

TESIS

ANÁLISIS DEL EFECTO DE LA FLEXIÓN EN LA CONFORMABILIDAD DE CHAPAS METÁLICAS

por

DOMINGO MORALES PALMA

Ingeniero Industrial

presentada en la

ESCUELA SUPERIOR DE INGENIEROS

de la

UNIVERSIDAD DE SEVILLA

para la obtención del grado de

Doctor Ingeniero Industrial

Sevilla, diciembre de 2010

TESIS

ANÁLISIS DEL EFECTO DE LA FLEXIÓN EN LA CONFORMABILIDAD DE CHAPAS METÁLICAS

Dr. Carpóforo Vallellano Martín

Director de la tesis

Domingo Morales Palma

Doctorando

Sevilla, diciembre de 2010

A mis padres y a mis hermanos

Agradecimientos

Deseo expresar mi más sincero agradecimiento al profesor D. Carpóforo Vallesano Martín, por su inestimable ayuda, su dedicación y la constante motivación para realizar esta tesis. Su capacidad de trabajo, así como su paciencia y talento han contribuido muy especialmente en mi formación profesional.

De igual manera quiero expresar mi gratitud al profesor D. Javier García-Lomas Jung, cuyo apoyo y comprensión han facilitado el desarrollo de este trabajo.

También deseo hacer extensivos mis agradecimientos a mis compañeros del grupo de Ingeniería de los Procesos de Fabricación, Paco, Luis, Andrés, Gabi, Aida, Antonio y Manuel, cuya sola presencia en el día a día hace que sea todo un privilegio el trabajo de investigador y profesor. Asimismo quiero dar las gracias a los profesores y compañeros del grupo de Ingeniería Mecánica por su colaboración y estímulo.

A mi familia reservo mi más profundo agradecimiento por su apoyo incondicional, y en especial a mis padres por el enorme esfuerzo que realizaron para que yo pudiera desarrollar mis estudios de Ingeniería Industrial en la Universidad de Sevilla.

Resumen

En términos generales, el principal factor limitante en los procesos de conformado de chapa es el fallo del material, entendiendo por fallo cualquier evento que inutilice la chapa. Entre los tipos de fallo más comunes se encuentran la estricción localizada y la fractura dúctil, iniciándose uno u otro en función de la ductilidad del material y de las condiciones del proceso. En la práctica, los puntos críticos donde se origina el fallo del material suelen estar asociados a zonas en las que las herramientas conformadoras presentan una mayor curvatura. En estas situaciones se generan esfuerzos de flexión en dichos puntos críticos, de manera que el fallo se produce bajo un gradiente de tensión/deformación en el espesor de la chapa. En las operaciones donde los esfuerzos predominantes son de tracción, el efecto de este gradiente en la conformabilidad del material ha sido frecuentemente menospreciado debido al espesor relativamente pequeño de las piezas conformadas. Sin embargo, la distribución no homogénea de tensiones y deformaciones en el espesor constituye un factor determinante en el mecanismo de fallo. El objetivo principal de esta tesis es el estudio del efecto de la flexión en el fallo por estricción localizada y fractura dúctil en la conformabilidad de chapa metálica. El trabajo se centra fundamentalmente en el análisis de la evolución de los gradientes de tensión/deformación en el espesor durante el conformado y la influencia de la microestructura del material en el mecanismo de fallo.

Para analizar la evolución de tensiones/deformaciones en el material se desarrollan dos modelos analíticos del proceso de conformado de una chapa. En un primer modelo se considera el caso simple de una evolución proporcional de la tensión y deformación durante el conformado. Este modelo reproduce adecuadamente las operaciones de abombamiento mediante hidroconformado (*bulge*) donde la matriz conformadora tiene una abertura elíptica cuya relación entre semiejes mayor y menor es menor de 1,3. El segundo modelo se diseña para simular la evolución de tensiones/deformaciones en operaciones de estirado o estampación de

chapa mediante punzones de forma, usadas habitualmente a nivel industrial. El modelo consiste en dos etapas sucesivas, una de flexión pura hasta que la chapa adquiere la curvatura impuesta por el punzón, seguida de una de tracción pura hasta el fallo del material. A diferencia de otros trabajos, este modelo permite analizar la influencia en el fallo de dos fenómenos observados en la práctica: el efecto dominante de la flexión durante los primeros instantes del estirado con punzón y la consecuente inversión de la deformación que sufre el material en contacto con el punzón, inicialmente acortándose y que pasa a estirarse cuando los esfuerzos de tracción se tornan en dominantes.

El fallo por estricción localizada y fractura dúctil se describe mediante un modelo analítico basado en el concepto de volumen crítico de material. El modelo se desarrolla combinando los métodos actuales de predicción del fallo en chapas bajo un gradiente de deformación en el espesor con las ideas que subyacen de las teorías clásicas de Distancias Críticas, originariamente desarrolladas para analizar el comportamiento a fatiga de componentes con entallas. El modelo propuesto postula que la estricción localizada se inicia cuando el material en una cierta distancia crítica desde la cara interna de la chapa no puede resistir por más tiempo la inestabilidad plástica de la sección. De manera similar, el modelo asume que el fallo por fractura dúctil se produce cuando el material en una cierta distancia crítica desde la cara externa de la chapa alcanza el límite de rotura del material. Las distancias críticas en ambos modos de fallo se asumen que dependen de la microestructura del material.

Los modelos analíticos desarrollados se contrastan con resultados experimentales publicados en la literatura. Los datos proceden de ensayos de estirado con flexión con punzones cilíndricos de radios comprendidos entre 0,5 y 20 mm. Las chapas ensayadas comprenden aceros, aluminio y latón, de diferentes geometrías y espesores entre 0,69 y 1,5 mm. Para simular la evolución de la deformación y tensión en los ensayos se utiliza el modelo de carga propuesto de flexión-tracción en dos pasos. Las distancias críticas de fallo por estricción localizada y fractura dúctil se estiman a partir de datos experimentales y se comparan con la microestructura de los materiales.

Por otro lado, el presente trabajo realiza algunas propuestas de mejoras de herramientas tradicionales para el análisis y predicción de la conformabilidad de chapa. Los diagramas MN o diagramas flector-axil adimensionales, empleados para analizar el fallo en términos de combinaciones de esfuerzos, se modifican sustancialmente al considerar el efecto de la historia de carga y los dos modos de fallo

por estricción y fractura. También se proponen las superficies límite de conformado (SLC). Estas gráficas son una generalización en 3D de los diagramas límite de conformado (DLC), de uso extendido en la industria para evaluar la conformabilidad del material en términos de deformaciones principales, a los que se les añade un tercer eje que cuantifica el efecto de la flexión mediante la relación espesor/radio del punzón (t_0/R).

Brevemente, el estudio realizado indica que la estricción localizada y la fractura dúctil son dos modos de fallo independientes, produciéndose uno u otro en función de la severidad del gradiente de tensión/deformación en el espesor de la chapa. Dicha independencia proviene del hecho de que cada mecanismo de fallo está controlado por volúmenes de material distintos, los cuales se relacionan con la microestructura del material, representada aquí por el tamaño medio de grano. Los materiales analizados soportan la idea de que el fallo por estricción y fractura está gobernado por la resistencia a la inestabilidad plástica o a la fractura dúctil, respectivamente, de un volumen crítico de material de entre 8 y 10 tamaños de granos situados en la cara interna y externa de la chapa, respectivamente. Los resultados experimentales se describen razonablemente bien con los modelos propuestos.

La tesis se estructura en seis capítulos. En el Capítulo 1 se revisan las técnicas y trabajos más relevantes de análisis y predicción de los modos de fallo de chapa más habituales en la práctica: la estricción localizada y la fractura dúctil. También se exponen algunos estudios recientes sobre el efecto de la historia de carga en la conformabilidad del material. En el Capítulo 2 se presentan los trabajos más importantes sobre el efecto de la flexión en la conformabilidad de chapa, así como una revisión de las teorías analíticas del doblado de un material continuo y homogéneo. El Capítulo 3 analiza el comportamiento elasto-plástico de una porción elemental de chapa en un proceso de conformado con esfuerzos combinados de tracción y flexión, proponiéndose dos modelos de carga en tensión plana, uno proporcional y otro no proporcional de flexión-tracción en dos pasos. Asimismo se analiza el efecto de la tensión transversal en el espesor de la chapa. El Capítulo 4 discute el efecto del gradiente de tensión/deformación en el fallo por estricción y fractura, planteándose un modelo para su predicción. En el Capítulo 5 se comparan las predicciones de los modelos propuestos con resultados experimentales publicados en la literatura. Finalmente, el Capítulo 6 resume las conclusiones más destacadas de esta tesis, indicando las posibles extensiones futuras del trabajo desarrollado.

Índice general

Índice de figuras	XI
Índice de tablas	XV
Nomenclatura	XVII
1. Conformabilidad de chapas metálicas	1
1.1. Introducción	2
1.2. Diagramas límite de conformado (DLC)	6
1.3. Estricción localizada	8
1.3.1. Análisis de bifurcación de Swift y Hill	9
1.3.2. Análisis de bifurcación de Stören y Rice	13
1.3.3. Método de Marciniak y Kuczyński	16
1.4. Fractura dúctil	21
1.4.1. Criterios locales	25
1.4.2. Criterios integrales empíricos	25
1.4.3. Criterios basados en la microestructura	27
1.5. Efecto de la historia de carga	30
Bibliografía	33
2. Efecto de la flexión en el conformado de chapa	41
2.1. Introducción	42
2.2. Teoría elemental de doblado	52
2.2.1. Variables en la teoría elemental	53
2.2.2. Flexión sin tracción	55
2.2.3. Flexión con tracción	58
2.3. Teoría matemática de doblado plástico	67

2.3.1.	Tensiones en el doblado plástico perfecto	67
2.3.2.	Deformaciones en el doblado plástico perfecto	69
2.3.3.	Movimiento de las fibras en el espesor	71
2.3.4.	Efecto de la tracción en el doblado plástico perfecto	74
2.3.5.	Influencia del endurecimiento por deformación	76
2.3.6.	Aplicabilidad de la teoría elemental <i>vs.</i> matemática	80
2.3.7.	Trabajos basados en la teoría matemática	81
2.4.	Resumen	82
	Bibliografía	83
3.	Modelado analítico de la tracción-flexión	91
3.1.	Consideraciones previas	92
3.1.1.	Parámetros geométricos de una porción elemental de chapa deformada	93
3.1.2.	Modelo elasto-plástico de comportamiento	95
3.2.	Modelo de carga proporcional	100
3.2.1.	Deformación y geometría de la porción elemental de chapa	100
3.2.2.	Patrones de tensiones	102
3.2.3.	Evolución axil-flector. Diagrama MN	106
3.2.4.	Aplicabilidad del modelo de carga proporcional	110
3.3.	Modelo flexión-tracción en dos pasos	113
3.3.1.	Evolución de las deformaciones	117
3.3.2.	Inversión de la carga en las fibras internas	123
3.3.3.	Relaciones tensión-deformación equivalentes	128
3.3.4.	Evolución de las tensiones	131
3.3.5.	Patrones de tensiones	137
3.3.6.	Evolución axil-flector. Diagrama MN	139
3.4.	Efecto de la tensión transversal en el espesor	140
	Bibliografía	147
4.	El fallo bajo condiciones de flexión-tracción	153
4.1.	Influencia del gradiente de deformación en el fallo de chapa	154
4.2.	Reglas de la Caras Cóncava y Convexa	157
4.3.	Modelo de fallo basado en los Métodos de Distancias Críticas	160
4.3.1.	Métodos de la Línea y del Punto	161
4.3.2.	Modelo de fallo por estricción	163
4.3.3.	Modelo de fallo por fractura	167

4.4. Reformulación en tensiones	170
4.5. Análisis del fallo por estricción considerando la tensión transversal	176
4.5.1. Condición de axil máximo en la flexión-tracción	177
4.5.2. Análisis del efecto de la presión del punzón	184
4.6. Superficie límite de conformado (SLC)	186
Bibliografía	187
5. Comparación con resultados experimentales. Discusión	193
5.1. Descripción de los ensayos y resultados experimentales	194
5.2. Predicción del fallo	200
5.2.1. Chapas de acero 1008 AK	200
5.2.2. Chapas de latón 70/30	210
5.2.3. Chapas de aluminio 6010	213
5.2.4. Chapas de acero de alta resistencia H340LAD	215
5.2.5. Distancias críticas <i>vs.</i> microestructura	219
5.3. Superficies límite de conformado	221
5.4. Análisis mediante diagramas MN	226
5.5. Comparativa de criterios de fluencia	230
Bibliografía	234
6. Conclusiones finales	239
6.1. Conclusiones	239
6.1.1. Modelado del proceso de deformación	240
6.1.2. Modelado del fallo	241
6.2. Trabajos futuros	243
A. Criterios de plastificación en tensión plana	245
A.1. Criterio de von Mises	246
A.2. Criterio cuadrático de Hill (1948)	246
A.3. Criterio no cuadrático de Hosford (1979)	247
Bibliografía	248
B. Regla de endurecimiento de Ziegler en tensión plana	251
C. Criterio cuadrático de Hill en deformación plana	257
Bibliografía	258

Índice de figuras

1.1. Conformado de chapa por doblado con directriz recta	2
1.2. Conformado de chapa por doblado con directriz curva	3
1.3. Conformado de chapa por estirado y por estampación	4
1.4. Conformado de chapa por embutición e hidroconformado	4
1.5. Esquema de los ensayos de Nakazima y Marciniak	5
1.6. Diagrama límite de conformado (DLC)	7
1.7. Curvas límite de conformado por estricción (CLCE)	7
1.8. Estricción difusa y estricción localizada en una chapa a tracción . .	10
1.9. DLC: predicción de estricción de Swift, Hill y Stören y Rice	12
1.10. Análisis de bifurcación de Stören y Rice	13
1.11. Análisis de bifurcación de Marciniak y Kuczyński	17
1.12. Trayectorias de deformación en la zona estricción hasta la fractura	20
1.13. Fractura dúctil por cortante y por coalescencia de huecos	21
1.14. Ejemplos de fractura dúctil en ensayos de compresión y tracción . .	22
1.15. DLC: curvas típicas de estricción y fractura	23
1.16. DLC mostrando diferentes modos de fallo	29
1.17. Efecto de la historia de carga en el DLC	31
1.18. DLC en tensiones (DLCT)	32
2.1. Esquema de los ensayos ASBT	44
2.2. Evolución de la deformación en un ensayo ASBT	45
2.3. Curvas de conformabilidad RtH	46
2.4. Trayectorias de deformación en ensayos de Nakazima	51
2.5. Variables en la teoría elemental de doblado	53
2.6. Teoría elemental de doblado: relación flector-curvatura	57
2.7. Patrones de tensiones en un material elasto-plástico perfecto (EPP)	59

2.8. Diagrama δ - γ en un material EPP	61
2.9. Diagrama MN en un material EPP	61
2.10. Influencia de la tracción en la relación flector-curvatura EPP	62
2.11. Diagrama MN de un material EPP: curvas de curvatura constante	62
2.12. Patrones de tensiones en un material con endurecimiento (EPE)	64
2.13. Diagrama δ - γ en un material EPE	64
2.14. Diagrama MN de un material EPE	65
2.15. Gradientes de tensiones en el doblado rígido-plástico perfecto (RPP)	68
2.16. Esquema del movimiento de una fibra en el espesor	71
2.17. Movimiento de las fibras durante el doblado RPP	72
2.18. Esquema de la posición de las superficies media, indeformada y neutra	73
2.19. Influencia del axil en las tensiones del doblado RPP	75
2.20. Influencia del axil en la reducción del espesor en el doblado RPP	76
3.1. Variables geométricas en una porción elemental de chapa	94
3.2. Ley de comportamiento elasto-plástico	96
3.3. Modelo proporcional: curvaturas de la superficie media	102
3.4. Modelo proporcional: patrones de tensiones en el espesor	103
3.5. Modelo proporcional: diagrama κ_1 - τ_1	105
3.6. Modelo proporcional: diagrama MN	108
3.7. Modelo proporcional: curvas isoparamétricas en el diagrama MN	109
3.8. Ensayos de abombamiento mediante hidroconformado de chapa	111
3.9. Evolución de la deformación en un ensayo de estirado con punzón	114
3.10. Modelo flexión-tracción: evolución de la deformación	115
3.11. Mod. flex.-tracc.: deformación con punzón cilíndrico y hemisférico	121
3.12. Modelos de carga inversa en procesos de flexión pura	124
3.13. Modelos de carga inversa en procesos de estirado con punzón	126
3.14. Gradientes de tensión para distintas reglas de endurecimiento	127
3.15. Modelo flexión-tracción: relaciones σ_{eq} - ε_{eq} en la primera etapa	128
3.16. Modelo flexión-tracción: relaciones σ_{eq} - ε_{eq} en la segunda etapa	129
3.17. Regla de endurecimiento cinemático de Ziegler en tensión plana	131
3.18. Modelo flexión-tracción: $\tilde{\sigma}_{eq}$ en régimen elástico	133
3.19. Modelo flexión-tracción: estado tensional en la primera etapa	134
3.20. Modelo flexión-tracción: estado tensional en la segunda etapa	136
3.21. Modelo flexión-tracción: patrones de tensiones en el espesor	138
3.22. Modelo flexión-tracción: diagrama MN	139
3.23. Efecto de la tensión transversal (σ_3) en el mod. flex.-tracc.	143

3.24. Efecto de σ_3 : influencia del radio del punzón (R)	144
3.25. Efecto de σ_3 con $R/t_0 = 2$: gradientes en el espesor	145
3.26. Efecto de σ_3 con $R/t_0 = 2$: curvas tensión-deformación	145
3.27. Efecto de σ_3 con $R/t_0 = 20$: gradientes en el espesor	146
3.28. Efecto de σ_3 con $R/t_0 = 20$: curvas tensión-deformación	146
4.1. Severidad del gradiente de deformación en el espesor de chapa	154
4.2. Micrografías de chapas fracturadas	156
4.3. Reglas de la Cara Cóncava y Convexa: esquema	158
4.4. Reglas de las Caras Cóncava y Convexa: diagrama MN	159
4.5. Métodos de las Distancias Críticas (MDC) en el borde de una entalla	162
4.6. Esquema del modelo de fallo por estricción basado en los MDC	163
4.7. Desplazamiento de una fibra genérica en el espesor	165
4.8. Mod. estricción basada en los MDC: diagrama MN	166
4.9. Esquema del modelo de fallo por fractura basado en los MDC	168
4.10. Mod. fractura basada en los MDC: diagrama MN	169
4.11. DLCT considerando la tensión transversal en el espesor	172
4.12. Modo de fallo en el espacio de las tensiones	174
4.13. Efecto de la historia de carga: Diagrama MN	176
4.14. Efecto de t_0/R y de n en t/t_0 de estricción	180
4.15. Volumen de fibras <i>estables</i> en la estricción	180
4.16. Efecto de t_0/R y de n en $d_{dN=0}/t$ de estricción	181
4.17. Modelo de fallo propuesto <i>vs.</i> método de Hill	183
4.18. Superficie límite de conformado (SLC) en 2D y 3D	187
5.1. Stoughton <i>et al.</i> : esquema de los ensayos	195
5.2. Stoughton <i>et al.</i> : resultados experimentales	197
5.3. Kitting <i>et al.</i> : vistas de chapas ensayadas	199
5.4. Kitting <i>et al.</i> : resultados experimentales	199
5.5. Acero 1008 AK: caminos de deformación en los ensayos	201
5.6. Acero 1008 AK: curvas ε_1-t/R de fallo por estricción	203
5.7. Acero 1008 AK: deformaciones límite de fractura	205
5.8. Acero 1008 AK: curvas ε_1-t/R de fallo por fractura	207
5.9. Acero 1008 AK: curvas ε_1-t/R de fallo general	209
5.10. Acero 1008 AK: trayectorias de tensión efectiva	210
5.11. Latón 70/30: caminos de deformación en los ensayos	211
5.12. Latón 70/30: curvas ε_1-t/R de fallo general	212

5.13. Latón 70/30: trayectorias de tensión característica	212
5.14. Aluminio 6010: caminos de deformación en los ensayos	214
5.15. Aluminio 6010: curvas ε_1-t/R de fallo general	214
5.16. Acero H340LAD: caminos de deformación en los ensayos	216
5.17. Acero H340LAD: DLC-estricción	216
5.18. Acero H340LAD: trayectorias de tensión efectiva	217
5.19. Acero H340LAD: DLC-estricción (medidas desplazadas)	218
5.20. Acero 1008 AK, latón 70/30 y aluminio 6010: DLC y DLCT	222
5.21. Aceros 1008 y H340LAD, latón y aluminio: DLC con t_0/R	224
5.22. Acero 1008 AK: SLC	225
5.23. Aceros 1008 y H340LAD, latón y aluminio: diagr. MN (def. plana)	227
5.24. Acero 1008 AK: predicción del espesor en el diagrama MN	228
5.25. Aluminio 6010: diagramas MN en tracción pura y def. equi-biaxial	229
5.26. Criterios de fluencia: curvas de plastificación inicial en DLCT	231
5.27. Criterios de fluencia: curvas de estricción localizada en DLCT	232
5.28. Criterios de fluencia: curvas de fractura dúctil en DLCT	233

Índice de tablas

5.1. Propiedades geométricas y mecánicas de las chapas de acero 1008 AK, latón 70/30 y aluminio 6010	195
5.2. Propiedades mecánicas del acero H340LAD	198
5.3. Valores estimados de DLC_0 para las chapas de acero 1008 AK	201
5.4. Estimación de la deformación límite de fractura en chapas de acero 1008 AK	205
5.5. Distancias críticas (d_{neck} y d_{frac}) y tamaño medio de grano (D)	219
5.6. Relación entre las distancias críticas y el tamaño de grano (d_{neck}/D y d_{frac}/D)	220

Nomenclatura

Caracteres latinos

- d Distancia medida desde la cara interna de la chapa indeformada.
- H Pendiente de la curva tensión-deformación ($H = d\sigma_{eq}/d\varepsilon_{eq}$).
- m_1 Esfuerzo flector máximo adimensional bajo unas determinadas condiciones de deformación ($m_1 = M_1/M_{1,Y}$).
- M_i Esfuerzo flector en dirección principal i ($i = \{1, 2\}$).
- $M_{1,Y}$ Esfuerzo flector elástico máximo bajo unas determinadas condiciones de deformación.
- n_1 Esfuerzo axil máximo adimensional bajo unas determinadas condiciones de deformación ($n_1 = N_1/N_{1,Y}$).
- N_i Esfuerzo axil en dirección principal i ($i = \{1, 2\}$).
- $N_{1,Y}$ Esfuerzo axil elástico máximo bajo unas determinadas condiciones de deformación.
- p Presión de contacto del punzón.
- R Radio de curvatura del punzón.
- r_{in} Radio de curvatura de la superficie interna de la chapa.
- r_m Radio de curvatura de la superficie media de la chapa.
- r_n Radio de curvatura de la fibra neutra.
- r_{out} Radio de curvatura de la superficie externa de la chapa.

- r_u Radio de curvatura de la fibra indeformada.
- r_θ Coeficiente de Lankford en la dirección que forma un ángulo θ con la de laminación.
- t Espesor de chapa deformada.
- t_0 Espesor de chapa indeformada.
- z Posición de una fibra en el espesor medida desde la superficie media.

Caracteres griegos

- α Relación entre tensiones ($\alpha = \sigma_1/\sigma_2$).
- $\tilde{\alpha}$ Relación entre tensiones reducidas ($\tilde{\alpha} = \tilde{\sigma}_1/\tilde{\sigma}_2$).
- β Relación entre velocidades de deformación ($\beta = d\varepsilon_1/d\varepsilon_2$).
- δ Distancia adimensional a la cara interna de la chapa indeformada ($\delta = d/t_0$).
- $\underline{\Delta}$ Incremento de una determinada variable contado a partir del final de la etapa de flexión en el modelo flexión-tracción en dos pasos.
- ε_i Deformación en la dirección principal i ($i = \{1, 2, 3\}$).
- ε_{eq} Deformación equivalente.
- κ_i Curvatura relativa de la superficie media de la chapa en la dirección principal i ($i = \{1, 2\}$) ($\kappa_i = t/r_{m,i}$).
- μ_1 Esfuerzo flector máximo adimensional modificado ($\mu_1 = m_1/\tau^2$).
- ν_1 Esfuerzo axil máximo adimensional modificado ($\nu_1 = n_1/\tau$).
- ρ Relación entre la velocidad de deformación equivalente y la velocidad de deformación principal máxima ($\rho = d\varepsilon_{eq}/d\varepsilon_1$).
- σ_0 Límite elástico.
- σ_i Tensión en la dirección principal i ($i = \{1, 2, 3\}$).
- $\tilde{\sigma}_i$ Tensión reducida en la dirección principal i ($i = \{1, 2, 3\}$) ($\tilde{\sigma}_i = \sigma_i - \omega_i$).
- σ_{eff} Tensión característica en el modelo de fallo propuesto.

- σ_{eq} Tensión equivalente.
- ω_i Desplazamiento de la superficie de plastificación en la dirección de la tensión principal i ($i = \{1, 2, 3\}$).
- τ Espesor de chapa adimensional ($\tau = t/t_0$).
- τ_i Posición de la fibra indeformada relativa a la superficie media de la chapa en la dirección principal i ($i = \{1, 2\}$) ($\tau_i = r_{u,i}/r_{m,i}$).
- φ Relación entre la tensión equivalente y la tensión principal máxima ($\varphi = \sigma_{eq}/\sigma_1$).
- $\tilde{\varphi}$ Relación entre la tensión reducida equivalente y la tensión reducida principal máxima ($\tilde{\varphi} = \tilde{\sigma}_{eq}/\tilde{\sigma}_1$).
- ζ Posición relativa de una fibra en el espesor medida desde la superficie media ($\zeta = z/t$).

Subíndices

{1,2,3} Direcciones principales.

frac Variable en el fallo por fractura dúctil.

in Variable en la superficie interna de la chapa.

mid Variable en la superficie media de la chapa.

neck Variable en el fallo por estricción localizada.

out Variable en la superficie externa de la chapa.

Y Variable relacionada con el límite de fluencia del material.

Superíndices

M Variable en un instante durante la etapa de flexión en el modelo flexión-tracción en dos pasos.

ML Variable según el Método de la Línea.

MN Variable en la transición entre la etapa de flexión a la de tracción en el modelo flexión-tracción en dos pasos.

MP Variable según el Método del Punto.

N Variable en un instante durante la etapa de tracción en el modelo flexión-tracción en dos pasos.

TP Variable en condiciones de tensión plana.

Abreviaturas

DLC Diagrama límite de conformado clásico (en deformaciones).

DLCT Diagrama límite de conformado en tensiones.

MDC Métodos de distancias críticas.

SLC Superficie límite de conformado.

Capítulo 1

Conformabilidad de chapas metálicas

La chapa metálica se utiliza extensivamente para la fabricación de componentes en las industrias aeronáutica y automovilística y en multitud de productos de uso cotidiano. En la práctica, los procesos para su conformado están limitados por el fallo de la chapa. Los tipos de fallo más comunes observados en estos procesos son la estricción localizada y la fractura dúctil. Ambos modos de fallo empezaron a ser investigados a mediados del siglo XX y han sido muy numerosos los criterios propuestos para su predicción. En mayor o menor medida, los primeros análisis no tienen en cuenta factores que se consideran a priori de segundo orden, como el efecto de la temperatura de trabajo, la fricción, las condiciones del proceso de carga o la presencia de gradientes de tensión/deformación en el espesor de la chapa. En este capítulo se exponen los trabajos teóricos y experimentales más relevantes de los dos modos mencionados de fallo de chapas. Estos trabajos asumen sólo esfuerzos de tracción en el plano de la chapa, siendo estas condiciones muy habituales en una gran parte de los procesos de conformado. También se describen, bajo las mismas condiciones de deformación en el plano, los estudios realizados sobre un factor que se ha comprobado que es determinante en la conformabilidad del material: el efecto de la historia de carga.

1.1. Introducción

La producción de chapas metálicas, obtenidas por laminación en frío o en caliente, representa una parte importante de la producción metálica industrial. Las chapas laminadas son conformadas posteriormente para fabricar carrocerías de automóviles, fuselaje de aeronaves, revestimientos de electrodomésticos, latas de conservas y bebidas, elementos de construcción y otros muchos productos de uso cotidiano. Una de las características principales que hacen atractivos los productos fabricados mediante conformado de chapa es que éstos presentan una buena resistencia mecánica y una excelente relación resistencia-peso.

Existen en la industria un gran número de procesos para el conformado de componentes de chapa. Aunque muy diferentes desde el punto de vista técnico, estos procesos comparten fundamentos básicos que permiten analizarlos en su conjunto. Entre las técnicas y procesos básicos de conformado de chapa están el doblado o plegado, el estirado, la estampación, la embutición, el hidroconformado, etc.

El proceso de doblado (*bending*) más simple consiste en plegar la chapa a lo largo de una directriz recta. La Figura 1.1 ilustra de forma esquemática algunos de los procesos de doblado más destacados: en el doblado con matriz en V, un punzón móvil fuerza a la chapa a entrar en la cavidad de la matriz; en el doblado en voladizo, la chapa se sujeta con una mordaza o prensa-chapa; el conformado con rodillos es un proceso no estacionario para el doblado progresivo de perfiles.

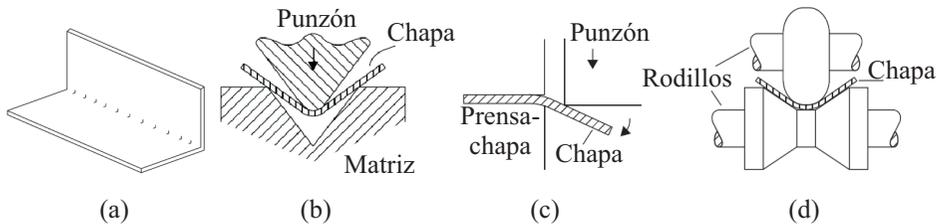


Figura 1.1: Procesos de doblado de chapa con directriz recta (Marciniak *et ál.*, 2002): (a) chapa doblada mostrando la directriz recta; (b) doblado en V; (c) doblado en voladizo; y (d) doblado de perfiles con rodillos.

Como es característico en la mayoría de los procesos de conformado de chapa, la deformación plástica se localiza en una zona muy restringida (el conformado con rodillos es una de las excepciones), en este caso en la directriz o línea de doblado, permaneciendo el resto del material indeformado. Si el material no es suficientemente dúctil, pueden aparecer grietas en la superficie externa doblada,

aunque habitualmente la mayor dificultad consiste en obtener una buena precisión geométrica de la pieza final, debido al fenómeno de la recuperación elástica.

El doblado también puede realizarse a lo largo de una directriz curva. En este caso, la deformación plástica puede extenderse no sólo a la zona de doblado, sino también a la región adyacente. Un ejemplo muy común es el embridado curvo del extremo de una chapa. Según sea la curvatura de ésta, la zona de la brida quedará a compresión (Figura 1.2(a)), pudiendo ocasionar el arrugamiento por pandeo local de esta zona, o quedará a tracción (Figura 1.2(b)), favoreciendo así la fractura en la parte de la brida. Un ejemplo más complejo, donde aparecen estos dos eventos, es el doblado de perfiles (Figura 1.2(c)).

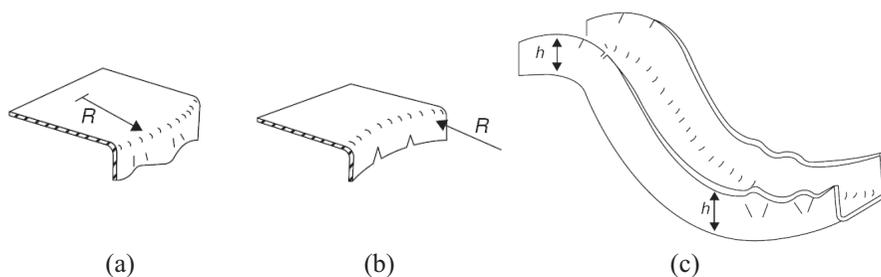


Figura 1.2: Procesos de doblado de chapa con directriz curva (Marciniak *et al.*, 2002): (a) brida a compresión; (b) brida a tracción; y (c) doblado de perfiles.

El conformado por estirado (*stretching*) es uno de los procesos más utilizados en la industria aeronáutica para la fabricación del fuselaje de las aeronaves (Figura 1.3(a)). En estas operaciones, la chapa se sujeta en sus extremos mediante mordazas o prensachapas, mientras que un punzón o útil de forma ejerce presión en su superficie. En este proceso el material se encuentra sometido a un estado fundamentalmente de tracción, haciendo que la chapa se conforme plásticamente estando todas las fibras del material alargadas. Este hecho hace que la recuperación elástica sea bastante más pequeña que en el doblado y, por tanto, la precisión de la pieza final sea mejor y más controlable.

El objetivo de la estampación (*stamping*, Figura 1.3(b)) es muy similar al estirado, *i.e.* se trata de conformar la chapa de manera que el material esté sometido esencialmente a deformaciones de alargamiento. No obstante, se diferencia del estirado en que se permite que el material sujeto por el prensachapa se introduzca, en cierto grado, en el hueco de la matriz. Dicho proceso permite obtener piezas de mayor complejidad que con el estirado y tiene un uso muy extendido en la

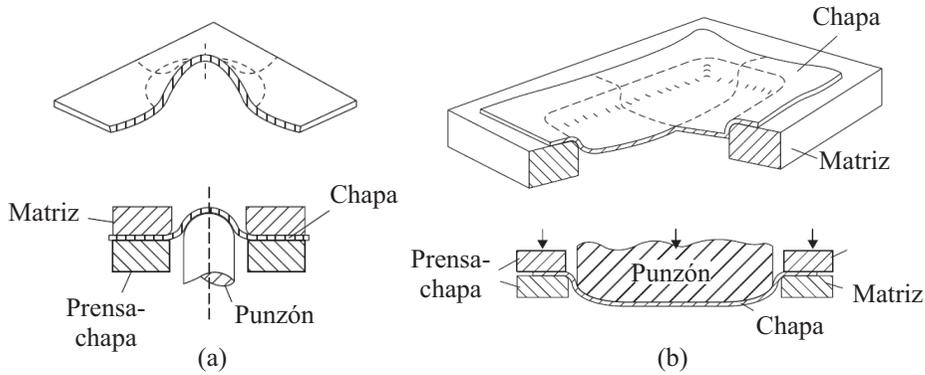


Figura 1.3: Procesos de conformado de chapa (Marciniak *et ál.*, 2002): (a) por estirado; y (b) por estampación.

industria del automóvil y del electrodoméstico.

La estampación permite obtener en general piezas poco profundas. Para conformar piezas más profundas, sin que se produzca el fallo de la chapa, es necesario permitir que el material fluya en el hueco de la matriz con mayor facilidad. Para ello se utiliza el proceso de embutición (*deep drawing*) (Figura 1.4(a)). En la embutición, la mayor parte de la deformación se produce en las paredes de la pieza embutida. El prensa-chapa tiene la importante misión de regular el flujo de material dentro del hueco de la matriz, evitando el arrugamiento o pandeo local de la chapa en la zona de la brida que se produce debido a los esfuerzos circunferenciales de compresión que allí se generan. Para obtener piezas aún más profundas se emplea una embutición en varias etapas o proceso de re-embutición (*redrawing*).

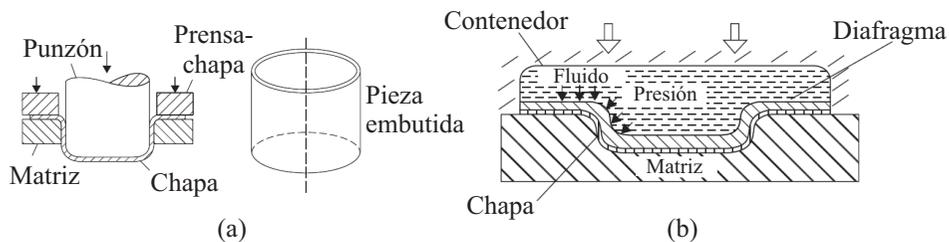


Figura 1.4: Procesos de conformado de chapa (Marciniak *et ál.*, 2002): (a) por embutición; y (b) por hidroconformado.

Los procesos anteriores necesitan de herramientas rígidas para dar forma a la chapa. Sin embargo, existen otros métodos alternativos como el hidroconformado

(*hydroforming*, Figura 1.4(b)), en el que la presión la ejerce un fluido presurizado (*e.g.* aceite) en un contenedor sobre una herramienta flexible (*e.g.* un diafragma de caucho). Aunque las presiones requeridas en el fluido son muy elevadas, la reducción en el coste de las herramientas hace que en determinados casos este método sea viable, especialmente para piezas complejas.

En la práctica, los procesos de conformado están limitados por el fallo de la chapa. Los mecanismos más comunes de fallo incluyen la estricción localizada y la fractura dúctil. Que suceda uno u otro depende de las condiciones de deformación y de la ductilidad del material. En el caso de materiales muy dúctiles, el fallo normalmente ocurre con la aparición de una estricción localizada. A partir de este instante, el material se deforma de forma continua en la zona de estricción hasta que se produce la fractura dúctil. En cambio, en materiales poco dúctiles, como es el caso de algunas aleaciones de aluminio con tratamientos térmicos típicas de la industria aeronáutica, en ciertas condiciones de deformación la fractura dúctil puede ocurrir sin estar precedida de una estricción localizada.

Para evitar el fallo es necesario modificar el material o el proceso de conformado. Una adecuada predicción del fallo permite obtener la información necesaria para realizar las modificaciones oportunas y optimizar así el proceso, evitando costes de producción. Para evaluar la conformabilidad del material se pueden realizar diferentes tipos de ensayos siguiendo el procedimiento propuesto en la reciente normativa ISO 12004 (2008). De acuerdo a esta norma, el procedimiento consiste en tomar medidas durante el ensayo de la deformación principal máxima a lo largo de secciones predefinidas perpendiculares a la zona de fallo. Los distintos ensayos se pueden clasificar, según el procedimiento seguido, en ensayos en el plano (*in-plane tests*) y en ensayos fuera del plano (*out-of-plane tests*) (Allwood y Shouler, 2009).

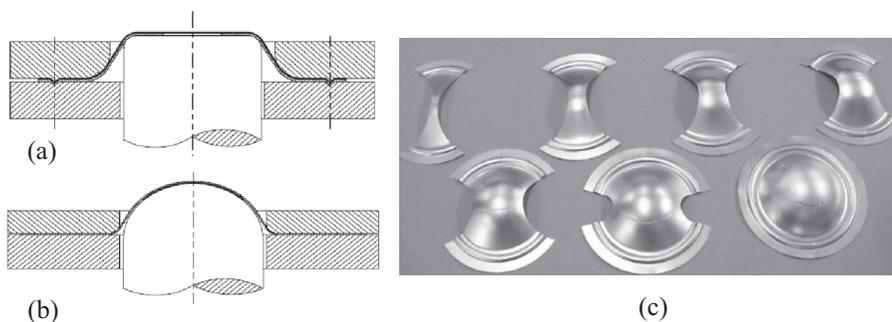


Figura 1.5: Esquema de los ensayos de (a) Marciniak y (b) Nakazima (Hotz y Timm, 2008); y (c) diferentes geometrías de probetas en ensayos Nakazima.

Los ensayos en el plano incluyen, entre otros, el ensayo tradicional de tracción, el ensayo en deformación plana (similar al de tracción pero con un ancho de chapa mayor para eliminar la contracción lateral) y el ensayo de Marciniak (1967), donde una probeta es sujeta por sus extremos mediante unas mordazas y deformada mediante un punzón plano que ejerce presión en una de sus superficies o caras (Figura 1.5(a)). Entre los ensayos fuera del plano destacan los ensayos de abombamiento hidráulico (*hydraulic bulge tests*) y el ensayo de Nakazima (Figura 1.5(b)), descrito y analizado por Ozturk y Lee (2005), similar al de Marciniak pero donde el punzón tiene forma hemiesférica. La Figura 1.5(c) muestra una serie de ejemplos de probetas con distintas geometrías, utilizadas en los ensayos tipo Nakazima, para la obtención de resultados en diferentes condiciones de deformación.

1.2. Diagramas límite de conformado (DLC)

El diagrama límite de conformado (DLC, Figuras 1.6 y 1.7), propuesto inicialmente por Keeler y Backhofen (1963) y Goodwin (1968), se ha convertido en una herramienta muy útil para la evaluación de la capacidad de conformado de las chapas metálicas en la práctica. Se utilizan en todas las fases de la producción de un producto de chapa: en la simulación con elementos finitos durante el diseño del producto y del proceso, en las fases de prueba con las herramientas conformadoras y en el control de la calidad durante el proceso de producción. El DLC consiste en una gráfica con la deformación principal mayor en el plano de la chapa (ε_1) frente a la menor (ε_2), y permite representar los distintos estados de deformación presentes en el material.

La Figura 1.6 muestra un DLC obtenido experimentalmente en el que se muestran los resultados obtenidos de la deformación de fallo y fotografías de los especímenes ensayados. El DLC muestra una línea denominada curva límite de conformado (CLC, obtenida en el ejemplo de la figura a partir de los resultados experimentales) la cual divide los estados de deformación entre aquellos que permiten el correcto conformado de la chapa y los que producen el fallo. Esta curva proporciona una medida simple de la severidad del conformado. En la práctica convencional se realizan modificaciones en el proceso hasta que las deformaciones en todos los puntos de la chapa estén dentro del margen de seguridad que proporciona la CLC.

Es muy habitual caracterizar las condiciones de deformación de un proceso de conformado mediante un parámetro β con la relación entre los incrementos infinitesimales de deformación principal máxima y mínima en el plano de la chapa

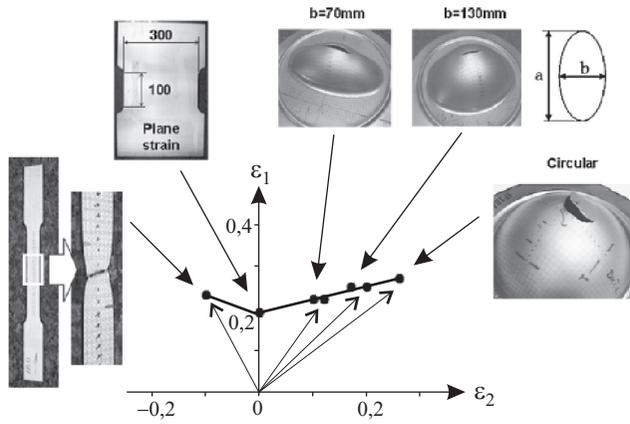


Figura 1.6: Diagrama límite de conformado (DLC) experimental (Barata-Rocha *et al.*, 2009).

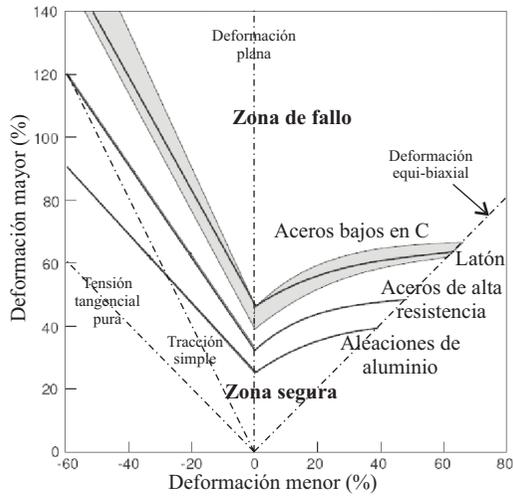


Figura 1.7: Diagrama límite de conformado (DLC) esquemático con las curvas límite de conformado por estricción (CLCE) para varios materiales.

($\beta = d\varepsilon_2/d\varepsilon_1$ o, en términos de velocidades, $\beta = \dot{\varepsilon}_2/\dot{\varepsilon}_1$). En los casos en los que el proceso de carga es proporcional, el parámetro β viene dado directamente por el estado de deformación final ($\beta = \varepsilon_2/\varepsilon_1$). En estas situaciones, la deformación sigue una trayectoria lineal en el DLC, como es el caso de los ensayos ilustrados en la Figura 1.6.

El modo de fallo más característico en los procesos de conformado de chapa es la estricción localizada, que precede a la fractura dúctil en la mayoría de los casos. Por este motivo, es frecuente mostrar en los DLC una única CLC por estricción (CLCE, Figura 1.7). Aunque la obtención experimental de la CLCE sigue siendo muy habitual, hoy en día se tiende cada vez más a estimarla numérica o analíticamente.

La Figura 1.7 muestra la evolución típica de las CLCE que se observan en la práctica, para distintos materiales. Como puede apreciarse, la CLCE normalmente presenta una curva en forma de V, decreciente en el lado de la izquierda ($\beta < 0$) y creciente en el lado de la derecha ($\beta > 0$). El vértice de la curva, *i.e.* el valor más bajo de la deformación principal máxima (ε_1) suele ocurrir en condiciones de deformación plana ($\beta = 0$). Este valor de deformación, denominado DLC_0 , es un dato característico del material.

1.3. Estricción localizada

Durante los procesos de conformado de chapa se observa que, bajo determinadas circunstancias, llega un momento en que la deformación de la chapa se concentra a lo largo de una zona de ancho muy reducido. Dicha zona recibe el nombre de estricción localizada, siendo su ancho del orden del espesor de la chapa. Una vez que ésta aparece, toda la deformación posterior de la chapa se produce en ella, mientras que el resto de la chapa no se deforma significativamente. Esto ocasiona un adelgazamiento progresivo e inestable del material en la región de la estricción, el cual conduce inevitablemente al desgarro o fractura dúctil de la chapa.

Para predecir la estricción localizada se han realizado numerosos trabajos teóricos. Todos ellos tratan la estricción localizada como una inestabilidad plástica y están basados, por tanto, en la teoría de la plasticidad. Sin embargo, como algunos estudios señalan, un análisis a nivel macroscópico no es suficiente en ciertas condiciones y resulta necesario buscar soluciones a nivel microestructural (Yamaguchi y Mellor, 1976; Zhou y Neale, 1995). De esta forma, se pueden identificar tres metodologías claramente diferenciadas en los diferentes análisis desarrollados

para describir la condición por la cual se produce la estricción localizada, y donde cada una de ellas tiene sus ventajas y sus limitaciones.

La primera trata la estricción como una inestabilidad plástica que se inicia con una bifurcación en la solución de las ecuaciones del comportamiento elasto-plástico del material, *i.e.* un instante donde la solución de la deformación no es única. Los trabajos de Swift (1952) y Hill (1952) fueron pioneros en este tratamiento. La principal limitación de estos métodos es que la teoría de la plasticidad en un material continuo y homogéneo no permite predecir la aparición de la estricción localizada en situaciones donde las deformaciones en ambas direcciones principales del plano de la chapa son positivas, como se describe más adelante.

La segunda metodología, que permite solventar la deficiencia anterior, se puede identificar con el trabajo de Stören y Rice (1975). Estos investigadores establecieron que la aparición de una estricción localizada, en condiciones de deformación biaxial, puede estar causada por el desarrollo de un vértice en la superficie de plastificación del material. Esta irregularidad en la descripción constitutiva del material se justifica en base a las pequeñas desviaciones de la carga que se producen en materiales policristalinos. Así, la condición de inestabilidad plástica puede ser establecida también mediante un análisis de bifurcación de la deformación.

La tercera metodología asume que la estricción localizada, en condiciones de deformación biaxial, se produce como consecuencia de una imperfección preexistente en el material, siendo el método de Marciniak y Kuczyński (1967) el más conocido y usado. En esencia, el defecto del material en los métodos que siguen esta metodología persigue el mismo objetivo que la irregularidad en las leyes constitutivas de la metodología anterior, *i.e.* permitir una bifurcación en los incrementos de deformación en un proceso de deformación uniforme. Ambas metodologías están basadas en un análisis de material dañado, siendo en el primer caso el daño microscópico debido a las imperfecciones propias de la estructura cristalina y en el segundo caso el daño es macroscópico debido a imperfecciones geométricas.

Los siguientes subapartados describen estas tres metodologías con más detalle. Se hace especial hincapié en las hipótesis en las que se fundamentan y en los resultados de sus predicciones. También se describen brevemente las principales investigaciones que amplían los métodos originales en la búsqueda de mejores predicciones.

1.3.1. Análisis de bifurcación de Swift y Hill

Swift (1952) postuló que cuando la carga que soporta el material alcanza un

máximo, se inicia una estricción o inestabilidad difusa. Este análisis es conocido también como de *bifurcación de carga*, porque predice que, para una misma carga, la solución de la deformación no es única.

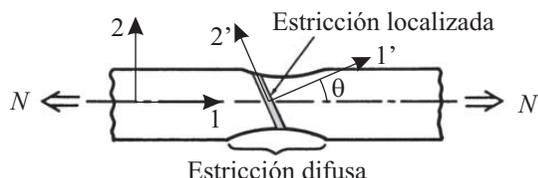


Figura 1.8: Estricción difusa y estricción localizada en una chapa sometida a tracción.

Considérese una chapa rectangular sometida a un esfuerzo de tracción (N) en la dirección longitudinal de la chapa, o eje 1 (Figura 1.8). Sea 2 el eje en la dirección lateral en el plano de la chapa, y 3 el eje en la dirección del espesor. La condición de estricción difusa de Swift o condición de carga máxima viene entonces dada por:

$$dN = 0 \quad \Rightarrow \quad d(\sigma_1 A) = A d\sigma_1 + \sigma_1 dA = 0 \quad (1.1)$$

siendo A el área de la sección transversal y σ_1 la tensión aplicada, ambas en la dirección de aplicación de la carga. Operando en esta expresión y considerando el material como incompresible (*i.e.* de volumen $Al = A_0 l_0$, siendo l la longitud actual de la chapa) debido a las grandes deformaciones plásticas inducidas en el espécimen, se obtiene la siguiente expresión de la condición de inestabilidad plástica:

$$\frac{d\sigma_1}{\sigma_1} = -\frac{dA}{A} = \frac{dl}{l} = d\varepsilon_1 \quad (1.2)$$

que puede expresarse en términos de velocidades de tensión y deformación como:

$$\frac{\dot{\sigma}_1}{\sigma_1} = \dot{\varepsilon}_1 \quad (1.3)$$

El método propuesto por Swift predice la estricción difusa pero no la estricción localizada, que se produce a lo largo de una fina banda en el plano de la chapa (Figura 1.8) y que es un modo de fallo característico en las operaciones de conformado de chapa. Hill (1952) estudió la estricción localizada y postuló que en la incipiente aparición de la estricción, el endurecimiento producido por el primer incremento de deformación produce su inmediato desarrollo y causa que la deformación avance por sí misma de forma continua. Según este autor, la estricción se propaga en un estado de deformación plana en la dirección de la banda de estricción y el material

a ambos lados de dicha banda detiene su deformación. Por lo tanto, a partir del instante en el que se desarrolla la estricción localizada, las tensiones a ambos lados de la banda se mantienen sin cambios durante el resto del proceso. Entonces, la velocidad de endurecimiento en la zona de la estricción equilibra la velocidad de disminución del espesor, mientras que las componentes de las tensiones en esta zona mantienen unas relaciones constantes.

La condición de estricción localizada puede obtenerse de manera análoga a la de estricción difusa, añadiendo la hipótesis de deformación plana en la banda de estricción en el instante del fallo. En esta situación, el ancho de la chapa se mantiene constante y las variaciones de la sección transversal (A) se producen entonces a través de la reducción del espesor (t). Así, la condición de axil máximo viene ahora dada por:

$$dN = 0 \quad \Rightarrow \quad d(\sigma_1 t) = t d\sigma_1 + \sigma_1 dt = 0 \quad (1.4)$$

de donde se deduce la expresión:

$$\frac{d\sigma_1}{\sigma_1} = -\frac{dt}{t} = -d\varepsilon_3 = d\varepsilon_1 + d\varepsilon_2 = (1 + \beta)d\varepsilon_1 \quad (1.5)$$

o la equivalente en términos de velocidades:

$$\frac{\dot{\sigma}_1}{\sigma_1} = (1 + \beta)\dot{\varepsilon}_1 \quad (1.6)$$

Al igual que en el análisis de Swift, el de Hill (conocido también como análisis de *bifurcación de tensión*) predice que la solución de la deformación no es única en el inicio de la inestabilidad plástica. Aunque el método de Hill se encuentra avalado por la evidencia experimental, presenta la limitación de que en estados de deformación biaxiales ($\beta > 0$) no existe ninguna dirección en el plano de la chapa de deformación nula y, por consiguiente, no se puede predecir la aparición de una estricción localizada. Su utilidad práctica queda restringida, por tanto, al lado izquierdo del DLC, de valores negativos de β .

Los análisis originales de Swift y Hill asumen procesos de carga proporcional y condiciones de tensión plana. En esta situación, considérese el caso sencillo de una chapa de material isótropo, caracterizada por un comportamiento plástico que obedece a la ley $\sigma_1 = K\varepsilon_1^n$. Las expresiones obtenidas anteriormente para la condición de inestabilidad plástica permiten obtener una solución analítica de las condiciones de deformación en el inicio de ambos modos de estricción, difusa y localizada, en función del coeficiente de endurecimiento por deformación (n) y de

la relación de velocidades de deformación ($\beta = d\varepsilon_2/d\varepsilon_1$). Considerando el caso que es de interés en este trabajo, la estricción localizada, y sustituyendo la ley de comportamiento en las expresiones (1.6) del método de Hill:

$$\frac{\dot{\sigma}_1}{\sigma_1} = \frac{nK\varepsilon_1^{n-1}\dot{\varepsilon}_1}{K\varepsilon_1^n} = \frac{n\dot{\varepsilon}_1}{\varepsilon_1} = \dot{\varepsilon}_1 + \dot{\varepsilon}_2 = (1 + \beta)\dot{\varepsilon}_1 \quad (1.7)$$

se obtienen unas expresiones sencillas de las deformaciones en el instante del fallo:

$$\varepsilon_1 = \frac{n}{1 + \beta} \quad , \quad \varepsilon_2 = \frac{\beta n}{1 + \beta} \quad (1.8)$$

y donde el ángulo que forma la banda de estricción con la dirección de mayor deformación (véase la Figura 1.8) viene dado por la condición de deformación plana local ($d\varepsilon_2' = 0$) lo que se traduce en (Marciniak *et al.*, 2002; Stoughton y Zhu, 2004):

$$\theta = \frac{\pi}{2} - \arctan \sqrt{-\beta} \quad , \quad \text{si } \beta \leq 0 \quad (1.9)$$

Esta expresión, válida sólo para valores negativos de β , muestra que en condiciones de deformación plana ($\beta = 0$) la banda de estricción forma 90° con la dirección de tracción y que este ángulo disminuye con β . Así, por ejemplo, en un ensayo de tracción ($\beta = -1/2$) el ángulo es de 55° .

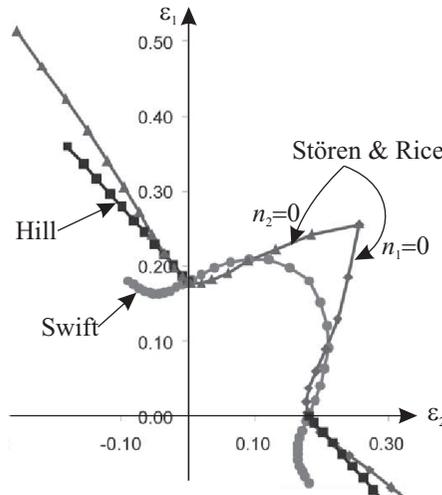


Figura 1.9: Predicción de los límites de conformado mediante los modelos de Swift (1952), Hill (1952) y Stören y Rice (1975) (Stoughton y Zhu, 2004).

La Figura 1.9 muestra un ejemplo de ambas predicciones de Swift y Hill en un DLC, para un material con $n = 0,18$ (Stoughton y Zhu, 2004). Nótese que la

curva de estricción localizada sólo aparece en el lado izquierdo del DLC. Además ésta es menos restrictiva que la curva de estricción difusa, lo que significa que la estricción difusa comienza antes que la estricción localizada, aunque es esta última la que determina el fallo de la chapa.

1.3.2. Análisis de bifurcación de Stören y Rice

La teoría de la plasticidad predice un comportamiento estable y único del flujo plástico en un proceso de carga proporcional en un material continuo y homogéneo. Cuando una chapa dúctil se deforma mediante tracción biaxial, de manera que ambos incrementos de deformación en direcciones principales son positivos ($\beta > 0$), no existe una línea de deformación nula en el plano. En estas situaciones, como se ha comentado, el análisis anterior de Hill no permite predecir la aparición de una estricción localizada.

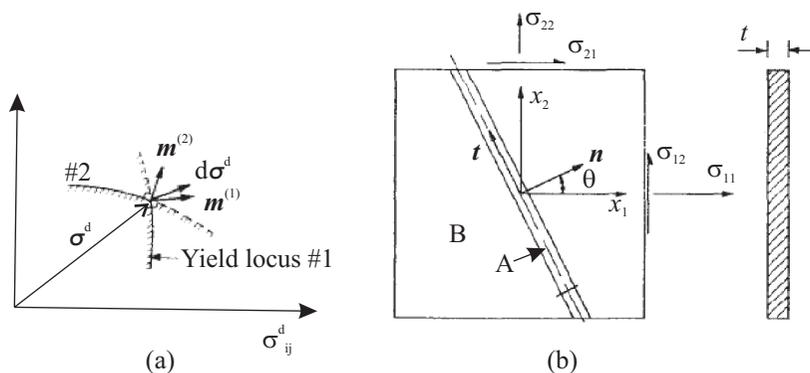


Figura 1.10: Análisis de bifurcación de Stören y Rice (1975): (a) representación esquemática de la inestabilidad plástica en el espacio de las tensiones desviadoras, mostrando en el vértice las direcciones normales a las superficies de fluencia (\mathbf{m}) y el incremento de tensión ($d\sigma_{ij}^d$) en el estado actual de tensiones; y (b) sistema de coordenadas y dirección de la incipiente estricción (Stören y Rice, 1975).

Stören y Rice (1975) examinaron la hipótesis de que la estricción es debida a la aparición de un vértice en la superficie de fluencia del material, *i.e.* una superficie de plastificación irregular. El vértice puede ser considerado como la intersección de dos superficies de fluencia y donde el incremento de deformación puede ir dirigido en cualquier dirección entre el ángulo formado por la perpendicular a ambas superficies de fluencia (Figura 1.10(a)). De esta manera, la solución no es única y

existe, por tanto, una inestabilidad plástica. La hipótesis del vértice está basada en estudios previos del fenómeno más general de inestabilidades en la ley constitutiva del material en procesos de deformación homogénea (Hill, 1962). La formación de un vértice en la superficie de fluencia es una característica observada en materiales policristalinos (Hill, 1967), dado que la inhomogeneidad microestructural intrínseca de los policristales provoca pequeñas alteraciones en el proceso de carga. Parece razonable asumir, por tanto, que este tipo de irregularidad en la superficie de plastificación puede desestabilizar el flujo plástico durante el conformado.

Dado que el sistema de ecuaciones que describe la evolución de la deformación en un vértice es fuertemente no lineal y difícil de resolver, Stören y Rice conjeturaron que las ecuaciones de la teoría de la plasticidad son válidas para describir el efecto desestabilizador del vértice, dado que las desviaciones en la dirección del flujo plástico son pequeñas. Los autores dedujeron entonces una función algebraica que alcanza un valor máximo en un determinado valor de la pendiente de la curva tensión-deformación. Por tanto, en este análisis, al igual que en los métodos de Swift y Hill, el coeficiente de endurecimiento por deformación (n) resulta ser decisivo en la predicción de la estricción. No obstante, algunos autores señalan que las predicciones de este método no siempre se ajustan a las medidas experimentales en una gran variedad de ensayos (Takuda *et ál.*, 2000).

