito que contiene al nodo geométrico n^j , se conocen las matrices de rotación infinitesimal $\mathbf{A}_f^{n_l}$ y $\mathbf{A}_f^{n_m}$, que vienen dadas por:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_f^{n_l} &= \begin{bmatrix} 1 & -\theta_z^l & \theta_y^l \\ \theta_z^l & 1 & -\theta_x^l \\ -\theta_y^l & \theta_x^l & 1 \end{bmatrix}, \\ \mathbf{A}_f^{n_m} &= \begin{bmatrix} 1 & -\theta_z^m & \theta_y^m \\ \theta_z^m & 1 & -\theta_x^m \\ -\theta_y^m & \theta_x^m & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (2.55)$$

Interpolando linealmente los elementos de las matrices de orientación de los nodos del elemento finito, se obtiene la matriz $\mathbf{A}_f^{n_j}$ como sigue:

$$\mathbf{A}_f^{n_j} = \begin{bmatrix} 1 & -\theta_z^{n_j} & \theta_y^{n_j} \\ \theta_z^{n_j} & 1 & -\theta_x^{n_j} \\ -\theta_y^{n_j} & \theta_x^{n_j} & 1 \end{bmatrix} \quad (2.56)$$

siendo

$$\begin{aligned} \theta_x^{n_j} &= (1 - \xi)\theta_x^l + \xi\theta_x^m, \\ \theta_y^{n_j} &= (1 - \xi)\theta_y^l + \xi\theta_y^m, \\ \theta_z^{n_j} &= (1 - \xi)\theta_z^l + \xi\theta_z^m. \end{aligned} \quad (2.57)$$

La matriz de orientación del nodo n_j actualizada $\mathbf{A}_{act}^{n_j}$ viene dada por:

$$\mathbf{A}_{act}^{n_j} = \mathbf{A}^{n_j} \mathbf{A}_f^{n_j}. \quad (2.58)$$

4. Actualización de la posición del nodo n_k . Se obtiene $\bar{\mathbf{r}}_{act}^{rn_k}$ siguiendo el mismo procedimiento descrito en el paso 2. El nodo geométrico n_k puede pertenecer al mismo elemento finito que n_j o a otro diferente.
5. Actualización de la orientación del sistema de referencia asociado al nodo n_k . Se obtiene la matriz $\mathbf{A}_{act}^{n_k}$ siguiendo el mismo procedimiento descrito en el paso 3.
6. Generación del nuevo vector de coordenadas \mathbf{e}_{act} de los nodos geométricos n_j y n_k . Conocidas la posición y orientación actualizadas de los nodos geométricos n_j y n_k , el vector de coordenadas \mathbf{e}_{act} vendrá dado por:

$$\mathbf{e}_{act} = \left[\bar{\mathbf{r}}_{act}^{rn_j^T} \quad \bar{\mathbf{i}}_{act}^{rn_j^T} \quad \bar{\mathbf{j}}_{act}^{rn_j^T} \quad \bar{\mathbf{k}}_{act}^{rn_j^T} \quad \bar{\mathbf{r}}_{act}^{rn_k^T} \quad \bar{\mathbf{i}}_{act}^{rn_k^T} \quad \bar{\mathbf{j}}_{act}^{rn_k^T} \quad \bar{\mathbf{k}}_{act}^{rn_k^T} \right]^T \quad (2.59)$$

donde $\bar{\mathbf{i}}_{act}^{rn_j}$, $\bar{\mathbf{j}}_{act}^{rn_j}$ y $\bar{\mathbf{k}}_{act}^{rn_j}$, e $\bar{\mathbf{i}}_{act}^{rn_k}$, $\bar{\mathbf{j}}_{act}^{rn_k}$ y $\bar{\mathbf{k}}_{act}^{rn_k}$ se corresponden con las columnas de las matrices $\mathbf{A}_{act}^{n_j}$ y $\mathbf{A}_{act}^{n_k}$, respectivamente.

7. Conocido \mathbf{e}_{act} se realiza la interpolación propia de la formulación de las coordenadas nodales absolutas para obtener la posición actualizada del punto P :

$$\bar{\mathbf{u}}^{rP} = \mathbf{S}_g \mathbf{e}_{act} \quad (2.60)$$

donde \mathbf{S}_g es la misma matriz de interpolación definida para vías rígidas en la ecuación (2.5).

El vector posición \mathbf{r}_g^P del punto P en coordenadas globales viene dado por la ecuación (2.3) donde $\bar{\mathbf{u}}^{rP}$ se ha calculado en este caso teniendo en cuenta la deformación de la vía con la ecuación (2.60).

- *Posición de un punto de la superficie del carril*

La posición de un punto de la superficie del carril deformado se calcula con la misma ecuación utilizada en el carril rígido (2.11), con la posición y orientación del sistema de referencia del carril actualizada por la deformación.

- *Vectores y parámetros geométricos*

Conocida la posición actualizada del punto de la superficie del carril en el sistema local de la vía $\bar{\mathbf{u}}^{rSR}$, se calculan los parámetros geométricos asociados a él de la misma forma que se describió para vías rígidas.

Cinemática de una vía deformable

La cinemática de una vía deformable se describe utilizando la formulación de los sistemas de referencia flotantes con síntesis modal. Esta formulación se describe a continuación. El vector de posición absoluta \mathbf{r}^{SR} del punto de la superficie del carril deformable SR viene dado por:

$$\mathbf{r}^{SR} = \mathbf{r}^R + \mathbf{A}^r \bar{\mathbf{u}}^{rSR}. \quad (2.61)$$

El vector $\bar{\mathbf{u}}^{rSR}$ puede calcularse de dos formas:

1. Con la ecuación (2.11), calculando la nueva posición y orientación del sistema de referencia del perfil mediante la interpolación geométrica como se ha descrito previamente, utilizando los nodos geométricos.
2. Mediante la interpolación de la deformación, interpolando directamente los nodos del elemento finito, sin utilizar los nodos geométricos.

A continuación se describe esta segunda forma de calcular la posición del punto SR . Debido a la deformación de la vía, el vector de posición local $\bar{\mathbf{u}}^{rSR}$ del punto SR varía respecto al caso de la vía rígida, viniendo dado por la siguiente expresión:

$$\bar{\mathbf{u}}^{rSR} = \bar{\mathbf{u}}_0^{rSR} + \bar{\mathbf{u}}_f^{rSR} \quad (2.62)$$

donde $\bar{\mathbf{u}}_0^{rSR}$ es la posición indeformada del punto SR en el sistema local de la vía, y $\bar{\mathbf{u}}_f^{rSR}$ es el desplazamiento por deformación del punto SR en el sistema local de la vía (ver Fig. 2.12).

El desplazamiento por deformación del punto de la superficie del carril se calcula siguiendo el procedimiento descrito para la obtención del desplazamiento por deformación de los nodos geométricos:

1. Dado s_1^r se determina el elemento finito en el que se halla el punto SR . Sean l y m los nodos del elemento finito.

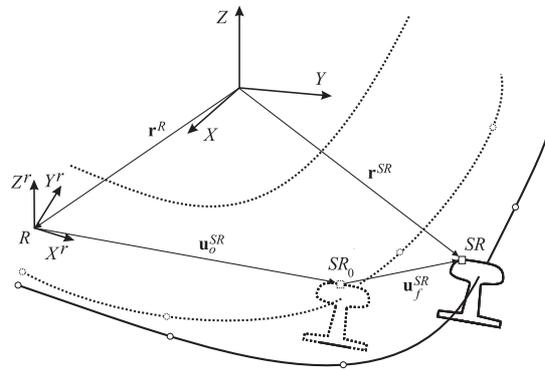


Figura 2.12: Descripción cinemática de la superficie del carril

2. Se calculan las coordenadas nodales a partir de las coordenadas modales \mathbf{p}_f obtenidas de las ecuaciones de movimiento como sigue:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{q}_f^l \\ \mathbf{q}_f^m \end{bmatrix} = \mathbf{B}_{lm} \mathbf{p}_f \quad (2.63)$$

donde \mathbf{B}_{lm} es una partición de la matriz modal \mathbf{B} que contiene 12 filas correspondientes a las coordenadas de los dos nodos.

3. Se obtiene el desplazamiento por deformación del punto SR como sigue:

$$\bar{\mathbf{u}}_f^{rSR} = \mathbf{S}_{EF} \begin{bmatrix} \mathbf{q}_f^l \\ \mathbf{q}_f^m \end{bmatrix} \quad (2.64)$$

donde \mathbf{S}_{EF} es la matriz propia de los elementos finitos definida previamente en la ecuación (2.51).

En las ecuaciones de movimiento se utiliza la *interpolación de la geometría* para calcular la posición del punto de contacto y los vectores y parámetros geométricos asociados a él, y se utiliza la *interpolación de la deformación* para calcular el desplazamiento por deformación del punto de contacto.

Cinemática de un eje ferroviario rígido

La deformación de la vía no afecta a la descripción cinemática de un eje ferroviario rígido por lo que es la misma que la descrita en el caso de vías rígidas.

Ecuaciones de movimiento del sistema vehículo-vía deformable

Las ecuaciones de movimiento del sistema, asumiendo que todos los sólidos que forman el vehículo son rígidos, que la vía es deformable y utilizando coordenadas modales para describir la deformación de la misma vienen dadas por:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{0} & \phi_q^T \\ \mathbf{0} & \mathbf{M}_f & \mathbf{0} \\ \phi_q & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{q}} \\ \ddot{\mathbf{p}}_f \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_v + \mathbf{Q}_{susp} + \mathbf{Q}_{aplic} \\ -\mathbf{C}_f \dot{\mathbf{p}}_f - \mathbf{K}_f \mathbf{p}_f \\ \gamma \end{bmatrix} + \mathbf{Q}_c \quad (2.65)$$

donde \mathbf{M}_f , \mathbf{C}_f y \mathbf{K}_f son las matrices modales de masa, de amortiguamiento (aunque en lo descrito hasta el momento no se tiene en cuenta, podría considerarse) y de rigidez, respectivamente, y el vector de coordenadas \mathbf{q} incluye las coordenadas de referencia de la vía y de los sólidos del vehículo. Tal y como se ha mencionado en la descripción cinemática de la vía, se aplica síntesis modal para reducir el número de coordenadas elásticas nodales, siendo las coordenadas modales \mathbf{p}_f coordenadas generalizadas del sistema. El vector de fuerzas generalizadas de contacto \mathbf{Q}_c contiene las fuerzas generalizadas correspondientes a las coordenadas generalizadas de referencia \mathbf{q} y a las coordenadas generalizadas modales \mathbf{p}_f . Este vector se describe a continuación.

Actualización de las fuerzas generalizadas de contacto asociadas a las coordenadas generalizadas de la vía

El vector \mathbf{Q}_c definido en la subsección anterior es la suma de las fuerzas generalizadas de todos los contactos que se producen entre las ruedas y los carriles del sistema vehículo-vía. Se ha mencionado previamente, al describir el caso de la vía rígida, que estas fuerzas son el único acoplamiento existente entre la dinámica del vehículo y la vía. En el caso de vías flexibles, el trabajo virtual en función de las fuerzas generalizadas de contacto asociadas a las coordenadas generalizadas de la vía viene dado por la siguiente expresión:

$$\delta W^{CR} = \mathbf{Q}_r^{CR^T} \delta \mathbf{r}^R + \mathbf{Q}_\theta^{CR^T} \delta \theta^r + \mathbf{Q}_f^{CR^T} \delta \mathbf{p}_f. \quad (2.66)$$

A continuación se obtienen las fuerzas generalizadas \mathbf{Q}_r^{CR} , \mathbf{Q}_θ^{CR} y \mathbf{Q}_f^{CR} . El trabajo virtual para vías rígidas se vio que viene dado por (2.21). En el caso de vías flexibles aparece un término más, ya que además de las coordenadas de orienta-

ción de referencia están las coordenadas de orientación elásticas $\boldsymbol{\theta}_f$ del punto de contacto, quedando la expresión como sigue:

$$\delta W^{CR} = \mathbf{F}^{CR^T} \delta \mathbf{r}^{CR} + \mathbf{M}^{CR^T} \delta \boldsymbol{\theta}^r + \bar{\mathbf{M}}^{CR^T} \delta \boldsymbol{\theta}_f. \quad (2.67)$$

El vector de posición global \mathbf{r}^{CR} se calcula con las ecuaciones (2.61) y (2.62). El desplazamiento virtual del vector de posición $\delta \mathbf{r}^{CR}$ viene dado por:

$$\delta \mathbf{r}^{CR} = \delta \mathbf{r}^R + \delta \mathbf{A}^r \bar{\mathbf{u}}^{rCR} + \mathbf{A}^r \delta \bar{\mathbf{u}}_0^{rCR} + \mathbf{A}^r \delta \bar{\mathbf{u}}_f^{rCR} \quad (2.68)$$

donde el tercer término es nulo ($\delta \bar{\mathbf{u}}_0^{rCR} = \mathbf{0}$), ya que el vector de la posición indeformada del punto de contacto CR es constante en el sistema local de la vía. La ecuación (2.68) en función de las coordenadas generalizadas de la vía queda de la siguiente forma:

$$\delta \mathbf{r}^{CR} = \delta \mathbf{r}^R - \mathbf{A}^r \tilde{\mathbf{u}}^{rCR} \bar{\mathbf{G}}^r \delta \boldsymbol{\theta}^r + \mathbf{A}^r \mathbf{S}_{EF} \mathbf{B}_{lm} \delta \mathbf{p}_f \quad (2.69)$$

donde el segundo término se ha obtenido de la misma forma descrita para vías rígidas, y se ha tenido en cuenta que $\bar{\mathbf{u}}_f^{rCR} = \mathbf{S}_{EF} \mathbf{q}_f$ y que, como se ha mencionado anteriormente, las coordenadas nodales \mathbf{q}_f son sustituidas por las coordenadas modales al aplicar síntesis modal, quedando expresado $\bar{\mathbf{u}}_f^{rCR}$ en función de \mathbf{p}_f .

Sustituyendo la ecuación (2.69) en (2.67) podemos identificar las fuerzas generalizadas asociadas a las coordenadas de referencia de la vía como sigue:

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_r^{CR^T} &= \mathbf{F}^{CR^T}, \\ \mathbf{Q}_\theta^{CR^T} &= \mathbf{M}^{CR^T} - \mathbf{F}^{CR^T} \mathbf{A}^r \tilde{\mathbf{u}}^{rCR} \bar{\mathbf{G}}^r. \end{aligned} \quad (2.70)$$

El trabajo virtual asociado a las coordenadas elásticas modales $\delta W_{\mathbf{p}_f}$ viene dado por:

$$\delta W_{\mathbf{p}_f}^{CR} = \mathbf{F}^{CR^T} \mathbf{A}^r \mathbf{S}_{EF} \mathbf{B}_{lm} \delta \mathbf{p}_f + \bar{\mathbf{M}}^{CR^T} \delta \boldsymbol{\theta}_f. \quad (2.71)$$

Las coordenadas de orientación del punto de contacto $\boldsymbol{\theta}_f$ no son coordenadas generalizadas por lo que han de expresarse en función de las mismas. Las coordenadas de orientación en el punto de contacto se expresan en función de las coordenadas modales interpolando linealmente las coordenadas de orientación de los nodos del elemento finito en el que está contenido el punto de contacto como

sigue:

$$\delta\boldsymbol{\theta}_f = (1 - \xi)\delta\boldsymbol{\theta}^l + \xi\delta\boldsymbol{\theta}^m \quad (2.72)$$

donde ξ define la localización adimensional del punto de contacto con respecto al primer nodo del elemento finito que lo contiene. Las coordenadas elásticas de orientación de los nodos del elemento finito se expresan en función de las coordenadas modales como se muestra a continuación:

$$\begin{aligned} \delta\boldsymbol{\theta}^l &= \mathbf{B}_{\theta^l} \delta\mathbf{p}_f, \\ \delta\boldsymbol{\theta}^m &= \mathbf{B}_{\theta^m} \delta\mathbf{p}_f \end{aligned} \quad (2.73)$$

donde \mathbf{B}_{θ^l} y \mathbf{B}_{θ^m} son particiones de la matriz modal \mathbf{B} que contienen las filas correspondientes a las coordenadas de orientación de los nodos l y m del elemento finito, respectivamente. Por tanto, la fuerza generalizada de contacto asociada a las coordenadas generalizadas modales se obtiene como sigue:

$$\mathbf{Q}_f^{CR^T} = \mathbf{F}^{CR^T} \mathbf{A}^r \mathbf{S}_{EF} \mathbf{B}_{lm} + \mathbf{M}^{CR^T} \mathbf{A}^r ((1 - \xi)\mathbf{B}_{\theta^l} + \xi\mathbf{B}_{\theta^m}). \quad (2.74)$$

Fuerzas de contacto

Las fuerzas de contacto \mathbf{F}^{CR} y el momento de pivotamiento \mathbf{M}^{CR} necesarios para obtener las fuerzas generalizadas de contacto se calculan siguiendo el mismo procedimiento descrito para el caso de vías rígidas. El resultado obtenido será diferente ya que debido a la deformación de la vía se modifica la localización del punto de contacto, por lo que también varía la magnitud de la fuerza normal de contacto, las fuerzas tangenciales y el momento de pivotamiento, y varían los parámetros geométricos asociados al punto de contacto.

Posición del punto de contacto

El procedimiento para calcular los 4 parámetros de superficie que describen la localización del punto de contacto ha sido descrito para vías rígidas. Las ecuaciones algebraicas (2.32), que se resuelven mediante el método de Newton-Raphson, son las mismas que en la vía rígida. Aunque debido a la deformación de la vía varían todos los vectores que aparecen en (2.32), tanto el vector \mathbf{r}^{wr} como las tangentes y normales, en el código de programación únicamente hay que actualizar la expresión de \mathbf{r}^{wr} , siguiendo el procedimiento descrito en la subsección dedicada a

la cinemática de una vía flexible, ya que los vectores tangentes, normales y sus derivadas, implicados en el cálculo de la posición del punto de contacto quedan actualizados automáticamente al actualizar la posición del punto de contacto con el código existente.

Actualización de los pseudo-deslizamientos relativos

Se ha visto en las secciones dedicadas a vías rígidas que para calcular las fuerzas tangenciales de contacto y el momento de pivotamiento son necesarios los pseudo-deslizamientos relativos definidos en las ecuaciones (2.45). Al considerar la deformación de la vía los pseudo-deslizamientos relativos han de ser actualizados, ya que varía la velocidad del punto de contacto perteneciente al carril $\dot{\mathbf{r}}^{CR}$ y la velocidad angular en el punto de contacto del carril $\boldsymbol{\omega}^{CR}$.

El procedimiento de actualización se describe a continuación:

1. Se actualiza el vector de velocidad absoluta del punto de contacto del carril $\dot{\mathbf{r}}^{CR}$. Para ello se deriva (2.61), siendo el punto de la superficie del carril SR el punto de contacto CR en este caso, como sigue:

$$\dot{\mathbf{r}}^{CR} = \dot{\mathbf{r}}^R + \boldsymbol{\omega}^r \times \mathbf{u}^{CR} + \mathbf{A}^r \dot{\mathbf{u}}_f^{rCR}. \quad (2.75)$$

El código implementado para realizar simulaciones con vías rígidas ya calculaba los dos primeros términos de la ecuación anterior, correspondientes a la ecuación (2.43). Al actualizar la geometría de la vía el vector \mathbf{u}^{CR} que utiliza el código ya tiene en cuenta la deformación de la vía. El tercer término de la ecuación es necesario añadirlo al código. La velocidad del punto de contacto por deformación $\dot{\mathbf{u}}_f^{rCR}$ se calcula como se indica a continuación:

$$\dot{\mathbf{u}}_f^{rCR} = (1 - \xi)\mathbf{B}_{\mathbf{r}^l}\dot{\mathbf{p}}_f + \xi\mathbf{B}_{\mathbf{r}^m}\dot{\mathbf{p}}_f \quad (2.76)$$

donde $\mathbf{B}_{\mathbf{r}^l}$ y $\mathbf{B}_{\mathbf{r}^m}$ son particiones de la matriz modal \mathbf{B} que contiene las filas correspondientes a las 3 coordenadas de posición correspondientes a los nodos del elemento finito l y m , respectivamente.

2. Se actualiza el vector de velocidad angular en el punto de contacto $\boldsymbol{\omega}^{CR}$. Esta actualización se realiza como sigue:

$$\boldsymbol{\omega}^{CR} = \boldsymbol{\omega}^r + \mathbf{A}^r \dot{\boldsymbol{\theta}}_f \quad (2.77)$$

donde el vector $\dot{\boldsymbol{\theta}}_f$ se calcula interpolando linealmente las variaciones temporales de las coordenadas de orientación de los nodos l y m del elemento finito que contiene al punto de contacto como sigue:

$$\dot{\boldsymbol{\theta}}_f = (1 - \xi)\mathbf{B}_{\theta^l}\dot{\mathbf{p}}_f + \xi\mathbf{B}_{\theta^m}\dot{\mathbf{p}}_f. \quad (2.78)$$

3. Se sustituyen los vectores $\dot{\mathbf{r}}^{CR}$ y $\boldsymbol{\omega}^{CR}$ en las ecuaciones (2.45) para obtener los pseudo-deslizamientos relativos considerando la deformación de la vía.

2.4 Resultados numéricos de la aplicación del método

En esta sección se aplica la formulación dinámica no lineal presentada en este capítulo para modelar la flexibilidad estructural de la vía sobre la que viaja un eje ferroviario con suspensiones longitudinales y laterales. Es importante destacar que el objetivo de esta sección es comprobar que el procedimiento descrito en el capítulo está correctamente implementado, por lo que los modelos de vía y vehículo utilizados están muy simplificados.

2.4.1 Modelo geométrico de la vía

Se considera una vía recta de 60 m de longitud. Se define un nodo geométrico cada 0.3048 m y la línea media que recorre los carriles se asume que están separados una distancia de 1510 mm.

2.4.2 Modelo de elementos finitos de la vía

Los programas de elementos finitos permiten modelar vías muy sofisticadas, que incluyan traviesas, placas de asiento y secciones comerciales de los carriles, por ejemplo. Sin embargo, como se ha comentado anteriormente, el modelo que se realiza para comprobar la implementación del método propuesto está muy simplificado.

En el programa comercial ANSYS se realiza un modelo de vía con elementos finitos 3D. Las características del modelo, cuyas propiedades se muestran en la Tabla 2.1, se describen a continuación:

- Cada carril se modela como una viga de sección circular biempotrada. Esta condición de contorno, aunque no es realista, se asume considerando que el contorno no tiene efecto en los resultados una vez que el vehículo se aleja de ellos.
- Al considerar la sección circular, los segundos momentos de área en dirección Y y Z ($I_p = \pi D^4/64$), siendo estos dos ejes los que forman el plano en el que se halla la sección transversal, son iguales.
- Cada carril está formado por 600 elementos del tipo BEAM44, por lo que la vía está formada por 1200 elementos y 1202 nodos. El elevado número de elementos es debido a que los dos carriles de la vía se modelan como un único sólido, por lo que para obtener los primeros modos de vibración, correspondientes a un carril sin deformar y el otro con la deformación típica del primer modo de flexión de una viga biempotrada, es necesario aumentar el número de elementos.
- El material de los carriles se asume que es el acero.
- La vía se modela como dos carriles sobre una base elástica continua con rigidez vertical y lateral. Los coeficientes de rigidez utilizados se muestran en la Tabla 2.1. El valor de rigidez vertical utilizado está muy por debajo de los valores en vías comerciales ($\sim 50 \text{ MN/m}^2$).
- La longitud de cada carril es de 60 m.

Al modelo de vía descrito se le realiza un análisis modal y se obtienen los modos de vibración y las frecuencias naturales correspondientes. Para la aplicación del método se consideran cuatro modos de vibración, dos de flexión en el plano vertical y otros dos de flexión en el plano lateral, siendo importante destacar que no es objeto de estudio el alcance de la convergencia de los resultados obtenidos (son necesarios más modos de vibración para representar la deformación de un carril sobre una base elástica). Los cuatro modos que se consideran se corresponden con el primer modo de deformación de una viga biempotrada. Al considerarse los dos carriles como un solo sólido, los modos considerados son los siguientes:

1. El carril izquierdo se deforma según el primer modo de deformación de una viga biempotrada en el plano vertical y el carril derecho no se deforma (ver Fig. 2.13a).

Tabla 2.1: Propiedades de la vía de elementos finitos

Propiedades de la vía (iguales para carril izquierdo y derecho)	Valores
Radio de la sección transversal	0.05 m
Segundo momento de área en Y	4.9087e-6 m ⁴
Segundo momento de área en Z	4.9087e-6 m ⁴
Densidad	7830 kg/m ³
Módulo de elasticidad	2.06e11 Pa
Rigidez vertical	1 MN/m ²
Rigidez lateral	1 MN/m ²
Longitud	60 m
Nodos	601
Elementos	600

2. El carril izquierdo no se deforma y el carril derecho se deforma según el primer modo de deformación de una viga biempotrada en el plano vertical (ver Fig. 2.13b).
3. El carril izquierdo se deforma según el primer modo de deformación de una viga biempotrada en el plano lateral y el carril derecho no se deforma (ver Fig. 2.13c).
4. El carril izquierdo no se deforma y el carril derecho se deforma según el primer modo de deformación de una viga biempotrada en el plano lateral (ver Fig. 2.13d).

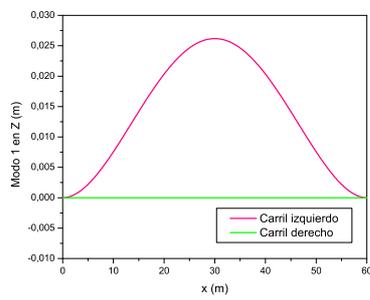
Las frecuencias naturales correspondientes a estos modos de vibración son las cuatro iguales y se corresponden con un valor de 20.30 Hz.

Normalizando las matrices modales respecto a la matriz de rigidez modal se obtiene una matriz de rigidez modal $\mathbf{K}_m = \mathbf{I}$ y la matriz de masa modal siguiente:

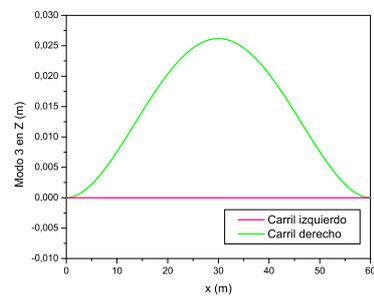
$$\mathbf{M}_m = \begin{bmatrix} 6.15e-5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6.15e-5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6.15e-5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6.15e-5 \end{bmatrix}. \quad (2.79)$$

Se considera nulo el amortiguamiento modal de todos los modos.

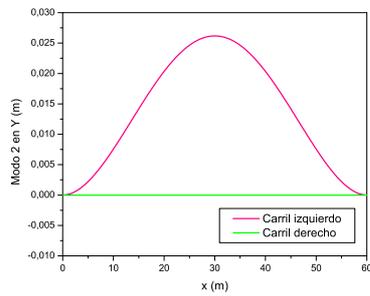
Las dimensiones de la matriz modal \mathbf{B} son 7212×4 , correspondientes el



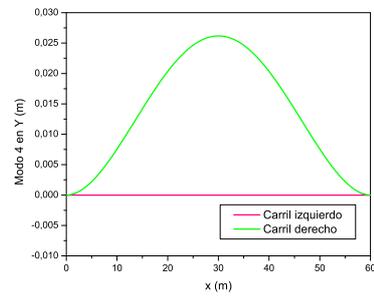
(a)



(b)



(c)



(d)

Figura 2.13: Modos de vibración : a) Modo 1 en Z; b) Modo 3 en Z; c) Modo 2 en Y; d) Modo 4 en Y

número de filas al número de nodos de los elementos finitos multiplicado por los grados de libertad de cada nodo (1202×6) y el número de columnas a los modos de vibración considerados.

Se genera el fichero con los datos que necesita el preprocesador PRESAMS para que el programa principal pueda considerar la flexibilidad de la vía. Las coordenadas y velocidades modales en el instante inicial \mathbf{p}_{f0} y $\dot{\mathbf{p}}_{f0}$ se consideran nulas:

$$\mathbf{p}_{f0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T, \quad (2.80)$$

$$\dot{\mathbf{p}}_{f0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T. \quad (2.81)$$

Al considerar nulas las coordenadas modales en el instante inicial no se parte de la posición de equilibrio estático, por lo que aparecerán en algunas gráficas de resultados un transitorio con oscilaciones.

Con el fichero generado a partir de los datos del modelo de elementos finitos, PRESAMS calcula las integrales de las funciones de forma que sean constantes que aparecen en las ecuaciones de movimiento. Sin embargo, no se considera eficiente computacionalmente ni necesario el uso de tan elevado número de nodos de elementos finitos para la interpolación de las deformaciones descrita en este capítulo. Para reducir el tamaño del fichero generado por PRESAMS, el número de nodos, tras obtener coeficientes modales de forma precisa y las integrales de las funciones de forma, se reduce de forma que el fichero de entrada a SAMS/Rail tiene únicamente 10 elementos finitos por carril, cada uno de seis metros de longitud, por lo que la matriz modal \mathbf{B} que utiliza el programa principal tiene dimensiones 132×4 , y las interpolaciones de la geometría y de la deformación se realizan considerando únicamente 22 nodos. Las masas nodales se consideran de 368.98 kg, menos la masa de los cuatro nodos de los extremos de los carriles que se consideran de 184.49 kg. Las fuerzas nodales son las debidas a la gravedad.

2.4.3 Modelo del vehículo ferroviario

El vehículo utilizado para obtener los resultados numéricos presentados en esta sección consiste en un eje ferroviario conectado a un bastidor mediante muelles y amortiguadores lineales en dirección longitudinal y transversal (no tiene suspensión vertical). Este modelo, que se muestra Fig. 2.14, es estable sobre una vía rígida a la velocidad de 30 m/s, como muestra el análisis de estabilidad mostrado

al final del capítulo, en el que se realiza un análisis de autovalores.

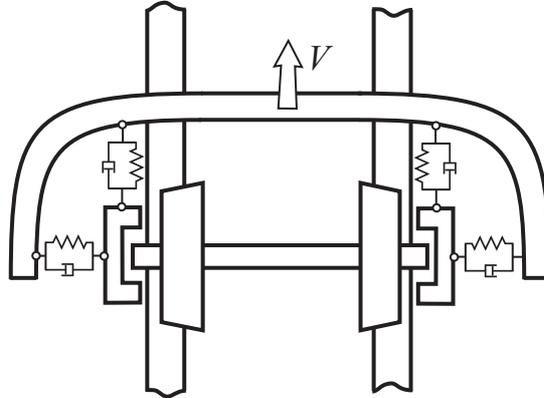


Figura 2.14: Modelo de eje suspendido

Los coeficientes de la suspensión y las propiedades de inercia del eje y del bastidor asumidos en este modelo se presentan en las Tablas 2.2 y 2.3. El bastidor tiene restringido el movimiento lateral y el ángulo de lazo. El eje ferroviario tiene restringida la velocidad de avance, que se considera de 30 m/s, y está sometido a una velocidad lateral inicial de 0.01 m/s. Debido a las restricciones y a la suspensión, el bastidor sigue al eje ferroviario y se desplaza en la dirección de avance sobre la vía. Una fuerza vertical de 98 KN se aplica sobre el eje para simular el peso del vehículo. Se asume que las ruedas del eje tienen un perfil del tipo AAR (*Association of American Railroads*) y son de acero.

Tabla 2.2: Propiedades de rigidez y amortiguamiento del modelo del eje con suspensión

Descripción	Rigidez (KN/m)	Amortiguamiento (KNs/m)
Muelle lineal longitudinal izquierdo	135	100
Muelle lineal longitudinal derecho	135	100
Muelle lineal transversal izquierdo	250	0
Muelle lineal transversal derecho	250	0

2.4.4 Resultados numéricos

A continuación se presentan gráficamente los resultados obtenidos en las simulaciones aplicando el método presentado en este capítulo para modelar la defor-

Tabla 2.3: Propiedades de masa e inercia del modelo del eje con suspensión

Descripción	Eje	Bastidor
Masa (kg)	1568	10000
I_{xx} Momento de inercia de vuelco (kgm^2)	656	1798.58
I_{yy} Momento de inercia de rodadura (kgm^2)	168	1798.58
I_{zz} Momento de inercia de lazo (kgm^2)	656	2450

mación de la vía. Los resultados obtenidos se muestran comparándolos con los obtenidos cuando la vía es rígida, utilizando el mismo modelo de vehículo en ambos casos.

Las Fig. 2.15 y 2.16 muestran el desplazamiento lateral y el ángulo de lazo del eje, respectivamente. Los resultados presentados en estas figuras muestran que no hay diferencias significativas entre las vías rígidas y flexibles.

La Fig. 2.17 muestra la posición vertical del centro de masa del eje ferroviario.

Las Fig. 2.18-2.20 muestran los pseudo-deslizamientos longitudinal, lateral y de pivotamiento, respectivamente. Los resultados presentados en estas figuras muestran claramente el efecto de la flexibilidad de la vía en los mismos. Los resultados obtenidos con la vía flexible muestran oscilaciones alrededor del valor que se obtiene con la vía rígida. Se aprecia en las figuras la existencia de un transitorio debido a que no se parte de la posición de equilibrio estacionario, como se ha comentado anteriormente.

La Fig. 2.21 muestra la fuerza normal de contacto actuando en la rueda izquierda, y las Fig. 2.22 y 2.23 muestran las fuerzas tangenciales longitudinal y lateral. La Fig. 2.24 muestra el momento de pivotamiento. El efecto de la flexibilidad del carril en estas fuerzas puede verse claramente en los resultados presentados en estas figuras, en las que también aparece un transitorio por no partir de la posición de equilibrio estático. Las Fig. 2.25 y 2.26 muestran las amplitudes de los modos de vibración usados en esta investigación, en dirección lateral y vertical, respectivamente.

Las Fig. 2.27 y 2.28 muestran los desplazamientos por deformación vertical y lateral del nodo medio del carril izquierdo en función del tiempo. Los resultados de esta última figura pueden emplearse para determinar el cambio del ancho de vía debido a los desplazamientos por deformación.

Los resultados presentados en esta sección muestran que existen dos frecuencias predominantes; la primera es la frecuencia de lazo, que aparece en las vías

2.4. RESULTADOS NUMÉRICOS DE LA APLICACIÓN DEL MÉTODO 89

rígida y flexible, y la segunda aparece únicamente en la vía flexible y es la frecuencia natural de oscilación del carril.