Asumiendo la formación de un vértice en la superficie de plastificación como el responsable del inicio de la estricción localizada, Stören y Rice derivaron las condiciones de deformación en chapas sometidas a condiciones de estirado biaxial, en tensión plana, aplicando la condición de equilibrio de esfuerzos axiales en el plano de la chapa. El conjunto de soluciones se reduce a las siguientes restricciones en el instante de la aparición de la estricción localizada:

$$\frac{\Delta\dot{\sigma}_1}{\sigma_1} = \Delta\dot{\epsilon}_1 \quad (1.10)$$

cuando la banda de estricción se orienta perpendicular al eje longitudinal (*i.e.* el vector normal a la banda de estricción cumple $n_2 = 0$), y

$$\frac{\Delta\dot{\sigma}_2}{\sigma_2} = \Delta\dot{\epsilon}_2 \quad (1.11)$$

cuando la banda de estricción se orienta en la dirección del eje longitudinal ($n_1 = 0$), siendo $\Delta(\dots)$ las diferencias de la variable correspondiente entre la zona de estricción (A) y el resto del material (B) (véase la Figura 1.10(b)), *i.e.*:

$$\Delta\dot{\sigma}_{ij} = \dot{\sigma}_{ij}^A - \dot{\sigma}_{ij}^B$$

$$\Delta\dot{\varepsilon}_{ij} = \dot{\varepsilon}_{ij}^A - \dot{\varepsilon}_{ij}^B$$

Asumiendo carga proporcional, la ley de Hollomon de comportamiento plástico y el criterio de plastificación de von Mises, el conjunto de ecuaciones (1.10) y (1.11) tiene como solución (Stoughton y Zhu, 2004):

$$\varepsilon_1 = \frac{3\beta^2 + n(2 + \beta^2)}{2(2 + \beta)(1 + \beta + \beta^2)} \quad (1.12)$$

para $n_2 = 0$, y

$$\varepsilon_1 = \frac{3 + n(1 + 2\beta^2)}{2(1 + 2\beta)(1 + \beta + \beta^2)} \quad (1.13)$$

para $n_1 = 0$. Las condiciones de deformación se completan con la igualdad $\varepsilon_2 = \beta\varepsilon_1$. El conjunto de estas dos soluciones se muestra en la Figura 1.9, junto a las predicciones anteriores de Swift y Hill, todas ellas para un material con $n = 0,18$ (Stoughton y Zhu, 2004). Como se aprecia en el ejemplo de dicha figura, la solución del método de Stören y Rice cubre todo el rango de valores en el DLC.

Posteriormente, Zhu *et ál.* (2001) ampliaron el análisis de Stören y Rice añadiendo la condición de equilibrio de momentos en el plano de la chapa. Demostraron que los esfuerzos cortantes se anulan y que las ecuaciones de equilibrio se reducen al siguiente conjunto:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\Delta\dot{\sigma}_1}{\sigma_1} - (\Delta\dot{\varepsilon}_1 + \Delta\dot{\varepsilon}_2) \right) n_1 &= 0 \\ \left(\frac{\Delta\dot{\sigma}_2}{\sigma_2} - (\Delta\dot{\varepsilon}_1 + \Delta\dot{\varepsilon}_2) \right) n_2 &= 0 \end{aligned} \quad (1.14)$$

Zhu *et ál.* mostraron que estas ecuaciones tienen dos soluciones. Un conjunto de soluciones coincide con los obtenidos por Stören y Rice cuando n_1 o n_2 son cero, *i.e.* cuando la banda de estricción es paralela a uno de los ejes principales de deformación. La otra solución es equivalente a la obtenida por Hill, descrita anteriormente, con la banda de estricción alineada con la dirección de deformación nula. Por tanto, el análisis de Zhu *et ál.* muestra que los modelos de Stören y Rice y de Hill no son mutuamente excluyentes, sino que son dos soluciones de un análisis de bifurcación más general.

El análisis de Zhu *et ál.* predice, por tanto, dos posibles soluciones en todo el rango de valores de β y una solución adicional en el lado izquierdo del DLC, de valores $\beta < 0$. Esta última solución es la equivalente a la obtenida por Hill, de deformación nula en la dirección de la banda de estricción, orientada un cierto ángulo en el plano de la chapa. En las otras dos soluciones la banda de estricción

se orienta perpendicular a la dirección de mayor deformación. Existen, por tanto, tres posibles orientaciones de la banda de estricción con relaciones de deformación negativas (la dirección de deformación nula y las dos direcciones principales) y dos posibles orientaciones en el caso de relaciones de deformación positivas. La orientación preferente de la banda de estricción será la dirección donde se produce la mínima deformación crítica.

Diversos autores han propuesto mejoras en el modelo de Stören y Rice, modificando las relaciones constitutivas del material. Christoffersen y Hutchinson (1979) y Gotoh (1985) propusieron la denominada teoría de deformación J_2 en un vértice. Más recientemente, diferentes estudios ha sido realizados mediante análisis de elementos finitos (Gotoh, 1990; Boudeau y Gelin, 1994; Nakamachi, 1995; Yoshida *et ál.*, 1995). Son de destacar los trabajos de Nakamachi (1995) y Yoshida *et ál.* (1995), que implementaron el modelo de Stören y Rice en simulaciones de elementos finitos para predecir la curva de estricción localizada en los DLC.

1.3.3. Método de Marciniak y Kuczyński

Marciniak y Kuczyński (1967) examinaron una idea distinta a la de Stören y Rice (1975) para predecir la estricción localizada en condiciones de deformación biaxial. Estos autores realizaron un intento de resolver el problema, asumiendo inhomogeneidades o imperfecciones preexistentes en el material. Estos defectos pueden tener orígenes mecánicos o metalúrgicos y estar debido, en principio, a una combinación de pequeñas variaciones geométricas y una falta de homogeneidad del material, aunque el enfoque más habitual es caracterizar el defecto como una pequeña variación en el espesor. Desde un punto de vista físico, esta práctica parece razonable porque si existen defectos geométricos o microestructurales en la chapa, es de esperar que la severidad del conformado variará de un punto a otro del material. La presencia de estos defectos permite así predecir la aparición de una inestabilidad plástica en situaciones donde sería imposible si se considera el material como continuo y homogéneo y sin ningún defecto geométrico. En esencia, el defecto en el modelo de Marciniak y Kuczyński persigue el mismo objetivo que el vértice en la superficie de fluencia del modelo de Stören y Rice, *i.e.* permitir una bifurcación en los incrementos de deformación en un proceso de deformación uniforme.

El modelo propuesto por Marciniak y Kuczyński, conocido como *modelo M-K*, fue desarrollado para predecir el fallo cuando ambas componentes de la deformación son positivas y se ha convertido en el más usado para predecir la CLCE en

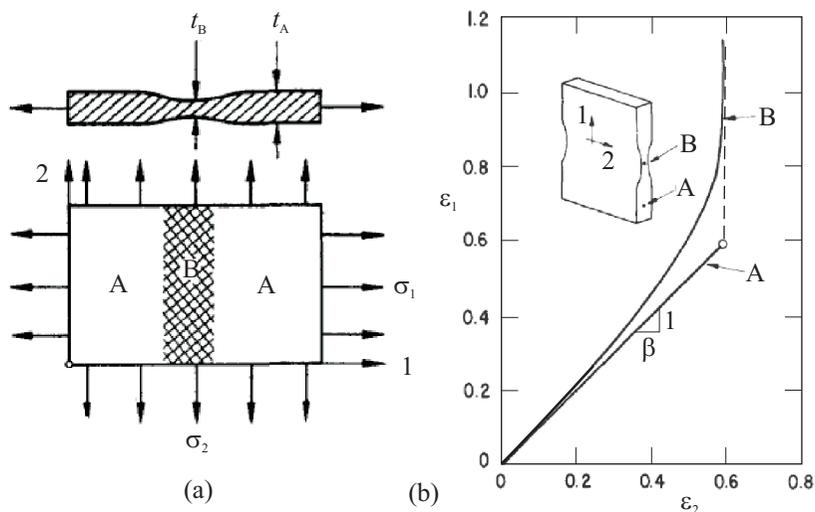


Figura 1.11: Análisis de bifurcación de Marciniak y Kuczyński (1967): (a) imperfección geométrica inicial en una chapa a tracción biaxial (Marciniak y Kuczyński, 1967); y (b) evolución de la deformación en la banda de estricción (B) y en el resto del material (A) (Lee y Zaverl, 1982).

procesos de estirado biaxiales. Los autores modelaron el efecto de las imperfecciones preexistentes en el material como una pequeña disminución del espesor en la zona de la chapa donde se producirá la estricción (Figura 1.11(a)). La relación entre espesores iniciales se expresa en función del parámetro $f = t_B/t_A$, donde los índices A y B indican la zona de material fuera y dentro de la banda de estricción, respectivamente. Se asume que la estricción localizada se forma en una banda perpendicular a la dirección de máxima deformación. Así, imponiendo el equilibrio de fuerzas a través de la imperfección y la compatibilidad de la deformación a lo largo de la misma se obtienen las siguientes ecuaciones (Graf y Hosford, 1990):

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_1^A}{\sigma_1^B} &= f \cdot \exp(\epsilon_3^B - \epsilon_3^A) \\ d\epsilon_2^A &= d\epsilon_2^B \end{aligned} \quad (1.15)$$

Estas ecuaciones se resuelven de forma incremental, siguiendo un camino de deformación específico o un camino de carga. Como explican más detalladamente Sowerby y Duncan (1971), los incrementos de deformación locales en una porción inicialmente más delgada que el resto del material, asumiendo que son perpendiculares a la dirección de deformación principal máxima, evolucionan hacia un estado

de deformación plana ($\beta \rightarrow 0$) mientras que el resto del material se deforma con una relación β constante. Como ε_2 es continua a lo largo de la porción adelgazada, esto implica que la relación de incrementos $d\varepsilon_1$ entre la porción y el resto del material tiende a infinito, *i.e.* el material más delgado empieza a deformarse más rápidamente que el resto, de mayor espesor. El límite de conformado se define así cuando los incrementos de deformación en el material más delgado alcanzan el estado de deformación plana.

La principal limitación del modelo M-K radica en que las predicciones son muy sensibles a los defectos preexistentes, caracterizados por la relación entre los espesores en la zona adelgazada y el resto de la chapa ($f = t_B/t_A$) y sobreestiman en exceso los resultados experimentales. El modelo M-K ha sido posteriormente investigado y ampliado por Sowerby y Duncan (1971), Parmar y Mellor (1978) y otros investigadores (Van Minh *et al.*, 1975; Yamaguchi y Mellor, 1976; Needleman y Triantafyllidis, 1978; Lee y Zaverl, 1982; Lu y Lee, 1987; Graf y Hosford, 1990; Date y Padmanabhan, 1992; Padwal y Chaturvedi, 1992; Zhou y Neale, 1995; Zhao *et al.*, 1996). Sowerby y Duncan analizaron el efecto de las propiedades del material en la deformación y en el fallo de un elemento de chapa, en un estudio ampliado del modelo M-K inicial, el cual asumía que la plastificación se produce en la zona de estricción antes que en el resto del material. Los autores mencionados también consideraron los demás casos donde el estado plástico se alcanza antes en la región fuera de la banda de estricción o en todo el material simultáneamente. Una de las causas de las sobreestimaciones de los datos experimentales apuntaba a que el modelo original está basado en el criterio de fluencia de Hill (1948). Algunos estudios teóricos trataron de mejorar las predicciones mejorando este criterio de plastificación. Así, por ejemplo, Parmar y Mellor (1978) usaron un nuevo criterio no cuadrático propuesto posteriormente también por Hill, y Graf y Hosford (1990) y Padwal y Chaturvedi (1992) emplearon el criterio de plastificación para materiales con anisotropía planar propuesto por Hosford (1985). Lu y Lee (1987) extendieron el análisis al caso de historias de carga no proporcionales, asumiendo los dos tipos clásicos de endurecimiento del material, isótropo y cinemático.

Otros investigadores intentaron minimizar la sensibilidad de las imperfecciones del material consideradas en los análisis. Van Minh *et al.* (1975) modelaron dichas imperfecciones mediante un modelo probabilístico en términos de la población de huecos microestructurales. Usando este modelo analizaron la influencia del espesor del material, de la deformación y de la fracción de volumen equivalente de huecos en el límite de conformado. Yamaguchi y Mellor (1976) consideraron como imper-

fección la rugosidad superficial, como una consecuencia de la estructura granular del material. De esta forma, asumieron que las pequeñas variaciones en el espesor de la chapa se relacionan con el tamaño medio de los granos. Needleman y Triantafyllidis (1978) emplearon el modelo propuesto por Gurson (1977) para el comportamiento plástico de materiales porosos. Lee y Zaverl (1982) tomaron medidas del espesor a lo largo de la chapa proporcionando un rango representativo de variaciones de espesor. Date y Padmanabhan (1992) incluyeron en el análisis parámetros determinados experimentalmente, como la rugosidad superficial, el crecimiento de huecos, el espesor de la chapa, el tamaño de grano, el exponente de endurecimiento por deformación, el índice de sensibilidad de velocidad de deformación y la anisotropía normal. Hutchinson y Neale (1978) desarrollaron un análisis detallado basado en la idea de inhomogeneidad inicial para predecir el fallo en todo el rango de deformación del DLC.

Una vez iniciada la estricción localizada, algunos autores señalan que el material en la banda de estricción evoluciona hacia unas condiciones de deformación cercanas a una deformación plana hasta producirse finalmente la fractura del espécimen (Jain *et al.*, 1999; Han y Kim, 2003). Según estos autores esto se produce con independencia de las condiciones iniciales de deformación, *i.e.* en todo el rango de valores en el DLC. Sin embargo, como se ya ha sido expuesto, las condiciones de deformación plana se producen a lo largo de la banda de estricción y no necesariamente en las direcciones principales de la chapa. Solamente en condiciones de estirado biaxial, en el lado derecho del DLC ($\beta > 0$), la estricción se orienta perpendicular a la dirección de máxima deformación. En estas situaciones la línea de deformación nula en el material durante la estricción coincide con la dirección de la deformación lateral (ε_2), siendo razonable que el proceso evolucione hacia una trayectoria vertical en el DLC, como se ha ilustrado en la Figura 1.11(b). En cambio, en el lado izquierdo del DLC ($\beta < 0$), si la banda de estricción se orienta un cierto ángulo respecto a las direcciones principales de la chapa, como se deduce de los análisis de Hill (1952) y de Zhu *et al.* (2001) examinados anteriormente, los ejes principales de deformación dejan de coincidir con los ejes de la chapa. Atkins (1996) muestra que, en estas situaciones, la relación entre deformaciones (β , dado que se trata de procesos de carga proporcional) en la zona del material donde se produce la estricción sigue siendo la misma que antes de iniciarse la inestabilidad. Por tanto, según este investigador, las trayectorias lineales de la deformación no cambian de dirección durante todo el proceso de conformado hasta la fractura, como muestra el lado izquierdo del DLC de la Figura 1.12.

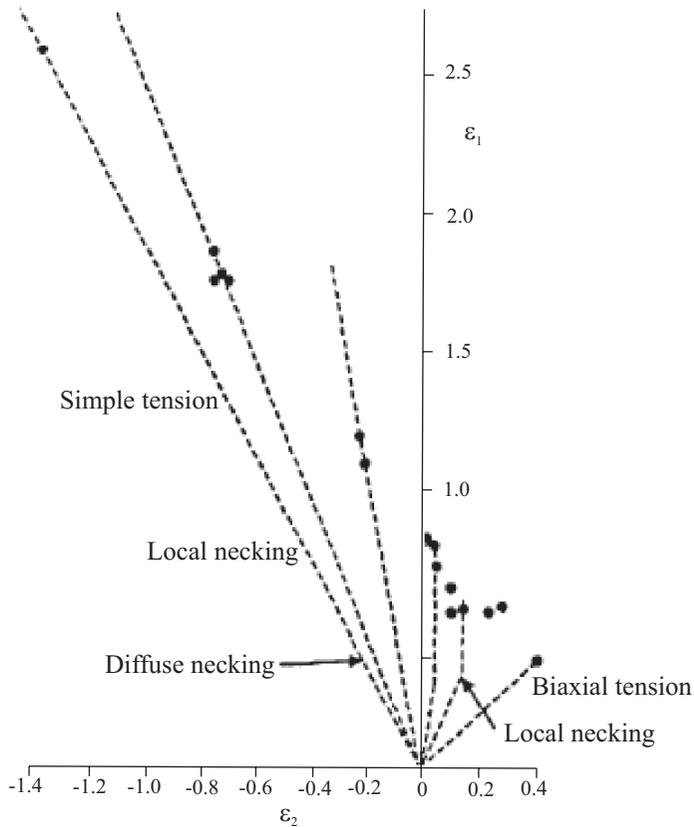


Figura 1.12: Trayectorias de la deformación en la zona de estricción hasta la fractura y medidas experimentales de ésta, para una aleación de aluminio 5154 (Atkins, 1996); nótese en el lado izquierdo del diagrama las trayectorias lineales de deformación y la aparición de estricción difusa y posterior estricción localizada, mientras que en el lado derecho las trayectorias cambian al producirse la estricción localizada, excepto en el caso extremo de deformación equi-biaxial en el que la fractura no viene precedida de estricción.

1.4. Fractura dúctil

La fractura puede ser dúctil o frágil dependiendo de si viene precedida o no por una significativa deformación plástica del material. La fractura frágil está caracterizada por la iniciación y rápida propagación de grietas por clivaje en el material. En cambio, la fractura dúctil sucede tras producirse grandes deformaciones plásticas y es, por tanto, un modo de fallo característico en los procesos de conformado de chapa. Dependiendo de las condiciones de deformación, la fractura dúctil puede producirse por cortante, típico en procesos con grandes esfuerzos de compresión (Le Roy *et ál.*, 1981; Yingbin y Wierzbicki, 2004), o bien como consecuencia de un proceso de nucleación, crecimiento y finalmente coalescencia de huecos en el material, más habitual en procesos donde predomina la tracción (Yingbin y Wierzbicki, 2004). La Figura 1.13 muestra de forma esquemática ambos modos de fractura dúctil y en la Figura 1.14 se ilustra un ejemplo de fractura por cortante en cilindros sometidos a compresión y un ejemplo de fractura por coalescencia de huecos en un ensayo de tracción. Este último modo de fallo es el más común en la práctica del conformado de chapa y, por tanto, el que ha centrado un mayor número de investigaciones.

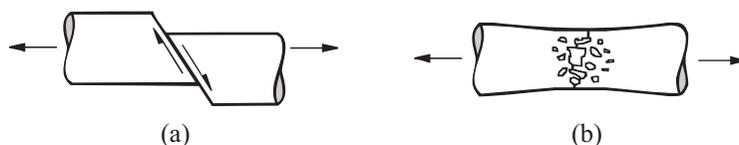


Figura 1.13: Modos de fractura dúctil (Yingbin y Wierzbicki, 2004): (a) por cortante; y (b) por nucleación, crecimiento y coalescencia de huecos en la microestructura.

Se han propuesto y analizado numerosos criterios de fractura dúctil. En general, se formulan en base a una determinada variable que alcanza un valor límite en el momento del fallo. La forma habitual es hacerlo mediante un expresión de la variable en el instante de producirse el fallo, denominados entonces como *criterios locales* (*e.g.* Bressan y Williams, 1983), o mediante una integral de una función que representa el efecto de los parámetros del proceso sobre el rango de deformación, conocidos como *criterios de fallo continuo* o simplemente *criterios integrales* (*e.g.* Freudenthal, 1950; Cockcroft y Latham, 1968; Brozzo *et ál.*, 1972; Norris *et ál.*, 1978; Oh *et ál.*, 1979; Oyane *et ál.*, 1980; Zhang y Zheng, 1990; Chaouadi *et ál.*, 1994; Atkins, 1996; Han y Kim, 2003). Estos últimos generalmente consisten en una integral de una función de las tensiones sobre el campo de deformación equivalente.

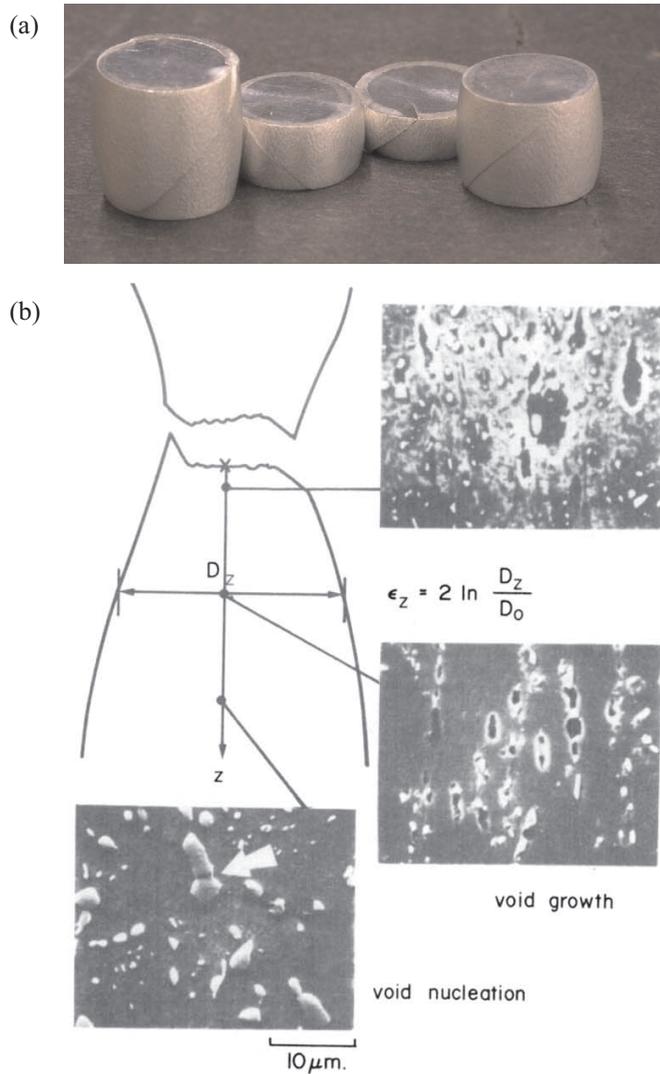


Figura 1.14: Ejemplos de fractura dúctil: (a) fotografía de especímenes ensayados a compresión hasta la fractura por cortante (Yingbin y Wierzbicki, 2004); y (b) micrografías en un ensayo de tracción que muestran la nucleación, crecimiento y coalescencia de huecos en la microestructura hasta provocar la fractura de la probeta (Le Roy *et ál.*, 1981).

Una segunda clasificación de los criterios de fractura dúctil consiste en agruparlos en criterios empíricos y criterios basados en la microestructura. El primer grupo lo forman los criterios de naturaleza empírica, *i.e.* los que relacionan la fractura con parámetros macroscópicos del proceso sin tener en cuenta los cambios que se producen en la microestructura del material (*e.g.* Freudenthal, 1950; Cockcroft y Latham, 1968; Brozzo *et ál.*, 1972; Norris *et ál.*, 1978; Oh *et ál.*, 1979; Atkins, 1996; Han y Kim, 2003). En cambio, el segundo grupo de criterios de fractura dúctil consideran en mayor o menor medida la secuencia de procesos de iniciación, crecimiento y coalescencia de huecos, generalmente en términos de una función del daño interno del material (*e.g.* Oyane *et ál.*, 1980; Zhang y Zheng, 1990; Chaouadi *et ál.*, 1994). En términos generales, cada proceso de la secuencia tiene su propio modelo de predicción y el fallo es considerado entonces como el último de dicha secuencia.

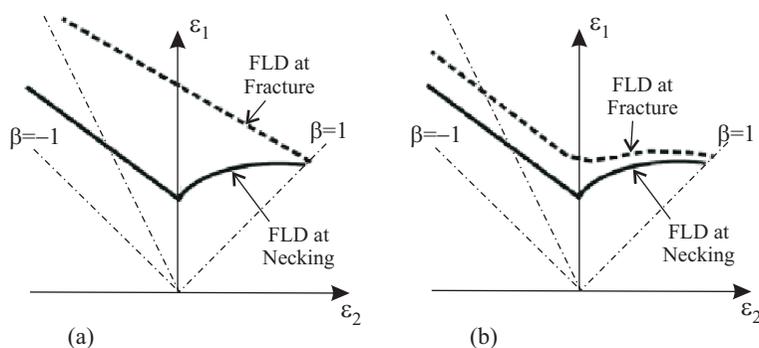


Figura 1.15: Evolución típica de las curvas límite de conformado por estricción localizada (CLCE, *FLD at Necking*) y por fractura dúctil (CLCF, *FLD at Fracture*) (Vallellano *et ál.*, 2008): (a) materiales de alta ductilidad; y (b) materiales de baja ductilidad.

La predicción de la fractura dúctil en los procesos de conformado de chapa es importante, particularmente en los casos en los que no viene precedida de la formación y desarrollo de una estricción localizada. En general, los DLC muestran sólo el fallo por estricción localizada por ser éste el tipo de fallo más usual en materiales dúctiles. En cualquier caso se puede añadir en estos diagramas una segunda curva límite de conformado por fractura (CLCF), que en materiales dúctiles queda siempre por encima de la CLCE, *i.e.* materiales donde la estricción precede a la fractura en cualquier estado de deformación (Figura 1.15). La forma de la CLCF depende de la ductilidad del material. Así, en chapas con una ductilidad relativamente alta, esta curva tiende a tener una forma lineal decreciente, como

muestra el esquema de la Figura 1.15(a). En cambio, los materiales poco dúctiles exhiben una curva más compleja en forma de V, ligeramente creciente en la región de estirado (Figura 1.15(b)). En condiciones de deformación cercanas a las equibiaxiales ($\beta \rightarrow 1$) suele estar cercana a la CLCE, o bien ser la única curva de fallo si la fractura no viene precedida por una estricción localizada.

Existe una gran variedad de criterios de fractura dúctil en la literatura científica (Freudenthal, 1950; Cockcroft y Latham, 1968; Brozzo *et ál.*, 1972; Norris *et ál.*, 1978; Oh *et ál.*, 1979; Oyane *et ál.*, 1980; Bressan y Williams, 1983; Zhang y Zheng, 1990; Chaouadi *et ál.*, 1994; Atkins, 1996; Han y Kim, 2003) y diversos estudios que analizan y valoran sus resultados (Takuda *et ál.*, 1997a,b, 1999, 2000; Jain *et ál.*, 1999; Ozturk y Lee, 2004; Vallellano *et ál.*, 2008). Jain *et ál.* (1999) y Vallellano *et ál.* (2008) han analizado un gran número de estos criterios en chapas de aluminio 6111-T4 y 2024-T3, respectivamente, de uso habitual en la industria automovilística, con resultados muy satisfactorios. También de manera satisfactoria, Takuda *et ál.* comprobaron la aplicabilidad de los criterios integrales clásicos para multitud de tipos de chapa metálica, *e.g.* aceros especiales (Takuda *et ál.*, 1997a), aleaciones de aluminio 1100-O y 5182-O (Takuda *et ál.*, 2000) y chapas laminadas compuestas de acero suave (SPCC) y diferentes aleaciones de aluminio 1100-O, 2024-T2 y 5052-O (Takuda *et ál.*, 1997b). Recientemente, Ozturk y Lee (2004) han evaluado la conformabilidad del acero AKDQ (*aluminum killed drawing quality electrogalvanized*) mediante algunos criterios integrales, encontrando buenas predicciones en el lado izquierdo del DLC; en el lado derecho del DLC observaron que algunos criterios, en concreto los de Freudenthal (1950), Cockcroft y Latham (1968) y Oh *et ál.* (1979), se aproximaban mejor que otros, pero concluyeron que en general ninguno se ajusta con precisión a los resultados experimentales. Estos estudios han demostrado que los criterios integrales predicen satisfactoriamente la CLCF lineal. No obstante, los criterios integrales no son capaces de reproducir la CLCF observada para las chapas de metales de baja ductilidad, con una curva, bien en forma de V o bien en forma compleja en la región de estirado biaxial (Jain *et ál.*, 1999; Han y Kim, 2003; Ozturk y Lee, 2004; Vallellano *et ál.*, 2008). En estos casos se ha comprobado que los criterios de fallo basados en la tensión tangencial, como el de Tresca o el Bressan y Williams (1983), proporcionan una buena aproximación a la CLCF experimental en un rango amplio de relaciones de deformación (Jain *et ál.*, 1999; Vallellano *et ál.*, 2008; Zadpoor *et ál.*, 2009).

En los siguientes subapartados se exponen brevemente los principales criterios de fractura dúctil, agrupados en criterios locales, criterios integrales empíricos y

criterios basados en la microestructura del material.

1.4.1. Criterios locales

Los criterios locales asumen que la fractura dúctil depende principalmente del estado actual de tensiones y deformaciones en el material y que la evolución de la fractura está gobernada por un proceso de daño acumulado. Así, el fallo ocurre cuando la tensión/deformación en un cierto punto del material alcanza un valor crítico. Dos de estos criterios son el de Tresca y el de Bressan y Williams (1983). Ambos han demostrado ser bastante precisos en la predicción de la fractura en chapas de aleación de aluminio 6111-T4 (Jain *et ál.*, 1999) y 2024-T3 (Vallellano *et ál.*, 2006).

El criterio de Tresca establece que la fractura dúctil ocurre cuando el cortante máximo alcanza un cierto valor:

$$\frac{\tau_{max}}{C_1} = 1 \quad (1.16)$$

siendo C_1 una constante del material. Nótese que cuando un estado de tensión plana prevalece en el material ($\sigma_3 = 0$), lo cual es muy usual en los procesos de conformado de chapa, el criterio de Tresca es equivalente al criterio de tensión principal máxima ($\sigma_1 = cte.$).

El criterio de Bressan y Williams, inicialmente propuesto para predecir el inicio de la estricción localizada cuando $\beta > 0$, establece que el fallo se inicia en un plano en el espesor de la chapa en el cual el material alcanza un alargamiento nulo. Además, asume que el fallo se inicia cuando el cortante en este plano ($\tau_{(d\varepsilon=0)}$) alcanza valores críticos:

$$\frac{\tau_{(d\varepsilon=0)}}{C_2} = 1 \quad (1.17)$$

En condiciones de tensión plana, el cortante crítico se estima como:

$$\tau_{(d\varepsilon=0)} = \left| \frac{\sqrt{1+\beta}}{2+\beta} \right| \sigma_1 \quad (1.18)$$

1.4.2. Criterios integrales empíricos

Dado que la fractura dúctil involucra una considerable disipación de energía, Freudenthal (1950) postuló que la fractura dúctil ocurre cuando el trabajo plástico acumulado alcanza un valor límite, que en variables equivalentes se formula como:

$$\int_0^{\varepsilon_{eq,f}^p} \sigma_{eq} d\varepsilon_{eq}^p = C_3 \quad (1.19)$$

donde σ_{eq} y ε_{eq}^p son la tensión y la deformación plástica equivalentes, respectivamente, $\varepsilon_{eq,f}^p$ es la deformación plástica equivalente en el instante de la fractura, y C_3 es una constante del material (*i.e.* el trabajo plástico crítico). Es habitual encontrar este criterio en la literatura como criterio de Clift *et ál.* (1990), ya que este autor lo usó con resultados satisfactorios en procesos de conformado plástico global. Sin embargo, las predicciones no fueron aceptables en operaciones de conformado de chapa (Takuda *et ál.*, 1997a, 2000). El principal argumento en contra de dicho criterio se basa en que no considera el efecto de la presión hidrostática (σ_h) en la nucleación de huecos en la microestructura (Thomason, 1990). En efecto, nótese en la expresión (1.19) que la densidad de trabajo plástico sólo depende de las componentes del tensor desviador de tensiones:

$$\sigma_{eq} d\varepsilon_{eq}^p = \sigma_h d\varepsilon_{ii}^p + \sigma_{ij}^d d\varepsilon_{ij}^p = \sigma_{ij}^d d\varepsilon_{ij}^p \quad (1.20)$$

donde $d\varepsilon_{ii}^p = 0$ debido a la incompresibilidad de las deformaciones plásticas.

Cockcroft y Latham (1968) sugirieron un modelo alternativo en el que consideran que la fractura está controlada por la tensión principal máxima (σ_1), y no por la tensión equivalente. Estos autores propusieron un criterio de fractura basado en el trabajo plástico desarrollado por esta tensión:

$$\int_0^{\varepsilon_{eq,f}^p} \sigma_1 d\varepsilon_{eq}^p = C_4 \quad (1.21)$$

Este criterio incluye implícitamente la influencia de la presión hidrostática y ha sido muy utilizado y modificado por diversos autores. Así, Brozzo *et ál.* (1972) exploraron las predicciones de este criterio, comparándolas con resultados experimentales obtenidos con probetas entalladas de aleaciones férricas. Propusieron una modificación del mismo que incluye en el criterio de fallo una dependencia explícita con la presión hidrostática:

$$\int_0^{\varepsilon_{eq,f}^p} \frac{2}{3} \frac{\sigma_1}{\sigma_1 - \sigma_h} d\varepsilon_{eq}^p = C_5 \quad (1.22)$$

Han y Kim (2003) propusieron una combinación de los criterios de Cockcroft y Latham y Bressan y Williams. Oh *et ál.* (1979) modificaron el criterio de Cockcroft y Latham como sigue:

$$\int_0^{\varepsilon_{eq,f}^p} \frac{\sigma_1}{\sigma_{eq}} d\varepsilon_{eq}^p = C_6 \quad (1.23)$$

Norris *et ál.* (1978) propusieron un criterio donde la única tensión representativa es la presión hidrostática:

$$\int_0^{\varepsilon_{eq,f}^p} \frac{1}{1 - C_7\sigma_h} d\varepsilon_{eq}^p = C_8 \quad (1.24)$$

Atkins (1996) adaptaron el criterio de Norris *et ál.* al conformado de chapas mejorando claramente las predicciones. El criterio modificado de estos autores consistió en añadir el efecto de la condición de deformación, β , como sigue:

$$\int_0^{\varepsilon_{eq,f}^p} \frac{1 + \beta/2}{1 - C_9\sigma_h} d\varepsilon_{eq}^p = C_{10} \quad (1.25)$$

1.4.3. Criterios basados en la microestructura

Oyane *et ál.* (1980) desarrollaron un modelo de fractura dúctil suponiendo que durante la fase de crecimiento de huecos el material se comporta como un medio poroso. Al aumentar el tamaño de los huecos durante el conformado, la densidad relativa del material (ρ , definida como la relación entre la densidad aparente del material poroso y la densidad del material considerado como libre de poros) se reduce y aumenta la deformación volumétrica (ε^v) hasta alcanzar un valor ε_f^v . Postularon que la siguiente integral sólo depende del material:

$$C_9 = \int_0^{\varepsilon_f^v} f^2 \rho^{2C_{10}-1} d\varepsilon^v \quad (1.26)$$

siendo f una función de ρ , y propusieron el siguiente criterio de fractura dúctil:

$$\int_0^{\varepsilon_{eq,f}^p} \left(\frac{\sigma_h}{\sigma_{eq}} + C_{11} \right) d\varepsilon_{eq}^p = C_9 \quad (1.27)$$

El criterio de Oyane *et ál.* ha sido utilizado entre otros por Takuda *et ál.* (1997b, 1999), con buenos resultados en simulaciones mediante elementos finitos de procesos de estirado de chapa. En un trabajo posterior, Takuda *et ál.* (2000) realizaron un esfuerzo por predecir en el DLC los dos modos de fallo por estricción localizada y fractura dúctil usando el criterio de Oyane *et ál.*. Sin embargo, el procedimiento para predecir la estricción es un método muy subjetivo, ya que lo que hicieron fue medir las deformaciones límite de estricción en las inmediaciones del material donde se produce la fractura (Ozturk y Lee, 2004).

Más recientemente, Chaouadi *et ál.* (1994) argumentan que, a nivel local, la condición de incompresibilidad no es aplicable en procesos de fractura dúctil, debido al fenómeno de formación y crecimiento de huecos. La fractura dúctil puede

entenderse, por tanto, como un proceso en el que compiten dos mecanismos: la deformación plástica y el crecimiento de cavidades. Así, la fractura dúctil se produce cuando el trabajo total de deformación alcanza un valor crítico que depende del material. Dada la existencia de huecos en el material al inicio de la fractura dúctil, el trabajo total de deformación será la suma del trabajo de deformación plástica más el trabajo de variación de volumen. Haciendo uso de las expresiones obtenidas por Rice y Tracey (1969) para describir el proceso de crecimiento de huecos, el trabajo total de deformación, o *trabajo de daño* como denominan los autores, se expresa como:

$$dW_D = \left(1 + 3\alpha\xi e^{\frac{3}{2}\xi} \right) \sigma_{eq} d\varepsilon_{eq}^p \quad (1.28)$$

siendo el coeficiente de triaxialidad de tensiones $\xi = \sigma_h/\sigma_{eq}$. Los parámetros ξ y α se asumen que son constantes del material que pueden determinarse experimentalmente. Dada esta expresión del trabajo de daño, el criterio de factura de Chaouadi *et ál.* puede formularse como:

$$\int_0^{\varepsilon_{eq,f}^p} \left(\sigma_{eq} + 3\alpha\sigma_h e^{\frac{3\sigma_h}{2\sigma_{eq}}} \right) d\varepsilon_{eq}^p = C_{12} \quad (1.29)$$

Los autores comparan satisfactoriamente las predicciones de dicho modelo con los resultados experimentales obtenidos en componentes cilíndricos entallados a tracción, con diferentes geometrías de entalla. Un modelo muy similar ha sido también propuesto por Zhang y Zheng (1990).

El efecto de la presión hidrostática o, en forma adimensional de la triaxialidad de tensiones ($\xi = \sigma_h/\sigma_{eq}$) ha sido ampliamente estudiado por Bao y Wierzbicki (2004). Según estos autores, dicho coeficiente es, además de la severidad de la deformación, el factor más importante que controla el inicio de la fractura dúctil. En un estudio numérico-experimental de diferentes tipos de ensayos en chapas de aleación de aluminio 2024-T351, cuantificaron la relación entre la deformación equivalente en el instante del fallo (la cual es una buena medida de la ductilidad del material) y el coeficiente de triaxialidad de tensiones. Mostraron que existen tres regímenes distintos en el rango de ξ donde la fractura se produce por motivos diferentes. En valores negativos (obtenidos mediante ensayos a compresión), la fractura está gobernada por el modo cortante. Para grandes triaxialidades el modo dominante de fallo es el crecimiento de huecos, mientras que para bajas

triaxialidades entre los anteriores dos regímenes, la fractura puede desarrollarse como una combinación de los modos cortante y de crecimiento de huecos.

Algunos de los criterios anteriores y modificaciones de los mismos, incluyendo el efecto de la tensión hidrostática, se han analizado para predecir el fallo por fractura dúctil en chapas de aleación de aluminio 2024-T3 (Vallellano *et ál.*, 2008).

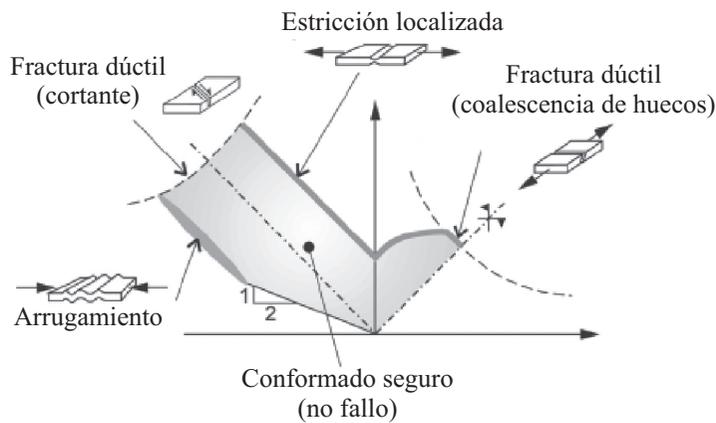


Figura 1.16: Diagrama límite de conformado mostrando diferentes modos de fallo.

Como se ha comentado anteriormente, los dos modos de fallo más comunes en los procesos de conformado de chapa, estricción localizada y fractura dúctil, pueden representarse gráficamente en un solo DLC para evaluar la conformabilidad de la chapa en todo el rango posible de condiciones de deformación. La Figura 1.16 muestra de forma esquemática un DLC típico con una representación de las curvas límite de conformado más habituales. En general, la estricción localizada suele ser el modo de fallo predominante en un amplio rango del DLC. Como se ilustra en la figura, la fractura dúctil por cortante se localiza en el lado izquierdo del DLC, donde existen esfuerzos de compresión, mientras que la fractura dúctil debida a la coalescencia de huecos ocurre en el lado derecho del DLC, en situaciones cercanas a la deformación equi-biaxial. La figura se completa con la curva de fallo por arrugamiento, debido a la aparición de pandeo, típico en operaciones como la embutición.

1.5. Efecto de la historia de carga

La principal ventaja del DLC tradicional es que es fácil evaluar la conformabilidad del material a partir de medidas de la deformación en las chapas conformadas. Aunque ha demostrado ser una herramienta muy útil, tiene el inconveniente de que es válido solamente para casos de carga proporcional (Ghosh y Laukonis, 1976; Kleemola y Pelkkikangas, 1977; Laukonis y Ghosh, 1978; Ranta-Escola, 1980; Arrieux *et ál.*, 1982; Shang *et ál.*, 1985; Schmitt *et ál.*, 1987; Graf y Hosford, 1993a,b; Stoughton, 2000; Allwood y Shouler, 2009). Así, en la práctica del conformado multietapa, se consideró que el DLC podía usarse solamente en la primera etapa. Motivados por este problema, Ghosh y Laukonis (1976) y Kleemola y Pelkkikangas (1977) realizaron a mediados de 1970 una serie de ensayos con predeformación uniaxial y equi-biaxial en chapas de acero, aluminio, cobre y latón, y observaron la dependencia de la magnitud y del tipo de predeformación en las curvas límite de los DLC. Las curvas de fallo obtenidas diferían en posición y forma de la curva de fallo correspondiente al material sin predeformar y las diferencias se incrementaban al aumentar la magnitud de la predeformación. Otros autores también exploraron los efectos del cambio en las trayectorias de deformación y encontraron resultados similares (Laukonis y Ghosh, 1978; Ranta-Escola, 1980; Arrieux *et ál.*, 1982; Shang *et ál.*, 1985; Schmitt *et ál.*, 1987; Graf y Hosford, 1993a,b). La Figura 1.17 muestra los resultados de Graf y Hosford (1993b) en chapas de aluminio 2008-T4, con 15 procesos de diferentes niveles de predeformación uniaxial, plana y equi-biaxial.

La no proporcionalidad de carga está presente no sólo en las operaciones subsiguientes del conformado multietapa. Hay multitud de operaciones donde la no proporcionalidad es inherente al proceso, siendo la embutición un ejemplo muy claro. En este proceso el estado tensional del material sufre cambios muy bruscos al pasar de la zona de la brida, donde el prensachapas ejerce esfuerzos de compresión, a la zona de la pared lateral sometida a esfuerzos de tracción entre punzón y matriz. Los análisis de elementos finitos muestran que las tensiones pueden sufrir procesos de descarga elástica y de carga inversa y que raramente seguirán la misma trayectoria de la carga inicial. En otras operaciones la no proporcionalidad de la carga es menos evidente. Este es el caso, por ejemplo, del estirado de chapa con punzones o matrices de forma donde existen esfuerzos combinados de tracción y flexión. Para que este proceso fuera de carga proporcional, tracción y flexión deberían evolucionar de forma lineal y simultáneamente. Sin embargo, como se verá en capítulos posteriores, los efectos de la flexión se concentran en los primeros

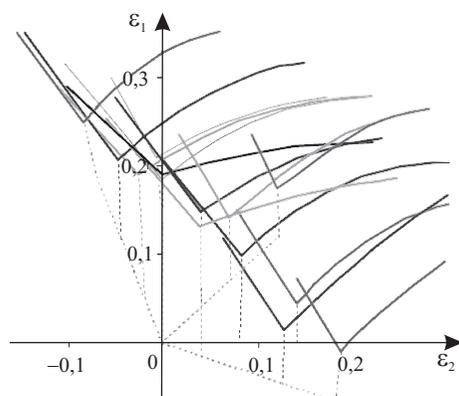


Figura 1.17: Curvas límite de conformado en chapas de aluminio 2008-T4 con distintos niveles de predeformación uniaxial, plana y equi-biaxial (Graf y Hosford, 1993b); las líneas discontinuas que parten del origen muestran las trayectorias de predeformación y posterior proceso de deformación plana hasta el fallo.

instantes del conformado siendo la tracción el esfuerzo dominante durante el resto del conformado.

En un proceso de carga proporcional, la relación entre las tensiones principales ($\alpha = \sigma_2/\sigma_1$) se mantiene constante en todo el proceso de conformado. Todos los análisis de fallo revisados en los apartados anteriores asumen carga proporcional en condiciones de tensión plana. En estas condiciones se puede demostrar que si en un instante determinado la carga se incrementa de forma proporcional ($\alpha = cte.$) se tiene que el incremento de flujo plástico también es proporcional (*i.e.* $\beta = d\varepsilon_2^p/d\varepsilon_1^p = cte.$). A menudo, esta condición se ha relacionado erróneamente con la condición de deformación proporcional, donde la relación entre las deformaciones principales es constante ($\varepsilon_2/\varepsilon_1 = cte.$) (Stoughton, 2000). Esta mala interpretación puede ocasionar errores de juicio en la evaluación de la factibilidad de una operación de conformado, si se utiliza un DLC cuya curva límite de conformado ha sido obtenida asumiendo carga proporcional. En efecto, se pueden producir en la práctica fallos en zonas donde el DLC no las predice, y viceversa.

Kleemola y Pelkkikangas (1977) señalaron que los límites de conformado se podían calcular asumiendo que sólo dependen del estado tensional, independientemente del camino de deformación. Basándose en esta idea, propusieron los *diagramas límite de conformado en tensiones* (DLCT, Figura 1.18) como una alternativa a los tradicionales en deformaciones. Arrieux *et al.* (1982) redescubrieron este fe-

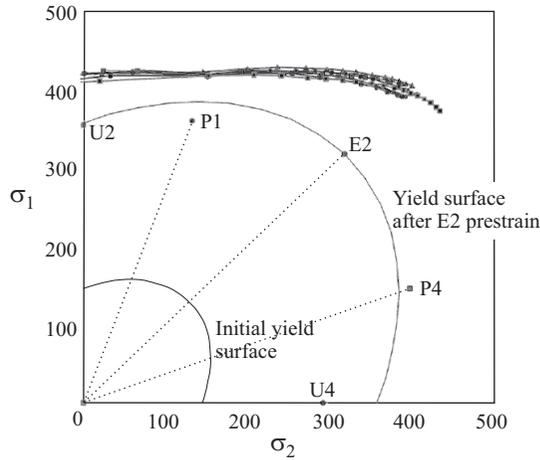


Figura 1.18: DLC en tensiones (DLCT) correspondiente al DLC de la Figura 1.17 (Stoughton, 2000); nótese la superficie de plastificación inicial y la correspondiente al final de la predeformación equi-biaxial definida en la trayectoria lineal E2.

nómeno y propusieron un criterio de estricción localizada en términos de tensiones. Esta línea de investigación fue abandonada durante las décadas de 1980 y 1990. Más tarde, Stoughton (2000) volvió a considerar el efecto de la historia de la deformación y propuso el uso de criterios de fallo basados en el estado tensional en todas las operaciones de conformado de chapa, incluidas las que se asumen en carga proporcional, para obtener una medida robusta de la severidad del conformado. Sus investigaciones posteriores (Stoughton, 2001; Stoughton y Zhu, 2004; Stoughton, 2008) se centraron en los resultados experimentales presentados por Graf y Hosford (1993b), presentados anteriormente en la Figura 1.17.

Según Stoughton, todas las curvas de fallo en el DLC, obtenidas con diferentes caminos de deformación, coinciden en la misma curva en el espacio de las tensiones. Comprobó esta hipótesis con los datos de Graf y Hosford y obtuvo las correspondientes curvas en el DLCT, que coincidieron con un estrecho margen de error (Figura 1.18). Sin embargo, diferentes autores apuntan a que dicha coincidencia se debe principalmente a la pendiente casi horizontal de la curva tensión-deformación en los materiales ensayados. En efecto, en el fallo de estos materiales, a un amplio rango de deformaciones le corresponde un rango estrecho de tensiones, y viceversa, un estrecho margen de error en el estado tensional puede acarrear grandes diferencias en la predicción de la deformación. En parte por este motivo, la idea de establecer los criterios de fallo en términos de tensiones no ha sido totalmente

aceptada por la comunidad científica. Como además las deformaciones son medibles, al contrario que las tensiones, los DLC tradicionales siguen siendo los más usados a día de hoy. No obstante, Stoughton defiende el uso de los DLCT en base a que en la actualidad los análisis mediante elementos finitos permiten obtener medidas de las tensiones igual de precisas que de las deformaciones.

Siguiendo esta línea de investigación, Wu *et ál.* (2005) realizaron un estudio numérico del efecto de la historia de carga, asumiendo diferentes caminos de carga bilineales en chapas de AA6111-T4. Las simulaciones estuvieron basadas en la teoría de la plasticidad y en el método M-K (Marciniak y Kuczyński, 1967). Comprobaron que ambos diagramas en deformaciones y tensiones, DLC y DLCT, son dos representaciones matemáticamente equivalentes de los límites de conformado. Señalaron que mientras que el DLC es muy sensible a los cambios en la historia de deformación, el DLCT es mucho más independiente.

Teóricamente, la utilidad del DLCT radica en que la obtención de una sola curva límite de conformado permite predecir el fallo en cualquier proceso de carga. En cambio, el DLC se obtiene habitualmente en procesos donde las tensiones evolucionan de forma lineal y sólo son válidos, por tanto, para procesos de carga proporcional.

Bibliografía

- Allwood JM, Shouler DR (2009). *Generalised forming limit diagrams showing increased forming limits with non-planar stress states*. International Journal of Plasticity 25:1207–1230
- Arrieux R, Bedrin C, Boivin M (1982). *Determination of an intrinsic forming limit stress diagram for isotropic metal sheets*. En: Proc. 12th Biennial Congress of the International Deep Drawing Research Group, IDDRG, pp. 61–71
- Atkins AG (1996). *Fracture in forming*. Journal of Materials Processing Technology 56:609–618
- Bao Y, Wierzbicki T (2004). *On fracture locus in the equivalent strain and stress triaxiality space*. International Journal of Mechanical Sciences 46:81–98
- Barata-Rocha A, Santos AD, Teixeira P, Butuc MC (2009). *Analysis of plastic flow localization under strain paths changes and its coupling with finite element simulation in sheet metal forming*. Journal of Materials Processing Technology 209:5097–5109

- Boudeau N, Gelin JC (1994). *Prediction of the localized necking in 3D sheet metal forming processes from FE simulations*. Journal of Materials Processing Technology 45:229–235
- Bressan JD, Williams JA (1983). *The use of a shear instability criterion to predict local necking in sheet metal deformation*. International Journal of Mechanical Sciences 25(3):155–168
- Brozzo P, De Luca B, Rendina R (1972). *A new method for the prediction of the formability limits of plastic sheets*. En: Proc. Biennial Congress of the International Deep Drawing Research Group, IDDRG, 130, c/3/72, 28 pages
- Chaouadi R, De Meester P, Vandermeulen W (1994). *Damage work as ductile fracture criterion*. International Journal of Fracture 66(2):155–164
- Christoffersen J, Hutchinson JW (1979). *A class of phenomenological corner theories of plasticity*. Journal of the Mechanics and Physics of Solids 27:465–487
- Clift SE, Hartley P, Sturgess CEN, Rowe GW (1990). *Fracture prediction in plastic deformation processes*. International Journal of Mechanical Sciences 32(1):1–17
- Cockcroft MG, Latham DJ (1968). *Ductility and the workability of metals*. Journal of the Institute of Metals 96(2):33–39
- Date PP, Padmanabhan KA (1992). *On the prediction of the forming-limit diagram of sheet metals*. International Journal of Mechanical Sciences 34(5):363–374
- Freudenthal AM (1950). *The inelastic behavior of engineering materials and structures*. John Wiley & Sons
- Ghosh AK, Laukonis JV (1976). *The influence of strain path changes on the formability of sheet steel*. En: 9th Biennial Congress of the IDDRG, Sheet Metal Forming and Energy Conservation, ASM Publication
- Goodwin GM (1968). *Application of strain analysis to sheet metal forming in the press shop*. SAE paper 680093
- Gotoh M (1985). *A simple plastic constitutive equation with vertex effect*. Engineering Fracture Mechanics 21:673–684
- Gotoh M (1990). *Improvements of J2-deformation theory and their applications to FEM analyses of large elastic-plastic deformation*. JSME International Journal, Series I 33:209–219

- Graf AF, Hosford WF (1990). *Calculations of forming limit diagrams*. Metallurgical and Materials Transactions A 21(1):87–94
- Graf AF, Hosford WF (1993a). *Calculations of forming limit diagrams for changing strain paths*. Metallurgical Transactions A 24A:2497–2501
- Graf AF, Hosford WF (1993b). *Effect of changing strain paths on forming limit diagrams of Al 2008-T4*. Metallurgical Transactions A 24A:2503–2512
- Gurson AL (1977). *Continuum theory of ductile rupture by void nucleation and growth. Part I: yield criteria and flow rules for porous ductile media*. Journal of Engineering Materials and Technology 99:2–15
- Han HN, Kim KH (2003). *A ductile fracture criterion in sheet metal forming process*. Journal of Materials Processing Technology 142(1):231–238
- Hill R (1948). *A theory of the yielding and plastic flow of anisotropic metals*. Proceedings of the Royal Society 193A:281–297
- Hill R (1952). *On discontinuous plastic states, with special reference to localized necking in thin sheets*. Journal of the Mechanics and Physics of Solids 1(1):19–30
- Hill R (1962). *Acceleration waves in solids*. Journal of the Mechanics and Physics of Solids 10(1):1–16
- Hill R (1967). *The essential structure of constitutive laws for metal composites and polycrystals*. Journal of the Mechanics and Physics of Solids 15(2):79–95
- Hosford WF (1985). *Comments on anisotropic yield criteria*. International Journal of Mechanical Sciences 27(7/8):423–427
- Hotz W, Timm J (2008). *Experimental determination of forming limit curves (FLC)*. En: Proc. 7th International Conference and Workshop on Numerical Simulation of 3D Sheet Metal Forming Processes, Numisheet 2008, Interlaken, Switzerland, pp. 271–278
- Hutchinson JW, Neale KW (1978). *Sheet necking-II, time-independent behavior*. En: Koistinen DP, Wang NM (eds.) Mechanics of sheet metal forming, Plenum, New York, pp. 111–126
- ISO (2008). ISO 12004-2:2008, Metallic Materials-Sheet and Strip-Determination of Forming Limit Curves in Laboratory

- Jain M, Allin J, Lloyd D (1999). *Fracture limit prediction using ductile fracture criteria for forming of an automotive aluminum sheet*. International Journal of Mechanical Sciences 41(10):1273–1288
- Keeler SP, Backhofen WA (1963). *Plastic instability and fracture in sheet stretched over rigid punches*. Transactions of ASM 56:25–48
- Kleemola HJ, Pelkkikangas MT (1977). *Effect of predeformation and strain path on the forming limits of steel copper and brass*. Sheet Metal Industries 63:591–599
- Laukonis JV, Ghosh AK (1978). *Effects of strain path changes on the formability of sheet metals*. Metallurgical and Materials Transactions A 9(12):1849–1856
- Le Roy G, Embury JD, Edwards G, Ashby MF (1981). *A model of ductile fracture based on the nucleation and growth of voids*. Acta Metallurgica 29:1509–1522
- Lee D, Zaverl FJ (1982). *Neck growth and forming limits in sheet metals*. International Journal of Mechanical Sciences 24(3):157–173
- Lu ZH, Lee D (1987). *Prediction of history-dependent forming limits by applying different hardening models*. International Journal of Mechanical Sciences 29(2):123–137
- Marciniak Z, Kuczyński K (1967). *Limit strains in the processes of stretch-forming sheet metal*. International Journal of Mechanical Sciences 9:609–620
- Marciniak Z, Duncan JL, Hu SJ (2002). *Mechanics of sheet metal forming*, 2o ed. Butterworth-Heinemann
- Nakamachi E (1995). *Sheet-forming process characterization by static-explicit anisotropic elastic-plastic finite-element simulation*. Journal of Materials Processing Technology 50:116–132
- Needleman A, Triantafyllidis N (1978). *Void growth and local necking in biaxially stretched sheets*. Journal of Engineering Materials and Technology 100:164–169
- Norris DM, Reaugh JE, Moran B, Quinones DF (1978). *A plastic strain, mean-stress criterion for ductile fracture*. Journal Engineering Industrial Transaction ASME (100):279–286
- Oh SI, Chen CC, Kobayashi S (1979). *Ductile fracture in axisymmetric extrusion and drawing*. Journal Engineering Industrial Transaction ASME 101:36–44

- Oyane M, Sato T, Okimoto K, Shima S (1980). *Criteria for ductile fracture and their application*. Journal of Mechanical Working Technology 4(1):66–81
- Ozturk F, Lee D (2004). *Analysis of forming limits using ductile fracture criteria*. Journal of Materials Processing Technology 147(3):397–404
- Ozturk F, Lee D (2005). *Experimental and numerical analysis of out-of-plane formability test*. Journal of Materials Processing Technology 170:247–253
- Padwal S, Chaturvedi RC (1992). *Prediction of forming limits using Hosford's modified yield criterion*. International Journal of Mechanical Sciences 34(7):541–547
- Parmar A, Mellor PB (1978). *Predictions of limit strains in sheet metal using a more general yield criterion*. International Journal of Mechanical Sciences 20
- Ranta-Escola AJ (1980). *Effect of loading path on stress-strain relationships of steel sheet and brass*. Metals Technology 7(2):45–49
- Rice JR, Tracey DM (1969). *On the ductile enlargement of voids in triaxial stress fields*. Journal of the Mechanics and Physics of Solids 17(3):201–217
- Schmitt JH, Raphael J, Rauch E, P M (1987). Computational methods for predicting material processing defects. Elsevier, New York, pp. 309-318
- Shang HM, Tan GS, M TWC (1985). *Effects of prestrain with strain gradient present on sheet metal formability*. Journal of Engineering Materials and Technology 107(4):298–306
- Sowerby R, Duncan JL (1971). *Failure in sheet metal in biaxial tension*. International Journal of Mechanical Sciences 13(3):217–229
- Stoughton TB (2000). *A general forming limit criterion for sheet metal forming*. International Journal of Mechanical Sciences 42:1–27
- Stoughton TB (2001). *Stress-based forming limits in sheet-metal forming*. Journal of Engineering Materials and Technology 123:417–422
- Stoughton TB (2008). *Generalized metal failure criterion*. En: Proc. 7th International Conference and Workshop on Numerical Simulation of 3D Sheet Metal Forming Processes, Numisheet 2008, Interlaken, Switzerland, pp. 241–246

- Stoughton TB, Zhu X (2004). *Review of theoretical models of the strain-based FLD and their relevance to the stress-based FLD*. International Journal of Plasticity 40:1463–1486
- Stören S, Rice JR (1975). *Localized necking in thin sheets*. Journal of the Mechanics and Physics of Solids 23:421–441
- Swift HW (1952). *Plastic instability under plane strain*. Journal of the Mechanics and Physics of Solids 1:1–18
- Takuda H, Fujimoto H, Kuroda Y, Hatta N (1997a). *Finite element analysis of formability of a few kinds of special steel sheets*. Steel Research 68(9):398–402
- Takuda H, Mori K, Fujimoto H, Hatta N (1997b). *Fracture prediction in stretch forming using finite element simulation combined with ductile fracture criterion*. Archives of Applied Mechanics 67(3):143–150
- Takuda H, Mori K, , Hatta N (1999). *The application of some criteria for ductile fracture to the prediction of the forming limit of sheet metals*. Journal of Materials Processing Technology 96:116–221
- Takuda H, Mori K, Takakura N, Yamaguchi K (2000). *Finite element analysis of limit strain in biaxial stretching of sheet metals allowing for ductile fracture*. International Journal of Mechanical Sciences 42(4):785–798
- Thomason PF (1990). *Ductile fracture of metals*. Pergamon Press, Oxford
- Vallellano C, Guzmán C, García-Lomas FJ (2006). *Failure prediction in stretched sheets of aluminium 2024-T3*. Material Science Forum 256(1):91–96
- Vallellano C, Morales D, García-Lomas FJ (2008). *A study to predict failure in biaxially stretched sheets of aluminum alloy 2024-T3*. Materials and Manufacturing Processes 23(3):303–310
- Van Minh H, Sowerby R, Duncan JL (1975). *Probabilistic model of limit strains in sheet metal*. International Journal of Mechanical Sciences 17:339–349
- Wu PD, Graf A, MacEwen SR, Lloyd DJ, Jain M, Neale KW (2005). *On forming limit stress diagram analysis*. International Journal of Solids and Structures 42:2225–2241

- Yamaguchi K, Mellor PB (1976). *Thickness and grain size dependence of limit strains in sheet metal stretching*. International Journal of Mechanical Sciences 18(2):85–90
- Yingbin B, Wierzbicki T (2004). *On fracture locus in the equivalent strain and stress triaxiality space*. International Journal of Mechanical Sciences 46:81–98
- Yoshida T, Katayama T, Usuda M (1995). *Forming-limit analysis of hemispherical-punch stretching using the three-dimensional finite-element method*. Journal of Materials Processing Technology 50:226–237
- Zadpoor AA, Sinke J, Benedictus R (2009). *Formability prediction of high strength aluminum sheets*. International Journal of Plasticity 25(12):2269–2297
- Zhang K, Zheng C (1990). *Microvoid multistage nucleating model and its application in analyses of micro damage and fracture*. Engineering Fracture Mechanics 37(3):621–629
- Zhao L, Sowerby R, Sklad MP (1996). *A theoretical and experimental investigation of limit strains in sheet metal forming*. International Journal of Mechanical Sciences 38(12):1307–1317
- Zhou Y, Neale KW (1995). *Predictions of forming limit diagrams using a rate-sensitive crystal plasticity model*. International Journal of Mechanical Sciences 37(1):1–20
- Zhu X, Weinmann K, Chandra A (2001). *A unified bifurcation analysis of sheet metal forming limits*. Journal of Engineering Materials and Technology 123:329–333

Capítulo 2

Efecto de la flexión en el conformado de chapa

Existe un gran número de procesos de conformado de chapa donde la flexión está presente. En general, los esfuerzos de flexión aparecen en todas las operaciones de conformado cuyos productos contienen zonas curvadas (*e.g.* embutición, estampación, doblado, estirado o hidroconformado). Dependiendo de las condiciones del proceso, la flexión puede ser el esfuerzo predominante (*e.g.* en el doblado en V o al aire) o puede no serlo, aunque su presencia sea imprescindible (*e.g.* en el estirado, la estampación o el hidroconformado, donde los mayores esfuerzos son de tracción). Cuando los esfuerzos predominantes son distintos de la flexión, las variaciones de deformación y tensión presentes en el espesor han sido a menudo menospreciadas. Esta simplificación es frecuente debido al espesor relativamente pequeño de las chapas. En estas situaciones, tradicionalmente la predicción del fallo de chapa es analizada con los métodos descritos en el capítulo anterior. Ante la necesidad de optimizar los procesos de producción, esta tendencia ha ido cambiando durante los últimos años, de manera que cada vez se tiene una mayor conciencia de la importancia de considerar los gradientes de deformación y tensión en el espesor de la chapa. Aún así, el número de trabajos dedicados al estudio de la influencia de estos gradientes es insignificante comparado con el número de artículos en el amplio campo del conformado de chapa.