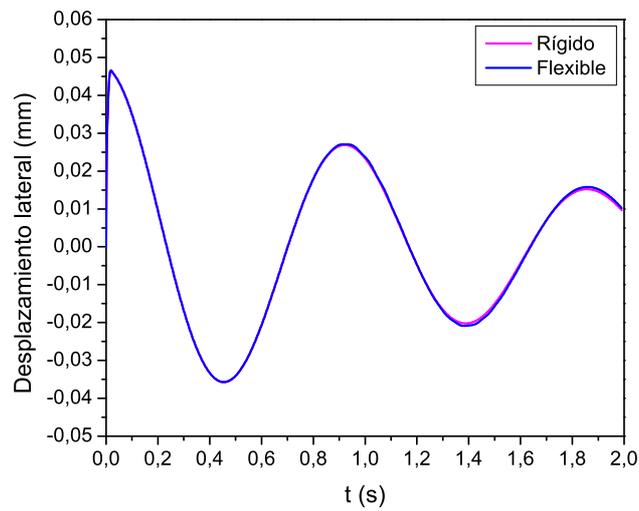


Figura 2.15: Desplazamiento lateral del eje ferroviario

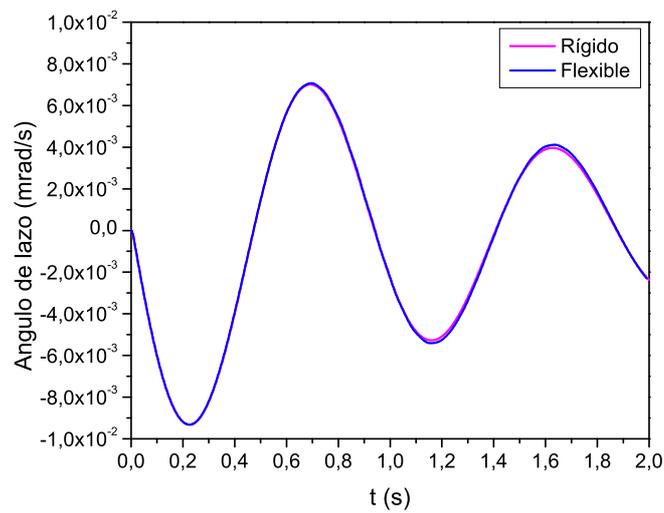


Figura 2.16: Ángulo de lazo del eje ferroviario

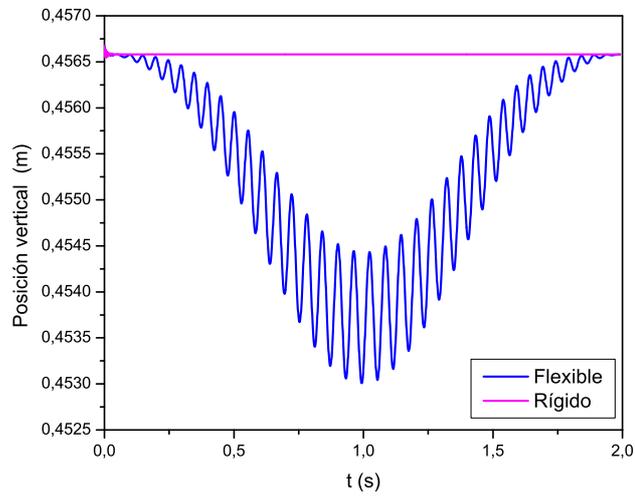


Figura 2.17: Posición vertical del centro de masa del eje ferroviario

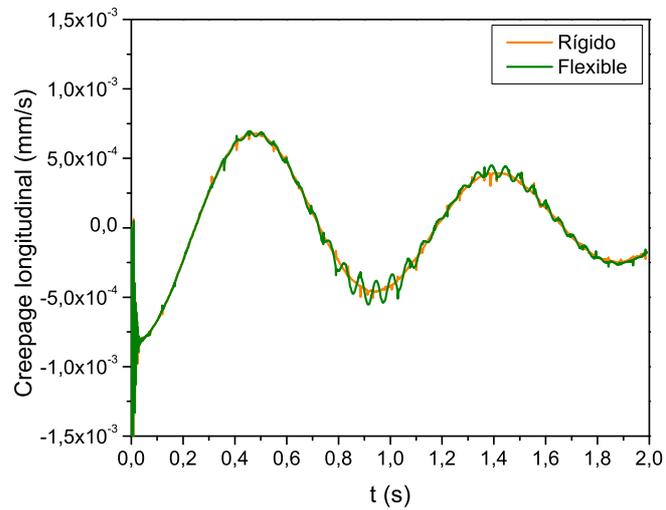


Figura 2.18: Pseudo-deslizamiento longitudinal en el punto de contacto del carril izquierdo

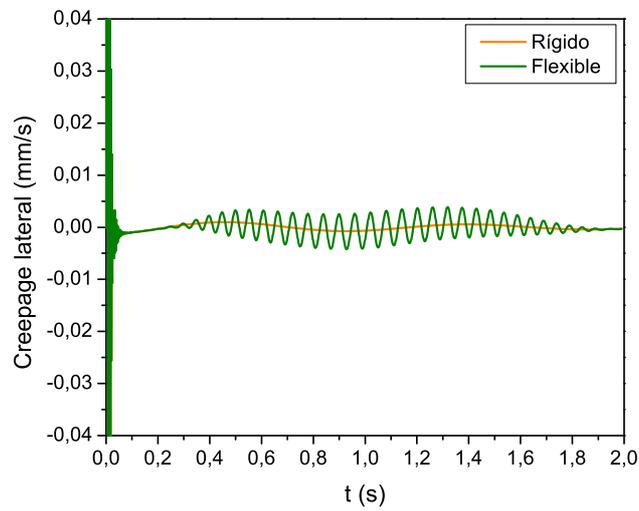


Figura 2.19: Pseudo-deslizamiento lateral en el punto de contacto del carril izquierdo

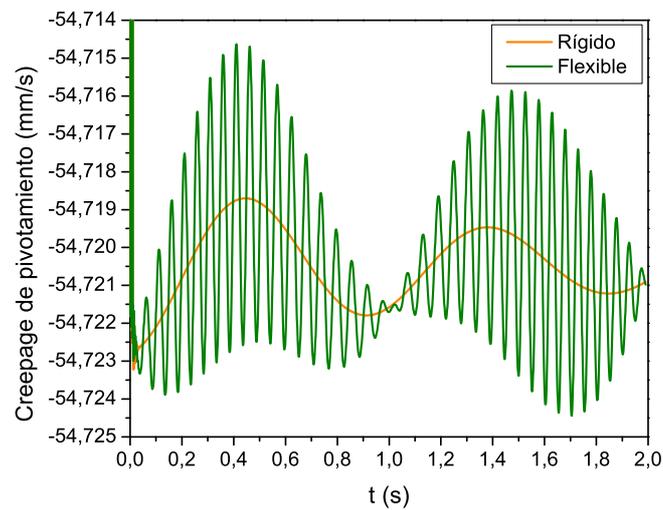


Figura 2.20: Pseudo-deslizamiento de pivotamiento en el punto de contacto del carril izquierdo

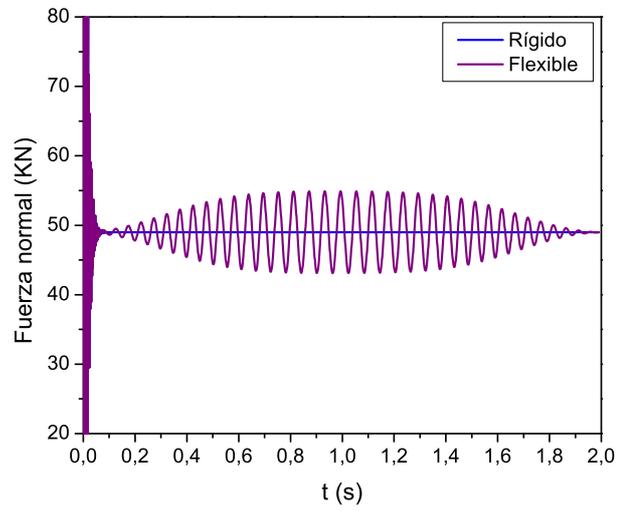


Figura 2.21: Fuerza normal en el punto de contacto del carril izquierdo

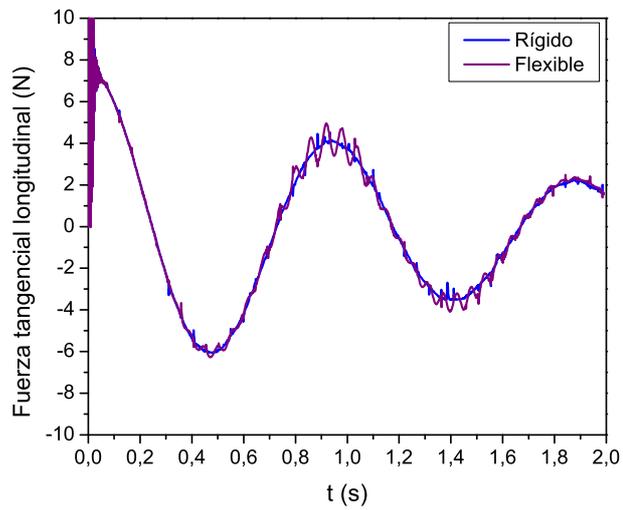


Figura 2.22: Fuerza tangencial longitudinal en el punto de contacto del carril izquierdo

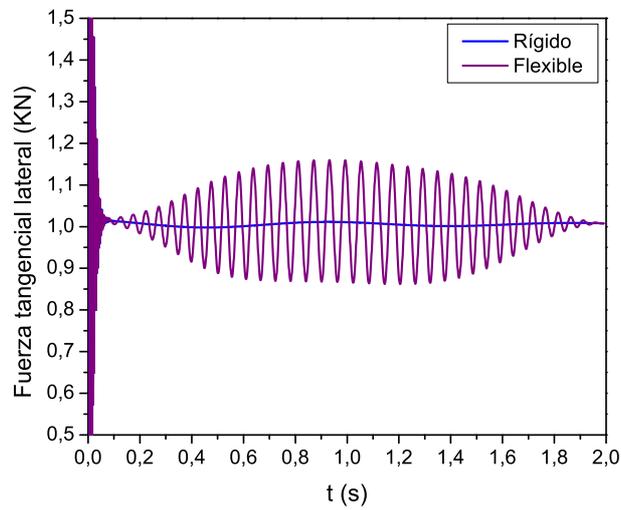


Figura 2.23: Fuerza tangencial lateral en el punto de contacto del carril izquierdo

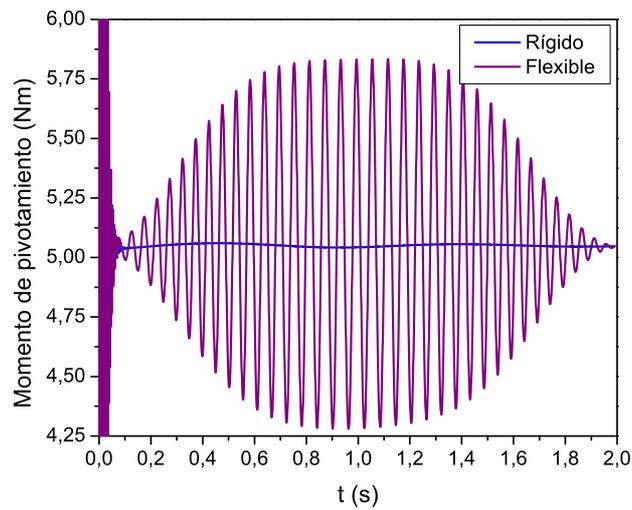


Figura 2.24: Momento de pivotamiento en el punto de contacto del carril izquierdo

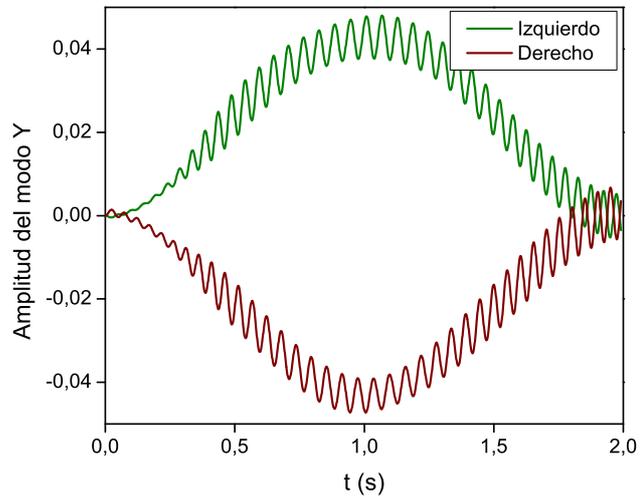


Figura 2.25: Amplitud del modo de flexión en el plano lateral

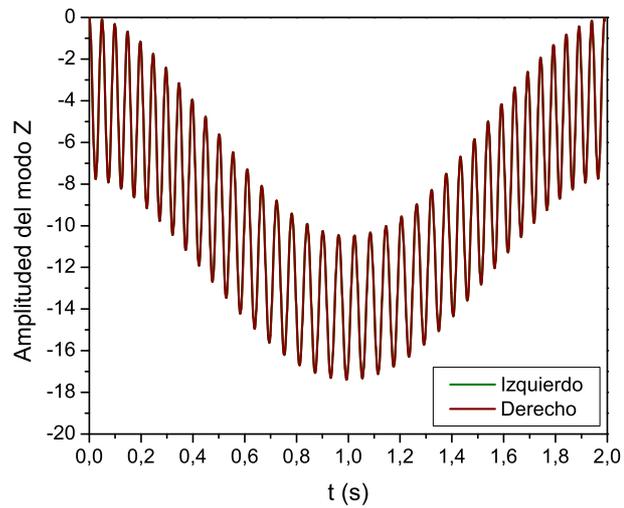


Figura 2.26: Amplitud del modo de flexión en el plano vertical

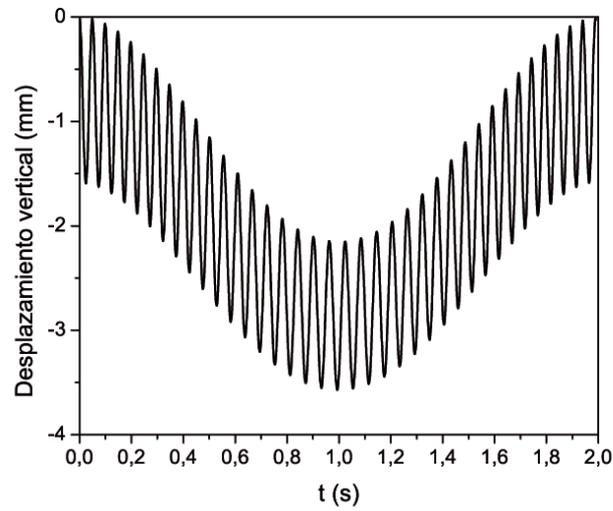


Figura 2.27: Desplazamiento vertical por deformación del nodo medio del carril flexible izquierdo

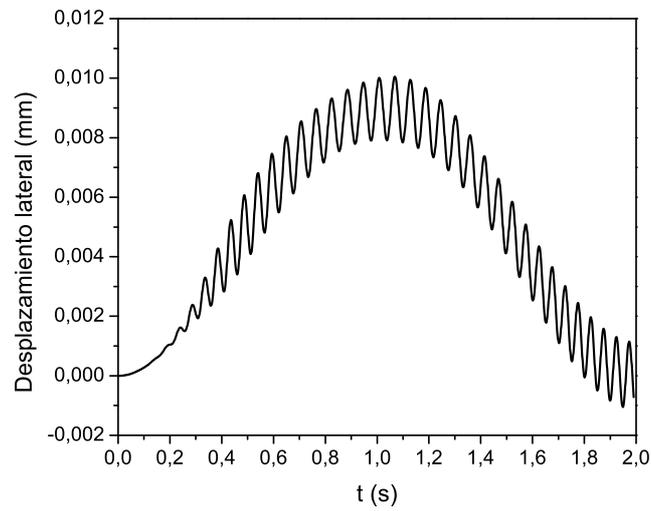


Figura 2.28: Desplazamiento lateral por deformación del nodo medio del carril flexible izquierdo

2.5 Validación del método

El objetivo de esta sección es examinar los resultados mostrados en la sección anterior y validar la formulación presentada en este capítulo. Para la validación, los resultados obtenidos con la nueva formulación se comparan con los resultados obtenidos con modelos simplificados. Se consideran dos modelos simplificados; el primero es el modelo de carga móvil que no considera los efectos de la inercia del vehículo, y el segundo modelo es el de la masa móvil, que sí considera el efecto de la inercia. A continuación se presentan ambos modelos simplificados.

2.5.1 Modelo de la carga móvil

En el Capítulo 1 se vio que la dinámica de las vías flexibles ha sido analizada en un elevado número de investigaciones resolviendo el problema clásico de la carga móvil. En este problema, el movimiento de un vehículo desplazándose sobre una vía flexible se simplifica considerando una carga, que representa el peso del vehículo, moviéndose sobre la vía con una velocidad constante V (ver Fig. 2.29). En este modelo se desprecian los efectos de la inercia del vehículo. El carril flexible se modela como una viga de Euler-Bernoulli sobre una base elástica de Winkler sometida a una carga móvil.

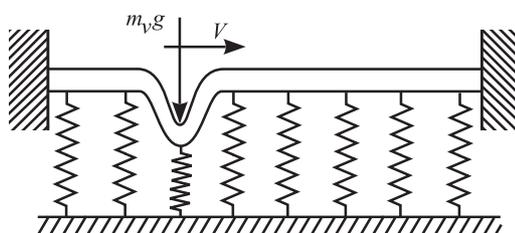


Figura 2.29: Carga móvil en una vía flexible sobre una base elástica

El problema de la carga móvil puede resolverse semi-analíticamente como se muestra a continuación:

Equilibrio de fuerzas y momentos

Sea una viga sometida a flexión. La Fig. 2.30 muestra el diagrama de sólido libre de una rebanada diferencial de la viga sometida a flexión y que se encuentra sobre una base elástica de rigidez vertical k , sujeta a una fuerza exterior por unidad de

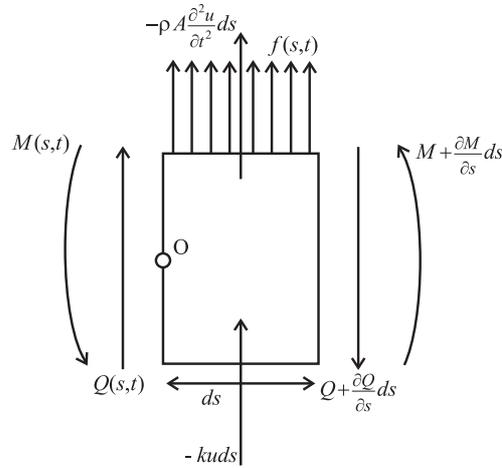


Figura 2.30: Porción diferencial de una viga

longitud $f = f(s, t)$, donde $M = M(s, t)$ es el momento flector y $Q = Q(s, t)$ el cortante, siendo s la longitud de arco a lo largo de la viga. Se desprecia la inercia de la rotación en el planteamiento de las ecuaciones de equilibrio. Haciendo equilibrio de fuerzas se obtiene lo siguiente:

$$Q - \left(Q + \frac{\partial Q}{\partial s} ds\right) - \rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} ds - kuds + f ds = 0. \quad (2.82)$$

Haciendo equilibrio de momentos, respecto a un eje perpendicular al plano dibujado pasando por el punto O, se obtiene lo siguiente:

$$-\left(Q + \frac{\partial Q}{\partial s} ds\right) ds - M + \left(M + \frac{\partial M}{\partial s} ds\right) - \rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} ds \frac{ds}{2} + f ds \frac{ds}{2} - kuds \frac{ds}{2} = 0 \quad (2.83)$$

donde ρ es la densidad del material, $A = A(s)$ la sección transversal que es función de s , y u es el desplazamiento por deformación de cualquier sección de la viga. Despreciando los términos de segundo orden queda lo siguiente:

$$Q = \frac{\partial M}{\partial s}. \quad (2.84)$$

Despreciando los términos de segundo orden en la ecuación (2.82), y teniendo en cuenta la ecuación (2.84), y que la relación entre el momento y el desplazamiento

por deformación viene dado por la siguiente expresión:

$$M = EI \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} \quad (2.85)$$

donde E es el módulo de elasticidad e I es el momento de inercia de la sección transversal, se llega a lo siguiente:

$$EI \frac{\partial^4 u}{\partial s^4} + \rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + ku = f. \quad (2.86)$$

Vibración libre

La ecuación anterior para el caso de vibración libre, es decir $f = 0$, puede resolverse aplicando separación de variables. Sea la ecuación de movimiento de la viga la siguiente:

$$EI \frac{\partial^4 u}{\partial s^4} + \rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + ku = 0. \quad (2.87)$$

Aplicando el método de separación de variables, en el que el desplazamiento vertical de la viga u se descompone en el producto de dos funciones, $\phi = \phi(s)$ y $q = q(t)$, dependientes de s y t , respectivamente:

$$u = \phi q \quad (2.88)$$

y sustituyendo (2.88) en (2.87) se llega a lo siguiente:

$$\frac{EI}{\rho A} \phi^{IV} q + \phi \ddot{q} + \frac{k}{\rho A} \phi q = 0. \quad (2.89)$$

Reescribiendo la ecuación anterior se obtiene lo que sigue:

$$\left(\frac{EI}{\rho A} \phi^{IV} + \frac{k}{\rho A} \phi \right) q = -\phi \ddot{q}, \quad (2.90)$$

$$-\frac{\ddot{q}}{q} = \frac{\left(\frac{EI}{\rho A} \phi^{IV} + \frac{k}{\rho A} \phi \right)}{\phi} = \omega^2. \quad (2.91)$$

El primer término de la ecuación anterior depende únicamente del tiempo t y el segundo término depende sólo de s por lo que al estar igualados deben ser igual a una constante ω^2 . De la ecuación anterior, por tanto, se obtienen las dos

siguientes ecuaciones:

$$-\frac{\ddot{q}}{q} = \omega^2, \quad (2.92)$$

$$\frac{EI}{\rho A} \phi^{IV} + \left(\frac{k}{\rho A} - \omega^2 \right) \phi = 0. \quad (2.93)$$

La solución general de (2.92) tiene la siguiente forma:

$$q = A_1 \text{sen}(\omega t) + A_2 \text{cos}(\omega t) \quad (2.94)$$

donde el valor de las constantes A_1 y A_2 se obtiene a partir de dos condiciones iniciales. La ecuación (2.93) puede expresarse de la siguiente forma:

$$\phi^{IV} + \left(\frac{k}{\rho A} - \omega^2 \right) \frac{\rho A}{EI} \phi = 0. \quad (2.95)$$

Ensayando en (2.95) una solución del tipo $\phi = Be^{rt}$ se obtienen cuatro raíces de la ecuación:

$$r_{1,2} = \pm \sqrt[4]{\left(\omega^2 - \frac{k}{\rho A} \right) \frac{\rho A}{EI}}, \quad r_{3,4} = \pm i \sqrt[4]{\left(\omega^2 - \frac{k}{\rho A} \right) \frac{\rho A}{EI}}. \quad (2.96)$$

La solución de la ecuación viene dada por:

$$\phi = B_1 \text{sen}(\eta x) + B_2 \text{cos}(\eta x) + B_3 \text{senh}(\eta x) + B_4 \text{cosh}(\eta x) \quad (2.97)$$

donde η viene dado por lo siguiente:

$$\eta = \sqrt[4]{\left(\omega^2 - \frac{k}{\rho A} \right) \frac{\rho A}{EI}} \quad (2.98)$$

y las constantes B_1 , B_2 , B_3 y B_4 se obtienen de las condiciones de contorno.

Suponiendo ahora condiciones empotrado-empotrado se obtiene:

$$\begin{aligned} \phi(0) &= 0, \\ \phi'(0) &= 0, \\ \phi(L) &= 0, \\ \phi'(L) &= 0 \end{aligned} \quad (2.99)$$

donde L es la longitud de la viga. Al imponer estas condiciones de contorno se obtiene la siguiente *ecuación característica* algebraica no lineal:

$$\cos(\eta L)\cosh(\eta L) - 1 = 0 \quad (2.100)$$

de cuya solución se obtienen los números de onda asociados a cada modo de vibración de la estructura y la ecuación de los modos, que resulta (una ecuación por modo de vibración):

$$\phi = (\sin(\eta s) - \sinh(\eta s)) - \frac{\sin(\eta L) - \sinh(\eta L)}{\cos(\eta L) - \cosh(\eta L)}(\cos(\eta s) - \cosh(\eta s)). \quad (2.101)$$

Resolviendo la ecuación característica (2.100) se obtiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} \eta_1 L &= 4.73, \\ \eta_2 L &= 7.85, \\ \eta_3 L &= 10.99, \\ &\dots \end{aligned} \quad (2.102)$$

Sustituyendo estos valores en la ecuación (2.101) obtenemos los modos de vibración para las distintas frecuencias. Las frecuencias naturales ω se obtienen de la ecuación (2.98) una vez que se conocen los números de onda η como sigue:

$$\omega = \sqrt{\eta^4 \frac{EI}{\rho A} + \frac{k}{\rho A}} \quad (2.103)$$

donde el segundo término dentro de la raíz cuadrada debe a la flexibilidad de la base elástica y es independiente del modo de vibración.

Ortogonalidad de los modos

Los modos de vibración representados con la ecuación (2.101) son ortogonales. La ortogonalidad de los modos se deduce a continuación. Considerando el modo de vibración ϕ_j la ecuación (2.93) queda como sigue:

$$\frac{EI}{\rho A} \phi_j^{IV} + \left(\frac{k}{\rho A} - \omega_j^2 \right) \phi_j = 0. \quad (2.104)$$

Multiplicando todos los términos de la ecuación anterior por el modo de vibración ϕ_k se llega a lo siguiente:

$$\frac{EI}{\rho A} \phi_j^{IV} \phi_k = \left(\omega_j^2 - \frac{k}{\rho A} \right) \phi_j \phi_k. \quad (2.105)$$

Integrando entre 0 y L y considerando constantes el módulo de elasticidad E y el área de la sección A se obtiene lo siguiente:

$$EI \int_0^L \phi_j^{IV} \phi_k ds = (\rho A \omega_j^2 - k) \int_0^L \phi_j \phi_k ds. \quad (2.106)$$

La integral de la izquierda de la ecuación anterior puede resolverse integrando por partes como sigue:

$$EI \int_0^L \phi_j^{IV} \phi_k ds = EI \phi_j''' \phi_k \Big|_0^L - EI \phi_j'' \phi_k' \Big|_0^L + \int_0^L EI \phi_j'' \phi_k'' ds. \quad (2.107)$$

Sustituyendo en la ecuación anterior las condiciones de contorno (2.99), la ecuación (2.106) queda como sigue:

$$EI \int_0^L \phi_j'' \phi_k'' ds = (\rho A \omega_j^2 - k) \int_0^L \phi_j \phi_k ds. \quad (2.108)$$

Siguiendo el mismo procedimiento, partiendo del modo ϕ_k correspondiente a la frecuencia natural ω_k , se obtiene lo siguiente:

$$EI \int_0^L \phi_j'' \phi_k'' ds = (\rho A \omega_k^2 - k) \int_0^L \phi_k \phi_j ds. \quad (2.109)$$

Restando las ecuaciones (2.108) y (2.109) se obtiene:

$$0 = \rho A (\omega_j^2 - \omega_k^2) \int_0^L \phi_k \phi_j ds. \quad (2.110)$$

Si $j \neq k$ la ecuación anterior lleva a lo siguiente:

$$\int_0^L \phi_k \phi_j ds = 0. \quad (2.111)$$

Por tanto, cuando $j \neq k$, la siguiente integral también es nula:

$$EI \int_0^L \phi_j'' \phi_k'' ds = 0. \quad (2.112)$$

La forma habitual de ortogonalidad de los modos de vibración viene dada por (2.111). Si $j = k$ se obtiene la siguiente relación:

$$\omega_j^2 = \frac{EI \int_0^L \phi_j''^2 ds}{\rho A \int_0^L \phi_j^2 ds} + \frac{k}{\rho A}. \quad (2.113)$$

Vibraciones forzadas

Se ha visto que la ecuación en derivadas parciales de una viga sometida a flexión viene dada por la ecuación (2.86). Considerando únicamente el modo ϕ_j , haciendo el cambio de variables $u = \phi q$, multiplicando por el modo ϕ_k e integrando entre 0 y L queda lo siguiente:

$$\rho A \int_0^L \phi_j \phi_k ds \ddot{q}_j + EI \int_0^L \phi_j^{IV} \phi_k ds q_j + k \int_0^L \phi_j \phi_k ds q_j = \int_0^L f \phi_k ds. \quad (2.114)$$

Por la propiedad de la ortogonalidad de los modos la ecuación anterior puede escribirse como sigue:

$$m_j \ddot{q}_j + k_j q_j = \int_0^L f \phi_j ds \quad (2.115)$$

donde $m_j = \rho A \int_0^L \phi_j^2 ds$ es la masa modal, $k_j = EI \int_0^L \phi_j''^2 ds + \frac{k}{\rho A} m_j$ la rigidez modal, y el término de la derecha de la ecuación es la fuerza modal. Es importante destacar que la rigidez modal k_j en este caso es diferente a la clásica de vigas ($k_j = EI \int_0^L \phi_j''^2 ds$) que se obtiene cuando no se considera la rigidez de la base elástica.

En el caso particular de que la fuerza $f = f(s, t)$ sea una carga móvil que se desplaza a la velocidad V debida al paso de un vehículo ferroviario de masa m_v , viene dada por la siguiente expresión:

$$f = -m_v g \delta(s - Vt) \quad (2.116)$$

donde δ es la delta de Dirac y g es la constante de gravedad. Las propiedades de

la delta de Dirac son las siguientes:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - x_0) dx = 0, \quad (2.117)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta(x - x_0) dx = f(x_0).$$

Considerando las ecuaciones (2.116) y (2.117) y teniendo en cuenta que los modos de vibración son funciones dependientes de la longitud de arco s , $\phi = \phi(s)$, el término de la derecha de la ecuación (2.115) queda como sigue:

$$\int_0^L f \phi_j(s) ds = -m_v g \phi_j(Vt). \quad (2.118)$$

El conjunto de ecuaciones diferenciales desacopladas (2.115), teniendo en cuenta (2.118), puede resolverse analíticamente de forma directa.

2.5.2 Modelo de la masa móvil

En la subsección anterior se ha presentado el modelo clásico de la carga móvil particularizada al caso de una viga de Winkler biempotrada, en el que el vehículo se modela como una carga constante en movimiento y no considera la inercia del mismo. En esta sección se presenta un segundo modelo clásico para validar los resultados obtenidos con la formulación presentada en este capítulo. Este segundo método sí considera la inercia del vehículo ferroviario.

Modelo del vehículo ferroviario

El vehículo se modela como un sólido rígido de masa m_v que se desplaza en la dirección longitudinal de la vía con velocidad V y que tiene un grado de libertad x_v en dirección vertical (ver Fig. 2.31).

Modelo del carril

El carril se modela como una viga de Euler-Bernoulli sobre una base de Winkler, obteniéndose las ecuaciones de movimiento en forma modal como se ha descrito en la subsección anterior para el modelo de la carga móvil. La diferencia de las ecuaciones del carril en ambos modelos se halla en la fuerza que soporta el carril.

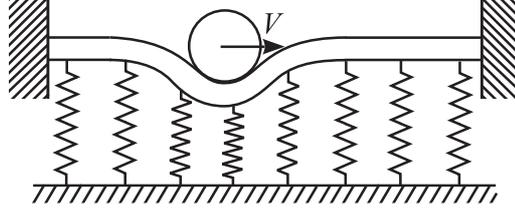


Figura 2.31: Masa móvil en una vía flexible sobre una base elástica

En este caso la fuerza directamente aplicada al carril no es el peso del vehículo sino que es la fuerza de contacto F_c que aparece entre la rueda y el carril.

Ecuaciones de movimiento

Las ecuaciones de movimiento del sistema son las siguientes:

$$\left. \begin{aligned} m_i \ddot{q}_i + k_i q_i &= F_c \phi_i(Vt), \quad i = 1, 2, 3, \dots \\ m_v \ddot{x}_v &= m_v g - F_c \end{aligned} \right\}. \quad (2.119)$$

donde se ha añadido un grado de libertad correspondiente a la posición vertical del centro de gravedad de la masa móvil. La fuerza de contacto $F_c = F_c(\delta, \dot{\delta})$ es evaluada en cada instante de tiempo con la misma expresión utilizada en la formulación propuesta (ecuación (2.40)), donde la indentación δ y la velocidad de indentación $\dot{\delta}$, respectivamente, se calculan como sigue:

$$\begin{aligned} \delta(t) &= x_v - \sum_i \phi_i(Vt) q_i(t), \\ \dot{\delta}(t) &= \dot{x}_v - \sum_i \phi_i(Vt) \dot{q}_i(t) - \sum_i \dot{\phi}_i(Vt) q_i(t). \end{aligned} \quad (2.120)$$

La Fig. 2.32 muestra la indentación entre rueda y carril.

2.5.3 Modelos computacionales utilizados en la validación

En esta subsección se presentan las características de los tres modelos del sistema vehículo-vía que se comparan en la validación. Los modelos del sistema vehículo-vía son los siguientes:

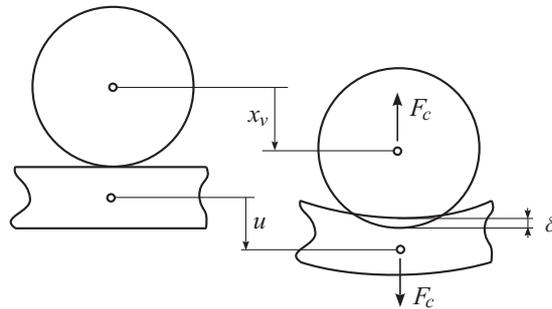


Figura 2.32: Fuerza de contacto rueda-carril

1. El *modelo de sistema multicuerpo*, basado en la nueva formulación de sistemas multicuerpo que se describe en este capítulo y que se pretende validar. Se utiliza el vehículo y la vía descritos en la Sección 2.4. La única diferencia es que no se aplica una velocidad lateral inicial, como se hizo en los resultados que se muestran en dicha sección.
2. El *modelo de la carga móvil*, descrito en la Sección 2.5.1, en el que no se tiene en cuenta el efecto de la inercia del vehículo. La carga móvil correspondiente al peso del vehículo sobre un carril se asume de 49000 N. La longitud L de la vía se asume de 60 m, las propiedades de rigidez se asumen con un valor $EI = 1009 \text{ KNm}^2$ y las propiedades de inercia $\rho A = 16.6 \text{ kg/m}$. El coeficiente de rigidez k de la base elástica varía en las distintas simulaciones.
3. El *modelo de la masa móvil*, descrito en la Sección 2.5.2, en el que se considera el efecto de la inercia del vehículo y las fuerzas no lineales de contacto. Las características de la vía se asumen iguales que en el caso de la masa móvil. El sólido rígido que representa la masa móvil se asume que presenta un radio de curvatura $R = 0.456 \text{ m}$ en la vecindad del punto de contacto, de masa $m_v = 1568/2 \text{ kg}$ (se asume una masa correspondiente a la mitad de la masa del eje ferroviario con suspensiones del modelo multicuerpo). Para el cálculo de la fuerza normal de contacto se asumen una constante elástica $K_h = 3e11 \text{ N/m}^{3/2}$ y una constante de rigidez $C_h = 6.5e10 \text{ Ns/m}^2$. El valor de K_h y C_h se calculan en cada instante de tiempo en las simulaciones del modelo multicuerpo; el valor medio obtenido es el que se asume constante en el modelo simplificado de la masa móvil.

En los tres modelos se utiliza el método de síntesis modal para la descripción de la deformación de la vía. En el modelo multicuerpo los modos de vibración se obtienen del programa de elementos finitos realizando un análisis modal de la estructura, como se ha descrito previamente en este capítulo, y en los modelos de la carga y masa móvil el procedimiento para la obtención de los modos de vibración es semi-analítico, como se ha descrito en la Sección 2.5.1. En el modelo multicuerpo no se considera acoplamiento entre los dos carriles, lo que permite comparar los resultados con los otros dos modelos, en los que únicamente se representa uno de los carriles.

2.5.4 Convergencia del método de reducción modal

Los resultados mostrados de la aplicación del método propuesto en este capítulo se ha mencionado previamente que se han obtenido sin el estudio previo de la convergencia del método de reducción modal, utilizando únicamente cuatro modos de vibración (dos modos por carril, uno en dirección vertical y uno en dirección lateral). En esta sección se estudia la convergencia para considerar el número de modos adecuados en las simulaciones. La rigidez de la base elástica se asume que es $k = 1 \text{ MN/m}^2$. Se realizan dos tipos de análisis en el estudio, uno estático y otro dinámico. Este estudio de la convergencia, tanto estático como dinámico, se realiza con los modos del modelo continuo (viga de Euler Bernouilli sobre base de Winkler), utilizándose además un modelo de elementos finitos en el análisis estático. Ambos estudios permitirán concluir cuántos modos son necesarios para alcanzar la convergencia, y en subsecciones siguientes se aplicarán dichas conclusiones al método presentado en este capítulo.

Análisis estático

En primer lugar se realiza un análisis estático, considerando únicamente el peso propio del carril, utilizando los dos modelos de vía siguientes:

- *Modelo de elementos finitos.* Con el programa comercial de elementos finitos ANSYS y usando el mismo modelo de vía descrito en la Subsección 2.4.2, cuyas propiedades se muestran en la Tabla 2.1, se obtiene la deformada estática de un carril considerando únicamente su peso propio.
- *Modelo de Euler – Bernouilli.* El resultado obtenido con el modelo de elementos finitos se compara con la deformada estática del carril obtenida

con el método semi-analítico descrito en la Subsección 2.5.1. Las coordenadas modales \mathbf{q}_j se obtienen de la ecuación (2.115) considerando que en el análisis estático las aceleraciones $\ddot{\mathbf{q}}_j$ son nulas y que la fuerza que soporta la vía es la correspondiente a su propio peso. Se calculan como sigue:

$$\mathbf{q}_j = \frac{-\rho ALg \int_0^L \phi_j ds}{k_j} \quad (2.121)$$

con $j = 1, 2, \dots, n$, siendo n el número de modos utilizados en la síntesis modal.

La Fig. 2.33 muestra el resultado utilizando los dos modelos, el de elementos finitos sin reducción modal y el continuo de Euler-Bernoulli. Se considera que la deformada estática obtenida con el programa de elementos finitos sin reducción modal es la solución de referencia. Utilizando síntesis modal se muestran los resultados para 1, 10 y 30 modos (pueden usarse aún más modos si fuese necesario). Se puede ver que la solución estática con 30 modos acuerda bastante bien con la obtenida con elementos finitos.

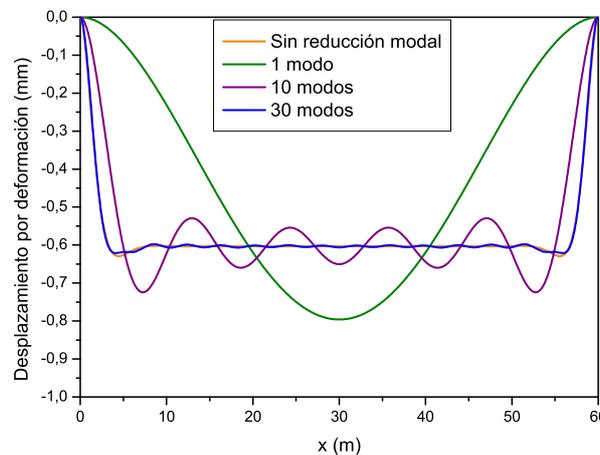


Figura 2.33: Desplazamiento por deformación del carril debido a su propio peso en el análisis estático

Se realiza un segundo análisis estático considerando, además del peso propio del carril, el peso correspondiente a la mitad vehículo (49000 N) posicionado en el punto medio del carril. La Fig. 2.34 muestra los resultados obtenidos. Puede

observarse que se necesitan al menos 30 modos utilizando el método semi-analítico para alcanzar un nivel de convergencia aceptable.

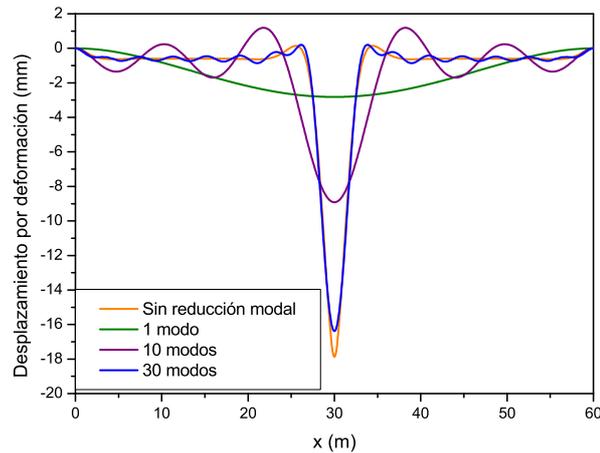


Figura 2.34: Desplazamiento por deformación del carril considerando el peso propio y el del vehículo en el punto medio en el análisis estático

Análisis dinámico

El análisis estático ha permitido concluir que es necesario considerar al menos 30 modos en dirección vertical para cada carril al utilizar la síntesis modal. En esta subsección se muestran resultados al realizar un análisis dinámico aplicando el método de la carga móvil utilizando distinto número de modos. La Fig. 2.35 muestra el desplazamiento por deformación del punto medio del carril cuando este es recorrido por una carga que viaja a una velocidad $V = 30$ m/s utilizando el método de la carga móvil. De los resultados obtenidos en la Fig. 2.35 puede concluirse que la carga dinámica afecta a una pequeña zona junto al punto de aplicación de la carga.