Este capítulo comienza con una revisión de los trabajos teóricos y prácticos más destacados sobre el fallo de chapa en operaciones donde la flexión no es, en general, el esfuerzo predominante del proceso pero se manifiesta su influencia en la

conformabilidad del material. Los diversos autores que se citan sugieren el efecto de la flexión en el fallo, valoran su importancia, su complejidad y la necesidad de comprenderlo mejor.

Los análisis teóricos realizados en la literatura del proceso de conformado y de la predicción del fallo son muy variados y adoptan hipótesis simplificativas muy diversas. La mayoría de los trabajos asumen implícita o explícitamente carga proporcional y se basan en la teoría de deformación. Otros pocos usan la teoría del flujo plástico en sus análisis. Casi todos asumen condiciones de deformación plana para simplificar el análisis y son raros los casos que consideran las tensiones transversales en el espesor. Toda esta variedad de hipótesis diferentes pone de relieve la complejidad, proclamada por multitud de investigadores, del análisis en presencia de gradientes de deformación y tensión en el espesor de la chapa. Por consiguiente, para realizar un estudio preciso de la conformabilidad de chapas en operaciones con doblado resulta fundamental comprender los mecanismos que intervienen en estos procesos. Para ello, en este capítulo se realiza una revisión de las dos teorías analíticas existentes del doblado de un material continuo y homogéneo, se exponen sus fundamentos básicos y se describen brevemente algunos trabajos posteriores que de ambas se derivan. La primera se suele denominar *teoría elemental o ingenieril de doblado* y es la más utilizada por su mayor simplicidad. A la segunda se la ha llamado *teoría matemática de doblado* y permite obtener soluciones más precisas que la primera, aunque también es más compleja. Además, permite introducir y analizar conceptos de especial relevancia que la teoría elemental no contempla, debido a las hipótesis simplificativas en las que se basa. En la exposición de estas dos teorías se hace especial hincapié en la acción combinada de flexión y tracción, que será tratada en mayor profundidad en el capítulo siguiente.

2.1. Introducción

El efecto de la curvatura en el fallo de chapas fue señalado por primera vez a mediados de la década de los 70 del pasado siglo. Algunos trabajos posteriores verificaron experimentalmente el fenómeno, aunque fracasaron en el intento de explicar el mecanismo del proceso de deformación. A partir de entonces, para caracterizar la capacidad del conformado de chapas en la práctica, la solución convencional fue la de usar las deformaciones estimadas en el plano medio de la chapa. Esta simple aproximación, denominada a veces como *Regla del Plano Medio*, ha permitido encontrar resultados consistentes, aunque a menudo demasiado

conservadores. Durante más de dos décadas no se prestó más atención al efecto de la flexión en los procesos de estirado. En este periodo de tiempo el esfuerzo en los trabajos publicados se centra en procesos de flexión pura. Recientemente, los congresos internacionales dedicados al conformado de chapa (*e.g.* Numisheet, ESAFORM, Metal Forming, IDDRG) empiezan a experimentar un cada vez mayor número de aportaciones relacionados con el fallo de chapa en presencia de gradientes de deformación y tensión en el espesor, tales como los efectos de los esfuerzos de flexión, de la curvatura de los punzones de forma o de la presión que éstos ejercen.

Los ensayos de estirado de chapa mediante punzones de forma, realizados por Keeler y Backhofen (1963) para investigar la inestabilidad plástica, sirvieron a sus autores para proponer los DLC. Siguiendo esta línea de investigación, Keeler (1968) y Goodwin (1968) establecieron que, al menos para chapas de acero al carbono, existía no una sola curva en el DLC sino una banda, conocida como banda de Keeler-Goodwin, que reproducía los resultados obtenidos en todos los ensayos con los diferentes punzones. Ghosh y Hecker (1974) señalaron por primera vez la influencia de la curvatura del punzón como causa de los diferentes límites de conformado, aunque sin aclarar sus razones. Un año más tarde, Charpentier (1975) observó el mismo efecto usando punzones de diferentes radios de punta. En todos estos trabajos se presentan la evolución de los DLC, en los que se aprecia una clara influencia del radio del punzón en los resultados obtenidos: los resultados obtenidos con punzones hemiesféricos (ensayos de Nakazima, *out-of-plane tests*), y por tanto donde existe una clara componente de flexión, se sitúan claramente por encima de los obtenidos en condiciones de deformación uniforme (ensayos de Marciniak, *in-plane tests*). En particular, los trabajos de Ghosh y Hecker muestran diferencias en torno a un 12-15 % en los DLC obtenidos con un punzón hemiesférico de 100 mm de diámetro y con un punzón plano, para chapas de acero de bajo carbono con espesores en torno a 1 mm. Esta evolución se acentúa cuanto menor es el radio de curvatura del punzón. Charpentier pone de manifiesto diferencias de más de un 50 %, empleando punzones elípticos de radios de entre 24 y 95 mm sobre chapas de aceros calmados de bajo carbono de 1,85 mm de espesor. Más recientemente, resultados similares a los anteriores se pueden ver por ejemplo en los trabajos de Raghavan (1995) para chapas de acero y en los de Moshksar y Mansorzadeh (2003) para chapas de aleación de aluminio 3105.

Melbourne *et al.* (1973) fueron los primeros en proponer ensayos con punzones de radios pequeños para caracterizar la capacidad del conformado de chapas en

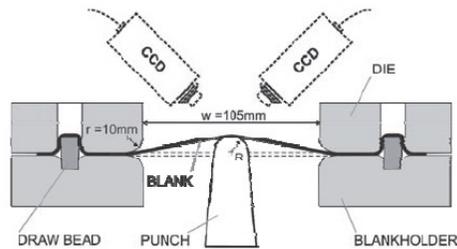


Figura 2.1: Esquema de los ensayos ASBT (Kitting *et ál.*, 2008).

acciones combinadas de tracción y flexión. Estos ensayos fueron originariamente diseñados para caracterizar chapas de acero laminado y han sido muy utilizados con posterioridad en el estudio del efecto de la curvatura. Hoy día se conocen por sus siglas en inglés, ASBT (*angular stretch bend test*). A diferencia del ensayo de Nakazima (a veces denominado HBST, *hemispherical stretch bend test*), en el que se utiliza un punzón hemisférico de radio estándar 50 mm, el ASBT emplea punzones cilíndricos con diferentes radios de punta. La Figura 2.1 muestra un esquema de este tipo de ensayo. Los radios de punta (R) varían en un rango de valores pequeños (*e.g.* entre 1 y 20 mm en probetas de 1 mm de espesor) para que el efecto de la flexión sea apreciable. Las probetas suelen ser rectangulares con una región central más estrecha con el objeto de concentrar la mayor deformación. La probeta se fija horizontalmente por sus extremos y el punzón ejerce presión mediante un desplazamiento gradual. El punzón se sitúa en el centro de la chapa y su punta se alinea a lo largo del ancho de la probeta. En la actualidad se utilizan sistemas ópticos de medición de deformación con dos cámaras que registran imágenes continuamente durante el ensayo hasta la rotura del espécimen, para su posterior análisis (Geiger y Merklein, 2003; Kitting *et ál.*, 2008; Martínez-Donaire *et ál.*, 2010).

Uko *et ál.* (1977) realizaron un estudio más exhaustivo que el de Melbourne *et ál.* para un acero de alta resistencia. Realizaron ensayos ASBT hasta la fractura en chapas de 5,26 mm y 6 punzones de radio de punta comprendido entre 19 y 2,4 mm. Obtuvieron medidas de la distribución de deformación a lo largo y ancho de la línea de doblado y en las caras interna y externa de las chapas, para diferentes carreras del punzón hasta la rotura del material. Observaron que las mayores deformaciones se producían en el punto central de la chapa y que el fallo se iniciaba en este punto crítico. Comprobaron que en este punto las deformaciones transversales (ε_3) eran siempre de compresión (*i.e.* el espesor se reducía)

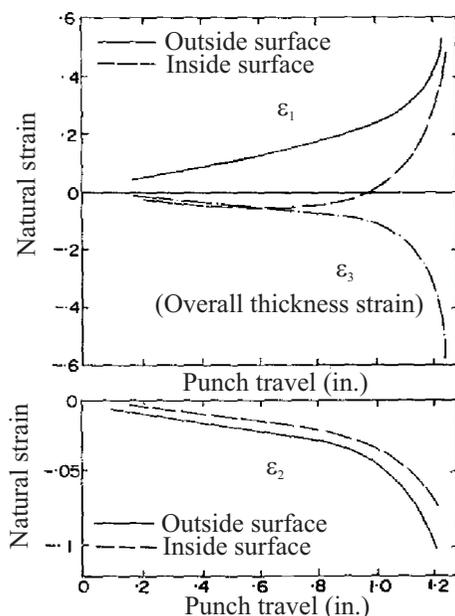


Figura 2.2: Evolución con la carrera del punzón de las deformaciones longitudinal (ϵ_1), lateral (ϵ_2) y transversal (ϵ_3) en la zona central de una chapa de acero HSLA de 1/4 pulgada de espesor, en un ensayo ASBT con un punzón de radio de 3/4 pulgada (Uko *et al.*, 1977); nótese cómo la cara interna de la chapa (*inside surface*) se acorta inicialmente ($d\epsilon_1 < 0$), se invierte posteriormente la deformación ($d\epsilon_1 > 0$) y aumenta la velocidad de deformación al recuperarse la elongación original ($\epsilon_1 = 0$).

y aproximadamente iguales en ambas superficies de la chapa (Figura 2.2). La deformación longitudinal (ϵ_1) era siempre de tracción en la cara externa, pero en la cara interna era inicialmente de compresión. Mostraron cómo la línea neutra de doblado se desplazaba a través del espesor y alcanzaba la cara interna (hecho que interpretaron como el instante en el que la deformación longitudinal en la cara interna cambiaba de signo). Superado este instante, las deformaciones en ambas superficies de la chapa aumentaban rápidamente, como se puede apreciar en la Figura 2.2. Una de las principales interpretaciones de Uko *et al.* fue que el fallo se producía en un valor aproximadamente constante de la deformación equivalente (calculada mediante el criterio de fluencia de von Mises para materiales isótropos) en la cara externa de la chapa, y que este valor era independiente del radio del punzón y del espesor de la chapa. Sin embargo, como afirman los autores, esta deformación difería significativamente de la obtenida en ensayos de tracción, de

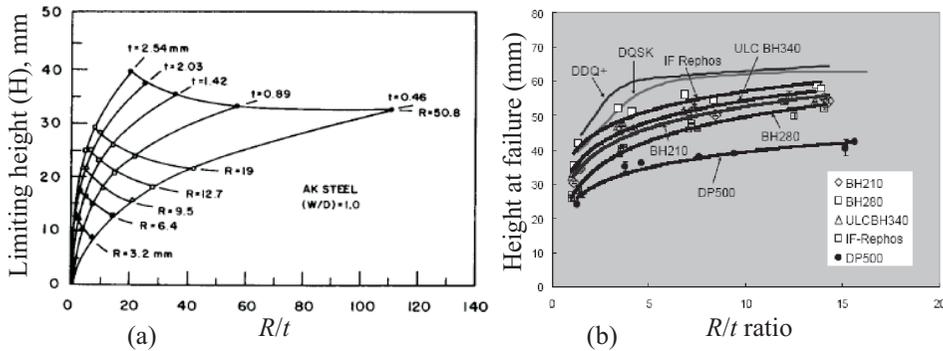


Figura 2.3: Curvas de conformabilidad RtH : (a) en chapas de acero AK para distintos espesores y radios de punzón (Demeri, 1981b); y (b) en chapas de distintos materiales (Sadagopan *et ál.*, 2003).

manera que dicha observación no fue concluyente. Concluyeron que el modo de deformación en el contacto chapa-punzón era extremadamente complicado y que era necesario una mayor investigación experimental para elucidar los mecanismos del proceso de deformación.

Demeri (1981b,a) intentó desarrollar unos principios generales para el diseño de los procesos de estampación de chapas (donde existen acciones combinadas de embutición, estirado y doblado) en base al radio del punzón (R), el espesor de la chapa (t) y la carrera del punzón en el instante de carga máxima (H). Sus resultados fueron familias de curvas que relacionan estos tres parámetros, que denominó como curvas RtH (Figura 2.3(a)). Entre otras conclusiones, afirmó que los gradientes de deformación en el espesor de la chapa aumentan los límites de conformado al modificar la condición de inestabilidad plástica y retrasar la formación de una estricción localizada. Además subrayó la necesidad de comprender y valorar la conformabilidad de chapas sujetas a acciones combinadas de tracción y flexión.

Años más tarde, Sadagopan *et ál.* (2003) representaron los resultados de sus ensayos ASBT para varios aceros en gráficas con el desplazamiento del punzón en el instante de carga máxima (H) frente a la relación entre el radio del punzón y el espesor de la chapa (R/t) (Figura 2.3(b)). Comprobaron que H tiene una fuerte dependencia de la relación R/t en valores bajos de ésta, mientras que en valores altos prácticamente es independiente. Basándose en estos resultados, concluyeron que el efecto del doblado en la conformabilidad de la chapa era mínimo a partir de

un cierto valor de R/t . También observaron en la mayoría de los aceros ensayados que la localización del fallo se desplazaba desde la punta del punzón, en valores altos de R/t , a la zona de la chapa fuera del contacto chapa-punzón, en valores bajos de R/t . En cambio, en aceros DP (*dual phase*) el fallo se localizó siempre en la punta del punzón incluso en valores altos de R/t , indicando en estos casos que la flexión, aunque fuera pequeña, seguía influenciando el fallo del material.

Ese mismo año, Tharrett y Stoughton (2003a,b) presentaron los resultados de una serie de ensayos ASBT en chapas de acero, aluminio y latón (estos resultados se analizan en el Capítulo 5). Midieron la deformación principal máxima en ambas superficies de la chapa en el instante del fallo y representaron en gráficas la deformación medida en la cara externa frente a la relación t/R . Al igual que Uko *et ál.* (1977), observaron que en la cara interna la deformación era inicialmente negativa. Estos autores también observaron en sus ensayos que la estricción de la chapa se iniciaba cuando la deformación de la cara interna alcanzaba o era ligeramente superior a la deformación límite de estricción obtenida en ensayos de tracción pura. En base a estas observaciones, propusieron un criterio de fallo al que denominaron *Regla de la Cara Cóncava* (RCC). Según este criterio, la estricción se inicia cuando la deformación longitudinal en la superficie cóncava de la chapa alcanza la deformación límite de conformado en el plano. Otros autores han relacionado la aparición de esta inestabilidad en el espesor con variables del proceso más globales. Así, por ejemplo, Yoshida *et ál.* (2005) han establecido para diferentes aleaciones de aluminio (A5182-O, JIS6061-T4 y JIS6N01-T5) sujetas a estirado con flexión que el fallo aparece cuando la fuerza de tracción en el espesor de la chapa alcanza un máximo. En esta misma línea se encuentran los trabajos de Hora y Tong (2008), donde emplean modificaciones del criterio de máximo esfuerzo principal para predecir el efecto del gradiente de deformaciones en la aparición de la estricción.

Col y Balan (2007) proclamaron la necesidad de considerar los efectos de los gradientes de tensión y deformación en los análisis numéricos mediante elementos finitos. Hasta entonces, dichos gradientes eran menospreciados en los cálculos debido a su complejidad o al elevado coste de computación. Los autores afirmaron que en algunos casos esto podría tener consecuencias importantes. Así, por ejemplo, una simulación mediante elementos finitos de una estampación de chapa puede conducir erróneamente a rechazar su factibilidad porque determinados puntos quedan en la región de fallo en el DLC, cuando en realidad en el DLC no se han considerado el efecto de los gradientes de deformación, de manera que los puntos

de la chapa que teóricamente fallan no lo harán en la práctica porque pueden estar sometidos a una flexión importante. Para explicar la influencia de los gradientes en el espesor, el autor propuso un nuevo concepto de DLC en 3D, o *Superficie Límite de Conformado* (SLC) (Col, 2002, 2005). La idea consistió en generalizar el DLC tradicional (ε_1 frente a ε_2), válido sólo para piezas con una curvatura limitada, introduciendo la influencia de la flexión en un tercer eje, caracterizada por la relación entre el espesor de la chapa y el radio del punzón (t/R). Cuanto mayor es este parámetro, mayor es el gradiente de deformación en el espesor y mayor es la capacidad de conformado de la superficie externa de la chapa. Propusieron una SLC hipotética, cuya forma sólo fue conjeturada mediante una serie de simplificaciones. La influencia del gradiente de deformación se justificó con una teoría muy simple suponiendo el material como una superposición de capas, todas ellas con las mismas propiedades del material base. Según esta teoría, cuando la superficie externa alcanza la deformación crítica, el resto de capas menos deformadas posponen la aparición de la estricción. Los autores sólo propusieron el concepto de SLC para ilustrar el fenómeno y alertar a la comunidad científica sobre la fuerte influencia de los gradientes, ya que calcularlas experimentalmente para cada material podría ser extremadamente difícil y requerir un elevado coste de tiempo.

Trabajos como los anteriormente mencionados de Tharrett y Stoughton (2003a,b) y Col y Balan (2007) han abierto una interesante vía de trabajo en este campo, poniendo de manifiesto la necesidad de trabajar a un nivel mesoscópico, *i.e.* a nivel de la fibra en el espesor de la chapa, para explicar el efecto del gradiente de deformaciones en el fallo. Este punto en particular, y los efectos de los gradientes en el espesor en general, han sido activamente discutidos en los congresos especializados en conformado de chapa de mayor prestigio internacional celebrados recientemente. Entre los principales trabajos se encuentran los publicados en los congresos Numisheet 2008 (Huang *et ál.*, 2008; Kitting *et ál.*, 2008; Stoughton, 2008; Vallellano *et ál.*, 2008), IDDRG 2008 (Emmens y van den Boogaard, 2008), ESAFORM 2009 (Kitting *et ál.*, 2009a; Kruijf *et ál.*, 2009; Morales *et ál.*, 2009; Schleich *et ál.*, 2009b), ESAFORM 2010 (Emmens y van den Boogaard, 2010; Fictorie *et ál.*, 2010; Liewald y Schleich, 2010; Vallellano *et ál.*, 2010) y Metal Forming 2010 (van den Boogaard *et ál.*, 2010; Morales *et ál.*, 2010).

Entre los trabajos más representativos presentados en esta línea cabe destacar los de Stoughton (2008) y Stoughton y Yoon (2010), donde se propone un criterio de predicción de fallo basado en la combinación de modelos propuestos con anterioridad (Stoughton y Zhu, 2004; Stoughton y Yoon, 2005), que es capaz de

diferenciar entre la estricción localizada, el agrietamiento superficial y la fractura dúctil en el espesor. El modelo tiene en cuenta la evolución de las tensiones y deformaciones en el espesor de la chapa y produce predicciones acordes con los resultados experimentales propios y de otros autores en condiciones de tracción uniforme, tracción-flexión y flexión pura.

Kitting *et ál.* (2008, 2009a,b) realizaron un estudio experimental del efecto del radio del punzón en la conformabilidad de chapas de acero de alta resistencia H340LAD de 1,5 mm de espesor (los resultados de estos trabajos se analizan en el Capítulo 5). En un primer trabajo, los autores realizaron una serie de ensayos de Nakazima y ASBT con punzones de radios comprendidos entre 1 y 20 mm (Kitting *et ál.*, 2008). Investigaron la evolución de la deformación en la superficie externa de la chapa hasta la rotura del material, tomando imágenes de los ensayos con un sistema óptico de gran precisión. Para punzones mayores de 7 mm observaron un proceso de estricción localizada previo a la fractura. En estos casos, la deformación en la superficie externa era mayor cuanto menor era el radio del punzón, coincidiendo así con los resultados de los trabajos descritos anteriormente. En cambio, con punzones de radio menor a 7 mm no encontraron una estricción previa a la fractura. Siguiendo la idea de Uko *et ál.* (1977) calcularon la deformación equivalente en un intento de elucidar un criterio de fallo, aunque sin éxito. Al año siguiente, Kitting *et ál.* (2009a) usaron los mismos resultados experimentales para evaluar la Regla de la Cara Cóncava propuesta por Tharrett y Stoughton (2003a,b). Las previsiones fueron aceptables solamente para los ensayos con radios del punzón a partir de 10 mm; para radios menores de 10 mm dicho criterio subestimó la conformabilidad de las probetas. En otro trabajo, los autores ampliaron el estudio de los ensayos mencionados, obtenidos en condiciones de deformación uniaxial, realizando otras dos series de ensayos en condiciones de deformación plana y biaxial (Kitting *et ál.*, 2009b).

En otro estudio experimental del efecto de la flexión, Huang *et ál.* (2008) analizaron los resultados de una serie de ensayos ASBT con 9 punzones de radios comprendidos entre 1 y 25 mm, en cuatro aceros de alta resistencia de 1,6 mm de espesor (Sriram *et ál.*, 2003). El ancho de las chapas fue relativamente grande y se obtuvieron condiciones de deformación plana en la región central de las mismas. Midió la reducción del espesor en el instante del fallo en 3 zonas diferentes de las chapas: en la región de contacto chapa-punzón, en el límite de dicho contacto y en la zona donde la chapa no está en contacto con el punzón. Observaron que se producían 3 tipos de fallo. El tipo I de fallo es la estricción en el límite del

contacto chapa-punzón, muy habitual en procesos de estampación. Encontraron que esto sucedía siempre para valores aproximados de $R/t > 3$, y eventualmente en el rango $1 < R/t < 3$. Propusieron un criterio empírico de fallo I basándose en el trabajo de Hill (1952). El tipo II de fallo también es de estricción, pero sucede en la región de contacto con el punzón, en el rango aproximado $1 < R/t < 3$. Según observaron los autores, este tipo de fallo es el único que puede ser predicho en un DLC haciendo uso de la Regla de la Cara Cóncava de Tharrett y Stoughton (2003a,b). El tipo III de fallo es de fractura sin estricción previa y observaron que sólo ocurre con punzones pequeños, siempre en valores aproximados de $R/t < 1$. Los autores encontraron una relación entre el límite de fractura y el límite de estricción en deformación plana (DLC_0) y propusieron un criterio empírico de fallo III basado en el valor de DLC_0 .

Schleich *et ál.* (2009a,b) y Liewald y Schleich (2010) investigaron los límites de conformado en chapas de aleación de aluminio en condiciones de estirado con flexión. Estos autores estudiaron el efecto de la curvatura y del espesor en la conformabilidad del material y realizaron un intento de obtener un criterio de fallo en deformaciones (Schleich *et ál.*, 2009b). A partir de resultados experimentales de fallo por estricción, obtenidos de ensayos de Nakazima o HBST, y de resultados experimentales de fallo por fractura, obtenidos de ensayos ABST, propusieron una función de interpolación de la deformación límite de fallo para todo el rango de valores del radio del punzón, corregida por una correlación cuadrática entre el espesor de la chapa y el ángulo de doblado. Posteriormente consideraron además el efecto de la anisotropía del material (Liewald y Schleich, 2010).

En otra serie de trabajos se pone de manifiesto que las operaciones de estirado con flexión son inherentemente no proporcionales. Como se ha comentado anteriormente, Uko *et ál.* (1977) y Tharrett y Stoughton (2003a,b) observaron en ensayos ASBT la inversión de la deformación que se produce en la cara interna de la chapa, en contacto con el punzón. Por otro lado, Hotz y Timm (2008) realizaron una serie de ensayos de Nakazima (punzón hemiesférico de 100 mm de diámetro), mostrando en el DLC que el valor de deformación mínima (DLC_0) no se obtiene en condiciones de deformación plana, sino que las curvas de fallo se desplazan a la derecha del DLC sistemáticamente. Observaron que en los primeros instantes de los ensayos el punzón entra en contacto sólo en la región central de la chapa, siendo la deformación biaxial ($\beta > 0$, Figura 2.4). Posteriormente, cuando todo el ancho de la chapa está en contacto con el punzón, la deformación tiende a la relación $\varepsilon_2/\varepsilon_1$ esperada de la geometría de la probeta. Demostraron así que las tra-

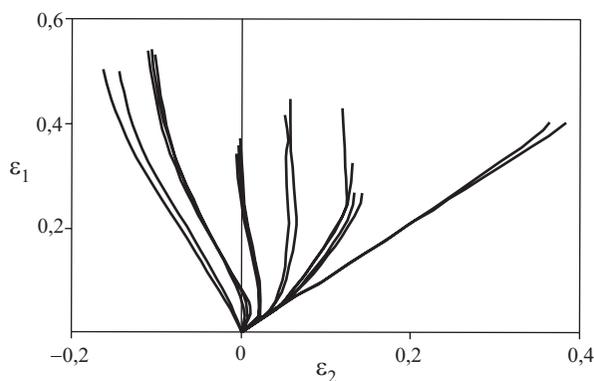


Figura 2.4: Trayectorias de deformación para diferentes relaciones de deformación en ensayos de Nakazima (punzón hemiesférico) (Hotz y Timm, 2008).

yectorias de deformación no son lineales, sino que empiezan con una componente biaxial más o menos pronunciada, como se aprecia en la Figura 2.4.

En la misma línea de investigación anterior, Kruijff *et al.* (2009) realizaron un estudio del efecto de la acción combinada tracción-flexión comparando simulaciones con elementos finitos y un modelo analítico sencillo. Propusieron un criterio de fallo por estricción basado en un punto de bifurcación en la respuesta esfuerzos-deformación (*i.e.* el instante en el que un aumento de la carga produce dos caminos de deformación distintos). Obtuvieron diferencias significativas al comparar caminos de carga simultáneos de tracción-flexión y caminos de carga no proporcionales de tracción con pre-flexión. Ambos resultados numéricos y analíticos indicaron que la acción simultánea de la flexión previene la formación de la estricción en las operaciones de estirado de chapa. A partir de un cierto valor de flexión, los resultados no preveían la aparición de la estricción.

Por último, Emmens y van den Boogaard (2010) y van den Boogaard *et al.* (2010) estudiaron los posibles efectos de la presión de contacto del punzón en la conformabilidad de chapa metálica. Presentaron un modelo analítico muy simple, tomando valores promedio de las variables internas en la sección de la chapa e introduciendo un parámetro corrector en la ecuación de equilibrio, y analizaron los resultados experimentales de ensayos de doblado a 90° de chapas de acero DP (*dual phase*) (Kim *et al.*, 2009; Wagoner *et al.*, 2009) y de ensayos ASBT en chapas de acero de alta resistencia (Kitting *et al.*, 2009b). Concluyeron que el punzón provoca un cambio en el estado tensional en la superficie de contacto chapa-punzón que no puede ser ignorado. Las predicciones se ajustaron bien a los resultados experimen-

tales, pero no aclararon el significado físico del parámetro corrector introducido. Un análisis de las ideas de estos trabajos, incluido una posible explicación física del mencionado parámetro corrector, se expone en el Apartado 4.5.

2.2. Teoría elemental de doblado

La teoría elemental de doblado fue desarrollada durante finales del siglo XIX y la primera mitad del XX para estudiar el comportamiento elasto-plástico de barras, de amplia aplicación en el cálculo de estructuras de edificios y puentes. Esta teoría asume materiales uniformes e isotrópos y está basada en una serie de hipótesis simplificativas. Estas hipótesis y sus principales limitaciones son las siguientes:

1. Durante el doblado, una sección transversal de la barra permanece plana, perpendicular al eje de la barra, y su forma y dimensiones permanecen también inalteradas. Sin embargo, esta hipótesis puede conducir a errores considerables; *e.g.* si la chapa reduce su espesor entonces también disminuye la capacidad de carga de la sección.
2. Las únicas tensiones que aparecen son las longitudinales de tracción o compresión; no hay tensiones transversales o laterales entre las fibras longitudinales de la barra. No obstante, es bien sabido que la tensión lateral en el doblado de una barra de sección cuadrada provoca una curvatura anticlástica que puede llegar a ser apreciable.
3. Supone que la *superficie media* de la chapa, la *superficie neutra* (la que separa las fibras traccionadas de las comprimidas) y la *superficie indeformada* o de deformación neta nula (la que tiene las mismas dimensiones que antes del doblado) coinciden como una sola superficie durante todo el proceso de doblado. Sin embargo, como se describe en el Apartado 2.3, estas tres superficies se mueven de forma diferente debido a que el material se desplaza continuamente hacia la cara convexa de la chapa.

La teoría elemental ha demostrado ser sencilla y adecuada para multitud de aplicaciones en ingeniería. Durante la década de los 40 hubo un gran número de estudios teóricos y experimentales, debido a su amplia aplicación en el conformado plástico de componentes para la industria de fabricación de aviones, en plena expansión. La mayoría de la literatura científica de esta época está relacionada

con la ciencia y la industria de fabricación aeronáuticas. Estos artículos discutían sobre la tecnología de conformado plástico de chapas, placas, paneles y perfiles de forma de varios materiales, y proporcionaban tablas, gráficas y fórmulas semi-empíricas para facilitar su uso en la práctica (Yu y Zhang, 1996).

Debido a las limitaciones originadas por las suposiciones adoptadas, la teoría elemental sólo puede ser aplicada cuando las deformaciones de doblado no son grandes, siendo el radio de curvatura del orden de 4 ó 5 veces el espesor de la chapa (Hill, 1950). No obstante, el análisis del conformado de chapa mediante esta teoría permite introducir una serie de conceptos básicos que serán tratados más exhaustivamente en el siguiente capítulo. En los siguientes subapartados se analiza brevemente la formulación básica de la teoría elemental aplicada a chapas en acciones combinadas de flexión y tracción (Yu y Zhang, 1996), así como los principales trabajos que de dicha teoría se derivan.

2.2.1. Variables en la teoría elemental

Considérese una chapa continua de ancho unitario en la cual se produce una región de doblado cilíndrico a partir de la chapa plana (Figura 2.5). Sea r_m el radio de curvatura de la superficie media de la chapa, θ el ángulo de doblado, M_1 el momento flector y N_1 el esfuerzo axial, ambos esfuerzos por unidad de ancho aplicados en la región doblada de la chapa. Se asume que N_1 actúa en la superficie media de la chapa y que las secciones planas convergen todas en el centro de curvatura.

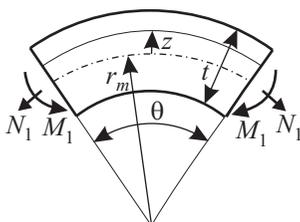


Figura 2.5: Variables en la teoría elemental de doblado.

En general, la dimensión longitudinal de la superficie media cambia si, por ejemplo, la chapa se estira durante el doblado. Así, su longitud inicial l_0 se convierte en $l_m = r_m\theta$ en la chapa doblada. Cualquier otra superficie o fibra, a una cierta

distancia z de la superficie media, se deformará con una longitud:

$$l = (r_m + z)\theta = r_m\theta \left(1 + \frac{z}{r_m}\right) = l_m \left(1 + \frac{z}{r_m}\right) \quad (2.1)$$

La deformación real longitudinal de esta fibra será:

$$\varepsilon_1 = \ln \frac{l}{l_0} = \ln \frac{l_m}{l_0} + \ln \left(1 + \frac{z}{r_m}\right) = \varepsilon_1^N + \varepsilon_1^M \quad (2.2)$$

donde ε_1^N es la deformación de la superficie media o *deformación de membrana* y ε_1^M es la deformación de doblado que depende de z , y donde los índices N_1 y M_1 indican que la deformación se debe al esfuerzo axil y al momento flector, respectivamente. Cuando el radio de curvatura es grande comparado con el espesor de la chapa, la deformación real de doblado se puede aproximar por la deformación ingenieril:

$$\varepsilon_1^M = \ln \left(1 + \frac{z}{r_m}\right) \approx \frac{z}{r_m} \quad (2.3)$$

Se denomina *superficie indeformada* a la superficie cuya deformación longitudinal es nula ($\varepsilon_1 = 0$), *i.e.* la superficie cuya longitud coincide con la inicial. Esta superficie coincide con la superficie media de la chapa en ausencia de esfuerzo axil y se desplaza hacia el centro de curvatura conforme se aumenta la tracción. En acciones combinadas de tracción-flexión, el alargamiento debido a la tracción en la superficie indeformada compensa el acortamiento debido al flector. Su posición se obtiene fácilmente de las expresiones anteriores.

Se denomina *superficie neutra* a la superficie donde no se produce un incremento instantáneo de deformación ($d\varepsilon_1 = 0$), siendo la tensión longitudinal nula ($\sigma_1 = 0$). Por encima de la superficie neutra las fibras están traccionadas y por debajo están comprimidas. Por la hipótesis de tensión plana en el espesor, la superficie neutra coincide con la superficie indeformada, *i.e.* ni se alarga ni se acorta. Como se discute más adelante, ambas superficies neutra e indeformada no coinciden si se consideran las tensiones transversales en el espesor ($\sigma_3 \neq 0$).

Las condiciones de equilibrio de la tensión σ_1 en el espesor con el axil y el flector se obtienen de:

$$N_1 = \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_1 dz \quad (2.4)$$

$$M_1 = \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_1 z dz \quad (2.5)$$

Existe una tercera ecuación de equilibrio relativa a la resultante radial del axil. En las operaciones de estirado con punzón, esta resultante se equilibra con la

presión que ejerce el punzón en la cara interna de la chapa. Sin embargo, como los radios de curvatura debe ser grandes para que las hipótesis adoptadas sean válidas, dicha resultante se puede despreciar.

2.2.2. Flexión sin tracción

En un proceso de flexión pura, la deformación ingenieril viene dada por:

$$\varepsilon_1 = \frac{z}{r_m} = \kappa z \quad (2.6)$$

siendo $\kappa = 1/r_m$ la curvatura de la superficie neutra, que coincide con las superficie media e indeformada. En general, los materiales exhiben un comportamiento elasto-plástico con endurecimiento. Es habitual obtener las relaciones tensión-deformación mediante leyes sencillas, *e.g.* rígido-plástico perfecto, elasto-plástico perfecto o rígido-plástico con endurecimiento. La elección de un modelo concreto del material dependerá de la magnitud de la deformación del proceso. Considérese en primer lugar un material elasto-plástico perfecto, de comportamiento idéntico a tracción y a compresión:

$$\sigma_1 = \begin{cases} E' \varepsilon_1 & \text{si } |\varepsilon_1| \leq \sigma_0/E' \\ \pm \sigma_0 & \text{si } |\varepsilon_1| > \sigma_0/E' \end{cases} \quad (2.7)$$

siendo $E' = E$ en barras sometidas a tracción pura y $E' = E/(1 - \nu^2)$ en chapas en condiciones de deformación plana; E es el módulo de elasticidad del material y σ_0 es el límite elástico.

En una flexión pura, la distribución de tensión debe satisfacer:

$$\int_{-t/2}^{t/2} \sigma_1 dz = 0 \quad , \quad \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_1 z dz = M_1 \quad (2.8)$$

siendo t el espesor de la pieza. Teniendo en cuenta la simetría a tracción y compresión en el comportamiento del material, la primera de las ecuaciones anteriores se satisface y la segunda puede expresarse como:

$$2 \int_0^{t/2} \sigma_1 z dz = M_1 \quad (2.9)$$

Esta expresión se puede utilizar para determinar el momento flector en función de la curvatura de la barra ($M_1 = \Phi(\kappa)$) o viceversa ($\kappa = \Phi^{-1}(M_1)$). Dependiendo del estado elasto-plástico en el que se encuentran las fibras del material en el instante de doblado, se pueden tener las siguientes situaciones:

1. Cuando toda la sección está en estado elástico ($\sigma_1 = E'\kappa z$), el momento flector se calcula como:

$$M_1 = 2E'\kappa \int_0^{t/2} z^2 dz = \frac{E'\kappa t^3}{12} = E'I\kappa \quad (2.10)$$

siendo $I = t^3/12$ el segundo momento de inercia de la sección por unidad de ancho de la pieza.

2. Cuando la fibra exterior está plastificada a tracción ($\sigma_0 = E'\kappa t/2$) y la interior a compresión se obtienen los denominados *curvatura elástica máxima* y *momento flector elástico máximo*, definidos por:

$$\kappa_e = \frac{2\sigma_0}{E't} \quad , \quad M_e = E'I\kappa_e = \frac{\sigma_0 t^2}{6} \quad (2.11)$$

3. Si el material tiende a tener una tensión constante σ_c cuando la deformación es suficientemente grande, entonces cuando la curvatura de la barra doblada es suficientemente grande el momento flector tiende también a un valor constante:

$$M_p = \lim_{\kappa \rightarrow \infty} M_1 = 2\sigma_c \int_0^{t/2} z dz = \frac{\sigma_c t^2}{4} \quad (2.12)$$

siendo M_p el *momento flector plástico límite*, que representa el máximo momento flector que el material puede soportar. La relación:

$$\zeta = \frac{M_p}{M_e} \quad (2.13)$$

depende de la forma de la sección y de las propiedades del material (relación σ_c/σ_0). Si el material es elasto-plástico perfecto entonces $\sigma_c = \sigma_0$ y ζ se denomina factor de forma de la sección, que toma el valor 3/2 en secciones rectangulares.

4. El momento flector correspondiente a un estado en el que coexisten en la sección fibras en estado elástico y fibras en estado plástico viene dado por:

$$M_1 = 2E'\kappa \int_0^c z^2 dz + 2\sigma_0 \int_c^{t/2} z dz = \frac{\sigma_0 t^2}{4} - \frac{\sigma_0^3}{3E'^2 \kappa^2} \quad (2.14)$$

siendo c la distancia de la línea neutra a la primera fibra plastificada en la sección de la pieza.

Tomando las variables adimensionales $m_1 = M_1/M_e$ y $\phi = \kappa/\kappa_e$, la relación flector-curvatura puede ser expresada como:

$$m_1 = \begin{cases} \phi & \text{si } \phi \leq 1 \\ \frac{3}{2} - \frac{1}{2\phi^2} & \text{si } \phi > 1 \end{cases} \quad (2.15)$$

o su función inversa:

$$\phi = \begin{cases} m_1 & \text{si } 0 \leq m_1 \leq 1 \\ \frac{1}{\sqrt{3 - 2m_1}} & \text{si } 1 \leq m_1 \leq \frac{3}{2} \end{cases} \quad (2.16)$$

Estas relaciones flector-curvatura se representan en la Figura 2.6 con línea continua. Cuando $M_1 \rightarrow M_p$ ($m_1 = M_p/M_e \rightarrow 3/2$) entonces $\phi \rightarrow \infty$, lo que implica que la curvatura de una barra de material elasto-plástico perfecto aumentará sin límite cuando el momento flector aplicado alcance el momento flector plástico límite M_p .

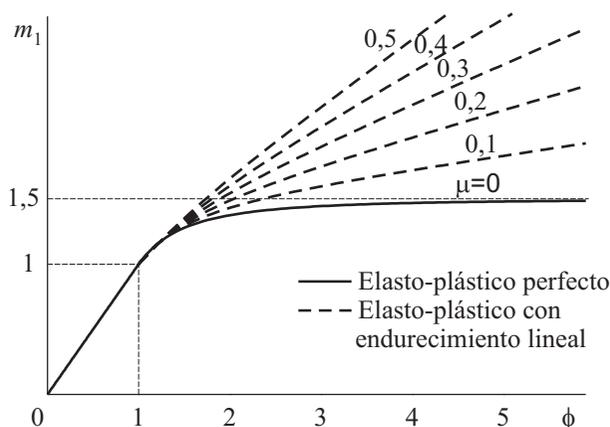


Figura 2.6: Relación flector-curvatura en un material elasto-plástico perfecto y elasto-plástico con endurecimiento lineal.

En base a esta formulación, Johnson y Yu (1981d,b) estudiaron la recuperación elástica de placas rectangulares sometidas a flexión pura, asumiendo un material elasto-plástico perfecto. La formulación fue ampliada al caso de flexión biaxial, M_x y M_y , obteniendo así dos radios de curvatura, $r_{m,x}$ y $r_{m,y}$, siendo x e y las dos direcciones principales en el plano de la placa. En el análisis teórico asumieron que ambos momentos flectores se aplican de forma proporcional, usando el criterio

de plastificación de von Mises, o de forma no proporcional usando el de Tresca. Los autores indican que los resultados son válidos para deflexiones del orden del espesor de la placa.

Si se considera un comportamiento elasto-plástico con endurecimiento lineal, con una pendiente E_p en la zona plástica de la curva tensión-deformación, se obtiene la siguiente relación adimensional flector-curvatura (Yu y Zhang, 1996; Johnson y Yu, 1981a) (Figura 2.6):

$$\frac{1}{\phi^2} - \mu \left(2\phi - 3 + \frac{1}{\phi^3} \right) = 3 - 2m_1 \quad (2.17)$$

siendo $\mu = E_p/E'$. Esta expresión muestra cómo el momento flector necesario para doblar el material a una curvatura determinada aumenta al incrementar el endurecimiento por deformación plástica. Si el material no exhibe endurecimiento por deformación ($\mu = 0$), entonces la Ecuación (2.17) se reduce a las expresiones dadas en (2.15) y (2.16).

Johnson y Yu (1981a,c) realizaron un análisis análogo del comportamiento elasto-plástico con endurecimiento lineal para estudiar la recuperación elástica en placas rectangulares y circulares sometidas a flexión biaxial. Al igual que en los anteriores trabajos mencionados, los resultados fueron válidos para deflexiones del orden del espesor de la placa.

En una línea diferente, Chakrabarty *et ál.* (2001) señalaron la necesidad de utilizar modelos de comportamiento elasto-plástico rigurosos. Estos autores realizaron un análisis del doblado en condiciones de deformación plana, considerando la anisotropía del material y haciendo uso del criterio cuadrático de fluencia propuesto por Hill (1948). Concluyeron indicando que la teoría elemental de doblado sobreestima significativamente el momento flector necesario para producir una curvatura determinada.

2.2.3. Flexión con tracción

Considérese de nuevo el caso de un material elasto-plástico perfecto. Según la combinación de axil y flector, la distribución de tensiones longitudinales se puede corresponder con uno de los tres patrones siguientes (Figura 2.7):

1. Una distribución de tensiones completamente elástica (patrón E), es decir, toda la sección de la barra están en estado elástico.
2. Una distribución de tensiones plástica primaria (patrón P_I), en la cual hay una plastificación parcial de la barra por encima de la línea neutra.

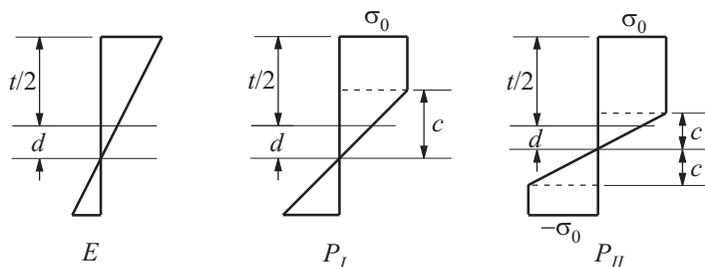


Figura 2.7: Patrones de distribución de tensiones en el espesor en un material elasto-plástico perfecto: (E) completamente elástico; (P_I) plástico primario; y (P_{II}) plástico secundario.

3. Una distribución de tensiones plástica secundaria (patrón P_{II}), en la cual se ha producido la plastificación a ambos lados de la línea neutra, quedando un región elástica en el interior de la barra.

El *axil elástico máximo* se define como el esfuerzo de tracción pura que provoca la plastificación del material en toda la sección:

$$N_e = \sigma_0 t \quad (2.18)$$

El conjunto de variables adimensionales, $\phi = \kappa/\kappa_e$, $m_1 = M_1/M_e$ y $\gamma = c/(t/2)$, se completa con las siguientes:

$$n_1 = \frac{N_1}{N_e} \quad , \quad \delta = \frac{d}{t/2} \quad (2.19)$$

siendo d la distancia de la línea neutra al plano medio de la barra (Figura 2.7). En flexión pura se cumple $\delta = 0$, y en flexión y tracción combinadas se tiene que $\delta > 0$, lo que implica que el movimiento de la línea neutra se debe a la contribución del esfuerzo axil en el proceso de deformación de la pieza. Se puede establecer una relación entre los parámetros δ y γ , y también entre los esfuerzos m_1 y n_1 a través de las integrales correspondientes. De esta forma, las condiciones de transición entre los tres patrones de distribución de tensiones definidos anteriormente, que en función de δ y γ se expresan como:

- $\gamma = 1 + \delta$: transición entre los patrones E y P_I
- $\gamma = 1 - \delta$: transición entre los patrones P_I y P_{II}
- $\gamma = 0$: condición límite del patrón P_{II} , correspondiente al caso de sección completamente plastificada

pueden ser también expresados en términos de m_1 y n_1 como sigue:

$$\begin{aligned} m_1 &= 1 - n_1 : && \text{transición } E - P_I \\ m_1 &= (1 - n_1)(1 + 2n_1) : && \text{transición } P_I - P_{II} \\ m_1 &= 2(1 - n_1^2)/3 : && \text{condición límite de } P_{II} \end{aligned}$$

Los rangos de cada patrón de tensiones en el espesor se pueden ilustrar gráficamente en el plano (δ, γ) (Figura 2.8) o en el plano (m_1, n_1) (Figura 2.9), conocido también como *diagrama MN* (Yu y Johnson, 1982; Yu y Zhang, 1996). En la Figura 2.9 se muestran también algunas distribuciones de tensiones típicas. La curva discontinua en ambas figuras se obtiene de $\delta = 1$ y representa la transición de un estado tensional de signos opuestos (tracción y compresión) en las dos caras de la barra a un estado tensional del mismo signo (tracción) en toda la sección.

La relación flector-curvatura en presencia de un esfuerzo de tracción, para un material elasto-plástico perfecto, se obtiene considerando los distintos patrones de tensiones posibles como:

$$m_1 = \begin{cases} \phi & \text{si } \phi \leq 1 - n_1 \\ (1 - n_1) \left(3 - 2\sqrt{\frac{1 - n_1}{\phi}} \right) & \text{si } 1 - n_1 \leq \phi \leq \frac{1}{1 - n_1} \\ \frac{3}{2}(1 - n_1^2) - \frac{1}{2\phi^2} & \text{si } \phi \geq \frac{1}{1 - n_1} \end{cases} \quad (2.20)$$

o su función inversa:

$$\phi = \begin{cases} m_1 & \text{si } 0 \leq m_1 \leq 1 - n_1 \\ \frac{4(1 - n_1)}{\left(3 - \frac{m_1}{1 - n_1} \right)^2} & \text{si } 1 - n_1 \leq m_1 \leq (1 - n_1)(1 + 2n_1) \\ \frac{1}{\sqrt{3(1 - n_1^2) - 2m_1}} & \text{si } (1 - n_1)(1 + 2n_1) \leq m_1 \leq \frac{3}{2}(1 - n_1^2) \end{cases} \quad (2.21)$$

La influencia del axil en el doblado de un material elasto-plástico perfecto se puede analizar haciendo uso de las expresiones (2.20) y (2.21). La Figura 2.11 muestra la relación flector-curvatura bajo distintas condiciones de axil constante, siempre menor al axil elástico máximo ($n_1 < 1$) ya que lo contrario es imposible en un material plástico perfecto. En ausencia de tracción ($n_1 = 0$), la curva se corresponde con el doblado simple representado anteriormente en la Figura 2.6. En este caso la distribución de tensiones en el espesor evoluciona desde el patrón E al patrón P_{II} . Al aumentar el axil, el flector necesario para obtener una determinada curvatura disminuye. También disminuye el flector elástico máximo, M_e , instante

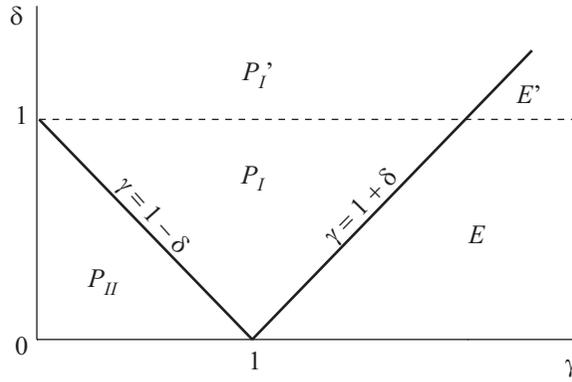


Figura 2.8: Patrones de tensiones en el espesor de una barra de material elasto-plástico perfecto, en el plano (δ, γ) .

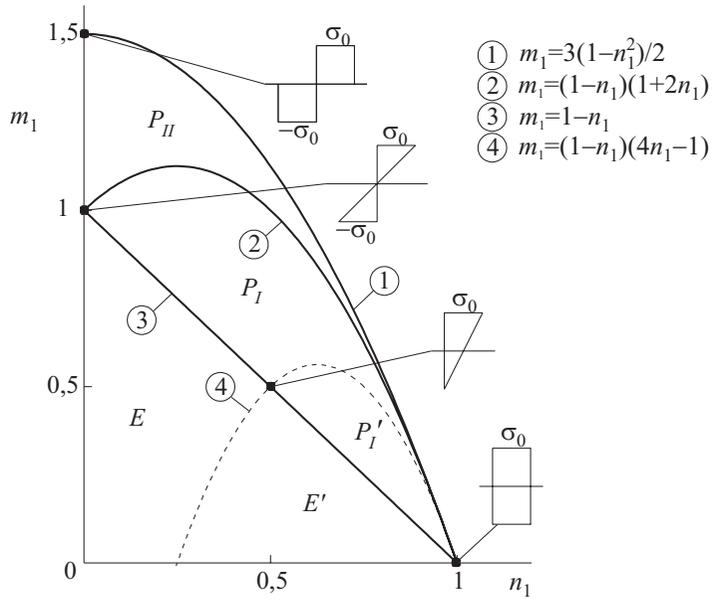


Figura 2.9: Patrones de tensiones en el espesor de una barra de material elasto-plástico perfecto, en el plano (m_1, n_1) o diagrama MN.

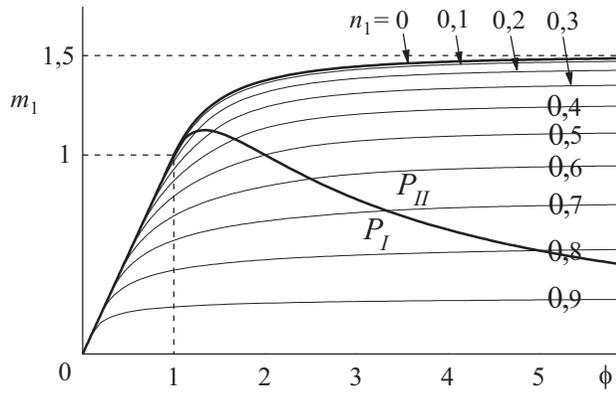


Figura 2.10: Influencia de la tracción en la relación flector-curvatura en un material elasto-plástico perfecto.

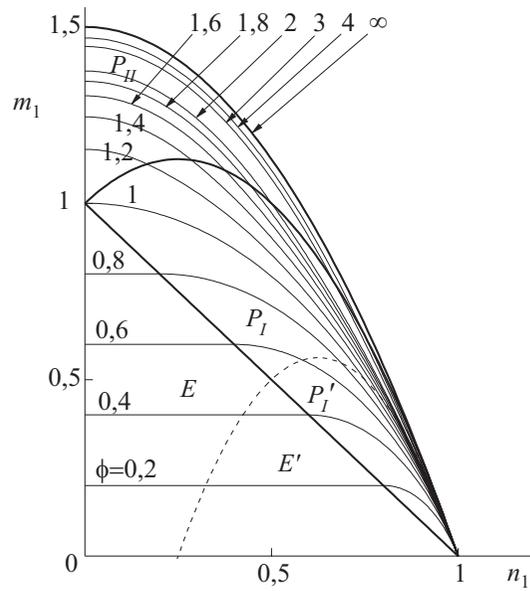


Figura 2.11: Curvas de curvatura constante en el diagrama MN de un material elasto-plástico perfecto.

en el que la curva $m_1 - \phi$ deja de evolucionar linealmente (transición $E-P_I$). En la figura también se aprecia cómo el instante en el que la superficie cóncava de la barra plastifica a compresión (transición P_I-P_{II}) se retrasa al incrementar el axil.

Otro caso distinto es la evolución axil-flector manteniendo la curvatura de la barra constante. Este caso es de especial relevancia porque permite simular un proceso de estirado de chapa con pre-flexión, que será modelado con mayor rigor en el siguiente capítulo. La Figura 2.11 muestra las curvas de curvatura constante en el diagrama MN, obtenidas de (2.20). Como puede observarse en esta figura, si la flexión inicial aplicada es inferior a su valor límite elástico ($m_1 < 1$ y $\phi < 1$), ésta se mantiene constante al ir aumentando la tracción hasta que se produce la plastificación de todo el material (transición $E-P_I$). A partir de ese instante la flexión necesaria para mantener constante la curvatura debe disminuir al mismo tiempo que aumenta la tracción. En cambio, si la flexión inicial aplicada es superior a su valor límite elástico ($m_1 > 1$ y $\phi > 1$, habiéndose producido la transición $E-P_{II}$ en $m_1 = 1$ y $\phi = 1$), ésta debe disminuirse inmediatamente al iniciarse la tracción. En esta situación, la secuencia completa de patrones de tensiones en el espesor es $E-P_{II}-P_I$. Nótese que todas las curvas pueden evolucionar hasta alcanzar el axil elástico máximo, en cuyo caso el flector debe ser nulo.

Por otro lado, como es bien sabido, la presencia de esfuerzos de tracción en procesos de doblado de materiales metálicos tiene un efecto beneficioso en la recuperación elástica. En este sentido, Yu y Johnson (1982) examinaron la influencia de la tracción y de la recuperación elástica en el doblado de un material elasto-plástico perfecto, haciendo uso de la formulación anterior. Dicha formulación les permitió abordar el estudio de diversos casos, como el de una barra en ménsula sometida a una carga concentrada en su extremo libre, o el inicio del doblado de una placa fijada libremente en sus extremos y aplicando presión en su zona central.

Siguiendo la metodología anterior, El-Domiaty y Shabaik (1984) ampliaron el análisis del efecto de la tracción en procesos de doblado al caso de materiales con endurecimiento por deformación en condiciones de deformación plana. El comportamiento plástico fue modelado mediante la ley de Hollomon:

$$\sigma_1 = K \varepsilon_1^n \quad \text{si } |\varepsilon_1| \leq \sigma_0/E' \quad (2.22)$$

Así, los tres patrones posibles de distribución de tensiones en el espesor (E , P_I y P_{II}) tienen ahora la forma esquemática representada en la Figura 2.12. Las condiciones de transición entre los tres patrones de distribución de tensiones, en términos de δ y γ , son las mismas que las obtenidas en el apartado anterior. Adicionalmente, El-Domiaty y Shabaik propusieron en su análisis una condición límite

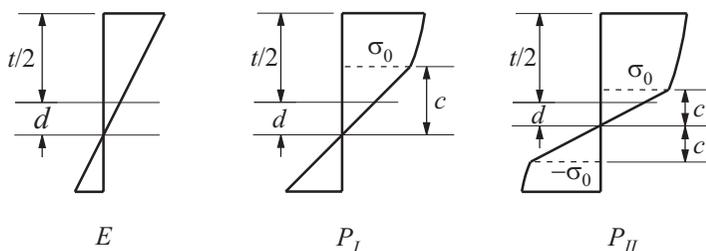


Figura 2.12: Patrones de distribución de tensiones en el espesor en un material elasto-plástico con endurecimiento: (E) completamente elástico; (P_I) plástico primario; y (P_{II}) plástico secundario.

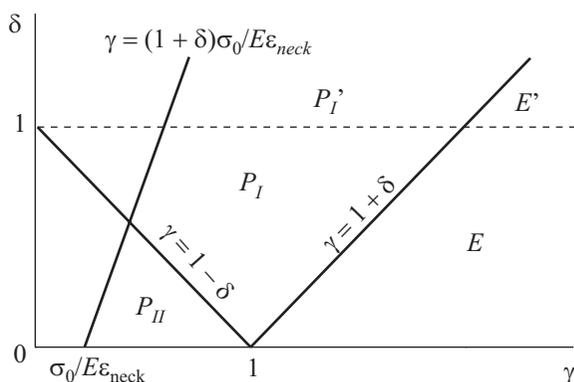


Figura 2.13: Patrones de tensiones en el espesor de material elasto-plástico con endurecimiento, en el plano (δ, γ) .

de conformado o criterio de fallo por estricción: cuando la superficie cóncava alcance la deformación límite de estricción (ε_{neck}). Esta condición puede ser expresada como:

$$\gamma = (1 + \delta) \frac{\sigma_0}{E\varepsilon_{neck}} \quad (2.23)$$

La Figura 2.13 muestra este límite de conformabilidad en el espacio (δ, γ) . Se define de esta manera una región de fallo comprendida entre el límite de fallo y la condición límite de P_{II} ($\gamma = 0$, sección completamente plastificada).

Las expresiones integrales de axil y flector, con el modelo considerado de comportamiento elástico lineal y plástico con endurecimiento, pueden ser resueltas analíticamente. Así, se obtienen expresiones analíticas de los esfuerzos adimensionales m_1 y n_1 en función de los parámetros geométricos δ y γ y de las propiedades del material. Por simplicidad, dichas expresiones no se muestran en este trabajo y

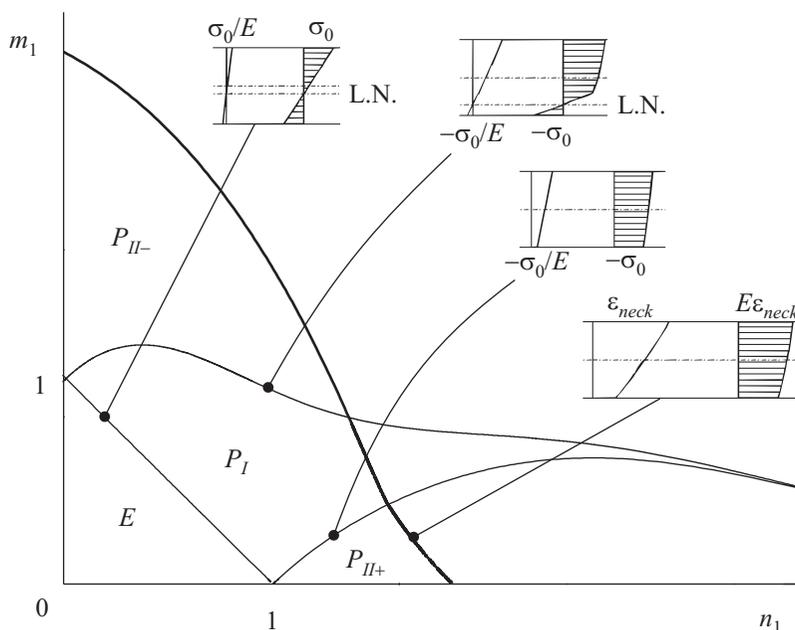


Figura 2.14: Diagrama MN en un material elasto-plástico con endurecimiento.

pueden ser consultadas en el trabajo de El-Domiatty y Shabaik (1984). Estas expresiones permiten construir el diagrama MN de la Figura 2.14, donde se muestran de forma esquemática los rangos de cada patrón de tensiones de un material elasto-plástico con endurecimiento, así como algunas distribuciones de deformaciones y tensiones en puntos de transición entre patrones.

La Figura 2.14 muestra el patrón de tensiones P_{II} en dos regiones diferentes: una representa la condición de plasticación a ambos lados de la línea neutra (L.N.) con signos diferentes (tracción y compresión, P_{II-}) y la otra representa la condición de plasticación a tracción en toda la sección (P_{II+}). Esta última región queda confinada al punto (1,0) si el material no exhibe endurecimiento por deformación, como muestra el diagrama MN de la Figura 2.9.

El rango de valores m_1 - n_1 a la izquierda de la curva de fallo de la Figura 2.14, de trazo más grueso, representa las combinaciones axil-flector seguras, *i.e.* que no producen el fallo del material. Como se aprecia en este diagrama MN, la condición límite de conformado propuesta por El-Domiatty y Shabaik puede alcanzarse cuando el gradiente de tensiones presenta 3 patrones diferentes: P_{II-} , P_I y P_{II+} . Sin embargo, la estricción es un modo de fallo típico de procesos

donde los esfuerzos de tracción predominan sobre los de flexión, de manera que no puede producirse cuando predominan los esfuerzos de flexión y existen tensiones de compresión importantes. Según esta idea, la estricción sólo podría producirse cuando el material presenta un patrón de tensiones P_{II+} . Parece claro, por tanto, que el criterio propuesto por los autores citados no resulta adecuado para modelar el fallo por estricción.

La curvatura bajo acciones combinadas tracción-flexión se calcula fácilmente mediante la relación $\phi = 1/\gamma$. Un análisis del efecto del endurecimiento por deformación permite obtener la misma conclusión que en el caso del material plástico perfecto: el esfuerzo axial reduce el momento flector necesario para conformar una material hasta obtener un radio determinado.

En un trabajo posterior, El-Domiaty *et ál.* (1996) estudiaron la conformabilidad de una serie de 12 chapas de acero y de aleaciones de aluminio en condiciones de deformación plana, haciendo uso de un modelo matemático para la simulación de procesos de estirado con punzones de forma (El-Domiaty, 1990; El-Megharbel *et ál.*, 1990). Presentaron diagramas MN para cada uno de los materiales analizados. También estudiaron en detalle la recuperación elástica y las tensiones residuales en el espesor. Concluyeron que la tracción disminuye la recuperación elástica en todos los casos y que el efecto es mayor en las aleaciones de aluminio. Según los autores, las tensiones residuales dependen fuertemente de los parámetros de carga.

En un plano algo más matemático se deben destacar también los trabajos de Triantafyllidis y Samanta (1986) para materiales isótropos y de Chen y Gerdeen (1989) para anisótropos, los cuales presentan una teoría más elaborada de láminas con grandes deformaciones para abordar el modelado del efecto de la curvatura del punzón.

En la actualidad, algunas investigaciones sobre el efecto de la flexión en el conformado de chapa siguen estando basadas en la teoría elemental del doblado de barras. Un ejemplo es el trabajo de Kruijff *et ál.* (2009) sobre el fallo en condiciones de tracción-flexión, anteriormente mencionado, en el que se asumió la ley de Swift para un material rígido-plástico con endurecimiento y el criterio de plastificación de von Mises.

2.3. Teoría matemática de doblado plástico

El mecanismo de deformación de la teoría elemental del apartado anterior difiere significativamente del planteado en la denominada *teoría matemática de doblado plástico*. Según esta teoría matemática, durante el proceso de doblado (sin tracción) la línea o superficie neutra se desplaza hacia la cara cóncava de la chapa doblada y el espesor de la chapa disminuye si el material tiene un comportamiento de endurecimiento por deformación. Esto hace que la teoría elemental sea menos precisa y se aplique solamente cuando el doblado que sufre la chapa es pequeño. Las limitaciones de la teoría elemental son debidos a las hipótesis simplificativas que adopta (véase el Apartado 2.2).

A mediados del siglo XX, al mismo tiempo que hubo un desarrollo significativo en la teoría de la plasticidad, los investigadores prestaron más atención a estas limitaciones de la teoría elemental de doblado, realizando análisis más precisos para poder solventarlos. Hill (1950) planteó un análisis para el doblado plástico de chapas en condiciones de deformación plana ($\varepsilon_2 = 0$) en el que consideraba las tensiones transversales en el espesor (σ_3). Dicho análisis constituye la base de la teoría matemática del doblado plástico y permite obtener soluciones más exactas que la teoría elemental.

Los siguientes subapartados examinan el doblado de chapa con radios pequeños mediante la formulación de Hill. Se asumen grandes deformaciones plásticas y un material rígido-plástico. Se analiza la influencia del endurecimiento por deformación, el efecto de la tracción en el proceso de doblado y el movimiento de las fibras en el espesor de la chapa, manifestando las diferencias entre las superficies media, neutra e indeformada. También se exponen los trabajos más relevantes en el conformado de chapa que utilizan y amplían esta teoría matemática de doblado.

2.3.1. Tensiones en el doblado plástico perfecto

Cuando la chapa se somete a unos esfuerzos de flexión pura en sus extremos, una porción elemental de la chapa se deforma como muestra la Figura 2.15. Debido a la simetría axial de la deformación, se pueden despreciar las tensiones cortantes en los extremos de la porción elemental y las tensiones longitudinal y transversal (σ_1 y σ_3) dependen solamente del radio de curvatura (r). Si el radio de curvatura de la chapa deformada es menor de 4 ó 5 veces el espesor de la chapa, las tensiones transversales (σ_3) no se deben despreciar.

La ecuación de equilibrio radial de la porción elemental de la Figura 2.15 viene

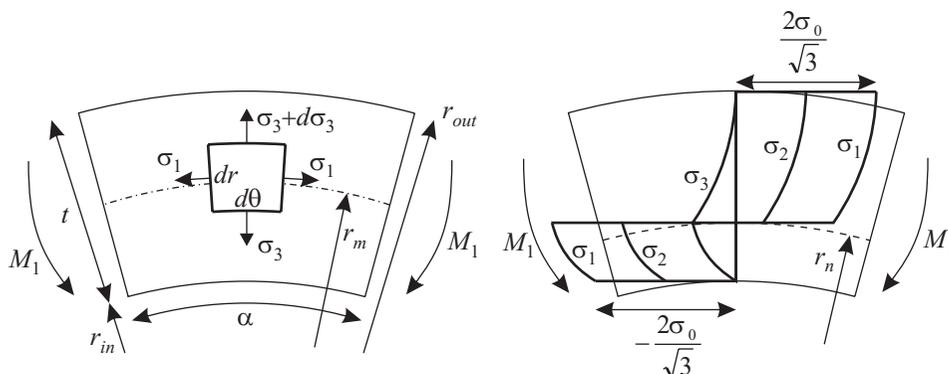


Figura 2.15: Distribución de tensiones en el doblado de una chapa de material rígido-plástico perfecto.

dada por:

$$\frac{d\sigma_3}{dr} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{r} \quad (2.24)$$

Para poder obtener una solución sencilla, Hill asumió un material rígido-plástico perfecto:

$$\sigma_{eq} = \pm\sigma_0 \quad (2.25)$$

siendo σ_{eq} la tensión equivalente, y el criterio de plastificación de von Mises, que en condiciones de deformación plana se expresa como:

$$\sigma_{eq} = \frac{\sqrt{3}}{2} |\sigma_1 - \sigma_3| \quad (2.26)$$

Hill define la *superficie neutra* como la fibra cuyo incremento de deformación plástica es nulo ($d\varepsilon_1 = 0$). Por encima de la superficie neutra las fibras están traccionadas y por debajo de la superficie neutra las fibras están comprimidas. En el caso de un material rígido-plástico perfecto, el radio de curvatura de la superficie neutra (r_n) coincide con la fibra donde se produce la discontinuidad en tensiones. Usando las ecuaciones (2.24), (2.25) y (2.26) e integrando se obtiene:

$$\sigma_3 = \begin{cases} \frac{2\sigma_0}{\sqrt{3}} \ln \frac{r}{r_{out}} & \text{si } r_n \leq r \leq r_{out} \\ -\frac{2\sigma_0}{\sqrt{3}} \ln \frac{r}{r_{in}} & \text{si } r_{in} \leq r \leq r_n \end{cases} \quad (2.27)$$

La posición de la superficie neutra se obtiene al garantizar la continuidad de las tensiones transversales en el espesor. Así, igualando los dos términos de (2.27)

se obtiene:

$$r_n = \sqrt{r_{in}r_{out}} \quad (2.28)$$

Como se puede observar, el radio de la superficie neutra se corresponde con la media geométrica de los radios de curvatura de las superficies interior y exterior de la chapa. De esta expresión se deduce que la superficie neutra no coincide con la superficie media de la chapa, sino que está más cerca de la cara interior que de la exterior.

Las tensiones longitudinales se obtienen de (2.25), (2.26) y (2.27):

$$\sigma_1 = \begin{cases} \frac{2\sigma_0}{\sqrt{3}} \left(1 - \ln \frac{r}{r_{out}}\right) & \text{si } r_n \leq r \leq r_{out} \\ -\frac{2\sigma_0}{\sqrt{3}} \left(1 + \ln \frac{r}{r_{out}}\right) & \text{si } r_{in} \leq r \leq r_n \end{cases} \quad (2.29)$$

Las distribuciones de tensiones σ_1 , σ_3 y $\sigma_2 = (\sigma_1 + \sigma_3)/2$ en el espesor de la chapa, así como la posición de la fibra neutra (r_n) se muestran en la Figura 2.15.

Se puede comprobar fácilmente que el axil es nulo haciendo uso de la ecuación de equilibrio (2.24):

$$\int_{r_{in}}^{r_{out}} \sigma_1 dr = \int_{r_{in}}^{r_{out}} \frac{d}{dr}(r \sigma_3) dr = 0 \quad (2.30)$$

El momento flector por unidad de longitud en el ancho de la chapa se calcula como:

$$M_1 = \int_{r_{in}}^{r_{out}} \sigma_1 r dr = \frac{2\sigma_0}{\sqrt{3}} \frac{(r_{out} - r_{in})^2}{4} = \frac{\sigma_0 t^2}{2\sqrt{3}} \quad (2.31)$$

donde $t = r_{out} - r_{in}$ es el espesor de la chapa.

2.3.2. Deformaciones en el doblado plástico perfecto

Los desplazamientos deben ser consistentes con la distribución de tensiones, *i.e.* alargamiento longitudinal por encima de la superficie neutra y acortamiento por debajo. Una fibra de longitud inicial l_0 forma, en un cierto instante durante el proceso de doblado, un arco de ángulo α . Cuando el doblado se incrementa, α aumenta una cantidad $d\alpha$. El vector de desplazamientos correspondiente tiene una componente longitudinal $u_1 d\alpha$ y una componente transversal $u_3 d\alpha$. La compatibilidad entre las deformaciones y los desplazamientos viene dada por las expresiones:

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{r} \left(u_3 + \frac{\partial u_1}{\partial r} \right) \quad , \quad \varepsilon_3 = \frac{\partial u_3}{\partial \theta} \quad , \quad \gamma_{13} = \frac{1}{r} \frac{\partial u_3}{\partial \theta} + \frac{\partial u_1}{\partial r} - \frac{u_1}{r} \quad (2.32)$$

Dado que se desprecia la deformación elástica, la incompresibilidad del material en deformación plana establece que se debe cumplir $d\varepsilon_1 + d\varepsilon_3 = 0$. Sustituyendo en la expresión anterior se obtiene la ecuación diferencial:

$$\frac{\partial u_3}{\partial \theta} + \frac{u_3}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_1}{\partial \theta} = 0 \quad (2.33)$$

Fijando el origen de coordenadas en el centro de curvatura de la chapa y teniendo en cuenta la simetría axial, la ecuación anterior puede ser integrada:

$$u_1 = \frac{r\theta}{\alpha} \quad , \quad u_3 = -\frac{1}{2\alpha} \left(r + \frac{r_n^2}{r} \right) \quad (2.34)$$

donde la constante de integración se obtiene al considerar el radio de la superficie neutra, r_n . Si el ángulo α se interpreta como un parámetro que mide el tiempo, las expresiones (2.34) representan un campo de velocidades. Como se desprende de estas expresiones, las secciones permanecen planas, ya que u_1 es proporcional a r , y las fibras en el espesor de la chapa permanecen cilíndricas, dado que u_3 depende sólo de r . Sustituyendo (2.34) en (2.32) se obtiene:

$$d\varepsilon_1 = -d\varepsilon_3 = \left(1 - \frac{r_n^2}{r^2} \right) \frac{d\alpha}{2\alpha} \quad , \quad d\gamma_{13} = 0 \quad (2.35)$$

Como se puede comprobar, las deformaciones longitudinales son de alargamiento por encima de la superficie neutra y de acortamiento por debajo:

$$\begin{aligned} d\varepsilon_1 &> 0 & \text{si } r > r_n \\ d\varepsilon_1 &< 0 & \text{si } r < r_n \end{aligned} \quad (2.36)$$

La variación de los radios de curvatura en las superficies interior y exterior de la chapa se obtiene del campo de velocidades (2.34) como:

$$dr_{in} = - \left(r_{in} + \frac{r_n^2}{r_{in}} \right) \frac{d\alpha}{2\alpha} = -(r_{in} + r_{out}) \frac{d\alpha}{2\alpha} \quad (2.37)$$

$$dr_{out} = - \left(r_{out} + \frac{r_n^2}{r_{out}} \right) \frac{d\alpha}{2\alpha} = -(r_{out} + r_{in}) \frac{d\alpha}{2\alpha} \quad (2.38)$$

donde se ha tenido en cuenta (2.28). La variación del espesor durante el proceso de doblado rígido-plástico perfecto será entonces nula:

$$\frac{dt}{t} = - \left(1 - \frac{r_n^2}{r_{out}r_{in}} \right) \frac{d\alpha}{2\alpha} = \frac{dr_{out} - dr_{in}}{t} = 0 \quad (2.39)$$

Como t permanece constante, el momento flector dado en (2.31) también permanece constante durante el doblado. Esto es así porque se ha supuesto el material

como plástico perfecto. Por el contrario, si se tiene en cuenta el endurecimiento por deformación del material, entonces será necesario aumentar el momento flector durante el proceso de doblado y, al mismo tiempo, el espesor de la chapa disminuirá.

Tomando de nuevo la porción de chapa de longitud inicial l_0 y aplicando la condición de conservación de volumen del material respecto a la configuración deformada (Figura 2.15), se deduce:

$$l_0 t = \frac{\alpha}{2} (r_{out}^2 - r_{in}^2) \quad (2.40)$$

de donde se obtiene el ángulo de doblado como:

$$\alpha = \frac{2l_0}{r_{out} - r_{in}} = \frac{l_0}{r_m} \quad (2.41)$$

siendo r_m el radio de la superficie media.

2.3.3. Movimiento de las fibras en el espesor

Incluso asumiendo que el espesor de la chapa no varía, las distancias entre las distintas fibras de la chapa siempre varían. Como se deduce de $d\varepsilon_3$ en (2.35), las fibras por encima de la superficie neutra se acercan entre sí en dirección transversal, mientras que las fibras por debajo se separan. Considérese una fibra cualquiera situada a una distancia δt_0 de la cara inferior de la chapa antes del proceso de doblado, siendo $0 \leq \delta \leq 1$ un parámetro adimensional (Figura 2.16). La posición de esta fibra cuando la chapa se deforma vendrá dada por el radio de curvatura (r). Dado que se asume que el material es incompresible, el volumen de material por debajo de δt_0 en la chapa sin deformar es igual al volumen de material por

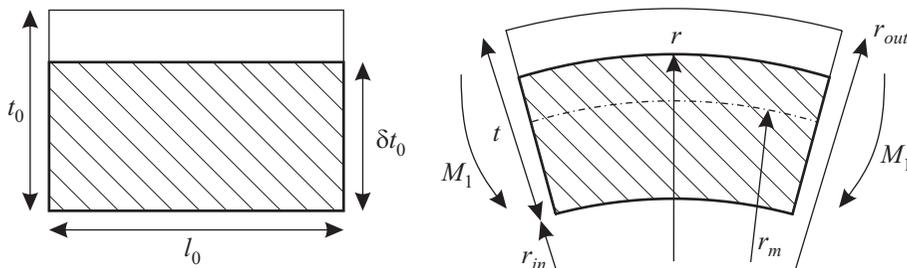


Figura 2.16: Esquema del movimiento de una fibra en el espesor y conservación del volumen de la fracción de chapa.

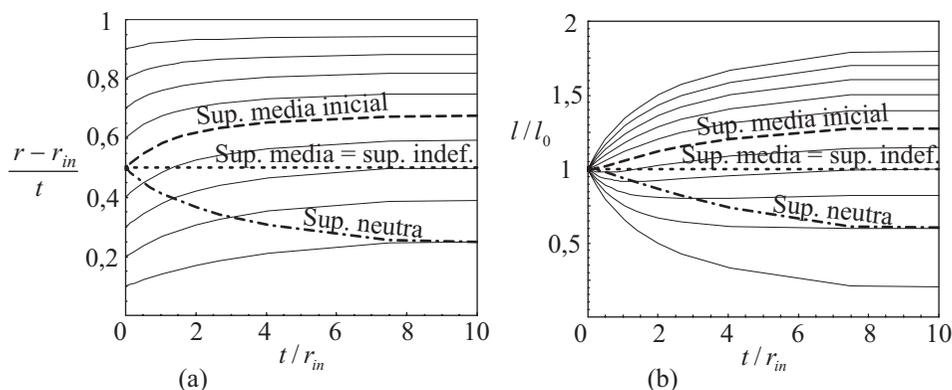


Figura 2.17: Movimiento de las fibras en el espesor de la chapa durante el doblado rígido-plástico perfecto: (a) posición relativa en el espesor; y (b) longitud relativa.

debajo de r en la chapa deformada, *i.e.*:

$$\delta = \frac{r^2 - r_{in}^2}{r_{out}^2 - r_{in}^2} \quad (2.42)$$

o su función inversa:

$$r = \sqrt{r_{in}^2 + \delta(r_{out}^2 - r_{in}^2)} \quad (2.43)$$

Utilizando estas expresiones, la Figura 2.17(a) muestra la evolución del radio de curvatura de 10 fibras uniformemente distribuidas en el espesor inicial, en un doblado de chapa hasta alcanzar un radio interior de 10 veces el espesor de la chapa ($t/r_{in} = 10$). Como se aprecia en esta figura, todas las fibras tienden a acercarse a la superficie externa de la chapa.

La longitud de una fibra puede calcularse como:

$$l = r\alpha = l_0 \frac{r}{r_m} \quad (2.44)$$

donde el ángulo de doblado viene dado en (2.41). La Figura 2.17(b) muestra la longitud de las 10 fibras durante el doblado. Nótese el mínimo que presentan las curvas correspondientes a fibras localizadas por debajo de la superficie media inicial. Este mínimo implica una inversión en la evolución de la deformación, como se describe a continuación.

Las expresiones anteriores, representadas en las gráficas de la Figura 2.17, permiten analizar también el movimiento de las superficies media, neutra e indeformada (Figura 2.18). La superficie indeformada coincide en cada instante con la

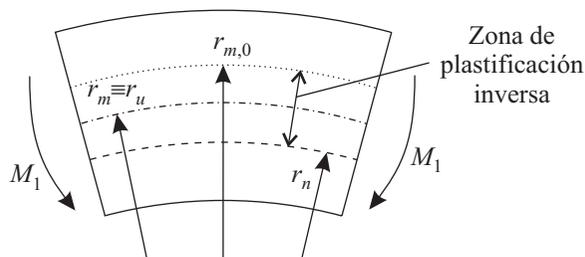


Figura 2.18: Esquema de la posición de la superficie media de la chapa en las configuraciones indeformada ($r_{m,0}$) y deformada (r_m), y de las superficies indeformada (r_u) y neutra (r_n).

fibra cuya longitud es la misma que la longitud inicial, *i.e.* la fibra cuya deformación longitudinal neta es nula. Esta fibra tiene un radio de curvatura r_u . De (2.44) se obtiene que la superficie indeformada coincide en cada instante con la superficie media de la chapa:

$$r_u = r_m \quad (2.45)$$

Su posición en la chapa indeformada se obtiene de (2.42):

$$\delta_u = \frac{\frac{r_{out} + r_{in}}{2} - r_{in}^2}{r_{out}^2 + r_{in}^2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \frac{r_{out} - r_{in}}{r_{out} + r_{in}} = \frac{1}{2} - \frac{1}{8} \frac{t}{r_m} \quad (2.46)$$

Otra fibra relevante es la que inicialmente se encuentra en el plano medio de la chapa. La aproximación a la cara exterior de la chapa de esta fibra se deduce de (2.43):

$$\delta_{m,0} = \frac{1}{2} \Rightarrow r_{m,0} = \sqrt{\frac{r_{out}^2 + r_{in}^2}{2}} > \frac{r_{out} + r_{in}}{2} = r_m \quad (2.47)$$

La tercera fibra relevante es la que coincide en un instante dado con la superficie neutra. Ésta última coincide inicialmente con la superficie media de la chapa y se desplaza durante el doblado hacia la superficie cóncava, como se deduce de (2.42):

$$r_n = \sqrt{r_{out} r_{in}} \Rightarrow \delta_n = \frac{r_{in}}{r_{out} + r_{in}} < \frac{1}{2} \quad (2.48)$$

De acuerdo con estas observaciones se pueden extraer las siguientes conclusiones (Figuras 2.17 y 2.18):

1. El material por encima de la superficie media inicial ($\delta \geq 1/2$, $r \geq r_{m,0}$), ha estado sometido siempre a un estiramiento longitudinal durante el proceso de doblado de la chapa ($dl > 0$).

2. El material por debajo de la superficie neutra ($\delta \leq \delta_n$, $r \leq r_n$), ha estado sometido siempre a un acortamiento longitudinal durante el proceso de doblado de la chapa ($dl < 0$).
3. Cada una de las fibras contenidas en la región intermedia ($\delta_n \leq \delta \leq 1/2$, $r_n \leq r \leq r_{m,0}$) comienza acortándose y, en el instante en que es alcanzada por la superficie neutra, comienza a alargarse (nótese en la Figura 2.17(b) la longitud mínima de las fibras en este instante, $dl = 0$). Como consecuencia se produce un proceso de plastificación inversa y, por tanto, la posibilidad de que el efecto Bauschinger tenga un efecto importante en el comportamiento de la chapa.

2.3.4. Efecto de la tracción en el doblado plástico perfecto

Hill consideró también el efecto de los esfuerzos de tracción en el doblado de chapa que aparecen como consecuencia de aplicar presión en la cara interior. El análisis que planteó, y que se describe brevemente a continuación, es válido siempre que los esfuerzos de tracción no superen el axil elástico máximo, dado el comportamiento plástico perfecto del material.

Considérese una presión uniforme (p) en la cara interna de la chapa (Figura 2.19). Para que los esfuerzos en la chapa estén equilibrados debe existir una tracción en el espesor. Se asume que el axil resultante es perpendicular a la sección. Su valor se obtiene de forma evidente al aplicar equilibrio:

$$N_1 = p r_{in} \quad (2.49)$$

Con la nueva condición de contorno $\sigma_3 = -p$ en $r = r_{in}$, las tensiones longitudinal y transversal son ahora, respectivamente (Figura 2.19):

$$\sigma_1 = \begin{cases} \frac{2\sigma_0}{\sqrt{3}} \left(1 - \ln \frac{r}{r_{out}}\right) & \text{si } r_n \leq r \leq r_{out} \\ -p - \frac{2\sigma_0}{\sqrt{3}} \left(1 + \ln \frac{r}{r_{out}}\right) & \text{si } r_{in} \leq r \leq r_n \end{cases} \quad (2.50)$$

$$\sigma_3 = \begin{cases} \frac{2\sigma_0}{\sqrt{3}} \ln \frac{r}{r_{out}} & \text{si } r_n \leq r \leq r_{out} \\ -p - \frac{2\sigma_0}{\sqrt{3}} \ln \frac{r}{r_{in}} & \text{si } r_{in} \leq r \leq r_n \end{cases} \quad (2.51)$$

El efecto producido por el esfuerzo axil es desplazar la superficie neutra hacia la cara interior de la chapa. De la condición de continuidad de σ_3 en r_n , la nueva

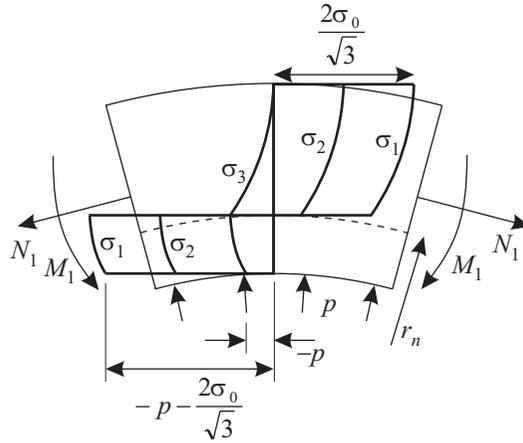


Figura 2.19: Influencia del axil en la distribución de tensiones en el doblado de una chapa de material rígido-plástico perfecto.

posición de la superficie neutra viene dada por:

$$r_n = \sqrt{r_{in}r_{out}e^{-\frac{\sqrt{3}p}{2\sigma_0}}} \quad (2.52)$$

Debido a la curvatura de la chapa, el esfuerzo axil genera un momento flector adicional. Si se supone que el axil está aplicado en la superficie media de la chapa, el momento flector por unidad de longitud se expresa como:

$$\frac{M_1}{2\sigma_0/\sqrt{3}} = \frac{1}{4} \left(r_{out}^2 + r_{in}^2 - 2r_{out}r_{in}e^{-\frac{\sqrt{3}p}{2\sigma_0}} \right) - \frac{r_{out}r_{in}p}{4\sigma_0/\sqrt{3}} \quad (2.53)$$

Se puede comprobar que las superficies de las fibras permanecen cilíndricas y la distribución de velocidades dadas por la ecuación (2.34) sigue siendo válida. Sin embargo, ahora el espesor de la chapa cambia, como se deduce al sustituir (2.52) en (2.39):

$$\frac{dt}{t} = -\frac{d\alpha}{2\alpha} \left(1 - e^{-\frac{\sqrt{3}p}{2\sigma_0}} \right) < 0 \quad (2.54)$$

Chakrabarty (2000) resolvió una ecuación diferencial análoga a la anterior por métodos numéricos, obteniendo la reducción de espesor en función de t_0/r_{in} y tomando como parámetro el axil adimensional ($n_1 = N_1/(2\sigma_0 t/\sqrt{3})$). La Figura 2.20 muestra gráficamente la solución para distintos valores de axil adimensional. Como se aprecia en la figura, el espesor de la chapa, de valor inicial t_0 , disminuye al aumentar el doblado, manteniendo constante el axil. El proceso de cálculo numérico

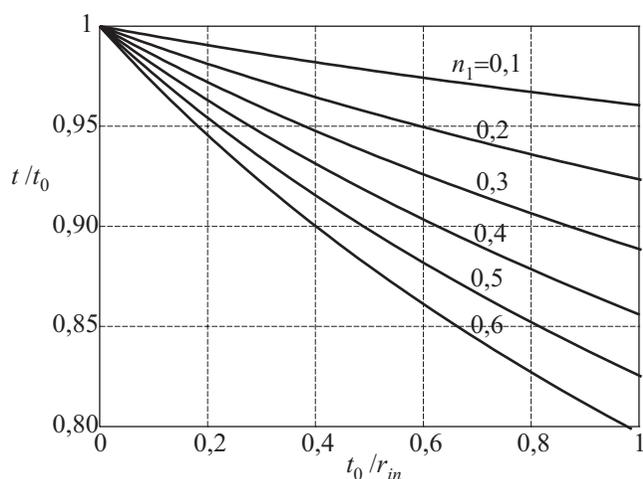


Figura 2.20: Influencia del axil en la reducción del espesor durante el doblado de una chapa de material rígido-plástico perfecto.

para obtener esta gráfica se basa en el trabajo de Crafoord (1970), descrito más adelante. Esta misma gráfica es obtenida por Chakrabarty mediante una aproximación de la ecuación diferencial que desprecia las tensiones transversales y que es válida cuando la curvatura relativa de la cara interna de la chapa es pequeña, del orden de $t/r_{in} < 0,2$. En ese caso, los resultados tienen una precisión suficiente para valores de axil $n_1 < 0,5$. Como afirma el autor, el espesor de la chapa decrece progresivamente con todos los valores positivos de n_1 (esfuerzos de tracción) y el valor de dicho parámetro debe ser inferior a la unidad para evitar la estricción de la chapa.

2.3.5. Influencia del endurecimiento por deformación

Para obtener un análisis más realista es necesario modificar la ley de comportamiento del material e incluir el endurecimiento por deformación. Durante las décadas de los 50 y 60 del pasado siglo se realizaron diversos trabajos en los que se modelaba el comportamiento del material mediante leyes lineales (*e.g.* Proksa (1959)) y posteriormente no lineales (*e.g.* Crafoord (1970)). Repitiendo el procedimiento analítico de Hill y derivando la distribución de tensiones como una función del momento flector y de los radios de curvatura de las superficies interior y exterior, los resultados obtenidos diferían significativamente de las predicciones de Hill. Se observó que, en un material rígido plástico perfecto, las distribuciones de

tensión en el espesor presentan una discontinuidad en la superficie neutra, mientras que en un material con endurecimiento por deformación (usando la ley de Hollomon), la distribución de tensiones que se obtiene es continua en todo el espesor de la chapa, con un valor nulo precisamente en la superficie neutra. Los análisis realizados en condiciones de deformación plana con las distintas leyes de comportamiento adoptadas implicaban una gran dificultad matemática. Para simplificar la formulación, los autores adoptaron varias aproximaciones, como asumir que el espesor no varía, que la distribución de deformaciones es lineal, que las superficies neutra e indeformada coinciden, etc. Los errores provocados por estas suposiciones redujeron hasta tal punto la precisión alcanzada por la complicada relación tensión-deformación que limitaron los resultados prácticos de estos análisis.

Para modelar una operación de conformado de chapa en la cual el material se dobla hasta adoptar la forma deseada, es necesario desarrollar un procedimiento teórico y numérico que permita utilizar una curva de comportamiento del material realista y considerar las influencias del movimiento de la superficie neutra y del cambio en el espesor de la chapa. Al igual que Hill, Crafoord (1970) asumió un doblado en condiciones de deformación plana, pero empleó un material rígido-plástico con una ley de comportamiento genérica:

$$\sigma_{eq} = H(\varepsilon_{eq}) \quad (2.55)$$

donde la función H puede ser una función simple o determinarse mediante un simple ensayo de tracción en un material real. Si se supone que la deformación plástica es incremental, la deformación equivalente se puede calcular mediante:

$$\varepsilon_{eq} = \int d\varepsilon_{eq} \quad (2.56)$$

En el doblado plástico en condiciones de deformación plana, la ecuación de equilibrio dada en (2.24) con el criterio de fluencia de von Mises se transforma entonces en:

$$r \frac{d\sigma_3}{dr} = \frac{2}{\sqrt{3}} H \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \int |d\varepsilon_{eq}| \right) \quad (2.57)$$

Hay que hacer notar que, como cada fibra de la chapa tiene una historia de deformación diferente, la magnitud de la integral $\int |d\varepsilon_{eq}|$ depende de r . Recordando el movimiento de las fibras en las tres regiones en el espesor de la chapa descritas anteriormente (Figura 2.18), se puede ver fácilmente que para el material en las regiones por encima de la superficie media inicial y por debajo de la superficie neutra, se cumple $\int |d\varepsilon_{eq}| = |\varepsilon_{eq}|$, ya que las fibras en estas regiones han seguido una tracción o compresión monótonas, mientras que el material en la región

intermedia se tiene $\int |d\varepsilon_{eq}| \neq |\varepsilon_{eq}|$, ya que las fibras han sufrido una compresión seguida de una tracción.

En consecuencia, incluso si la función H puede ser aproximada por una función elemental, la Ecuación (2.57) difícilmente podrá ser integrada por métodos analíticos. Se puede obtener una solución mediante integración numérica, dividiendo la chapa en un número determinado de fibras y trazando la historia de deformación de cada fibra durante el proceso de doblado.

Para poder trazar la historia de deformación de las fibras es necesario considerar el movimiento de la superficie neutra y el cambio en el espesor de la chapa durante el proceso de doblado. La deformación longitudinal de una fibra se puede calcular como:

$$\varepsilon_1 = \ln \frac{r}{r_u} = \ln \frac{r}{r_m} - \ln \frac{r_u}{r_m} = \ln \frac{r}{r_m} - \ln \frac{t}{t_0} \quad (2.58)$$

siendo

$$\frac{t}{t_0} = \frac{r_u}{r_m} \quad (2.59)$$

por conservación de volumen. Esta condición implica que una reducción en el espesor de la chapa ($t < t_0$) ocurre simultáneamente con el movimiento de la superficie indeformada hacia la cara interior de la chapa ($r_u < r_m$).

La última igualdad en la expresión (2.58) indica que la deformación longitudinal de una fibra es una combinación de dos sumandos: el primero está relacionado con la posición de la fibra (r) y que puede interpretarse como la deformación que sufre la fibra suponiendo el espesor constante; y el segundo es independiente de r y está provocado por la reducción del espesor de la chapa. Este segundo término es idéntico para todas las fibras y es equivalente a la deformación provocada en un proceso de tracción pura.

Introduciendo las siguientes variables adimensionales:

$$\kappa = \frac{t}{r_m}, \quad \tau = \frac{t}{t_0}, \quad \rho = \frac{r_n}{r_m} \quad (2.60)$$

y recordando la definición de la posición de la fibra en la chapa indeformada (δ , Figura 2.16) la deformación longitudinal dada en (2.58) puede expresarse de forma adimensional como:

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{2} \ln \left[\left(1 - \frac{\kappa}{2} \right)^2 - 2\delta\kappa \right] - \ln \tau \quad (2.61)$$

y la ecuación diferencial de la reducción de espesor dada en (2.39) como:

$$\frac{d\tau}{d\kappa} = -\frac{1}{2} \left(\frac{1 - (\kappa/2)^2}{\rho^2} - 1 \right) \frac{\tau}{\kappa} \quad (2.62)$$

Como se deduce de la ecuación dada en (2.39), en un material rígido plástico perfecto, donde el radio de curvatura de la superficie neutra satisface $r_n = \sqrt{r_{out}r_{in}}$, el espesor es constante durante el proceso de doblado puro. Por el contrario, si el espesor cambia entonces debe cumplirse $r_n \neq \sqrt{r_{out}r_{in}}$. Para un material con endurecimiento por deformación se tiene que el espesor disminuye y, por tanto, $r_n < \sqrt{r_{out}r_{in}}$, lo que implica que la superficie neutra se mueve más rápidamente hacia la cara interior de la chapa durante el proceso de doblado.

Basándose en este análisis teórico y en la idea de dividir la chapa en fibras, Crafoord (1970) propuso el siguiente algoritmo para obtener una solución al problema:

1. Tomar como valores iniciales $\kappa = 0$ y $\tau = 1$.
2. Incrementar la curvatura una cantidad $\Delta\kappa$. Usando el valor de τ del paso anterior, calcular ε_1 en cada fibra δ mediante (2.61), así como los valores de r_{out} y r_{in} correspondientes al valor actual de κ .
3. Determinar la posición actual de la superficie neutra, δ_n , de acuerdo con la condición $d\varepsilon_1 = 0$. Calcular ε_{eq} en cada una de las 3 regiones en el espesor de la chapa (véase la Figura 2.18), dado que sigue diferentes caminos de deformación.
4. Calcular σ_1 y σ_3 en cada una de las 3 regiones, mediante la ecuación de equilibrio y el criterio de fluencia.
5. Calcular el momento flector correspondiente al valor actual de κ mediante la integral $M_1 = \int_{r_{in}}^{r_{out}} \sigma_1 r dr$.
6. Después de calcular ρ a partir de δ_n , determinar $\Delta\kappa$ de (2.62) y asignar un nuevo valor a τ .
7. Repetir los pasos 2-7 hasta que κ o M_1 alcancen el valor prescrito.

Crafoord (1970) realizó ensayos de tracción para seis metales diferentes (acero con 0.36 % de carbono, acero con 0.13 % de carbono, aluminio, cobre, latón y acero inoxidable) para determinar la función $\sigma_{eq} = H(\varepsilon_{eq})$ para cada material. Establecido el comportamiento plástico, usó el algoritmo para calcular las variaciones de espesor y el momento flector en función de la curvatura relativa de la superficie media, κ . Para comprobar las predicciones numéricas realizó una serie de ensayos de doblado para estos seis metales. Los resultados experimentales encajaron de forma excelente con las curvas teóricas τ - κ y M_1 - κ .

El autor observó en las curvas M_1 - κ que, para valores altos de κ , el momento flector alcanzaba un máximo y entonces decrecía debido a la reducción del espesor de la chapa, aunque la relaciones tensión-deformación de estos materiales mostraron un cierto grado de deformación por endurecimiento. Este hecho implicaba que la chapa podría perder la estabilidad en su capacidad de soportar la carga cuando el doblado es suficientemente severo. Se observó que esta inestabilidad ocurre sólo para valores de $\kappa > 1$ ($r_m < t$), lo cual no sucede en la mayoría de los procesos de conformado de chapa.

2.3.6. Aplicabilidad de la teoría elemental *vs.* matemática

La diferencia fundamental entre la teoría matemática de doblado plástico y la teoría elemental es que la primera tiene en cuenta el movimiento de la superficie neutra hacia la cara cóncava de la chapa durante el proceso de doblado. Por definición, la superficie neutra coincide en un instante determinado con la fibra cuyo incremento de deformación es cero. Esta fibra, antes del instante en el que se convierte en la superficie neutra, ya ha acumulado una cierta deformación. Si la flexión de la chapa es suficientemente pequeña como para que la superficie neutra sólo haya acumulado deformación elástica, entonces la región intermedia en el espesor de la chapa, donde se produce la inversión en el camino de deformación, no presenta una historia de deformación demasiado complicada. En este caso, la inversión en la deformación en esta región puede despreciarse en el análisis, siendo de esperar que se pueda utilizar la teoría elemental.

Para obtener la condición de que la superficie neutra no ha llegado a plastificar, de acuerdo al análisis de chapas rígido-plástico perfecto (es decir, la teoría de Hill en la que no se produce cambio de espesor), basta comparar la deformación de la superficie neutra con la deformación elástica máxima. Si el espesor no cambia, entonces $r_u \approx r_m$ y, teniendo en cuenta $r_n = \sqrt{r_{out}r_{in}}$ del análisis de Hill, la deformación de la superficie neutra queda como:

$$\varepsilon_{1n} = \frac{1}{2} \ln \left[1 - \left(\frac{\kappa}{2} \right)^2 \right] \quad (2.63)$$

Por otro lado, la deformación elástica máxima en la chapa se obtiene de la ley de Hooke y del criterio de plastificación de von Mises:

$$(\varepsilon_1)^e_{max} = \frac{\sigma_0(1 - \nu^2)}{E\sqrt{1 - \nu + \nu^2}} \quad (2.64)$$

Tomando como ejemplo un acero con $\nu = 0,28$, $E = 210$ GPa y $\sigma_0 = 250$ MPa se obtiene un valor de $(\varepsilon_1)^e_{max} = 1,228 \times 10^{-3}$. La condición de que la superficie

neutra no haya plastificado es:

$$|\varepsilon_{1n}| \leq (\varepsilon_1)_{max}^e \quad (2.65)$$

de donde se obtiene $\kappa = t/r_m \leq 0,1$, es decir, que el radio de curvatura de la superficie media debe ser mayor que 10 veces el espesor de la chapa.

La condición de aplicabilidad de la teoría matemática es un poco menos restrictiva, según Hill: cuando el radio de curvatura es 4 ó 5 veces el espesor de la chapa, es decir, $\kappa < 0,2$. Cuando la curvatura de la chapa se encuentra entre ambos valores ($0,1 < \kappa < 0,2$) la superficie neutra plastifica y, por tanto, se produce plastificación inversa; sin embargo, las deformaciones en esta situación siguen siendo pequeñas y los errores cometidos pueden considerarse despreciables.

2.3.7. Trabajos basados en la teoría matemática

La formulación de la teoría matemática y los conceptos fundamentales que de ella se derivan, *i.e.* la consideración de las tensiones transversales en el espesor de la chapa y del movimiento de la superficie neutra, han servido de base de diversos estudios teóricos posteriores.

Entre los primeros trabajos cabe destacar los de Verguts y Sowerby (1975), Dadras y Majlessi (1982) y Majlessi y Dadras (1983) (posteriormente, Chakrabarty (1987) realizó una síntesis de estos trabajos). Verguts y Sowerby consideraron una regla de endurecimiento isótropo en la región intermedia de la chapa, donde se produce la carga inversa, despreciando así el efecto Bauschinger. Según Majlessi y Dadras, el flujo de tensiones que obtuvieron los autores mencionados fue elevado y los resultados en chapas multicapa fueron inesperados. Además, los cálculos numéricos eran lentos y complicados. Por otra parte, Dadras y Majlessi y Majlessi y Dadras propusieron una regla de endurecimiento lineal en la región de carga inversa que reproducía cualitativamente bien el efecto Bauschinger, a pesar de las simplificaciones. Obtuvieron estimaciones realistas del momento flector y de las variaciones de espesor en chapas multicapa. Por otra parte, el análisis y los cálculos fueron mucho más simples. Más tarde, Tan *et ál.* (1995) consideraron la influencia en el doblado de la anisotropía del material, usando el criterio de fluencia cuadrático de Hill (1979) para materiales anisótropos en deformación plana.

Más recientemente, Alexandrov *et ál.* (2006) desarrollaron un análisis teórico más complejo, basado en los trabajos anteriores, para materiales con comportamiento rígido-plástico, elasto-plástico y visco-plástico. Coincidieron con Hill (1950) al afirmar que no está justificado el uso de modelos rígido-plásticos en la descripción

de procesos de doblado, ya que el gradiente de tensión es muy grande en las inmediaciones de la fibra neutra y, por tanto, las velocidades de deformación elástica no son pequeñas comparadas con las velocidades de deformación plástica, aunque las deformaciones elásticas puedan despreciarse frente a las deformaciones plásticas. Las soluciones que obtuvieron hacen posible revelar el efecto del comportamiento elástico en la solución.

Zhu (2007) propone un análisis elasto-plástico con endurecimiento por deformación, suponiendo un material incompresible ($\nu = 0,5$) e isótropo (von Mises). Supone implícitamente que la superficie indeformada es la misma que la superficie neutra. El autor modeló la plastificación inversa de la región central de la chapa mediante las reglas de endurecimiento cinemático e isótropo y comparó las soluciones obtenidas con el modelo de doblado plástico de Hill y un modelo basado en la teoría de membrana (la cual ignora las tensiones transversales). Zhu concluye que los errores cometidos al despreciar la plastificación inversa en el cálculo del momento flector aumentan al disminuir el radio de curvatura. Además, afirma que como en un estado de tensión plana no se puede asegurar el equilibrio de esfuerzos internos en cada una de las fibras individuales cuando las tensiones transversales se ignoran (lo cual suele ser lo más habitual), la reducción de espesor se sobreestima.

2.4. Resumen

El mecanismo de deformación en los procesos de conformado de chapa en los que están presentes gradientes en el espesor es extremadamente complicado, como señalan algunos investigadores. No obstante, su comprensión resulta fundamental para predecir la estricción o la fractura del material. Aunque el número de publicaciones que abordan este asunto ha aumentado notablemente en los últimos años, el problema está aún por resolver. En la práctica, la predicción del fallo se sigue realizando mediante criterios empíricos simples. Algunos de estos criterios se exponen en el Capítulo 4, como son la Regla del Plano Medio (la más habitual) y, más recientemente, las Reglas de la Cara Cóncava y Convexa (según se trate de fallo por estricción o fractura).

Las teorías elemental y matemática de doblado plástico permiten analizar la influencia del material y de las condiciones del proceso en situaciones sencillas. Cuando el doblado no es severo, *i.e.* radios mayores de 4 ó 5 veces el espesor de la chapa, las tensiones transversales en el espesor son despreciables frente a las longitudinales. En esta situación, la teoría elemental permite obtener soluciones

analíticas sin demasiada dificultad. En cambio, cuando los radios son pequeños, las tensiones transversales deben ser consideradas en el análisis. La teoría matemática pone de relieve la complejidad de un simple proceso de doblado, al predecir una inversión de la deformación en el interior del material. Esta teoría plantea un sistema de ecuaciones diferenciales, al requerir el uso de la condición de equilibrio de tensiones, cuya resolución debe realizarse mediante integración numérica a lo largo del camino de deformación.

En el siguiente capítulo se desarrolla un modelo de conformado biaxial de chapa en condiciones de tensión plana, bajo distintas combinaciones de tracción y flexión, y que parte de la teoría elemental y de los trabajos que de ella se derivan. Para salvar algunas de las limitaciones que presenta esta teoría se realizan modificaciones en las hipótesis de partida, y que resultan en el uso de conceptos tratados en la teoría matemática, tales como la posible variación del espesor, el movimiento de las fibras a través del material y la inversión de la deformación durante el conformado. El efecto de las tensiones transversales en el espesor, tratado también en la teoría matemática, es considerado al final del capítulo siguiente.

Bibliografía

- Alexandrov S, Kim JH, Chung K, Kang TJ (2006). *An alternative approach to analysis of plane-strain pure bending at large strains*. Journal Strain Analysis 41(5):397–410
- van den Boogaard AH, Emmens WC, Huétink J (2010). *Effect of thickness stress in stretch-bending*. En: Proc. 10th Numiform Conference, Pohang, Korea
- Chakrabarty J (1987). Theory of plasticity. McGraw-Hill, New York
- Chakrabarty J (2000). Applied plasticity. Springer, New York
- Chakrabarty J, Lee WB, Chan KC (2001). *An exact solution for the elastic/plastic bending of anisotropic sheet metal under conditions of plane strain*. International Journal of Mechanical Sciences 43:1871–1880
- Charpentier P (1975). *Influence of punch curvature on the stretching limits of sheet steel*. Metallurgical and Materials Transactions A 6(9):1665–1669
- Chen P, Gerdeen JC (1989). *Bending effect on forming limit for anisotropic sheets*. En: Wagoner RH, Chan KS, Keeler SP (eds.) Forming limits diagram: concepts, methods, and applications, TMS, pp. 239–252

- Col A (2002). *FLCs: past, present and future*. En: Proc. Biennial Congress of the International Deep Drawing Research Group, IDDRG, Nagoya, Japan
- Col A (2005). *FLCs: are we at a turn?*. En: Proc. Biennial Congress of the International Deep Drawing Research Group, IDDRG, Besançon, France
- Col A, Balan T (2007). *About the neglected influence of gradients on strain localisation*. En: Proc. Materials Processing and Design: Modeling, Simulation and Applications, NUMIFORM 2007, Interlaken, Switzerland, pp. 147–152
- Crafoord R (1970). *Plastic bending of sheet metals*. tesis doctoral, Chalmers University of Technology, Göteborg, Sweden
- Dadras P, Majlessi SA (1982). *Plastic bending of work hardening materials*. Trans ASME, J Engineering for Industry 104:224
- Demeri MY (1981a). *The formability of a dual phase steel*. Metallurgical Transactions A 12:1187–1196
- Demeri MY (1981b). *The stretch bending of sheet metal*. Journal Applied Metalworking 2(1):3–10
- El-Domiatty A (1990). *Stretch forming of beams of non-uniform sections*. Journal of Materials Processing Technology 22:21–28
- El-Domiatty A, Shabaik AH (1984). *Bending of work-hardening metals under the influence of axial load*. Journal of Mechanical Working Technology 10:57–66
- El-Domiatty A, Shabara MAN, Al-Ansary MD (1996). *Determination of stretch-bendability of sheet-metals*. International Journal of Machine Tools Manufacture 36(5):635–650
- El-Megharbel A, El-Domiatty A, Shaker M (1990). *Springback and residual stress after stretch bending of work-hardening sheet metal*. Journal of Materials Processing Technology 24:191–200
- Emmens WC, van den Boogaard AH (2008). *Extended tensile testing with simultaneous bending*. En: Proc. Congress of the International Deep Drawing Research Group, IDDRG, Olofström, Sweden
- Emmens WC, van den Boogaard AH (2010). *Contact effect in bending affecting stress and formability*. International Journal of Material Forming 3, Supp. 1:1159–1162

- Fictorie E, van den Boogaard AH, Atzema EH (2010). *Influence of punch radius in a Nakazima test for mild steel and aluminium*. International Journal of Material Forming 3, Supp. 1:1179–1182
- Geiger M, Merklein M (2003). *Determination of forming limit diagrams*. En: Proc. Annals of CIRP-2003, vol. 51/1, pp. 213–216
- Ghosh AK, Hecker SS (1974). *Stretching limits in sheet metals: in-plane versus out-of-plane deformation*. Metallurgical Transactions 5:2161–2164
- Goodwin GM (1968). *Application of strain analysis to sheet metal forming in the press shop*. SAE paper 680093
- Hill R (1948). *A theory of the yielding and plastic flow of anisotropic metals*. Proceedings of the Royal Society 193A:281–297
- Hill R (1950). *The mathematical theory of plasticity*. Oxford, Clarendon Press
- Hill R (1952). *On discontinuous plastic states, with special reference to localized necking in thin sheets*. Journal of the Mechanics and Physics of Solids 1(1):19–30
- Hill R (1979). *Theoretical plasticity of textured aggregates*. Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society 85:179–191
- Hora P, Tong L (2008). *Theoretical prediction of the influence of curvature and thickness on the FLC by the enhanced modified maximum force criterion*. En: Proc. 7th International Conference and Workshop on Numerical Simulation of 3D Sheet Metal Forming Processes, Numisheet 2008, Interlaken, Switzerland, pp. 205–210
- Hotz W, Timm J (2008). *Experimental determination of forming limit curves (FLC)*. En: Proc. 7th International Conference and Workshop on Numerical Simulation of 3D Sheet Metal Forming Processes, Numisheet 2008, Interlaken, Switzerland, pp. 271–278
- Huang M, Zhang L, Yang L (2008). *On the failure of AHSS at tooling radius*. En: Proc. 7th International Conference and Workshop on Numerical Simulation of 3D Sheet Metal Forming Processes, Numisheet 2008, Interlaken, Switzerland, pp. 307–309
- Johnson W, Yu TX (1981a). *On springback after the pure bending of beams and plates of elastic work-hardening materials - III*. International Journal of Mechanical Sciences 23(11):687–695

- Johnson W, Yu TX (1981b). *On the range of applicability of results for the spring-back of an elastic-perfectly plastic rectangular plate after subjecting it to biaxial pure bending - II*. International Journal of Mechanical Sciences 23(10):631–637
- Johnson W, Yu TX (1981c). *On the range of applicability of results for the spring-back of an elastic-work-hardening rectangular plate after subjecting it to biaxial pure bending - IV*. International Journal of Mechanical Sciences 23(11):697–701
- Johnson W, Yu TX (1981d). *Springback after the biaxial elastic-plastic pure bending of a rectangular plate - I*. International Journal of Mechanical Sciences 23(10):619–630
- Keeler SP (1968). *Circular grid system: a valuable aid for evaluating sheet metal formability*. SAE paper 680092
- Keeler SP, Backhofen WA (1963). *Plastic instability and fracture in sheet stretched over rigid punches*. Transactions of ASM 56:25–48
- Kim JH, Sung JH, Wagoner RH (2009). *Thermo-mechanical modelling of draw-bend formability tests*. En: Proc. Congress of the International Deep Drawing Research Group, IDDRG, Golden CO, USA, pp. 503–512
- Kitting D, Ofenheimer A, Jain M, Pauli H, Rabler G (2008). *Experimental characterisation of failure of stretch-bend steel sheets*. En: Proc. 7th International Conference and Workshop on Numerical Simulation of 3D Sheet Metal Forming Processes, Numisheet 2008, Interlaken, Switzerland, pp. 315–320
- Kitting D, Ofenheimer A, Pauli H, Till ET (2009a). *Application of a “Concave-Side Rule” approach for assessing formability of stretch-bend steel sheets*. International Journal of Material Forming 2, Supp. 1:427–430
- Kitting D, Ofenheimer A, Pauli H, Till ET (2009b). *Forming limits of stretch-bend steel sheets*. En: Proc. Congress of the International Deep Drawing Research Group, IDDRG, Golden, Colorado, USA, pp. 425–435
- Kruijf NE, Peerlings RHJ, Geers MGD (2009). *An analysis of sheet necking under combined stretching and bending*. En: Proc. 12th International ESAFORM Conference on Material Forming, University of Twente, Enschede, The Netherlands
- Liewald M, Schleich R (2010). *Development of an anisotropic failure criterion for characterising the influence of curvature on forming limits of aluminium sheet*

- metal alloys*. En: Proc. 13th International ESAFORM Conference on Material Forming, Brescia, Italy
- Majlessi SA, Dadras P (1983). *Pure plastic bending of sheet laminates under plane strain condition*. International Journal of Mechanical Sciences 25(1):1–14
- Martínez-Donaire AJ, Vallellano C, Morales D, García-Lomas FJ (2010). *Experimental detection of necking in stretch-bending conditions: a critical review and new methodology*. Steel Research International, Special Edition Metal Forming 2010 81(a):785–789
- Melbourne SH, Pietrowski R, Marsh G (1973). *Testing HSLA steel's sensitivity to sheared edged cracking*. Report, Domintion Foundries and Steel Limited, Hamilton, Ontario, Canada
- Morales D, Martínez-Donaire AJ, Vallellano C, García-Lomas FJ (2009). *Bending effect in the failure of stretch-bend metal sheets*. International Journal of Material Forming 2, Supp. 1:813–816
- Morales D, Vallellano C, Martínez-Donaire AJ, García-Lomas FJ (2010). *Prediction of forming limit strains in metal sheets under stretch-bending conditions*. Steel Research International, Special Edition Metal Forming 2010 81(a):781–784
- Moshksar MM, Mansorzadeh S (2003). *Determination of the forming limit diagram for Al 3105 sheet*. Journal of Materials Processing Technology 141:138–142
- Proksa F (1959). *Plastisches Biegen von Blechen*. Der Stahlbau 28(2):29
- Raghavan KS (1995). *A simple technique to generate in-plane forming limit curves and selected applications*. Metallurgical and Materials Transactions A 26(8):2075–2084
- Sadagopan S, Wong C, Huang M, Yan B, Urban D (2003). *Formability characterization of a new generation of high strength steels*. Final report, AISI/DOE Technology Roadmap Program
- Schleich R, Liewald M, Held C, Sindel M (2009a). *Investigation on the forming limit prediction for aluminium sheet metal alloys*. En: Proc. Congress of the International Deep Drawing Research Group, IDDRG, Golden CO, USA
- Schleich R, Sindel M, Liewald M (2009b). *Investigation on the effect of curvature on forming limit prediction for aluminium sheet alloys at stretch-bending*. International Journal of Material Forming 2(2):69–74

- Sriram S, Wong C, Huang M, Yan B (2003). *Stretch bendability of advanced high strength steels*. SAE paper 2003-01-1151, Society of Automotive Engineers
- Stoughton TB (2008). *Generalized metal failure criterion*. En: Proc. 7th International Conference and Workshop on Numerical Simulation of 3D Sheet Metal Forming Processes, Numisheet 2008, Interlaken, Switzerland, pp. 241–246
- Stoughton TB, Yoon JW (2005). *Sheet metal formability analysis for anisotropic materials under non-proportional loading*. International Journal of Mechanical Sciences 47(12):1972–2002
- Stoughton TB, Yoon JW (2010). *A new approach for failure criterion for sheet metals*. International Journal of Plasticity (In press, doi:10.1016/j.ijplas.2010.07.004)
- Stoughton TB, Zhu X (2004). *Review of theoretical models of the strain-based FLD and their relevance to the stress-based FLD*. International Journal of Plasticity 40:1463–1486
- Tan Z, Persson B, Magnusson C (1995). *Plastic bending of anisotropic sheet metals*. International Journal of Mechanical Sciences 37(4):405–421
- Tharrett MR, Stoughton TB (2003a). *Stretch-bend forming limits of 1008 AK steel*. SAE paper 2003-01-1157
- Tharrett MR, Stoughton TB (2003b). *Stretch-bend forming limits of 1008 AK steel, 70/30 brass, and 6010 aluminum*. Internal report, Society of Automotive Engineers
- Triantafyllidis N, Samanta SK (1986). *Bending effects on flow localization in metallic sheets*. En: Proc. Royal Society of London, vol. A406, pp. 205–226
- Uko DK, Sowerby R, L DJ (1977). *Strain distribution in the bending-under-tension test*. CIM Bulletin 127-134
- Vallellano C, Morales D, García-Lomas FJ (2008). *On the study of the effect of bending in the formability of metal sheets*. En: Proc. 7th International Conference and Workshop on Numerical Simulation of 3D Sheet Metal Forming Processes, Numisheet 2008, Interlaken, Switzerland, pp. 85–90
- Vallellano C, Morales D, Martínez-Donaire AJ, García-Lomas FJ (2010). *On the use of Concave-Side Rule and Critical-Distance Methods to predict the influence*

-
- of bending on sheet-metal formability*. International Journal of Material Forming 3, Supp. 1:1167–1170
- Verguts H, Sowerby R (1975). *The pure plastic bending of laminated sheet metals*. International Journal of Mechanical Sciences 17:31–51
- Wagoner RH, Kim JH, Sung JH (2009). *Formability of advanced high strength steels*. International Journal of Material Forming 2, Supp. 1:359–362
- Yoshida M, Yoshida F, Konishi H, Fukumoto K (2005). *Fracture limits of sheets metals under stretch bending*. International Journal of Mechanical Sciences 47:1885–1896
- Yu TX, Johnson W (1982). *Influence of axial force on the elastic-plastic bending and springback of a beam*. Journal of Mechanical Working Technology 6:5–21
- Yu TX, Zhang LC (1996). *Plastic bending: theory and applications*. World Scientific, Singapore
- Zhu HX (2007). *Large deformation pure bending of an elastic plastic power-law-hardening wide plate: analysis and application*. International Journal of Mechanical Sciences 49:500–514

Capítulo 3

Modelado analítico de la tracción-flexión

El efecto combinado de tracción y flexión está presente en multitud de procesos de conformado de chapa, *e.g.* estirado (*stretching* y *stretch-bending*), estampación (*stamping*), embutición (*deep drawing*), hidroconformado (*hydroforming* y *bulging*), conformado incremental (*incremental sheet forming, ISF*), etc. El análisis teórico del proceso de conformado y de la predicción del fallo de la chapa requiere el uso de modelos analíticos que sean capaces de predecir el comportamiento del material durante el proceso y, en especial, en el instante en el que se produce el fallo. En este capítulo se analiza el comportamiento elasto-plástico de una porción elemental de chapa continua en un proceso de conformado con esfuerzos combinados de tracción y flexión en el plano de la chapa. El objetivo del análisis es proponer un modelo analítico que permita en los capítulos posteriores analizar los criterios de fallo de chapa en presencia de gradientes de deformación y tensión en el espesor.

Se expone en primer lugar un modelo sencillo de *carga proporcional*, basado en la teoría de deformación. Este modelo es apropiado para establecer de forma clara las relaciones entre las variables del proceso, aunque su aplicabilidad práctica se limita a operaciones de conformado en las que el camino de deformación es lineal.

A continuación se presenta un segundo modelo de carga no proporcional de *flexión-tracción en dos pasos*, en la que se requiere el uso de la teoría de flujo plástico. El análisis desarrollado resulta más adecuado en la práctica para las operaciones de estirado con punzón, en las que se observa una mayor influencia de

la flexión en las primeras etapas del proceso y donde la tracción predomina a partir de un cierto instante. Así, la historia de carga de este modelo permite examinar con precisión los resultados experimentales publicados de ensayos de estirado con punzones de distintos radios, analizados en el Capítulo 5.

Las teorías de doblado revisadas en el capítulo anterior ponen de manifiesto la dificultad matemática de obtener soluciones analíticas cuando los radios de curvaturas son menores de 4 ó 5 veces el espesor de la chapa. Por este motivo, ambos modelos mencionados de carga proporcional y de flexión-tracción en dos pasos se abordan excluyendo los casos de radios pequeños. La validez de los modelos es apropiada en la práctica para la mayoría de las operaciones de conformado de chapa, donde la presencia de radios pequeños es, en general, evitada. No obstante, considerando ciertas simplificaciones, es factible e interesante analizar el efecto de los radios pequeños en un modelo analítico sencillo como el que se presenta al final de este capítulo.