La Fig. 2.36 muestra el desplazamiento por deformación del punto del carril donde está aplicada la carga en cada instante cuando se utiliza el modelo de la carga móvil y el de la masa móvil. En ambas simulaciones se han utilizado 30 modos de flexión. La velocidad de avance se asume $V = 30$ m/s también en este caso. Utilizando el modelo de la masa móvil aparecen unas oscilaciones verticales que no aparecen en el modelo de la carga móvil. En siguientes subsecciones se realizará un estudio para conocer el origen de estas oscilaciones. Los resultados

también muestran que el desplazamiento por deformación del carril es de 17 mm en el caso de la carga móvil y oscila en torno a un valor nominal de 17 mm en el caso de la masa móvil. Este valor es independiente del punto de aplicación de la carga cuando nos alejamos de los contornos.

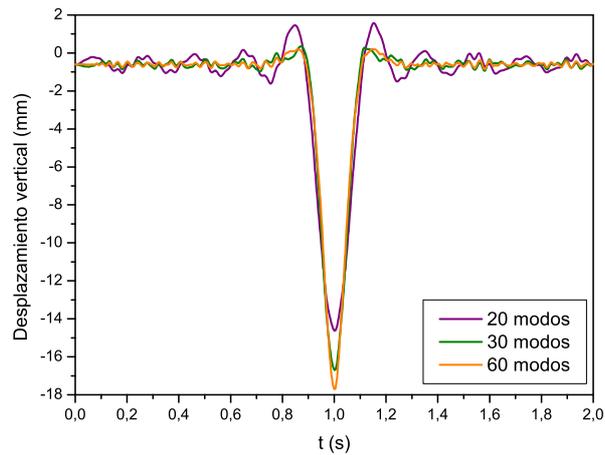


Figura 2.35: Desplazamiento por deformación del punto medio del carril en el análisis dinámico

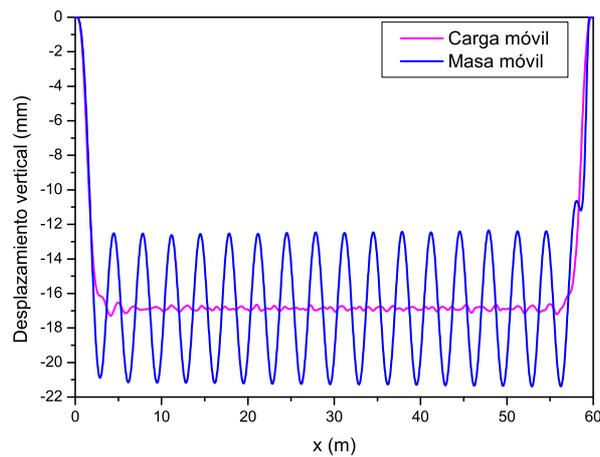


Figura 2.36: Desplazamiento vertical del punto de aplicación de la carga (comparable al desplazamiento vertical del centro de masa del eje ferroviario en el modelo multicuerpo)

Conclusiones de los estudios estático y dinámico

Los estudios estático y dinámico realizados llevan a las siguientes conclusiones:

1. Se necesita un elevado número de modos para alcanzar la convergencia, al menos 30 en el caso considerado.
2. El efecto de las condiciones de contorno de la vía, empotrados ambos carriles artificialmente en este caso, es despreciable cuando la carga se aplica un poco alejada de los extremos.
3. Al aplicar el modelo de la masa móvil aparece una frecuencia de oscilación en la dinámica vertical. El origen de esta frecuencia será objeto de estudio en análisis que se muestran en siguientes subsecciones.

2.5.5 Resultados de la validación del modelo multicuerpo

El análisis de la convergencia de los resultados permitió concluir que es necesario considerar unos 30 modos de vibración por dirección y carril al aplicar síntesis modal. Al realizar el análisis modal en ANSYS al modelo de vía de elementos finitos descrito en la Subsección 2.4.2, donde el coeficiente de rigidez de la base elástica se asume $k = 1 \text{ MN/m}^2$, es posible extraer únicamente 29 modos de flexión desacoplados de otros tipos de modos. Al realizar el análisis modal asumiendo una rigidez de la base elástica de $k = 10 \text{ MN/m}^2$, el número de modos extraídos es de 28, y al asumir $k = 100 \text{ MN/m}^2$ se pueden extraer de ANSYS 25 modos de flexión desacoplados. Por tanto, el número total de modos considerados para estudiar la dinámica vertical y lateral de cada carril es de 29×4 para $k = 1 \text{ MN/m}^2$, 28×4 para $k = 10 \text{ MN/m}^2$ y 25×4 para $k = 100 \text{ MN/m}^2$. En los resultados mostrados anteriormente en la Subsección 2.4.4 se utilizaron 4 modos de vibración en total (el primer modo de flexión en dirección vertical y lateral para cada carril).

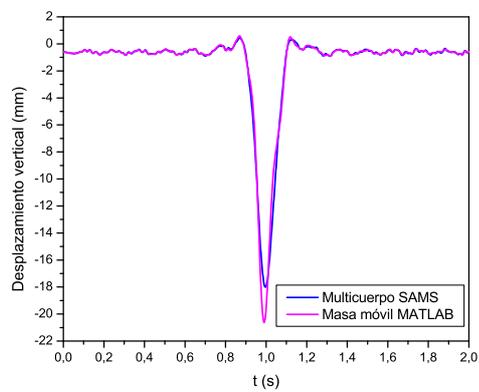
En lo que sigue se presentan resultados del desplazamiento vertical por deformación del punto medio del carril obtenidos con la nueva formulación, que pueden ser comparados con el modelo de carga móvil y con el de masa móvil; y resultados de la fuerza normal de contacto en la banda de rodadura, que puede compararse con el modelo de la masa móvil únicamente.

Desplazamiento vertical del punto medio del carril

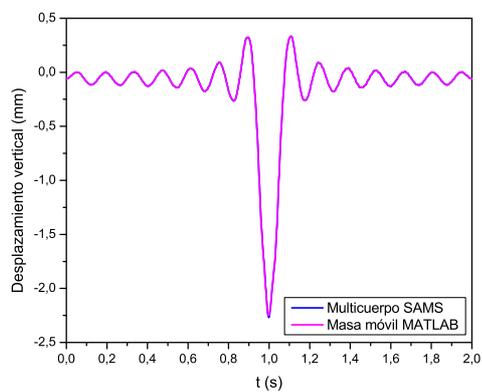
La Fig. 2.37 muestra la deformación dinámica del punto medio de uno de los carriles cuando el vehículo se desplaza con una velocidad de avance de 30 m/s para tres coeficientes distintos de la base elástica. Se comparan en la figura el modelo multicuerpo y el de la masa móvil. Como se ha mencionado previamente, en el modelo multicuerpo se consideran 29×4 , 28×4 y 25×4 modos, respectivamente. En el modelo de la carga móvil se consideran 29, 28 y 25 modos, respectivamente, para un carril en dirección vertical. Los resultados muestran buen acuerdo. La mayor diferencia entre ambos modelos aparece cuando el vehículo alcanza el punto medio del carril en el caso de la base más flexible. En la figura correspondiente al coeficiente de rigidez $k = 100 \text{ MN/m}^2$ aparece una diferencia en la amplitud de las oscilaciones en ambos modelos. Un posible origen de esta discrepancia puede hallarse en la discretización mediante elementos finitos de la vía en el modelo multicuerpo, siendo continua en el modelo de la masa móvil. Para comprobar si puede ser este el motivo se realiza en SAMS2000 una simulación aplicando la nueva formulación considerando una carga móvil, en lugar del eje ferroviario con suspensión. Los resultados mostrados en la Fig. 2.38 comparan una carga móvil en SAMS2000 con el modelo de la carga móvil, para tres coeficientes diferentes de la base elástica, de forma que se tiene un modelo discreto y uno continuo igualmente, y al ser una carga móvil no se considera la inercia del vehículo en ninguno de los dos modelos. Puede apreciarse que aparece la misma discrepancia para el coeficiente de rigidez $k = 100 \text{ MN/m}^2$, pudiendo concluirse que la discrepancia en la amplitud de las oscilaciones se debe a la discretización que se realiza en el modelo de la vía en SAMS2000.

Fuerza normal de contacto en la banda de rodadura

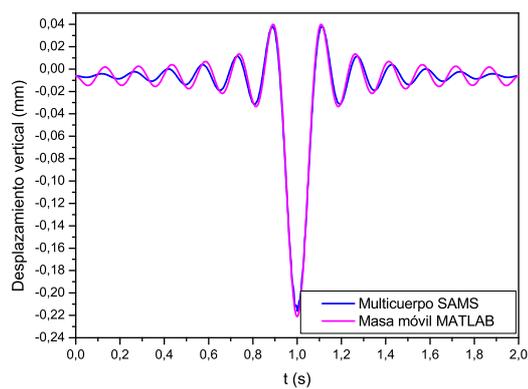
La Fig. 2.39 muestra la fuerza normal de contacto rueda-carril en la banda de rodadura. Se muestran resultados del modelo multicuerpo para diferentes valores de rigidez de la base elástica cuando la velocidad de avance del vehículo es 30 m/s. Pueden observarse oscilaciones para los tres coeficientes de rigidez, siendo de gran amplitud las oscilaciones cuando la rigidez de la base elástica es baja. La frecuencia de oscilación que se aprecia es, aproximadamente, 9 Hz, 23 Hz y 78 Hz, correspondientes a $k = 1$, 10 y 100 MN/m^2 , respectivamente. La frecuencia de 9 Hz apareció también en la Fig. 2.36 relativa al modelo de la masa móvil.



(a)

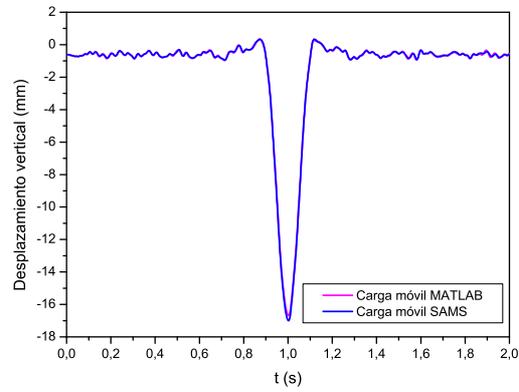


(b)

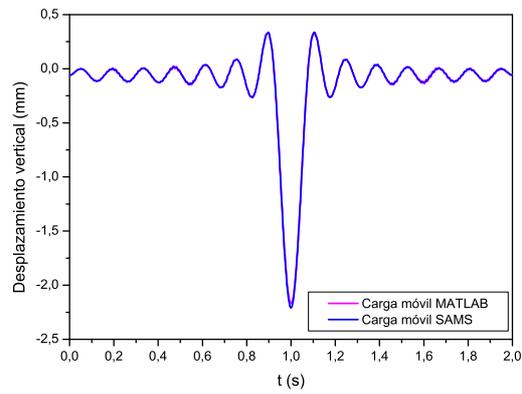


(c)

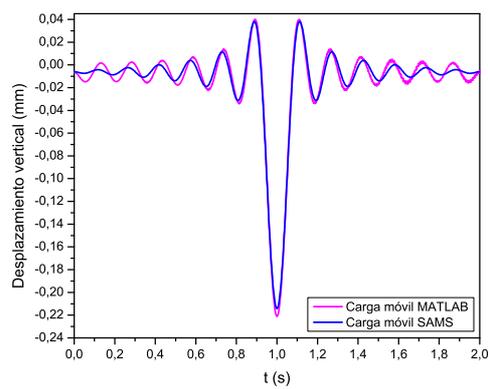
Figura 2.37: Desplazamiento por deformación del punto medio del carril; (a) $k=1\text{MN/m}^2$; (b) $k=10\text{MN/m}^2$; (c) $k=100\text{MN/m}^2$



(a)



(b)



(c)

Figura 2.38: Desplazamiento por deformación del punto medio del carril; (a) $k=1\text{MN/m}^2$; (b) $k=10\text{MN/m}^2$; (c) $k=100\text{MN/m}^2$

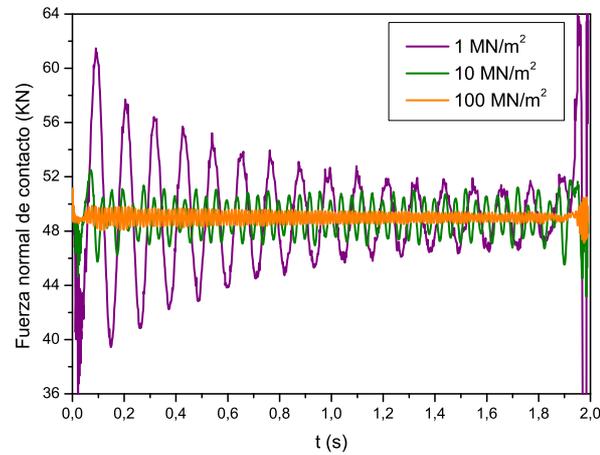


Figura 2.39: Fuerza normal de contacto para diferentes coeficientes de rigidez de la base elástica con el modelo multicuerpo

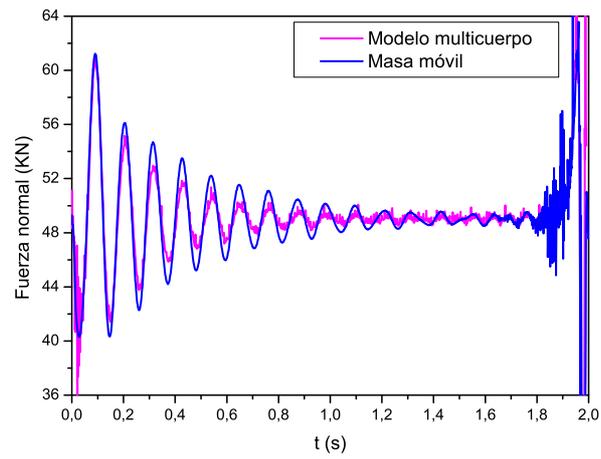
Como se ha comentado previamente, se realiza posteriormente un análisis para conocer el origen de estas frecuencias.

La Fig. 2.40 muestra la fuerza normal de contacto comparando el modelo multicuerpo y el de la masa móvil. Los resultados corresponden a una rigidez de la base elástica de $k = 1 \text{ MN/m}^2$ y se muestran resultados para diferentes valores del factor de amortiguamiento modal ζ . Se observa que las oscilaciones que aparecen en la fuerza normal de contacto en el caso del modelo multicuerpo aparecen también en el modelo de la masa móvil y que un elevado valor de ζ es necesario para amortiguar las oscilaciones, aunque no llegan a amortiguarse totalmente.

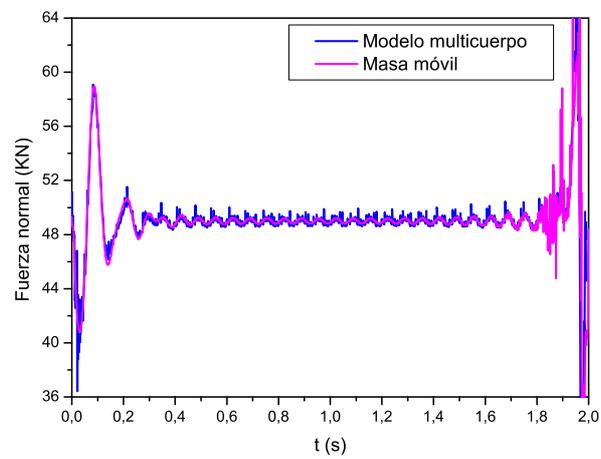
2.5.6 Análisis de las oscilaciones verticales que aparecen en la fuerza normal de contacto

Las posibles frecuencias que pueden aparecer en los resultados de la dinámica vertical en el caso simulado son las siguientes:

1. *Frecuencias naturales de la vía.* La primera frecuencia natural de la vía para $k = 1, 10$ y 100 MN/m^2 son 20, 64 y 200 Hz, respectivamente. Por tanto, no deben ser el origen de la frecuencia que aparece en la fuerza de contacto y en el desplazamiento vertical del eje.



(a)



(b)

Figura 2.40: Efecto del amortiguamiento del carril en la fuerza normal de contacto para $k = 1 \text{ MN/m}^2$, (a) $\zeta = 0.1$; (b) $\zeta = 0.5$

2. *Frecuencia de Hertz.* Esta es la frecuencia que aparece en el contacto rueda-carril hasta que se alcanza la posición de equilibrio estacionario. Una forma aproximada de calcular dicha frecuencia es linealizando la ecuación del movimiento vertical en torno a dicha posición de equilibrio estacionario. Considerando que la fuerza de contacto viene dada por $F_n = K_h \delta^{3/2}$, la ecuación de movimiento de la masa móvil en dirección vertical es la siguiente:

$$m\ddot{x} + K_h x^{3/2} = F \quad (2.122)$$

donde x es la posición vertical y F es la fuerza exterior que se aplica, correspondiente al peso del vehículo ($F = 49000$ N). Considerando una masa $m = 1568/2$ kg y una constante de Hertz $K_h = 3e11$ N/m^{3/2}, la posición de equilibrio estacionario x_{eq} viene dada por:

$$x_{eq} = \left(\frac{F}{K_h} \right)^{2/3}. \quad (2.123)$$

Considerando la función f como sigue:

$$f = m\ddot{x} + K_h x^{3/2} - F \quad (2.124)$$

y linealizándola en torno al punto de equilibrio como se muestra a continuación:

$$\left. \frac{\partial f}{\partial \ddot{x}} \right|_{eq} \ddot{x} + \left. \frac{\partial f}{\partial \dot{x}} \right|_{eq} \dot{x} + \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{eq} (x - x_{eq}) = 0 \quad (2.125)$$

donde el subíndice eq indica que la función se evalúa en el punto de equilibrio, se llega a lo siguiente:

$$m\ddot{x} + \left. \frac{3}{2} K_h x^{1/2} \right|_{eq} (x - x_{eq}) = 0. \quad (2.126)$$

La frecuencia natural se obtiene como sigue:

$$\omega_n^2 = \frac{\frac{3}{2} K_h x_{eq}^{1/2}}{m}. \quad (2.127)$$

Con los datos del modelo utilizados la frecuencia natural de Hertz tiene un valor aproximado de 282 Hz, siendo muy superior a las frecuencias buscadas.

3. *Frecuencia del sistema eje ferroviario-vía.* Esta frecuencia podría ser la que aparece en la fuerza de contacto y en el desplazamiento vertical del eje ferroviario. En el siguiente capítulo se realiza un análisis de autovalores donde se confirma.

2.5.7 Análisis de estabilidad

En esta subsección se presenta un análisis de la estabilidad lateral del eje ferroviario descrito en la Sección 2.4.3 y mostrado en la Fig. 2.14. Se comparan los resultados obtenidos sobre una vía rígida y flexible. La vía flexible es modelada con la formulación presentada en este capítulo. Previo a la aplicación del método se realiza un análisis de autovalores del eje ferroviario sobre una vía rígida y se obtiene el valor de la velocidad crítica lineal de dicho eje. Es importante mencionar que el estudio de la estabilidad mediante autovalores tiene la limitación de que no permite conocer la velocidad crítica real del vehículo, que viene dada por la velocidad crítica no lineal (True, 1999), y que es menor que la lineal.

Análisis de autovalores para el estudio de la estabilidad lateral del eje suspendido sobre una vía rígida

Las ecuaciones de movimiento del sistema vienen dadas por lo siguiente:

$$\mathbf{M}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}(\mathbf{q})\mathbf{q} = \mathbf{Q}_v(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + \mathbf{Q}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \quad (2.128)$$

donde \mathbf{M} , \mathbf{C} , \mathbf{K} son las matrices de masa, amortiguamiento y rigidez del sistema; \mathbf{Q}_v es el vector de fuerzas de inercia cuadráticas en velocidad, y \mathbf{Q} son las fuerzas generalizadas aplicadas que incluyen las fuerzas de contacto rueda-carril (Shabana, 1994).

Un análisis de estabilidad de un sistema dinámico se realiza analizando los autovalores obtenidos de las correspondientes ecuaciones de movimiento linealizadas en torno a un punto de equilibrio. En el capítulo siguiente se detalla el cálculo de las fuerzas de contacto en el modelo lineal. El sistema de ecuaciones (2.128) puede escribirse de la siguiente forma:

$$\mathbf{f}(\ddot{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q}) = \mathbf{0}. \quad (2.129)$$

Aplicando las series de Taylor las ecuaciones de movimiento pueden escribirse

como sigue:

$$\begin{aligned} \mathbf{f}(\ddot{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q}) &= \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \ddot{\mathbf{q}}} \right|_{eq} (\ddot{\mathbf{q}} - \ddot{\mathbf{q}}_{eq}) + \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right|_{eq} (\dot{\mathbf{q}} - \dot{\mathbf{q}}_{eq}) + \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{q}} \right|_{eq} (\mathbf{q} - \mathbf{q}_{eq}) \\ &+ H.O.T. = \mathbf{0} \end{aligned} \quad (2.130)$$

donde el subíndice eq en la derivada parcial significa que la derivada se evalúa en la posición de equilibrio. Despreciando los términos de orden superior (H.O.T.) se obtienen las ecuaciones de movimiento linealizadas. Las derivadas parciales de (2.130) dan lugar a los términos que se muestran a continuación:

$$\left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \ddot{\mathbf{q}}} \right|_{eq} = \tilde{\mathbf{M}}, \quad \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right|_{eq} = \tilde{\mathbf{C}}, \quad \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{q}} \right|_{eq} = \tilde{\mathbf{K}} \quad (2.131)$$

donde $\tilde{\mathbf{M}}$, $\tilde{\mathbf{C}}$ y $\tilde{\mathbf{K}}$ son las matrices de masa, amortiguamiento y rigidez generalizadas del sistema, respectivamente, y pueden calcularse de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{M}} &= \mathbf{M}(\mathbf{q}_{eq}), \\ \tilde{\mathbf{C}} &= \mathbf{C}(\mathbf{q}_{eq}) - \left. \frac{\partial \mathbf{Q}_v}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right|_{eq} - \left. \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right|_{eq}, \\ \tilde{\mathbf{K}} &= \left. \frac{\partial (\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}})}{\partial \mathbf{q}} \right|_{eq} + \left. \frac{\partial (\mathbf{C}\dot{\mathbf{q}})}{\partial \mathbf{q}} \right|_{eq} + \left. \frac{\partial (\mathbf{K}\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} \right|_{eq} - \left. \frac{\partial \mathbf{Q}_v}{\partial \mathbf{q}} \right|_{eq} - \left. \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial \mathbf{q}} \right|_{eq}. \end{aligned} \quad (2.132)$$

Teniendo en cuenta (2.131) y (2.132), la ecuación (2.130) puede escribirse como sigue:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \tilde{\mathbf{M}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}} - \dot{\mathbf{q}}_{eq} \\ \ddot{\mathbf{q}} - \ddot{\mathbf{q}}_{eq} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\tilde{\mathbf{K}} & -\tilde{\mathbf{C}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{q} - \mathbf{q}_{eq} \\ \dot{\mathbf{q}} - \dot{\mathbf{q}}_{eq} \end{bmatrix}. \quad (2.133)$$

El nuevo vector de variables \mathbf{y} se define como se muestra a continuación:

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} \mathbf{q} - \mathbf{q}_{eq} \\ \dot{\mathbf{q}} - \dot{\mathbf{q}}_{eq} \end{bmatrix}. \quad (2.134)$$

La ecuaciones (2.133), transformando el sistema de ecuaciones diferenciales de

segundo orden en un sistema de primer orden, pueden reescribirse como sigue:

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{A}\mathbf{y} \quad (2.135)$$

donde la matriz \mathbf{A} viene dada por lo siguiente:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} & -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{C} \end{bmatrix}. \quad (2.136)$$

El cálculo de los autovalores de la matriz \mathbf{A} permite el estudio de la estabilidad del sistema. Cuando se estudia la estabilidad de un sistema mecánico con n coordenadas aparecen $2n$ autovalores. Para que el sistema sea estable, todos los autovalores deben tener la parte real negativa (si la parte real es nula, no se puede concluir si el sistema es estable, sino que se requiere un análisis no-lineal). Si los autovalores son complejos, entonces el sistema oscilará en torno a la posición de equilibrio, siendo la parte imaginaria del autovalor la frecuencia de oscilación amortiguada ω_d ($\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}$, donde ω_n es la frecuencia natural del sistema y ζ el factor de amortiguamiento). La parte real del autovalor se corresponde con $\zeta\omega_n$ (Shabana, 1991).

En el caso del eje ferroviario de la Fig. 2.14, para el estudio de la dinámica lateral se consideran 2 coordenadas (desplazamiento lateral y y ángulo de lazo θ del eje). Se linealizan las ecuaciones de movimiento en torno a la posición de equilibrio siguiente:

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_{eq} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}^T, \\ \dot{\mathbf{q}}_{eq} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}^T. \end{aligned} \quad (2.137)$$

Partiendo de las ecuaciones de Lagrange y mediante cálculo simbólico se obtienen las siguientes matrices, que se calculan según (2.132):

$$\tilde{\mathbf{M}} = \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}, \quad (2.138)$$

$$\tilde{\mathbf{C}} = \begin{bmatrix} 2c_3 + \frac{2f}{V} & 0 \\ 0 & 2c_1a^2 + \frac{2fb^2}{V} \end{bmatrix}, \quad (2.139)$$

$$\tilde{\mathbf{K}} = \begin{bmatrix} 2k_3 & -2f \\ \frac{2\lambda fb}{r} & 2k_1 a^2 \end{bmatrix} \quad (2.140)$$

donde m e I son la masa y el momento de inercia de lazo del eje, k_1 y c_1 son la rigidez y el coeficiente de amortiguamiento, respectivamente, de las suspensiones longitudinales, k_3 y c_3 son la rigidez y el coeficiente de amortiguamiento, respectivamente, de las suspensiones transversales, a es la distancia desde el centro del eje al punto donde conectan las suspensiones con el eje y b es la distancia lateral entre el centro del eje y el punto de contacto en la rueda cuando el eje está centrado en la vía, f es el coeficiente de creep (se asume que los coeficientes lineales de Kalker tienen los siguientes valores: $f_{11} = f_{22} = f$, $f_{23} = f_{33} = 0$), λ es la conicidad de la rueda, r es el radio de rodadura cuando el eje está centrado en la vía, y V la velocidad de avance del eje. Los valores de estas variables son los considerados en las Tablas 2.2 y 2.3. El resto de valores no especificados previamente se asume que son los siguientes: $a = 0.9$ m, $b = 0.7033$ m, $f = 7840000$ (Zaazaa, 2003), $\lambda = 1/40$ y $r = 0.456$ m. La longitud indeformada de los muelles se asume 0.1 m.

Calculando los autovalores del sistema, modificando la velocidad de avance V , se identifica la velocidad crítica lineal a partir de la cual el sistema es inestable. La Tabla 2.4 muestra los autovalores correspondientes a varias velocidades.

Tabla 2.4: Autovalores para el eje con suspensiones sobre una vía recta rígida

V=10m/s	V=30m/s	V=120m/s	V=121m/s
-1.4e3	-6.4e2	-3.4e2	-3.4e2
-1e3	-3.3e2	-0.8e2	-0.8e2
-0.3±2.5i	-0.6±6.6i	-2e-2±17.8i	1e-2±17.9i

Para las velocidades $V = 10, 30$ y 120 m/s, el sistema es estable, ya que todos los autovalores tienen parte real negativa. La velocidad crítica lineal es $V = 120$ m/s; superando esta velocidad aparece un autovalor con parte real positiva. La parte imaginaria de los autovalores complejos da la frecuencia de oscilación de lazo en radianes por segundo. La Tabla 2.5 muestra las frecuencias de lazo correspondientes a las velocidades mostradas en la Tabla 2.4 en Hz.

La Tabla 2.6 muestra la comparación del amortiguamiento del desplazamiento lateral y de la frecuencia de oscilación del mismo calculados analíticamente, mediante el cálculo de autovalores descrito en esta sección, y numéricamente, con

los datos representados en la Fig. 2.15 ($\zeta\omega_n$ se calcula mediante el decremento logarítmico (Shabana, 1991)), para una velocidad de avance $V = 30$ m/s.

Tabla 2.5: Frecuencias de oscilación de lazo

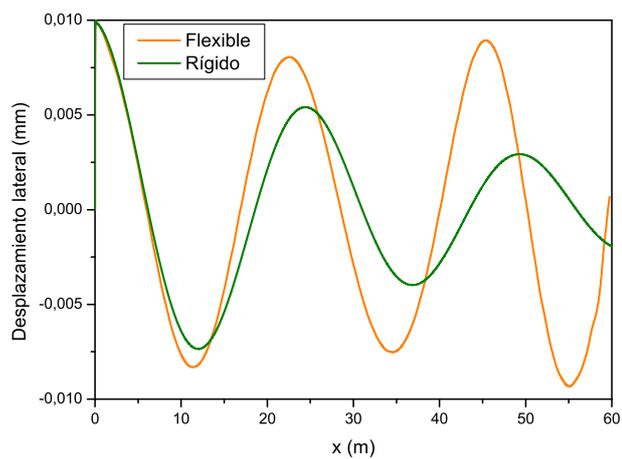
V (m/s)	10	30	120	121
Frec (Hz)	0.40	1.05	2.83	2.85

Tabla 2.6: Comparación de la frecuencia y amortiguamiento del movimiento de lazo analítico y numérico

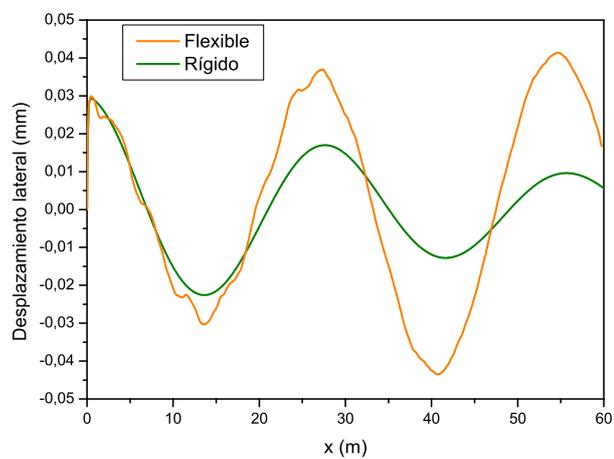
V = 30 m/s	$\zeta\omega_n$ (rad/s)	ω_d (Hz)
Analítico	0.6408	1.05
Numérico	0.6042	1.08

Estabilidad lateral sobre vías flexibles

Las Fig. 2.41 y 2.42 muestran el efecto de la flexibilidad de la vía en la dinámica lateral del modelo multicuerpo. En estas figuras se compara el desplazamiento lateral del eje ferroviario sobre una vía rígida y sobre una vía flexible. Para que el eje presente oscilaciones en su desplazamiento lateral, se le aplica inicialmente una velocidad lateral de 0.01 m/s. La Fig. 2.41 muestra el desplazamiento lateral del eje cuando la velocidad de avance es de 10 m/s y 30 m/s, respectivamente, para una rigidez de la base de $k = 1$ MN/m² (muy flexible). Se utilizan 29 modos en dirección vertical y lateral para cada carril (116 modos en total). Puede observarse que el eje ferroviario, que es estable al moverse sobre una vía rígida, presenta inestabilidad lateral al moverse sobre una vía flexible. Es más, la frecuencia de oscilación aumenta al desplazarse sobre una vía flexible. La Fig. 2.42 muestra el desplazamiento lateral del eje ferroviario a 10 m/s y 30 m/s, en el caso de rigidez de la base elástica de $k = 10$ MN/m² (sigue siendo muy flexible). Se utilizan 28 modos en dirección vertical y lateral para cada carril (112 modos en total). Puede observarse en la Fig. 2.42 que las diferencias entre los resultados de las simulaciones para vías rígidas y flexibles disminuyen.

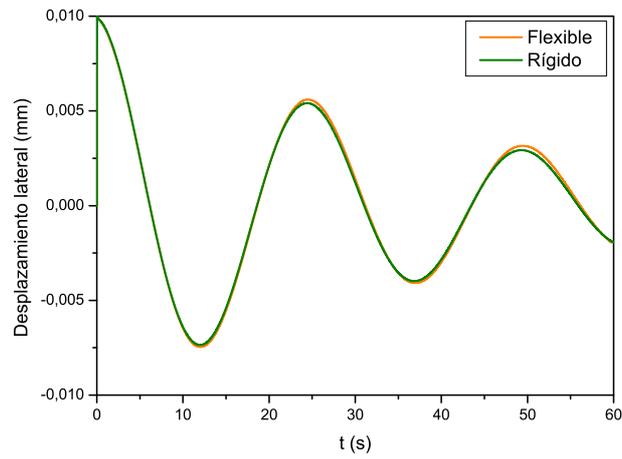


(a)

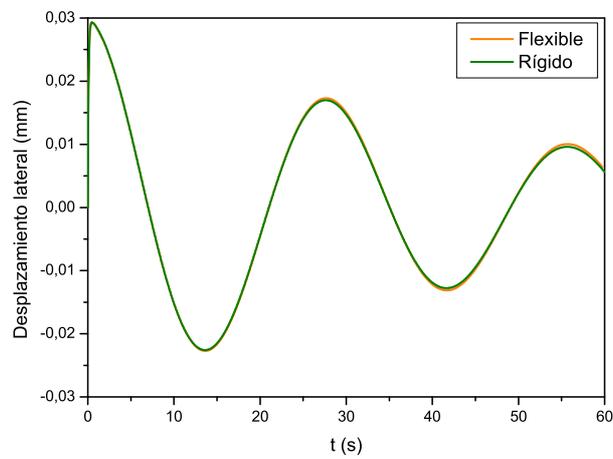


(b)

Figura 2.41: Desplazamiento lateral del centro de masa del eje ferroviario con una rigidez de la base elástica $k = 1$ MN/m² a) $V = 10$ m/s; b) $V = 30$ m/s



(a)



(b)

Figura 2.42: Desplazamiento lateral del centro de masa del eje ferroviario con una rigidez de la base elástica $k = 10 \text{ MN/m}^2$ (a) $V = 10 \text{ m/s}$; (b) $V = 30 \text{ m/s}$

2.6 Resumen y discusión

Este capítulo describe un procedimiento computacional para generar vías flexibles de geometría arbitraria de forma automática. Este procedimiento se implementa en un programa específico desarrollado en la UIC, denominado SAMS2000. Dicho programa permite realizar simulaciones de vehículos ferroviarios sobre vías rígidas, por lo que el código de simulación es modificado siguiendo la formulación que se presenta en este capítulo, para poder realizar simulaciones sobre vías deformables. Para la mejor comprensión del procedimiento de modelado de vías deformables, se desarrolla la descripción de la geometría de la vía, la cinemática y la dinámica del sistema vehículo-vía para vías rígidas. En base a ello, se describen las modificaciones necesarias en el código para considerar las deformaciones de la vía. La descripción de la geometría de la vía deformable se realiza, al igual que en vías rígidas, utilizando la formulación de coordenadas nodales absolutas. Las deformaciones de la vía se modelan utilizando la formulación de sistemas de referencia flotantes, discretizando la vía mediante elementos finitos y aplicando síntesis modal. La deformación de la vía afecta a la localización del punto de contacto, y a los vectores y parámetros geométricos asociados a él. La formulación propuesta permite resolver la dinámica no lineal acoplada de la vía y el vehículo, es decir, permite calcular las fuerzas de contacto teniendo en cuenta el cambio mencionado en la localización del punto de contacto y en la geometría de la vía en dicho punto. La discretización de la vía en elementos finitos permite modelar vías todo lo complejas que se requiera con un programa comercial de elementos finitos, y el uso de la síntesis modal permite disminuir el número de coordenadas elásticas y el uso de los modos de deformación más significativos.

La formulación presentada se aplica a un eje ferroviario unido a un bastidor mediante suspensiones longitudinales y laterales. Se presentan los resultados de una vía deformable comparándolos con los resultados de una vía rígida, pudiéndose apreciar la influencia de la deformación en los pseudo-deslizamientos relativos y en las fuerzas y momento de contacto. Los resultados se obtienen utilizando un modo de vibración por carril y por dirección bajo estudio, sin el estudio previo de la convergencia de los mismos, siendo el objeto principal la implementación de la nueva formulación. Los resultados obtenidos para la vía deformable muestran oscilaciones, con la frecuencia natural de la vía correspondiente al modo utilizado, en torno al valor obtenido con la vía rígida.

Una vez que la formulación ha sido implementada, se procede al estudio de

la convergencia de los resultados y a la validación de los mismos. Para ello, se compara la formulación propuesta con dos modelos clásicos: el modelo de la carga móvil y el de la masa móvil. El estudio de la convergencia lleva a concluir que se necesitan al menos 30 modos de vibración por carril y por dirección bajo estudio, es decir, que si se estudia la dinámica vertical y la lateral, se necesitan unos 120 modos para obtener buenos resultados. Se realizan simulaciones para distintos coeficientes de la rigidez de la base elástica utilizando un número de modos cercano a 120 (se utilizan algunos modos menos debido a la imposibilidad de conseguir tantos modos de flexión completamente desacoplados en el análisis modal del programa de elementos finitos). Se compara el desplazamiento vertical del punto medio de la vía con los modelos clásicos, y la fuerza normal de contacto en la banda de rodadura con el modelo de la masa móvil, acordando bastante bien los resultados, por lo que la nueva formulación queda validada.