3.1. Consideraciones previas

Para reducir la complejidad de la formulación en el modelado de la flexión-tracción, se han considerado las siguientes hipótesis simplificativas:

1. Radios de curvatura mayores de 4 ó 5 veces el espesor de la chapa, de manera que las tensiones transversales en el espesor se pueden despreciar (Hill, 1950). Como se describe en el capítulo anterior, esta hipótesis permite simplificar el modelo matemático general del comportamiento de la chapa a un caso de tensión plana.
2. Las secciones de la chapa deformada permanecen planas, pudiendo así despreciar los esfuerzos cortantes (Yu y Zhang, 1996). De esta forma los ejes principales de deformación y tensión están alineados con las direcciones longitudinal y transversal a la laminación en el plano de la chapa (Stoughton, 2000).
3. Se considera un comportamiento elasto-plástico del material. El régimen elástico se modela mediante una ley elástica lineal. El régimen plástico se modela suponiendo una ley parabólica de endurecimiento por deformación plástica del tipo Hollomon. Las deformaciones elásticas no se desprecian, como suele ser habitual en los análisis que consideran grandes deformaciones

plásticas, aunque se simplifica la ley de comportamiento elástico para reducir la complejidad de la formulación. Se tendrá en cuenta la anisotropía del material, representada por funciones de plastificación del tipo Hill (1979) (cuadrática) y/o Hosford (1979, 1985) (no cuadrática).

4. Se supondrá que se producen grandes deformaciones plásticas, de manera que el material se considera prácticamente incompresible. De esta forma, la condición de conservación de volumen podrá ser añadida al conjunto de ecuaciones y permitir su resolución analítica.
5. Se considera un proceso de conformado biaxial, con esfuerzos de tracción y flexión aplicados en las dos direcciones principales en el plano de la chapa. La geometría de la chapa curvada viene caracterizada por los radios de curvatura en ambas direcciones.

Los siguientes subapartados exponen con más detalle y justifican las hipótesis relacionadas con las variables geométricas de la chapa deformada y el modelo de comportamiento elasto-plástico.

3.1.1. Parámetros geométricos de una porción elemental de chapa deformada

La geometría de una chapa deformada puede ser caracterizada por la geometría de su superficie media y una distribución de espesores a ambos lados de dicha superficie. En general, la geometría de una superficie cilíndrica, esférica o de cualquier otra forma, requiere ser tratada correctamente con una formulación como la que presentan Ventsel y Krauthammer (2001, véase Cap. 11). Sin embargo, como en el modelo que se presenta sólo se considera una porción elemental de chapa, la geometría de su superficie media se puede simplificar considerando sólo las curvaturas en los ejes principales. Los trabajos de Johnson y Yu (1981d,b,a,c) son un buen ejemplo del uso de esta hipótesis.

Considérese una porción elemental de chapa rectangular de dimensiones iniciales l_1 , l_2 y espesor t_0 . Dicha porción se somete a unos acciones combinadas de esfuerzos de tracción (N_1 y N_2) y momentos flectores (M_1 y M_2). Como consecuencia, la chapa adquiere una doble curvatura y cambia su espesor, tal y como se muestra en la Figura 3.1. Sean $r_{m,1}$ y $r_{m,2}$ los radios de curvatura de la superficie media de la porción de chapa deformada, en las direcciones 1 y 2, respectivamente, y sea t el espesor en la nueva configuración. Dado que las secciones de la chapa

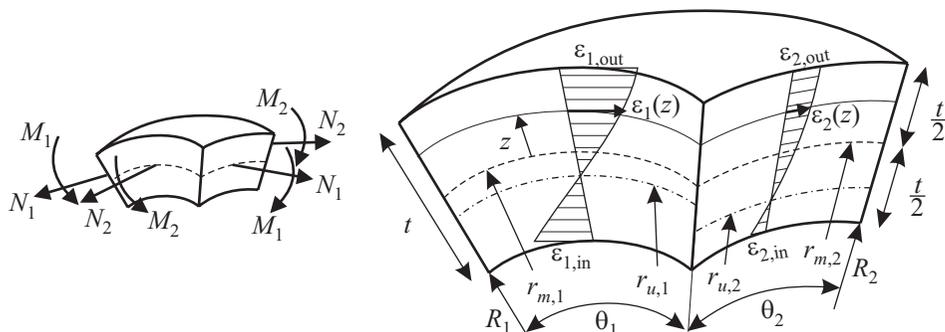


Figura 3.1: Variables geométricas en una porción elemental de chapa.

deformada permanecen planas, es posible definir θ_1 y θ_2 como los ángulos que forman las caras laterales de la porción de chapa deformada.

Sea z la posición de una fibra genérica medida desde la superficie media de la chapa. Sus dimensiones en la configuración deformada actual serán $(r_{m,1} + z)\theta_1$ y $(r_{m,2} + z)\theta_2$. Las deformaciones reales se calculan entonces como:

$$\varepsilon_1(z) = \ln \frac{(r_{m,1} + z)\theta_1}{l_1} = \ln \frac{r_{m,1} + z}{r_{u,1}} \quad (3.1)$$

$$\varepsilon_2(z) = \ln \frac{(r_{m,2} + z)\theta_2}{l_2} = \ln \frac{r_{m,2} + z}{r_{u,2}} \quad (3.2)$$

siendo $r_{u,1} = l_1/\theta_1$ y $r_{u,2} = l_2/\theta_2$ los radios de curvatura de las fibras indeformadas en las dos direcciones principales. Nótese en la Figura 3.1 que, en general, ambas fibras indeformadas no coinciden en el espesor. La posición relativa entre ambas dependerá de las condiciones del conformado.

Si se asume el material como incompresible, la condición de conservación del volumen permite establecer la siguiente relación entre variables:

$$l_1 l_2 t_0 = r_{m,1} \theta_1 r_{m,2} \theta_2 t \quad (3.3)$$

lo cual se puede expresar también como:

$$r_{u,1} r_{u,2} t_0 = r_{m,1} r_{m,2} t \quad (3.4)$$

A fin de adimensionalizar las expresiones, resulta conveniente introducir las siguientes variables adimensionales:

$\zeta = z/t$: posición de una fibra relativa al espesor de la chapa, medida desde la superficie media.

$\kappa_i = t/r_{m,i}$: curvatura relativa de la superficie media en la dirección principal $i = \{1, 2\}$.

$\tau_i = r_{u,i}/r_{m,i}$: posición de la fibra indeformada relativa a la superficie media en la dirección principal $i = \{1, 2\}$, medida desde el centro de curvatura

$\tau = t/t_0$: espesor relativo.

Así, las expresiones anteriores de las deformaciones en una fibra pueden ser expresadas como:

$$\varepsilon_1(\zeta) = \ln \frac{1 + \kappa_1 \zeta}{\tau_1} \quad (3.5)$$

$$\varepsilon_2(\zeta) = \ln \frac{1 + \kappa_2 \zeta}{\tau_2} \quad (3.6)$$

La condición de conservación de volumen toma la forma siguiente:

$$\tau = \tau_1 \tau_2 \quad (3.7)$$

De las expresiones (3.5) y (3.6) se deduce que la geometría de la porción elemental de chapa deformada viene determinada por dos variables en cada dirección principal en el plano de la chapa: las curvaturas relativas (κ_1 y κ_2) y las posiciones relativas de las fibras indeformadas (τ_1 y τ_2). Estas dos últimas variables definen la variación que se produce en el espesor de la chapa (τ) mediante la ecuación (3.7).

3.1.2. Modelo elasto-plástico de comportamiento

En el tratamiento teórico del conformado de chapa es habitual despreciar el efecto de las deformaciones elásticas y suponer así un comportamiento rígido-plástico del material. Este procedimiento está justificado por las grandes deformaciones típicas de los procesos industriales de conformado de chapa (Verguts y Sowerby, 1975; Majlessi y Dadras, 1983; Graf y Hosford, 1990, 1993a,b; Tan *et ál.*, 1995; Stoughton, 2000, 2008; Stoughton y Zhu, 2004; Stoughton y Yoon, 2005, 2010). Una de las representaciones más comunes de la relación tensión-deformación plástica es una ley parabólica. En particular, en esta tesis se asume la ley de Hollomon para el comportamiento plástico, dado que es la que se ha utilizado para caracterizar los materiales en todos los trabajos experimentales expuestos en el Capítulo 5.

Aunque las deformaciones elásticas no son relevantes en el análisis de la conformabilidad de chapa (salvo en algunas situaciones que se discuten al final de

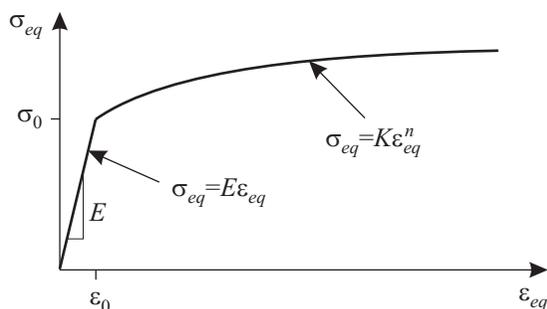


Figura 3.2: Ley de comportamiento elasto-plástico.

este subapartado), su consideración permite ilustrar el mecanismo de deformación del material de manera más realista. Para ello, se asume un modelo sencillo de comportamiento elasto-plástico del tipo (Figura 3.2):

$$\sigma_{eq} = \begin{cases} E\epsilon_{eq} & , \text{ si } \sigma < \sigma_0 \\ K\epsilon_{eq}^n & , \text{ si } \sigma > \sigma_0 \end{cases} \quad (3.8)$$

donde E es el módulo de elasticidad, σ_0 es el límite elástico, K es el coeficiente de resistencia y n es el exponente de endurecimiento por deformación.

Este modelo de comportamiento ha sido frecuentemente utilizado en diversos análisis de conformado (Johnson y Yu (1981a,c); Zhu (2007); Yu y Zhang (1996, véanse Cap. 6 y 8)). Cabe señalar que existen otras relaciones de uso muy frecuente, propuestas por Ramberg-Osgood y similares a las dadas en (3.8), en las que las deformaciones elástica y plástica se tratan por separado y posteriormente se suman ($\epsilon_{eq} = \epsilon_{eq}^e + \epsilon_{eq}^p$). Sin embargo, la ecuación resultante en este caso no se puede resolver explícitamente en tensiones (Dowling, 1993, véase Cap. 12), lo que introduciría una excesiva complejidad en el problema que aquí se plantea.

En procesos de conformado de chapa en condiciones de tensión plana ($\sigma_3 = 0$) suele ser habitual utilizar una serie de parámetros para relacionar la tensión y deformación equivalentes (σ_{eq} y ϵ_{eq}) y los estados de tensión y deformación (σ_{ij} y ϵ_{ij}) (Shi y Gerdeen, 1991; Graf y Hosford, 1993a,b; Stoughton, 2000, 2008; Stoughton y Zhu, 2004; Stoughton y Yoon, 2005, 2010; Wu *et ál.*, 2005; Barata-Rocha *et ál.*, 2009). Así, la relación entre las tensiones menor (σ_2) y mayor (σ_1) en el plano de la chapa se expresa mediante el parámetro:

$$\alpha = \frac{\sigma_2}{\sigma_1} \quad (3.9)$$

y la relación entre las velocidades de deformación menor ($\dot{\varepsilon}_2$) y mayor ($\dot{\varepsilon}_1$) por:

$$\beta = \frac{\dot{\varepsilon}_2}{\dot{\varepsilon}_1} \quad (3.10)$$

En régimen plástico, la tensión equivalente es una función de las componentes del tensor de tensiones que depende del criterio de plastificación. En general, para un estado de tensión plana, ésta se expresa como:

$$\sigma_{eq} = \sigma_{eq}(\sigma_1, \sigma_2) \quad (3.11)$$

En la mayoría de los criterios de plastificación propuestos en la literatura en general, y en los que se utilizan en esta tesis en particular, σ_{eq} se puede expresar en términos de α y σ_1 como:

$$\sigma_{eq} = \varphi(\alpha)\sigma_1 \quad (3.12)$$

donde $\varphi(\alpha)$ es una función de los parámetros del material.

Admitiendo que σ_{eq} es una función homogénea de grado 1 de las tensiones y atendiendo a la fórmula de Euler, la regla de flujo puede expresarse como:

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \frac{\partial \sigma_{eq}}{\partial \sigma_{ij}} \dot{\varepsilon}_{eq} \quad (3.13)$$

siendo $\dot{\varepsilon}_{eq}$ la velocidad de deformación plástica equivalente. Esta regla de flujo permite establecer una relación entre los parámetros α y β y, al mismo tiempo, también define $\dot{\varepsilon}_{eq}$ como una función de las componentes del tensor de velocidad de deformación plástica. En direcciones principales y teniendo en cuenta la incompresibilidad plástica del material ($\dot{\varepsilon}_1 + \dot{\varepsilon}_2 + \dot{\varepsilon}_3 = 0$), la velocidad de deformación plástica equivalente se expresa como:

$$\dot{\varepsilon}_{eq} = \dot{\varepsilon}_{eq}(\dot{\varepsilon}_1, \dot{\varepsilon}_2) \quad (3.14)$$

Como en el caso de σ_{eq} , para los criterios de plastificación considerados la expresión anterior se puede expresar también en términos de β y $\dot{\varepsilon}_1$ como:

$$\dot{\varepsilon}_{eq} = \rho(\beta)\dot{\varepsilon}_1 \quad (3.15)$$

siendo $\rho(\beta)$ una función de los parámetros del material.

Una última relación entre parámetros se obtiene de la igualdad de la densidad de energía de deformación plástica con la correspondiente en variables equivalentes ($\sigma_{ij}d\varepsilon_{ij} = \sigma_{eq}d\varepsilon_{eq}$):

$$\rho(\beta) = \frac{1 + \alpha\beta}{\varphi(\alpha)} \quad (3.16)$$

La forma específica de las expresiones $\varphi(\alpha)$, $\beta(\alpha)$, $\alpha(\beta)$, $\dot{\varepsilon}_{eq}(\dot{\varepsilon}_1, \dot{\varepsilon}_2)$ y $\rho(\beta)$ depende de la función utilizada para definir $\sigma_{eq}(\sigma_1, \sigma_2)$. En el Apéndice A se exponen dichas expresiones para los distintos criterios de fluencia considerados en esta tesis, como son: el de von Mises, para materiales isótropos, y el cuadrático de Hill (1979) y el no cuadrático propuesto por Hosford (1979, 1985), para materiales anisótropos.

Por otro lado, tener en cuenta el comportamiento elástico en un problema de conformado puede dificultar extremadamente su resolución analítica, incluso adoptando las relaciones tensión-deformación sencillas dadas en (3.8). Así, por ejemplo, al analizar el doblado elasto-plástico de una barra o chapa de material isótropo, Hill (1950) encontró extremadamente difícil resolver las ecuaciones del problema. Sin embargo, asumiendo un coeficiente de Poisson ficticio $\nu = 0,5$ (*i.e.* considerando un material incompresible en el régimen elástico), el problema podía ser abordado al desaparecer la discontinuidad de las distribuciones de tensiones en el límite elasto-plástico. Esta simplificación ha sido utilizada posteriormente por otros autores en diversos análisis del conformado elasto-plástico de chapa argumentando que, cuando se producen grandes deformaciones plásticas, el volumen del material prácticamente se conserva y la hipótesis de incompresibilidad del material produce unas diferencias despreciables en los resultados (Zhu, 2007). Alexandrov *et ál.* (2006) asume la misma suposición, basada en las ecuaciones propuestas por Khan y Huang (1995) para materiales incompresibles.

Para ilustrar el efecto que tiene la hipótesis de incompresibilidad del material en régimen elástico en las ecuaciones, considérese un caso simple de material isótropo. En esta situación, el comportamiento elástico viene dado por la ley de Hooke, que en condiciones de tensión plana se expresa como:

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_1 + \nu\varepsilon_2) \\ \sigma_2 &= \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_2 + \nu\varepsilon_1)\end{aligned}\tag{3.17}$$

Definiendo los parámetros $\alpha = \sigma_2/\sigma_1$ y $\beta = \varepsilon_2/\varepsilon_1$, las ecuaciones anteriores permiten obtener las siguientes relaciones entre estos parámetros:

$$\beta = \frac{\alpha - \nu}{1 - \nu\alpha} \quad , \quad \alpha = \frac{\beta + \nu}{1 + \nu\beta}\tag{3.18}$$

Estas expresiones son, en general, distintas a las que se obtienen del criterio de plastificación para materiales isótropos de von Mises (Apéndice A, ecuaciones (A.6)), obteniendo así una discontinuidad de los estados de tensión o deformación en el

límite de transición elasto-plástico. La única excepción consiste precisamente en tomar un valor $\nu = 1/2$, desapareciendo así dicha discontinuidad y pudiendo abordarse la resolución analítica del problema.

En la formulación que se propone en esta tesis se extrapolan las conclusiones del ejemplo anterior al caso de materiales anisótropos. Se asume así un modelo de comportamiento elástico lineal ficticio, donde las relaciones entre los estados de tensión/deformación (α y β) se determinan directamente del criterio de plastificación. Presumiblemente, esta simplificación equivale a considerar un régimen elástico incompresible y anisótropo, y donde los coeficientes de anisotropía son los que se obtienen con grandes deformaciones (coeficientes de Lankford). En cualquier caso, como ya se ha comentado, los efectos del comportamiento elástico en el problema que se trata en esta tesis son teóricamente despreciables en el instante del fallo, donde se produce una gran deformación plástica. Esta afirmación ha sido comprobada analizando los resultados experimentales tratados en el Capítulo 5, que muestran que las predicciones del fallo son las mismas asumiendo el modelo propuesto de comportamiento elasto-plástico y uno rígido-plástico. No obstante, al ser el modelo elasto-plástico más realista, aporta un mejor entendimiento del mecanismo de deformación, como se expone en los siguientes subapartados.

Finalmente, es interesante señalar que existen estudios teóricos que muestran que el comportamiento elástico es relevante en la conformabilidad del material en los procesos de doblado mediante flexión pura, cuando los radios de doblado son pequeños y se producen, por tanto, grandes deformaciones (Hill, 1950). En particular, Chakrabarty *et ál.* (2001) dedujo una solución rigurosa en un problema de doblado elasto-plástico de una chapa con anisotropía normal, usando el criterio de plastificación cuadrático de Hill (1979) y asumiendo condiciones de deformación plana. El análisis de este autor muestra que la formulación es extremadamente compleja, siendo necesario resolver las ecuaciones mediante métodos numéricos.

La influencia del régimen elástico en las operaciones de doblado con grandes deformaciones no se debe al que se produce en los primeros instantes del doblado, sino al que hay presente en el interior del material al aumentar la deformación, en las fibras que sufren una carga inversa, y que es determinante en la precisa localización de la línea neutra. Como se comenta en el capítulo anterior, Alexandrov *et ál.* (2006) obtiene en su análisis que, aunque la deformación elástica es despreciable frente a la plástica, no ocurre lo mismo con la velocidad de deformación en las proximidades de la línea neutra, como consecuencia del mayor gradiente de tensión en esta región. No obstante, dado que en esta tesis se adopta la hipóte-

sis de curvaturas moderadas, los problemas apuntados por estos autores no son relevantes para los casos que se analizan en esta tesis.

3.2. Modelo de carga proporcional

La hipótesis de carga proporcional ha sido ampliamente usada en los análisis del conformado de chapa en ausencia de gradientes de tensión y deformación en el espesor. Esta hipótesis permite hacer uso de la *teoría de deformación*, la cual no considera la historia de la deformación durante el conformado. Así, durante el conformado, la relación entre las tensiones $\alpha = \sigma_2/\sigma_1$ se considera que se mantiene constante. En condiciones de tensión plana, una relación de tensiones $\alpha = cte.$ implica una relación entre velocidades de deformaciones $\beta = cte.$ (véase el Apartado 3.1.2). Además, al ser un proceso proporcional, β se puede expresar en términos de las deformaciones como $\beta = \varepsilon_2/\varepsilon_1$. En la práctica, este modelo sencillo permite analizar trayectorias lineales de la deformación en el DLC, las cuales son las que en general se emplean para su determinación experimental.

El modelo de carga proporcional permite analizar en primera aproximación los casos en los que hay presentes gradientes de deformación y tensión en el espesor de la chapa, *i.e.* un conformado de chapa bajo acciones combinadas de tracción y flexión. En el modelo aquí propuesto se supone que todas las fibras en el espesor de la chapa sufren un proceso de carga/deformación proporcional, *i.e.* los valores de α y β se mantienen constantes durante todo el conformado e iguales en toda la sección. En estas situaciones se tiene que los esfuerzos axil y flector en las dos direcciones principales en el plano de la chapa (véase Figura 3.1) cumplen las siguientes relaciones:

$$\frac{N_2}{N_1} = \frac{M_2}{M_1} = \alpha \quad (3.19)$$

3.2.1. Deformación y geometría de la porción elemental de chapa

Dado un valor de $\beta(\alpha)$, la deformación menor se obtiene como $\varepsilon_2 = \beta\varepsilon_1$. De acuerdo a las ecuaciones (3.5) y (3.6), los parámetros que definen la deformación menor (κ_2 y τ_2) pueden ser expresados como una función de los parámetros κ_1 , τ_1 y β .

Es fácil demostrar que, si se consideraran distribuciones lineales de las deformaciones en el espesor (como por ejemplo si se trabaja con deformaciones nominales o

ingenieriles), entonces la condición $\beta = cte.$ en cada fibra en el espesor de la chapa se cumple sin dificultad. Sin embargo, al considerar deformaciones reales (logarítmicas), más apropiadas en grandes deformaciones, en general se puede comprobar que no es posible una misma β en todas las fibras. Para salvar este inconveniente se deben establecer dos relaciones para κ_2 y τ_2 que aproximen la distribución logarítmica de la deformación menor como $\varepsilon_2(\zeta) \approx \beta\varepsilon_1(\zeta)$.

Como medida de compromiso se asumirá que la relación $\beta = \varepsilon_2/\varepsilon_1$ se cumple con rigor en la superficie media ($\zeta = 0$). Aplicando esta condición a las expresiones (3.5) y (3.6) se deduce la primera relación entre parámetros:

$$\ln \frac{1}{\tau_2} = \beta \ln \frac{1}{\tau_1} \quad \Rightarrow \quad \tau_2 = \tau_1^\beta \quad (3.20)$$

La condición de conservación de volumen dada en (3.7) queda entonces expresada en función de τ_1 y β como:

$$\tau = \tau_1^{1+\beta} \quad (3.21)$$

Por otro lado, dado que en particular se cumple $\varepsilon_2 = \beta\varepsilon_1 = 0$, las fibras indeformadas ($r_{u,1}$ y $r_{u,2}$) coinciden en el espesor, formando así una *superficie* indeformada. La segunda relación entre parámetros consiste en establecer que la distancia entre las superficies media e indeformada en un determinado punto de la chapa sean iguales en las dos direcciones principales. Así se obtiene:

$$r_{m,2} - r_{u,2} = r_{m,1} - r_{u,1} \quad \Rightarrow \quad \kappa_2 = \kappa_1 \frac{1 - \tau_1^\beta}{1 - \tau_1} \quad (3.22)$$

Como se puede observar, la consecuencia de suponer un valor $\beta = cte.$ en el espesor supone que la deformación de la chapa en un instante determinado está gobernada solamente por dos variables independientes: κ_1 y τ_1 . Las otras dos variables (κ_2 y τ_2) se pueden calcular mediante las expresiones dadas en (3.20) y (3.22). La distribución de la deformación menor se obtiene por $\varepsilon_2(\zeta) \approx \beta\varepsilon_1(\zeta)$, o bien a partir de κ_2 y τ_2 mediante la ecuación (3.6).

Ya se empleen deformaciones simplificadas (lineales) o más realistas (logarítmicas), el análisis anterior establece que bajo carga proporcional las curvaturas en ambas direcciones en el plano de la chapa no son independientes, sino que dependen de las condiciones de deformación, *i.e.* del valor de β . La Figura 3.3 muestra la forma de la superficie media deformada en tres situaciones distintas: deformación equi-biaxial ($\beta = 1$), deformación plana ($\beta = 0$) y deformación por cortante puro ($\beta = -1$, espesor constante). Se puede observar que en deformación equi-biaxial y en deformación plana se obtienen, respectivamente, geometría esférica y cilíndrica.

En condiciones de deformación biaxial ($0 < \beta < 1$) la superficie media de la chapa presenta una geometría intermedia entre el cilindro y la esfera, en forma de elipsoide de revolución. En el caso de valores negativos de β , la geometría de la chapa deformada presenta curvatura anticlástica, *i.e.* las curvaturas en dos direcciones perpendiculares son de distinto signo.

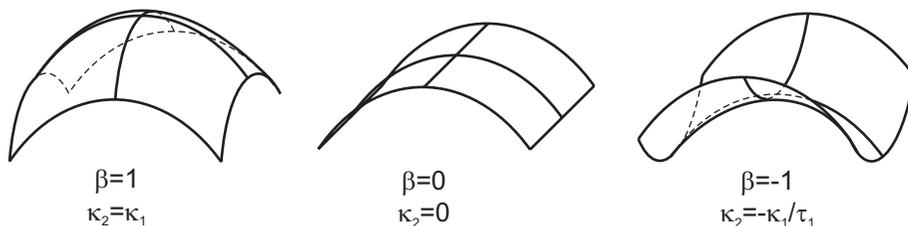


Figura 3.3: Relaciones entre las curvaturas de la superficie media para distintos valores de β .

3.2.2. Patrones de tensiones

La variable que gobierna la curvatura de la chapa (κ_1) estará lógicamente relacionada con los momentos flectores (M_1 y $M_2 = \alpha M_1$). Asimismo, la reducción del espesor, gobernada por la variable τ_1 , dependerá de los esfuerzos de tracción aplicados (N_1 y $N_2 = \alpha N_1$). Así, para un valor dado del parámetro $\beta(\alpha)$, las distintas combinaciones de N_1 y M_1 producen diferentes combinaciones de κ_1 y τ_1 y, por consiguiente, distintas distribuciones de deformación en el espesor. Para establecer las relaciones entre las deformaciones y las fuerzas externas es necesario recurrir a la ley de comportamiento del material. La formulación matemática que se muestra a continuación amplía el análisis realizado por El-Domiaty y Shabaik (1984) y El-Domiaty *et ál.* (1996).

La tensión principal mayor se obtiene de (3.9) como:

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_{eq}}{\varphi(\alpha)} \quad (3.23)$$

Considerando la independencia de la historia de deformación, y dado que se considera que las componentes elásticas y plásticas están gobernadas por las mismas relaciones, la deformación equivalente en un estado elástico-plástico general se obtiene de (3.15) como:

$$\varepsilon_{eq} = \rho(\beta)\varepsilon_1 \quad (3.24)$$

Sustituyendo (3.23) y (3.24) en la ley de comportamiento dada en (3.8) se obtiene la siguiente relación entre σ_1 y ε_1 , válida sólo para procesos de carga proporcional:

$$\sigma_1 = \begin{cases} E'(\alpha)\varepsilon_1 & (\sigma_1 \leq \sigma_{1,Y}) \\ K'(\alpha)\varepsilon_1^n & (\sigma_1 > \sigma_{1,Y}) \end{cases} \quad (3.25)$$

siendo $\sigma_{1,Y} = \sigma_0/\varphi(\alpha)$ la tensión principal máxima en el límite elástico y E' y K' unas constantes que dependen del material y del estado tensional y cuyas expresiones vienen dadas por:

$$E'(\alpha) = E \frac{\rho(\beta)}{\varphi(\alpha)} \quad , \quad K'(\alpha) = K \frac{\rho^n(\beta)}{\varphi(\alpha)} \quad (3.26)$$

Teniendo en cuenta (3.5) y (3.25), los gradientes de tensiones principales en el espesor (σ_1 y $\sigma_2 = \alpha\sigma_1$) pueden ser expresados en función de las variables κ_1 y τ_1 . Nótese que en el actual modelo de carga proporcional, las ecuaciones ponen de manifiesto que la superficie neutra (*i.e.* la superficie donde se cumple $\sigma_1 = \sigma_2 = 0$) coincide con la indeformada ($\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0$).

Dado que cada fibra localizada en ζ tiene su propia deformación y su propia tensión, pueden coexistir en el espesor fibras en estado elástico y en estado plástico de forma simultánea. Según la combinación de κ_1 y τ_1 , la distribución de tensión $\sigma_1(\zeta)$ en el espesor puede presentar uno de los siguientes patrones (Figura 3.4) (El-Domiaty y Shabaik, 1984):

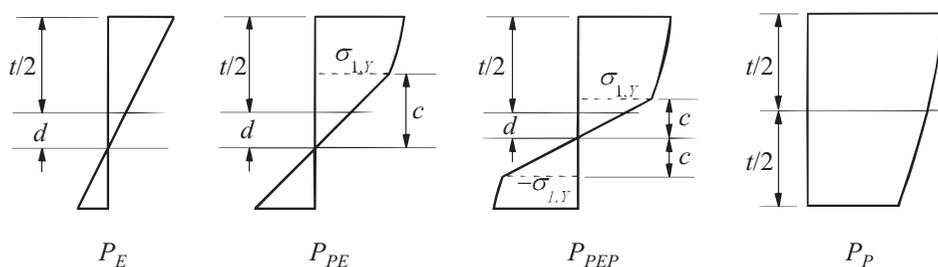


Figura 3.4: Posibles patrones de tensiones en el espesor en un proceso de carga proporcional.

1. Una distribución de tensiones completamente elástica (patrón P_E), es decir, todo el espesor de la chapa está deformado elásticamente.
2. Una distribución de tensiones con plastificación parcial en la cara externa de la chapa (patrón P_{PE}).

3. Una distribución de tensiones donde las fibras en ambas caras de la chapa están plastificadas. Este patrón puede tener dos posibilidades ya que la plastificación puede ser de signo opuesto (tracción y compresión) a ambos lados de la superficie neutra, y por tanto con una región interna en régimen elástico (patrón P_{PEP}), o del mismo signo (tracción) en toda la chapa (patrón P_P).

En la Figura 3.4, $d = r_{m,1} - r_{n,1}$ es la distancia de la superficie neutra a la superficie media de la chapa y $c = r_0 - r_{n,1}$ es la distancia de la superficie neutra a la fibra en el límite elasto-plástico, siendo r_0 el radio de esta última fibra. Estos dos parámetros y el espesor t son utilizados por El-Domiaty y Shabaik (1984) para identificar los límites de integración en las expresiones del axil y del flector bajo condiciones de deformación plana, y caracterizar así los patrones de tensiones. Las condiciones de transición entre los tres patrones de distribución de tensiones definidos anteriormente se pueden expresar como una relación entre c , d y t como:

$c = t/2 + d$: transición entre los patrones P_E y P_{PE} (*i.e.* el instante en el que la cara externa de la chapa plastifica).

$c = t/2 - d$: transición entre los patrones P_{PE} y P_{PEP} (*i.e.* el instante en el que la cara interna de la chapa plastifica a compresión), o transición entre los patrones P_{PE} y P_P (*i.e.* el instante en el que la cara interna de la chapa plastifica a tracción, quedando la línea neutra por debajo del material).

Existe una relación biunívoca entre las parejas de parámetros κ_1 - τ_1 y c - d , de manera que la elección de una u otra es sólo cuestión de conveniencia. Se puede cambiar de pareja de parámetros fácilmente mediante:

$$\kappa_1 = \frac{t}{d + \frac{c}{e^{\varepsilon_{1,Y}(\beta)} - 1}} \quad , \quad \tau_1 = \frac{\frac{c}{e^{\varepsilon_{1,Y}(\beta)} - 1}}{d + \frac{c}{e^{\varepsilon_{1,Y}(\beta)} - 1}} \quad (3.27)$$

o bien el cambio inverso:

$$c = \frac{\tau_1}{\kappa_1} \left(e^{\varepsilon_{1,Y}(\beta)} - 1 \right) t \quad , \quad d = \frac{1 - \tau_1}{\kappa_1} t \quad (3.28)$$

siendo $\varepsilon_{1,Y}$ la deformación principal mayor en el límite elástico.

Dado que los límites de transición entre los patrones de tensiones vienen determinados por la condición de plastificación en las fibras externa e interna de la

chapa, cuya deformación es, respectivamente,

$$\begin{aligned}\varepsilon_{1,out} &= \varepsilon_1(\zeta = 1/2) = \ln \frac{1 + \kappa_1/2}{\tau_1} \\ \varepsilon_{1,in} &= \varepsilon_1(\zeta = -1/2) = \ln \frac{1 - \kappa_1/2}{\tau_1}\end{aligned}\quad (3.29)$$

se pueden definir los límites de transición entre los patrones de tensiones mediante una simple relación entre los parámetros κ_1 y τ_1 y la deformación principal mayor al alcanzarse la plastificación del material ($\varepsilon_{1,Y}(\beta)$) de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}P_E \rightarrow P_{PE} : \quad \varepsilon_{1,out} &= \varepsilon_{1,Y}(\beta) \quad \Rightarrow \quad \tau_1 = (1 + \kappa_1/2)e^{-\varepsilon_{1,Y}(\beta)} \\ P_{PE} \rightarrow P_{PEP} : \quad \varepsilon_{1,in} &= -\varepsilon_{1,Y}(\beta) \quad \Rightarrow \quad \tau_1 = (1 - \kappa_1/2)e^{\varepsilon_{1,Y}(\beta)} \\ P_{PE} \rightarrow P_P : \quad \varepsilon_{1,in} &= \varepsilon_{1,Y}(\beta) \quad \Rightarrow \quad \tau_1 = (1 - \kappa_1/2)e^{-\varepsilon_{1,Y}(\beta)}\end{aligned}\quad (3.30)$$

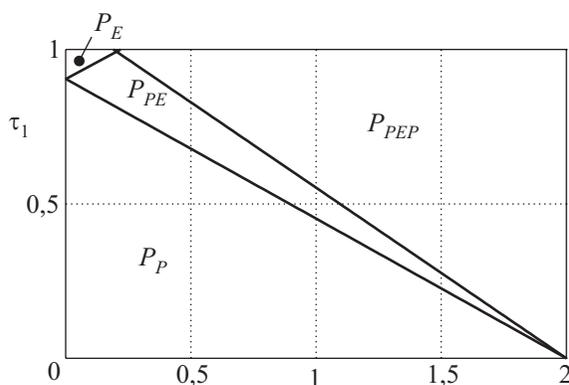


Figura 3.5: Rango de cada patrón de tensiones en el plano κ_1 - τ_1 .

La Figura 3.5 muestra gráficamente estos límites de transición en el plano κ_1 - τ_1 . El rango de posibles valores de la curvatura relativa de la superficie media (κ_1) va desde 0 hasta el valor límite de curvatura máxima ($\kappa_1 = 2$), correspondiente al caso en el que la chapa se dobla sobre sí misma, *i.e.* cuando el radio interior de la chapa es nulo, característica típica en las operaciones de dobladillo (*hemming*). Asimismo, el rango de posibles valores de la contribución en la reducción del espesor relativo de la chapa en la dirección de mayor deformación (τ_1) va desde 1 como valor inicial a 0 como valor extremo final. Para poder apreciar la forma de las distintas regiones, en la figura se ha considerado un material con una deformación principal máxima en el límite elástico intencionadamente exagerada ($\varepsilon_{1,Y} = 0,1$). Para valores más pequeños y realistas de $\varepsilon_{1,Y}$, el patrón P_E queda confinado en la esquina superior izquierda de la gráfica.

3.2.3. Evolución axil-flector. Diagrama MN

A partir de las distribuciones de tensiones $\sigma_1(\zeta)$ y $\sigma_2(\zeta) = \alpha\sigma_1(\zeta)$, los esfuerzos axiales y los momentos flectores, por unidad de longitud, se calculan mediante las siguientes integrales:

$$N_1 = \int_{-1/2}^{1/2} \sigma_1(\zeta) d\zeta \quad , \quad N_2 = \alpha N_1 \quad (3.31)$$

$$M_1 = \int_{-1/2}^{1/2} \sigma_1(\zeta) \zeta d\zeta \quad , \quad M_2 = \alpha M_1 \quad (3.32)$$

En forma adimensional, el axil y el flector en la dirección 1 se expresan como:

$$n_1 = \frac{t}{N_{1,Y}} \int_{-1/2}^{1/2} \sigma_1(\zeta) d\zeta \quad (3.33)$$

$$m_1 = \frac{t^2}{M_{1,Y}} \int_{-1/2}^{1/2} \sigma_1(\zeta) \zeta d\zeta \quad (3.34)$$

donde $N_{1,Y}$ es el *esfuerzo axil elástico máximo*, *i.e.* el axil correspondiente a una tracción pura biaxial con la misma constante de proporcionalidad de carga (α), que consigue que todas las fibras alcancen justo el límite elástico, y $M_{1,Y}$ es el *momento flector elástico máximo*, *i.e.* el momento flector debido a una flexión pura biaxial con la misma α , que consigue que las fibras externa e interna alcancen justo el límite elasto a tracción y a compresión, respectivamente. Ambos esfuerzos están expresados por unidad de ancho.

El esfuerzo axil elástico máximo ($N_{1,Y}$) puede calcularse mediante la expresión $N_{1,Y} = \sigma_{1,Y}(\alpha) t_N$, donde t_N es el espesor final de la chapa en el proceso de tracción pura biaxial. Dicho espesor se puede estimar fácilmente a partir de la deformación transversal en la chapa:

$$\varepsilon_3 = \ln \frac{t_N}{t_0} = -(1 + \beta) \varepsilon_{1,Y}(\beta) \quad (3.35)$$

En la práctica, el valor de la deformación límite elástica (ε_0 , y en particular $\varepsilon_{1,Y} = \varepsilon_0/\rho(\beta)$) es muy pequeño, de modo que se puede suponer que el espesor prácticamente no varía durante la tracción elástica ($t_N \approx t_0$). Por tanto, el esfuerzo axil elástico máximo se puede aproximar por la expresión:

$$N_{1,Y} \approx \sigma_{1,Y}(\alpha) t_0 \quad (3.36)$$

Análogamente, el momento flector elástico máximo ($M_{1,Y}$) puede calcularse mediante la expresión $M_{1,Y} = \sigma_{1,Y}(\alpha) t_M^2/6$, donde t_M es el espesor de la chapa

al final del proceso de flexión elástica pura biaxial. Por motivos análogos al caso anterior, es también posible hacer $t_M \approx t_0$, de manera que el momento flector elástico máximo queda como:

$$M_{1,Y} \approx \frac{\sigma_{1,Y}(\alpha) t_0^2}{6} \quad (3.37)$$

Sustituyendo (3.36) y (3.37) en (3.33) y (3.34), los esfuerzos adimensionales quedan como:

$$n_1 = \frac{\tau}{\sigma_{1,Y}} \int_{-1/2}^{1/2} \sigma_1(\zeta) d\zeta \quad (3.38)$$

$$m_1 = \frac{6\tau^2}{\sigma_{1,Y}} \int_{-1/2}^{1/2} \sigma_1(\zeta) \zeta d\zeta \quad (3.39)$$

donde $\tau = t/t_0$ es la reducción del espesor. Dentro de las integrales, la tensión σ_1 en cada fibra tomará una de las dos expresiones dadas en (3.25).

A modo de ejemplo, si se considera la distribución de tensiones correspondiente al patrón P_{PEP} , donde coexisten fibras en estado elástico y fibras plastificadas a compresión y a tracción, el axil adimensional tomaría la forma:

$$n_1 = \frac{\tau}{\sigma_{1,Y}} \left(\int_{-1/2}^{\zeta_{Y-}} K'(-\varepsilon_1)^n d\zeta + \int_{\zeta_{Y-}}^{\zeta_{Y+}} E' \varepsilon_1 d\zeta + \int_{\zeta_{Y+}}^{1/2} K' \varepsilon_1^n d\zeta \right) \quad (3.40)$$

siendo ζ_{Y-} y ζ_{Y+} las posiciones de las fibras en el límite elástico a compresión y tracción, respectivamente. Éstas se calculan como:

$$\varepsilon_1(\zeta_{Y-}) = -\varepsilon_{1,Y}(\beta) \quad \Rightarrow \quad \zeta_{Y-} = \frac{\tau_1}{\kappa_1} e^{-\varepsilon_{1,Y}(\beta)-1} \quad (3.41)$$

$$\varepsilon_1(\zeta_{Y+}) = \varepsilon_{1,Y}(\beta) \quad \Rightarrow \quad \zeta_{Y+} = \frac{\tau_1}{\kappa_1} e^{\varepsilon_{1,Y}(\beta)-1} \quad (3.42)$$

Si no se tiene en cuenta la variación del espesor, como ocurre en ocasiones, los esfuerzos adimensionales vendrán dados por las expresiones (3.38) y (3.39) con $\tau = 1$. En esta situación, dado que para un determinado β la distribución de tensiones σ_1 se puede expresar en términos de κ_1 y τ_1 , existirá una relación biunívoca entre esta pareja de parámetros y los esfuerzos adimensionales n_1 y m_1 . Así, las transiciones entre los distintos patrones de tensiones se pueden expresar en el plano n_1 - m_1 de forma análoga al plano κ_1 - τ_1 . Esta representación, denominada diagrama flector-axil o *diagrama MN*, se muestra esquemáticamente en la Figura 3.6. El diagrama MN mostrado en la figura es análogo al obtenido por El-Domiatty y Shabaik (1984) en condiciones de deformación plana, los cuales no consideraron la

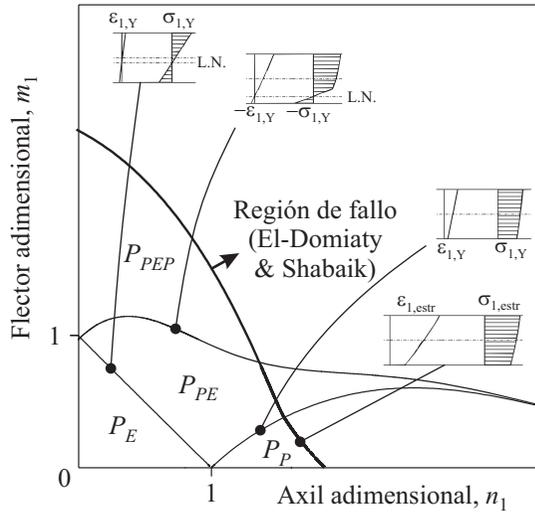


Figura 3.6: Diagrama MN sin considerar la reducción de espesor.

reducción del espesor de la chapa durante el proceso de conformado. A modo ilustrativo, se representa la distribución de deformaciones y tensiones representativa de cada rango. La figura muestra también, mediante una curva de trazo grueso, el límite de conformado propuesto por los mencionados autores, quienes supusieron que la estricción localizada se produce cuando la cara externa de la chapa alcanza un valor límite de deformación ($\varepsilon_{1,out} = \varepsilon_{1,neck}$).

Si de manera más realista se considera el cambio en el espesor, cuando la deformación de la chapa comienza a ser grande las cargas aplicadas pueden alcanzar un máximo y posteriormente decrecer, debido al adelgazamiento que sufre el espesor de la chapa. Esto implica que, cuando el estirado es suficientemente severo, la chapa puede perder su capacidad de soportar la carga al alcanzar una condición de inestabilidad. En esta situación, los esfuerzos adimensionales n_1 y m_1 definidos en (3.38) y (3.39) no permiten discernir si la carga aplicada es previa o posterior a la máxima. Desde el punto de visto matemático, este hecho implica que no existe una relación biunívoca entre las parejas de parámetros κ_1 - τ_1 y n_1 - m_1 , cosa que sí ocurre en el trabajo de El-Domiaty y Shabaik (1984), donde no se considera la reducción de espesor. Este inconveniente puede ser solventado adoptando los

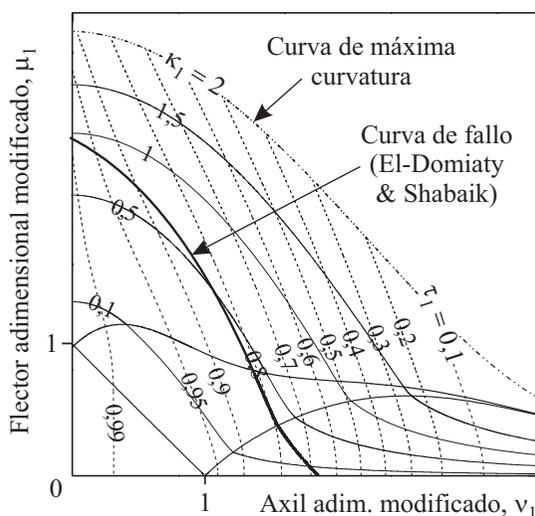


Figura 3.7: Diagrama MN esquemático en el modelo proporcional, considerando la reducción de espesor.

siguientes *esfuerzos adimensionales modificados*:

$$\nu_1 = \frac{n_1}{\tau} = \frac{1}{\sigma_{1,Y}} \int_{-1/2}^{1/2} \sigma_1(\zeta) d\zeta \quad (3.43)$$

$$\mu_1 = \frac{m_1}{\tau^2} = \frac{6}{\sigma_{1,Y}} \int_{-1/2}^{1/2} \sigma_1(\zeta) \zeta d\zeta \quad (3.44)$$

Como se puede apreciar en estas expresiones, ν_1 y μ_1 dependen únicamente de la distribución de tensiones y son independientes del espesor de la chapa. Además, evidentemente, si se desprecia la reducción de espesor, entonces $\nu_1 = n_1$ y $\mu_1 = m_1$, coincidiendo así con el análisis de El-Domiaty y Shabaik (1984). Por consiguiente, el diagrama MN propuesto por estos autores sigue siendo válido, pero tomando las variables ν_1 - μ_1 en vez de n_1 - m_1 , tal y como muestra la Figura 3.7.

El diagrama MN de la Figura 3.7 muestra también algunas curvas isoparamétricas $\kappa_1 = cte.$ y $\tau_1 = cte.$ Nótese que el caso $\kappa_1 = 2$ corresponde al caso límite de máxima curvatura descrito en el apartado anterior. Las curvas $\tau_1 = cte.$ son también curvas de espesor constante debido a la relación $\tau = \tau_1^{1+\beta}$ dada en (3.21). Nótese en el diagrama cómo un proceso de tracción pura (evolución a lo largo del eje $\mu_1 = 0$) no produce curvatura (las curvas $\kappa_1 = cte.$ se hacen paralelas al eje de abscisas) pero sí reduce el espesor. Asimismo, un proceso de flexión pura

(evolución a lo largo del eje $\nu_1 = 0$) produce un efecto considerable en la curvatura y una reducción de espesor muy pequeña.

En resumen, dados los parámetros que definen la geometría de la chapa deformada (β y las 2 variables independientes κ_1 y τ_1), los posibles patrones de tensiones en el espesor se pueden representar en un diagrama ν_1 - μ_1 o diagrama MN como el de la Figura 3.7. Como se verá en el capítulo siguiente, el criterio de fallo por estricción localizada propuesto por El-Domiaty y Shabaik (1984) no es apropiado. Así, el diagrama MN será modificado para incluir los fallos por estricción localizada y fractura de una manera más acorde con la evidencia experimental.

3.2.4. Aplicabilidad del modelo de carga proporcional

El modelo propuesto de carga proporcional permite analizar un proceso de conformado de chapa sometido a una combinación de esfuerzos biaxiales de tracción y flexión, y donde la evolución de los estados de deformación y tensión de todas las fibras en el espesor pueda ser aproximada por trayectorias lineales. Además, por la hipótesis de tensión plana, los radios de curvatura alcanzados en estos procesos no deberían superar 4 ó 5 veces el espesor de la chapa para que el modelo sea válido.

Las formas de la chapa deformada predichas por el modelo de carga proporcional, en concreto en condiciones de deformación biaxial ($0 < \beta \leq 1$), se ajustan bien en los ensayos de abombamiento mediante hidroconformado (*bulge tests*). En estos ensayos, la chapa se sujeta mediante un prensachapas o matriz con una abertura en general circular ($\beta = 1$) o elíptica ($\beta < 1$) (también hay ensayos con aberturas cuadradas y rectangulares). La chapa se abolla a través de la presión ejercida sobre un fluido, normalmente aceite, adoptando una forma de elipsoide de revolución, cuyas dimensiones dependen de la abertura de la matriz y del nivel de deformación alcanzado (Figura 3.8). Para que el modelo de carga proporcional sea aplicable a este tipo de operaciones, además se tiene que mantener constante la relación entre tensiones ($\alpha = \sigma_2/\sigma_1$). Rees (1995) analizó el flujo plástico desarrollado en ensayos con aberturas elípticas de distintas relaciones entre los semiejes mayor y menor. Usó chapas laminadas de diferentes materiales de aproximadamente 1 mm de espesor y aberturas de la matriz de al menos 20 mm de semieje menor, pudiendo así desprejiciar la tensión transversal en el espesor. Según este autor, la relación entre tensiones (α) se mantiene sensiblemente constante, reduciéndose ligeramente conforme aumenta la deformación. Observó que pequeñas variaciones en α producen variaciones mayores en la relación entre velocidades de deformación (β), de manera que esta última relación no puede considerarse constante para valores de

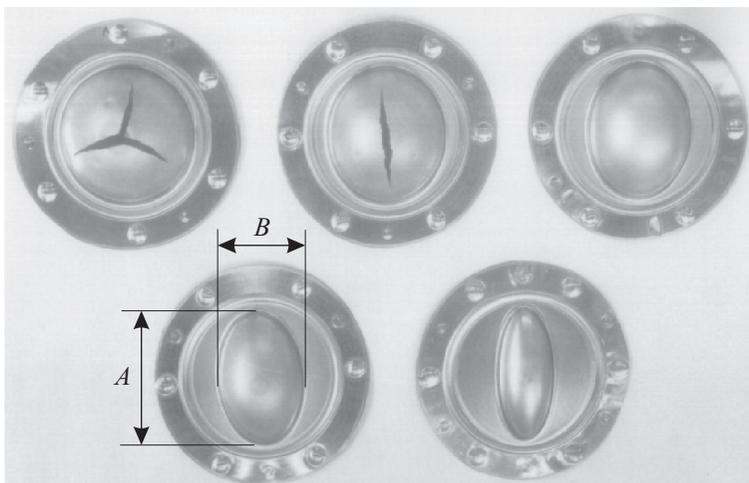


Figura 3.8: Resultados en ensayos de abombamiento mediante hidroconformado (Rees, 1995).

$A/B > 1,3$, siendo A y B los semiejes mayor y menor de la elipse. Según los resultados de Rees, el modelo proporcional reproduciría satisfactoriamente los ensayos de abombamiento elípticos con $1 < A/B \leq 1,3$.

No se ha encontrado en la literatura ningún estudio de ensayos de abolladura u operaciones de hidroconformado similares que analicen el efecto del gradiente de deformación en la conformabilidad de chapa. En todos los casos mantienen relaciones altas de radios de curvatura frente a espesor, siendo los esfuerzos de membrana predominantes. El modelo propuesto de carga proporcional podría usarse para analizar situaciones donde la flexión ejerciera una mayor influencia. Así, por ejemplo, una expresión muy utilizada en los análisis simplificados en los ensayos de abolladura es la condición de equilibrio radial en la cima de la probeta (Rees, 1995; Gutscher *et ál.*, 2004), que asumiendo esfuerzos de membrana se expresa como:

$$\frac{\sigma_1}{R_1} + \frac{\sigma_2}{R_2} = \frac{p}{t} \quad (3.45)$$

donde R_1 y R_2 son los radios de curvatura en la cara interna de la chapa en las dos direcciones principales, y p es la presión ejercida por el fluido sobre la chapa. La expresión análoga que se obtiene con el modelo proporcional es:

$$\kappa_1 \int_{-1/2}^{1/2} \sigma_1(\zeta) d\zeta + \kappa_2 \int_{-1/2}^{1/2} \sigma_2(\zeta) d\zeta = \left(1 - \frac{\kappa_1}{2}\right) \left(1 - \frac{\kappa_2}{2}\right) p \quad (3.46)$$

Es fácil comprobar que esta expresión coincide con (3.45) para pequeñas curvaturas. Así, sustituyendo $\kappa_i = t/r_{m,i}$ en el primer miembro de la expresión y considerando $\kappa_i \ll 1$ en el segundo se tiene:

$$\frac{t}{r_{m,1}} \int_{-1/2}^{1/2} \sigma_1 d\zeta + \frac{t}{r_{m,2}} \int_{-1/2}^{1/2} \sigma_2 d\zeta = p \quad (3.47)$$

Cuando las curvaturas son pequeñas, los radios de las superficies media e interna prácticamente coinciden ($r_{m,i} \approx R_i$) y las distribuciones de tensiones son prácticamente uniformes ($\int \sigma_i d\zeta = \sigma_i$), obteniéndose así la misma expresión dada en (3.45).

Por otro lado, los estudios sobre el efecto de la flexión en la conformabilidad de chapas metálicas se han apoyado habitualmente en resultados experimentales obtenidos de ensayos de estirado con punzones hemiesféricos o cilíndricos (*e.g.* ensayos ASBT) (Keeler, 1968; Goodwin, 1968; Melbourne *et ál.*, 1973; Ghosh y Hecker, 1974; Charpentier, 1975; Uko *et ál.*, 1977; Demeri, 1981b,a; Col, 2002, 2005; Sadagopan *et ál.*, 2003; Sriram *et ál.*, 2003; Tharrett y Stoughton, 2003a,b; Yoshida *et ál.*, 2005; Col y Balan, 2007; Emmens y van den Boogaard, 2008, 2010; Hora y Tong, 2008; Huang *et ál.*, 2008; Kitting *et ál.*, 2008, 2009a,b; Stoughton, 2008; Schleich *et ál.*, 2009; Kruijff *et ál.*, 2009). Todos estos trabajos asumen implícita o explícitamente que la carga es proporcional, aparentemente justificado por el movimiento gradual del punzón. En este tipo de ensayos la chapa se somete a esfuerzos combinados de tracción y flexión (*stretch-bending*) y, a priori, el modelo propuesto de carga proporcional podría ser usado para analizar los resultados experimentales. Sin embargo, se ha comprobado que, en general, existen discrepancias significativas al comparar las predicciones del modelo con los resultados experimentales.

Así, salvo en casos muy concretos, el modelo propuesto de carga proporcional predice unas curvaturas distintas a las observadas en los ensayos. En efecto, en la práctica no se observan las curvaturas anticlásticas predichas por el modelo en condiciones de deformación con $\beta < 0$ (véase la Figura 3.3, pág. 102), ni tampoco se obtienen, en general, formas de elipsoides de revolución con $\beta > 0$. Con un punzón cilíndrico ($\kappa_2 = 0$), la única excepción donde el modelo de carga proporcional predice bien la forma de la chapa deformada es el caso de deformación plana ($\beta = 0$) y, con un punzón hemiesférico ($\kappa_2 = \kappa_1$), la única excepción es el caso de deformación equi-biaxial ($\beta = 1$). Además, la no proporcionalidad de la carga se deduce también por otro fenómeno descrito por algunos autores, que observaron

en los ensayos una compresión inicial del material en la cara interna de la chapa, en contacto con el punzón, antes de producirse el alargamiento generalizado de toda la sección (Uko *et al.*, 1977; Tharrett y Stoughton, 2003a). Este comportamiento del material indica que la flexión predomina sobre la tracción en los primeros instantes del ensayo, invirtiéndose la tendencia posteriormente.

De las observaciones anteriores se deduce que el proceso de carga en los ensayos de estirado con punzón no es proporcional y que, por tanto, el modelo propuesto no es el más idóneo para estas operaciones. En el siguiente apartado se aborda el desarrollo de un modelo más adecuado a este tipo de procesos.

3.3. Modelo flexión-tracción en dos pasos

Como se acaba de discutir, los ensayos de estirado con punzón han sido utilizados muy frecuentemente en el estudio del efecto de la flexión en la conformabilidad de chapas, considerando normalmente la hipótesis de carga proporcional en los análisis. Como se expone en el Capítulo 1, dicha hipótesis ha sido usada profusamente en operaciones en el plano de la chapa, planteando criterios de fallo que no consideran la influencia de la flexión. En la práctica, sin embargo, la existencia de estados de carga no proporcionales es inherente a la mayoría de las operaciones de conformado de chapa, siendo aún más acusada en presencia de gradientes de tensión/deformación en el espesor.

En un ensayo de estirado con punzón, el punzón realiza un simple movimiento de traslación. Desde este punto de vista, se puede inferir que la carga externa, *i.e.* la fuerza que ejerce el punzón, se aplica de forma proporcional. Sin embargo, esto no implica que toda la chapa esté sometida a los mismos esfuerzos, ni que la evolución de éstos sea proporcional. En efecto, los esfuerzos son de compresión transversal sólo en la zona de contacto con el punzón, de tracción en toda la chapa y de flexión solamente en las regiones donde la chapa se dobla, *i.e.* en las zonas de contacto con el punzón y las adyacentes al prensachapas. Así, para que los resultados del ensayo sean válidos para el estudio de la flexión, el fallo debe producirse en la zona de contacto chapa-punzón, *i.e.* en una región donde la chapa queda doblada y cuya curvatura pueda medirse o calcularse. En esta zona de interés existe, por tanto, una combinación de esfuerzos que inducen, en general, una evolución no proporcional del estado de tensión/deformación del material.

La no proporcionalidad de los esfuerzos en el estirado con punzón se deduce de la evidencia experimental. En el análisis del apartado anterior se obtuvo una

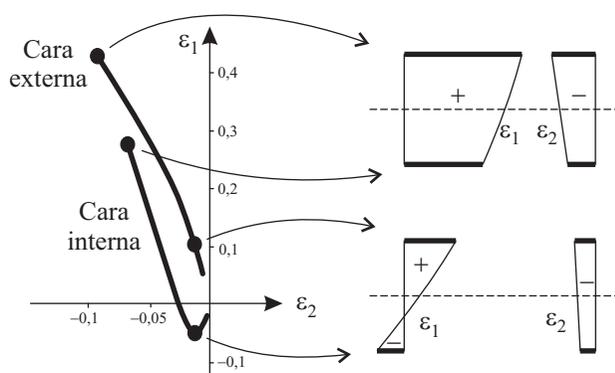


Figura 3.9: Evolución de la deformación en un ensayo de estirado con punzón y gradientes de deformación en el espesor en dos instantes.

restricción en la geometría de la chapa deformada para que la carga sea proporcional (α y β constantes), dada por unas relaciones entre la curvatura y el espesor (ecuaciones (3.21) y (3.22)). Es fácil demostrar que esta restricción no se aprecia en la práctica, dado que se puede alcanzar la misma reducción de espesor utilizando punzones de radios diferentes.

Además, como ya se ha comentado anteriormente, algunos autores han observado una compresión longitudinal inicial que confirma que el estirado con punzón no es un proceso de carga proporcional (Uko *et al.*, 1977; Tharrett y Stoughton, 2003a). Este hecho se aprecia en la Figura 3.9, donde se muestra la evolución de la deformación en las caras externa e interna de la chapa, en un diagrama de deformaciones en el plano, elaborado a partir de los resultados experimentales de un ensayo ASBT de Uko *et al.* (1977) (véase la Figura 2.2, pág. 45). El ensayo fue realizado en una chapa de acero de alta resistencia de 5,26 mm de espesor, usando un punzón cilíndrico de 19 mm de radio. Como se puede apreciar, la deformación longitudinal (ε_1) es siempre de tracción en la cara externa, pero en la cara interna es inicialmente de compresión, estableciéndose bruscamente un gradiente en el espesor. Superada la compresión inicial, ambas trayectorias convergen y la severidad del gradiente tiende a disminuir de forma paulatina, presumiblemente como consecuencia del efecto dominante de la tracción. La figura también muestra de forma esquemática las distribuciones de ε_1 y ε_2 en el espesor al final de la compresión y en el instante final. Nótese que el acortamiento lateral (ε_2) es aproximadamente uniforme en el espesor, debido presumiblemente a la forma cilíndrica del punzón, que sólo genera curvatura en la dirección longitudinal de la chapa.

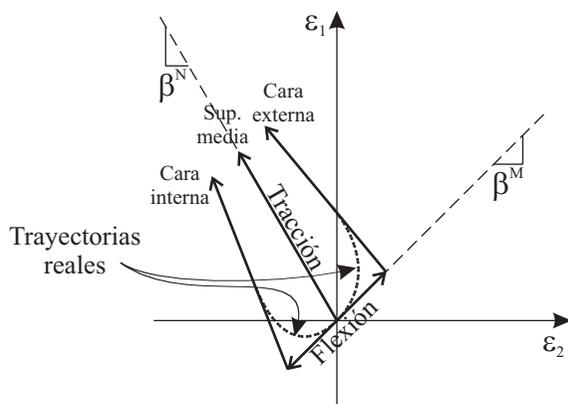


Figura 3.10: Evolución de la deformación en el modelo flexión-tracción en dos pasos.