En los resultados de la fuerza normal de contacto, utilizando un número de modos adecuados para obtener la convergencia, aparece una frecuencia de oscilación que varía con el coeficiente de rigidez de la base elástica. Se hace un estudio para conocer el origen de dicha frecuencia, presentándose su causa sin demostrarlo, sino por descarte de otros posibles orígenes (es en el siguiente capítulo cuando se realiza un análisis de autovalores del sistema y se confirma la causa de dichas frecuencias).

Por último, se realiza un análisis de estabilidad de la vía deformable, concluyendo que cuando la base es muy flexible, el movimiento lateral del vehículo es inestable, siendo estable en las mismas condiciones en la vía rígida; y aumenta la frecuencia de lazo en la vía deformable en comparación con la vía rígida.

Capítulo 3

Método de las deformadas móviles

3.1 Introducción

La descripción de las deformaciones de sólidos flexibles en dinámica de sistemas multicuerpo suele realizarse mediante el método de *síntesis modal* (Craig & Bampton, 1968; Dwivedy & Eberhard, 2006; Lehner & Eberhard, 2007). En el método de síntesis modal se realiza un modelo de elementos finitos del sólido flexible para obtener unas funciones de forma que permitan describir las deformaciones globales del sólido. Los desplazamientos por deformación se calculan con las funciones de forma y las coordenadas elásticas seleccionadas en el modelo del sistema multicuerpo. Con este método el número de coordenadas elásticas que se utiliza es mucho menor que el número de coordenadas nodales del modelo de elementos finitos. Las funciones de forma que describen las deformaciones globales pueden obtenerse mediante un análisis de autovalores y autovectores del modelo de elementos finitos (modos dinámicos) o aplicando desplazamientos unitarios o fuerzas unitarias generalizadas en ciertos nodos específicos del modelo de elementos finitos (modos estáticos). El conjunto final de funciones de forma puede incluir modos calculados de las dos formas mencionadas. Cuando un sólido flexible está sujeto a una carga concentrada durante el movimiento del sistema multicuerpo, es una práctica común incluir como función de forma estática la forma de la deformada del sólido flexible bajo la acción de dicha carga concentrada para una descripción más precisa de la deformada (Yoo & Haug, 1986;

Cardona & Géradin, 1991; Cardona, 2000).

La formulación presentada en el capítulo anterior para la descripción de la flexibilidad del carril en dinámica de sistemas multicuerpo, describe las deformaciones de la vía mediante el método de los sistemas de referencia flotantes aplicando síntesis modal. Se ha visto que esta formulación permite resolver la dinámica no lineal acoplada del vehículo y la vía, con modelos detallados, mediante elementos finitos, de las vías. Sin embargo, cuando el objeto de estudio es la estabilidad del vehículo este método no resulta adecuado. El principal inconveniente que presenta el método presentado en el capítulo anterior es el gran coste computacional que requiere su aplicación para el estudio de la estabilidad, ya que la longitud de la vía debe ser lo suficientemente larga para que se alcancen los posibles movimientos estacionarios y es necesario un elevado número de funciones de forma para la descripción de las deformaciones, ya que éstas están muy localizadas. Además, es necesario definir condiciones de contorno ficticias para el cálculo de los modos de vibración mediante un análisis modal.

Para evitar los inconvenientes que presenta el modelado de la flexibilidad de la vía mediante el método de los elementos finitos, se presenta en este capítulo una nueva formulación denominada *método de las deformadas móviles*. Este método se basa también en la formulación de los sistemas de referencia flotantes aunque, en lugar de describir las deformaciones del carril mediante funciones de forma definidas en el sistema local de la vía, como es usual, describe las deformaciones mediante funciones de forma definidas en un sistema de referencia de la trayectoria. Este sistema de referencia móvil se desplaza a lo largo de la vía con la misma velocidad de avance que lo hace el vehículo ferroviario. El nuevo método requiere un número mucho menor de funciones de forma para describir la deformación. Además, no se requiere el uso de condiciones de contorno artificiales, de forma que la vía puede considerarse infinitamente larga. La formulación se asemeja al *método de compensación* (Yoo & Haug, 1986) mediante *modos estáticos* con la diferencia fundamental de que el punto de aplicación de la carga varía con el tiempo.

En este capítulo se desarrolla la formulación y se muestran resultados de su aplicación para el modelado de vías flexibles rectas y curvas. Además se muestra su aplicación para el cálculo de movimientos estacionarios y el análisis de estabilidad de un vehículo ferroviario sobre vías deformables.

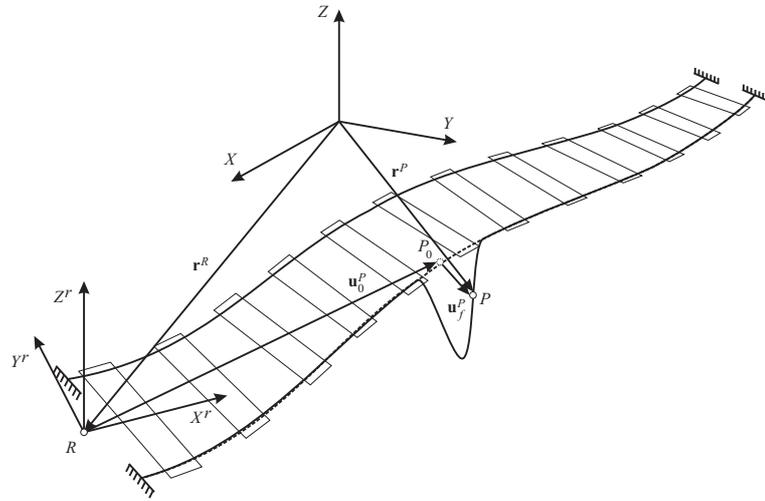


Figura 3.1: Descripción cinemática de un punto del carril mediante el método de los sistemas de referencia flotantes

3.2 Formulación de los sistemas de referencia flotantes

El método de las deformadas móviles que se desarrolla en la siguiente sección se basa en la formulación de los sistemas de referencia flotantes. Esta formulación se desarrolló en el capítulo anterior para la descripción cinemática del punto de contacto en un carril deformable. En esta sección se resume el método para la descripción cinemática de un punto arbitrario P de la línea media del carril deformable para que se vea con claridad en qué difiere la FFRF y el método de las deformadas móviles.

En el método FFRF la posición absoluta del punto P con respecto a un sistema global de referencia se define como sigue (Fig. 3.1):

$$\mathbf{r}^P = \mathbf{r}^R + \mathbf{A}^r (\bar{\mathbf{u}}_0^{rP} + \bar{\mathbf{u}}_f^{rP}) \quad (3.1)$$

donde \mathbf{r}^R es el vector posición del origen del sistema de referencia local de la vía $\langle X^r Y^r Z^r \rangle$ con respecto al sistema global $\langle XYZ \rangle$, \mathbf{A}^r es la matriz de rotación necesaria para transformar las componentes de un vector del sistema local de la vía al global, $\bar{\mathbf{u}}_0^{rP}$ es el vector posición del punto P con respecto al sistema de referencia local cuando el sólido flexible está indeformado y $\bar{\mathbf{u}}_f^{rP}$ es el desplazamiento por deformación del punto P . El vector $\bar{\mathbf{u}}_f^{rP}$ puede obtenerse de

la siguiente expresión:

$$\bar{\mathbf{u}}_f^{rP} = \mathbf{S}\mathbf{q}_f \quad (3.2)$$

donde \mathbf{S} es la matriz de funciones de forma y \mathbf{q}_f es el vector de coordenadas elásticas. La matriz de funciones de forma es constante, ya que depende de la posición indeformada del punto P ($\mathbf{S} = \mathbf{S}(\bar{\mathbf{u}}_0^{rP})$), que no varía con el tiempo. Si se utiliza el método de síntesis modal (Shabana *et al.*, 2008) los autovectores del modelo de elementos finitos de la vía obtenidos al realizar un análisis modal, pueden usarse como funciones de forma para describir la deformación. La velocidad del punto P en el sistema global de referencia viene dada por

$$\dot{\mathbf{r}}^P = \dot{\mathbf{r}}^R + \dot{\mathbf{A}}^r(\bar{\mathbf{u}}_0^{rP} + \bar{\mathbf{u}}_f^{rP}) + \mathbf{A}^r \dot{\bar{\mathbf{u}}}_f^{rP} \quad (3.3)$$

siendo

$$\dot{\bar{\mathbf{u}}}_f^{rP} = \mathbf{S}\dot{\mathbf{q}}_f. \quad (3.4)$$

Los inconvenientes de modelar la flexibilidad de la vía con este método, como se ha visto en el capítulo anterior, se enumeran a continuación:

- El cálculo de los autovectores requiere el uso de condiciones de contorno ficticias (ver Fig. 3.1) en el modelo de la vía (condiciones del eje principal, ejes fijos al sólido, ... (De Veubeke, 1976; Agrawal & Shabana, 1986; Shabana, 1997)). La respuesta de la vía ante una carga móvil que se obtiene cerca de los contornos es poco precisa (Knothe & Grassie, 1993).
- Los carriles suelen presentar áreas de deformación muy localizadas debido al contacto rueda-carril, lo que requiere el uso de un elevado número de modos de deformación en la simulación dinámica (Yoo & Haug, 1986).
- El estudio de la estabilidad de vehículos supone un elevado coste computacional, ya que es necesario modelar una vía de gran longitud que permita alcanzar movimientos estacionarios.

3.3 Método de las deformadas móviles

En esta sección se desarrolla el método de las deformadas móviles para modelar vías deformables. Este método permite el estudio de la dinámica no lineal

acoplada del sistema vehículo ferroviario-vía deformable. El nuevo método utiliza funciones de forma especiales para describir las deformaciones que afectan exclusivamente a una pequeña zona alrededor de la zona de aplicación de la carga. Esto permite el uso de un número mucho menor de funciones de forma para describir las deformaciones. Además, no se requiere el uso de condiciones de contorno al modelar la vía, lo que permitiría asumir que el carril es infinitamente largo. En este método se introduce el sistema de referencia de la trayectoria $\langle X^t Y^t Z^t \rangle$, que como se ha mencionado previamente, se desplaza a lo largo de la vía con la misma velocidad de avance del vehículo ferroviario (ver Fig. 3.2). La geometría de la vía es conocida, por lo que conociendo la velocidad de avance del vehículo, el vector de posición $\bar{\mathbf{u}}^{rV}$ y la matriz de orientación \mathbf{A}^{tr} del sistema de referencia de la trayectoria con respecto al sistema de referencia local de la vía son ambas funciones conocidas del tiempo.

La formulación propuesta utiliza funciones de forma que dependen de la posición indeformada del punto P con respecto al sistema de la trayectoria ($\mathbf{S} = \mathbf{S}(\bar{\mathbf{v}}_0^{tP})$, ver Fig. 3.2). El punto P , como se ha descrito previamente, es el origen del sistema de referencia del perfil del carril. La posición indeformada de P con respecto al sistema de la trayectoria depende del tiempo, ya que el sistema de la trayectoria es móvil (en la FFRF se ha visto que \mathbf{S} depende de un vector definido en el sistema local del carril, que es constante). Esta dependencia temporal es una de las principales diferencias entre la FFRF y el método de las deformadas móviles, y la causante de que las ecuaciones de movimiento en ambas formulaciones difieran.

En esta sección se presenta la cinemática y la dinámica de una vía flexible aplicando el método de las deformadas móviles. Aprovechando la introducción del sistema de referencia de la trayectoria en el método que se desarrolla en este capítulo, las coordenadas de los sólidos del vehículo se describen también en este sistema, presentándose en esta sección la cinemática y dinámica del vehículo ferroviario usando coordenadas descritas en el sistema móvil. El uso del sistema de la trayectoria para la descripción de las coordenadas del vehículo facilita el estudio de la estabilidad mediante el análisis de autovalores, ya que los movimientos estacionarios se describen mediante coordenadas constantes en él, permitiendo la linealización de las ecuaciones de movimiento en torno a dicho valor estacionario de las coordenadas y el posterior cálculo de autovalores. La sección finaliza con las ecuaciones de movimiento del sistema multicuerpo vía-vehículo ferroviario.

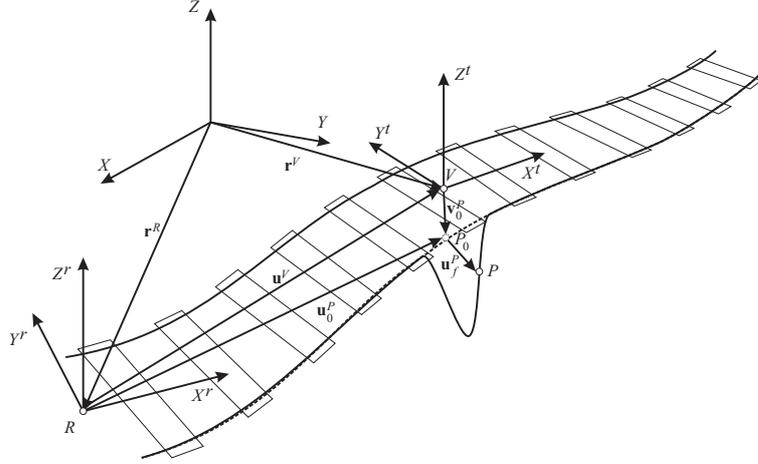


Figura 3.2: Descripción cinemática de un punto del carril con el método de las deformadas móviles

3.3.1 Cinemática de la vía deformable

En esta subsección se describe la cinemática de una vía deformable considerando, al igual que en la formulación presentada en el capítulo anterior, que las secciones del perfil no se deforman, sino que lo hace la línea media de los carriles. Sobre esta línea se ha visto que se sitúa el origen P del sistema de referencia del perfil.

La posición absoluta del punto P perteneciente a un carril deformable con respecto a un sistema global de referencia viene dada por (ver Fig. 3.2):

$$\mathbf{r}^P = \mathbf{r}^R + \mathbf{A}^r (\bar{\mathbf{u}}_0^{rP} + \mathbf{A}^{tr} \bar{\mathbf{u}}_f^{tP}) \quad (3.5)$$

donde el desplazamiento por deformación $\bar{\mathbf{u}}_f^{tP}$, que ahora se expresa respecto al sistema de la trayectoria, viene dado por

$$\bar{\mathbf{u}}_f^{tP} = \mathbf{S} \mathbf{q}_f. \quad (3.6)$$

La nueva matriz de funciones de forma depende de la posición indeformada del punto P con respecto al sistema de referencia de la trayectoria, que no es constante sino que es función del tiempo ($\mathbf{S} = \mathbf{S}(\bar{\mathbf{v}}_0^{tP})$). Esta dependencia del tiempo de la matriz de funciones de forma es una diferencia fundamental entre la clásica FFRF y el método que se presenta en este capítulo, como se ha mencionado previamente, y es la responsable de que aparezcan términos convectivos en las ecuaciones del movimiento con el nuevo método. El vector de la posición en la

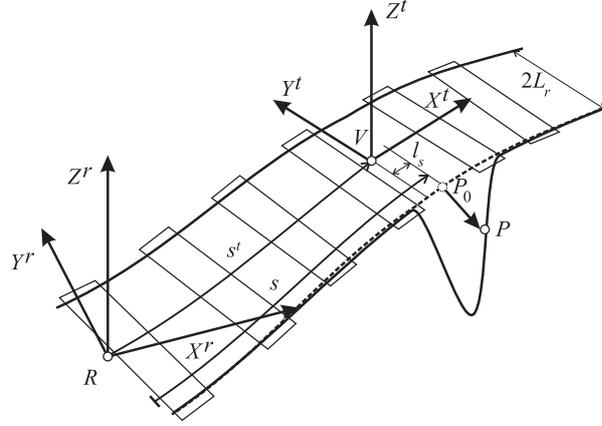


Figura 3.3: Vía localmente recta

configuración indeformada del punto P con respecto al sistema de la trayectoria viene dado por

$$\bar{\mathbf{v}}_0^{tP} = \mathbf{A}^{trT} (\bar{\mathbf{u}}_0^{rP} - \bar{\mathbf{u}}^{rV}). \quad (3.7)$$

Se asume que la curvatura de la vía es lo suficientemente pequeña para suponer que la vía es recta localmente. Con esta suposición la ecuación anterior se simplifica como sigue:

$$\bar{\mathbf{v}}_0^{tP} = [l_s \quad \pm L_r \quad 0]^T \quad (3.8)$$

donde L_r es la mitad de la distancia entre las líneas medias de los carriles y l_s es la longitud de arco desde el origen del sistema de referencia de la trayectoria hasta el punto en el carril indeformado, dada por la siguiente expresión:

$$l_s = s - s^t \quad (3.9)$$

siendo s la longitud de arco de un punto de la curva 3D del carril con respecto al sistema de referencia local de la vía, y s^t el valor en un determinado instante de la longitud de arco del origen V del sistema de referencia de la trayectoria (ver Fig. 3.3). La velocidad del punto P en el sistema global viene dada por

$$\dot{\mathbf{r}}^P = \dot{\mathbf{r}}^R + \dot{\mathbf{A}}^r (\bar{\mathbf{u}}_0^{rP} + \mathbf{A}^{tr} \bar{\mathbf{u}}_f^{tP}) + \mathbf{A}^r (\dot{\mathbf{A}}^{tr} \bar{\mathbf{u}}_f^{tP} + \mathbf{A}^{tr} \dot{\bar{\mathbf{u}}}_f^{tP}) \quad (3.10)$$

donde $\dot{\mathbf{A}}^{tr} \bar{\mathbf{u}}_f^{tP}$ puede obtenerse de

$$\dot{\mathbf{A}}^{tr} \bar{\mathbf{u}}_f^{tP} = -\mathbf{A}^{tr} \tilde{\bar{\mathbf{u}}}_f^{tP} \tilde{\boldsymbol{\omega}}^t \quad (3.11)$$

siendo $\bar{\omega}^t$ el vector velocidad angular del sistema de la trayectoria respecto al sistema local de la vía expresado en coordenadas del sistema de la trayectoria y

$$\dot{\bar{\mathbf{u}}}_f^{tP} = \mathbf{S}\dot{\mathbf{q}}_f + \dot{l}_s \mathbf{S}' \mathbf{q}_f \quad (3.12)$$

donde \mathbf{S}' es la derivada de la matriz de funciones de forma con respecto a l_s , y \dot{l}_s se puede observar que coincide con la velocidad de avance del sistema de la trayectoria cambiada de signo ($-V$). El último término de la ecuación (3.12) es debido a la dependencia temporal de la matriz de funciones de forma en el método de las deformadas móviles y no aparece en el clásico FFRF.

La existencia de un sistema de referencia local de la vía con una posición y orientación que puede variar respecto al sistema inercial permite estudiar situaciones como la dinámica del vehículo durante un terremoto, por ejemplo. Debido a que no es objeto del estudio de esta tesis situaciones en las que el sistema local de la vía sufra movimientos, y por simplificar la formulación que se desarrolla a continuación, se asume que el sistema local de la vía coincide con el sistema global, como muestra la Fig. 3.4. Se asume, por tanto, que $\mathbf{r}^R = \mathbf{0}$ y $\mathbf{A}^r = \mathbf{I}$, quedando simplificadas las ecuaciones (3.5) y (3.10) como sigue, respectivamente:

$$\mathbf{r}^P = \bar{\mathbf{u}}_0^{rP} + \mathbf{A}^{tr} \bar{\mathbf{u}}_f^{tP}, \quad (3.13)$$

$$\dot{\mathbf{r}}^P = \dot{\mathbf{A}}^{tr} \bar{\mathbf{u}}_f^{tP} + \mathbf{A}^{tr} \dot{\bar{\mathbf{u}}}_f^{tP}. \quad (3.14)$$

Al coincidir el sistema local del carril con el sistema global, la matriz de giro \mathbf{A}^{tr} pasa a ser \mathbf{A}^t , y $\bar{\mathbf{u}}_0^{rP}$ pasa a ser \mathbf{u}_0^P quedando las dos ecuaciones anteriores como se muestra a continuación:

$$\mathbf{r}^P = \mathbf{u}_0^P + \mathbf{A}^t \bar{\mathbf{u}}_f^{tP}, \quad (3.15)$$

$$\dot{\mathbf{r}}^P = \dot{\mathbf{A}}^t \bar{\mathbf{u}}_f^{tP} + \mathbf{A}^t \dot{\bar{\mathbf{u}}}_f^{tP}. \quad (3.16)$$

3.3.2 Dinámica de la vía deformable

Esta subsección muestra las ecuaciones del movimiento del carril. Para comenzar a desarrollar el método que se propone se opta por utilizar un modelo muy simplificado de vía. Se asume que los carriles se comportan como vigas sobre un base elástica (modelo de Winkler).

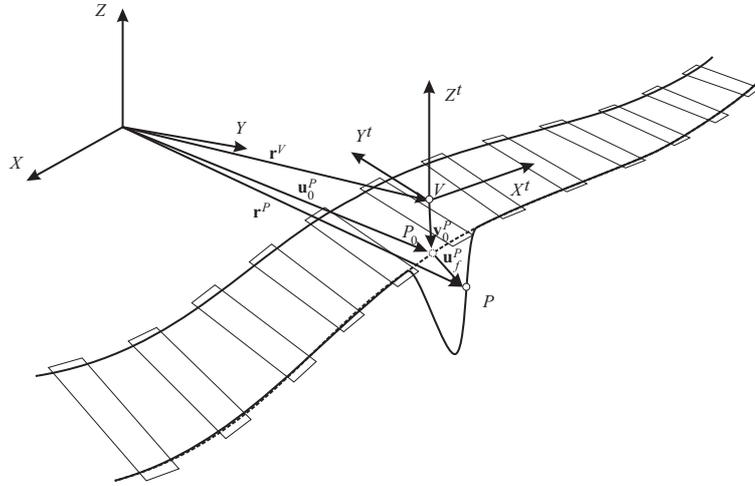


Figura 3.4: Descripción cinemática de un punto del carril con el método de las deformadas móviles con $\mathbf{r}^R = \mathbf{0}$ y $\mathbf{A}^r = \mathbf{I}$

La energía cinética de la vía flexible puede obtenerse como sigue en este caso:

$$T = \frac{1}{2} \int_v \rho \dot{\mathbf{r}}^{P^T} \dot{\mathbf{r}}^P dv \quad (3.17)$$

donde ρ es la densidad de masa del carril y v es su volumen. El superíndice P se omite en las ecuaciones que siguen. El producto escalar $\dot{\mathbf{r}}^T \dot{\mathbf{r}}$ puede escribirse como se muestra a continuación:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{r}}^T \dot{\mathbf{r}} &= (-\bar{\omega}^{t^T} \tilde{\mathbf{u}}_f^{t^T} \mathbf{A}^{t^T} + \dot{\mathbf{u}}_f^{t^T} \mathbf{A}^{t^T}) (-\mathbf{A}^t \tilde{\mathbf{u}}_f^t \bar{\omega}^t + \mathbf{A}^t \dot{\mathbf{u}}_f^t) \\ &= \bar{\omega}^{t^T} \tilde{\mathbf{u}}_f^{t^T} \tilde{\mathbf{u}}_f^t \bar{\omega}^t - 2\bar{\omega}^{t^T} \tilde{\mathbf{u}}_f^{t^T} \dot{\mathbf{u}}_f^t + \dot{\mathbf{u}}_f^{t^T} \dot{\mathbf{u}}_f^t. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Para detallar la energía cinética asociada a cada término de la ecuación (3.18) se utilizan varias matrices de integrales de las funciones de forma y varias integrales invariantes. Sea \mathbf{S} la matriz de funciones de forma de la ecuación (3.6), de dimensiones $3 \times n_{q_f}$, siendo n_{q_f} el número de coordenadas elásticas \mathbf{q}_f utilizadas, definida como sigue:

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} \mathbf{S}_x^T \\ \mathbf{S}_y^T \\ \mathbf{S}_z^T \end{bmatrix} \quad (3.19)$$

siendo \mathbf{S}_x , \mathbf{S}_y y \mathbf{S}_z matrices de dimensiones $n_{q_f} \times 1$. Sean las matrices de integrales

de las funciones de forma, donde la integral de volumen $\int_v dv$ ha sido sustituida por la integral de línea $A \int_{-\infty}^{+\infty} dl_s$, siendo A el área de la sección transversal del carril, definidas como sigue:

$$\hat{\mathbf{S}} = \rho A \int_{-\infty}^{\infty} \begin{bmatrix} \mathbf{S}_x \mathbf{S}_x^T & \mathbf{S}_x \mathbf{S}_y^T & \mathbf{S}_x \mathbf{S}_z^T \\ \text{sim} & \mathbf{S}_y \mathbf{S}_y^T & \mathbf{S}_y \mathbf{S}_z^T \\ & & \mathbf{S}_z \mathbf{S}_z^T \end{bmatrix} dl_s = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{S}}_{xx} & \hat{\mathbf{S}}_{xy} & \hat{\mathbf{S}}_{xz} \\ \hat{\mathbf{S}}_{yx} & \hat{\mathbf{S}}_{yy} & \hat{\mathbf{S}}_{yz} \\ \hat{\mathbf{S}}_{zx} & \hat{\mathbf{S}}_{zy} & \hat{\mathbf{S}}_{zz} \end{bmatrix}, \quad (3.20)$$

$$\hat{\mathbf{S}}^1 = \rho A \int_{-\infty}^{\infty} \begin{bmatrix} \mathbf{S}_x \mathbf{S}_x'^T & \mathbf{S}_x \mathbf{S}_y'^T & \mathbf{S}_x \mathbf{S}_z'^T \\ \mathbf{S}_y \mathbf{S}_x'^T & \mathbf{S}_y \mathbf{S}_y'^T & \mathbf{S}_y \mathbf{S}_z'^T \\ \mathbf{S}_z \mathbf{S}_x'^T & \mathbf{S}_z \mathbf{S}_y'^T & \mathbf{S}_z \mathbf{S}_z'^T \end{bmatrix} dl_s = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{S}}_{xx}^1 & \hat{\mathbf{S}}_{xy}^1 & \hat{\mathbf{S}}_{xz}^1 \\ \hat{\mathbf{S}}_{yx}^1 & \hat{\mathbf{S}}_{yy}^1 & \hat{\mathbf{S}}_{yz}^1 \\ \hat{\mathbf{S}}_{zx}^1 & \hat{\mathbf{S}}_{zy}^1 & \hat{\mathbf{S}}_{zz}^1 \end{bmatrix}, \quad (3.21)$$

$$\hat{\mathbf{S}}^2 = \rho A \int_{-\infty}^{\infty} \begin{bmatrix} \mathbf{S}'_x \mathbf{S}'_x{}^T & \mathbf{S}'_x \mathbf{S}'_y{}^T & \mathbf{S}'_x \mathbf{S}'_z{}^T \\ \text{sim} & \mathbf{S}'_y \mathbf{S}'_y{}^T & \mathbf{S}'_y \mathbf{S}'_z{}^T \\ & & \mathbf{S}'_z \mathbf{S}'_z{}^T \end{bmatrix} dl_s = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{S}}_{xx}^2 & \hat{\mathbf{S}}_{xy}^2 & \hat{\mathbf{S}}_{xz}^2 \\ \hat{\mathbf{S}}_{yx}^2 & \hat{\mathbf{S}}_{yy}^2 & \hat{\mathbf{S}}_{yz}^2 \\ \hat{\mathbf{S}}_{zx}^2 & \hat{\mathbf{S}}_{zy}^2 & \hat{\mathbf{S}}_{zz}^2 \end{bmatrix} \quad (3.22)$$

donde las 9 matrices que componen cada matriz $\hat{\mathbf{S}}$, $\hat{\mathbf{S}}^1$ y $\hat{\mathbf{S}}^2$ tienen dimensiones $n_{q_f} \times n_{q_f}$. Utilizando estas definiciones se obtienen las siguientes integrales que son invariantes:

$$\rho A \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{S}^T \mathbf{S} d\xi = \hat{\mathbf{S}}_{xx} + \hat{\mathbf{S}}_{yy} + \hat{\mathbf{S}}_{zz}, \quad (3.23)$$

$$\rho A \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{S}^T \mathbf{S}' d\xi = \hat{\mathbf{S}}_{xx}^1 + \hat{\mathbf{S}}_{yy}^1 + \hat{\mathbf{S}}_{zz}^1, \quad (3.24)$$

$$\rho A \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{S}'^T \mathbf{S}' d\xi = \hat{\mathbf{S}}_{xx}^2 + \hat{\mathbf{S}}_{yy}^2 + \hat{\mathbf{S}}_{zz}^2. \quad (3.25)$$

Estas definiciones se utilizan, como se ha mencionado previamente, para la descripción detallada de la energía cinética asociada a cada término de la ecuación (3.18). Para el primer término se obtiene la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} T_1 &= \frac{1}{2} \int_v \rho \bar{\boldsymbol{\omega}}^{tT} \tilde{\mathbf{u}}_f^{tT} \tilde{\mathbf{u}}_f^t \bar{\boldsymbol{\omega}}^t dv = \\ &= \frac{1}{2} \mathbf{q}_f^T [\omega_x^2 (\hat{\mathbf{S}}_{yy} + \hat{\mathbf{S}}_{zz}) + \omega_y^2 (\hat{\mathbf{S}}_{xx} + \hat{\mathbf{S}}_{zz}) + \omega_z^2 (\hat{\mathbf{S}}_{xx} + \hat{\mathbf{S}}_{yy}) - \\ &\quad \omega_x \omega_y (\hat{\mathbf{S}}_{yx} + \hat{\mathbf{S}}_{xy}) - \omega_y \omega_z (\hat{\mathbf{S}}_{zy} + \hat{\mathbf{S}}_{yz}) - \omega_x \omega_z (\hat{\mathbf{S}}_{zx} + \hat{\mathbf{S}}_{xz})] \mathbf{q}_f \end{aligned} \quad (3.26)$$

donde ω_x , ω_y y ω_z son las componentes del vector $\bar{\boldsymbol{\omega}}^t$. La energía cinética asociada

al segundo término de la ecuación (3.18) es la siguiente:

$$\begin{aligned}
T_2 &= -\bar{\omega}^{tT} \int_v \rho \tilde{\mathbf{u}}_f^{tT} \dot{\mathbf{u}}_f^t dv = \\
&= -\mathbf{q}_f^T [\omega_x (\hat{\mathbf{S}}_{zy} - \hat{\mathbf{S}}_{yz}) + \omega_y (\hat{\mathbf{S}}_{xz} - \hat{\mathbf{S}}_{zx}) + \omega_z (\hat{\mathbf{S}}_{yx} - \hat{\mathbf{S}}_{xy})] \dot{\mathbf{q}}_f - \\
&\quad \dot{l}_s \mathbf{q}_f^T [\omega_x (\hat{\mathbf{S}}_{zy}^1 - \hat{\mathbf{S}}_{yz}^1) + \omega_y (-\hat{\mathbf{S}}_{zx}^1 + \hat{\mathbf{S}}_{xz}^1) + \omega_z (\hat{\mathbf{S}}_{yx}^1 - \hat{\mathbf{S}}_{xy}^1)] \mathbf{q}_f.
\end{aligned} \tag{3.27}$$

La energía cinética asociada al tercer término de la ecuación (3.18) lleva a la siguiente expresión:

$$\begin{aligned}
T_3 &= \frac{1}{2} \int_v \rho \dot{\mathbf{u}}_f^{tT} \dot{\mathbf{u}}_f^t dv = \\
&= \frac{1}{2} [\dot{\mathbf{q}}_f^T (\hat{\mathbf{S}}_{xx} + \hat{\mathbf{S}}_{yy} + \hat{\mathbf{S}}_{zz}) \dot{\mathbf{q}}_f + 2\dot{l}_s \dot{\mathbf{q}}_f^T (\hat{\mathbf{S}}_{xx}^1 + \hat{\mathbf{S}}_{yy}^1 + \hat{\mathbf{S}}_{zz}^1) \mathbf{q}_f + \\
&\quad + \dot{l}_s^2 \mathbf{q}_f^T (\hat{\mathbf{S}}_{xx}^2 + \hat{\mathbf{S}}_{yy}^2 + \hat{\mathbf{S}}_{zz}^2) \mathbf{q}_f].
\end{aligned} \tag{3.28}$$

La energía cinética total viene dada por:

$$T = T_1 + T_2 + T_3. \tag{3.29}$$

Si se considerase una vía más compleja habría que incluir en la expresión (3.17) la masa equivalente del resto de la estructura de la vía.

La energía de deformación puede formularse como se indica a continuación:

$$U = U_{carril} + U_{base} \tag{3.30}$$

donde U_{carril} es la energía debida a la deformación del carril y U_{base} es la energía debida a la deformación de la base elástica. Asumiendo que los carriles se deforman únicamente a flexión y considerando la deformación de la base, la energía de deformación puede obtenerse como sigue:

$$U = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} (k_y [\bar{\mathbf{u}}_f^t]_y^2 + k_z [\bar{\mathbf{u}}_f^t]_z^2 + EI_y \left[\frac{d^2 [\bar{\mathbf{u}}_f^t]_y}{dl_s^2} \right]^2 + EI_z \left[\frac{d^2 [\bar{\mathbf{u}}_f^t]_z}{dl_s^2} \right]^2) dl_s \tag{3.31}$$

donde k_y y k_z son los coeficientes de rigidez por unidad de longitud de la base en dirección lateral y vertical, respectivamente, y EI_y y EI_z son las propiedades de rigidez a flexión del carril en dirección lateral y vertical, respectivamente. Aplicar

la siguiente definición de $\hat{\mathbf{S}}^3$:

$$\hat{\mathbf{S}}^3 = \rho A \int_{-\infty}^{\infty} \begin{bmatrix} \mathbf{S}_x'' \mathbf{S}_x''^T & \mathbf{S}_x'' \mathbf{S}_y''^T & \mathbf{S}_x'' \mathbf{S}_z''^T \\ \mathbf{S}_y'' \mathbf{S}_y''^T & \mathbf{S}_y'' \mathbf{S}_z''^T & \\ \text{sim} & & \mathbf{S}_z'' \mathbf{S}_z''^T \end{bmatrix} d\xi = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{S}}_{xx}^3 & \hat{\mathbf{S}}_{xy}^3 & \hat{\mathbf{S}}_{xz}^3 \\ \hat{\mathbf{S}}_{yx}^3 & \hat{\mathbf{S}}_{yy}^3 & \hat{\mathbf{S}}_{yz}^3 \\ \hat{\mathbf{S}}_{zx}^3 & \hat{\mathbf{S}}_{zy}^3 & \hat{\mathbf{S}}_{zz}^3 \end{bmatrix} \quad (3.32)$$

permite calcular el siguiente invariante:

$$\rho A \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{S}''^T \mathbf{S}'' d\xi = \hat{\mathbf{S}}_{xx}^3 + \hat{\mathbf{S}}_{yy}^3 + \hat{\mathbf{S}}_{zz}^3 \quad (3.33)$$

pudiendo escribirse la ecuación (3.31) como sigue:

$$U = \frac{1}{2} \left[\frac{k_y}{\rho A} \mathbf{q}_f^T \hat{\mathbf{S}}_{yy}^3 \mathbf{q}_f + \frac{k_z}{\rho A} \mathbf{q}_f^T \hat{\mathbf{S}}_{zz}^3 \mathbf{q}_f + \frac{EI_y}{\rho A} \mathbf{q}_f^T \hat{\mathbf{S}}_{yy}^3 \mathbf{q}_f + \frac{EI_z}{\rho A} \mathbf{q}_f^T \hat{\mathbf{S}}_{zz}^3 \mathbf{q}_f \right]. \quad (3.34)$$

Aplicando las ecuaciones de Lagrange se llega a lo siguiente:

$$\mathbf{M}^r \ddot{\mathbf{q}}_f + \mathbf{G}^r \dot{\mathbf{q}}_f + (\mathbf{K}_{elas}^r + \mathbf{K}_{geom}^r) \mathbf{q}_f = \mathbf{Q}^r \quad (3.35)$$

donde \mathbf{M}^r , \mathbf{G}^r , \mathbf{K}_{elas}^r , \mathbf{K}_{geom}^r son las matrices de masa, giroscópica, de rigidez elástica y de rigidez geométrica (Meirovitch, 1980), respectivamente, y \mathbf{Q}^r es la fuerza generalizada aplicada (incluyendo la fuerza de contacto rueda-carril). La expresión de las matrices de rigidez geométrica y elástica, de masa y giroscópica se muestran a continuación:

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{geom}^r = & -[\omega_x^2(\hat{\mathbf{S}}_{zz}^1 + \hat{\mathbf{S}}_{yy}^1) + \omega_y^2(\hat{\mathbf{S}}_{zz}^1 + \hat{\mathbf{S}}_{xx}^1) + \omega_z^2(\hat{\mathbf{S}}_{xx}^1 + \hat{\mathbf{S}}_{yy}^1) - \\ & -\omega_x \omega_y(\hat{\mathbf{S}}_{xy}^1 + \hat{\mathbf{S}}_{yx}^1) - \omega_x \omega_z(\hat{\mathbf{S}}_{zx}^1 + \hat{\mathbf{S}}_{xz}^1) - \omega_z \omega_y(\hat{\mathbf{S}}_{zy}^1 + \hat{\mathbf{S}}_{yz}^1)] - \\ & +[\dot{\omega}_x(\hat{\mathbf{S}}_{zy}^1 - \hat{\mathbf{S}}_{yz}^1) + \dot{\omega}_y(\hat{\mathbf{S}}_{xz}^1 - \hat{\mathbf{S}}_{zx}^1) + \dot{\omega}_z(\hat{\mathbf{S}}_{yx}^1 - \hat{\mathbf{S}}_{xy}^1)] + \\ & + \ddot{l}_s(\hat{\mathbf{S}}_{xx}^1 + \hat{\mathbf{S}}_{yy}^1 + \hat{\mathbf{S}}_{zz}^1) + 2\dot{l}_s[\omega_x(\hat{\mathbf{S}}_{zy}^1 - \hat{\mathbf{S}}_{yz}^1) + \omega_y(\hat{\mathbf{S}}_{xz}^1 - \hat{\mathbf{S}}_{zx}^1) + \\ & + \omega_z(\hat{\mathbf{S}}_{yx}^1 - \hat{\mathbf{S}}_{xy}^1)] + \dot{l}_s^2(\hat{\mathbf{S}}_{xx}^4 + \hat{\mathbf{S}}_{yy}^4 + \hat{\mathbf{S}}_{zz}^4) \end{aligned} \quad (3.36)$$

$$\mathbf{K}_{elas}^r = \frac{k_y}{\rho A} \hat{\mathbf{S}}_{yy}^3 + \frac{k_z}{\rho A} \hat{\mathbf{S}}_{zz}^3 + \frac{EI_y}{\rho A} \hat{\mathbf{S}}_{yy}^3 + \frac{EI_z}{\rho A} \hat{\mathbf{S}}_{zz}^3 \quad (3.37)$$

$$\mathbf{M}^r = \hat{\mathbf{S}}_{xx} + \hat{\mathbf{S}}_{yy} + \hat{\mathbf{S}}_{zz}, \quad (3.38)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{G}^r = & 2[\omega_x(\hat{\mathbf{S}}_{zy} - \hat{\mathbf{S}}_{yz}) + \omega_y(\hat{\mathbf{S}}_{xz} - \hat{\mathbf{S}}_{zx}) + \omega_z(\hat{\mathbf{S}}_{yx} - \hat{\mathbf{S}}_{xy}) + \\ & + \dot{l}_s(\hat{\mathbf{S}}_{xx}^1 + \hat{\mathbf{S}}_{yy}^1 + \hat{\mathbf{S}}_{zz}^1)], \end{aligned} \quad (3.39)$$

donde la siguiente definición de $\hat{\mathbf{S}}^4$:

$$\hat{\mathbf{S}}^4 = \rho A \int_{-\infty}^{+\infty} \begin{bmatrix} \mathbf{S}_x \mathbf{S}_x''^T & \mathbf{S}_x \mathbf{S}_y''^T & \mathbf{S}_x \mathbf{S}_z''^T \\ \mathbf{S}_y \mathbf{S}_x''^T & \mathbf{S}_y \mathbf{S}_y''^T & \mathbf{S}_y \mathbf{S}_z''^T \\ \mathbf{S}_z \mathbf{S}_x''^T & \mathbf{S}_z \mathbf{S}_y''^T & \mathbf{S}_z \mathbf{S}_z''^T \end{bmatrix} d\xi = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{S}}_{xx}^4 & \hat{\mathbf{S}}_{xy}^4 & \hat{\mathbf{S}}_{xz}^4 \\ \hat{\mathbf{S}}_{yx}^4 & \hat{\mathbf{S}}_{yy}^4 & \hat{\mathbf{S}}_{yz}^4 \\ \hat{\mathbf{S}}_{zx}^4 & \hat{\mathbf{S}}_{zy}^4 & \hat{\mathbf{S}}_{zz}^4 \end{bmatrix} \quad (3.40)$$

ha permitido el uso del siguiente invariante:

$$\rho A \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{S}^T \mathbf{S}'' d\xi = \hat{\mathbf{S}}_{xx}^4 + \hat{\mathbf{S}}_{yy}^4 + \hat{\mathbf{S}}_{zz}^4. \quad (3.41)$$

Las matrices \mathbf{G}^r y \mathbf{K}_{geom}^r se han obtenido de las derivadas de T y, por tanto, el término $\mathbf{G}^r \mathbf{q}_f$, que no da lugar a fuerzas disipativas, y el término $\mathbf{K}_{geom}^r \mathbf{q}_f$ son fuerzas de inercia generalizadas. No se han incluido en el modelo de la vía términos disipadores de energía, necesarios para una descripción más realista. El término \mathbf{K}_{elas}^r se obtiene de la derivada de U .