En el modelado de procesos de carga proporcional es habitual usar la *teoría de deformación*. En cambio, en procesos de carga no proporcional se requiere trazar la historia de deformación y es necesario, por tanto, recurrir a la *teoría del flujo plástico*. En general, estos problemas se resuelven de forma incremental, habitualmente mediante métodos numéricos, siguiendo la trayectoria de carga o de deformación preestablecida. No obstante, si las trayectorias no son demasiado complejas, en ocasiones es posible obtener soluciones analíticas.

El nuevo modelo que se propone se basa en las evidencias experimentales que muestran que la flexión predomina en las primeras etapas de los ensayos y posteriormente es la tracción la que ejerce una mayor influencia. En base a estas observaciones, y con el objetivo de simplificar el análisis en la búsqueda de soluciones analíticas, se plantea un modelo de carga compuesto por dos procesos consecutivos, donde cada uno de ellos constituye en sí mismo una carga proporcional (Figura 3.10):

1. Una primera etapa de flexión pura en las dos direcciones principales del plano de la chapa, hasta el instante en que la cara interna de la chapa adquiere la curvatura impuesta por el punzón. Se asume que el espesor no varía en esta etapa, de manera que la geometría de la chapa deformada queda caracterizada por la curvatura.
2. Una segunda etapa de tracción biaxial hasta el fallo del material. La curvatura de la chapa queda fijada por la forma del punzón, siendo el espesor el parámetro geométrico que caracteriza el conformado en esta etapa.

De acuerdo con el nuevo modelo propuesto, el primer paso consiste en una flexión biaxial pura. Dado que esta primera etapa consiste en un proceso de carga monótono e incremental, la evolución de las deformaciones y de las tensiones es independiente del camino de carga. Por tanto, se puede considerar el mismo análisis planteado en el modelo de carga proporcional del apartado anterior, despreciando ahora los efectos de los esfuerzos de tracción. Como consecuencia de la hipótesis adoptada de curvaturas moderadas, el espesor no varía. Así, la relación entre las velocidades de deformación (β^M) y, por tanto, la relación entre las tensiones (α^M), se mantienen constantes y del mismo valor en todas las fibras de la sección. La Figura 3.10 muestra de forma esquemática las trayectorias lineales de deformación en esta etapa de las caras externa (alargamiento) e interna (acortamiento) de la chapa, siendo la pendiente β^M la misma para todas las fibras en el espesor. Los momentos flectores en ambas direcciones cumplen, por tanto, la siguiente relación:

$$\frac{M_2}{M_1} = \alpha^M \quad (3.48)$$

La evolución de la tracción biaxial se modela asumiendo que las curvaturas de la cara interna de la chapa coinciden con las del punzón y mantienen, por tanto, un valor constante. De forma análoga al primer paso de flexión, esta segunda etapa o etapa de tracción se modela como un proceso de carga proporcional, con unas relaciones entre velocidades de deformación (β^N) y entre tensiones (α^N) constantes en todo el espesor. Sin embargo, como se demuestra más adelante, esto no es posible debido al gradiente de deformación/tensión que se produce en el paso previo de flexión. En efecto, las mencionadas relaciones no pueden ser las mismas en cada fibra de la chapa, existiendo una variación en el espesor: $\beta^N(\zeta)$ y $\alpha^N(\zeta)$. Como medida de compromiso, se asumirá que durante la tracción estos parámetros se mantienen constantes en la superficie media de la chapa ($\zeta = 0$). La Figura 3.10 muestra las trayectorias de deformación en esta etapa de las superficies externa, media e interna de la chapa. Nótese que las trayectorias de todas las fibras tienden a converger a la de la superficie media, como consecuencia de la reducción del espesor.

Además, debido a la compresión inicial y posterior tracción que sufren las fibras en la cara interna de la chapa, se produce una inversión de la carga en dichas fibras. Esta inversión no es relevante cuando se usan punzones con radios grandes, pero en caso contrario su efecto puede ser determinante en el comportamiento del material y debe, por tanto, ser convenientemente tenida en cuenta. Para modelar dicha inversión, se asume un endurecimiento cinemático del material, permitiendo así

considerar el efecto Bauschinger.

3.3.1. Evolución de las deformaciones

Considérese el primer paso de flexión pura. Dado que el espesor no se reduce ($\tau = 1$), la superficie media de la chapa no se deforma (*i.e.* $\tau_1 = \tau_2 = 1$). Así, las distribuciones de deformación en el espesor dadas en (3.5) y (3.6) se reducen a las siguientes expresiones:

$$\varepsilon_1^M(\zeta) = \ln(1 + \kappa_1^M \zeta) \quad (3.49)$$

$$\varepsilon_2^M(\zeta) = \ln(1 + \kappa_2^M \zeta) \quad (3.50)$$

donde el superíndice M indica un instante durante la etapa de flexión. Como se puede observar, κ_1^M y κ_2^M son las únicas variables independientes que definen la geometría de la chapa deformada. Sean κ_1^{MN} y κ_2^{MN} los valores de dichas variables en el instante final del proceso de flexión, donde el superíndice MN indica la transición entre los dos pasos del modelo. Dichas curvaturas están relacionadas directamente con las curvaturas del punzón y el espesor de la chapa. En particular, éstas quedan como:

$$\kappa_1^{MN} = \frac{t_0}{R_1 + t_0/2} \quad , \quad \kappa_2^{MN} = \frac{t_0}{R_2 + t_0/2} \quad (3.51)$$

siendo t_0 el espesor inicial de la chapa y donde R_1 y R_2 son los radios del punzón o de la cara interna de la chapa al final del proceso de flexión.

Teniendo en cuenta (3.51), las deformaciones ε_1^{MN} y ε_2^{MN} al final del primer paso se obtienen de (3.49) y (3.50) como:

$$\varepsilon_1^{MN}(\zeta) = \ln(1 + \kappa_1^{MN} \zeta) \quad (3.52)$$

$$\varepsilon_2^{MN}(\zeta) = \ln(1 + \kappa_2^{MN} \zeta) \quad (3.53)$$

Atendiendo a la proporcionalidad de este primer paso, la relación entre velocidades de deformación (β^M) se puede expresar como:

$$\beta^M = \frac{d\varepsilon_2^M}{d\varepsilon_1^M} = \frac{\varepsilon_2^{MN}}{\varepsilon_1^{MN}} = \frac{\ln(1 + \kappa_1^{MN} \zeta)}{\ln(1 + \kappa_2^{MN} \zeta)} \quad (3.54)$$

Asimismo, si se emplea la hipótesis de curvaturas moderadas ($\kappa_i^{MN} \zeta \ll 1$), la expresión anterior puede ser aproximada como:

$$\beta^M \approx \frac{\kappa_2^{MN}}{\kappa_1^{MN}} = \frac{r_{m,1}^{MN}}{r_{m,2}^{MN}} \quad (3.55)$$

donde $r_{m,1}^{MN}$ y $r_{m,2}^{MN}$ son los radios de la superficie media de la chapa al final de la etapa de flexión. Al igual que antes, resulta conveniente usar los radios de curvatura de la cara interna de la chapa, que coinciden con los del punzón en el instante considerado (R_1 y R_2), en vez de los de la superficie media. Así, la relación anterior se puede expresar también como:

$$\beta^M \approx \frac{R_1 + t_0/2}{R_2 + t_0/2} \quad (3.56)$$

Esta expresión permite estimar β^M durante el paso de flexión a partir de datos exclusivamente geométricos (R_1 , R_2 y t_0), así como calcular la relación de tensiones principales $\alpha^M(\beta^M)$.

Siguiendo el actual modelo, el proceso de flexión es seguido por un proceso de tracción. Los radios de curvatura de la cara interna se mantienen constantes e iguales a R_1 y R_2 durante este segundo paso, mientras que el espesor se reduce (*i.e.* τ se irá haciendo menor que 1). La deformación de las fibras seguirá un camino diferente al del proceso de flexión (véase la Figura 3.10).

De las expresiones (3.5) y (3.6), la evolución de los diferenciales de deformación puede ser expresada mediante:

$$d\varepsilon_1^N(\zeta) = \frac{\partial \varepsilon_1^N}{\partial \kappa_1^N} d\kappa_1^N + \frac{\partial \varepsilon_1^N}{\partial \tau_1} d\tau_1 = \frac{\zeta d\kappa_1^N}{1 + \kappa_1^N \zeta} - \frac{d\tau_1}{\tau_1} \quad (3.57)$$

$$d\varepsilon_2^N(\zeta) = \frac{\partial \varepsilon_2^N}{\partial \kappa_2^N} d\kappa_2^N + \frac{\partial \varepsilon_2^N}{\partial \tau_2} d\tau_2 = \frac{\zeta d\kappa_2^N}{1 + \kappa_2^N \zeta} - \frac{d\tau_2}{\tau_2} \quad (3.58)$$

donde el superíndice N indica ahora un instante genérico durante la etapa de tracción. La relación entre las velocidades de deformación se define entonces como:

$$\beta^N(\zeta) = \frac{d\varepsilon_2^N(\zeta)}{d\varepsilon_1^N(\zeta)} = \frac{\zeta d\kappa_2^N / (1 + \kappa_2^N \zeta) - d\tau_2 / \tau_2}{\zeta d\kappa_1^N / (1 + \kappa_1^N \zeta) - d\tau_1 / \tau_1} \quad (3.59)$$

donde ahora la evolución del gradiente $\beta^N(\zeta)$ depende de la historia de carga, *i.e.* del final del estado previo de flexión. Como se ha discutido previamente, el valor de $\alpha^N(\zeta)$, y por tanto el valor de $\beta^N(\zeta)$, no pueden ser los mismos para todas las fibras, debido a la reducción de espesor. Siguiendo los razonamientos previos, se tomará como valor característico de $\beta^N(\zeta)$ durante la tracción el valor correspondiente al de la superficie media, el cual se asume constante durante todo el segundo paso:

$$\beta^N := \beta^N(\zeta = 0) = \frac{d\tau_2 / \tau_2}{d\tau_1 / \tau_1} \quad (3.60)$$

Esta expresión permite relacionar las relaciones τ_1 y τ_2 en función de la relación de deformaciones media β^N . En efecto, haciendo la derivada de la expresión de la reducción de espesor adimensional $\tau = \tau_1 \tau_2$, dada en (3.7), se obtiene:

$$\frac{d\tau}{\tau} = \frac{d\tau_1}{\tau_1} + \frac{d\tau_2}{\tau_2} \quad (3.61)$$

Sustituyendo (3.60) en (3.61) e integrando se obtiene:

$$\tau_1(\tau) = \tau^{\frac{1}{1+\beta^N}} \quad (3.62)$$

$$\tau_2(\tau) = \tau^{\frac{\beta^N}{1+\beta^N}} \quad (3.63)$$

Por otro lado, las curvaturas relativas de la superficie media (κ_1^N y κ_2^N) también se pueden expresar en función de τ como sigue:

$$\kappa_1^N(\tau) = \frac{t}{R_1 + t/2} = \frac{\tau}{R_1/t_0 + \tau/2} \quad (3.64)$$

$$\kappa_2^N(\tau) = \frac{t}{R_2 + t/2} = \frac{\tau}{R_2/t_0 + \tau/2} \quad (3.65)$$

Como se puede observar en las ecuaciones (3.62), (3.63), (3.64) y (3.65), durante el proceso de tracción la única variable independiente es la reducción de espesor (τ). Introduciendo dichas expresiones en (3.57) y (3.58) los diferenciales de deformación se pueden expresar como:

$$d\varepsilon_1^N(\zeta) = \left(\frac{\zeta}{1 + \kappa_1^N \zeta} \frac{d\kappa_1^N}{d\tau} - \frac{1}{\tau_1} \frac{d\tau_1}{d\tau} \right) d\tau \quad (3.66)$$

$$d\varepsilon_2^N(\zeta) = \left(\frac{\zeta}{1 + \kappa_2^N \zeta} \frac{d\kappa_2^N}{d\tau} - \frac{1}{\tau_2} \frac{d\tau_2}{d\tau} \right) d\tau \quad (3.67)$$

siendo:

$$\begin{aligned} \frac{d\kappa_1^N}{d\tau} &= \frac{R_1/t_0}{(R_1/t_0 + \tau/2)^2} \\ \frac{d\kappa_2^N}{d\tau} &= \frac{R_2/t_0}{(R_2/t_0 + \tau/2)^2} \\ \frac{d\tau_1}{d\tau} &= \frac{1}{1 + \beta^N} \tau^{-\frac{\beta^N}{1+\beta^N}} \\ \frac{d\tau_2}{d\tau} &= \frac{\beta^N}{1 + \beta^N} \tau^{-\frac{1}{1+\beta^N}} \end{aligned} \quad (3.68)$$

Integrando entre $\tau = 1$ y τ , las deformaciones en un instante y posición genéricos durante la segunda etapa de tracción se expresan como:

$$\varepsilon_1^N(\zeta) = \ln \left(1 + \frac{\tau \zeta}{R_1/t_0 + \tau/2} \right) - \frac{1}{1 + \beta^N} \ln \tau \quad (3.69)$$

$$\varepsilon_2^N(\zeta) = \ln \left(1 + \frac{\tau \zeta}{R_2/t_0 + \tau/2} \right) - \frac{\beta^N}{1 + \beta^N} \ln \tau \quad (3.70)$$

Nótese que particularizando ambas expresiones en el instante inicial de la etapa de tracción ($\tau = 1$) se obtienen las mismas expresiones que en el instante final de la flexión:

$$\varepsilon_1^N(\zeta)|_{\tau=1} = \ln \left(1 + \frac{\zeta}{R_1/t_0 + 1/2} \right) = \ln (1 + \kappa_1^{MN} \zeta) = \varepsilon_1^{MN}(\zeta) \quad (3.71)$$

$$\varepsilon_2^N(\zeta)|_{\tau=1} = \ln \left(1 + \frac{\zeta}{R_2/t_0 + 1/2} \right) = \ln (1 + \kappa_2^{MN} \zeta) = \varepsilon_2^{MN}(\zeta) \quad (3.72)$$

Por último, la relación entre diferenciales de deformación para cada fibra en el espesor, definida en (3.59), se expresa en función de τ como:

$$\beta^N(\zeta) = \frac{\frac{R_1}{t_0} \zeta}{\left(\frac{R_1}{t_0} + \left(\frac{1}{2} + \zeta \right) \tau \right) \left(\frac{R_1}{t_0} + \frac{\tau}{2} \right)} - \frac{\beta^N}{1 + \beta^N} \quad (3.73)$$

$$\frac{\frac{R_2}{t_0} \zeta}{\left(\frac{R_2}{t_0} + \left(\frac{1}{2} + \zeta \right) \tau \right) \left(\frac{R_2}{t_0} + \frac{\tau}{2} \right)} - \frac{1}{1 + \beta^N}$$

En la práctica, los ensayos de estirado con flexión se realizan con punzones cilíndricos o hemiesféricos, como se ha comentado anteriormente. En el caso de punzón cilíndrico se observa que la deformación se inicia en un estado aproximado de deformación plana (Uko *et al.*, 1977; Tharrett y Stoughton, 2003a), mientras que con punzones hemiesféricos la chapa experimenta un estado inicial aproximado de deformación equi-biaxial (Hotz y Timm, 2008, véase en el Apartado 2.1, pág. 51, Figura 2.4). Estas observaciones son fácilmente reproducibles con el modelo propuesto. En efecto, el punzonado cilíndrico se simula imponiendo un valor $\beta^M = 0$, el cual se corresponde con un radio de punzón infinito en la dirección lateral ($R_2 = \infty$). Para modelar el punzonamiento hemiesférico se impondría un valor $\beta^M = 1$ al final del paso de flexión, el cual refleja que los radios de curvatura son idénticos en todas direcciones ($R_2 = R_1$).

La Figura 3.11(arriba) muestra de manera genérica la evolución de la deformación, obtenida con el actual modelo, típica de un estirado con un punzón cilíndrico ($\beta^M = 0$), en dos diagramas de deformaciones principales. El diagrama de la izquierda simula un radio pequeño del punzón y el de la derecha un radio grande. En este tipo de operaciones se obtienen habitualmente trayectorias en el lado izquierdo del diagrama. En particular, la figura representa un caso aproximado de tracción pura ($\beta^N = -0,5$). Los caminos de deformación que se muestran se corresponden

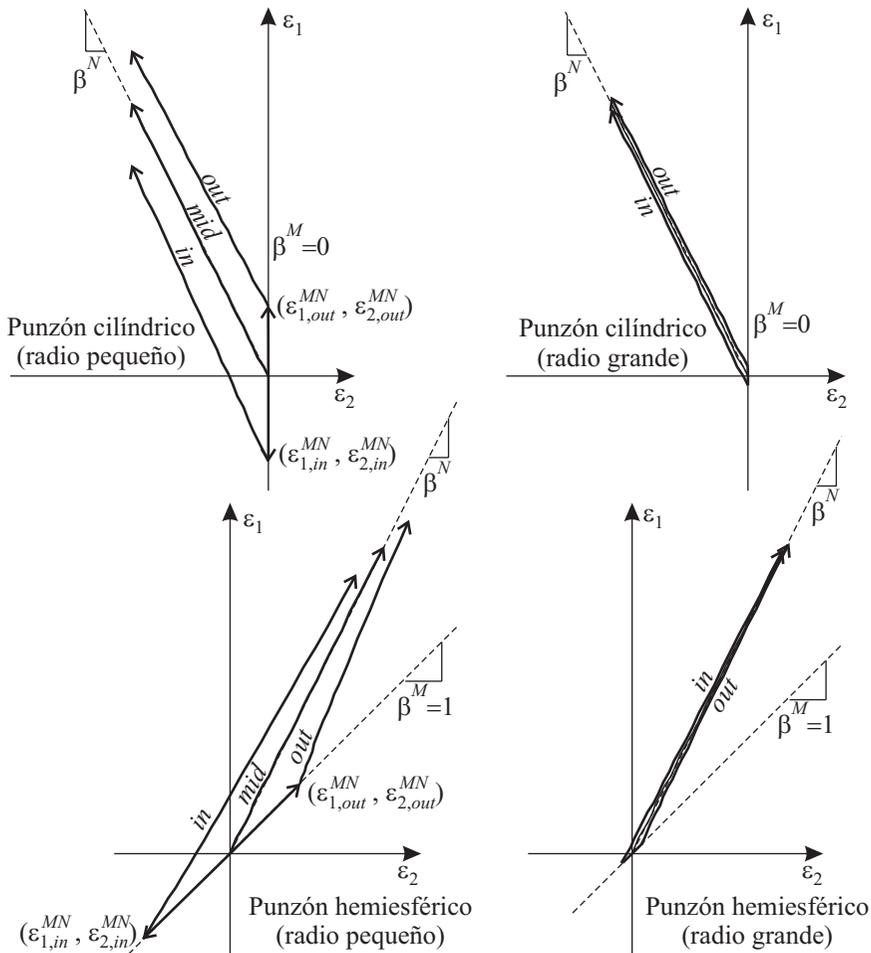


Figura 3.11: Efecto de la flexión en la evolución de la deformación en las superficies externa (*out*), media (*mid*) e interna (*in*) de la chapa, considerando un punzón cilíndrico (arriba) y uno hemisférico (abajo), de radios pequeños (izquierda) y grandes (derecha); las deformaciones se han calculado mediante el modelo flexión-tracción en dos pasos con unos valores de curvatura $t_0/R_1 = 0,5$ y $t_0/R_1 = 0,05$, respectivamente, y una reducción del espesor $\tau = 0,7$ en todos los casos.

con la deformación en las superficies externa, media e interna de la chapa (subíndices *out*, *mid* e *in*, respectivamente). El resto de fibras siguen caminos intermedios y no se representan por claridad. Todas las trayectorias están compuestas por dos tramos, correspondientes a las sucesivas etapas de flexión y tracción. Como se puede apreciar, el gradiente que se genera en el primer paso de flexión es mayor para el caso de radio pequeño (trayectorias más largas de las caras externa e interna en esta etapa). En la transición entre las dos etapas del modelo, la trayectorias cambian bruscamente, al cambiar las condiciones del proceso de β^M a β^N . Como se aprecia en la figura de la derecha, si el radio es suficientemente grande, todas las fibras evolucionan prácticamente igual, siendo la distribución de deformaciones casi homogénea. En estas situaciones el efecto de la flexión es despreciable y el proceso puede ser aproximado por uno de carga proporcional.

La Figura 3.11(abajo) permite realizar un análisis análogo al anterior con un punzón hemiesférico ($\beta^M = 1$). En este tipo de operaciones es posible obtener trayectorias en todo el rango del diagrama. En particular, la figura representa un caso de estirado biaxial ($\beta^N = 0,5$). Igual que antes, se simula un proceso con punzón de radio pequeño y otro con radio grande. Nótese en todos los diagramas que las trayectorias convergen durante la segunda etapa de tracción.

Por otro lado, la deformación equivalente en una fibra (ε_{eq}) puede calcularse a partir de la deformación principal mayor (ε_1), considerando las relaciones entre variables introducidas en el Apartado 3.1.2.

En la etapa de flexión, la evolución de la deformación equivalente en una fibra se obtiene como:

$$d\varepsilon_{eq}^M(\zeta) = \begin{cases} \rho^M d\varepsilon_1^M(\zeta) & , \text{ si } \zeta \geq 0 \\ -\rho^M d\varepsilon_1^M(\zeta) & , \text{ si } \zeta < 0 \end{cases} \quad (3.74)$$

siendo ρ^M función de los parámetros del material (definida en (3.15)), del criterio de plastificación y de las condiciones de deformación (β^M). La ecuación (3.74) distingue entre las fibras que se alargan ($d\varepsilon_1^M > 0$) y las que se acortan ($d\varepsilon_1^M < 0$) en dirección longitudinal. Dado que $\rho^M(\beta^M)$ es constante e igual en todas las fibras durante la etapa de flexión, la deformación equivalente de una fibra al final de esta etapa puede calcularse fácilmente como:

$$\varepsilon_{eq}^{MN}(\zeta) = \pm \rho^M \int_0^{\kappa_1^{MN}} \frac{\partial \varepsilon_1(\zeta)}{\partial \kappa_1^M} d\kappa_1^M = \rho^M |\varepsilon_1^{MN}(\zeta)| \quad (3.75)$$

De acuerdo a las hipótesis del modelo, esta expresión se empleará tanto en el régimen plástico como en el elástico.

En la etapa de tracción, la evolución de la deformación equivalente viene dada por:

$$d\varepsilon_{eq}^N(\zeta) = \rho^N(\zeta) d\varepsilon_1^N(\zeta) \quad (3.76)$$

donde ahora $\rho^N(\zeta)$ no es en general constante. Así, teniendo en cuenta el camino de carga, la deformación equivalente acumulada desde el final de la etapa de flexión se expresa como:

$$\underline{\Delta}\varepsilon_{eq}^N(\zeta) = \int_1^{\tau} \rho^N(\zeta) \frac{\partial \varepsilon_1^N(\zeta)}{\partial \tau} d\tau \quad (3.77)$$

En adelante, el símbolo $\underline{\Delta}$ se empleará para indicar incrementos de una determinada variable contados a partir del final del primer paso o etapa de flexión.

A partir de (3.75) y (3.77), la deformación equivalente en un instante durante la etapa de tracción se obtiene como:

$$\varepsilon_{eq}^N(\zeta) = \begin{cases} \varepsilon_{eq}^{MN}(\zeta) + \underline{\Delta}\varepsilon_{eq}^N(\zeta) & , \text{ si } \zeta \geq 0 \\ | -\varepsilon_{eq}^{MN}(\zeta) + \underline{\Delta}\varepsilon_{eq}^N(\zeta) | & , \text{ si } \zeta < 0 \end{cases} \quad (3.78)$$

Nótese que el valor absoluto en la segunda de estas expresiones es necesario dado que la deformación equivalente es, por definición, positiva. Así, para las fibras por debajo de la superficie media ($\zeta < 0$) la expresión anterior indica que, durante la etapa de tracción, $\varepsilon_{eq}^N(\zeta)$ disminuye hasta alcanzar un valor nulo para aumentar posteriormente.

3.3.2. Inversión de la carga en las fibras internas

Cuando un proceso de carga sucede de forma monótona se suele adoptar un endurecimiento isótropo del material. En cambio, cuando en el proceso intervienen una o varias etapas sucesivas de descarga y carga, la regla de rigidización isótropa no resulta apropiada, ya que ésta no considera el menor nivel para la plastificación en descarga de los materiales endurecibles, el cual se conoce como *efecto Bauschinger*. En este sentido, la regla de endurecimiento cinemática es más adecuada para reproducir dicho efecto.

Los distintos materiales responden de forma diferente al efecto Bauschinger. Esta característica del material es difícil de considerar en un solo modelo y es frecuente encontrar en la literatura modelos de endurecimiento independientes del material. Dichos modelos se aplican casi en exclusiva a los procesos de conformado global. En cambio, en el conformado de chapa no es habitual encontrar estudios que consideren la plastificación inversa, ya que en la práctica este fenómeno no es frecuente. Los procesos de doblado de chapa son una excepción. Como ya se ha

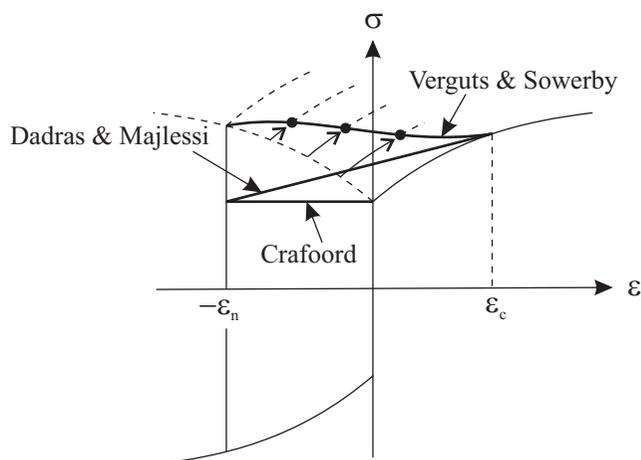


Figura 3.12: Esquema de modelos de deformación para fibras en carga inversa en procesos de flexión pura.

expuesto en el Capítulo 2, durante el doblado se produce una plastificación inversa de las fibras en la región central en el espesor de la chapa, que pasan de estar comprimidas a traccionadas cuando las alcanza la línea neutra en su desplazamiento hacia la cara cóncava o cara interna de la zona de doblado. Algunos de los autores mencionados en dicho capítulo propusieron diversas reglas de endurecimiento que merecen ahora ser examinadas con más detalle (Crafoord, 1970; Verguts y Sowerby, 1975; Dadras y Majlessi, 1982; Tan *et ál.*, 1995; Zhu, 2007).

Para considerar el efecto Bauschinger, Crafoord (1970) asumió una tensión de fluencia constante durante la deformación inversa de las fibras que sobrepasan la línea neutra. La Figura 3.12 muestra de forma esquemática la trayectoria en un diagrama tensión-deformación de una de estas fibras. Las variables ε_n y ε_c son las deformaciones plásticas equivalentes de las superficies neutras actual e inicial, respectivamente. Como se puede apreciar, se trata de una primera aproximación muy simplista. Nótese que este modelo propone una evolución de tensiones y deformaciones que simula un endurecimiento combinado isótropo-cinemático.

Por otro lado, Verguts y Sowerby (1975) tuvieron en cuenta el camino de deformación o deformación acumulada experimentada por dichas fibras, considerando exclusivamente un endurecimiento isótropo. La Figura 3.12 muestra de forma esquemática los estados de tensión-deformación de las fibras que han sufrido inversión. Se muestra también la línea que une dichos estados, la cual conecta suavemente con la curva σ - ε del cuadrante positivo. Como resultado de este modelo

se obtienen valores muy altos de tensión de fluencia en estas fibras y, consecuentemente, una zona central de la chapa excesivamente endurecida. Dadras y Majlessi (1982) presentan un modelo que considera el efecto Bauschinger de manera simplificada, basándose en una aproximación lineal en la curva tensión-deformación para las fibras en carga inversa (Figura 3.12). Al igual que la propuesta de Crafoord, este modelo reproduce un endurecimiento combinado. Más recientemente, los modelos se vuelven menos artificiosos y se adoptan las dos reglas sencillas de endurecimiento isótropo y cinemático (Tan *et ál.*, 1995; Zhu, 2007). Tan *et ál.* (1995) consideran además los efectos de la anisotropía y obtienen buenos resultados con el endurecimiento cinemático.

Salvo el endurecimiento isótropo, el resto de modelos de endurecimiento tienen algo en común. La descarga de cada fibra y posterior plastificación inversa forma un pequeño ciclo hasta regresar al camino original tensión-deformación, y proseguir posteriormente como si dicho ciclo no hubiese existido nunca. Este comportamiento se denomina *efecto memoria* y reproduce adecuadamente el que exhiben los materiales metálicos (Dowling, 1993, Cap. 12).

En los procesos de estirado con punzón, a pesar de que algunos autores han observado experimentalmente la inversión de la deformación en la zona del material en contacto con el punzón (Uko *et ál.*, 1977; Tharrett y Stoughton, 2003a), ésta nunca ha sido considerada en los análisis. Sin embargo, el efecto de la plastificación inversa en estos procesos puede llegar a ser relevante, tanto más cuanto menor sea el radio del punzón.

La plastificación inversa en compresión-tracción que se produce en los procesos de estirado con punzón difiere de la que se produce en los procesos de doblado. Por un lado, las regiones de material afectado son distintas en ambos procesos: en el doblado son las fibras en la región central de la chapa, entre la superficies media y neutra, las que experimentan la inversión de la carga, mientras que en el estirado con punzón las fibras afectadas abarcan desde la cara interna de la chapa hasta casi la superficie media, en un grosor que depende del radio del punzón. Por otro lado, el orden o secuencia que siguen las distintas fibras afectadas durante el conformado es diferente en ambos procesos: en el doblado la inversión de la carga de cada fibra se produce cuando ésta es alcanzada por la superficie neutra en el desplazamiento continuo de esta última hacia la cara interna; en el estirado con punzón, en general dicha secuencia no es conocida a priori, dependiendo de los parámetros geométricos. Según el modelo propuesto de flexión-tracción en dos pasos, la inversión de la carga se produce simultáneamente en todas las fibras

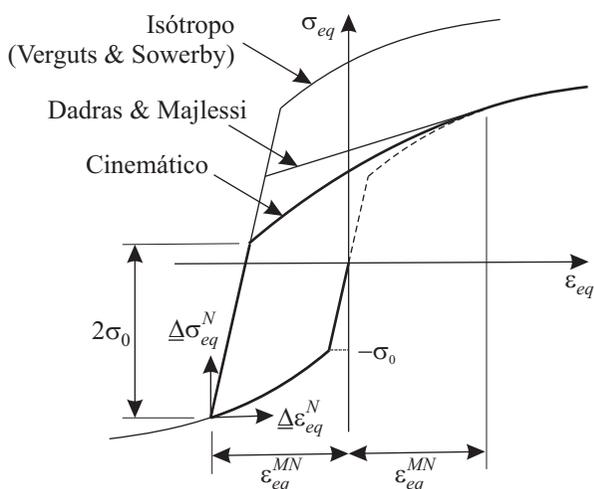


Figura 3.13: Reglas de endurecimiento para las fibras en carga inversa en procesos de estirado con punzón.

comprimidas en la primera etapa de flexión. Por último, la diferencia quizás más relevante está relacionada con el efecto memoria. Así, en el doblado de chapa este fenómeno no puede llegar a producirse en todas las fibras a la vez, dado que en un determinado instante las fibras adyacentes a la superficie neutra no llegan a cerrar un ciclo completo de carga. En cambio, en el estirado con punzón este efecto memoria puede producirse en todas las fibras afectadas cuando la tracción alcanza un determinado valor, ya que todas pueden llegar a cerrar un bucle de carga. Si esto sucede, el fallo estaría poco afectado por la plastificación inversa. Así, los diversos análisis propuestos en la literatura que no incluyen la inversión de la deformación observada en los ensayos experimentales podrían proporcionar estimaciones razonables.

Algunas de las reglas de endurecimiento propuestas por los autores mencionados anteriormente en los análisis de doblado de chapa han sido adaptadas para los procesos de estirado con punzón e incluidas en el modelo propuesto de flexión-tracción en dos pasos. La Figura 3.13 muestra de forma esquemática algunos modelos de endurecimiento en un proceso de compresión-tracción de una fibra genérica.

La regla de endurecimiento cinemático puro establece que después de un proceso de carga en el que se produce plastificación, el cambio en la tensión necesario para producir de nuevo la plastificación del material es el doble del límite elásti-

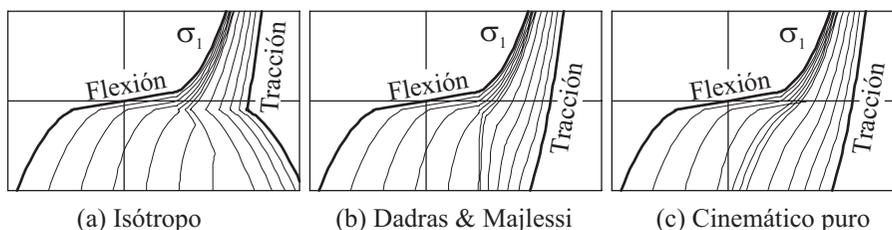


Figura 3.14: Esquema de la evolución del gradiente de tensión principal máxima en el espesor (σ_1) para distintas reglas de endurecimiento: (a) isótropo; (b) modelo combinado isótropo-cinemático de Dadras y Majlessi (1982); y (c) cinemático puro.

co inicial ($\underline{\Delta}\sigma_{eq}^N = 2\sigma_0$, véase la Figura 3.13). A partir de este instante y hasta regresar al camino original tensión-deformación, la respuesta del material se ha modelado mediante la siguiente expresión (Dowling, 1993, véase Cap. 12):

$$\frac{\underline{\Delta}\sigma_{eq}^N}{2} = f\left(\frac{\underline{\Delta}\varepsilon_{eq}^N}{2}\right) \quad (3.79)$$

siendo $\sigma = f(\varepsilon)$ la respuesta en carga monótona. Desde un punto de vista matemático, el factor 2 en el denominador tiene el efecto de expandir la curva del material virgen en el plano σ - ε . De esta forma, el efecto memoria de una fibra se produce cuando ésta alcanza a tracción el mismo nivel de deformación que durante la compresión inicial (ε_{eq}^{MN} en la Figura 3.13).

La Figura 3.14 muestra un esquema de la evolución de la tensión principal máxima en el espesor (σ_1) obtenida con los modelos de endurecimiento isótropo, el propuesto por Dadras y Majlessi (1982) y el cinemático puro. Los tres casos ilustrados se han obtenido con el modelo flexión-tracción en dos pasos, en un caso sencillo de un material con unas constantes genéricas a efectos ilustrativos, en condiciones de deformación plana y con el criterio de plastificación de von Mises. En la simulación se ha empleado un radio de punzón 2 veces mayor que el espesor de la chapa. Los gradientes de tensión mostrados en cada figura se corresponden con los instantes comprendidos desde el final de la etapa de flexión hasta un determinado instante durante la etapa de tracción, en intervalos regulares de reducción de espesor.

Como se puede observar, los resultados obtenidos con un endurecimiento isótropo indican un excesivo endurecimiento del material cercano a la cara interna de la chapa. Dicho endurecimiento es mayor aún que el obtenido por Verguts y Sowerby (1975) en operaciones de doblado. Es de esperar que dicho modelo sobreestime en

exceso los resultados experimentales, en particular los valores de deformación para el inicio del fallo por estricción. En cambio, los modelos de endurecimiento cinemático puro y el propuesto por Dadras y Majlessi (1982), que consideran el efecto Bauschinger, han mostrado ambos resultados muy similares. En la Figura 3.14 se puede observar que el gradiente de tensión en ambos modelos evoluciona hacia la misma distribución conforme aumenta la tracción. No obstante, es evidente que las diferencias serán más significativas cuando el fallo de la chapa se produzca con un menor efecto de la tracción, como es el caso del estirado con punzones de radio pequeño, donde predomina la flexión. En adelante, se considerará en la formulación sólo el endurecimiento cinemático puro, cuya respuesta en carga inversa viene definida en (3.79).

3.3.3. Relaciones tensión-deformación equivalentes

Establecido el modelo de respuesta del material en la carga inversa que se produce en las fibras internas de la chapa, se expone a continuación formalmente la respuesta de cada fibra en el espesor durante el conformado de la chapa según el modelo propuesto de carga flexión-tracción en dos pasos.

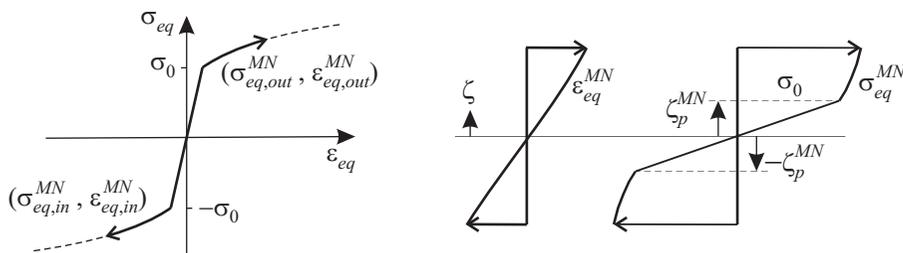


Figura 3.15: Relaciones tensión-deformación equivalentes al final de la etapa de flexión y gradientes en el espesor.

Dado que la etapa de flexión es un proceso de carga proporcional, la tensión equivalente al final de esta etapa (Figura 3.15) se calcula a partir de la ley de comportamiento del material virgen como:

$$\sigma_{eq}^{MN}(\zeta) = \begin{cases} E\varepsilon_{eq}^{MN}(\zeta) & , \text{ si } \varepsilon_{eq}^{MN}(\zeta) \leq \sigma_0/E \\ K(\varepsilon_{eq}^{MN}(\zeta))^n & , \text{ si } \varepsilon_{eq}^{MN}(\zeta) > \sigma_0/E \end{cases} \quad (3.80)$$

siendo σ_0 el límite elástico del material y donde $\varepsilon_{eq}^{MN}(\zeta)$ viene dada en (3.75). La región central de la chapa, de material no plastificado, viene definida por la región

$\zeta \in [-\zeta_p^{MN}, \zeta_p^{MN}]$ (véase la Figura 3.15), siendo:

$$\sigma_{eq}^{MN}(\zeta_p^{MN}) = \sigma_0 \quad (3.81)$$

En la etapa de tracción, la tensión equivalente en un instante determinado viene dada por la suma de dos componentes, de forma análoga a la expresión dada en (3.78) para la deformación equivalente:

$$\sigma_{eq}^N(\zeta) = \begin{cases} \sigma_{eq}^{MN}(\zeta) + \underline{\Delta}\sigma_{eq}^N(\zeta) & , \text{ si } \zeta \geq 0 \\ |-\sigma_{eq}^{MN}(\zeta) + \underline{\Delta}\sigma_{eq}^N(\zeta)| & , \text{ si } \zeta < 0 \end{cases} \quad (3.82)$$

donde en el cálculo de $\underline{\Delta}\sigma_{eq}^N(\zeta)$ habrá que considerar si la fibra en ζ ha sufrido o no un proceso de carga inversa. Se distinguen así dos situaciones distintas (Figura 3.16):

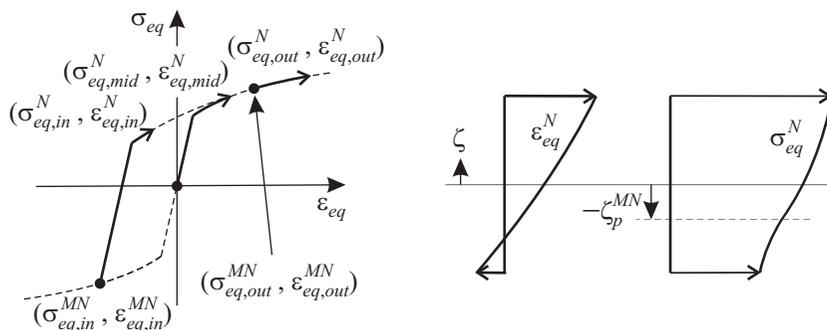


Figura 3.16: Relaciones tensión-deformación equivalentes en la etapa de tracción y gradientes en el espesor.

1. Fibras que no han plastificado a compresión ($\zeta \geq -\zeta_p^{MN}$)

Las fibras por encima de la superficie media de la chapa ($\zeta \geq 0$) se alargan en todo momento y, por tanto, no sufren ninguna descarga sino tan sólo un cambio en las condiciones de deformación al pasar de la etapa de flexión a la de tracción, de β^M a $\beta^N(\zeta)$. En la región central de la chapa comprendida entre la superficie media y la superficie en el límite elástico a compresión ($-\zeta_p^{MN} \leq \zeta < 0$), las fibras inician un proceso de descarga elástica siguiendo la misma curva tensión-deformación del material. En ambos casos la relación tensión-deformación equivalentes original de estas fibras no se ve alterada y, por tanto:

$$\sigma_{eq}^N(\zeta) = \begin{cases} E\varepsilon_{eq}^N(\zeta) & , \text{ si } \varepsilon_{eq}^N(\zeta) \leq \sigma_0/E \\ K(\varepsilon_{eq}^N(\zeta))^n & , \text{ si } \varepsilon_{eq}^N(\zeta) > \sigma_0/E \end{cases} \quad (3.83)$$

donde $\varepsilon_{eq}^N(\zeta)$ viene dada en (3.78).

2. Fibras que han plastificado a compresión ($\zeta < -\zeta_p^{MN}$)

Estas fibras sufren un proceso de descarga elástica y posterior plastificación a tracción. Teniendo en cuenta la respuesta del material para estas fibras, definida en (3.79), la tensión equivalente se expresa como:

$$\sigma_{eq}^N(\zeta) = \begin{cases} |-\sigma_{eq}^{MN}(\zeta) + E\Delta\varepsilon_{eq}^N(\zeta)| & , \text{ si } \Delta\varepsilon_{eq}^N(\zeta) \leq 2\frac{\sigma_0}{E} \\ \left| -\sigma_{eq}^{MN}(\zeta) + 2K \left(\frac{\Delta\varepsilon_{eq}^N(\zeta)}{2} \right)^n \right| & , \text{ si } 2\frac{\sigma_0}{E} < \Delta\varepsilon_{eq}^N(\zeta) < 2\varepsilon_{eq}^{MN}(\zeta) \\ K(\varepsilon_{eq}^N(\zeta))^n & , \text{ si } \Delta\varepsilon_{eq}^N(\zeta) \geq 2\varepsilon_{eq}^{MN}(\zeta) \end{cases} \quad (3.84)$$

donde $\Delta\varepsilon_{eq}^N(\zeta)$ se calcula mediante la integral dada en (3.77), y donde la última de las expresiones es la correspondiente al efecto memoria.

La Figura 3.16 muestra de forma esquemática el camino seguido en la etapa de tracción por las relaciones tensión-deformación equivalentes en la cara interna de la chapa ($\sigma_{eq,in}^N, \varepsilon_{eq,in}^N$), en la superficie media ($\sigma_{eq,mid}^N, \varepsilon_{eq,mid}^N$) y en la cara externa ($\sigma_{eq,out}^N, \varepsilon_{eq,out}^N$), así como los gradientes en el espesor. Las variables representadas se corresponden con un instante en el que no se ha producido aún el efecto memoria, y donde el comportamiento del material viene dado por la segunda de las expresiones en (3.83) para las fibras que no han plastificado a compresión y la segunda de las expresiones en (3.84) para el resto de fibras.

Por último, la pendiente de la curva tensión-deformación en cada instante del conformado ($H = d\sigma_{eq}/d\varepsilon_{eq}$) se obtiene de (3.80), (3.83) y (3.84) como:

1. En la etapa de flexión:

$$H^M(\zeta) = \begin{cases} E & , \text{ si } \varepsilon_{eq}^M(\zeta) \leq \sigma_0/E \\ nK(\varepsilon_{eq}^M(\zeta))^{n-1} & , \text{ si } \varepsilon_{eq}^M(\zeta) > \sigma_0/E \end{cases} \quad (3.85)$$

2. En la etapa de tracción, para las fibras que no han plastificado a compresión al final de la flexión ($\zeta \geq -\zeta_p^{MN}$):

$$H^N(\zeta) = \begin{cases} E & , \text{ si } \varepsilon_{eq}^N(\zeta) \leq \sigma_0/E \\ nK(\varepsilon_{eq}^N(\zeta))^{n-1} & , \text{ si } \varepsilon_{eq}^N(\zeta) > \sigma_0/E \end{cases} \quad (3.86)$$

3. En la etapa de tracción, para las fibras que han plastificado a compresión al

final de la flexión ($\zeta < -\zeta_p^{MN}$):

$$H^N(\zeta) = \begin{cases} E & , \text{ si } \underline{\Delta}\varepsilon_{eq}^N(\zeta) \leq 2\frac{\sigma_0}{E} \\ nK \left(\frac{\underline{\Delta}\varepsilon_{eq}^N(\zeta)}{2} \right)^{n-1} & , \text{ si } 2\frac{\sigma_0}{E} < \underline{\Delta}\varepsilon_{eq}^N(\zeta) < 2\varepsilon_{eq}^{MN}(\zeta) \\ nK \left(\varepsilon_{eq}^N(\zeta) \right)^{n-1} & , \text{ si } \underline{\Delta}\varepsilon_{eq}^N(\zeta) \geq 2\varepsilon_{eq}^{MN}(\zeta) \end{cases} \quad (3.87)$$

3.3.4. Evolución de las tensiones

En el apartado anterior se han expuesto las relaciones tensión-deformación equivalentes de las fibras en el espesor de una chapa sometida a un proceso de flexión seguido de uno de tracción y donde las condiciones de deformación de ambos procesos han sido caracterizadas por los parámetros β^M y $\beta^N(\zeta)$, respectivamente. A continuación se expone la formulación para calcular los gradientes de tensiones en el espesor $\sigma_1(\zeta)$ y $\sigma_2(\zeta)$, a partir de unos gradientes de deformación $\varepsilon_1(\zeta)$ y $\varepsilon_2(\zeta)$, analizados en el Apartado 3.3.1.

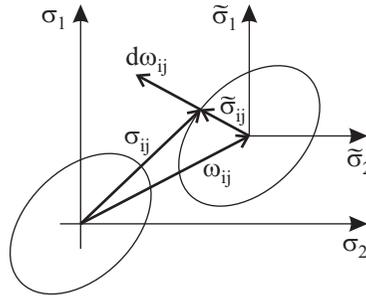


Figura 3.17: Regla de endurecimiento cinemático de Ziegler en tensión plana.

Dado que se ha asumido un endurecimiento cinemático del material, la superficie de plastificación de cada fibra se traslada en el espacio de las tensiones como un sólido rígido. Para modelar dicho desplazamiento se adopta la regla de Ziegler, según la cual la dirección del movimiento se produce en la dirección de la tensión reducida, *i.e.* la tensión medida desde el centro actual de la superficie de plastificación (Figura 3.17). El origen de coordenadas en el espacio de las tensiones (σ_1, σ_2) vendrá dado por un punto definido como (ω_1, ω_2) y que será, en general, diferente para cada fibra plastificada. Así, las tensiones reducidas se expresarán como:

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}_1 &= \sigma_1 - \omega_1 \\ \tilde{\sigma}_2 &= \sigma_2 - \omega_2 \end{aligned} \quad (3.88)$$

El desplazamiento de la superficie de fluencia según la regla de Ziegler viene dado entonces por:

$$d\omega_i = \frac{d\sigma_{eq}}{\sigma_0} \tilde{\sigma}_i = \frac{H d\varepsilon_{eq}}{\sigma_0} \tilde{\sigma}_i \quad i = \{1, 2\} \quad (3.89)$$

siendo $H = d\sigma_{eq}/d\varepsilon_{eq}$ la pendiente de la curva $\sigma_{eq}(\varepsilon_{eq})$ en régimen plástico en el instante actual. En el Apéndice B se muestra de forma detallada la deducción de la ecuación (3.89).

De manera análoga a como se hizo en el Apartado 3.1.2, a partir del criterio de fluencia en tensión plana se pueden establecer las mismas relaciones α y φ pero expresadas ahora en función de las variables reducidas:

$$\tilde{\alpha} = \frac{\tilde{\sigma}_2}{\tilde{\sigma}_1} \quad , \quad \tilde{\varphi}(\tilde{\alpha}) = \frac{\tilde{\sigma}_{eq}}{\tilde{\sigma}_1} \quad (3.90)$$

Al igual que en casos anteriores, dados los valores de β^M y $\beta^N(\zeta)$ en las dos etapas del modelo flexión-tracción, la regla de flujo permite calcular los correspondientes valores de $\tilde{\alpha}^N$ y $\tilde{\alpha}^M(\zeta)$ y los de $\tilde{\varphi}^N$ y $\tilde{\varphi}^M(\zeta)$ a partir de dichos parámetros.

El estado tensional se obtiene de (3.88) y (3.90) como:

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \tilde{\sigma}_1 + \omega_1 = \frac{\tilde{\sigma}_{eq}}{\tilde{\varphi}} + \omega_1 \\ \sigma_2 &= \tilde{\sigma}_2 + \omega_2 = \tilde{\alpha} \frac{\tilde{\sigma}_{eq}}{\tilde{\varphi}} + \omega_2 \end{aligned} \quad (3.91)$$

Dado que se asume que las relaciones entre variables internas en el régimen elástico son las mismas que en el plástico, las ecuaciones (3.91) son válidas para ambos regímenes.

En régimen elástico no se produce desplazamiento de la superficie de plastificación ($d\omega_1 = d\omega_2 = 0$) y el estado tensional queda dentro de dicha superficie ($\tilde{\sigma}_{eq} < \sigma_0$). En esta situación, el cálculo de $\tilde{\sigma}_{eq}$ dependerá de si previamente se ha producido plastificación:

$$\tilde{\sigma}_{eq} = \begin{cases} \sigma_{eq} & , \text{ sin plastificación previa} \\ |\sigma_0 - \underline{\Delta}\sigma_{eq}| & , \text{ con plastificación previa} \end{cases} \quad (3.92)$$

siendo $\underline{\Delta}\sigma_{eq}$ el incremento de tensión equivalente posterior a la plastificación previa. El significado de esta expresión se representa de forma esquemática en la Figura 3.18, donde se muestran dos procesos de carga en tracción pura ($\sigma_{eq} = \sigma_1$): uno de carga elástica a tracción y otro de descarga elástica después de plastificar a compresión. Nótese que el proceso de descarga no alcanza el centro de la superficie de plastificación actual, que se encuentra en el punto $(\sigma_1 = -\omega_1, \sigma_2 = 0)$, siendo

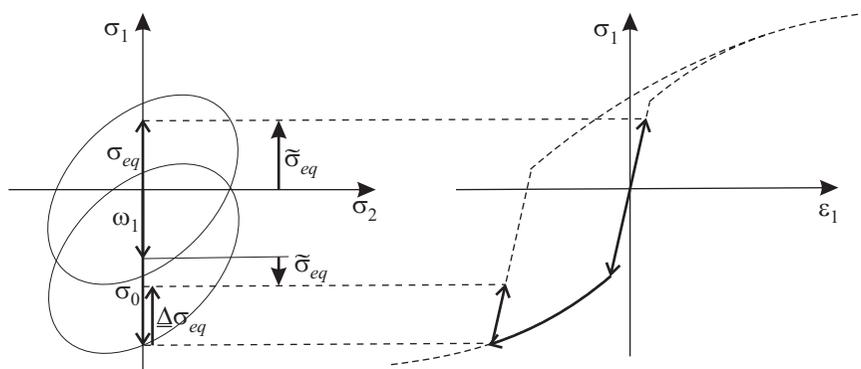


Figura 3.18: Tensión equivalente reducida ($\tilde{\sigma}_{eq}$) en régimen elástico, en dos procesos en tensión plana de carga y descarga.

por tanto $\tilde{\sigma}_{eq} = \sigma_0 - \underline{\Delta}\sigma_{eq}$. Pasado este punto, si la carga continúa a tracción entonces la expresión cambiaría de signo y, por tanto: $\tilde{\sigma}_{eq} = \underline{\Delta}\sigma_{eq} - \sigma_0$.

En régimen plástico, la tensión equivalente reducida se obtiene del criterio de plastificación ($\tilde{\sigma}_{eq} = \sigma_0$). Así, sustituyendo (3.90) en (3.89), la traslación de la superficie de fluencia permite ser expresada como:

$$d\omega_1 = \frac{d\sigma_{eq}}{\tilde{\varphi}} = \frac{Hd\varepsilon_{eq}}{\tilde{\varphi}} \quad , \quad d\omega_2 = \tilde{\alpha}d\omega_1 \quad (3.93)$$

Si las relaciones entre variables $\tilde{\alpha}$ y $\tilde{\varphi}$ se mantienen constantes (*i.e.* carga proporcional), entonces el centro actual de la superficie de fluencia (ω_1 y ω_2) se obtiene fácilmente. Pero si dichas relaciones dependen también del camino de deformación, entonces la integración de (3.93) debe realizarse por métodos numéricos. A continuación se particularizan las expresiones anteriores a cada una de las etapas del modelo flexión-tracción en dos pasos.

Primera etapa o etapa de flexión

Al final de la etapa de flexión, las fibras en la región central de la chapa no han plastificado aún, de manera que la superficie de plastificación de todas las ellas permanece inalterada. En el caso de una fibra plastificada a tracción o a compresión, la superficie de fluencia se habrá trasladado de acuerdo con la regla de Ziegler. Distinguiendo entre ambos casos, el estado tensional de una fibra se obtiene como:

1. Fibras en régimen elástico ($-\zeta_p^{MN} \leq \zeta \leq \zeta_p^{MN}$)

Particularizando las expresiones (3.91) para el instante final de la flexión, y teniendo en cuenta $\omega_1^{MN} = \omega_2^{MN} = 0$, el estado tensional en la región central viene dado por:

$$\begin{aligned}\sigma_1^{MN}(\zeta) &= \tilde{\sigma}_1^{MN}(\zeta) = \frac{\pm \sigma_{eq}^{MN}(\zeta)}{\tilde{\varphi}^M} \\ \sigma_2^{MN}(\zeta) &= \tilde{\sigma}_2^{MN}(\zeta) = \tilde{\alpha}^M \sigma_1^{MN}(\zeta)\end{aligned}\quad (3.94)$$

siendo $\sigma_{eq}^{MN}(\zeta) = E\varepsilon_{eq}^{MN}(\zeta)$ y donde el signo \pm permite distinguir las fibras traccionadas ($\zeta > 0$) de las comprimidas ($\zeta < 0$).

2. Fibras en régimen plástico ($\zeta < -\zeta_p^{MN}$ y $\zeta > \zeta_p^{MN}$)

Dado que β^M y $\tilde{\alpha}^M$ son constantes e iguales en todas las fibras, la integración de (3.93) da como resultado:

$$\omega_1^{MN}(\zeta) = \frac{\pm(\sigma_{eq}^{MN}(\zeta) - \sigma_0)}{\tilde{\varphi}^M}, \quad \omega_2^{MN}(\zeta) = \tilde{\alpha}^M \omega_1^{MN}(\zeta) \quad (3.95)$$

Teniendo en cuenta $\tilde{\sigma}_{eq} = \sigma_0$ y sustituyendo (3.95) en (3.91), el estado tensional se obtiene como:

$$\begin{aligned}\sigma_1^{MN}(\zeta) &= \frac{\pm \sigma_0}{\tilde{\varphi}^M} + \frac{\pm(\sigma_{eq}^{MN}(\zeta) - \sigma_0)}{\tilde{\varphi}^M} = \frac{\pm \sigma_{eq}^{MN}(\zeta)}{\tilde{\varphi}^M} \\ \sigma_2^{MN}(\zeta) &= \tilde{\alpha}^M \sigma_1^{MN}(\zeta)\end{aligned}\quad (3.96)$$

siendo ahora $\sigma_{eq}^{MN}(\zeta) = K(\varepsilon_{eq}^{MN}(\zeta))^n$. Nótese que los últimos términos de (3.96) son las mismas expresiones que las obtenidas si se supone un endurecimiento isótropo, dado que el proceso de carga es proporcional. La diferencia sólo estriba en el desplazamiento de la superficie de fluencia.

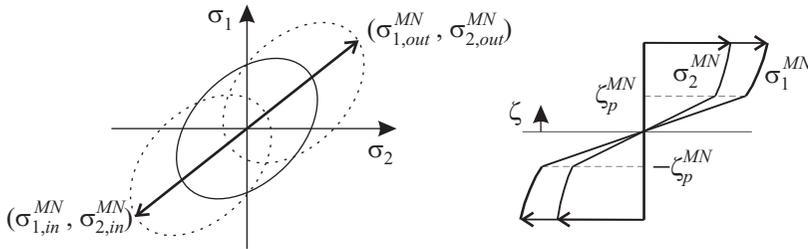


Figura 3.19: Evolución del estado tensional de la caras externa e interna de la chapa en la primera etapa del modelo flexión-tracción en dos pasos, y gradientes en el espesor.

La Figura 3.19 muestra de forma esquemática el estado tensional de las fibras externa ($\sigma_{1,out}^{MN}, \sigma_{2,out}^{MN}$) e interna ($\sigma_{1,in}^{MN}, \sigma_{2,in}^{MN}$) al final de la etapa de flexión biaxial,

así como el movimiento de las correspondientes superficies de plastificación en el plano de las tensiones y los gradientes en el espesor en las dos direcciones principales. Nótese que la relación de tensiones $\alpha^M = \tilde{\alpha}^M$ es la misma en todas las fibras, quedando el estado tensional de las fibras traccionadas en el primer cuadrante y el de las fibras comprimidas en el tercer cuadrante.

Segunda etapa o etapa de tracción

Al contrario que en la etapa anterior, durante la etapa de tracción las relaciones $\beta^N(\zeta)$, $\tilde{\alpha}^N(\zeta)$ y $\tilde{\varphi}^N(\zeta)$, ni se mantienen constantes ni son iguales en todas las fibras. Justo antes del inicio de la tracción, las zonas en el espesor en régimen elástico y plástico vienen definidas por las posiciones $-\zeta_p^{MN}$ y ζ_p^{MN} (véase la Figura 3.19). Justo después del inicio de la tracción, la siguiente fibra por debajo de ζ_p^{MN} plastifica, mientras que el resto de fibras hasta la cara interna quedan en régimen elástico. Este proceso se repite hasta que la plastificación alcanza la fibra en $-\zeta_p^{MN}$, instante en el que comienza la plastificación inversa de las fibras que plastificaron previamente a compresión.