3.3.3 Selección de las funciones de forma

La formulación que se presenta en este capítulo es compatible con varias familias de funciones de forma (Shamalta & Metrikine, 2003; Vostroukhov & Metrikine, 2003). Una función de forma es adecuada si contribuye a representar la forma en que verdaderamente se deforma la vía por efecto del paso del vehículo. Otro requisito que deben cumplir las funciones de forma es que existan las integrales de las mismas siendo los límites de integración $-\infty$ e ∞ . Las funciones de forma utilizadas al aplicar la formulación presentada en este capítulo se corresponden con la solución de equilibrio estacionario de la ecuación de una viga de Euler-Bernoulli sobre una base elástica de Winkler excitada por una carga móvil constante que avanza a velocidad V . Esta solución ha sido obtenida analíticamente por diversos autores (Kenney, 1954; Fryba, 1972; Mallik *et al.*, 2006). La ecuación en derivadas

parciales de una viga de Euler-Bernouilli sobre una base elástica de Winkler y sometida a una carga móvil puede escribirse como sigue:

$$EI \frac{\partial^4 u}{\partial s^4} + ku + \rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + c \frac{\partial u}{\partial t} = P(s, t) \quad (3.42)$$

donde $u = u(s, t)$ es el desplazamiento transversal de la vía, E es el módulo de Young del material de la viga, I es el segundo momento de área de la sección transversal de la viga con respecto a su eje neutro, k es la constante de rigidez de la base elástica por unidad de longitud, ρ es la densidad del material, A es la sección transversal de la viga, c es el coeficiente de amortiguamiento viscoso por unidad de longitud, $P(s, t)$ es la carga aplicada por unidad de longitud, s es la coordenada espacial medida a lo largo de la longitud de la viga, y t es el tiempo. Si una carga concentrada P se mueve con velocidad constante V , entonces $P(s, t) = P\delta(s - Vt)$, donde δ es la delta de Dirac y s se mide desde la posición de aplicación de la carga en $t = 0$.

Este modelo no tiene en cuenta los apoyos discretos de la vía producidos por las traviesas. Existen estudios (Dukkipati & Dong, 1999) que demuestran que las fuerzas dinámicas producidas por los apoyos discretos son muy pequeñas comparadas con el valor medio de las fuerzas totales que se producen, por lo que pueden no considerarse en el estudio de diversos problemas, como es el caso del estudio de fenómenos dinámicos asociados al vehículo ferroviario que se producen a bajas frecuencias. Al aplicar la formulación únicamente se ha tenido en cuenta una función de forma en cada dirección en la que se considera que se deforman los carriles (vertical y transversal). Esta opción se puede considerar muy simplificada y sólo es adecuada para analizar el comportamiento dinámico del vehículo a bajas frecuencias (negociado de curvas, estabilidad, . . .), pero no la dinámica de la vía que ocurre a altas frecuencias. En este caso una única función de forma por dirección de deformación no sería suficiente para describir las deformaciones. Si el interés de un estudio se centra en la dinámica de la vía incluyendo efectos transitorios, deberían usarse otras familias de funciones de forma (por ejemplo, wavelets) y mayor número de funciones. Es posible modelar la vía de forma más detallada aplicando el método de las deformadas móviles utilizando una familia adecuada de funciones de forma.

3.3.4 Cinemática de un cuerpo rígido del vehículo ferroviario

Una vez introducido el sistema de referencia de la trayectoria para describir la deformación de la vía, la posición y orientación de los cuerpos que forman el vehículo ferroviario se describen en este mismo sistema de referencia. Como se ha comentado previamente, las ventajas de la descripción de las coordenadas del vehículo en este sistema móvil es que en él los movimientos estacionarios se describen mediante coordenadas constantes, es decir, los movimientos estacionarios constituyen puntos de equilibrio de las ecuaciones diferenciales de movimiento, por lo que el estudio de la estabilidad puede realizarse mediante el análisis de autovalores de las ecuaciones de movimiento linealizadas. Si en lugar de describir las coordenadas del vehículo en el sistema de la trayectoria se hiciese en el sistema inercial, que es lo usual en dinámica de sistemas multicuerpo, los movimientos estacionarios estarían descritos por órbitas periódicas (Escalona & Chamorro, 2008), por lo que habría que aplicar la teoría de Floquet, que es más compleja y supone más coste computacional que el cálculo de autovalores.

La Fig. 3.5 muestra un cuerpo arbitrario del vehículo cinemáticamente descrito respecto al sistema de referencia de la trayectoria.

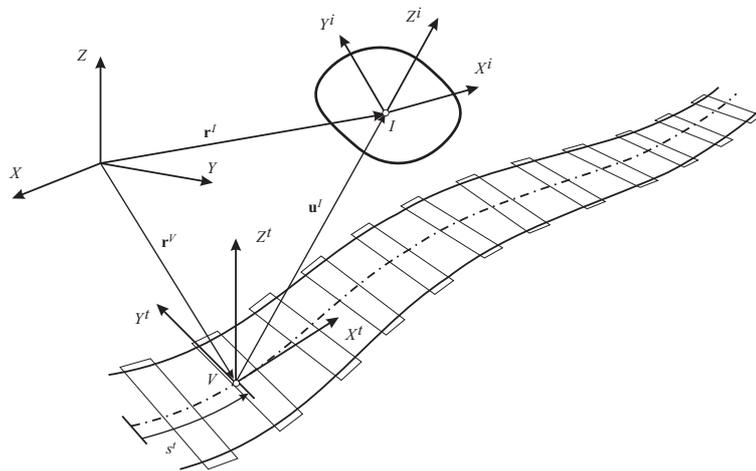


Figura 3.5: Descripción cinemática respecto al sistema de referencia de la trayectoria

La cinemática del cuerpo i puede describirse usando 6 coordenadas: 3 coordenadas de desplazamiento, x^i , y^i y z^i ; y 3 coordenadas de orientación, los ángulos

de Euler $\varphi^i, \theta^i, \gamma^i$. El vector de coordenadas \mathbf{q}^i del cuerpo es el siguiente:

$$\mathbf{q}^i = \left[x^i \quad y^i \quad z^i \quad \varphi^i \quad \theta^i \quad \gamma^i \right]^T. \quad (3.43)$$

La posición absoluta del origen I del sistema de referencia del sólido i con respecto al sistema global de referencia viene dada por:

$$\mathbf{r}^I = \mathbf{r}^V + \mathbf{A}^t \bar{\mathbf{u}}^{tI} \quad (3.44)$$

donde $\bar{\mathbf{u}}^{tI}$ es el desplazamiento del origen del sistema de referencia del sólido con respecto al sistema de referencia de la trayectoria. La velocidad en el sistema de referencia global viene dada por la siguiente ecuación:

$$\dot{\mathbf{r}}^I = \dot{\mathbf{r}}^V + \dot{\mathbf{A}}^t \bar{\mathbf{u}}^{tI} + \mathbf{A}^t \dot{\bar{\mathbf{u}}}^{tI}. \quad (3.45)$$

La velocidad del origen del sistema de referencia del sólido i en función del vector de coordenadas del sólido \mathbf{q}^i puede escribirse como se detalla a continuación:

$$\dot{\mathbf{r}}^I = \mathbf{H}_1 + \mathbf{H}_2 \mathbf{q}^i + \mathbf{H}_3 \dot{\mathbf{q}}^i \quad (3.46)$$

donde $\mathbf{H}_1, \mathbf{H}_2$ y \mathbf{H}_3 son funciones explícitas del tiempo cuando se considera una restricción de velocidad de avance constante y puede obtenerse como sigue:

$$\mathbf{H}_1 = \dot{\mathbf{r}}^V, \quad (3.47)$$

$$\mathbf{H}_2 = \left[\mathbf{A}^t \tilde{\boldsymbol{\omega}}^t \quad \mathbf{0} \right], \quad (3.48)$$

$$\mathbf{H}_3 = \left[\mathbf{A}^t \quad \mathbf{0} \right]. \quad (3.49)$$

La matriz de orientación del sólido i con respecto al sistema de referencia de la trayectoria \mathbf{A}^{it} se obtiene como resultado de tres rotaciones sucesivas; una primera rotación de lazo ψ alrededor del eje vertical; una segunda rotación de vuelco θ respecto al nuevo eje X ; y un giro de rodadura γ respecto al nuevo eje Y . Esta secuencia de rotaciones lleva a la siguiente matriz:

$$\mathbf{A}^{it} = \mathbf{A}_{\varphi}^i \mathbf{A}_{\theta}^i \mathbf{A}_{\gamma}^i \quad (3.50)$$

siendo

$$\mathbf{A}_\varphi^i = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\operatorname{sen}\varphi & 0 \\ \operatorname{sen}\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (3.51)$$

$$\mathbf{A}_\theta^i = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ 0 & \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix}, \quad (3.52)$$

$$\mathbf{A}_\gamma^i = \begin{bmatrix} \cos\gamma & 0 & \operatorname{sen}\gamma \\ 0 & 1 & 0 \\ -\operatorname{sen}\gamma & 0 & \cos\gamma \end{bmatrix}. \quad (3.53)$$

El vector de velocidad angular del sólido i en su sistema de referencia local $\bar{\boldsymbol{\omega}}^i$ viene dado por:

$$\bar{\boldsymbol{\omega}}^i = \mathbf{A}^{iT} \bar{\boldsymbol{\omega}}^t + \bar{\boldsymbol{\omega}}^{ti} = \mathbf{G}_1 + \mathbf{G}_2 \dot{\mathbf{q}}^i \quad (3.54)$$

donde $\mathbf{A}^{iT} \bar{\boldsymbol{\omega}}^t$ es el vector de velocidad angular del sistema de referencia de la trayectoria con respecto al sistema de referencia global expresado en el sistema de referencia local del sólido i , y puede ser identificada con \mathbf{G}_1 ; y $\bar{\boldsymbol{\omega}}^{ti}$ es el vector de velocidad angular del sólido i con respecto al sistema de referencia de la trayectoria en el sistema de referencia del sólido, y puede identificarse con $\mathbf{G}_2 \dot{\mathbf{q}}^i$, donde \mathbf{G}_2 puede obtenerse de la siguiente manera:

$$\mathbf{G}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -\cos\theta \operatorname{sen}\gamma & \cos\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \operatorname{sen}\theta & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cos\theta \cos\gamma & \operatorname{sen}\gamma & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.55)$$

\mathbf{G}_1 y \mathbf{G}_2 son funciones explícitas de las coordenadas \mathbf{q}^i .

3.3.5 Dinámica de un cuerpo rígido del vehículo ferroviario

En esta subsección se muestran las ecuaciones de movimiento del sólido i . Asumiendo que el sistema de referencia local del sólido i se encuentra posicionado en su centro de gravedad, la energía cinética del sólido puede obtenerse de la siguiente manera:

$$T = \frac{1}{2} m^i \dot{\mathbf{r}}^{iT} \dot{\mathbf{r}}^I + \frac{1}{2} \bar{\boldsymbol{\omega}}^{iT} \bar{\mathbf{I}} \bar{\boldsymbol{\omega}}^i \quad (3.56)$$

donde m^i es la masa del sólido i e $\bar{\mathbf{I}}$ es el tensor de inercia en coordenadas locales. Sustituyendo las ecuaciones (3.46) y (3.54) en la ecuación (3.56) la energía cinética tiene la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} T = & \left(\frac{1}{2} m^i \mathbf{H}_1^T \mathbf{H}_1 + \frac{1}{2} \mathbf{G}_1^T \bar{\mathbf{I}} \mathbf{G}_1 \right) + m^i \mathbf{H}_1^T \mathbf{H}_2 \mathbf{q}^i + (m^i \mathbf{H}_1^T \mathbf{H}_3 + \mathbf{G}_1^T \bar{\mathbf{I}} \mathbf{G}_2) \dot{\mathbf{q}}^i + \\ & + \mathbf{q}^{iT} \left(\frac{1}{2} m^i \mathbf{H}_2^T \mathbf{H}_2 \right) \mathbf{q}^i + \mathbf{q}^{iT} (m^i \mathbf{H}_2^T \mathbf{H}_3) \dot{\mathbf{q}}^i + \dot{\mathbf{q}}^{iT} \left(\frac{1}{2} m^i \mathbf{H}_3^T \mathbf{H}_3 + \frac{1}{2} \mathbf{G}_2^T \bar{\mathbf{I}} \mathbf{G}_2 \right) \dot{\mathbf{q}}^i. \end{aligned} \quad (3.57)$$

Aplicando las ecuaciones de Lagrange se llega a la siguiente ecuación:

$$\mathbf{M}^i \ddot{\mathbf{q}}^i + \mathbf{G}^i \dot{\mathbf{q}}^i + \mathbf{K}_{geom}^i \mathbf{q}^i = \mathbf{Q}^i + \mathbf{Q}_v^i + \mathbf{Q}_R^i \quad (3.58)$$

donde \mathbf{M}^i , \mathbf{G}^i , \mathbf{K}_{geom}^i son las matrices de masa, giroscópica y de rigidez geométrica, respectivamente; \mathbf{Q}^i son las fuerzas generalizadas aplicadas (gravedad, fuerzas de contacto rueda-carril); \mathbf{Q}_v^i es el vector de fuerzas de inercia cuadráticas en velocidad; y \mathbf{Q}_R^i son las fuerzas generalizadas de reacción debidas a las restricciones de los pares cinemáticos o debidas a otras restricciones de movimiento. Además de \mathbf{Q}_v^i , los tres términos de la izquierda de la ecuación anterior son también fuerzas de inercia, procedentes de la energía cinética T . La expresión de las tres matrices anteriores y de los vectores de fuerza se detalla a continuación:

$$\mathbf{M}^i = \mathbf{M}_6, \quad (3.59)$$

$$\mathbf{G}^i = \mathbf{M}_5^T - \mathbf{M}_5, \quad (3.60)$$

$$\mathbf{K}_{geom}^i = \dot{\mathbf{M}}_5^T - \mathbf{M}_4, \quad (3.61)$$

$$\mathbf{Q}^v = -\frac{\partial \mathbf{M}_3}{\partial t} - \frac{1}{2} \frac{\partial \mathbf{M}_6}{\partial \mathbf{q}^i} \dot{\mathbf{q}}^{i2} + \frac{1}{2} \frac{\partial \mathbf{M}_1}{\partial \mathbf{q}^i} + \mathbf{M}_2 \quad (3.62)$$

donde \mathbf{M}_1 , \mathbf{M}_2 , \mathbf{M}_3 , \mathbf{M}_4 , \mathbf{M}_5 y \mathbf{M}_6 son definidas a continuación:

$$\mathbf{M}_1(\mathbf{q}, t) = m^i \mathbf{H}_1^T \mathbf{H}_1 + \mathbf{G}_1^T \bar{\mathbf{I}} \mathbf{G}_1, \quad (3.63)$$

$$\mathbf{M}_2(t) = m^i \mathbf{H}_1^T \mathbf{H}_2, \quad (3.64)$$

$$\mathbf{M}_3(\mathbf{q}, t) = m^i \mathbf{H}_1^T \mathbf{H}_3 + \mathbf{G}_1^T \bar{\mathbf{I}} \mathbf{G}_2, \quad (3.65)$$

$$\mathbf{M}_4(t) = m^i \mathbf{H}_2^T \mathbf{H}_2, \quad (3.66)$$

$$\mathbf{M}_5(t) = m^i \mathbf{H}_2^T \mathbf{H}_3, \quad (3.67)$$

$$\mathbf{M}_6(\mathbf{q}) = m^i \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \mathbf{G}_2^T \bar{\mathbf{I}} \mathbf{G}_2. \quad (3.68)$$

3.3.6 Ecuaciones del movimiento del sistema multicuerpo vehículo-vía

Un vehículo ferroviario está formado por un conjunto de sólidos, que pueden ser rígidos o flexibles, conectados mediante pares cinemáticos y elementos de fuerza como muelles, amortiguadores y actuadores. Considerando que el vehículo está formado por n sólidos, el vector de coordenadas del sistema vehículo-vía puede escribirse como sigue:

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} \mathbf{q}_r^v \\ \mathbf{q}_f^v \\ \mathbf{q}_f^r \end{bmatrix} \quad (3.69)$$

donde \mathbf{q}_r^v es el vector de coordenadas de referencia de los sólidos del vehículo, \mathbf{q}_f^v es el vector de coordenadas elásticas de los sólidos flexibles del vehículo, y \mathbf{q}_f^r es el vector de coordenadas elásticas de la vía flexible. Se vio que las ecuaciones del movimiento del sistema con restricciones pueden obtenerse añadiendo las ecuaciones de las restricciones cinemáticas a las ecuaciones diferenciales del sistema e incluyendo las fuerzas de reacción asociadas mediante el vector de multiplicadores de Lagrange $\boldsymbol{\lambda}$ como sigue:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + (\mathbf{C} + \mathbf{G})\dot{\mathbf{q}} + (\mathbf{K}_{geom} + \mathbf{K}_{elas})\mathbf{q} + \phi_q^T \boldsymbol{\lambda} = \mathbf{Q}_v + \mathbf{Q}, \quad (3.70)$$

$$\phi = \mathbf{0}$$

donde \mathbf{M} , \mathbf{C} , \mathbf{G} , \mathbf{K}_{geom} , \mathbf{K}_{elas} son las matrices de masa, amortiguamiento, giroscópica, de rigidez geométrica y de rigidez elástica del sistema, respectivamente; $\boldsymbol{\phi}$ es el vector de restricciones; $\boldsymbol{\phi}_q$ es la matriz jacobiana del vector de restricciones con respecto a las coordenadas generalizadas del sistema; \mathbf{Q}_v es el vector de fuerzas de inercia cuadráticas en velocidad; y \mathbf{Q} son las fuerzas generalizadas aplicadas que incluyen las fuerzas de contacto rueda-carril (Shabana, 1994).

3.4 Equilibrio estacionario de un eje ferroviario

En esta sección se presenta un modelo lineal para el estudio de la dinámica lateral de vehículos ferroviarios en vías de curvatura constante (Escalona, 2005, 2010). Se presenta también la metodología para la obtención de movimientos estacionarios aplicando modelos lineales y no lineales.

3.4.1 Dinámica lateral de vehículos ferroviarios en vías de curvatura constante con modelos lineales

Los modelos lineales utilizados en esta investigación se basan en los modelos clásicos de Newland (1969) o Boocock (1969). Se asume una superficie cónica para la rueda y *contacto de cuchillo* entre rueda y carril, es decir, se asume que el punto de contacto se desplaza por la superficie de la rueda pero no sobre la superficie de la cabeza del carril, que de hecho no se modela sino que se supone que es una línea. Las fuerzas tangenciales de contacto se calculan aplicando la teoría lineal de Kalker (Kalker, 1967), como se muestra a continuación:

$$\begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ M_z \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} f_{11} & 0 & 0 \\ 0 & f_{22} & f_{23} \\ 0 & -f_{23} & f_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_x \\ \xi_y \\ \xi_z \end{bmatrix} \quad (3.71)$$

donde F_x , F_y y M_z son las fuerzas de creep longitudinal, lateral y el momento de pivotamiento, respectivamente, ξ_x , ξ_y y ξ_z son los creepages longitudinal, lateral y de pivotamiento, respectivamente, y f_{11} , f_{22} , f_{33} y f_{23} son los coeficientes lineales de Kalker.

En lo que sigue se describe la cinemática y la dinámica que llevan a la obtención de las ecuaciones de movimiento.

Cinemática del eje ferroviario

Sea un eje ferroviario de masa m^w viajando a una velocidad constante V sobre una vía circular de radio constante R . Se asume que la vía tiene un ángulo de bancada β .

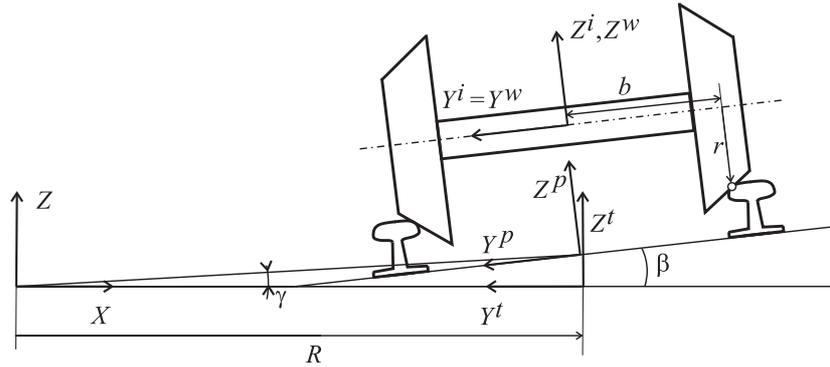


Figura 3.6: Sistemas de referencia del modelo lineal

Los sistemas de referencia que se utilizan son los siguientes (ver Fig. 3.6):

- Sistema global, situado en el centro de la vía circular.
- Sistema de la trayectoria. Se sitúa en la línea central de referencia de la vía y avanza a lo largo de la misma con la velocidad de avance V del vehículo. Este sistema gira un ángulo $\alpha = Vt/R$ en torno al eje Z del sistema global, donde t es el tiempo. La matriz de orientación de este sistema respecto al global viene dada por:

$$\mathbf{A}^{tg} = \begin{bmatrix} -\text{sen}\alpha & -\text{cos}\alpha & 0 \\ \text{cos}\alpha & \text{sen}\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (3.72)$$

- Sistema del peralte. Este sistema sigue al sistema de la trayectoria y está girado en torno al eje X de dicho sistema el ángulo de bancada β . La matriz de orientación de este sistema respecto al de la trayectoria viene dada por:

$$\mathbf{A}^{pt} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \text{cos}\beta & \text{sen}\beta \\ 0 & -\text{sen}\beta & \text{cos}\beta \end{bmatrix}. \quad (3.73)$$

- Sistema intermedio. La posición de su origen respecto al sistema del peralte es $[0 \ y \ r]$, donde y es la coordenada de desplazamiento lateral del eje y r es el radio medio de rodadura de las ruedas del eje cuando este está centrado en la vía. Rota un ángulo de lazo θ en torno al eje Z del sistema del peralte. La matriz de orientación de este sistema respecto al del peralte viene dada por:

$$\mathbf{A}^{ip} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta & 0 \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (3.74)$$

- Sistema del eje. Este gira el ángulo de rodadura ψ de las ruedas del eje en torno al eje Y del sistema intermedio. La matriz de orientación de este sistema respecto al intermedio viene dada por:

$$\mathbf{A}^{wi} = \begin{bmatrix} \cos\psi & 0 & \operatorname{sen}\psi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\operatorname{sen}\psi & 0 & \cos\psi \end{bmatrix}. \quad (3.75)$$

El sistema intermedio comparte la dirección Y con el sistema del eje pero no describe el giro de rodadura. En lugar de utilizar 6 coordenadas, 3 de traslación y 3 de orientación, para la descripción de la posición del centro de gravedad del eje, en el modelo simplificado se consideran únicamente 2 coordenadas, el desplazamiento lateral y y el ángulo de lazo θ del sistema intermedio del eje, pues la coordenada de avance y la velocidad angular de rodadura se suponen conocidas. Por tanto, el vector de coordenadas generalizadas \mathbf{q} utilizado para la descripción del movimiento del eje vienen dado por:

$$\mathbf{q}^w = \begin{bmatrix} y \\ \theta \end{bmatrix}. \quad (3.76)$$

La posición absoluta del centro de gravedad W del eje se obtiene como sigue:

$$\mathbf{r}^W = \mathbf{A}_1 \mathbf{A}_2 \begin{bmatrix} R \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \mathbf{A}^{tg} \mathbf{A}^{pt} \begin{bmatrix} 0 \\ y \\ r \end{bmatrix} \quad (3.77)$$

donde

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha & 0 \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad y \quad \mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\gamma \\ 0 & 1 & 0 \\ \gamma & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.78)$$

donde el ángulo γ , que queda definido en la Fig. 3.6, se asume suficientemente pequeño para hacer la siguiente aproximación:

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}\gamma &= \gamma, \\ \cos\gamma &= 1. \end{aligned} \quad (3.79)$$

Derivando (3.77) respecto al tiempo se obtiene el vector velocidad absoluta $\dot{\mathbf{r}}^W$ del centro de gravedad del eje:

$$\dot{\mathbf{r}}^W = \dot{\mathbf{A}}_1 \mathbf{A}_2 \begin{bmatrix} R \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \dot{\mathbf{A}}^{tg} \mathbf{A}^{pt} \begin{bmatrix} 0 \\ y \\ r \end{bmatrix} + \mathbf{A}^{tg} \mathbf{A}^{pt} \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{y} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.80)$$

donde las matrices $\dot{\mathbf{A}}_1$ y $\dot{\mathbf{A}}^{tg}$ vienen dadas por lo siguiente:

$$\dot{\mathbf{A}}_1 = \frac{V}{R} \begin{bmatrix} -\operatorname{sen}\alpha & -\cos\alpha & 0 \\ \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad y \quad \dot{\mathbf{A}}^{tg} = \frac{V}{R} \begin{bmatrix} -\cos\alpha & \operatorname{sen}\alpha & 0 \\ -\operatorname{sen}\alpha & -\cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.81)$$

Dinámica del eje ferroviario

Las ecuaciones de movimiento del eje ferroviario sin suspensión se obtienen aplicando las ecuaciones de Lagrange:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \mathbf{q}} = \mathbf{Q} \quad (3.82)$$

donde la energía cinética T se calcula como sigue:

$$T = \frac{1}{2} m {}^w \dot{\mathbf{r}}^{WT} \dot{\mathbf{r}}^W + \frac{1}{2} \bar{\boldsymbol{\omega}}^{wT} \bar{\mathbf{I}}^w \bar{\boldsymbol{\omega}}^w \quad (3.83)$$

donde $\bar{\mathbf{I}}^w$ es el tensor de inercia respecto al sistema local del eje:

$$\bar{\mathbf{I}}^w = \begin{bmatrix} I_x & 0 & 0 \\ 0 & I_y & 0 \\ 0 & 0 & I_x \end{bmatrix} \quad (3.84)$$

y $\bar{\boldsymbol{\omega}}^w$ es la velocidad angular del eje en coordenadas locales que se obtiene como sigue:

$$\bar{\boldsymbol{\omega}}^w = \begin{bmatrix} 0 \\ \omega \\ 0 \end{bmatrix} + \mathbf{A}^{wiT} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} + (\mathbf{A}^{tg} \mathbf{A}^{pt} \mathbf{A}^{ip} \mathbf{A}^{wi})^T \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\alpha} \end{bmatrix} \quad (3.85)$$

Se asume que $\omega = V/r$ es la velocidad de rodadura de las ruedas del eje.

Las fuerzas generalizadas \mathbf{Q} asociadas a las coordenadas generalizadas del eje se calculan aplicando el principio de los trabajos virtuales a las fuerzas externas, en este caso, la fuerza gravitatoria $\mathbf{F}_{grav} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -m^w g \end{bmatrix}^T$, y las fuerzas y momento tangenciales de contacto (ecuación (3.71)). Se vio en el capítulo anterior que los pseudo-deslizamientos relativos, necesarios en la ecuación (3.71), se calculan mediante (2.45). La velocidad del punto de contacto perteneciente al carril, asumiendo que este es rígido, es nula. La velocidad del punto de contacto de la rueda izquierda $\dot{\mathbf{r}}^L$ se calcula derivando el vector de posición absoluta siguiente:

$$\mathbf{r}^L = \mathbf{r}^W + \mathbf{A}^{tg} \mathbf{A}^{pt} \mathbf{A}^{ip} \bar{\mathbf{r}}^{iL} \quad (3.86)$$

donde $\bar{\mathbf{r}}^{iL}$ es el vector de posición del punto de contacto de la rueda izquierda en el sistema intermedio y que se muestra a continuación:

$$\bar{\mathbf{r}}^{iL} = \begin{bmatrix} 0 & b - y & -r_L \end{bmatrix}^T \quad (3.87)$$

donde la distancia b se define en la Fig. 3.6, y r_L es el radio de rodadura de la rueda izquierda en el punto de contacto y se calcula como sigue:

$$r_L = r + \lambda y \quad (3.88)$$

Derivando (3.86) se obtiene lo siguiente:

$$\dot{\mathbf{r}}^L = \dot{\mathbf{r}}^W + \mathbf{A}^{tg} \mathbf{A}^{pt} \mathbf{A}^{ip} \tilde{\boldsymbol{\omega}}^{iL} \bar{\mathbf{r}}^{iL} \quad (3.89)$$

Para el punto de contacto de la rueda derecha, de la misma forma, se obtiene lo siguiente:

$$\mathbf{r}^R = \mathbf{r}^W + \mathbf{A}^{tg} \mathbf{A}^{pt} \mathbf{A}^{ip} \bar{\mathbf{r}}^{iR} \quad (3.90)$$

donde $\bar{\mathbf{r}}^{iR}$ es el vector de posición del punto de contacto de la rueda derecha en el sistema intermedio y que se muestra a continuación:

$$\bar{\mathbf{r}}^{iR} = \begin{bmatrix} 0 & -b - y & -r_R \end{bmatrix}^T \quad (3.91)$$

donde r_R es el radio de rodadura de la rueda derecha en el punto de contacto y se calcula como sigue:

$$r_R = r - \lambda y \quad (3.92)$$

donde λ es la conicidad de las ruedas. Derivando (3.90) se obtiene lo siguiente:

$$\dot{\mathbf{r}}^R = \dot{\mathbf{r}}^W + \mathbf{A}^{tg} \mathbf{A}^{pt} \mathbf{A}^{ip} \tilde{\boldsymbol{\omega}}^i \bar{\mathbf{r}}^{iR} \quad (3.93)$$

donde la velocidad angular en el sistema intermedio $\tilde{\boldsymbol{\omega}}^i$ se calcula como sigue:

$$\tilde{\boldsymbol{\omega}}^i = \mathbf{A}^{wi} \tilde{\boldsymbol{\omega}}^w. \quad (3.94)$$

La velocidad relativa del punto de contacto se proyecta en los vectores tangentes y normal a la superficie en el punto de contacto. Estos vectores se expresan en forma de matriz, siendo \mathbf{A}^{Lw} la matriz que corresponde al contacto de la rueda izquierda y \mathbf{A}^{Rw} la correspondiente a la derecha. La expresión de dichas matrices se presenta a continuación:

$$\mathbf{A}^{Lw} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda \\ 0 & \lambda & 1 \end{bmatrix}, \quad (3.95)$$

$$\mathbf{A}^{Rw} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda \\ 0 & -\lambda & 1 \end{bmatrix}. \quad (3.96)$$

donde el ángulo λ se asume suficientemente pequeño para hacer la siguiente aproximación:

$$\begin{aligned} \text{sen} \lambda &= \lambda, \\ \text{cos} \lambda &= 1. \end{aligned} \quad (3.97)$$

Por tanto, los pseudo-deslizamientos relativos se obtienen proyectando en el sistema de referencia de cada contacto la velocidad de dicho punto y dividiendo entre la velocidad de avance V (ecuación (2.45)). Las velocidades de los puntos de contacto en el sistema de la superficie de la rueda se calculan como sigue:

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{r}}^{CL} &= (\mathbf{A}^{tg} \mathbf{A}^{pt} \mathbf{A}^{ip} \mathbf{A}^{Lw})^T \dot{\mathbf{r}}^L \\
\dot{\mathbf{r}}^{CR} &= (\mathbf{A}^{tg} \mathbf{A}^{pt} \mathbf{A}^{ip} \mathbf{A}^{Rw})^T \dot{\mathbf{r}}^R \\
\bar{\boldsymbol{\omega}}^{CL} &= (\mathbf{A}^{tg} \mathbf{A}^{pt} \mathbf{A}^{ip} \mathbf{A}^{Lw})^T \boldsymbol{\omega} \\
\bar{\boldsymbol{\omega}}^{CR} &= (\mathbf{A}^{tg} \mathbf{A}^{pt} \mathbf{A}^{ip} \mathbf{A}^{Rw})^T \boldsymbol{\omega}
\end{aligned} \tag{3.98}$$

donde

$$\boldsymbol{\omega} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\chi} \end{bmatrix} + \mathbf{A}^{pt} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} + \mathbf{A}^{tg} \mathbf{A}^{pt} \mathbf{A}^{ip} \begin{bmatrix} 0 \\ \boldsymbol{\omega} \\ 0 \end{bmatrix} \tag{3.99}$$

Calculados los pseudo-deslizamientos relativos se aplica la ecuación (3.71) para obtener las fuerzas tangenciales del contacto y el momento de pivotamiento.

Ecuaciones de movimiento

Partiendo de las ecuaciones de Lagrange (3.82) y mediante cálculo simbólico se obtienen las siguientes ecuaciones de movimiento:

$$\mathbf{M}^w \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}^w \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}^w \mathbf{q} = \mathbf{Q}^w \tag{3.100}$$

donde las matrices y vectores del sistema vienen dadas por las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned}
\mathbf{M}^w &= \begin{bmatrix} m^w & 0 \\ 0 & I_x \end{bmatrix}, \\
\mathbf{C}^w &= \frac{1}{V} \begin{bmatrix} 2f & 0 \\ 0 & 2fb^2 \end{bmatrix}, \\
\mathbf{K}^w &= \begin{bmatrix} -m^w V^2 / R^2 & -2f \\ 2fb\lambda/r & 0 \end{bmatrix}, \\
\mathbf{Q}^w &= \frac{1}{R} \begin{bmatrix} -m^w V^2 \\ -2fb^2 \end{bmatrix}.
\end{aligned} \tag{3.101}$$

Las matrices anteriores se han obtenido con las siguientes hipótesis:

- El peralte es nulo, por lo que el ángulo de bancada β es nulo.

- Los coeficientes lineales $f_{11} = f_{22} = f$, y el resto de coeficientes de Kalker son nulos.

3.4.2 Movimientos estacionarios de vehículos ferroviarios con modelos lineales

Las coordenadas correspondientes a los movimientos estacionarios de un vehículo ferroviario pueden obtenerse de la ecuación (3.100) asumiendo nulas las velocidades y aceleraciones generalizadas. Bajo estas condiciones la ecuación (3.100) se convierte en un sistema lineal cuya solución viene dada por:

$$\mathbf{q}_{eq}^w = \mathbf{K}^{w^{-1}} \mathbf{Q}^w. \quad (3.102)$$

La configuración estacionaria con las condiciones asumidas en la subsección anterior tiene la siguiente expresión:

$$\mathbf{q}_{eq}^w = \begin{bmatrix} y_{eq} \\ \theta_{eq} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{br}{\lambda R} \\ \frac{mV^2}{2fR} \left(1 + \frac{br}{R^2\lambda}\right) \end{bmatrix}. \quad (3.103)$$

3.4.3 Movimientos estacionarios de vehículos ferroviarios con modelos no lineales

Esta subsección muestra el cálculo de movimientos estacionarios en la vía con curvatura constante basado en ecuaciones de movimiento no lineales. Los movimientos estacionarios se calculan como puntos de equilibrio de la ecuación diferencial que describe el movimiento del sistema. Sea un sistema vehículo ferroviario-vía descrito por n coordenadas que satisfacen m ecuaciones de restricción. El cálculo de posiciones de equilibrio de dicho sistema, cuyas ecuaciones de movimiento vienen definidas por (3.70), implica resolver un sistema de $n + m$ ecuaciones algebraicas no lineales donde las incógnitas son todas las coordenadas excepto los ángulos de rodadura de los ejes (que son coordenadas ignorables), las velocidades de rodadura y los multiplicadores de Lagrange (Escalona & Chamorro, 2008). Las velocidades, exceptuando la velocidad angular de las ruedas, y las aceleraciones se consideran nulas, ya que las coordenadas se definen respecto a un sistema de referencia de la trayectoria, por lo que son constantes, siendo el tiempo irrelevan-

te. El vector que describe la posición de equilibrio del vehículo ferroviario en la vía puede escribirse como se muestra a continuación:

$$\mathbf{q}_{eq} = \begin{bmatrix} \mathbf{r}^v \\ \boldsymbol{\theta}^v \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{q}_f^v \\ \mathbf{q}_f^r \end{bmatrix}, \quad \dot{\mathbf{q}}_{eq} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \boldsymbol{\omega} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad \ddot{\mathbf{q}}_{eq} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (3.104)$$

donde las tres primeras filas de \mathbf{q}_{eq} son coordenadas de referencia (\mathbf{r}^v las coordenadas de traslación, $\boldsymbol{\theta}^v$ las coordenadas de orientación excepto los ángulos de rodadura de los ejes, y $\mathbf{0}$ es el valor de los ángulos de rodadura); y $\boldsymbol{\omega}$ contiene las velocidades angulares de rodadura ($\dot{\gamma}^i$) de todos los ejes. Introduciendo los vectores dados en (3.104) en las ecuaciones de movimiento (3.70), las $n + m$ ecuaciones algebraicas no lineales que deben resolverse numéricamente se obtienen como sigue:

$$\begin{aligned} & \mathbf{C}(\mathbf{q}_{eq})\dot{\mathbf{q}}(\mathbf{q}_{eq}, \dot{\mathbf{q}}_{eq}) + \mathbf{K}(\mathbf{q}_{eq})\mathbf{q}(\mathbf{q}_{eq}) + \boldsymbol{\phi}_q^T \boldsymbol{\lambda} = \\ & = \mathbf{Q}_v(\mathbf{q}_{eq}, \dot{\mathbf{q}}_{eq}) + \mathbf{Q}(\mathbf{q}_{eq}, \dot{\mathbf{q}}_{eq}) \end{aligned} \quad (3.105)$$

$$\boldsymbol{\phi}(\mathbf{q}_{eq}) = \mathbf{0}$$

De la solución de las ecuaciones anteriores se obtienen las siguientes $n + m$ incógnitas:

$$\mathbf{x}_{eq} = [\mathbf{r}^v \quad \boldsymbol{\theta}^v \quad \mathbf{q}_f^v \quad \mathbf{q}_f^r \quad \boldsymbol{\omega} \quad \boldsymbol{\lambda}]^T \quad (3.106)$$

donde n incógnitas corresponden a coordenadas de posición y velocidad, y m incógnitas corresponden a los multiplicadores de Lagrange que permiten calcular las fuerzas de reacción en la configuración de movimiento estacionario.

La configuración estacionaria puede obtenerse con este método únicamente si las coordenadas se definen respecto al sistema de referencia de la trayectoria. Si las coordenadas se definen en un sistema de referencia inercial, por ejemplo, serían necesarias varias transformaciones de coordenadas para calcular las posiciones de equilibrio (Escalona & Chamorro, 2008).

3.5 Resultados numéricos

En esta sección se muestran los resultados obtenidos en las simulaciones realizadas modelando la vía flexible con el método de las deformadas móviles. Se presentan los modelos utilizados para representar el vehículo ferroviario, la vía y el contacto rueda-carril, además de las funciones de forma utilizadas en las simulaciones. Se muestran resultados de la aplicación del método a vías rectas y vías curvas. Se muestran los movimientos estacionarios calculados y se realiza un análisis de estabilidad con el método de los autovalores desarrollado en la Subsección 2.5.7 del capítulo anterior.

3.5.1 Modelo del vehículo ferroviario

El modelo del vehículo ferroviario utilizado para realizar las simulaciones es un eje ferroviario con pestaña en las ruedas y sin suspensión (ver Fig. 3.7). Sus dimensiones se muestran en la Tabla 3.1. La conicidad de la banda de rodadura de las ruedas se ha considerado $1/20$. Se asume que el eje viaja con una velocidad de avance de 30 m/s. Se aplica una fuerza vertical de 98 KN en el centro de gravedad del eje para representar el peso del vehículo completo. Se asume una masa para el eje de 1568 kg; su momento de inercia se asume 656 kgm^2 (vuelco y lazo) o 168 kgm^2 (rodadura); y el radio de las ruedas cuando el eje está centrado en la vía es 0.456 m. Además, se considera que el material del que está construido el eje es acero y el coeficiente de fricción rueda-carril se asume 0.5.

Tabla 3.1: Datos del eje ferroviario y de la vía

Eje		Vía	
λ	2.86°	$a1$	0.045 m
λ_p	80°	$a2$	0.015 m
L_w	0.6651 m	L_r	0.71 m
b	0.7033 m		
r	0.456 m		

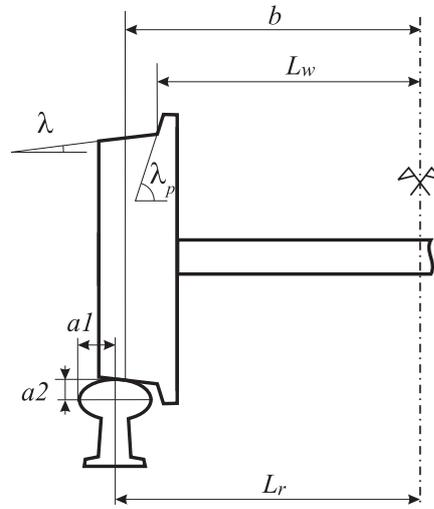


Figura 3.7: Perfiles de la rueda y el carril

3.5.2 Modelo de vía flexible

Las propiedades de rigidez y de inercia del carril deformable son $EI = 1009 \text{ KNm}^2$, en ambas direcciones, y $\rho A = 16.6 \text{ kg/m}$, respectivamente. El perfil del carril se muestra en la Fig. 3.7, donde la cabeza del carril se asume con forma elíptica. Toda la estructura sobre la que apoyan los carriles se modela como una base elástica continua, con rigidez vertical y lateral (ver Fig. 3.8). La rigidez por unidad de longitud k , en ambas direcciones, se hace variar en los resultados para simular diferentes escenarios. La vía no tiene condiciones de contorno y su longitud puede considerarse infinita.

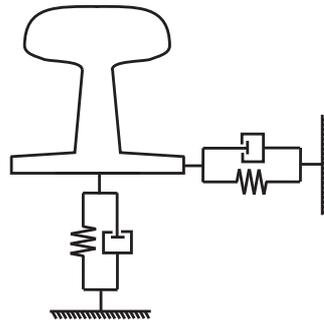


Figura 3.8: Sección transversal del carril y la base elástica

Se realizan simulaciones, aplicando el método de las deformadas móviles, mo-

delando dos tipos de vías: rectas y curvas. Las vías curvas se asumen circulares de curvatura constante. El valor de la curvatura varía en las distintas simulaciones para ver su influencia en los resultados.

Es importante indicar que en los resultados obtenidos no se ha incluido amortiguamiento en la vía.

3.5.3 Modelo de contacto

El problema de contacto rueda-carril se resuelve aplicando la misma formulación elástica detallada en el capítulo anterior. La localización del punto de contacto se determina durante la simulación sin usar tablas precalculadas, mediante el método propuesto por Escalona (2002). La fuerza normal de contacto se define aplicando la teoría de contacto de Hertz (Johnson, 1985), y las fuerzas de creep se determinan aplicando la teoría no lineal de Kalker utilizando tablas precalculadas mediante el algoritmo USETAB (Kalker, 1996).

3.5.4 Funciones de forma

Se ha mencionado anteriormente que la función de forma utilizada en la aplicación del método de las deformadas móviles ha sido la solución de equilibrio estacionario de la ecuación diferencial de una viga de Euler-Bernoulli sobre una base de Winkler sometida a una carga móvil (ecuación (3.42)). Con los parámetros utilizados en las simulaciones, el sistema resulta subamortiguado, siendo la solución de la ecuación (3.42) para un sistema subamortiguado la siguiente:

$$\begin{aligned} u_1(l_s) &= e^{-pl_s} [A \cos(ql_s) + B \sin(ql_s)], \quad \text{for } l_s > 0, \\ u_2(l_s) &= e^{pl_s} [C \cos(rl_s) + D \sin(rl_s)], \quad \text{for } l_s < 0 \end{aligned} \tag{3.107}$$

donde $l_s = s - Vt$ es un parámetro longitudinal (longitud de arco) a lo largo de la vía que sigue la posición de la carga; p, q y r son tres constantes dependientes de la velocidad (Mallik *et al.*, 2006); y A, B, C y D se obtienen imponiendo la continuidad de u y la de sus dos primeras derivadas en $l_s = 0$, e imponiendo $u = 1$ en $l_s = 0$.

La Fig. 3.9 muestra la función de forma obtenida para una velocidad $V = 30$ m/s.

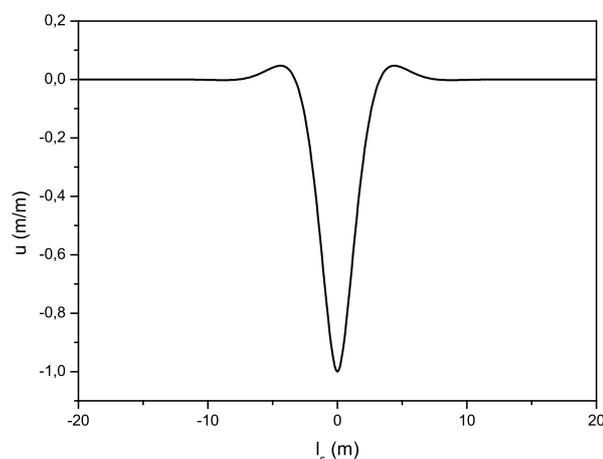


Figura 3.9: Función de forma ($V = 30$ m/s)

Suponiendo que los carriles se deforman únicamente a flexión, dos funciones de forma para cada carril, una en dirección vertical y otra en dirección lateral, permiten describir las deformaciones que produce la circulación del vehículo sobre la vía. La matriz de funciones de forma tiene la siguiente expresión:

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ u(l_s) & 0 \\ 0 & u(l_s) \end{bmatrix} \quad (3.108)$$

donde $u(l_s)$ se obtiene normalizando la solución analítica (3.107).

3.5.5 Resultados del vehículo sobre la vía recta

En esta subsección se presentan los resultados obtenidos en las simulaciones del vehículo ferroviario considerado viajando sobre una vía recta al aplicar el método de las deformadas móviles. Se muestran desplazamientos laterales y verticales del vehículo y la vía, y fuerzas en la banda de rodadura y la pestaña.

La Fig. 3.10 muestra el desplazamiento lateral del eje ferroviario. Las simulaciones se han realizado variando los coeficientes de rigidez de la base elástica, representando desde bases muy flexibles a bases relativamente más rígidas. Los resultados se comparan con el desplazamiento lateral del eje sobre una vía rígida. Las gráficas muestran un comportamiento inestable limitado por los impactos

de las pestañas en ambos carriles. Como puede observarse, cuando más flexible es la base elástica, antes aparece la inestabilidad; además, los desplazamientos ocurridos tras el contacto en las pestañas son mayores cuando la flexibilidad de la base elástica es mayor por el efecto de la deformación lateral de los carriles.

La Fig. 3.11 muestra la fuerza normal de contacto en la banda de rodadura. La fuerza que se representa es la que aparece en la banda de rodadura izquierda cuando se producen impactos en las pestañas. Puede observarse que la amplitud de las oscilaciones aumentan cuando se produce un impacto en las pestañas. Las mayores amplitudes aparecen con los impactos de la pestaña izquierda con el carril izquierdo. También aparece unas oscilaciones de gran amplitud, aunque un poco menores que las anteriores, cuando impacta la pestaña de la rueda derecha con el carril derecho. Por tanto, en la fuerza de contacto normal en la banda de rodadura izquierda se reflejan los impactos en ambas pestañas. Los valles de las oscilaciones producidas por los impactos de la pestaña izquierda en el carril izquierdo en el caso de la vía rígida fueron de 48 kN (no se muestra estos valles en la gráfica correspondiente a la vía rígida).

La Fig. 3.12 muestra la fuerza normal de contacto en una pestaña y el desplazamiento lateral debido a la deformación en el carril para tres coeficientes diferentes de la rigidez de la base elástica. Puede observarse que una vía más flexible muestra oscilaciones mayores ante los impactos laterales. El aumento del desplazamiento lateral por deformación cuando no se produce contacto en la pestaña son debidos al contacto en la otra pestaña. Aunque los dos carriles están desacoplados, las fuerzas que aparecen en uno de ellos afecta al otro a través del eje ferroviario.

La Fig. 3.13 muestra la fuerza normal de contacto en una pestaña para una vía rígida y para una vía flexible con diferentes coeficientes de rigidez de la base elástica. Puede observarse que cuanto más flexible es la vía, menor es la fuerza de contacto y mayor el tiempo de aplicación de la misma.

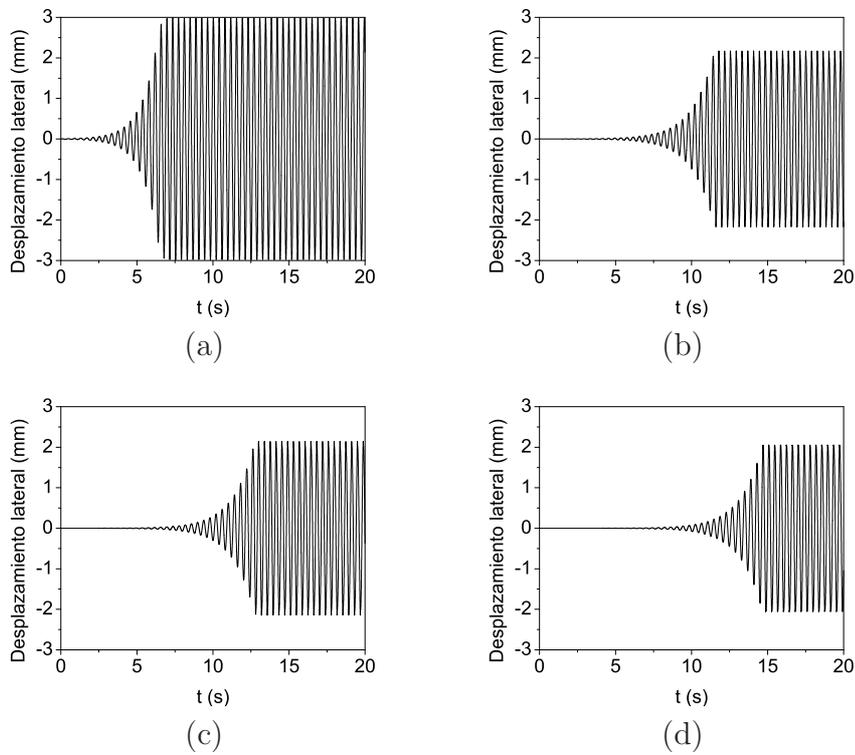


Figura 3.10: Desplazamiento lateral del eje ferroviario: a) $k = 1 \text{ MN/m}^2$; b) $k = 50 \text{ MN/m}^2$; c) $k = 100 \text{ MN/m}^2$; d) Rígido

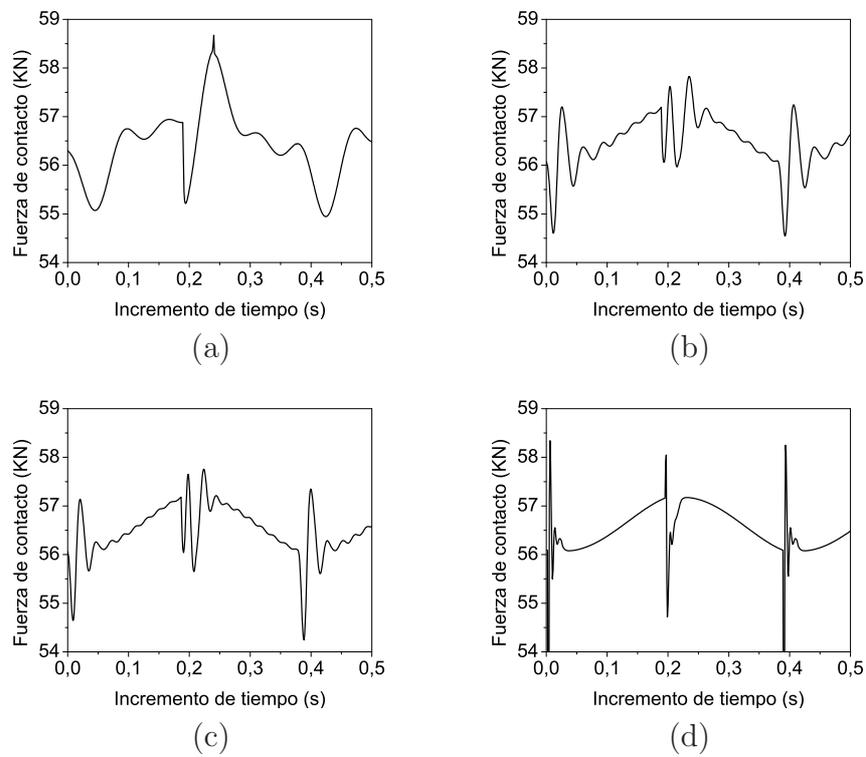
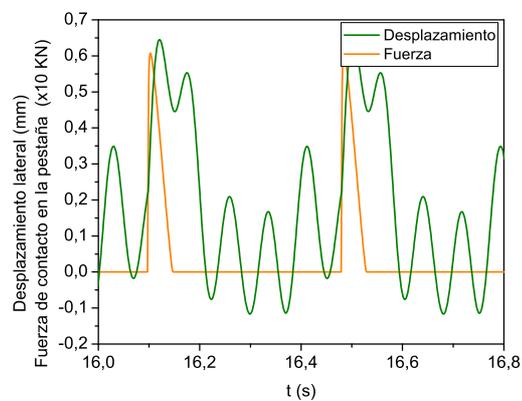
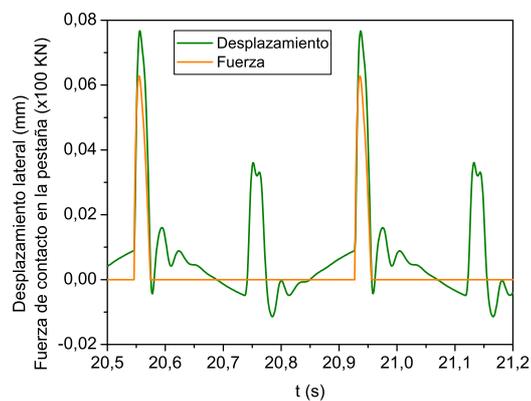


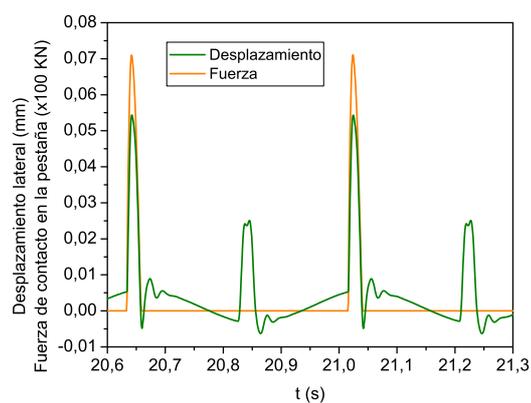
Figura 3.11: Fuerza normal de contacto en la banda de rodadura: a) $k = 1 \text{ MN/m}^2$; b) $k = 50 \text{ MN/m}^2$; c) $k = 100 \text{ MN/m}^2$; d) Rígido



(a)



(b)



(c)

Figura 3.12: Desplazamiento lateral por deformación y fuerza normal de contacto en una pestaña. a) $k = 1 \text{ MN/m}^2$; b) $k = 50 \text{ MN/m}^2$; c) $k = 100 \text{ MN/m}^2$

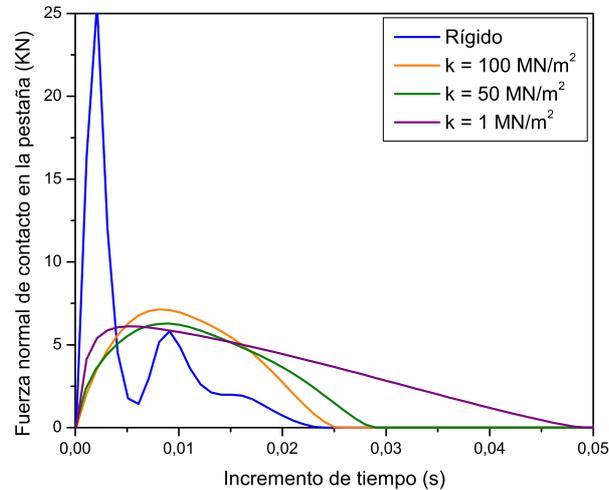


Figura 3.13: Fuerza normal de contacto en una pestaña

Comparación del desplazamiento vertical de la vía con el obtenido con el modelo de la masa móvil

En esta subsección se compara el desplazamiento vertical de la vía aplicando el método de las deformadas móviles con el desplazamiento vertical que se obtiene resolviendo el problema clásico de la masa móvil sobre una base de Winkler, en el que se aplica síntesis modal y se consideran los carriles biempotrados.

La rueda del modelo de la masa móvil viaja a una velocidad de avance de 30 m/s sobre una vía flexible (ver Fig. 2.31). Una fuerza vertical de 49 kN se aplica sobre la rueda para representar el peso de la mitad del vehículo. Se supone que el carril está empotrado en ambos extremos y tiene una longitud de 60 m. Para obtener el desplazamiento por deformación del carril se utilizan 30 modos aplicando el método estándar de superposición modal, mientras que utilizamos una única función de forma al aplicar el método de las deformadas móviles.

La Fig. 3.14 muestra el desplazamiento vertical de tres puntos del carril aplicando las dos formulaciones. Considerando que la función de forma utilizada en el método de las deformadas móviles da el desplazamiento por deformación de la vía que se considera como referencia ante la carga aplicada, puede observarse que 30 modos no son suficientes para obtener el desplazamiento por deformación del carril en el caso de síntesis modal. Además, el método de síntesis modal produce

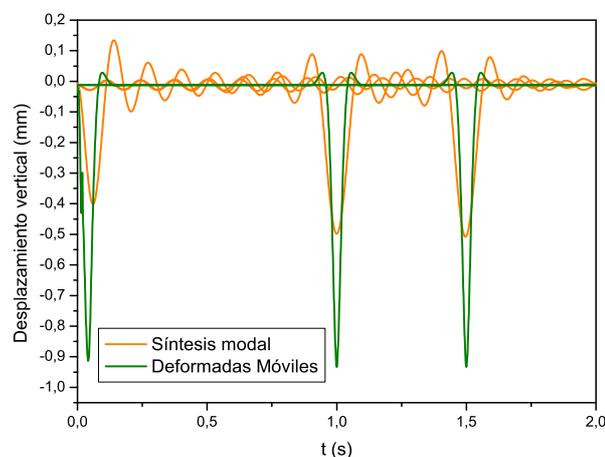


Figura 3.14: Desplazamiento vertical de puntos situados a 1.2, 30 y 45 m desde el comienzo del carril flexible con $k = 50 \text{ MN/m}^2$

oscilaciones lejos del punto de aplicación de la carga. Como puede apreciarse en la gráfica, las diferencias entre los resultados de ambos métodos aumentan cerca de los extremos del carril, debido a las condiciones de contorno ficticias usadas en el método de síntesis modal.

3.5.6 Resultados del vehículo sobre la vía curva

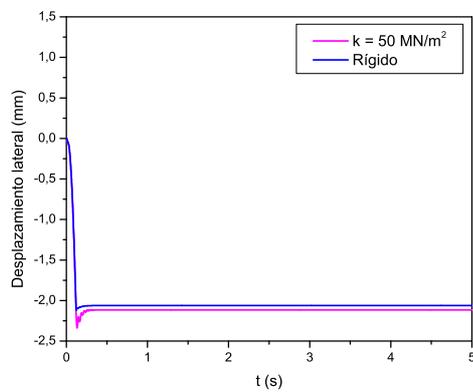
En esta subsección se muestran los resultados obtenidos en las simulaciones numéricas de un eje sin suspensión sobre una vía curva flexible aplicando el método de las deformadas móviles. Como se ha comentado en la Subsección 3.3.1, se asume que la curvatura es suficientemente pequeña para suponer que la vía es localmente recta.

Las figuras de esta subsección muestran el comportamiento de un eje ferroviario en una vía curva. Un eje ferroviario negociando una curva puede sufrir movimiento de lazo, siendo el desplazamiento lateral oscilatorio y limitado por los impactos en la pestaña de una rueda con el carril exterior; o puede presentar contacto permanente en la pestaña sin que se produzca movimiento de lazo (movimiento estable). Un comportamiento u otro depende del valor de la curvatura de la vía pero no de la velocidad de avance. Existe un valor crítico para la curvatura por encima del cual se produce contacto permanente en la pestaña y

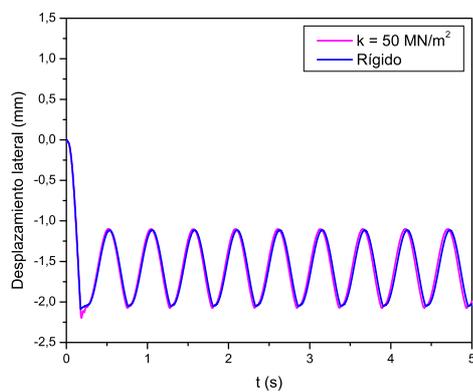
el movimiento del eje se vuelve estable. Por debajo del valor crítico se producen oscilaciones laterales en torno a una posición de equilibrio inestable en la curva que no está centrada en la vía, como se muestra a continuación. La frecuencia de oscilación lateral es aproximadamente la misma que aparece en vías rectas (frecuencia de Klingel). Una aproximación de este valor crítico de la curvatura puede obtenerse de la ecuación (3.103), asumiendo que y_{eq} es la distancia entre la pestaña de la rueda y la cara interna del carril cuando el eje está centrado en la vía (cuando el eje se desplaza y_{eq} entra en contacto la pestaña de la rueda y la vía). El valor crítico del radio de curvatura se asume que es 3125 m para el modelo utilizado en estas simulaciones. Se muestran resultados de simulaciones realizadas para radios de curvatura $R = 2000$, 4000 y 16000 m para analizar el efecto de la flexibilidad de la vía cuando se produce contacto permanente en la pestaña ($R = 2000$ m) y cuando se produce movimiento de lazo ($R = 4000$, 16000 m).

La Fig. 3.15 muestra el desplazamiento lateral del eje. Las gráficas muestran el desplazamiento lateral del eje viajando sobre una vía rígida y sobre una vía flexible asumiendo que la rigidez de la base elástica es $k = 50$ MN/m² para diferentes valores de la curvatura. Puede observarse que cuanto mayor es la curvatura mayor es el desplazamiento lateral de equilibrio (la relación es casi lineal, como se muestra en la siguiente subsección). Los desplazamientos laterales tras el contacto con la pestaña son mayores cuando la flexibilidad lateral de la base elástica es mayor debido a la deformación lateral de la vía. Las diferencias entre la vía rígida y flexible aumentan cuando se produce contacto en la pestaña. En el caso de contacto permanente en la pestaña ($R = 2000$ m) esta diferencia alcanza 0.06 mm, y esta diferencia es debida a la deformación lateral de la vía.

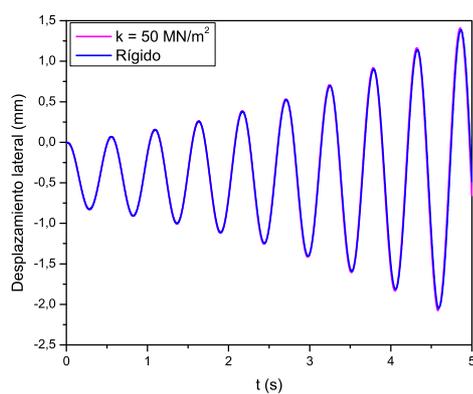
La Fig. 3.16 muestra la fuerza normal de contacto en la banda de rodadura izquierda cuando el radio de curvatura es tal que se producen oscilaciones laterales inestables. Se comparan los resultados para una vía rígida y para una vía flexible con dos rigideces diferentes de la base elástica. Mientras que las fuerzas son constantes (y mayores al aumentar la rigidez de la vía) para un radio de curvatura tal que se produce contacto permanente en la pestaña, cuando se produce movimiento de lazo aparecen oscilaciones de gran amplitud en la fuerza debido al impacto en la pestaña. Para un radio de curvatura $R = 4000$ m, la Fig. 3.16 muestra las oscilaciones que aparecen en la fuerza normal de contacto en la banda de rodadura izquierda cuando se producen impactos en la pestaña



(a)



(b)



(c)

Figura 3.15: Desplazamiento lateral del eje ferroviario. a) $R = 2000$ m; b) $R = 4000$ m; c) $R = 16000$ m

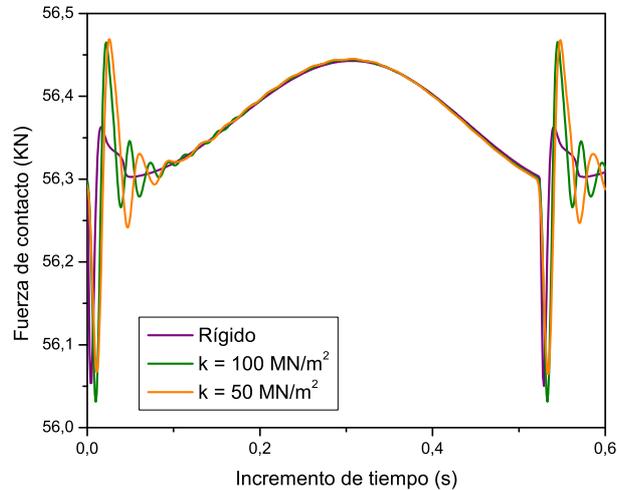
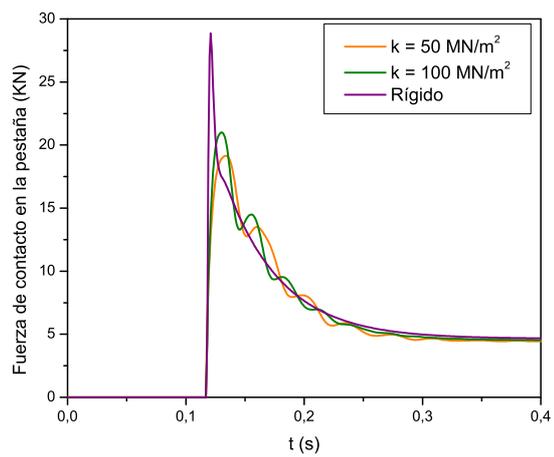


Figura 3.16: Fuerza normal de contacto en la banda de rodadura izquierda. $R = 4000$ m

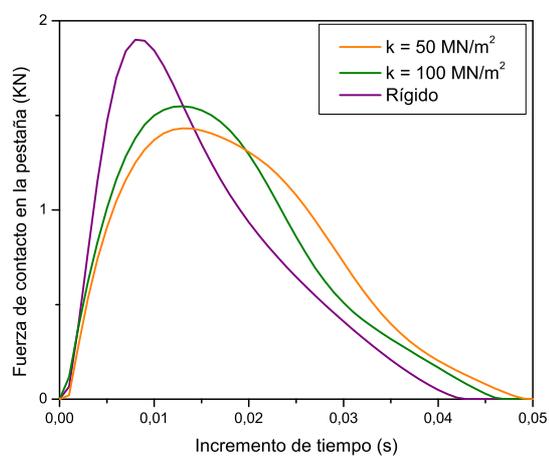
derecha (el carril exterior es el carril derecho) y dichas oscilaciones son de mayor amplitud cuando la vía es más flexible.

La Fig. 3.17 muestra la fuerza normal de contacto en la pestaña para una vía rígida y para una vía flexible modelada con bases elásticas con diferentes coeficientes de rigidez. La Fig. 3.17a muestra los resultados para una curvatura de la vía tal que se produce contacto permanente en la pestaña mientras que la Fig. 3.17b muestra los resultados para una curvatura tal de la vía que se producen impactos en la pestaña. Como puede observarse, cuanto más flexible es la vía, menor es la amplitud de la fuerza de impacto y mayor su tiempo de duración.

La Fig. 3.18 muestra la fuerza normal de contacto en la pestaña derecha y el desplazamiento por deformación del carril derecho cuando el radio de curvatura de la vía es tal que se produce movimiento de lazo del eje ferroviario limitado por el contacto en la pestaña. Se muestran los resultados para dos valores del coeficiente de rigidez de la base elástica. Puede observarse que una vía más flexible presenta mayores desplazamientos por deformación y menores fuerzas normales de contacto en la pestaña.

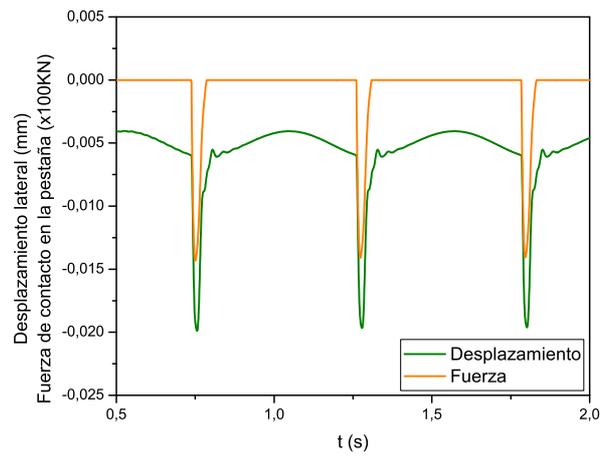


(a)

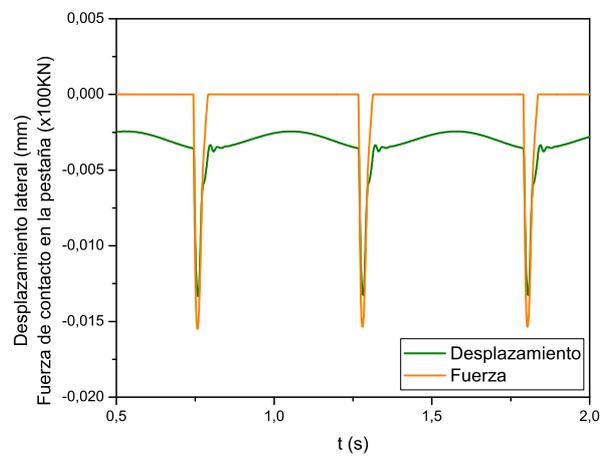


(b)

Figura 3.17: Fuerza normal de contacto en la pestaña derecha. a) $R = 2000$ m; b) $R = 4000$ m



(a)



(b)

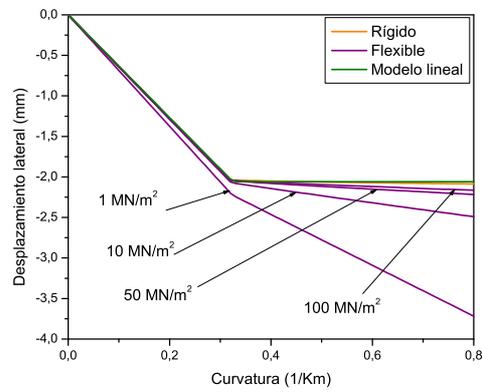
Figura 3.18: Desplazamiento lateral por deformación y fuerza normal de contacto en la pestaña derecha. $R = 4000$ m. a) 50 MN/m²; b) 100 MN/m²

3.5.7 Resultados de los movimientos estacionarios

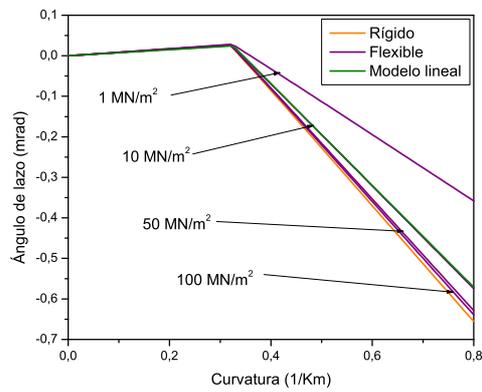
La Fig. 3.19 muestra dos coordenadas para el eje ferroviario, el desplazamiento lateral y el ángulo de lazo, y la fuerza normal de contacto en la pestaña en función de la curvatura en la posición de equilibrio estacionario al negociar la curva. Los resultados se obtienen con los métodos descritos en la Sección 3.4. Las curvas del modelo no lineal se han obtenido mediante procedimientos de continuación paramétrica, siendo la curvatura el parámetro que varía. La configuración estacionaria obtenida para una determinada curvatura se utiliza como estimación inicial del problema no lineal al variar una pequeña cantidad la curvatura. Los resultados del modelo lineal cuando se produce contacto en la pestaña se obtienen siguiendo el método descrito en (Escalona, 2005), en el que se asume que la fuerza tangencial que aparece en el contacto es debida a la fricción de Coulomb. Se muestran resultados para la vía rígida y flexible, variando la rigidez de la base elástica, y se comparan además con la posición de equilibrio estacionario que se obtiene al aplicar el modelo simplificado lineal. Los modelos, el lineal y el no lineal, muestran gran acuerdo cuando no se produce contacto permanente en la pestaña, es decir, cuando el radio de curvatura de la vía es mayor que 3125 m. Al disminuir este radio de curvatura aumentan las diferencias entre el modelo rígido, el flexible y el simplificado; también aumentan las diferencias entre los diferentes modelos al aumentar la flexibilidad de la base elástica. Se observa un claro cambio de tendencia del valor de las coordenadas y de la fuerza de contacto cuando se alcanza la curvatura que produce contacto permanente en la pestaña.