En el régimen elástico que se produce al inicio de la tracción, el estado tensional de una fibra se obtiene mediante las siguientes expresiones:

1. Región central de la chapa ($-\zeta_p^{MN} < \zeta < \zeta_p^{MN}$)

Las fibras en esta región no llegaron a plastificar en la etapa de flexión y, por tanto, la superficie de fluencia de todas ellas no ha experimentado aún ningún desplazamiento. El estado tensional se obtiene entonces como:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_1^N(\zeta) &= \frac{\sigma_{eq}^N(\zeta)}{\tilde{\varphi}^N(\zeta)} \\ \sigma_2^N(\zeta) &= \tilde{\alpha}^N(\zeta)\sigma_1^N(\zeta) \end{aligned} \right\} \text{si } \sigma_{eq}^N(\zeta) \leq \sigma_0 \quad (3.97)$$

2. Fibras internas ($\zeta < -\zeta_p^{MN}$)

Tras la plastificación a compresión que experimentan estas fibras, el estado tensional durante la descarga elástica se obtiene como:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_1^N(\zeta) &= \frac{|\sigma_0 - \underline{\Delta}\sigma_{eq}^N(\zeta)|}{\tilde{\varphi}^N(\zeta)} + \omega_1^{MN}(\zeta) \\ \sigma_2^N(\zeta) &= \tilde{\alpha}^N(\zeta) \frac{|\sigma_0 - \underline{\Delta}\sigma_{eq}^N(\zeta)|}{\tilde{\varphi}^N(\zeta)} + \omega_2^{MN}(\zeta) \end{aligned} \right\} \text{si } \underline{\Delta}\sigma_{eq}^N(\zeta) \leq 2\sigma_0 \quad (3.98)$$

En régimen plástico, el movimiento de traslación de la superficie de fluencia de una fibra viene dada en (3.93). En la etapa de tracción, dicha ecuación se expresa

como:

$$d\omega_1^N(\zeta) = \frac{H^N(\zeta)d\varepsilon_{eq}^N(\zeta)}{\tilde{\varphi}^N(\zeta)} \quad , \quad d\omega_2^N(\zeta) = \tilde{\alpha}^N(\zeta)d\omega_1^N(\zeta) \quad (3.99)$$

donde $H^N(\zeta)$ se obtiene de las expresiones correspondientes al régimen plástico dadas en (3.86) y (3.87). La integración de (3.99) debe realizarse por métodos numéricos. Así, dado que la reducción del espesor (τ) es la única variable independiente en la etapa de tracción, el centro de la superficie de fluencia actual se calcula como:

$$\begin{aligned} \omega_1^N(\zeta) &= \omega_1^{MN}(\zeta) + \underline{\Delta}\omega_1^N(\zeta) = \omega_1^{MN}(\zeta) + \int_1^\tau \frac{\partial\omega_1^N(\zeta)}{\partial\tau} d\tau \\ \omega_2^N(\zeta) &= \omega_2^{MN}(\zeta) + \underline{\Delta}\omega_2^N(\zeta) = \omega_2^{MN}(\zeta) + \int_1^\tau \frac{\partial\omega_2^N(\zeta)}{\partial\tau} d\tau \end{aligned} \quad (3.100)$$

Finalmente, el estado tensional de una fibra plastificada viene dado por:

$$\begin{aligned} \sigma_1^N(\zeta) &= \frac{\sigma_0}{\tilde{\varphi}^N(\zeta)} + \omega_1^N(\zeta) \\ \sigma_2^N(\zeta) &= \tilde{\alpha}^N(\zeta) \frac{\sigma_0}{\tilde{\varphi}^N(\zeta)} + \omega_2^N(\zeta) \end{aligned} \quad (3.101)$$

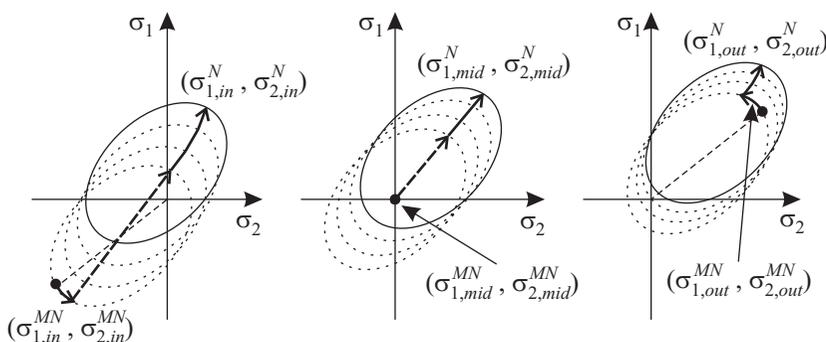


Figura 3.20: Evolución del estado tensional en la segunda etapa del modelo flexión-tracción, en las fibras interna (izquierda), media (centro) y externa (derecha).

La Figura 3.20 muestra de forma esquemática el camino seguido por las tensiones en la cara interna de la chapa ($\sigma_{1,in}^N, \sigma_{2,in}^N$), en la superficie media ($\sigma_{1,mid}^N, \sigma_{2,mid}^N$) y en la cara externa ($\sigma_{1,out}^N, \sigma_{2,out}^N$), así como el movimiento de sus superficies de plastificación, durante la etapa de tracción. El resto de fibras no se ha representado por claridad y su evolución sigue caminos intermedios. Nótese que solamente la superficie media sigue una evolución proporcional de la tensión, de acuerdo con las

hipótesis de trabajo adoptadas. En el resto de fibras, la relación $\tilde{\alpha}^N$ varía durante el conformado. Las sucesivas superficies de fluencia más separadas entre sí en la evolución de la tensión en la cara interna es representativa del mayor endurecimiento por deformación que experimentan las fibras sometidas a carga inversa. Como se aprecia en la figura, el estado tensional de todas las fibras tiende a situarse en el primer cuadrante como resultado de la mayor influencia de la tracción frente a la flexión.

Nótese además que, en general, existe un cambio de dirección en las tensiones principales en la transición entre las dos etapas de flexión y tracción, al pasar de $\tilde{\alpha}^M$ a $\tilde{\alpha}^N(\zeta)$. Esta transición se realiza a través de un proceso de carga neutra en todas las fibras, en el que la tensión equivalente reducida se mantiene constante ($\tilde{\sigma}_{eq}^N = \sigma_0$) mientras varía la dirección de las tensiones principales. Así, las tensiones reducidas ($\tilde{\sigma}_1^N$ y $\tilde{\sigma}_2^N$) pasan de una relación entre tensiones $\tilde{\alpha}^M$ a otra $\tilde{\alpha}^N(\zeta)$. Dicha transición se representa en la Figura 3.20 como un desplazamiento sobre la superficie de fluencia actual. Por ejemplo, en el caso de las fibras internas, la carga neutra precede al proceso de descarga elástica y, tras pasar por el centro de la actual superficie de plastificación, se produce la posterior carga elasto-plástica a tracción.

3.3.5. Patrones de tensiones

Debido a la naturaleza del proceso de carga, el modelo de flexión-tracción en dos pasos presenta durante el conformado una progresión de distintas distribuciones de tensiones en el espesor de la chapa, según el material esté en régimen elástico o plástico (Figura 3.21). Estos patrones de tensiones son análogos a los presentados en el modelo proporcional (Apartado 3.2.2), aunque existen algunas diferencias originadas por la inversión de la carga en el presente modelo. Así, dichos patrones en el modelo de flexión-tracción en dos pasos son los siguientes:

P_E : Una distribución de tensiones completamente elástica en el espesor de la chapa.

P_{PEP} : Una distribución de tensiones donde las fibras en ambas caras de la chapa están plastificadas, a tracción por encima de la superficie neutra y a compresión por debajo, y donde la región central no ha plastificado (R.E.).

P_{PE} : Una distribución de tensiones con plastificación parcial en la cara externa y el resto del material en régimen elástico (R.E.).

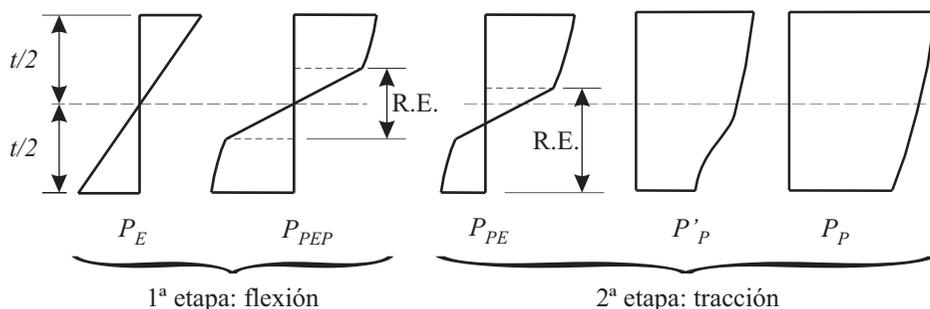


Figura 3.21: Patrones de tensiones en el modelo flexión-tracción en dos pasos.

P'_P : Una distribución de tensiones totalmente plastificada a tracción, donde el efecto de la plastificación inversa está presente.

P_P : Una distribución de tensiones totalmente plastificada a tracción, donde el efecto de la plastificación inversa no está presente.

La Figura 3.21 muestra de forma esquemática una secuencia genérica de patrones de tensión principal en la dirección 1. La transición entre los dos primeros patrones de tensiones (P_E y P_{PEP}) se produce durante la primera etapa de flexión, en el instante en el que las caras interna y externa de la chapa plastifican. Posteriormente, la descarga elástica que se produce en las fibras internas al iniciarse la etapa de tracción provoca un gradiente de tensión en el espesor perteneciente al patrón P_{PE} . Nótese en la figura que en este patrón las fibras internas están todas en régimen elástico (R.E.) pero que no todas presentan un gradiente lineal sino que las plastificadas previamente a compresión presentan obviamente un nivel de tensión diferente. Cuando se produce la completa plastificación del material, el patrón P_{PE} deja paso a los sucesivos patrones P'_P y P_P . Estos dos últimos patrones indican que toda la sección está plastificada a tracción, diferenciándose ambos en el tipo de relación tensión-deformación del material debido a la plastificación inversa en las fibras internas. En el patrón P'_P , dichas fibras internas presentan la relación tensión-deformación correspondiente al inicio de la plastificación inversa, definido en (3.79). El patrón P_P indica que todas las fibras han recuperado la respuesta del material virgen (*efecto memoria*).

3.3.6. Evolución axil-flector. Diagrama MN

El cálculo de los esfuerzos axiles (N_1 y N_2) y de los momentos flectores (M_1 y M_2) se realiza igual que en el análisis desarrollado para el modelo proporcional (véase el Apartado 3.2.3). Así, los esfuerzos adimensionales corregidos en la dirección 1, dados por las expresiones (3.43) y (3.44), son igualmente válidos para el modelo flexión-tracción en dos pasos. Dichas expresiones se repiten aquí por claridad:

$$\nu_1 = \frac{N_1}{\tau N_{1,Y}} = \frac{1}{\sigma_{1,Y}} \int_{1-1/2}^{1/2} \sigma_1(\zeta) d\zeta \quad (3.102)$$

$$\mu_1 = \frac{M_1}{\tau^2 M_{1,Y}} = \frac{6}{M_{1,Y}} \int_{1-1/2}^{1/2} \sigma_1(\zeta) \zeta d\zeta \quad (3.103)$$

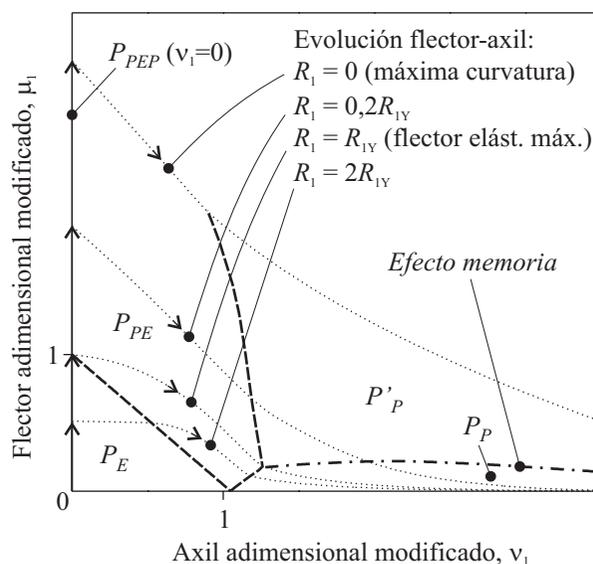


Figura 3.22: Diagrama MN esquemático en el modelo flexión-tracción en dos pasos.

La forma del diagrama MN en el presente modelo es sustancialmente diferente al planteado en el modelo proporcional, debido a la secuencia de operaciones de carga (Figura 3.22). En efecto, la región P_{PEP} queda ahora confinada en el eje de ordenadas ($\nu_1 = 0$) y la curva que separa la región P_{PE} de las regiones P'_P y P_P presenta un vértice. La evolución flector-axil queda definida por una trayectoria vertical asociada a la etapa de flexión seguida por una trayectoria descendente durante la etapa de tracción. La Figura 3.22 muestra mediante líneas de puntos

distintas trayectorias flector-axil para procesos con radios diferentes. Los estados representados corresponden a radios de punzón $R_1 = 0, 0,2R_{1Y}, R_{1Y}$ y $2R_{1Y}$, donde R_{1Y} es el radio del punzón que garantiza que al final de la etapa de flexión sólo las fibras externa e interna han plastificado. Nótese que con un radio menor a R_{1Y} ($R_1 = 0,2R_{1Y}$ en la figura) la plastificación se produce en la primera etapa de flexión. En cambio, con un radio mayor ($R_1 = 2R_{1Y}$) el material plastifica durante la segunda etapa o etapa de tracción, en un instante en el cual el momento flector comienza a decrecer. Obviamente, en este caso no se produce una plastificación inversa en las fibras internas (nótese que la trayectoria no cruza por la región P'_P). Por último, la región P_P del modelo proporcional queda dividida a su vez en dos regiones, dependiendo de si se alcanza (P_P) o no (P'_P) el *efecto memoria*.

3.4. Efecto de la tensión transversal en el espesor

Los modelos propuestos de carga proporcional y de flexión-tracción en dos pasos asumen radios de curvatura mayores de 4 ó 5 veces el espesor de la chapa, de manera que la tensión transversal en el espesor (σ_3) se ha podido despreciar en los análisis. En general, considerar la tensión transversal dificulta en exceso la formulación matemática y la resolución de las ecuaciones. No obstante, bajo ciertas condiciones, como por ejemplo en deformación plana, es posible hacer un análisis incluyendo dicha tensión y analizar su contribución real en el proceso de conformado, así como la validez de las hipótesis realizadas.

El análisis que se presenta a continuación permitirá, además, analizar el efecto de la tensión transversal en el modo de fallo por estricción localizada y sustentar el mecanismo de inestabilidad plástica propuesto en el siguiente capítulo.

Considérese un proceso de estirado con punzón en condiciones de deformación plana. La condición de equilibrio radial viene dada por la siguiente ecuación diferencial (Hill, 1950):

$$r \frac{d\sigma_3}{dr} = \sigma_1 - \sigma_3 \quad (3.104)$$

Para poder realizar la integral analítica de esta ecuación se requiere, entre otros requisitos, un criterio de plastificación simple, *e.g.* Tresca, von Mises o el cuadrático de Hill (1979) (Tan *et ál.*, 1995), los cuales permiten establecer una relación directa entre la tensión equivalente y la diferencia $\sigma_1 - \sigma_3$.

Así, el criterio de plastificación cuadrático de Hill en deformación plana se

expresa como (véase Apéndice C):

$$\sigma_{eq} = \frac{|\sigma_1 - \sigma_3|}{C} \quad , \quad \varepsilon_{eq} = C|\varepsilon_1| \quad (3.105)$$

siendo C una función de los parámetros de anisotropía del material,

$$C = \sqrt{\frac{2(1+r_{90})(1+r_0+r_0/r_{90})}{3(1+r_0+r_{90})}} \quad (3.106)$$

Nótese que en el presente proceso σ_1 es de tracción, σ_3 de compresión y ε_1 es de alargamiento, por lo que los valores absolutos en (3.105) se pueden eliminar. Considérese también la siguiente ley de comportamiento plástico de tipo Hollomon:

$$\sigma_{eq} = K\varepsilon_{eq}^n \quad (3.107)$$

Y por último, la deformación principal máxima de una fibra localizada a un radio r se expresa como:

$$\varepsilon_1(r) = \ln \frac{r}{r_u} = \ln \frac{r}{R+t/2} - \ln \frac{r_u}{R+t/2} = \ln \frac{r}{R+t/2} - \ln \frac{t}{t_0} \quad (3.108)$$

siendo r_u el radio de la superficie indeformada y $r_u t_0 = (R+t/2)t$ por conservación de volumen.

Sustituyendo (3.105), (3.107) y (3.108) en la ecuación de equilibrio radial (3.104), ésta queda como:

$$r \frac{d\sigma_3}{dr} = C^{n+1} K \left(\ln \frac{r}{R+t/2} - \ln \frac{t}{t_0} \right)^n \quad (3.109)$$

La ecuación diferencial (3.109) permite ser integrada por métodos analíticos, obteniéndose la tensión transversal como:

$$\sigma_3(r) = \frac{KC^{n+1}}{n+1} [\varepsilon_1^{n+1}(r) - \varepsilon_1^{n+1}(R+t)] \quad (3.110)$$

o de manera más compacta como:

$$\sigma_3(r) = \frac{\sigma_{eq}(r)\varepsilon_{eq}(r)}{n+1} \Big|_{r=R+t}^{r=r} \quad (3.111)$$

La constante de integración se obtiene de imponer la condición de tensión transversal nula en la cara convexa de la chapa ($\sigma_3(R+t) = 0$).

La presión ejercida por el punzón sobre la chapa se obtiene particularizando (3.110) o (3.111) para la cara cóncava de la chapa ($r = R$):

$$p = -\sigma_3(R) \quad (3.112)$$

Asimismo, aplicando el equilibrio de las fuerzas externas en la dirección radial, el esfuerzo axial en la dirección 1 se expresa como:

$$N_1 = pR \quad (3.113)$$

Por otro lado, a partir de (3.110) y (3.105) se puede obtener la tensión principal máxima como:

$$\sigma_1(r) = C\sigma_{eq}(r) + \sigma_3(r) = C^{m+1}K \left(\varepsilon_1^n(r) + \frac{\varepsilon_1^{n+1}(r)}{n+1} - \frac{\varepsilon_1^{n+1}(R+t)}{n+1} \right) \quad (3.114)$$

Por último, el momento flector en dirección 1 se calcula como:

$$M_1 = \int_R^{R+t} \sigma_1(r)rdr \quad (3.115)$$

Esta formulación puede aplicarse al modelo de flexión-tracción en dos pasos sin más que asumir condiciones de deformación plana y un punzón cilíndrico, de manera análoga a como se ha hecho en el Apartado 3.3 en el caso de tensión plana. Sin embargo, dado que sólo se ha considerado la ley de Hollomon para caracterizar el comportamiento del material, el análisis es estrictamente válido sólo cuando han desaparecido los efectos de la carga inversa, *i.e.* cuando se produce el *efecto memoria*.

El efecto memoria se produce cuando en la etapa de tracción se alcanza el mismo nivel de deformación que al final de la etapa de flexión. Para la fibra interna, la más deformada a flexión, la deformación equivalente al final de la etapa de flexión se obtiene de (3.105) y (3.108) como:

$$\varepsilon_{eq,in}^{MN} = -C \varepsilon_{1,in}^{MN} = -C \ln \frac{R}{R+t_0/2} \quad (3.116)$$

De manera análoga, la deformación equivalente en un instante durante la etapa de tracción se expresa como:

$$\varepsilon_{eq,in}^N = C \varepsilon_{1,in}^N = C \left(\ln \frac{R}{R+t/2} - \ln \frac{t}{t_0} \right) \quad (3.117)$$

Imponiendo la condición $\varepsilon_{eq,in}^N \geq \varepsilon_{eq,in}^{MN}$ se obtiene la reducción de espesor necesaria para que se produzca el efecto memoria:

$$t/t_0 \leq \frac{2}{t_0/R} \left(\sqrt{1 + \frac{t_0/R}{1+t_0/2R}} - 1 \right) \quad (3.118)$$

De este modo, la ecuación (3.118) permite estimar las condiciones de validez del presente análisis.

Por otro lado, al considerar la tensión transversal, la hipótesis de curvaturas moderadas no es a priori necesaria, siendo por tanto el análisis también válido para radios pequeños. Sin embargo, como se ha discutido en el capítulo anterior, la etapa de flexión debería considerar un análisis más preciso del movimiento de la superficie neutra. En efecto, en los trabajos sobre doblado de chapa examinados en el Apartado 2.3 se pone de manifiesto que es necesario considerar el movimiento de la superficie neutra en el interior de la sección (r_n en la Figura 3.23(izquierda)) y con ello la inversión de la deformación en la región central de la chapa (Hill, 1950; Verguts y Sowerby, 1975; Dadras y Majlessi, 1982; Majlessi y Dadras, 1983; Chakrabarty, 1987; Tan *et ál.*, 1995; Alexandrov *et ál.*, 2006; Zhu, 2007). No obstante, cuando a la etapa de flexión le sigue una de tracción (Figura 3.23(derecha)), el efecto de ésta es un desplazamiento adicional de la superficie neutra hacia la cara interna. Así, si el esfuerzo axial es suficientemente alto, la superficie neutra traspasará la cara interna de la chapa, quedando fuera del material. Si esto sucede, la magnitud de los ciclos de inversión de la deformación en la región central de la chapa que se produce durante la flexión es más pequeña que la que se produce durante la tracción en las fibras internas, por lo que su efecto puede ser despreciado.

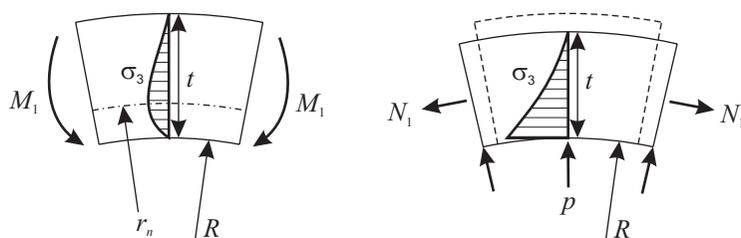


Figura 3.23: Distribución de la tensión transversal en el espesor en las dos etapas de un proceso de carga flexión-tracción.

La Figura 3.23 muestra dos esquemas del gradiente de tensión transversal (σ_3) en las dos etapas del modelo de flexión-tracción en dos pasos. Nótese que durante la primera etapa de flexión no se considera en primera aproximación la presión ejercida por el punzón, considerándose así un proceso de flexión pura sin reducción de espesor. La reducción del espesor puede ser significativa en esta etapa sólo si el radio es pequeño. No obstante, la reducción más significativa siempre se producirá

durante la etapa de tracción.

Durante la etapa de tracción la variable que gobierna el proceso es el espesor de la chapa (t). Como se acaba de exponer, la formulación propuesta en deformación plana es válida en un proceso flexión-tracción si el axil es lo suficientemente elevado, *i.e.* se cumple la condición (3.118). En estas condiciones, es posible analizar el efecto de la tensión transversal en el conformado de chapa con punzón.

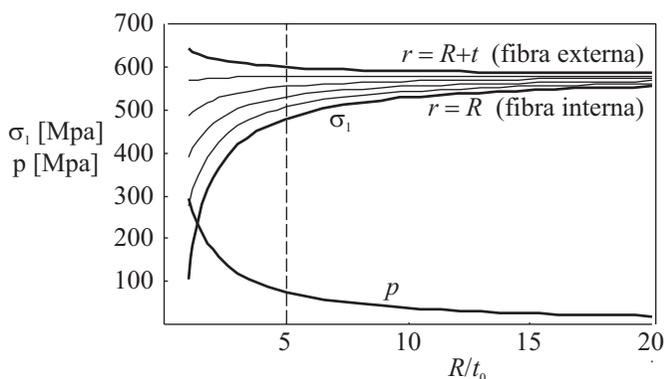


Figura 3.24: Presión y tensión longitudinal en las fibras externa, media e interna, para distintos radios R con una reducción de espesor $t/t_0 = 0,7$.

En efecto, la Figura 3.24 muestra la influencia del radio del punzón (R) en la presión ejercida (p) y en tensión principal máxima (σ_1), dadas en (3.112) y (3.114), respectivamente. El material empleado se ha supuesto isótropo, de espesor inicial unitario ($t_0 = 1$ mm) y con unas constantes $K = 600$ MPa y $n = 0,2$, típicas de un acero dúctil. Las curvas representadas corresponden al instante en el que el espesor se ha reducido un 70%. En estas condiciones, el modelo es válido para un radio de punzón de valor $R > 1,7$. Como puede observarse, para radios mayores de 4 ó 5 veces el espesor de la chapa, p (y, por tanto, σ_3) es muy inferior a σ_1 , siendo válida en estas situaciones la hipótesis de tensión plana. Por el contrario, para radios menores, σ_1 en las fibras internas disminuye bruscamente, siendo ésta ahora del mismo orden de magnitud que p . Nótese también que con radios pequeños el gradiente de σ_1 en el espesor es mucho más pronunciado que en los casos de mayor radio.

El error cometido en el cálculo de σ_1 al suponer un estado de tensión plana en chapas sometidas a acciones de tracción-flexión puede analizarse comparando la

ecuación (3.114) con ella misma pero haciendo $\sigma_3 = 0$, *i.e.*:

$$\sigma_1^{TP}(r) = C\sigma_{eq}(r) = C^{n+1}K\varepsilon_1^n(r) \quad (3.119)$$

donde el índice *TP* indica tensión plana. La Figura 3.25 muestra los gradientes en el espesor de ε_1 , σ_3 , σ_1 y σ_1^{TP} , con una relación R/t_0 pequeña ($R/t_0 = 2$), en el instante en el que la reducción del espesor es del 70%. Nótese cómo las diferencias entre σ_1 y σ_1^{TP} en la cara interna son importantes.

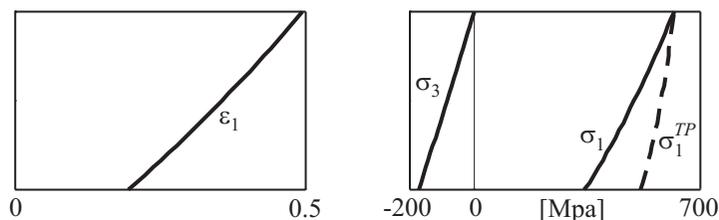


Figura 3.25: Gradientes de ε_1 , σ_3 , σ_1 y σ_1^{TP} con $R/t_0 = 2$ y $t/t_0 = 0,7$.

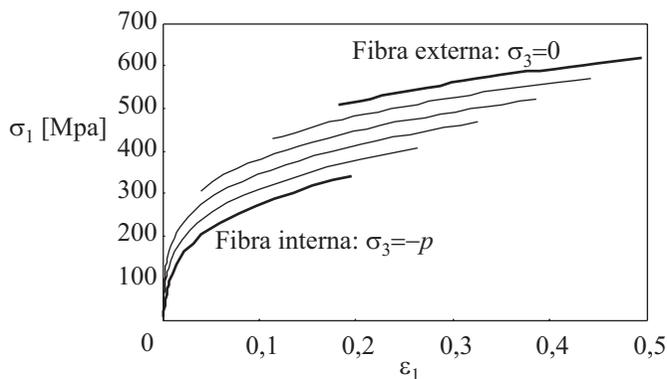


Figura 3.26: Efecto de σ_3 en la relación σ_1 - ε_1 , durante la etapa de tracción con $R/t_0 = 2$.

La Figura 3.26 muestra la relación σ_1 - ε_1 para distintas fibras en el espesor, con la misma curvatura relativa del caso anterior ($R/t_0 = 2$). La evolución mostrada se corresponde con la etapa de tracción, desde que se produce el efecto memoria ($t/t_0 = 0,73$) hasta el instante considerado anteriormente ($t/t_0 = 0,7$). La separación entre las distintas curvas pone de manifiesto la influencia de σ_3 . En cambio, en el caso de tensión plana, la relación σ_1^{TP} - ε_1 es la misma en todas las fibras en el espesor, como se deduce de (3.119), y coincide en la Figura 3.26 con la curva correspondiente a la cara externa de la chapa, donde la tensión transversal es nula.

Las Figuras 3.27 y 3.28 muestran los gradientes en el espesor de ε_1 , σ_3 , σ_1 y σ_1^{TP} , así como la evolución σ_1 - ε_1 en cada fibra para una relación R/t_0 grande ($R/t_0 = 20$). En la Figura 3.27 se puede observar cómo el gradiente de tensión transversal es mucho menor que el de tensión principal máxima y, en consecuencia, la tensión σ_1 puede aproximarse por σ_1^{TP} . Asimismo, la Figura 3.28 muestra cómo la evolución (desde que se produce el efecto memoria, $t/t_0 = 0,96$, hasta $t/t_0 = 0,7$) de las curvas σ_1 - ε_1 a lo largo del espesor tienden a coincidir, y en particular a hacerse iguales a la de la fibra exterior (fibra en tensión plana). Como resultado se puede concluir que la hipótesis de tensión plana es razonablemente válida para valores de R/t_0 suficientemente grandes.

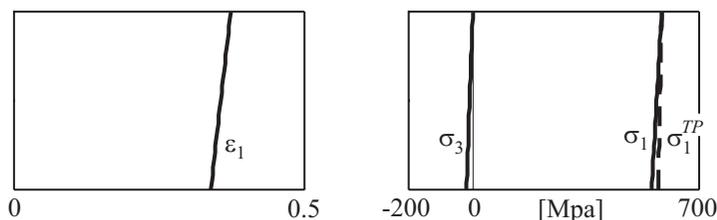


Figura 3.27: Gradientes de ε_1 , σ_3 , σ_1 y σ_1^{TP} con $R/t_0 = 20$ y $t/t_0 = 0,7$.

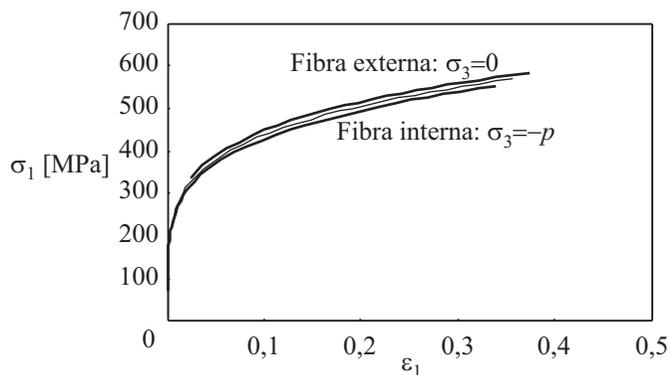


Figura 3.28: Efecto de σ_3 en la relación σ_1 - ε_1 , durante la etapa de tracción con $R/t_0 = 20$.

Bibliografia

- Alexandrov S, Kim JH, Chung K, Kang TJ (2006). *An alternative approach to analysis of plane-strain pure bending at large strains*. Journal Strain Analysis 41(5):397–410
- Barata-Rocha A, Santos AD, Teixeira P, Butuc MC (2009). *Analysis of plastic flow localization under strain paths changes and its coupling with finite element simulation in sheet metal forming*. Journal of Materials Processing Technology 209:5097–5109
- Chakrabarty J (1987). Theory of plasticity. McGraw-Hill, New York
- Chakrabarty J, Lee WB, Chan KC (2001). *An exact solution for the elastic/plastic bending of anisotropic sheet metal under conditions of plane strain*. International Journal of Mechanical Sciences 43:1871–1880
- Charpentier P (1975). *Influence of punch curvature on the stretching limits of sheet steel*. Metallurgical and Materials Transactions A 6(9):1665–1669
- Col A (2002). *FLCs: past, present and future*. En: Proc. Biennial Congress of the International Deep Drawing Research Group, IDDRG, Nagoya, Japan
- Col A (2005). *FLCs: are we at a turn?*. En: Proc. Biennial Congress of the International Deep Drawing Research Group, IDDRG, Besançon, France
- Col A, Balan T (2007). *About the neglected influence of gradients on strain localisation*. En: Proc. Materials Processing and Design: Modeling, Simulation and Applications, NUMIFORM 2007, Interlaken, Switzerland, pp. 147–152
- Crafoord R (1970). *Plastic bending of sheet metals*. tesis doctoral, Chalmers University of Technology, Göteborg, Sweden
- Dadras P, Majlessi SA (1982). *Plastic bending of work hardening materials*. Trans ASME, J Engineering for Industry 104:224
- Demeri MY (1981a). *The formability of a dual phase steel*. Metallurgical Transactions A 12:1187–1196
- Demeri MY (1981b). *The stretch bending of sheet metal*. Journal Applied Metalworking 2(1):3–10

- Dowling NE (1993). *Mechanical behaviour of materials: engineering methods for deformation, fracture and fatigue*. Prentice-Hall International Editions
- El-Domiaty A, Shabaik AH (1984). *Bending of work-hardening metals under the influence of axial load*. *Journal of Mechanical Working Technology* 10:57–66
- El-Domiaty A, Shabara MAN, Al-Ansary MD (1996). *Determination of stretch-bendability of sheet-metals*. *International Journal of Machine Tools Manufacture* 36(5):635–650
- Emmens WC, van den Boogaard AH (2008). *Extended tensile testing with simultaneous bending*. En: Proc. Congress of the International Deep Drawing Research Group, IDDRG, Olofström, Sweden
- Emmens WC, van den Boogaard AH (2010). *Contact effect in bending affecting stress and formability*. *International Journal of Material Forming* 3, Supp. 1:1159–1162
- Ghosh AK, Hecker SS (1974). *Stretching limits in sheet metals: in-plane versus out-of-plane deformation*. *Metallurgical Transactions* 5:2161–2164
- Goodwin GM (1968). *Application of strain analysis to sheet metal forming in the press shop*. SAE paper 680093
- Graf AF, Hosford WF (1990). *Calculations of forming limit diagrams*. *Metallurgical and Materials Transactions A* 21(1):87–94
- Graf AF, Hosford WF (1993a). *Calculations of forming limit diagrams for changing strain paths*. *Metallurgical Transactions A* 24A:2497–2501
- Graf AF, Hosford WF (1993b). *Effect of changing strain paths on forming limit diagrams of Al 2008-T4*. *Metallurgical Transactions A* 24A:2503–2512
- Gutscher G, Wu H, Ngaile G, Altan T (2004). *Determination of flow stress for sheet metal forming using the viscous pressure bulge (VPB) test*. *Journal of Materials Processing Technology* 146:1–7
- Hill R (1950). *The mathematical theory of plasticity*. Oxford, Clarendon Press
- Hill R (1979). *Theoretical plasticity of textured aggregates*. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society* 85:179–191

- Hora P, Tong L (2008). *Theoretical prediction of the influence of curvature and thickness on the FLC by the enhanced modified maximum force criterion*. En: Proc. 7th International Conference and Workshop on Numerical Simulation of 3D Sheet Metal Forming Processes, Numisheet 2008, Interlaken, Switzerland, pp. 205–210
- Hosford WF (1979). *On yield loci of anisotropic cubic metals*. En: Proc. 7th North America Metalworking Conference S.M.E., Dearborn, Michigan, U.S.A., p. 191
- Hosford WF (1985). *Comments on anisotropic yield criteria*. International Journal of Mechanical Sciences 27(7/8):423–427
- Hotz W, Timm J (2008). *Experimental determination of forming limit curves (FLC)*. En: Proc. 7th International Conference and Workshop on Numerical Simulation of 3D Sheet Metal Forming Processes, Numisheet 2008, Interlaken, Switzerland, pp. 271–278
- Huang M, Zhang L, Yang L (2008). *On the failure of AHSS at tooling radius*. En: Proc. 7th International Conference and Workshop on Numerical Simulation of 3D Sheet Metal Forming Processes, Numisheet 2008, Interlaken, Switzerland, pp. 307–309
- Johnson W, Yu TX (1981a). *On springback after the pure bending of beams and plates of elastic work-hardening materials - III*. International Journal of Mechanical Sciences 23(11):687–695
- Johnson W, Yu TX (1981b). *On the range of applicability of results for the springback of an elastic-perfectly plastic rectangular plate after subjecting it to biaxial pure bending - II*. International Journal of Mechanical Sciences 23(10):631–637
- Johnson W, Yu TX (1981c). *On the range of applicability of results for the springback of an elastic-work-hardening rectangular plate after subjecting it to biaxial pure bending - IV*. International Journal of Mechanical Sciences 23(11):697–701
- Johnson W, Yu TX (1981d). *Springback after the biaxial elastic-plastic pure bending of a rectangular plate - I*. International Journal of Mechanical Sciences 23(10):619–630
- Keeler SP (1968). *Circular grid system: a valuable aid for evaluating sheet metal formability*. SAE paper 680092

- Khan AS, Huang S (1995). *Continuum Theory of Plasticity*. John Wiley & Sons, New York
- Kitting D, Ofenheimer A, Jain M, Pauli H, Rabler G (2008). *Experimental characterisation of failure of stretch-bend steel sheets*. En: Proc. 7th International Conference and Workshop on Numerical Simulation of 3D Sheet Metal Forming Processes, Numisheet 2008, Interlaken, Switzerland, pp. 315–320
- Kitting D, Ofenheimer A, Pauli H, Till ET (2009a). *Application of a “Concave-Side Rule” approach for assessing formability of stretch-bent steel sheets*. International Journal of Material Forming 2, Supp. 1:427–430
- Kitting D, Ofenheimer A, Pauli H, Till ET (2009b). *Forming limits of stretch-bent steel sheets*. En: Proc. Congress of the International Deep Drawing Research Group, IDDRG, Golden, Colorado, USA, pp. 425–435
- Kruijf NE, Peerlings RHJ, Geers MGD (2009). *An analysis of sheet necking under combined stretching and bending*. En: Proc. 12th International ESAFORM Conference on Material Forming, University of Twente, Enschede, The Netherlands
- Majlessi SA, Dadras P (1983). *Pure plastic bending of sheet laminates under plane strain condition*. International Journal of Mechanical Sciences 25(1):1–14
- Melbourne SH, Pietrowski R, Marsh G (1973). *Testing HSLA steel’s sensitivity to sheared edged cracking*. Report, Domintion Foundries and Steel Limited, Hamilton, Ontario, Canada
- Rees DWA (1995). *Plastic flow in the elliptical bulge test*. International Journal of Mechanical Sciences 37(4):373–389
- Sadagopan S, Wong C, Huang M, Yan B, Urban D (2003). *Formability characterization of a new generation of high strength steels*. Final report, AISI/DOE Technology Roadmap Program
- Schleich R, Sindel M, Liewald M (2009). *Investigation on the effect of curvature on forming limit prediction for aluminium sheet alloys at stretch-bending*. International Journal of Material Forming 2(2):69–74
- Shi MF, Gerdeen JC (1991). *Effect of strain gradient and curvature on Forming Limit Diagrams for anisotropic sheets*. Journal Materials Shaping Technology 9(4):253–268

- Sriram S, Wong C, Huang M, Yan B (2003). *Stretch bendability of advanced high strength steels*. SAE paper 2003-01-1151, Society of Automotive Engineers
- Stoughton TB (2000). *A general forming limit criterion for sheet metal forming*. International Journal of Mechanical Sciences 42:1–27
- Stoughton TB (2008). *Generalized metal failure criterion*. En: Proc. 7th International Conference and Workshop on Numerical Simulation of 3D Sheet Metal Forming Processes, Numisheet 2008, Interlaken, Switzerland, pp. 241–246
- Stoughton TB, Yoon JW (2005). *Sheet metal formability analysis for anisotropic materials under non-proportional loading*. International Journal of Mechanical Sciences 47(12):1972–2002
- Stoughton TB, Yoon JW (2010). *A new approach for failure criterion for sheet metals*. International Journal of Plasticity (In press, doi:10.1016/j.ijplas.2010.07.004)
- Stoughton TB, Zhu X (2004). *Review of theoretical models of the strain-based FLD and their relevance to the stress-based FLD*. International Journal of Plasticity 40:1463–1486
- Tan Z, Persson B, Magnusson C (1995). *Plastic bending of anisotropic sheet metals*. International Journal of Mechanical Sciences 37(4):405–421
- Tharrett MR, Stoughton TB (2003a). *Stretch-bend forming limits of 1008 AK steel*. SAE paper 2003-01-1157
- Tharrett MR, Stoughton TB (2003b). *Stretch-bend forming limits of 1008 AK steel, 70/30 brass, and 6010 aluminum*. Internal report, Society of Automotive Engineers
- Uko DK, Sowerby R, L DJ (1977). *Strain distribution in the bending-under-tension test*. CIM Bulletin 127-134
- Ventsel E, Krauthammer T (2001). *Thin plates and shells: theory, analysis, and applications*. Marcel Dekker, New York
- Verguts H, Sowerby R (1975). *The pure plastic bending of laminated sheet metals*. International Journal of Mechanical Sciences 17:31–51

- Wu PD, Graf A, MacEwen SR, Lloyd DJ, Jain M, Neale KW (2005). *On forming limit stress diagram analysis*. International Journal of Solids and Structures 42:2225–2241
- Yoshida M, Yoshida F, Konishi H, Fukumoto K (2005). *Fracture limits of sheets metals under stretch bending*. International Journal of Mechanical Sciences 47:1885–1896
- Yu TX, Zhang LC (1996). Plastic bending: theory and applications. World Scientific, Singapore
- Zhu HX (2007). *Large deformation pure bending of an elastic plastic power-law-hardening wide plate: analysis and application*. International Journal of Mechanical Sciences 49:500–514

Capítulo 4

El fallo bajo condiciones de flexión-tracción

Los métodos clásicos de predicción del fallo de chapa por estricción localizada y por fractura dúctil revisados en el Capítulo 1 asumen una distribución uniforme de tensión/deformación en el espesor que, además de simplificar los análisis, encubren determinados aspectos de la física real del problema. Así, como se ha comentado en el Capítulo 2, diversos autores señalan que un gradiente de deformación en el espesor de la chapa tiene un efecto importante en el fallo y que resulta fundamental comprender el mecanismo de deformación en estas situaciones para predecir el modo de fallo. En este capítulo se analiza el efecto del gradiente de tensión/deformación en la estricción y en la fractura, proponiéndose un modelo para su predicción que se complementa con los modelos de carga descritos en el capítulo anterior.

En el primer apartado de este capítulo se analiza, desde un punto de vista físico, la influencia de la flexión en el fallo de chapa por estricción localizada y por fractura dúctil, y se expone el enfoque adoptado para predecir la conformabilidad del material en condiciones de flexión-tracción. Posteriormente se presentan dos reglas muy simples propuestas en la literatura para la predicción del fallo en presencia de un gradiente de deformación, y que han mostrado unas predicciones razonables, especialmente en operaciones con radios suaves. En el tercer apartado se discute la validez de las reglas anteriores y se proponen unos modelos de predicción más realistas que consideran la influencia de la microestructura del material en el fallo, basados en los clásicos Métodos de Distancias Críticas. La influencia de la historia

de carga es revisada en el cuarto apartado, siendo los modelos de predicción reformulados en consecuencia. En el quinto apartado se realiza un análisis del efecto de la tensión transversal en el espesor en el fallo por estricción, comparando el modelo propuesto con los resultados del criterio de inestabilidad de Hill (1952) obtenidos en condiciones de flexión-tracción y con trabajos recientes de otros autores. Por último, el sexto apartado introduce el concepto de Superficie Límite de Conformado (SLC) como una herramienta unificada para evaluar la conformabilidad de chapas, de forma análoga al clásico Diagrama Límite de Conformado (DLC) pero que considera además el efecto de la flexión.

4.1. Influencia del gradiente de deformación en el fallo de chapa

El efecto de un gradiente de deformación en el fallo de chapa puede explicarse fácilmente asumiendo que la chapa está compuesta por fibras o capas de material superpuestas en el espesor. En ausencia de gradiente de deformación, como es el caso del estirado en el plano de la chapa (*in-plane stretching*), todas las fibras en el espesor alcanzan la misma deformación (Figura 4.1(a)). En esta situación, el fallo de la chapa está controlado esencialmente por la iniciación de una inestabilidad plástica o por la fractura en una sola de estas fibras o en un grupo de fibras o en todas las fibras a la vez, ya que si esto ocurre el fallo se propaga rápidamente por todo el espesor, produciéndose el fallo de la chapa por estricción localizada o por fractura, respectivamente. Que suceda uno u otro modo de fallo dependerá de la ductilidad del material y de las condiciones de deformación (véase el Capítulo 1).

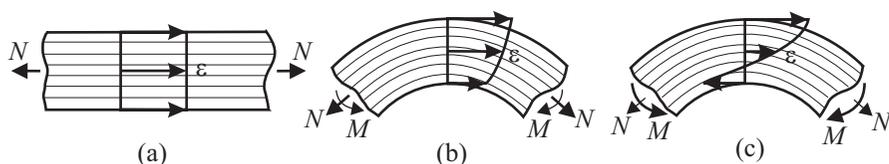


Figura 4.1: Esquema de distribuciones de deformación en el espesor de la chapa: (a) uniforme, (b) gradiente suave y (c) gradiente severo.

Cuando la tracción predomina sobre la flexión y existe un gradiente moderado de deformación en la chapa (Figura 4.1(b)), *e.g.* en operaciones de estirado (*stretch-bending*) o estampación (*stamping*) con punzones de radios suaves, la estricción localizada es el modo de fallo más habitual. En esta situación, debido a la presencia

del gradiente de deformación, el hecho de que se produzca la inestabilidad de las fibras externas, las más deformadas, no implica la inmediata inestabilidad de la chapa. Por ejemplo, aunque las fibras más externas alcanzasen la misma condición de inestabilidad que la correspondiente al caso de deformación uniforme en el espesor, las fibras que hay por debajo, de material menos deformado, retrasarían la estricción de la chapa (Col y Balan, 2007). De esta forma, suponiendo que se aplica la misma deformación en la cara externa, un gradiente de deformación causará siempre menos daño que una distribución uniforme. Este hecho ha sido observado en multitud de trabajos experimentales, denominado frecuentemente como *efecto beneficioso o estabilizador* de la flexión en la conformabilidad de chapa (Ghosh y Hecker, 1974; Charpentier, 1975; Tharrett y Stoughton, 2003a,b; Kitting *et ál.*, 2008; Morales *et ál.*, 2009, 2010; Vallellano *et ál.*, 2008, 2010; Schleich *et ál.*, 2009a,b; Stoughton y Yoon, 2010).

En cambio, cuando el doblado es más severo (Figura 4.1(c)), *e.g.* en operaciones de doblado al aire (*air bending*), rebordeado (*flanging*) o dobladillo (*hemming*), las fibras en la cara interna pueden llegar a comprimirse y conseguir que el material en esta región aumente de espesor. En estas situaciones, la estricción no puede llegar a desarrollarse, siendo entonces la fractura dúctil el mecanismo que domina en el fallo. La fractura dúctil se inicia con la aparición de una grieta, generalmente en planos de cortante máximo, en las fibras más deformadas (fibras externas) de la chapa.

En condiciones de doblado intermedias a las dos anteriores, *i.e.* en operaciones donde la tracción predomina sobre la flexión y existe un gradiente relativamente severo de deformación, el modo de fallo dependerá de si se alcanza antes la inestabilidad plástica de la chapa o, por el contrario, aparecen antes grietas superficiales en la cara más deformada.

Así, resumiendo las ideas anteriores, cabe esperar dos modos independientes de fallo en una chapa, dependiendo de la severidad del gradiente de deformación en el espesor:

1. un fallo por estricción localizada, que se iniciará cuando todas las fibras en el espesor alcancen la inestabilidad plástica; y
2. un fallo por fractura dúctil, que aparecerá cuando las fibras más deformadas (fibras externas) alcancen el límite de fractura.

Hay que hacer observar que la fractura superficial (Figura 4.2(a)) es diferente, *a priori*, de la fractura que viene precedida de una estricción localizada (Figura

4.2(b)). Mientras que la primera se manifiesta con la aparición de grietas en la cara más deformada de la chapa, la segunda suele producir un desgarramiento de toda la sección, favorecido por la menor severidad del gradiente de deformación y por la rápida propagación de la estricción previa. Presumiblemente, tal distinción se debe a las diferentes condiciones de conformado de la chapa y se justifica solamente por la forma en que se manifiesta el fallo. En realidad, parece razonable asumir que ambos tipos de fractura dúctil están causados por el mismo fenómeno de agotamiento de la ductilidad del material. Esta idea está de acuerdo con el trabajo de Stoughton (2008), quien propuso un criterio único de fallo para ambos modos de fractura. El autor analizó los resultados experimentales de Lin *et al.* (2006) en chapas de aleación de aluminio 6111-T4, donde se produjeron fractura superficial en ensayos de dobladillo (*hemming*) y desgarramiento global en ensayos de tracción uniaxial y en deformación plana. En efecto, Stoughton mostró que la fractura superficial en el primer grupo de ensayos se producía cuando la tensión tangencial máxima en la cara externa alcanzaba un valor crítico idéntico al nivel de tensión que producía el desgarramiento en el segundo grupo de ensayos.

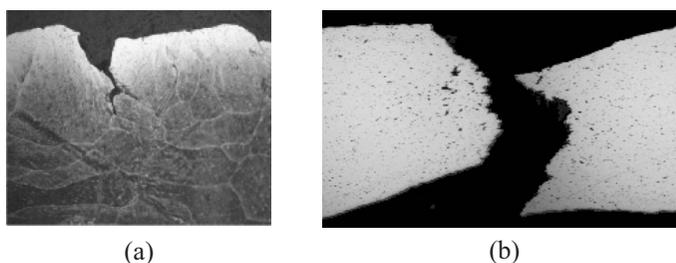


Figura 4.2: Micrografías de chapas fracturadas (Schleich *et al.*, 2009b): (a) fractura superficial debido a una flexión dominante; y (b) estricción y posterior desgarramiento en el espesor debido a una tracción dominante.

La predicción de la estricción localizada y de la fractura dúctil ha sido ampliamente estudiada en procesos de conformado en el plano de la chapa, donde no existe flexión. En estas condiciones se han propuesto un gran número de criterios de fallo; los más importantes han sido revisados en el Capítulo 1. Todos estos criterios podrían ahora reformularse considerando en los análisis el efecto de la flexión. O al menos los más relevantes, como los de Hill (1952), Stören y Rice (1975) y Marciniak y Kuczyński (1967) para estricción localizada, y los de Freudenthal (1950), Cockcroft y Latham (1968) y Bressan y Williams (1983) para fractura dúctil. Así, por ejemplo, una generalización del criterio de Hill (1952) que incluye

el efecto de la flexión se desarrolla más adelante (Apartado 4.5). Este ejemplo en particular muestra que, en general, la formulación matemática al considerar un gradiente de deformación en el espesor se prevé bastante engorrosa y de difícil resolución analítica. Además, aunque cada uno de estos criterios tiene sus ventajas y sus limitaciones, ninguno está universalmente aceptado ya que las previsiones suelen diferir en mayor o menor medida con los resultados experimentales.

Por todo lo anterior, en esta tesis se adopta un enfoque *local* para la predicción del fallo en condiciones de flexión-tracción, en el que se asumen conocidos los límites de conformado de la chapa en ausencia de flexión. Los valores límite de conformado en el plano se tomarán de resultados experimentales de la literatura, en la medida de lo posible, o se estimarán mediante el criterio de predicción más conveniente en cada caso. Presumiblemente, los modelos propuestos según este enfoque permitirán obtener mejores predicciones que las que se obtendrían mediante una reformulación de cualquiera de los criterios clásicos de fallo en el plano que incluya el efecto de la flexión.

4.2. Reglas de la Caras Cóncava y Convexa

Dado que la estricción localizada es una forma de inestabilidad plástica, es razonable asumir que la inestabilidad de la chapa se alcanza sólo cuando todas las fibras en el espesor han alcanzado la condición de inestabilidad. Esto implica que el fallo de la chapa está controlado por la capacidad de conformado de las fibras menos deformadas, esto es, las fibras internas o fibras en torno a la cara cóncava en la zona del proceso. Así, una simple aproximación consiste en asumir que la estricción de la chapa está controlada por una sola fibra, la menos deformada (fibra interna), de manera que el fallo ocurra cuando el estado de tensión/deformación de esta fibra alcance el mismo nivel que en un caso de estirado sin flexión. Esta idea es consistente con la *Regla de la Cara Cóncava* propuesta por Tharrett y Stoughton (2003a,b). Esta regla se basa en los trabajos de los autores con ensayos de estirado con punzones de radios diferentes y en chapas de distintos materiales, donde observaron que la estricción de la chapa se iniciaba cuando la deformación de la cara cóncava alcanzaba aproximadamente la deformación límite de estricción en el plano. Los resultados experimentales de estos trabajos se analizarán en el Capítulo 5.

Usando la misma formulación del capítulo anterior, la Regla de la Cara Cóncava

puede expresarse como (Figura 4.3(a)):

$$\varepsilon_{1,in} = \varepsilon_{1,neck}(\beta) \quad (4.1)$$

siendo $\varepsilon_{1,in} = \varepsilon_1(\zeta = -1/2)$ la deformación principal máxima en la cara interna y $\varepsilon_{1,neck}(\beta)$ la deformación límite de fallo por estricción localizada en el plano para una determinada relación β ($\beta = d\varepsilon_2/\varepsilon_1$). Los valores de $\varepsilon_{1,neck}(\beta)$ se pueden obtener a partir de un DLC tradicional, donde no están presentes efectos de flexión. El DLC debería ser experimental, aunque en su defecto se puede estimar mediante uno cualquiera de los métodos descritos en el Capítulo 1.

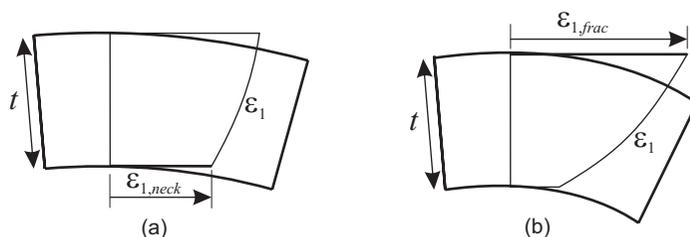


Figura 4.3: Esquema del efecto de la flexión en el fallo de chapa: (a) Regla de la Cara Cóncava para estricción localizada; y (b) Regla de la Cara Convexa para fractura dúctil superficial.

De forma análoga, si el fallo se produce por fractura dúctil y dado que ésta se inicia con la aparición de grietas en la cara externa de la chapa, se podría suponer que el fallo está controlado sólo por la fibra externa. De acuerdo a esta idea, un criterio conservador de fractura consiste en asumir que la chapa falla cuando la cara externa o convexa alcanza la misma deformación límite de fractura que en un estirado sin flexión. En adelante, este criterio de fractura será denominado *Regla de la Cara Convexa*, por analogía a la anterior regla para la estricción. Obviamente, este criterio no es nuevo y ha sido comprobado satisfactoriamente en una gran variedad de operaciones de doblado (Ragab y Saleh, 2005).

La Regla de la Cara Convexa puede ser expresada como (Figura 4.3(b)):

$$\varepsilon_{1,out} = \varepsilon_{1,frac}(\beta) \quad (4.2)$$

siendo $\varepsilon_{1,out} = \varepsilon_1(\zeta = 1/2)$ la deformación principal máxima en la cara externa y $\varepsilon_{1,frac}(\beta)$ la deformación límite de fallo por fractura para un β dado en condiciones de estirado sin flexión. El valor de $\varepsilon_{1,frac}(\beta)$ se puede calcular a partir de datos experimentales o a través de modelos matemáticos como los presentados en el

Capítulo 1. El trabajo de Jain *et ál.* (1999) analiza varios criterios clásicos de fractura. La selección de un criterio de fractura adecuado es esencial y dependerá del material y de las condiciones de conformado.

Las Reglas de la Caras Cóncava y Convexa permiten realizar un primer análisis sencillo del efecto de la flexión en la conformabilidad de chapas metálicas. Ambas reglas han sido originariamente formuladas en términos de deformaciones, despreciando así implícitamente la influencia del camino de carga.

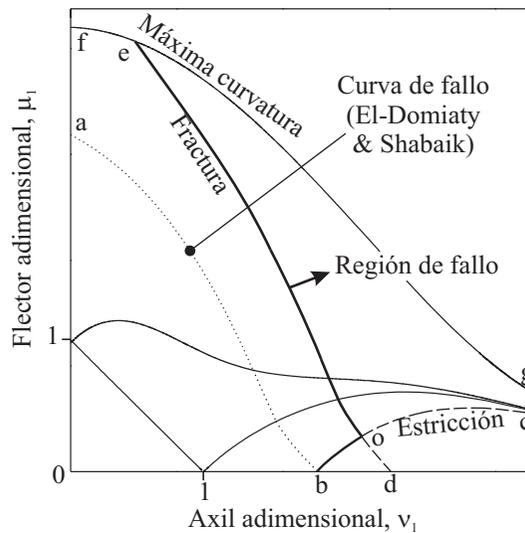


Figura 4.4: Diagrama MN obtenido mediante el modelo de carga proporcional incluyendo las Reglas de las Caras Cóncava y Convexa.

La Figura 4.4 muestra en un diagrama MN las curvas de fallo obtenidas mediante la Regla de la Cara Cóncava para la estricción localizada (curva b-c) y la Regla de la Cara Convexa para la fractura dúctil (curva e-d). Dichas curvas han sido obtenidas haciendo uso del modelo de carga proporcional propuesto en el Capítulo 3 (Apartado 3.2). El punto b representa el fallo en tracción pura, donde la distribución de deformaciones es uniforme. Como se aprecia en este diagrama, las dos curvas de fallo (b-c y e-d) se cortan en el punto o. De esta forma, la curva de fallo general de la chapa para el estado de deformación β está compuesta por la curva b-o-e, formada por un segmento b-o, correspondiente al fallo por estricción localizada, y un segmento o-e, correspondiente al fallo por fractura. La curva límite del conformado de la chapa está formada por la curva de fallo (curva b-o-e) que se

completa eventualmente con el segmento e-f correspondiente a la curvatura máxima que puede alcanzar la chapa sin agrietarse. Por último, nótese que la curva a-b corresponde al criterio propuesto por El-Domiaty *et ál.* (El-Domiaty y Shabaik, 1984; El-Domiaty *et ál.*, 1996) mencionado en el capítulo anterior (véase la Figura 3.6, pág. 108), el cual supone que el fallo por estricción está controlado por la cara externa. Como se puede observar, dicha curva difiere claramente respecto de la curva de fallo actual, la cual representa un claro soporte físico del que adolece la propuesta de El-Domiaty *et ál.*

En general, las Reglas de las Caras Cóncava y Convexa han mostrado predicciones razonables del fallo en los ensayos en los que han sido probadas, especialmente cuando los radios de curvatura son suaves. Sin embargo, ambas reglas tienden a sobreestimar y subestimar, respectivamente, los resultados experimentales al disminuir el radio del punzón (Tharrett y Stoughton, 2003a,b; Kitting *et ál.*, 2009a; Morales *et ál.*, 2009, 2010; Vallellano *et ál.*, 2008, 2010). En el siguiente apartado se proponen unos modelos de predicción del fallo más realistas que permiten mejorar las predicciones.

4.3. Modelo de fallo basado en los Métodos de Distancias Críticas

En términos generales, asumir que el fallo en el espesor de la chapa depende de lo que ocurre en una sola fibra, *i.e.* la cara interna o la cara externa de la chapa según las reglas del apartado anterior, puede ser bastante restrictivo desde un punto de vista físico. En este sentido, una hipótesis más realista consiste en considerar que el fallo está controlado por lo que ocurre en un cierto volumen crítico de material, que estará relacionado presumiblemente con las propiedades mecánicas y con la microestructura del material.

Según esta idea, un enfoque más realista que el planteado por la Regla de la Cara Cóncava para predecir el fallo por estricción localizada consiste en considerar que el fallo está controlado, no por una sola fibra, sino por una fracción de material de cierto grosor medido desde la cara interna de la chapa. De manera análoga, parece más razonable asumir que el fallo por fractura dúctil no está controlado por una sola fibra en la cara externa, como postula la Regla de la Cara Convexa, sino por un cierto volumen de material localizado en la cara externa.

Como consecuencia del gradiente en el espesor, las tensiones/deformaciones que actúan en un determinado volumen de material son diferentes a las de la cara in-

terna o externa, permitiendo de esta manera explorar nuevos métodos que mejoren las predicciones de las reglas anteriores. A continuación se presentan brevemente los denominados Métodos de Distancias Críticas, cuyas ideas proporcionan un excelente punto de partida para estudiar las condiciones en las que se produce el fallo de chapa. Posteriormente se propone un modelo de predicción de fallo, mediante una combinación de las Reglas de las Caras Cóncava y Convexa y de los Métodos de Distancias Críticas.

4.3.1. Métodos de la Línea y del Punto

El concepto de volumen crítico de material ha sido ampliamente utilizado para tener en cuenta el efecto de los gradientes de tensión/deformación en diferentes mecanismos de fallo, como la fatiga y la fractura. Entre otros, los llamados Métodos de las Distancias Críticas, originariamente desarrollados para analizar el comportamiento a fatiga de componentes con entallas, han sido recientemente revisados y ampliados por Taylor (2007) para predecir el fallo por fractura frágil y dúctil en diferentes materiales como metales, plásticos, cerámicas o incluso huesos. Estos métodos se basan en la idea de que el efecto de la concentración de tensión en la reducción de la resistencia de un componente entallado depende, no sólo de la tensión máxima en la superficie, sino también del gradiente de tensión en su interior. Este gradiente determina el volumen de componente que está sometido a unos valores altos de tensión y cuál es su capacidad para generar un daño local. De esta manera, el fallo se predice cuando una cierta tensión efectiva (σ_{eff}), representativa de la distribución de tensión en el material, excede un cierto valor crítico (σ_{cr}) a una cierta distancia (d) de la superficie del componente.

Dos de estos métodos son el Método de la Línea (*Line Method*, LM) y el Método del Punto (*Point Method*, PM), representados esquemáticamente en la Figura 4.5. El primero, propuesto por Neuber (1946), utiliza la tensión promedio como tensión efectiva. Neuber postula que la resistencia a fatiga de una pieza entallada depende de la tensión media sobre un cierto volumen elemental de material situado en el fondo de la entalla. Dicha tensión media es función de la distribución de las tensiones a lo largo de este volumen elemental y, por tanto, inferior a la tensión máxima. Así, el fallo del componente sucede cuando la tensión media excede un valor crítico (σ_{cr}) a una cierta distancia (d_{LM} en la Figura 4.5(a)):

$$\sigma_{eff} := \bar{\sigma}(d_{LM}) = \frac{1}{d_{LM}} \int_0^{d_{LM}} \sigma(x) dx \geq \sigma_{cr} \quad (4.3)$$

En el modelo original de Neuber, σ_{cr} representa el límite de fatiga del material.