3.5.8 Resultados del análisis de estabilidad

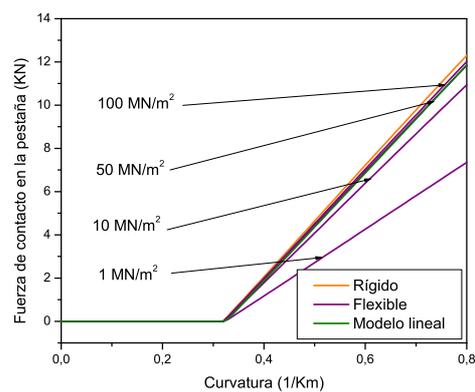
Se ha realizado un análisis de estabilidad en torno a posiciones de equilibrio estacionario tal y como se describe en la Sección 2.5.7. Se han obtenidos los autovalores y autovectores del sistema eje-vía para analizar la estabilidad lateral del eje ferroviario. En esta subsección se compara la estabilidad de vías rígidas y flexibles, tanto rectas como curvas, mediante el cálculo de autovalores. Se muestran resultados para dos radios de curvatura diferentes: para uno de los radios de curvatura no se produce contacto permanente en la pestaña y para el otro sí se producen en el movimiento estacionario. Los autovalores en el caso de la vía flexible se han obtenido para un coeficiente de rigidez de la base elástica $k = 1 \text{ MN/m}^2$.



(a)



(b)



(c)

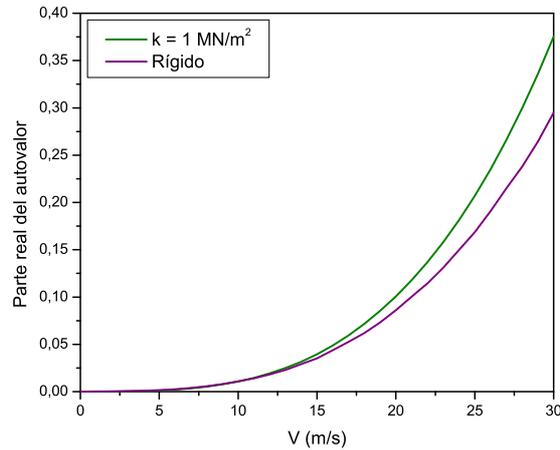
Figura 3.19: Posición de equilibrio estacionario del eje ferroviario. a) Desplazamiento lateral; b) Ángulo de lazo; c) Fuerza normal de contacto en la pestaña derecha

Los autovalores obtenidos en todos los casos se presentan en forma de tabla. Un factor determinante en la estabilidad de un vehículo es la velocidad de avance del mismo, por lo que se calculan los autovalores para tres velocidades distintas de avance ($V = 1, 15$ y 30 m/s). Cada grado de libertad del sistema tiene asociado dos autovalores, pues el cálculo se realiza pasando de n ecuaciones diferenciales de 2º orden a $2n$ ecuaciones diferenciales de 1ª orden. Asumiendo que el sistema sin restricciones eje-vía tiene 5 grados de libertad en el caso de la vía rígida y tiene 9 grados de libertad en el caso de la vía flexible, se obtienen 10 y 18 autovalores, respectivamente, como se explicó en la Sección 2.5.7. En el caso de la vía rígida, los grados de libertad del sistema se corresponden con las dos coordenadas de traslación y y z , y los tres parámetros de Euler que describen la orientación. La coordenada de traslación longitudinal es conocida al imponer la restricción de velocidad de avance del eje. No se consideran más restricciones en el modelo debido al uso de un método elástico para la resolución del contacto. En el caso de la vía flexible, además de estos cinco grados de libertad, el sistema tiene cuatro grados de libertad correspondientes a las coordenadas elásticas de los carriles, dos por cada carril, una en dirección vertical y otra en dirección lateral. Por tanto, 10 autovalores se corresponden con el sistema de vía rígida y 18 autovalores se corresponden con el sistema de vía flexible (ver Tabla 3.2). A cada autovalor le corresponde un autovector que representa la posición del sistema cuando se excita ese modo. Los modos de deformación que se consideran más característicos del sistema se especifican en la última columna de cada tabla.

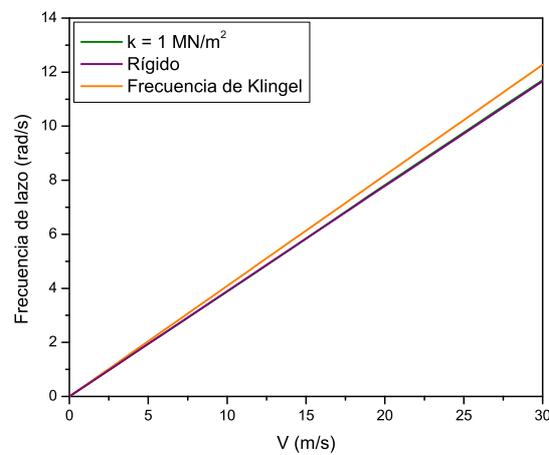
Análisis de estabilidad en vía recta

Los autovalores obtenidos para realizar el análisis de la estabilidad del sistema considerando la vía recta se muestran en la Tabla 3.2. Tanto en la vía rígida como en la deformable aparece un autovalor correspondiente a un movimiento de sólido rígido ($\rho = 0$), que se corresponde con el giro por rodadura. Una pareja de los restantes autovalores tiene la parte real positiva, lo que indica inestabilidad, estando asociado al movimiento de lazo. Se observa que la frecuencia de oscilación del movimiento de lazo aumenta al aumentar la velocidad. La Fig. 3.20 muestra la evolución de la parte real e imaginaria de este autovalor frente a la velocidad de avance del vehículo. La parte real indica que el eje ferroviario es más inestable viajando en una vía flexible que en una rígida, ya que el valor aumenta. La parte imaginaria es la frecuencia del movimiento de lazo. En ambas vías,

rígida y flexible, la frecuencia prácticamente coincide y varía un poco respecto a la frecuencia de Klingel (Wickens, 2003) al aumentar la velocidad.



(a)



(b)

Figura 3.20: Autovalor asociado al movimiento de lazo en vía con curvatura nula (vía recta). a) Parte real; b) Parte imaginaria

En los valores correspondientes a la vía rígida de la Tabla 3.2 podemos observar otras dos parejas de autovalores que son estables con carácter oscilante. Los modos asociados a estos autovalores oscilantes son un desplazamiento vertical en z y un ángulo de vuelco, respectivamente. La frecuencia correspondiente a z es

la que prácticamente no cambia con la velocidad. En los valores de la Tabla 3.2 correspondientes a la vía deformable aparecen tres parejas de autovalores estables con carácter oscilante. Una de estas tres parejas de autovalores presenta una frecuencia de oscilación $\omega \simeq 58 \text{ rad/s} \simeq 9 \text{ Hz}$ que se corresponde con el desplazamiento vertical del eje ferroviario sobre la vía flexible (modo vehículo-vía (Dukkipati & Dong, 1999)). La Fig. 3.21 muestra una simulación donde claramente se excita ese modo.

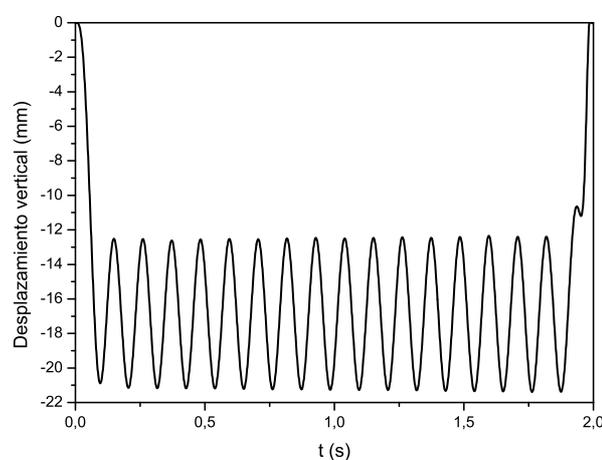


Figura 3.21: Desplazamiento vertical del eje ferroviario. $k = 1 \text{ MN/m}^2$

Análisis de estabilidad del movimiento en vía curva con contacto permanente en la pestaña

La Tabla 3.3 muestra los autovalores correspondientes al sistema eje ferroviario-vía curva, tanto rígida como flexible, con radio de curvatura de 2000 m. Este radio de curvatura produce un movimiento estacionario del eje ferroviario con contacto permanente en la pestaña de la rueda que recorre la curva exterior. Debido al contacto permanente en la pestaña, se puede observar que todos los autovalores oscilantes son estables tanto en la vía rígida como en la deformable, por tanto el sistema es estable. Para ambos tipos de vía aparece el autovalor de sólido rígido correspondiente al giro de rodadura. Al igual que en la vía recta, se observa para la vía flexible el autovalor oscilante asociado al desplazamiento vertical (modo vehículo-vía), siendo la frecuencia de oscilación $\omega \simeq 58 \text{ rad/s}$.

Tabla 3.2: Autovalores para la vía recta rígida y flexible

Vía recta rígida			
V=1m/s	V=15m/s	V=30m/s	Modo
-1.9e4	-2.3e3	-4.3e2	
-2.3e4	-1.5e3	-7.7e2	
-1.3e4	-8.7e2	-3.9e2	
-1.0e3±1.1e3i	-1.1e3±1.7e2i	-1.8e3±7.6e2i	
-1.5e3±1.1e3i	-1.5e3±1.1e3i	-1.5e3±1.1e3i	Desp. vertical
1.3e-4±3.9e-1i	3.5e-2±5.8i	2.9e-1±1.2e1i	Mov. lazo
-0	0	0	Sólido rígido
Vía recta flexible			
V=1m/s	V=15m/s	V=30m/s	Modo
-2.6e5	-4.8e4	-4.8e4	
-2.4e5	-4.8e4	-4.8e4	
-4.8e4	-1.7e4	-8.5e3	
-4.8e4	-1.6e4	-8e3	
-2.3e4	-1.6e3	-8.3e2	
-1.3e4	-8.8e2	-8.3e2	
-8.3e2	-8.3e2	-7.8e2	
-8.3e2	-8.3e2	-4.4e2	
-1.1±8.4eli	-2.3±8.4eli	-3.5±8.4eli	
-1.2±5.8eli	-1.2±5.9eli	-1.2±5.8eli	Desp. vertical
-4.8e-1±4.3eli	-1.4±4.4eli	-3±4.3eli	
4.9e-5±3.9e-1i	3.9e-2±5.8i	3.7e-1±1.2e1i	Mov. lazo
-3.3e-1	-5.1	-1.0e1	
0	0	0	Sólido rígido

Tabla 3.3: Autovalores para la vía curva ($R = 2000$ m)

Vía curva rígida			
V = 1 m/s	V = 15 m/s	V = 30 m/s	Modo
-2.3e4	-2.1e3	-7.6e2	
-1.8e4	-6.5e2±4.0e2i	-1.3e3±4.0e2i	
-1.3e4	-1.5e3	-2.4e2±3.1e2i	
-7.6e1±7.8e2i	-1.0e3±7.8e2i	-1.0e3±7.8e2i	Desp. vertical
-1.1e3±7.3e2i	-8.6e2	-4.1e2	
-1.3e1	-2.3e2	-2.2e1	
-0.7	-1.1e1		
0	0	0	Sólido rígido
Vía curva flexible			
V = 1 m/s	V = 15 m/s	V = 30 m/s	Modo
-2.6e5	-4.8e4	-4.8e4	
-2.4e5	-4.8e4	-4.8e4	
-4.9e4	-2.0e4	-1.2e4	
-4.8e4	-1.7e4	-8.5e3	
-2.3e4	-1.5e3	-8.4e2	
-1.3e4	-8.7e2	-8.4e2	
-8.1e2	-8.4e2	-7.7e2	
-8.4e2	-8.4e2	-5.4e2	
-2.3e1	-3e2	-4.0e2	
-2.6±8.4eli	-3.2±8.4eli	-3.8±8.4eli	
-1.2±5.8eli	-1.2±5.9eli	-1.2±5.8eli	Desp. vertical
-1.3±4.4eli	-1.3±4.3eli	-1.8±4.2eli	
-2.4e-1±3.7e-1i	-3.7±5.6i	-7.4±1.1eli	
0	0	0	Sólido rígido

Análisis de estabilidad del movimiento en vía curva sin contacto permanente en la pestaña

La Tabla 3.4 muestra los autovalores asociados al sistema vehículo-vía, considerando la vía rígida y flexible. El radio de curvatura considerado es de 4000 m. La curvatura de la vía no produce contacto permanente en la pestaña de la rueda, sino que se produce movimiento de lazo inestable. Se puede observar, tanto para la vía rígida como para la flexible, el par de autovalores imaginarios con parte real positiva, correspondientes al movimiento inestable de lazo. Se observa que la frecuencia de oscilación del movimiento de lazo aumenta cuando lo hace la velocidad.

La Tabla 3.5 muestra la parte real e imaginaria del autovalor asociado al movimiento de lazo en vía rígida y flexible. Los resultados se presentan en forma de tabla en lugar de en una gráfica porque el autovalor tiene el mismo valor para todos los radios de curvatura cuando este es mayor que el radio crítico ($R = 3125$ m). Al igual que en vía recta, se puede observar que es tanto más inestable un eje ferroviario sin suspensión en una vía flexible que en una vía rígida cuanto más elevada es la velocidad. También se observa que la frecuencia de oscilación es prácticamente la misma en vías rígidas y flexibles.

3.6 Resumen y conclusiones

En este capítulo se presenta una nueva formulación para modelar la flexibilidad de la vía basada en la formulación de los sistemas de referencia flotantes. Esta formulación puede incorporarse en un programa de propósito general para el análisis de sistemas multicuerpo para simular el movimiento de vehículos ferroviarios sobre vías flexibles. La formulación utiliza funciones de forma definidas en el sistema de referencia de la trayectoria para describir la deformación del carril. Las funciones de forma utilizadas son las deformaciones que presenta una viga de Euler-Bernoulli sobre una base de Winkler sometida a una carga móvil. El hecho de que las funciones de forma no estén fijas respecto al sistema local de la vía hace que aparezcan términos convectivos en las fuerzas de inercia de la vía. Además, la formulación presentada en este capítulo no requiere aplicar condiciones de contorno a la vía y la longitud de ésta se considera infinita. La resolución de algunos problemas, por ejemplo, el análisis numérico de la estabilidad de un vehículo en vías rectas mediante el cálculo de autovalores, requiere

Tabla 3.4: Autovalores para la vía curva ($R = 4000$ m)

Vía curva rígida			
V = 1 m/s	V = 15 m/s	V = 30 m/s	Modo
-1.8e4	-2.1e3	-7.7e2	
-2.3e4	-8.7e2	-4.2e2	
-1.3e4	-1.5e3	-4.1e2	
-7.5e2±7.9e2i	-1.0e3±7.8e2i	-1.0e3±7.8e2i	Disp. vertical
-1.1e3±7.6e2i	-7.2e2±4.2e2i	-1.3e3±4.0e2i	
1.4e-4±3.9e-1i	3.8e-2±5.8i	3.1e-1±1.2e1i	Mov. lazo
0	0	0	Sólido rígido
Vía curva flexible			
V = 1 m/s	V = 15 m/s	V = 30 m/s	Modo
-2.6e5	-4.8e4	-4.8e4	
-2.4e5	-4.8e4	-4.8e4	
-4.8e4	-1.7e4	-8.8e3	
-4.8e4	-1.6e4	-8.1e3	
-2.3e4	-1.6e3	-8.3e2	
-1.3e4	-8.8e2	-8.3e2	
-8.3e2	-8.3e2	-7.8e2	
-8.3e2	-8.3e2	-4.4e2	
-2.6±8.4e1i	-3.8±8.4e1i	-5.0±8.4e1i	
-1.2±5.9e1i	-1.2±5.9e1i	-1.2±5.8e1i	Disp. vertical
-7.4e-1±4.4e1i	-1.7±4.3e1i	-2.9±4.3e1i	
5.8e-5±3.9e-1i	4.0e-2±5.8i	3.6e-1±1.2e1i	Mov. lazo
-3.3e-1	-5.0	-1.0e1	
0	0	0	Sólido rígido

Tabla 3.5: Autovalores de lazo en vía curva (valor constante para cualquier radio de curvatura > 3125 m)

V (m/s)	Parte real		Parte imaginaria	
	Rígido	Flexible	Rígido	Flexible
15	0.038	0.039	5.839	5.834
30	0.31	0.36	11.66	11.65

el uso de vías suficientemente largas para obtener posiciones de equilibrio estacionario. El uso de modos de vibración obtenidos con elementos finitos como funciones de forma para integrarlos en el método FFRF, implica el uso de un elevado número de modos para alcanzar la convergencia, lo que supone un elevado coste computacional. La formulación presentada considera el efecto del cambio de la geometría del carril debido a la flexibilidad de la vía al calcular las fuerzas de contacto normales y tangenciales. Aunque las funciones de forma utilizadas en las simulaciones de este trabajo son muy sencillas, el método de las deformadas móviles puede aplicarse a modelos de vía más complejos realizados con elementos finitos y calculando deformaciones estacionarias producidas por cargas móviles, o se pueden utilizar otras familias de funciones de forma.

El método de las deformadas móviles evitaría las desventajas de la formulación de los sistemas de referencia flotantes presentada en el capítulo anterior como sigue:

- No se requieren condiciones de contorno para modelar la vía. Sin condiciones de contorno la vía puede tener la longitud que se requiera.
- Muy pocos modos son necesarios para la descripción de deformadas muy localizadas.
- El método permite el cálculo de movimientos estacionarios y el análisis de la estabilidad.

La cinemática y la dinámica de una vía flexible modelada con el método de las deformadas móviles se ha presentado en este capítulo. También se muestran las ecuaciones de movimiento de un sólido del vehículo ferroviario descritas en el sistema de referencia de la trayectoria, y las ecuaciones de movimiento del conjunto vehículo-vía modelados como sistema multicuerpo. Las ecuaciones linealizadas de un eje ferroviario se presentan en este capítulo y se describe el procedimiento para el cálculo de movimientos estacionarios aplicando modelos lineales y no lineales. Conocidos los movimientos estacionarios, el análisis de estabilidad en torno a ellos es casi inmediato con el método de las deformadas móviles.

El método de las deformadas móviles ha sido aplicado a un eje ferroviario sin suspensión viajando con una velocidad de avance de 30 m/s sobre una vía recta. Los resultados muestran el efecto de la flexibilidad de la vía en el comportamiento inestable del eje y el efecto de la flexibilidad en los impactos laterales del eje sobre

la vía. Los resultados han sido comparados con los resultados del problema de la masa móvil utilizando el método de síntesis modal.

Los vehículos ferroviarios suelen alcanzar movimientos estacionarios al negociar una curva. El comportamiento en curvas de un eje ferroviario ha sido analizado en este capítulo. La curvatura de la vía se ha variado para estudiar la dependencia de la curvatura en el comportamiento del vehículo. Los resultados muestran la influencia de la flexibilidad en el negociado de curvas y el efecto de la flexibilidad en los impactos laterales de la rueda sobre el carril. Los resultados se han comparado con los resultados obtenidos considerando el carril rígido.

La aplicación del método de las deformadas móviles para resolver la dinámica acoplada de un vehículo ferroviario viajando sobre una vía deformable ha permitido el cálculo de los movimientos estacionarios en vías rígidas y flexibles. Dichos movimientos estacionarios se han comparado entre sí y a su vez con los modelos clásicos lineales. Los resultados muestran buen acuerdo cuando el radio de curvatura es tal que no se produce contacto permanente en la pestaña. Cuando la curvatura es tal que se produce contacto permanente en la pestaña aparecen mayores diferencias, tanto mayores cuanto mayor es la flexibilidad de la vía. La estabilidad del sistema en torno a los movimientos estacionarios se analiza mediante el cálculo de autovalores. Se muestran los autovalores obtenidos correspondientes a un eje ferroviario viajando sobre vías rectas y curvas. Se ha comparado la estabilidad lateral del eje ferroviario cuando la vía es rígida y cuando es flexible. Se concluye que el eje ferroviario es más inestable en vías deformables y que la inestabilidad aumenta al aumentar la velocidad.

Aunque el problema se ha formulado en términos de un solo eje ferroviario en las simulaciones cuyos resultados se presentan, el método de las deformadas móviles puede aplicarse a modelos de vehículos ferroviarios más complejos viajando sobre vías de geometría arbitraria.

La formulación propuesta puede ser también aplicada para la descripción de la dinámica de sólidos muy largos sujetos a la acción de una carga móvil (sistema pantógrafo-catenaria, guía de los ascensores, teleféricos, montañas rusas,...).

Capítulo 4

Conclusiones generales

4.1 Resumen

En esta tesis se han presentado y desarrollado dos métodos para modelar la flexibilidad de la vía aplicando técnicas de sistemas multicuerpo. Ambos métodos resuelven la dinámica 3D no lineal acoplada del vehículo ferroviario y la vía deformable de geometría arbitraria. La variación debida a la deformación de los carriles de los vectores tangentes y normales, y de otros parámetros geométricos de la vía, como es la curvatura, se considera para el cálculo de las fuerzas de contacto en ambos métodos. Las dos formulaciones presentadas son las siguientes:

1. Método del FFRF con discretización mediante elementos finitos y síntesis modal. Se realiza un modelo de vía en un programa de elementos finitos y mediante un análisis modal se obtienen los autovalores y autovectores del sistema. Los autovectores se utilizan como funciones de forma en la formulación de los sistemas de referencia flotantes para obtener las deformaciones mediante síntesis modal. Mientras las deformaciones se calculan mediante interpolaciones de los elementos finitos, la geometría de la vía se obtiene utilizando la formulación de las coordenadas nodales absolutas. Este método se considera validado comparando los resultados con los obtenidos aplicando los problemas clásicos de la carga móvil y el de la masa móvil.
2. Método de las deformadas móviles. Este método resuelve la ineficiencia del primer método propuesto al estudiar problemas que requieren modelar vías de gran longitud, como es el caso del análisis de la estabilidad. Se basa en el método de los sistemas de referencia flotantes con la particularidad

de que las funciones de forma no están referidas al sistema de referencia local del sólido deformable (la vía) sino que se refieren a un sistema de referencia móvil que avanza a lo largo de la vía con la misma velocidad que el vehículo (sistema de referencia de la trayectoria). La cinemática de los sólidos que forman el vehículo ferroviario también se describen en el sistema de referencia de la trayectoria, lo que facilita el cálculo de posibles movimientos estacionarios, ya que éstos se describen mediante coordenadas constantes en el sistema de referencia móvil. Conocidos los movimientos estacionarios el análisis de estabilidad mediante el cálculo de autovalores es inmediato.

4.2 Conclusiones

Las principales conclusiones relativas al modelado de la flexibilidad de la vía, con la formulación de los sistemas de referencia flotantes con discretización mediante elementos finitos y síntesis modal, obtenidas en esta tesis se enumeran a continuación:

- Es necesario definir condiciones de contorno ficticias para obtener las funciones de forma. Dichas condiciones de contorno producen resultados poco precisos de la respuesta de la vía ante una carga móvil cerca de los extremos.
- Las condiciones de contorno hacen que la longitud de la vía sea finita.
- Es necesario un elevado número de funciones de forma para describir las deformaciones, ya que éstas están muy localizadas.
- El método es muy apropiado cuando se requiere modelar pequeños tramos de vía, como en el estudio del efecto que produce la ausencia de soporte en una traviesa, por ejemplo. Sin embargo, no resulta eficaz cuando se requiere modelar una vía de gran longitud, como por ejemplo, para el cálculo de movimientos estacionarios para analizar la estabilidad.

Las principales conclusiones relativas al método de las deformadas móviles son las siguientes:

- El método de las deformadas móviles no requiere la definición de condiciones de contorno ficticias.

- La vía puede considerarse de longitud infinita.
- El método requiere un número de funciones de forma mucho menor que el método de los elementos finitos para describir deformaciones localizadas.
- Los movimientos estacionarios son relativamente fáciles de calcular con este método ya que las posiciones de equilibrio estacionario están descritas por coordenadas constantes en el sistema de referencia de la trayectoria utilizado en el método.
- El método es muy adecuado para modelar la flexibilidad de cuerpos de gran longitud sometidos a una carga móvil.
- El método es compatible con varias familias de funciones de forma. En esta tesis se han utilizado como funciones de forma la deformada estacionaria que presenta una viga de Euler-Bernoulli sobre una base elástica continua (base de Winkler) ante una carga móvil. La deformada utilizada es estacionaria, por lo que para modelar deformaciones producidas por la excitación de alguna frecuencia de resonancia se requeriría el uso de otra familia de funciones de forma (wavelets, por ejemplo).

Las conclusiones relativas al modelado de la flexibilidad en general son las siguientes:

- Se muestra la influencia de la flexibilidad en las fuerzas de contacto tanto normales como tangenciales.
- La dinámica lateral del vehículo ferroviario muestra mayor inestabilidad cuando se considera la deformación de la vía.

4.3 Contribuciones originales de esta tesis

A continuación se especifican las principales aportaciones de esta tesis:

1. Implementación de un procedimiento automático para generar modelos deformables de vías de geometría arbitraria. El nuevo procedimiento se ha implementado en el programa de propósito general de sistemas multicuerpo SAMS2000. Este programa ha sido desarrollado en la Universidad de Illinois en Chicago (UIC). El modelado de la flexibilidad de la vía mediante

este método ha requerido el uso del programa ANSYS para la obtención de las características modales de la vía, y se han programado subrutinas en lenguaje FORTRAN que se han incorporado en el programa SAMS2000. También se ha modificado parte del código existente para el uso de las subrutinas nuevas.

La flexibilidad de la vía ya había sido modelada previamente aplicando el FFRF por Andersson & Abrahamsson (2002) y Andersson & Johansson (2004). La contribución original del método presentado en el Capítulo 2 de esta tesis es la aplicación del FFRF con una descripción geométrica de la vía y un modelo de contacto diferentes a los utilizados por los autores mencionados.

2. Validación del método propuesto mediante los modelos clásicos sencillos de la carga móvil y de la masa móvil. Ambos modelos clásicos se han implementado en MATLAB.
3. Implementación de otro nuevo método para el modelado de la flexibilidad de la vía, denominado método de las deformadas móviles.

El método de las deformadas móviles se ha implementado en MATLAB. Además de las subrutinas que resuelven la dinámica vehículo-vía deformable, también se han formulado las subrutinas para la obtención de movimientos estacionarios y para el análisis de estabilidad mediante el cálculo de autovalores.

Las subrutinas han sido realizadas de forma que puedan incorporarse al programa de propósito general de sistemas multicuerpo desarrollado en el Departamento de Ingeniería Mecánica y de los Materiales de la Universidad de Sevilla, denominado MBMatlab. Este programa permite modelar sólidos rígidos y flexibles. Consta de un módulo para el estudio de la dinámica de vehículos ferroviarios que permite modelar vías rígidas de geometría arbitraria.

4.4 Publicaciones

Los resultados principales de este trabajo han sido parcialmente publicados en las siguientes revistas y congresos, o están en preparación:

4.4.1 Revistas

- Escalona J.L., Chamorro R., Stability analysis of vehicles on circular motions using multibody dynamics. *Nonlinear Dynamics*, Vol. 53, p. 237-250, 2008.
- Shabana A.A., Chamorro R., Rathod C., A multi-body system approach for finite-element modelling of rail flexibility in railroad vehicle applications. *Proc. IMechE Part K: J. Multi-body Dynamics*, Vol. 222, p. 1-15, 2008.
- Rathod C., Chamorro R., Escalona J.L., El-Sibaie M., Shabana A.A. Validation of three-dimensional multi-body system approach for modelling track flexibility. *Proc. IMechE Part K: J. Multi-body Dynamics*, Vol. 223, p. 269-282, 2009.
- Chamorro R., Escalona J.L., González M.J., An approach for modeling long flexible bodies with application to railroad dynamics. *Multibody System Dynamics*, *Aceptado*, 2011.

4.4.2 Congresos

- Rathod C., Chamorro R., Escalona J.L., El-Sibaie M., Shabana A.A., Modeling track flexibility in railroad multibody dynamics. 2008 ASME International Mechanical Engineering Congress and Exposition. Boston, Massachusetts, USA, November 2-6, 2008.
- Chamorro R., Escalona J.L., A new approach for modelling a flexible track in multibody railroad dynamic simulations. *Proceedings of Multibody dynamics 2009, ECCOMAS thematic conference*, K. Arczewski, J. Fraczek, M. Wojtyra (eds.). Warsaw, Poland, 29 June-2 July, 2009.
- Chamorro R., Escalona J.L., Modelling a flexible track in multibody railroad dynamic simulations. *Proceedings of the ASME 2009 International*

Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference, IDETC/CIE 2009, San Diego, USA, August 30-September 2, 2009.

- Chamorro R., Escalona J.L., Recuero A.M., Modelling flexible curved tracks in multibody railroad simulations with the moving shape functions method. Proceedings of the 1st Joint International Conference on Multibody System Dynamics, Lappeenranta, Finland, May 25-27, 2010.
- Chamorro R., Escalona J.L., Recuero A.M., Dynamics of railroad vehicles on deformable curved tracks using the moving shape functions method. Proceedings of the 5th Asian Conference on Multibody Dynamics 2010, Kyoto, Japan, August 23-26, 2010.
- Chamorro R., Escalona J.L., Application of the moving shape functions method to curved railroad tracks. Proceedings of the Tenth International Conference on Computational Structures Technology, B.H.V. Topping, J.M. Adam, F.J. Pallarés, R. Bru, and M.L. Romero (Editors), Valencia, Spain, September 14-17, 2010.
- Chamorro R., Escalona J.L., Recuero A.M., Aplicación del método de las deformadas móviles a vías ferroviarias curvas, XVIII Congreso Nacional de Ingeniería Mecánica, Ciudad Real, España, 3-5 Noviembre, 2010.
- Escalona J.L., Chamorro R., Recuero A.M., Eigenvalue analysis of multibody models of railroad vehicles including track flexibility, ASME 2011 International Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference, Washington, DC, USA, August 28-31, 2011. *Aceptado*.

4.4.3 En preparación

- Chamorro R., Escalona J.L., Recuero A.M., Application of the moving shape functions method to curved railroad tracks.
- Escalona J.L., Chamorro R., Recuero A.M., Stability of railroad vehicles using the moving shape functions method.

4.5 Trabajos futuros

Los fenómenos que afectan a los vehículos ferroviarios siguen siendo objeto de intenso estudio. La continua investigación en universidades, centros de investigación, empresas ferroviarias o en empresas que desarrollan programas de simulación pretenden mejorar aspectos como el desgaste, evitar el descarrilamiento, aumentar la velocidad y conseguir modelos más realistas.

Aplicando las dos nuevas formulaciones presentadas en esta tesis, se pretenden desarrollar los trabajos futuros que se resumen a continuación:

- Aplicar el método del modelado de la flexibilidad de la vía mediante elementos finitos a casos concretos, como es el caso de la ausencia de soporte en una traviesa.
- Aplicar el método de las deformadas móviles a vehículos ferroviarios completos.
- Estudiar otras familias de funciones de forma que permitan modelar vías más detalladas con el método de las deformadas móviles.
- Aplicar el método de las deformadas móviles a vías considerando apoyos discretos.
- Aplicar el método de las deformadas móviles a otros problemas de sólidos de gran longitud sometidos a una carga móvil, como es el caso del pantógrafo-catenaria.
- Comparar los resultados con datos experimentales.

El desarrollo de estos trabajos permitirá realizar simulaciones más realistas que podrán validarse con resultados experimentales.

Bibliografía

- Agrawal, O. & Shabana, A. A. (1986). Application of deformable-body mean axis to flexible multibody system dynamics. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 56, 217–245.
- Alonso, A. & Giménez, J. G. (2005). A new method for the solution of the normal contact problem in the dynamic simulation of railway vehicles. *Vehicle System Dynamics*, 43 (2), 149–160.
- Alonso, A. & Giménez, J. G. (2006). Some new contributions to the resolution of the normal wheel-rail contact problem. *Vehicle System Dynamics*, 44, Supplement, 230–239.
- Alonso, A. & Giménez, J. G. (2007). Tangential problem solution for non-elliptical contact areas with the FastSim algorithm. *Vehicle System Dynamics*, 45 (4), 341–357.
- Alonso, A. & Giménez, J. G. (2008a). Non-steady state contact with falling friction coefficient. *Vehicle System Dynamics*, 46, Supplement, 779–789.
- Alonso, A. & Giménez, J. G. (2008b). Non-steady modelling of wheel-rail contact problem for the dynamic simulation of railway vehicles. *Vehicle System Dynamics*, 46 (3), 179–196.
- Andersson, C. & Abrahamsson, T. (2002). Simulation of interaction between a train in general motion and a track. *Vehicle System Dynamics*, 38 (6), 433–455.
- Andersson, C. & Johansson, A. (2004). Prediction of rail corrugation generated by three-dimensional wheel-rail interaction. *Wear*, 257, 423–434.
- Arczewski, K. & Fraczek, J. (2005). Friction models and stress recovery methods in vehicle dynamics modelling. *Multibody System Dynamics*, 14, 205–224.

- Aristizábal-Ochoa, J. D. (2003). Estructuras de vigas sobre suelos elásticos de rigidez variable. *Revista Internacional de Desastres Naturales, Accidentes e Infraestructura Civil*, 3 (2), 157–174.
- Arnold, M. & Netter, H. (1997). Approximation of contact geometry in the dynamical simulation of wheel-rail systems. *Mathematical Modelling of Systems*, 3 (2), 1–24.
- Arrus, P., de Pater, A. D. & Meyers, P. (2002). The stationary motion of a one-axle vehicle along a circular curve with real rail and wheel profiles. *Vehicle System Dynamics*, 37 (1), 29–58.
- Auciello, J., Malvezzi, M., Meli, E., Papini, S., Pugi, L. & Rindi, A. (2007). Multibody models of railway vehicles for real-time systems. *In Proceedings of the XVIII Congresso AIMETA*, Brescia, Italy.
- Avramidis, I. & Morfidis, K. (2006). Bending of beams on three-parameter elastic foundation. *International Journal of Solids and Structures*, 43, 357–375.
- Ayasse, J. B. & Chollet, H. (2006). Wheel-rail contact. *In: S. Iwnicki (editor), Handbook of Railway Vehicle Dynamics. CRC Press, Taylor and Francis Group, Boca Raton, FL*, pp. 85–120.
- Baeza, L., Roda, A., Carballeira, J. & Giner, E. (2006a). Railway train-track dynamics for wheelflats with improved contact models. *Nonlinear Dynamics*, 45, 385–397.
- Baeza, L., Roda, A. & Nielsen, J. C. O. (2006b). Railway vehicle/track interaction analysis using a modal substructuring approach. *Journal of Sound and Vibration*, 293, 112–124.
- Bell, C. E., Horak, D. & Hedrick, J. K. (1981). Stability and curving mechanics of rail vehicles. *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, 103, 181–190.
- Berggren, E. G., Li, M. X. D. & Spännar, J. (2008). A new approach to the analysis and presentation of vertical track geometry quality and rail roughness. *Wear*, 265, 1488–1496.

- Berzeri, M., Sany, J. R. & Shabana, A. A. (2000). Curved track modeling using the absolute nodal coordinate formulation. *Technical report, Department of Mechanical Engineering, University of Illinois at Chicago*, MBS00-4-UIC.
- Boocock, D. (1969). Steady-state motion of railway vehicles on curved track. *Journal of Mechanical Engineering Science*, 11, 556–566.
- Cardona, A. (2000). Superelement modelling in flexible multibody dynamics. *Multibody System Dynamics*, 4, 245–266.
- Cardona, A. & Géradin, M. (1991). Modelling of superelements in mechanism analysis. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 32 (8), 1565–1593.
- Carlbohm, P. (2001). Combining MBS with FEM for rail vehicle dynamic analysis. *Multibody System Dynamics*, 6, 291–300.
- Chaar, N. & Berg, M. (2005). Vehicle-track dynamic simulations of a locomotive considering wheelset structural flexibility and comparison with measurements. *Proc. IMechE, Part F: J. Rail and rapid Transit*, 219, 225–238.
- Chaar, N. & Berg, M. (2006). Simulation of vehicle-track interaction with flexible wheelsets, moving track models and field tests. *Vehicle System Dynamics*, 44, Supplement, 921–931.
- Cheung, Y. K. (1976). *Finite strip method in structural analysis*. Pergamon Press, Oxford.
- Choros, J. & Adams, G. G. (1979). A steadily moving load on an elastic beam resting on a tensionless Winkler foundation. *Journal of Applied Mechanics*, 46, 175–180.
- Clark, R. A., Dean, P. A., Elkins, J. A. & Newton, S. G. (1982). An investigation into the dynamic effects of railway vehicles running on corrugated rails. *Journal Mechanical Engineering Science, IMechE*, 24, 65–76.
- Coskun, I. (2000). Non-linear vibrations of a beam resting on a tensionless Winkler foundation. *Journal of Sound and Vibration*, 236 (3), 401–411.
- Craig, R. & Bampton, M. (1968). Coupling of substructures for dynamics analysis. *AIAA J.* 6, 1313–1319.

- Cundall, P. A. & Strack, O. D. L. (1979). A discrete numerical model for granular assemblies. *Geotechnique*, 29, 47–65.
- Dahlberg, T. (1995). Vertical dynamics train-track interaction -verifying a theoretical model by full-scale experiments. *Vehicle System Dynamics*, 24, Supplement, 45–57.
- Dahlberg, T. (2006). Track issues. In: S. Iwnicki (editor), *Handbook of Railway Vehicle Dynamics*. CRC Press, Taylor and Francis Group, Boca Raton, FL, pp. 143–179.
- De Pater, A. (1987). Optimal design of railway vehicles. *Ingenieur-Archiv*, 57, 25–38.
- De Veubeke, B. F. (1976). The dynamics of flexible bodies. *International Journal of Engng. Sci.* 14, 895–913.
- Diana, G., Cheli, F., Bruni, S. & Collina, A. (1998). Experimental and numerical investigation on subway short pitch corrugation. *Vehicle System Dynamics*, 28, Supplement, 234–245.
- Dieterman, H. A. & Metrikine, A. (1996). The equivalent stiffness of a half-space interacting with a beam. Critical velocities of a moving load along the beam. *Eur. J. Mech., A/Solids*, 15 (1), 67–90.
- Dietz, S., Hippmann, G. & Schupp, G. (2002). Interaction of vehicles and flexible tracks by co-simulation of multibody vehicle systems and finite element track models. *Vehicle System Dynamics*, 37, Supplement, 372–384.
- Domínguez, J. (1993). *Boundary elements in dynamics*. Computational Mechanics Publications and Elsevier Applied Science in Southampton, Boston, London, New York.
- Duffy, D. G. (1990). The response of an infinite railroad track to a moving, vibrating mass. *Transactions of ASME, Journal of Applied Mechanics*, 57, 66–73.
- Dukkipati, R. V. & Dong, R. (1999). Idealized steady state interaction between railway vehicle and track. *Proc. IMechE, Part F: Journal of Rail and Rapid Transit*, 213(1), 15–29.

- Dukkipati, R. V. & Swamy, S. N. (2001). Non-linear steady-state curving analysis of some unconventional rail trucks. *Mechanism and Machine Theory*, 36 (4), 507–521.
- Durali, M. & Bahabadi, M. (2004). Investigation of train dynamics in passing through curves using a full model. *Proceedings of the ASME/IEEE Joint Rail Conference*, April 6-8, Baltimore, Maryland USA, 83–88.
- Durali, M. & Shadmehri, B. (2003). Nonlinear analysis of train derailment in severe braking. *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, 125, 48–53.
- Dwivedy, S. K. & Eberhard, P. (2006). Dynamic analysis of flexible manipulators, a literature review. *Mechanism and Machine Theory*, 41 (7), 749–777.
- Eberhard, P., Dignath, F. & Kübler, L. (2003). Parallel evolutionary optimization of multibody systems with application to railway dynamics. *Multibody System Dynamics*, 9, 143–164.
- Elkins, J. A. & Weinstock, H. (1982). The effect of two point contact on the curving behavior of railroad vehicles. *ASME 82-WA/DSC-13*, November.
- Escalona, J. L. (2002). Elastic contact. *Informe interno*, 1, 1–3.
- Escalona, J. L. (2005). Movimiento estacionario de ejes ferroviarios en vías curvas con contacto en el flanco. *Prueba Nacional de Habilitación para Profesores Titulares de Universidad, Área de Ingeniería Mecánica, Valladolid*, 1, 1–30.
- Escalona, J. L. (2010). Linear models for the lateral dynamics of railroad vehicles on constant curvature-tracks. *Informe interno*, pp. 1–2.
- Escalona, J. L. & Chamorro, R. (2008). Stability analysis of vehicles on circular motions using multibody dynamics. *Nonlinear Dynamics*, 53, 237–250.
- Escalona, J. L., González, M., Zaazaa, K. E. & Shabana, A. A. (2003). A technique for validating a multibody wheel/rail contact algorithm. *Proceedings of DETC'03 ASME 2003 Design Engineering Technical Conference and Computers and Information in Engineering Conference, Chicago, IL, USA*, September 2-6.

- Estrade, J. M. (1989). Contribución al conocimiento del mecanismo de deterioro de la geometría de la vía por el análisis del comportamiento en rotura de los materiales que forman la capa de balasto. *Tesis Doctoral, Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos*, Barcelona.
- Feldmann, U., Kreuzer, E., Pinto, F. & Schlegel, V. (2003). Monitoring the dynamics of railway tracks by means of the Karhunen-Loève-transformation. *In: K. Popp, and W. Schiehlen (editors), System Dynamics and Long-Term behaviour of railway vehicles, track and subgrade. Spring-Verlag Berlin Heidelberg*, pp. 231–246.
- Felszeghy, S. F. (1996a). The Timoshenko beam on an elastic foundation and subject to a moving step load, part 1: steady-state response. *Journal of Vibration and Acoustics*, 118, 277–284.
- Felszeghy, S. F. (1996b). The Timoshenko beam on an elastic foundation and subject to a moving step load, part 2: transient response. *Journal of Vibration and Acoustics*, 118, 285–291.
- Firuziaan, M. & von Estorff, O. (2003). Simulation of the dynamic behavior of bedding-foundation-soil in the time domain. *In: K. Popp, and W. Schiehlen (editors), System Dynamics and Long-Term behaviour of railway vehicles, track and subgrade. Spring-Verlag Berlin Heidelberg*, pp. 357–376.
- Fisette, P. & Samin, J. C. (1992). Lateral dynamics of a light railway vehicle with independent wheels. *Vehicle System Dynamics: International Journal of Vehicle Mechanics and Mobility*, 20 (6), Supplement 1, 157–171.
- Franke, C. & Führer, C. (2001). Collocation methods for the investigation of periodic motions of constrained multibody systems. *Multibody System Dynamics*, 5, 133–158.
- Friedrich, K. & Schmid, G. (2003). Dynamics behavior of railway track systems analyzed in frequency domain. *In: K. Popp, and W. Schiehlen (editors), System Dynamics and Long-Term behaviour of railway vehicles, track and subgrade. Spring-Verlag Berlin Heidelberg*, pp. 377–394.
- Fryba, L. (1972). *Vibration of Solids and Structures under Moving Loads*. Noordhoff International Publishing, Groningen, The Netherlands.

- Galvín, P. (2007). Análisis numérico y experimental de las vibraciones ocasionadas por el paso de trenes de alta velocidad en el suelo y en estructuras cercanas a la vía. *Tesis doctoral, Dpto. Mecánica de Medios Continuos, Teoría de Estructuras e Ingeniería del Terreno, Universidad de Sevilla, Sevilla.*
- García-Lomas, J. M. (1945). *Tratado de explotación de ferrocarriles. Tomo 1º: Introducción: La vía.* Publicaciones de la Escuela Especial de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos, Madrid.
- Garg, V. K. & Dukkipati, R. V. (1984). *Dynamics of railway vehicle systems.* Academic Press Canada.
- Gerstberger, U., Knothe, K. & Wu, Y. (2003). Combined modelling of discretely supported track models and subgrade models -vertical and lateral dynamics. *In: K. Popp, and W. Schiehlen (editors), System Dynamics and Long-Term behaviour of railway vehicles, track and subgrade. Spring-Verlag Berlin Heidelberg,* pp. 247–264.
- Gilchrist, A. O. (1998). The long road to solution of the railway hunting and curving problems. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part F: Journal of Rail and Rapid Transit,* 212, 219–226.
- Giménez, J. G., Alonso, A. & Gómez, E. (2005). Introduction of a friction coefficient dependent on the slip in the FastSim algorithm. *Vehicle System Dynamics,* 43 (4), 233–244.
- Gómez, J., Vadillo, E. G. & Santamaría, J. (2006). A comprehensive track model for the improvement of corrugation models. *Journal of Sound and Vibration,* 293, 522–534.
- Grassie, S. L. & Cox, S. J. (1984). The dynamic response of railway track with flexible sleepers to high frequency vertical excitation. *IMechE, Journal of Mechanical Engineering,* 198D(7), 117–124.
- Grassie, S. L. & Elkins, J. A. (2005). Tractive effort, curving and surface damage of rails. Part 1: forces exerted on the rails. *Wear,* 258, 1235–1244.
- Grassie, S. L., Gregory, R., Harrison, D. & Johnson, K. (1982). The dynamic response of railway to high frequency vertical excitation. *Journal of Mechanical Engineering and Science,* 24 (2), 77–90.

- Gry, L. (1996). Dynamic modelling of railway track based on wave propagation. *Journal of Sound and Vibration*, 195 (3), 477–505.
- He, Y. & McPhee, J. (2002). Optimization of the lateral stability of rail vehicles. *Vehicle System Dynamics*, 38 (5), 361–390.
- He, Y. & McPhee, J. (2005). Optimization of curving performance of rail vehicles. *Vehicle System Dynamics*, 43 (12), 895 – 923.
- Heckl, M. (2002). Coupled waves on a periodically supported Timoshenko beam. *Journal of Sound and Vibration*, 252 (5), 849–882.
- Iwnicki, S. (1999). The Manchester Benchmarks for rail vehicle simulation. *Vehicle System Dynamics*, 31, Supplement.
- Iwnicki, S. (2006). *Handbook of Railway Vehicle Dynamics*. CRC Press, Boca Raton.
- Jezequel, L. (1981). Response of periodic systems to a moving load. *Journal of Applied Mechanics*, 48, 613–618.
- Jin, X., Wen, Z., Xiao, X. & Zhou, Z. (2007). A numerical method for prediction of curved rail wear. *Multibody System Dynamics*, 18, 531–557.
- Johansson, A. & Andersson, C. (2005). Out-of round railway wheels—a study of wheel polygonalization through simulation of three-dimensional wheel-rail interaction and wear. *Vehicle System Dynamics*, 43 (8), 539–559.
- Johansson, A. & Nielsen, J. C. O. (2003). Out-of-round railway wheels—wheel-rail contact forces and track response derived from field tests and numerical simulations. *Proc. Instn. Mech. Engrs. Part F. Journal Rail and Rapid Transit*, 217, 135–146.
- Johnson, K. L. (1958a). The effect of spin upon the rolling motion of an elastic sphere upon a plane. *ASME Journal of Applied Mechanics*, 25, 332–338.
- Johnson, K. L. (1958b). The effect of a tangential contact force upon the rolling motion of an elastic sphere on a plane. *ASME Journal of Applied Mechanics*, 25, 339–346.

- Johnson, K. L. (1985). *Contact Mechanics*. Cambridge University Press, Cambridge.
- Kaewunruen, S. & Remennikov, A. M. (2007). Field trials for dynamic characteristics of railway track and its components using impact excitation technique. *NDT and E International*, 40, 510–519.
- Kalker, J. J. (1967). *On the rolling contact of two elastic bodies in the presence of dry friction*. PhD thesis, Delft University of Technology, Delft, The Netherlands.
- Kalker, J. J. (1990). *Three-dimensional elastic bodies in rolling contact*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, The Netherlands.
- Kalker, J. J. (1996). Book of tables for the hertzian creep-force law. *Technical report. Department of Applied Analysis*. Delft University of Technology, Delft, The Netherlands.
- Kaschiev, M. S. & Mikhajlov, K. (1995). A beam resting on a tensionless Winkler foundation. *Computers and Structures*, 55 (2), 261–264.
- Kato, I., Terumichi, Y., Adachi, M. & Muller, S. (2004). Dynamics of track/wheel systems on high-speed vehicles. *Proceedings of Second Asian Conference on Multibody Dynamics*, Seoul, South Korea, August 1-4.
- Kenney, J. T. (1954). Steady-state vibrations of beam on elastic foundation for moving load. *Journal of Applied Mechanics, ASME*, 21, 359–364.
- Kerr, A. D. (1964). Elastic and viscoelastic foundation models. *Journal of Applied Mechanics*, 31, 491–498.
- Kerr, A. D. (1965). A study of a new foundation model. *Acta Mechanica*, pp. 135–147.
- Kerr, A. D. (1972). The continuously supported rail subjected to an axial force and a moving load. *International Journal of Mechanical Sciences*, 14, 71–78.
- Kerr, A. D. (2000). On the determination of the rail support modulus k . *International Journal of Solids and Structures*, 37, 4335–4351.

- Kerr, A. D. (2003). *Fundamentals of Railway Track Engineering*. Simmons Boardman Pub Co.
- Kik, W. & Piotrowski, J. (1996). A fast, approximate method to calculate normal load at contact between wheel and rail and creep forces during rolling. *Proceedings of 2nd mini conf. on contact mechanics and wear of rail/wheel systems*, July 29-31, Budapest, Hungary.
- Knothe, K. (2008). History of wheel/rail contact mechanics: from Redtenbacher to Kalker. *Vehicle System Dynamics*, 46 (1-2), 9–26.
- Knothe, K. & Böhm, F. (1999). History of stability of railway and road vehicles. *Vehicle System Dynamics*, 31, 283–323.
- Knothe, K. L. & Grassie, S. L. (1993). Modeling of railway track and vehicle-track interaction at high frequencies. *Vehicle System Dynamics*, 22, 209–262.
- Knothe, K. L. & Wu, Y. (1998). Receptance behaviour of railway track and subgrade. *Archive of Applied Mechanics*, 68, 457–470.
- Knudsen, C., Slivsgaard, E., Rose, M., True, H. & Feldberg, R. (1994). Dynamics of a model of a railway wheelset. *Nonlinear Dynamics*, 6, 215–236.
- Kortum, W. & Sharp, R. S. (1993). Multibody computer codes in vehicle system dynamics. *Vehicle System Dynamics*, Supplement 22.
- Kovalev, R., Lysikov, N., Mikheev, G., Pogorelov, D., Simonov, V., Yazykov, V., Zakharov, S., Zharov, I., Goryacheva, I., Soshenkov, S. & Torskaya, E. (2009). Freight car models and their computer-aided dynamic analysis. *Multibody System Dynamics*, 22, 399–423.
- Kraemer, C., Rocci, S. & Sánchez, V. (1991). *Trazado de carreteras*. Escuela Técnica Superior de Caminos, Canales y Puertos, Universidad Politécnica de Madrid.
- Kruse, H. & Popp, K. (2003). Model-based investigation of the dynamic behaviour of railway ballast. In: K. Popp, and W. Schiehlen (editors), *System Dynamics and Long-Term behaviour of railway vehicles, track and subgrade*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, pp. 275–294.

- Krylov, V. V. (1995). Generation of ground vibrations by superfast trains. *Applied Acoustics*, 44, 149–164.
- Krylov, V. V. & Ferguson, C. C. (1993). Generation of surface acoustic waves by moving trains. *Ultrasonics Symposium*, pp. 769–772.
- Lankarani, H. M. & Nikraves, P. E. (1990). A contact force model with hysteresis damping for impact analysis of multibody systems. *ASME Journal of Mechanical Design*, 112, 369–376.
- Lankarani, H. M. & Nikraves, P. E. (1994). Continuous contact force models for impact analysis in multibody systems. *Nonlinear Dynamics*, 5, 193–207.
- Larson, R. E., Hostetler, R. P. & Edwards, B. H. (1999). *Cálculo y geometría analítica*. McGraw-Hill, Madrid.
- Lee, S. Y. & Cheng, Y. C. (2008). A new dynamic model of high-speed railway vehicle moving on curved tracks. *Journal of vibration and acoustics*, 130, 1–10.
- Lehner, M. & Eberhard, P. (2007). A two-step approach for model reduction in flexible multibody dynamics. *Multibody System Dynamics*, 17, 157–176.
- Lou, P., Zhong, X. G., Tang, J. F. & Zeng, Q. Y. (2006). Finite-element analysis of discretely supported rail subjected to multiple moving concentrated forces. *Proc. IMechE Part F: J. Rail and Rapid Transit*, 220, 305–315.
- Mackertich, S. (1992). Response of a beam to a moving mass. *Journal of Acoustical Society of America*, 92 (3), 1766–1769.
- Mackertich, S. (1997). The response of an elastically supported infinite Timoshenko beam to a moving vibrating mass. *Journal of Acoustical Society of America*, 101 (1), 337–340.
- Mackertich, S. (2003). Dynamic response of a supported beam to oscillatory moving masses. *Journal of Vibration and Control*, 9, 1083–1091.
- Mallik, A. K., Chandra, S. & Singh, A. B. (2006). Steady-state response of an elastically supported infinite beam to a moving load. *Journal of Sound and Vibration*, 291, 1148–1169.

- Malvezzi, M., Meli, E., Falomi, S. & Rindi, A. (2008). Determination of wheel-rail contact points with semianalytic methods. *Multibody System Dynamics*, 20, 327–358.
- Malvezzi, M., Meli, E., Papini, S. & Pugi, L. (2007). Parametric models of railway systems for real-time applications. *In Proceedings of the ECCOMAS Thematic Conference of Multibody Dynamics*, Milano, Italy.
- McPhee, J. J. & Anderson, R. J. (1996). A model reduction procedure for the dynamic analysis of rail vehicles subjected to linear creep forces. *Vehicle System Dynamics*, 25 (5), 349–367.
- Mead, D. J. (1970). Free wave propagation in periodically supported, infinite beams. *Journal of Sound and Vibration*, 11 (2), 181–197.
- Meirovitch, L. (1980). *Computational methods in structural dynamics*. Sijthoff and Noordhoff, The Netherlands.
- Meng, Q., Heineman, J. & Shabana, A. A. (2005). A longitudinal force model for multibody railroad vehicle system applications. *Proceedings of IDETC/CIE, ASME International Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference*, September 24-28, Long Beach, California, USA.
- Metrikine, A. V. & Dieterman, H. (1997). The equivalent vertical stiffness of an elastic half-space interacting with a beam, including the shear stresses at the beam–half-space interface. *Eur. J. Mech. A/Solids*, 16 (3), 515–527.
- Metrikine, A. V. & Popp, K. (1999). Vibration of a periodically supported beam on an elastic half-space. *Eur. J. Mech. A/Solids*, 18, 679–701.
- Müller, S. (2000). A linear vehicle-rail model to investigate stability and corrugation on straight track. *Wear*, 243, 122–132.
- Morfidis, K. (2010). Vibration of Timoshenko beams on three-parameter elastic foundation. *Computers and Structures*, 88 (5-6), 294–308.
- Naz, E. (2008). *Programación de un preprocesador de vías para la simulación dinámica de vehículos ferroviarios mediante sistemas multicuerpo*. Proyecto Fin de Carrera, Escuela Superior de Ingenieros, Universidad de Sevilla.

- Netter, H., Schupp, G., Rulka, W. & Schroeder, K. (1998). New aspects of contact modelling and validation within multibody system simulation of railway vehicles. *Vehicle System Dynamics*, 28, Supplement, 246–269.
- Newland, D. E. (1969). Steering a flexible railway truck on curved track. *Journal of Engineering for Industry*, 91, 908–918.
- Newton, S. G. & Clark, R. A. (1979). An investigation into the dynamic effects on the track of wheel flats on railway vehicles. *IMechE*, 21 (4), 287–297.
- Nielsen, J. C. O. & Abrahamsson, T. (1992). Coupling of physical and modal components for analysis of moving non-linear dynamic systems on general beam structures. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 33, 1843–1859.
- Nielsen, J. C. O. & Igeland, A. (1995). Vertical dynamic interaction between train and track: influence of wheel and track imperfections. *Journal of Sound and Vibration*, 187 (5), 825–839.
- Nielsen, J. C. O. & Oscarsson, J. (2004). Simulation of dynamic train-track interaction with state-dependent track properties. *Journal of Sound and Vibration*, 275, 515–532.
- Oliveros, F., Rodríguez, M. & Megia, M. (1983). *Tratado de explotación de ferrocarriles I. Planificación*. Editorial Rueda.
- Ono, K. & Yamada, M. (1989). Analysis of railway track vibration. *Journal of Sound and Vibration*, 130 (2), 269–297.
- Patil, S. (1988). Response of infinite railroad track to vibrating mass. *Journal of Engineering Mechanics, ASCE*, 114 (4), 688–703.
- Pigorini, F., Gugliotta, A., Sinokrot, T. & Shabana, A. A. (2007). Experimental validation of non-linear multi-body railroad vehicle system algorithms. *Proc. IMechE, PartK: Journal of Multibody Dynamics*, 221, 505–513.
- Polach, O. (1999). A fast wheel-rail forces calculation computer code. *Vehicle System Dynamics*, 33, Supplement, 728–739.

- Polach, O. (2006). On non-linear methods of bogie stability assessment using computer simulations. *Proceedings of IMechE Part F: Journal of Rail and Rapid Transit*, 220, 13–27.
- Polach, O., Berg, M. & Iwnicki, S. (2006). Simulation. In: S. Iwnicki (editor), *Handbook of Railway Vehicle Dynamics*, pp. 359–421.
- Pombo, J. (2004). *A multibody methodology for railway dynamics applications*. PhD thesis, Universidade Técnica de Lisboa, Instituto Superior Técnico.
- Pombo, J. & Ambrosio, J. (2005). Dynamic analysis of a railway vehicle in real operation conditions using a new wheel-rail contact detection model. *Int. J. Vehicle Systems Modelling and Testing*, 1 (1-3), 79–105.
- Pombo, J. & Ambrosio, J. (2008). Application of a wheel-rail contact model to railway dynamics in small radius curved tracks. *Multibody System Dynamics*, 19, 91–114.
- Pombo, J., Ambrosio, J., Pereira, M., Lewis, R., Dwyer-Joyce, R., Ariaudo, C. & Kuka, N. (2010). A study on wear evaluation of railway wheels based on multibody dynamics and wear computation. *Multibody System Dynamics*, 24 (3), 347–366.
- Popp, K., Kruse, H. & Kaiser, I. (1999). Vehicle-track dynamics in the mid-frequency range. *Vehicle System Dynamics*, 31, 423–464.
- Popp, K. & Schiehlen, W. (2003). (editors) *System Dynamics and Long-Term behaviour of railway vehicles, track and subgrade*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg.
- Rades, M. (1971). Forced vibrations of a rigid body on a three-parameter foundation. *International Journal of Mechanical Science*, 13, 573–583.
- Rathod, C. & Shabana, A. A. (2006). Rail geometry and Euler angles. *ASME Journal of Computational and Nonlinear Dynamics*, 1 (3), 264–268.
- Roda, A. (2006). Modelo dinámico de la interacción vía-vehículo basado en subestructuración. *Tesis Doctoral, Universidad Politécnica de Valencia, Valencia*.

- Rosenberger, M., Dietmaier, P., Payer, J. & Six, K. (2008). The influence of the wheelsets' relative kinematics of the railway vehicles on wheel/rail wear in curved track. *Vehicle System Dynamics*, 46, Supplement, 403–414.
- Ruecker, W., Auersch, L., Baessler, M., Knothe, K., Wu, Y., Gerstberger, U., Popp, K., Kruse, H., Savidis, S., Hirschauer, R., Bode, C., Schepers, W., Schmid, G. & Friedrich, K. (2003). A comparative study of results from numerical track-subsoil calculations. *In: K. Popp, and W. Schiehlen (editors), System Dynamics and Long-Term behaviour of railway vehicles, track and subgrade. Spring-Verlag Berlin Heidelberg*, pp. 471–488.
- Saito, H. & Teresawa, T. (1980). Steady-state vibrations of a beam on a Pasternak foundation for moving loads. *Journal of Applied Mechanics*, 47, 879–883.
- Santamaría, J., Vadillo, E. G. & Gómez, J. (2006). A comprehensive method for the elastic calculation of the two-point wheel-rail contact. *Vehicle System Dynamics*, 44, 240–250.
- Sato, Y. (1977). Study on high frequency vibration in track operated with high-speed trains. *Quarterly Report n° 1013*, 18 (3), 109–114.
- Sato, Y., Matsumoto, A. & Knothe, K. (2002). Review on rail corrugation studies. *Wear*, 253, 130–139.
- Sato, Y., Odaka, T. & Takai, H. (1988). Theoretical analyses on vibration of ballasted track. *Q. Rep. Railw. Tech. Res. Inst.* 29 (1), 30–32.
- Savidis, S. A., Hirschauer, R., Bode, C. & Schepers, W. (2003). 3D-simulation of dynamic interaction between track and layered subground. *In: K. Popp, and W. Schiehlen (editors), System Dynamics and Long-Term behaviour of railway vehicles, track and subgrade. Spring-Verlag Berlin Heidelberg*, pp. 431–450.
- Schiehlen, W. (1990). (*editor*) *Multibody Systems Handbook*. Springer-Verlag, Berlin.
- Schupp, G. (2006). Bifurcation analysis of railway vehicles. *Multibody System Dynamics*, 15, 25–50.
- Shabana, A. A. (1991). *Theory of vibration. Volume II: Discrete and Continuous Systems*. Springer-Verlag New York, Inc.

- Shabana, A. A. (1994). *Computational Dynamics*. John Wiley and sons, Inc.
- Shabana, A. A. (1997). Flexible multibody dynamics: review of past and recent developments. *Multibody System Dynamics*, 1, 189–222.
- Shabana, A. A. (2005). *Dynamics of Multibody Systems*. Third Edition, Cambridge University Press, Cambridge.
- Shabana, A. A. (2008). *Computational Continuum Mechanics*. Cambridge University Press, Cambridge.
- Shabana, A. A., Berzeri, M. & Sany, J. R. (2001). Numerical procedure for the simulation of wheel/rail contact dynamics. *Trans. Am. Soc. Mech. Eng.* 123, 168–178.
- Shabana, A. A., Chamorro, R. & Rathod, C. (2008). A multi-body system approach for finite-element modelling of rail flexibility in railroad vehicle applications. *Journal of Multibody Dynamics, Proceedings of IMechE Part K*, 222, 1–15.
- Shabana, A. A., Hussien, H. A. & Escalona, J. L. (1998). Application of the absolute nodal coordinate formulation to large rotation and large deformation problems. *Journal of Mechanical Design*, 120 (2), 188–195.
- Shabana, A. A. & Rathod, C. (2007). Geometric coupling in the wheel/rail contact formulations: a comparative study. *Journal of Multibody Dynamics, Proceedings of IMechE Part K*, 221, 147–160.
- Shabana, A. A. & Sany, J. R. (2001*a*). A survey of rail vehicle track simulations and flexible multibody dynamics. *Nonlinear Dynamics*, 26, 179–210.
- Shabana, A. A. & Sany, J. R. (2001*b*). An augmented formulation for mechanical systems with non-generalized coordinates: application to rigid body contact problems. *Nonlinear Dynamics*, 24, 183–204.
- Shabana, A. A., Tobaa, M., Sugiyama, H. & Zaazaa, K. E. (2005). On the computer formulations of the wheel/rail contact problem. *Nonlinear Dynamics*, 40, 169–193.

- Shabana, A. A., Zaazaa, K. E., Escalona, J. L. & Sany, J. R. (2004). Development of elastic force model for wheel/rail contact problems. *Journal of Sound and Vibrations*, 269, 295–325.
- Shabana, A. A., Zaazaa, K. E. & Sugiyama, H. (2008). *Railroad Vehicle Dynamics: A Computational Approach*. Taylor and Francis (CRC), Boca Raton, FL.
- Shamalita, M. & Metrikine, A. V. (2003). Analytical study of the dynamic response of an embedded railway track to a moving load. *Archive of Applied Mechanics*, 73, 131–146.
- Shen, Z. Y., Hedrick, J. K. & Elkins, J. A. (1983). A comparison of alternative creep-force models for rail vehicle dynamic analysis. *Vehicle System Dynamics*, 12, 79–87.
- Sheng, X., Jones, C. J. C. & Petyt, M. (1999a). Ground vibration generated by a load moving along a railway track. *Journal of Sound and Vibration*, 228 (1), 129–156.
- Sheng, X., Jones, C. J. C. & Petyt, M. (1999b). Ground vibration generated by a harmonic load acting on a railway track. *Journal of Sound and Vibration*, 225 (1), 3–28.
- Sinokrot, T., Nakhaeinejad, M. & Shabana, A. A. (2008). A velocity transformation method for the nonlinear dynamic simulation of railroad vehicle systems. *Nonlinear Dynamics*, 51, 289–307.
- Stadler, W. & Shreeves, R. W. (1970). The transient and steady-state response of the infinite Bernoulli-Euler beam with damping and an elastic foundation. *Quart. Journ. Mech. and Applied Math.* 23 (2), 197–208.
- Stichel, S. (2002). Limit cycle behaviour and chaotic motions of two-axle freight wagons with friction damping. *Multibody System Dynamics*, 8, 243–255.
- Stribersky, A., Moser, F. & Rulka, W. (2002). Structural dynamics and ride comfort of a rail vehicle system. *Advances in Engineering Software*, 33, 541–552.

- Sugiyama, H. & Shabana, A. A. (2007). Trajectory coordinate constraints in multibody railroad vehicle systems. *Journal of System Design and Dynamics*, 1 (3), 481–490.
- Sun, L. & Cole, C. (2008). Vertical dynamic behaviour of three-piece bogie suspensions with two types of friction wedge. *Multibody System Dynamics*, 19, 365–382.
- Sun, L. & Dhanasekar, M. (2002). A dynamic model for the vertical interaction of the rail track and wagon system. *International Journal of Solids and Structures*, 39, 1337–1359.
- Sun, L., Dhanasekar, M. & Roach, D. (2003). A 3D model for the lateral and vertical dynamics of wagon-track system. *Proc. Inst. Mech. Eng.* 217, 31–45.
- Sun, L. & Simson, S. (2005). Vehicle-track modelling for rail corrugation initiation investigation. *Proceedings of Joint Rail Conference*, March 16-18, Pueblo, Colorado.
- Szolc, T. (1998). Simulation of bending-torsional-lateral vibrations of the railway wheelset-track system in the medium frequency range. *Vehicle System Dynamics*, 30, 473–508.
- Szolc, T. (2001). Simulation of dynamic interaction between the railway bogie and the track in the medium frequency range. *Multibody System Dynamics*, 6, 99–122.
- Terumichi, Y. & Suda, Y. (2001). Dynamics of rolling wheel with contact rigidity and slip. *Proceedings of the 2005 ASME International Design Engineering Technical Conferences*, Pittsburgh, PA, 9-12 September.
- Thompson, D. & Jones, C. (2006). Noise and vibration from railway vehicles. *In: S. Iwnicki (editor), Handbook of Railway Vehicle Dynamics. Taylor and Francis Group, Boca Raton, FL*, pp. 279–325.
- Thompson, D. J. (1993a). Wheel-rail noise generation. Part I: introduction and interaction model. *Journal of Sound and Vibration*, 161 (3), 387–400.
- Thompson, D. J. (1993b). Wheel-rail noise generation. Part II: wheel vibration. *Journal of Sound and Vibration*, 161 (3), 401–419.

- Thompson, D. J. & Jones, C. J. C. (2000). A review of the modelling of wheel-rail noise generation. *Journal of Sound and Vibration*, 231 (3), 519–536.
- Timoshenko, S. (1926). Method of analysis of statical and dynamical stresses in rail. *Proceedings of 2nd Int. Congress of Appl. Mech. Zurich*, pp. 407–418.
- Ting, E. (1973). Unbonded beams on a two-parameter foundation. *Journal of the Franklin Institute*, 296 (2), 77–89.
- True, H. (1999). On the theory of nonlinear dynamics and its applications in vehicle system dynamics. *Vehicle System Dynamics*, 31, 393–421.
- True, H., Hansen, T. & Lundell, H. (2005). On the quasi-stationary curving dynamics of a railroad truck. *Proceedings of the Joint Rail Conference*, March 16-18, Pueblo, Colorado.
- Tunna, J. M. (1988). Wheel/rail forces due to wheel irregularities. In *Proceedings of 9th International Wheelset Congress, Montreal, Canada*, paper 6-2.
- UNE-EN13232-1 (2005). Aplicaciones ferroviarias. Vía. Aparatos de vía. Parte 1: Definiciones. *AENOR*, pp. 1–44.
- Valtorta, D., Zaazaa, K. E., Shabana, A. A. & Sany, J. R. (2001). A study of the lateral stability of railroad vehicles using a nonlinear constrained multibody formulation. *Proceedings of 2001 ASME International Mechanical Engineering Congress and Exposition*, New York, NY, 11-16 November.
- Vermeulen, P. J. & Johnson, K. L. (1964). Contact of nonspherical bodies transmitting tangential forces. *ASME Journal of Applied Mechanics*, 31, 338–340.
- Vostroukhov, A. V. & Metrikine, A. V. (2003). Periodically supported beam on a visco-elastic layer as a model for dynamic analysis of a high-speed railway track. *International Journal of Solids and Structures*, 40, 5723–5752.
- Weistman, Y. (1971). Onset of separation between a beam and a tensionless elastic foundation under a moving load. *Int. J. Mech. Sci.* 13, 707–711.
- Wickens, A. H. (1965). The dynamic stability of railway vehicles wheelsets and bogies having profiled wheels. *International Journal of Solids and Structures*, 1, 319–341.

- Wickens, A. H. (1976). Steering and dynamic stability of railway vehicles. *Vehicle System Dynamics*, 5, 15–46.
- Wickens, A. H. (1986). Non-linear dynamics of railway vehicles. *Vehicle System Dynamics*, 15 (5), 289–301.
- Wickens, A. H. (1988). Stability optimization of multi-axle railway vehicles possessing perfect steering. *ASME Journal of Dynamic Systems, Measurements, and Control*, 110, 1–7.
- Wickens, A. H. (1998). The dynamics of railway vehicles—from Stephenson to Carter. *Proc. IMechE, Part F*, 212, 209–217.
- Wickens, A. H. (2003). *Fundamentals of rail vehicle dynamics: Guidance and Stability*. Swets and Zeitlinger B.V., Lisse, The Netherlands.
- Wu, J. S. & Shih, P. Y. (2000). Dynamic responses of railway and carriage under the high-speed moving loads. *Journal of Sound and Vibration*, 236 (1), 61–87.
- Wu, T. & Thompson, D. (1999). A double Timoshenko beam model for vertical vibration analysis of railway track at high frequencies. *Journal of Sound and Vibration*, 224 (2), 329–348.
- Wu, T. & Thompson, D. (2000). The vibration behavior of railway track at high frequencies under multiple preloads and wheel interactions. *Journal of Acoustical Society of America*, 108 (3), 1046–1053.
- Wu, T. & Thompson, D. (2002). A hybrid model for the noise generation due to railway wheel flats. *Journal of Sound and Vibration*, 251 (1), 115–139.
- Xiao, X., Jin, X., Deng, Y. & Zhou, Z. (2008). Effect of curved track support failure on vehicle derailment. *Vehicle System Dynamics*, 46 (11), 1029–1059.
- Xiao, X., Jin, X., Wen, Z., Zhu, M. & Zhang, W. (2010). Effect of tangent track buckle on vehicle derailment. *Multibody System Dynamics*, 25 (1), 1–41.
- Yoo, W. & Haug, E. (1986). Dynamics of flexible mechanical systems using vibration and static correction modes. *Journal of Mechanisms, Transmissions, and Automation in Design*, 108, 315–322.

- Young, T. H. & Li, C. Y. (2003). Vertical vibration analysis of vehicle/imperfect track system. *Vehicle System Dynamics*, 40(5), 329–349.
- Zaazaa, K. E. (2003). *Elastic force model for wheel/rail contact in multibody railroad vehicle systems*. PhD thesis, University of Illinois at Chicago.
- Zboinski, K. (1998). Dynamical investigation of railway vehicles on a curved track. *Eur. Journal Mech. A/Solids*, 17, 1001–1020.
- Zboinski, K. & Dusza, M. (2006). Development of the method and analysis for non-linear lateral stability of railway vehicles in a curved track. *Vehicle System Dynamics*, 44, Supplement, 147–157.
- Zboinski, K. & Dusza, M. (2008). Bifurcation approach to the influence of rolling radius modelling and rail inclination on the stability of railway vehicles in a curved track. *Vehicle System Dynamics*, 46, Supplement, 1023–1037.
- Zhai, W. & Cai, Z. (1997). Dynamic interaction between a lumped mass vehicle and a discretely supported continuous rail track. *Computers and structures*, 63(5), 987–997.
- Zhai, W. M. & Wang, K. Y. (2006). Lateral interactions of trains and tracks on small-radius curves: simulation and experiment. *Vehicle System Dynamics*, 44, Supplement, 520–530.
- Zhai, W. M., Wang, K. Y. & Cai, C. (2009). Fundamentals of vehicle-track coupled dynamics. *Vehicle System Dynamics*, 47 (11), 1349–1376.
- Zhai, W. M., Wang, K. Y. & Lin, J. (2004). Modelling and experiment of railway ballast vibrations. *Journal of Sound and Vibration*, 270, 673–683.
- Zienkiewicz, O. C. (1977). *The finite element method*. McGraw-Hill Company, London.
- Zolotas, A., Pearson, J. & Goodall, R. (2006). Modelling requirements for the design of active stability control strategies for a high speed bogie. *Multibody System Dynamics*, 15, 51–66.