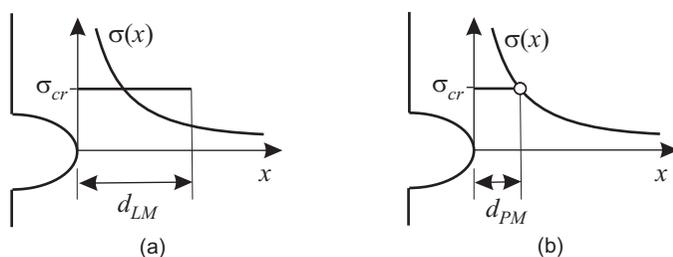


Figura 4.5: Métodos de las Distancias Críticas en el borde de una entalla: (a) Método de la Línea y (b) Método del Punto.

La dimensión representativa del volumen elemental (d_{LM}) dependerá del tipo de material y del tratamiento térmico y mecánico al que haya sido tratado. Kuhn y Hardraht (1952) correlacionaron experimentalmente esta dimensión con el límite de rotura del material para el caso de aceros y por ende debe estar relacionada con la microestructura del material.

El segundo método o Método del Punto, propuesto por Peterson (1959), está relacionado directamente con el gradiente de tensiones originado en la entalla y utiliza como tensión efectiva la tensión actual a una cierta distancia de la superficie. Así, Peterson sugiere que el fallo del componente ocurre cuando la tensión local a una distancia característica del fondo de la entalla (d_{PM} en la Figura 4.5(b)) alcanza un valor crítico (σ_{cr}), *e.g.* el límite de fatiga del material, que puede ser expresado como:

$$\sigma_{eff} := \sigma(d_{PM}) \geq \sigma_{cr} \quad (4.4)$$

El citado autor comprobó que el valor de la distancia d_{PM} podía ser considerado una característica del material. Asimismo, Langer (1960) también obtuvo una correlación de dicha distancia con la resistencia a tracción del acero.

Los modelos de Neuber y Peterson han sido ampliamente utilizados en ingeniería, con resultados muy satisfactorios en gran número de situaciones prácticas. Ambos proporcionan una aproximación atractiva para estudiar las condiciones necesarias que concurren en la iniciación de la estricción localizada y de la fractura dúctil en el conformado de chapa donde existen esfuerzos de flexión. Las dos ideas importantes que se desprenden de estos modelos y que pueden aplicarse al fallo de chapa en presencia de un gradiente de deformación se pueden resumir en:

1. la resistencia al fallo del material está principalmente influenciada por la evolución de la tensión/deformación en el espesor y no exclusivamente por

el valor local en una de las dos caras de la chapa, y

2. existe una clara dependencia con el tipo de material empleado, reflejada en estos modelos a través de cierta distancia crítica característica del material.

Esta interpretación permite conectar con las ideas de Neuber y Peterson en cuanto a la necesidad de emplear una longitud característica en el espesor de la chapa para determinar el límite de iniciación de la estricción localizada o el límite de la fractura dúctil, el cual podría ser aquí, de manera natural, el tamaño de grano.

4.3.2. Modelo de fallo por estricción

De acuerdo a las conceptos planteados en los Métodos de Distancias Críticas, se puede argumentar que el inicio de una estricción en una chapa sometida a un gradiente de tensión/deformación en el espesor está controlado por lo que sucede en un volumen de material a una cierta distancia crítica de la cara interna. Desde un punto de vista físico, se puede inferir que este volumen de material menos deformado y que ofrece, por tanto, una mayor resistencia al aumento de la deformación, es el que retrasa la formación de la inestabilidad hasta que ya no es capaz de resistir por más tiempo.

Un primer modelo simple de predicción del fallo consiste en combinar la Regla de la Cara Cóncava con los métodos anteriores. La diferencia principal con el esquema de los Métodos de las Distancias Críticas reside en el uso de la deformación principal máxima (ε_1) como variable representativa en vez de la tensión. Se obtienen así dos propuestas distintas correspondientes a los Métodos de la Línea y del Punto, respectivamente.

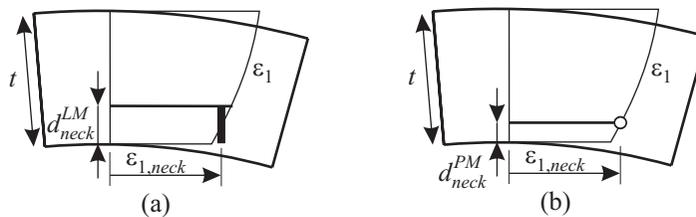


Figura 4.6: Esquema del modelo de fallo por estricción en el espesor combinando la Regla de la Cara Cóncava y: (a) el Método de la Línea; y (b) el Método del Punto.

La primera propuesta consiste en asumir que el fallo está controlado por el valor promedio de la deformación principal máxima en un volumen de material

a una distancia crítica de la cara interna (d_{neck}^{LM} en la Figura 4.6(a)). Usando la formulación del capítulo anterior, este criterio de fallo se expresa como:

$$\bar{\varepsilon}_1(\zeta_{neck}^{LM}) := \frac{1}{\zeta_{neck}^{LM} + 1/2} \int_{-1/2}^{\zeta_{neck}^{LM}} \varepsilon_1(\zeta) d\zeta \geq \varepsilon_{1,neck} \quad (4.5)$$

siendo $\zeta_{neck}^{LM} = (d_{neck}^{LM} - t/2)/t$ la posición relativa de la superficie superior del volumen crítico de material, medida desde la superficie media de la chapa.

La segunda propuesta está basada en el Método del Punto y consiste en asumir que el fallo está controlado por el valor local de la deformación principal máxima a una distancia crítica de la cara interna (d_{neck}^{PM} en la Figura 4.6(b)). Este método se expresa en la presente formulación como:

$$\varepsilon_1(\zeta_{neck}^{PM}) \geq \varepsilon_{1,neck} \quad (4.6)$$

siendo $\zeta_{neck}^{PM} = (d_{neck}^{PM} - t/2)/t$.

Como se ha comentado, las distancias críticas se asumen que son características del material, que dependen de las propiedades mecánicas y de la microestructura a través del tamaño de grano. Como se puede apreciar en el esquema de la Figura 4.6, la distancia crítica según el primer método (d_{neck}^{LM}) siempre será mayor que la del segundo método (d_{neck}^{PM}), debido al gradiente de deformación. Nótese que ambas expresiones (4.5) y (4.6) coinciden con la Regla de la Cara Cóncava dada en (4.1) si la distancia crítica en cada caso es nula.

Por otro lado, parece razonable asumir que todas las fibras en el volumen crítico de material contribuyen en la inestabilidad plástica. Siendo así, la descripción del fallo mediante un valor promedio en dicho volumen parece más realista que asumir que está controlado por un valor local en el interior del material. Por tanto, la descripción del fallo por estricción basada en el Método de la Línea parece más acertada que la del Método del Punto. No obstante, es necesario un trabajo más exhaustivo para sustentar esta idea.

Debido al desplazamiento de las fibras en el espesor, el valor de la distancia crítica cambia durante el conformado. Así, por ejemplo, en un conformado donde predomina la tracción la chapa reduce su espesor y también se reducirá el espesor del volumen de material crítico. Para poder establecer una relación con la microestructura, parece lógico definir la distancia crítica en la chapa indeformada. Se definen, por tanto, d_{neck}^{LM} y d_{neck}^{PM} como las distancias críticas en la chapa sin deformar. Es necesario, por tanto, establecer la evolución de estos parámetros y relacionarlos con los que se obtienen en la chapa deformada (véase la Figura 4.6).

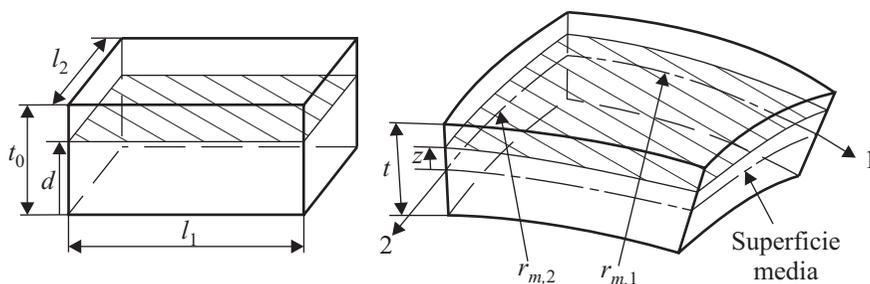


Figura 4.7: Desplazamiento de una fibra genérica en el espesor.

Para ello, considérese una fibra genérica a una distancia d de la cara interna de la chapa sin deformar (Figura 4.7), que se desplaza en el espesor durante el conformado hasta ocupar una posición definida por la variable z en la configuración deformada, medida desde la superficie media. Aplicando la condición de conservación del volumen por debajo de esta fibra, se establece la siguiente relación entre d y z :

$$l_1 l_2 d = \frac{(r_{m,1} - t/2) + (r_{m,1} + z)}{2} \theta_1 \frac{(r_{m,2} - t/2) + (r_{m,2} + z)}{2} \theta_2 t \quad (4.7)$$

donde los cocientes del segundo miembro representan los radios de curvatura de la superficie media del volumen considerado. Tomando $d = t_0$ y $z = t/2$, la expresión anterior representa la condición de conservación de volumen en toda la sección, dada en (3.3). Haciendo el cociente entre ambas expresiones se obtiene:

$$\frac{d}{t_0} = \frac{r_{m,1} + \frac{z-t/2}{2}}{r_{m,1}} \frac{r_{m,2} + \frac{z-t/2}{2}}{r_{m,2}} \frac{z + t/2}{2} \quad (4.8)$$

que puede ser expresada en variables adimensionales como:

$$\delta = \left[1 + \frac{\kappa_1}{2} \left(\zeta - \frac{1}{2} \right) \right] \left[1 + \frac{\kappa_2}{2} \left(\zeta - \frac{1}{2} \right) \right] \left(\zeta + \frac{1}{2} \right) \quad (4.9)$$

siendo $\delta = d/t_0$ el espesor adimensional de la fracción de chapa indeformada, $\kappa_i = r_{m,i}/t$ las curvaturas relativas de la superficie media de la chapa en la dirección principal i ($i = \{1, 2\}$), y $\zeta = z/t$ la posición relativa de la superficie superior del volumen de material considerado.

Así, dado un volumen de material indeformado definido por una distancia a la cara interna de la chapa (d) y las curvaturas relativas en un instante durante el conformado (κ_1 y κ_2), la ecuación (4.9) permite calcular la posición (z) de la

fibra que define el espesor del volumen de material en el instante considerado. De este modo, teniendo en cuenta (4.9) en los métodos de predicción dados en (4.5) y (4.6), la condición de estricción se obtiene fácilmente como una relación entre parámetros geométricos en la chapa deformada (κ_1 y τ_1), el valor de distancia crítica en la chapa sin deformar (d_{neck}^{LM} o d_{neck}^{PM}) y el valor de deformación límite en ausencia de flexión ($\varepsilon_{1,neck}$).

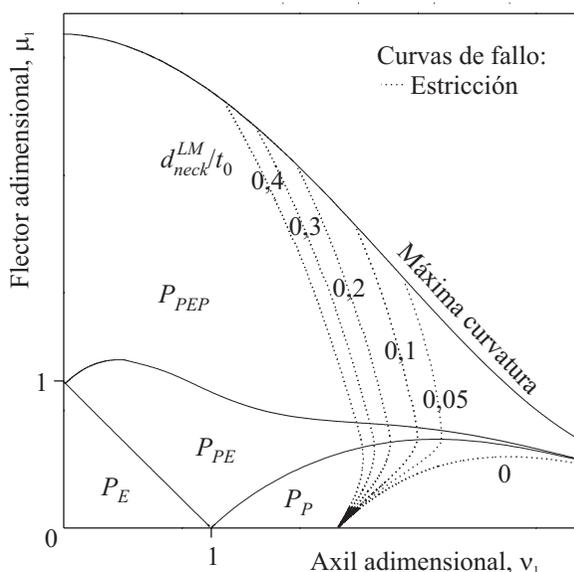


Figura 4.8: Diagrama MN obtenido mediante el modelo de carga proporcional incluyendo curvas de fallo mediante el modelo propuesto por estricción dado en (4.5), para distintos valores de distancia crítica.

El efecto del valor de distancia crítica (definida en la configuración indeformada, d_{neck}^{LM} o d_{neck}^{PM}) en los modelos propuestos de predicción de estricción puede analizarse en un diagrama MN, para unas condiciones de deformación determinadas (β). En particular, el diagrama MN de la Figura 4.8 muestra curvas de fallo para diferentes valores de d_{neck}^{LM} obtenidas mediante el modelo basado en el Método de la Línea, dado en (4.5). Las conclusiones que se obtienen con el modelo basado en el Método del Punto, dado en (4.6), son similares y no se muestran por brevedad.

Como puede observarse en la Figura 4.8, las curvas de fallo se desplazan hacia la izquierda al aumentar el valor de d_{neck}^{LM} , reduciendo así la zona segura de confor-

mado. Por tanto, los métodos propuestos predicen una conformabilidad de chapa tanto menor cuanto mayor sea la distancia crítica considerada. En particular, la curva de fallo correspondiente a una distancia crítica nula ($d_{neck}^{LM} = 0$) coincide con la curva de fallo en la Figura 4.4, correspondiente a la Regla de la Cara Cóncava. Nótese en la figura que todas las curvas de fallo coinciden en el eje de ordenadas, donde la distribución de deformación es uniforme. En el otro extremo, las curvas de fallo cortan a la curva de máxima curvatura, donde se produce el doblado completo de la chapa sin que se inicie una estricción.

Finalmente, hay que hacer observar que la Regla del Plano Medio (discutida en el Capítulo 2) coincide con el modelo propuesto de fallo por estricción basado en el Método del Punto dado en (4.6) tomando como distancia crítica la mitad del espesor ($d_{neck}^{PM} = t_0/2$, *i.e.* considerando la deformación en el plano medio como la variable característica que controla el fallo). O también puede ser aproximada mediante el modelo propuesto de fallo por estricción basado en el Método de la Línea dado en (4.5) tomando como distancia crítica todo el espesor de la chapa ($d_{neck}^{LM} = t_0$, *i.e.* considerando la deformación promedio en el espesor como la variable característica que controla el fallo). Dado que las predicciones de la Regla del Plano Medio son conservadoras y las de la Regla de la Cara Cóncava subestiman los resultados experimentales, es razonable admitir que unos valores de distancias críticas intermedios a los que se obtienen de ambas reglas resultarán en mejores predicciones.

4.3.3. Modelo de fallo por fractura

De manera análoga al modelo propuesto de fallo por estricción se puede proponer un modelo de fallo por fractura dúctil basado en los Métodos de Distancias Críticas, donde el volumen de material crítico se localiza ahora en la cara externa de la chapa. Al igual que antes, existen dos posibilidades dependiendo de si se adopta el Método de la Línea (Figura 4.9(a)) o el Método del Punto (Figura 4.9(b)), en combinación con la Regla de la Cara Convexa. De nuevo, la variable característica que controla el fallo es la deformación principal máxima (ε_1).

La primera opción consiste en asumir que el fallo está controlado por el valor promedio de la deformación principal máxima en el volumen de material crítico (d_{frac}^{LM} en la Figura 4.9(a)). Este criterio de fallo se expresa como:

$$\bar{\varepsilon}_1(\zeta_{frac}^{LM}) := \frac{1}{1/2 - \zeta_{frac}^{LM}} \int_{\zeta_{frac}^{LM}}^{1/2} \varepsilon_1(\zeta) d\zeta \geq \varepsilon_{1,frac} \quad (4.10)$$

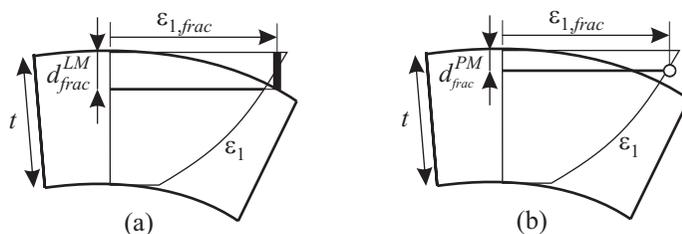


Figura 4.9: Esquema del modelo de fallo por fractura en el espesor combinando la Regla de la Cara Convexa y: (a) el Método de la Línea; o (b) el Método del Punto.

siendo $\zeta_{frac}^{LM} = (t/2 - d_{frac}^{LM})/t$ la posición relativa de la superficie inferior del volumen de material crítico, medida desde la superficie media de la chapa.

La segunda opción consiste en asumir que el fallo está controlado por el valor local de la deformación principal máxima a una distancia crítica de la cara externa (d_{frac}^{PM} en la Figura 4.9(b)). Este método se expresa en como:

$$\varepsilon_1(\zeta_{frac}^{PM}) \geq \varepsilon_{1,frac} \quad (4.11)$$

siendo $\zeta_{frac}^{PM} = (t/2 - d_{frac}^{PM})/t$.

De nuevo, las distancias críticas (d_{frac}^{LM} y d_{frac}^{PM}) se asumen que son características del material y se definen en la chapa sin deformar. Sus variaciones durante el conformado se obtienen mediante la condición de conservación de volumen dada en (4.9). Nótese que si las distancias críticas son nulas, ambas expresiones (4.10) y (4.11) coinciden con la Regla de la Cara Convexa dada en (4.2).

Desde un punto de vista físico, el inicio de un fallo por fractura superficial puede estar controlado por lo que ocurre en el frente de una grieta. Según esta idea, sería más acertado describir el fallo mediante un valor local en el frente de grieta que mediante un valor promedio en toda la longitud de la grieta. Así, al contrario que en el fallo por estricción, un modelo de fallo por fractura basado en el Método del Punto parece más acertado que uno basado en el Método la Línea. No obstante, esta hipótesis requiere un trabajo más exhaustivo para ser confirmada.

Al igual que antes, el efecto del valor de distancia crítica (d_{frac}^{LM} o d_{frac}^{PM}) en los modelos propuestos de predicción de fractura puede analizarse en un diagrama MN, para unas condiciones de deformación determinadas (β). En particular, el diagrama MN de la Figura 4.10 muestra las curvas de estricción de la Figura 4.8 y añade las curvas de fallo por fractura para diferentes valores de d_{frac}^{PM} obtenidas mediante el modelo basado en el Método del Punto, dado en (4.11). Las conclusiones que

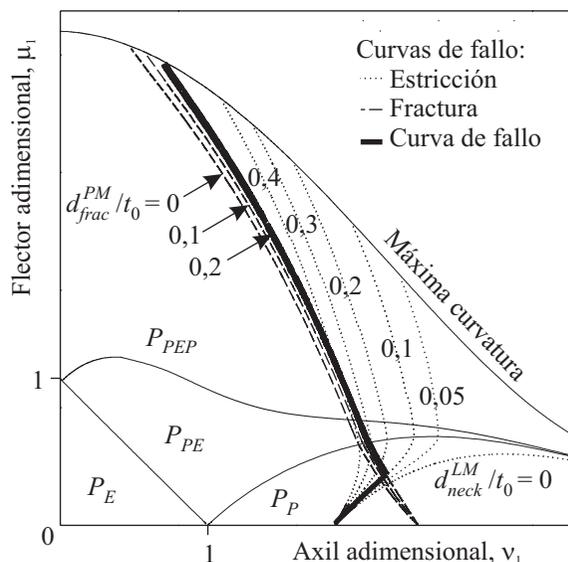


Figura 4.10: Diagrama MN obtenido mediante el modelo de carga proporcional incluyendo curvas de fallo según el modelo propuesto por estricción dado en (4.5) y por fractura dado en (4.11), para distintos valores de distancias críticas.

se obtienen con el modelo basado en el Método de la Línea, dado en (4.10), son similares y no se muestran por brevedad.

Como puede observarse en la Figura 4.10, las curvas de fractura se desplazan hacia la derecha al aumentar el valor de d_{frac}^{PM} , aumentando así la zona segura de conformado. Por tanto, al contrario que los métodos propuestos de estricción, los métodos de fractura predicen la fractura tanto antes cuanto menor sea la distancia crítica considerada. En particular, la curva de fallo correspondiente a una distancia crítica nula ($d_{frac}^{PM} = 0$) coincide con la curva de fallo por fractura en la Figura 4.4, correspondiente a la Regla de la Cara Convexa. Nótese igualmente en la figura que todas las curvas de fractura coinciden en el eje de ordenadas, donde la distribución de deformación es uniforme, y en el otro extremo las curvas de fallo cortan a la curva de máxima curvatura, donde se produce el doblado completo de la chapa sin que aparezcan grietas en la superficie exterior.

De manera análoga al caso planteado con las Reglas de la Caras Cóncava y Convexa, la intersección de la curva de fallo por estricción y la de fallo por fractura representa la curva general de fallo de la chapa. Ésta se puede completar eventualmente con un segmento de la curva de curvatura máxima (véase la Figura

4.10). La Figura 4.10 muestra con trazo grueso una curva de fallo general, en este caso correspondiente a unos valores de distancias críticas $d_{neck}^{LM}/t_0 = 0,1$ y $d_{frac}^{PM}/t_0 = 0,2$.

4.4. Reformulación en tensiones

El modelo de fallo propuesto en el apartado anterior, al igual que las Reglas de la Caras Cóncava y Convexa, asume que la variable característica que controla el fallo de la chapa es la deformación principal máxima $\varepsilon_1(\beta)$, como valor representativo del estado de deformación en el plano de la chapa ($\varepsilon_1, \varepsilon_2$). Este enfoque tiene la ventaja de poder realizar estimaciones trabajando directamente con deformaciones, fácilmente medibles en la práctica. Sin embargo, como ya ha sido expuesto, el estado de deformación en el conformado de una chapa depende en general de la historia de carga, de manera que los criterios de fallo anteriores sólo son estrictamente válidos en procesos de carga proporcional. Como se expone en el Capítulo 1 (Apartado 1.5), la solución más prometedora para considerar los efectos de la historia de carga en la evaluación de la conformabilidad de chapas es el uso de criterios basados en el estado tensional del material (Kleemola y Pelkkikangas, 1977; Arrieux *et ál.*, 1982; Stoughton, 2000, 2001; Stoughton y Zhu, 2004; Stoughton y Yoon, 2005, 2010; Stoughton, 2008).

Estos autores caracterizaron la conformabilidad de la chapa mediante un límite en el estado tensional en el plano de la chapa (σ_1, σ_2), y no en el estado de deformación ($\varepsilon_1, \varepsilon_2$). Para evaluar la conformabilidad de la chapa, los investigadores mencionados proponen el uso de los *diagramas límite de conformado en tensiones* (DLCT) como una alternativa a los tradicionales en deformaciones (véase el Apartado 1.5). Los DLCT presentan la característica de mostrar cierta insensibilidad al camino de carga o deformación (Stoughton, 2000, 2001, 2008; Stoughton y Zhu, 2004; Stoughton y Yoon, 2005, 2010; Wu *et ál.*, 2005), al contrario que en los DLC tradicionales donde se obtienen claramente distintas curvas de fallo debido a la mayor sensibilidad a la historia de deformación (Graf y Hosford, 1993a,b).

Siguiendo las ideas de estos autores, un primer enfoque simple consistiría en sustituir la variable ε_1 en el modelo de fallo propuesto en el apartado anterior por la tensión principal máxima σ_1 y calcular los correspondientes límite de fallo por estricción y por fractura en términos de tensiones ($\sigma_{1,neck}$ y $\sigma_{1,frac}$, respectivamente). Sin embargo, este enfoque tiene algunos inconvenientes que requieren ser considerados convenientemente:

1. Cuando se produce un gradiente de tensión/deformación en el espesor de la chapa como consecuencia de la presión de un punzón, la adopción de σ_1 como variable característica que controla el fallo no parece ser la más adecuada para evaluar la conformabilidad del material. La tensión transversal en el espesor (σ_3), aunque despreciable frente a σ_1 cuando la flexión no es severa, puede tener un efecto importante incluso en estas situaciones de doblados pequeños o moderados. Este efecto es especialmente crítico en el fallo por estricción, debido a que la presión se produce en la cara interna de la chapa. En efecto, al despreciar σ_3 se puede producir una pequeña variación en la estimación de σ_1 que tendría como resultado un error mucho mayor en la estimación de la deformación, debido a la pendiente casi horizontal de la curva tensión-deformación que suelen exhibir la mayoría de los metales.
2. Por otro lado, todos los distintos caminos de carga analizados por los autores mencionados anteriormente en la evaluación de la conformabilidad del material son combinaciones de esfuerzos de tracción en diferentes direcciones del plano de la chapa. En estas situaciones parece razonable asumir que los límites de conformado son idénticos en el espacio de las tensiones. La evidencia experimental así parece corroborarlo. Sin embargo, esto puede no ser cierto cuando existen procesos de carga donde intervienen sucesivamente fuertes esfuerzos de compresión y tracción, que pueden resultar en una variación de dichos límites de conformado en el proceso real de la inestabilidad plástica o de la fractura. Desafortunadamente, el autor no tiene constancia de ningún estudio que corrobore esta hipótesis, debido fundamentalmente a la dificultad práctica de realizar ensayos de compresión en chapas. En cualquier caso, los esfuerzos de compresión, presentes al iniciarse el conformado en las operaciones de estirado con flexión consideradas en este trabajo, se asumen que no son lo suficientemente severos como para variar significativamente la conformabilidad del material. En consecuencia, en este trabajo se considera que las tensiones límite de conformado, obtenidas en condiciones de tensión plana, permiten evaluar directamente la conformabilidad de la chapa en las operaciones de estirado con flexión.

El efecto de una tensión transversal no nula ($\sigma_3 \neq 0$) en el fallo por estricción no está aún claro (Stoughton, 2008; Stoughton y Yoon, 2010). En un intento de resolver esta duda, Stoughton se basa en la observación de que los análisis de bifurcación basados en la teoría de la plasticidad (véase el Capítulo 1, Apartado 1.3) predicen razonablemente bien los límites de estricción en metales en condiciones de

tensión plana (como discuten Stoughton y Zhu, 2004; Yoshida *et ál.*, 2005). Este investigador señala que aunque dichos análisis están realizados en condiciones de tensión plana, esta restricción sólo es necesaria porque los ensayos experimentales también están realizados en estas condiciones. Según este autor, no hay razón para esperar que estos mismos modelos, sin modificación, no predigan los límites de conformado cuando coexiste también una carga transversal en la chapa, dado que el modelo de plasticidad es válido para una carga genérica. Se concluye que, desde esta perspectiva, la lógica dicta que el estado tensional crítico en ausencia de σ_3 es sólo un miembro de una familia de condiciones de tensiones críticas más generales. Así, todos los miembros de esta familia en direcciones principales $[\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3]^T$ pueden definirse, considerando el caso conocido de estricción en tensión plana, como:

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{1,neck} \\ \sigma_{2,neck} \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \sigma_1 - \sigma_3 \\ \sigma_2 - \sigma_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{1,neck} \\ \sigma_{2,neck} \end{bmatrix} \quad (4.12)$$

Basándose en esta idea, Stoughton propone considerar la tensión transversal de forma explícita en los DLCT mediante las variables $(\sigma_1 - \sigma_3, \sigma_2 - \sigma_3)$ en vez de las originales (σ_1, σ_2) (Figura 4.11).

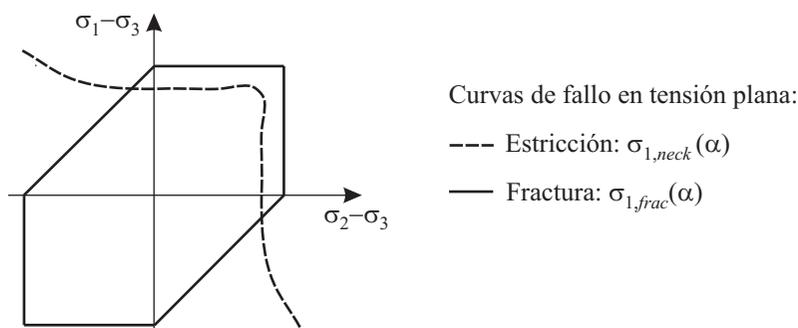


Figura 4.11: Diagrama límite de conformado en tensiones (DLCT) considerando explícitamente la tensión transversal en el espesor en el fallo por estricción y por fractura (Stoughton y Yoon, 2010).

El DLCT de la Figura 4.11, redefinido en términos de $(\sigma_1 - \sigma_3, \sigma_2 - \sigma_3)$, muestra de forma esquemática dos curvas límite de conformado, por estricción y por fractura, propuestas por Stoughton (2008) y Stoughton y Yoon (2010). La de estricción está basada en una serie de fórmulas empíricas recogidas de la literatura, mientras que la de fractura está basada en el criterio de cortante máximo de Tres-

ca. Así, mientras que ambas curvas de fallo se obtienen en condiciones de tensión plana, el DLCT puede ser utilizado para evaluar la conformabilidad de chapas en situaciones más generales.

La propuesta de Stoughton (2008) y Stoughton y Yoon (2010) supone una mejora al considerar no sólo el estado tensional en el plano (σ_1, σ_2) como variable característica que controla el fallo, sino también la tensión transversal en el espesor σ_3 . Esta última tiene un efecto beneficioso en la conformabilidad del material, como se discute en el próximo apartado. De acuerdo a esta idea, el modelo de fallo propuesto en el apartado anterior se redefine adoptando con variable efectiva la diferencia $\sigma_1 - \sigma_3$, en lugar de ε_1 . De esta manera, el modelo de predicción de la estricción basado en el Método de la Línea o en el del Punto, dado respectivamente en (4.5) y (4.6), se reformula fácilmente sustituyendo una variable por otra:

$$\overline{(\sigma_1 - \sigma_3)}(\zeta_{neck}^{LM}) := \frac{1}{\zeta_{neck}^{LM} + 1/2} \int_{-1/2}^{\zeta_{neck}^{LM}} (\sigma_1 - \sigma_3)(\zeta) d\zeta \geq \sigma_{1,neck} \quad (4.13)$$

$$(\sigma_1 - \sigma_3)(\zeta_{neck}^{PM}) \geq \sigma_{1,neck} \quad (4.14)$$

siendo $\sigma_{1,neck}$ la tensión principal máxima en el inicio de la estricción en un proceso en ausencia de flexión, para unas condiciones dadas de tensión/deformación $\alpha(\beta)$. Análogamente, el modelo de predicción del fallo por fractura, en cualquiera de las formas dadas en (4.10) y (4.11), se reformula respectivamente como:

$$\overline{(\sigma_1 - \sigma_3)}(\zeta_{frac}^{LM}) := \frac{1}{1/2 - \zeta_{frac}^{LM}} \int_{\zeta_{frac}^{LM}}^{1/2} (\sigma_1 - \sigma_3)(\zeta) d\zeta \geq \sigma_{1,frac} \quad (4.15)$$

$$(\sigma_1 - \sigma_3)(\zeta_{frac}^{PM}) \geq \sigma_{1,frac} \quad (4.16)$$

siendo $\sigma_{1,frac}$ la tensión principal máxima en el instante de la fractura en un proceso de conformado en el plano, que depende asimismo de las condiciones de tensión/deformación $\alpha(\beta)$.

En la práctica, los valores límite de conformado de un material se obtienen mediante medidas experimentales de la deformación en procesos de estirado en tensión plana $(\varepsilon_{1,neck}$ y $\varepsilon_{1,frac})$. A partir de estos valores, las tensiones límite de fallo $\sigma_{1,neck}$ y $\sigma_{1,frac}$ se pueden calcular haciendo uso de la ley de comportamiento y del criterio de plastificación. Así, dada la formulación actual, se obtienen las siguientes expresiones:

$$\sigma_{1,neck} = \frac{K \rho^n}{\varphi} \varepsilon_{1,neck}^n \quad (4.17)$$

$$\sigma_{1,frac} = \frac{K\rho^n}{\varphi} \varepsilon_{1,frac}^n \quad (4.18)$$

siendo $\alpha(\beta)$, $\varphi(\alpha)$ y $\rho(\beta)$ funciones de los parámetros del material que dependen del criterio de plastificación en tensión plana adoptado, tal y como se expone en el capítulo anterior.

La Figura 4.12 muestra de forma esquemática en dos DLCT las curvas hipotéticas de fallo que se obtienen de (4.17) y (4.18), en un rango de valores positivos de $\alpha = \sigma_2/\sigma_1$, típico en los procesos de estirado de chapa. Los DLCT de la figura ilustran también dos operaciones teóricas de estirado con punzón, obtenidas mediante el modelo de carga flexión-tracción en dos pasos propuesto en el capítulo anterior (Apartado 3.3).

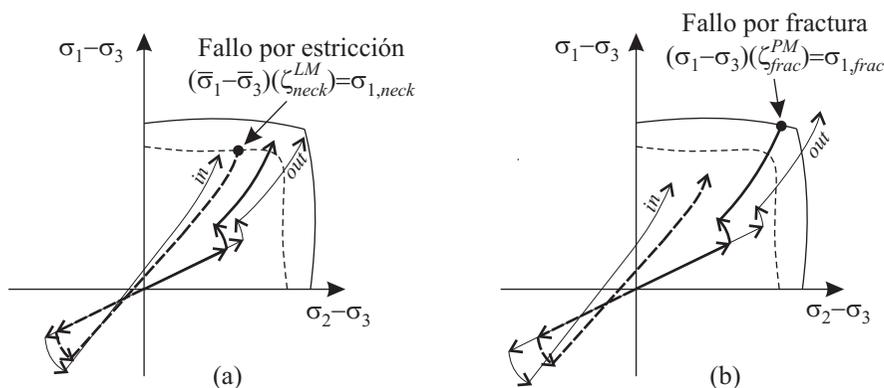


Figura 4.12: Esquema del modo de fallo en el modelo flexión-tracción en dos pasos en el espacio de las tensiones: (a) fallo por estricción cuando la tensión promedio en ζ_{neck}^{LM} (-----) alcanza la curva de estricción (-----); y (b) fallo por fractura cuando la tensión local en ζ_{frac}^{PM} (——) alcanza la curva de fractura (——).

En los DLCT de la Figura 4.12 también se ilustra de forma esquemática la evolución del estado tensional en dos procesos de estirado con punzón hasta producirse el fallo por estricción (Figura 4.12(a)) y por fractura (Figura 4.12(b)). Por claridad en la exposición se ha considerado sólo el modelo de fallo basado en el Método de la Línea dado en (4.13) para el fallo por estricción y el Método del Punto dado en (4.16) para el fallo por fractura. Las trayectorias con trazo fino representan la evolución de $\sigma_1 - \sigma_3$ en las caras interna (*in*) y externa (*out*) de la chapa. Con trazo más grueso se representa la evolución de la variable característica que controla el fallo, que en este caso es la tensión promedio en una fracción de material en la cara interna $(\overline{\sigma_1 - \sigma_3}, \overline{\sigma_2 - \sigma_3})(\zeta_{neck}^{LM})$ para el fallo por estricción y,

para el fallo por fractura, la tensión local a una cierta distancia de la cara externa $(\sigma_1 - \sigma_3, \sigma_2 - \sigma_3)(\zeta_{frac}^{PM})$. El modo de fallo, estricción o fractura, viene determinado por el instante en el que la primera de estas dos trayectorias interseca con la correspondiente curva de fallo, marcado con un punto grueso. Nótese que el proceso de la Figura 4.12(b) representa una operación de estirado con un punzón de radio más pequeño que el de la Figura 4.12(a), como se deduce de la mayor compresión inicial en la cara interna de la chapa. En esta situación, el efecto de la plastificación inversa en las fibras internas será mayor (véase el Apartado 3.3.2).

En la práctica suelen obtenerse predicciones razonables con los métodos tradicionales de predicción del fallo, los cuales no consideran la historia de carga y, por tanto, no tienen en cuenta el efecto de la plastificación inversa (Kitting *et al.*, 2008, 2009a,b; Stoughton, 2000, 2001; Tharrett y Stoughton, 2003a,b; Stoughton y Zhu, 2004; Stoughton y Yoon, 2005, 2010; Stoughton, 2008). Esto puede deberse a que los ensayos realizados reproducen unas condiciones de deformación en las que el material recupera la repuesta del material virgen antes de producirse el fallo. En general, los investigadores suelen observar que las predicciones no son tan buenas al disminuir los radios de curvatura, precisamente donde el efecto de la plastificación inversa es mayor.

Por otro lado, dado que el fallo por fractura dúctil en operaciones de estirado con punzón está controlado por las fibras más deformadas (cara externa), parece razonable asumir que la plastificación inversa de las fibras en la cara interna pueden no influir en este modo de fallo. En particular, este hecho es conocido de las operaciones de doblado puro. En este caso la no proporcionalidad de la carga vendrá dada sólo por las diferentes condiciones de deformación en dichas fibras debidas a los esfuerzos de flexión y tracción.

Por último, al igual que en los apartados anteriores, el efecto del valor de las distancias críticas en el modelo propuesto de fallo puede analizarse mediante un diagrama MN. En particular, la Figura 4.13 muestra un diagrama MN esquemático, análogo al presentado en el apartado anterior (Figura 4.10), obtenido ahora mediante el modelo de flexión-tracción en dos pasos, para unas condiciones de carga caracterizadas por la forma del punzón (β^M) y por la evolución de la deformación durante la segunda etapa de tracción (β^N) , y donde se ha utilizado el modelo de fallo en términos de tensiones. Las curvas de fallo por estricción se han obtenido mediante el modelo basado en el Método de la Línea dado en (4.13) para distintos valores de distancia crítica (d_{neck}^{LM}) , y las curvas de fallo por fractura corresponden al modelo basado en el Método del Punto dado en (4.16) para diferentes valores

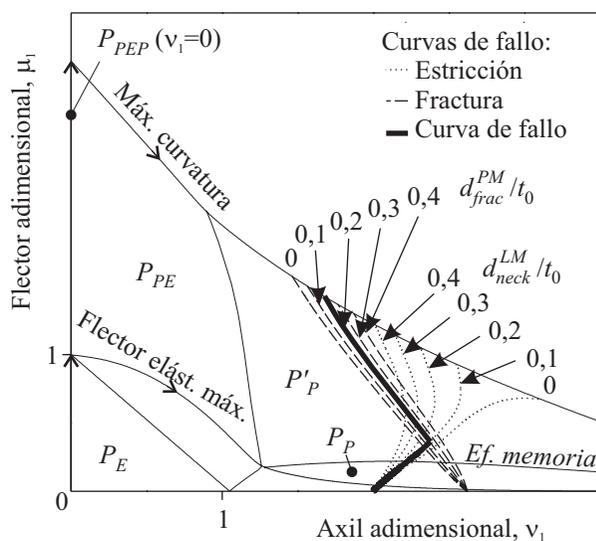


Figura 4.13: Diagrama MN (modelo flexión-tracción en dos pasos) incluyendo una combinación de las Reglas de las Caras Cóncava y Convexa y de los Métodos de las Distancias Críticas.

de d_{frac}^{PM} . Al igual que en el diagrama MN del apartado anterior, se puede apreciar cómo al aumentar la distancia crítica las curvas de estricción se desplazan hacia la izquierda reduciendo la zona segura de conformado, mientras que las curvas de fractura se desplazan hacia la derecha, aumentando la zona segura. La curva general de fallo, intersección de las de estricción y fractura, representa un caso hipotético con valores de distancias críticas $d_{neck}^{LM}/t_0 = 0,1$ y $d_{frac}^{PM}/t_0 = 0,2$.

4.5. Análisis del fallo por estricción considerando la tensión transversal

En la práctica, los métodos de predicción del fallo por estricción localizada revisados en el Capítulo 1, tales como los de Hill (1952), Marciniak y Kuczyński (1967), Stören y Rice (1975), etc., difieren en mayor o menor medida de los resultados experimentales. Lo mismo sucede con los criterios de fractura dúctil, *e.g.* Cockcroft y Latham (1968). Lógicamente, incluir en la formulación de estos análisis el efecto de la flexión también resultaría en métodos igualmente imprecisos. Por este motivo, el modelo de fallo propuesto en el apartado anterior está basado

en un enfoque *local*, *i.e.* asume que el fallo está controlado por una tensión efectiva (valor promedio o local) en una fracción de material a una distancia crítica de la cara externa/interna de la chapa.

La idea de que el fallo por fractura dúctil está causado por un daño local a una cierta distancia crítica (d_{frac}) de la cara externa de la chapa parece razonable, dado que los Métodos de Distancias Críticas originales en los que está basado permiten predecir el mismo tipo de fallo. En cambio, la idea planteada en este trabajo de que el fallo por estricción está controlado por una fracción de material a una cierta distancia crítica (d_{neck}) de la cara interna puede ser discutible, dado que tradicionalmente la inestabilidad plástica se ha considerado en todo el espesor. Con el objeto de contrastar dicha idea con la inestabilidad plástica en toda la sección, en este apartado se desarrolla una generalización del análisis de bifurcación o condición de axil máximo propuesto por Hill (1952). Para ello se utiliza el modelo de carga flexión-tracción en dos pasos en condiciones de deformación plana y considerando la tensión transversal en el espesor, propuesto en el capítulo anterior.

Posteriormente se analizan los trabajos de Emmens y van den Boogaard (2010) y van den Boogaard *et ál.* (2010) sobre el efecto de la tensión transversal (σ_3) en el fallo de chapa. Realizando una sencilla modificación al modelo que plantean se consigue dotar de un sentido físico a un parámetro que los autores definen pero no justifican, el cual se podría relacionar fácilmente con el concepto de distancia crítica.

4.5.1. Condición de axil máximo en la flexión-tracción

Según Hill (1952), la estricción localizada en una chapa sometida a tracción se produce cuando el esfuerzo axil alcanza su valor máximo, $dN_1 \leq 0$. Como se ha expuesto en el Capítulo 1, esta condición de inestabilidad en deformación plana se expresa como (véase la ecuación (1.6), pág. 11):

$$\frac{1}{\sigma_1} \frac{d\sigma_1}{d\varepsilon_1} \leq 1 \quad (4.19)$$

El miembro de la izquierda de esta expresión es una propiedad del material conocida como característica de endurecimiento por deformación adimensional (*non-dimensional strain-hardening characteristic*, Marciniak *et ál.*, 2002) y puede ser determinada experimentalmente para un material dado. Físicamente, esta propiedad del material representa la relación entre la velocidad de endurecimiento longitudinal y la velocidad de debilitamiento transversal como consecuencia de la

reducción del espesor. Cuando una compensa a la otra, se produce la inestabilidad plástica. La condición (4.19) se ha obtenido en ausencia de flexión y es válida, por tanto, para cualquier fibra en el espesor. Así, en estas situaciones la inestabilidad plástica se produce cuando todas las fibras alcanzan dicha condición.

Una expresión parecida a (4.19), pero que tiene en cuenta de forma explícita la tensión/deformación en todo el espesor, puede deducirse tomando valores promedio. Así, el esfuerzo axil puede ser expresado como $N_1 = \int \sigma_1 dt = \bar{\sigma}_1 t$ y la condición de inestabilidad se obtiene entonces como:

$$\begin{aligned} \frac{dN_1}{dt} &= \frac{d}{dt}(\bar{\sigma}_1 t) = \bar{\sigma}_1 + t \frac{d\bar{\sigma}_1}{dt} \leq 0 \\ \frac{d\bar{\sigma}_1}{\bar{\sigma}_1} &\leq -\frac{dt}{t} = -d\bar{\varepsilon}_3 = d\bar{\varepsilon}_1 \\ \frac{1}{\bar{\sigma}_1} \frac{d\bar{\sigma}_1}{d\bar{\varepsilon}_1} &\leq 1 \end{aligned} \quad (4.20)$$

Si la distribución de tensión/deformación en el espesor no es uniforme, la inestabilidad plástica de la chapa viene dada por la condición (4.20), mientras que la expresión dada en (4.19) permite evaluar en cada fibra el instante en el que la velocidad de endurecimiento longitudinal alcanza la velocidad de debilitamiento transversal. Esta condición se denominará en adelante como *inestabilidad local* de cada fibra en el espesor, aunque no debe confundirse con la inestabilidad plástica de la chapa. Así, dado que no todas las fibras se deforman igual, en el instante de la estricción de la chapa existirán *fibras localmente estables e inestables*, *i.e.* fibras que cumplen o no la condición (4.19).

Análisis con el modelo de carga flexión-tracción en dos pasos

Para analizar las ideas anteriores, considérese el modelo de carga flexión-tracción en dos pasos en condiciones de deformación plana propuesto en el capítulo anterior (Apartado 3.4), mediante el cual se obtienen expresiones analíticas de las distribuciones en el espesor de la deformación principal máxima (ε_1), la tensión transversal (σ_3) y la tensión principal máxima (σ_1), dadas en (3.108), (3.110) y (3.114), respectivamente. Como se expone en dicho análisis, estas expresiones son válidas para un instante durante la segunda etapa de tracción posterior al *efecto memoria*, *i.e.* cuando se recupera la respuesta tensión-deformación del material virgen después de la plastificación inversa de las fibras internas.

Así, la condición de axil máximo se obtiene como:

$$\frac{dN_1}{dt} = \frac{d}{dt} \int_R^{R+t} \sigma_1(r) dr \leq 0 \quad (4.21)$$

siendo t la variable que gobierna la segunda etapa o etapa de tracción del proceso. Para resolver la integral en (4.21) se puede tomar como variable adimensional $\eta = (r - R)/t$, de manera que en un instante dado las variaciones en el espesor vendrán dadas por $d\eta = dr/t$. Así:

$$\begin{aligned} \frac{dN_1}{dt} &= \frac{d}{dt} \left(t \int_0^1 \sigma_1(\eta) d\eta \right) = \int_0^1 \sigma_1(\eta) d\eta + t \frac{d}{dt} \int_0^1 \sigma_1(\eta) d\eta = \\ &= \int_0^1 \sigma_1(\eta) d\eta + t \int_0^1 \frac{d\sigma_1}{d\varepsilon_1} \frac{d\varepsilon_1}{dt} d\eta \end{aligned} \quad (4.22)$$

donde las derivadas en la última integral se obtienen de las expresiones de $\sigma_1(r)$ y $\varepsilon_1(r)$, respectivamente, como:

$$\frac{d\sigma_1}{d\varepsilon_1} = C^{n+1} K \left[n\varepsilon_1^{n-1}(r) - (\varepsilon_{1,out}^n - \varepsilon_1^n(r)) \right] \quad (4.23)$$

$$\frac{d\varepsilon_1}{dt} = -\frac{R+t}{R+t/2} \frac{1}{t} \quad (4.24)$$

Sustituyendo estas expresiones en (4.22) y operando se obtiene:

$$\frac{1}{\bar{\sigma}_1} \frac{d\bar{\sigma}_1}{d\bar{\varepsilon}_1} = n \frac{R+t}{R+t/2} \frac{\int_R^{R+t} \left[\varepsilon_1^{n-1}(r) - \frac{1}{n}(\varepsilon_{1,out}^n - \varepsilon_1^n(r)) \right] dr}{\int_R^{R+t} \left[\varepsilon_1^n(r) - \frac{1}{n+1}(\varepsilon_{1,out}^{n+1} - \varepsilon_1^{n+1}(r)) \right] dr} \leq 1 \quad (4.25)$$

donde

$$\bar{\sigma}_1 = \int_0^1 \sigma_1(\eta) d\eta \quad , \quad \bar{\varepsilon}_1 = \int_0^1 \varepsilon_1(\eta) d\eta \quad (4.26)$$

Resulta fácil comprobar que la expresión (4.25) coincide con la obtenida por Hill en deformación plana si la distribución de deformación es uniforme en el espesor, siendo naturalmente $R = \infty$. Dicha expresión viene dada por:

$$\frac{1}{\sigma_1} \frac{d\sigma_1}{d\varepsilon_1} = \frac{n}{\varepsilon_1} \leq 1 \quad (4.27)$$

La condición de axil máximo dada en (4.25) permite analizar el efecto de la flexión (t_0/R) y de las propiedades material (a través del coeficiente de endurecimiento por deformación, n) en el fallo por estricción localizada. Así, la Figura 4.14 muestra el efecto de ambos factores en la conformabilidad del material (a través de la reducción de espesor, t/t_0). Como se aprecia en la figura, la conformabilidad de la chapa aumenta (menor reducción del espesor en el instante de la inestabilidad) cuanto menor es el radio del punzón (t_0/R mayor) y mayor el coeficiente

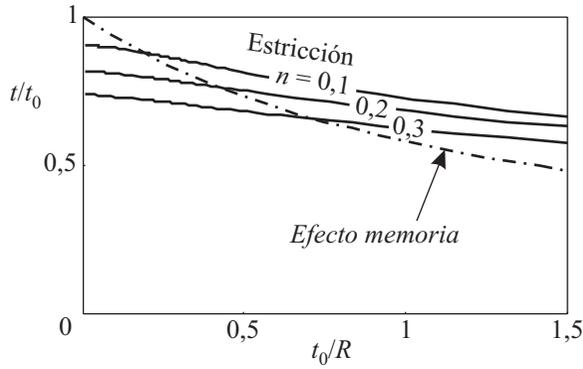


Figura 4.14: Efecto de la flexión (t_0/R) y del coeficiente de endurecimiento (n) en la reducción del espesor (t/t_0) en el instante de la estricción.

de endurecimiento. La curva denominada *efecto memoria* en la figura se obtiene de la condición dada en (3.118), que representa el instante en que después de la inversión de la carga se vuelve a alcanzar la curva de comportamiento original del material.

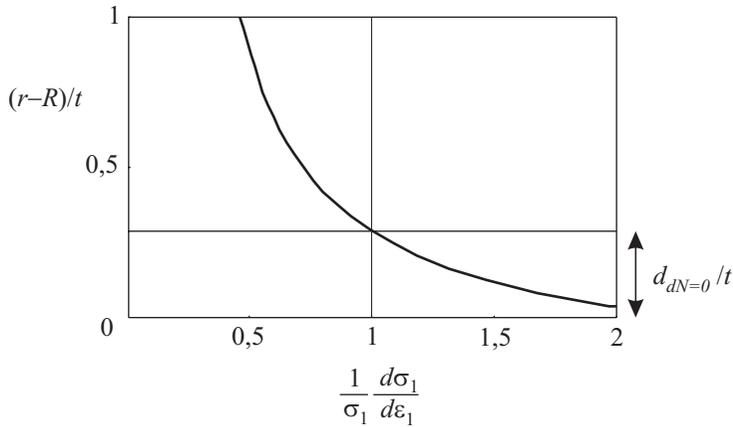


Figura 4.15: Volumen de fibras estables ($d_{dN=0}/t$) en el espesor $((r-R)/t)$ en el instante de axil máximo.

La Figura 4.15 muestra la distribución en el espesor de la chapa de la condición de inestabilidad dada en (4.19), en el instante de axil máximo dado en (4.25), para unos determinados radio del punzón y coeficiente de endurecimiento del material. Esta figura muestra claramente que, en el instante en el que se alcanza el máximo

esfuerzo axial, las fibras externas, las más deformadas, presentan unos valores de (4.19) superiores a la unidad, mientras que para las fibras internas en una fracción de material de espesor $d_{dN=0}$ dichos valores son menores que uno. Si se admite que el término $d\sigma_1/(\sigma_1 d\varepsilon_1)$ en (4.19) puede proporcionar una medida de la resistencia de una determinada fibra a la inestabilidad plástica, los resultados obtenidos indicarían que, en presencia de un gradiente de deformaciones, la condición de axial máximo de la chapa puede alcanzarse sin que todas las fibras de la sección alcancen la inestabilidad plástica. Es decir, existe un núcleo de fibras en la cara interior de la chapa que está resistiendo la aparición de la estricción localizada.

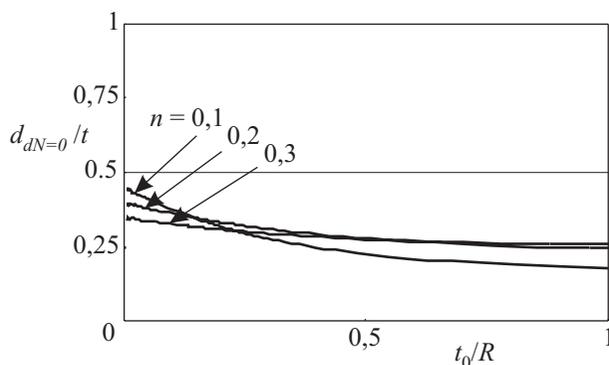


Figura 4.16: Efecto de la flexión (t_0/R) y del coeficiente de endurecimiento (n) en el volumen de fibras estables (h/t) en el instante de axial máximo.

El efecto de la flexión y del coeficiente de endurecimiento en el espesor de la fracción de material que permanece localmente estable ($d_{dN=0}$) cuando se produce la estricción se muestra en la Figura 4.16. Como se puede apreciar en esta figura, las fibras estables quedan siempre por debajo de la superficie media de la chapa, de material menos deformado, en un volumen cada vez menor conforme disminuye el radio de curvatura. Este resultado pone de manifiesto la idea expuesta anteriormente y desarrollada en este trabajo, de que la estricción localizada de una chapa se retrasa debido a la mayor resistencia a la inestabilidad de las fibras internas y que se inicia cuando éstas ya no son capaces de resistir por más tiempo.

Por otro lado, como muestra la Figura 4.16, el coeficiente de endurecimiento del material (n) también influye en el volumen de fibras estables en el instante del axial máximo. La influencia del coeficiente de endurecimiento en el fallo por estricción es bien conocida; así lo revelan también las expresiones (4.25) y (4.27) y los resultados mostrados en las Figuras 4.14 y 4.16. Así, en la literatura se han

propuesto diversas correlaciones entre el coeficiente de endurecimiento, la tensión de rotura y la microestructura del material (*e.g.* la ley de Hall-Petch que relaciona estas dos últimas mediante el tamaño medio de grano). Por tanto, en base a dichas correlaciones, se podría argumentar que el volumen de fibras *estables* en la cara interna de la chapa ($d_{dN=0}$) depende de la microestructura del material.

Lógicamente, el concepto de volumen de fibras *estables* ($d_{dN=0}$) en la condición de axil máximo parece estar estrechamente relacionado con el concepto de distancia crítica de material (d_{neck}) en el modelo propuesto de fallo por estricción localizada. Por tanto, al igual que $d_{dN=0}$, parece razonable asumir que d_{neck} también depende de la microestructura del material. La principal diferencia entre ambos parámetros es que el primero es una magnitud variable con el espesor, dado que la solución se ha obtenido en términos de $d_{dN=0}/t$, mientras que en el modelo propuesto de fallo d_{neck} sólo depende de las propiedades del material.

Comparación con el modelo de fallo propuesto

El análisis de bifurcación o condición de axil máximo de Hill, ampliado a situaciones donde existe un gradiente de deformación en el espesor, puede ahora compararse con el modelo de fallo por estricción propuesto en el Apartado 4.4, usando el modelo de carga flexión-tracción en dos pasos en condiciones de deformación plana.

Así, en la presente formulación, la diferencia $\sigma_1 - \sigma_3$ está directamente relacionada con la deformación principal máxima (ε_1), como se deduce fácilmente a partir del criterio de plastificación cuadrático de Hill dado en (3.105) y de la ley de comportamiento de Hollomon dada en (3.107):

$$\sigma_1 - \sigma_3 = C\sigma_{eq} = C K \varepsilon_{eq}^n = C^{m+1} K \varepsilon_1^n \quad (4.28)$$

siendo C , K y n constantes del material. Sustituyendo (4.28) en las expresiones del modelo de fallo por estricción dadas en (4.13) y (4.14), éstas pueden expresarse como:

$$\overline{(\sigma_1 - \sigma_3)}(\zeta_{neck}^{LM}) = \frac{C^{m+1} K}{\zeta_{neck}^{LM} + 1/2} \int_{-1/2}^{\zeta_{neck}^{LM}} \varepsilon_1^n(\zeta) d\zeta \geq \sigma_{1,neck} \quad (4.29)$$

$$(\sigma_1 - \sigma_3)(\zeta_{neck}^{PM}) = C^{m+1} K \varepsilon_1^n(\zeta_{neck}^{PM}) \geq \sigma_{1,neck} \quad (4.30)$$

siendo la tensión principal máxima en el instante de la estricción en tensión plana:

$$\sigma_{1,neck} = C\sigma_{eq,neck} = C K \varepsilon_{eq,neck}^n = C^{m+1} K \varepsilon_{1,neck}^n \quad (4.31)$$

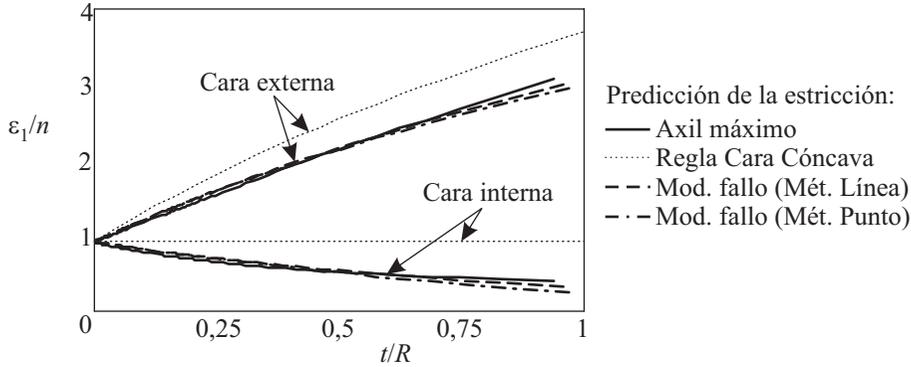


Figura 4.17: Comparativa entre predicciones en el instante de la estricción, según varios métodos de predicción, del efecto de la flexión (t/R) en la deformación principal máxima (ε_1) de las caras externa e interna.

Teniendo en cuenta la solución particular del análisis Hill en deformación plana ($\varepsilon_{1,neck} = n$) y sustituyendo (4.31) en (4.29) y (4.30), estas dos últimas expresiones se pueden simplificar como:

$$\frac{1}{\zeta_{neck}^{LM} + 1/2} \int_{-1/2}^{\zeta_{neck}^{LM}} \varepsilon_1^n(\zeta) d\zeta \geq n^n \quad (4.32)$$

$$\varepsilon_1(\zeta_{neck}^{PM}) \geq n \quad (4.33)$$

La Figura 4.17 muestra el efecto de la flexión (t/R) en varias predicciones de la deformación principal mayor (ε_1) en las caras externa e interna de una chapa de espesor y propiedades mecánicas genéricos ($t_0 = 1$ mm, $n = 0,2$). En particular, el modelo propuesto de fallo por estricción basado en los Métodos de la Línea y del Punto, dados en (4.13) y (4.14), o en las expresiones simplificadas (4.32) y (4.33), asumen unas distancias críticas aproximadas $d_{neck}^{LM} \approx 500$ μm ($\zeta_{neck}^{LM} \approx 0$) y $d_{neck}^{PM} \approx 250$ μm ($\zeta_{neck}^{PM} \approx -0,25$), respectivamente. Como puede observarse en la figura, con estos valores de distancias críticas ambas predicciones son muy similares a las obtenidas con la condición de axil máximo dada en (4.25). Como contraste se han representado también las predicciones de la Regla de la Cara Cóncava; como se puede observar, difieren significativamente de las anteriores.

Por tanto, se puede concluir que, escogiendo adecuadamente los valores de distancias críticas, el modelo de fallo propuesto es capaz de predecir la conformabilidad de una chapa con una evolución similar a los métodos clásicos de bifurcación, al menos el de Hill. Nótese que las distancias críticas en el ejemplo de la Figu-

ra 4.17 se han seleccionado de tal manera que las predicciones de la deformación coincidan lo máximo posible con las del método de Hill. En la práctica, sin embargo, es de esperar que los valores de distancias críticas en el modelo de fallo propuesto vengan determinados por la microestructura del material, como ya ha sido expuesto, y que las predicciones de fallo correspondientes puedan así mejorar las de los métodos clásicos de bifurcación.

Por otro lado, ambas distancias críticas cumplen una relación $d_{neck}^{PM}/d_{neck}^{LM} \approx 2$, debido a que la distribución de tensión efectiva ($\sigma_1 - \sigma_3$) en una fracción de espesor es aproximadamente lineal en el instante del fallo por estricción. En particular, la predicción basada en el Método de la Línea se aproxima a la de la condición de axil máximo ligeramente mejor que la del Método del Punto. Aunque este resultado no es concluyente, sí parece más adecuado desde un punto de vista físico asumir que la estricción depende de un valor promedio en la fracción de material crítico, y no de un valor local en el interior del material.

4.5.2. Análisis del efecto de la presión del punzón

Recientemente, Emmens y van den Boogaard (2010) y van den Boogaard *et al.* (2010) han propuesto un método simple para predecir el efecto de las tensiones transversales en el espesor en el fallo de chapa. Los autores no consideran los gradientes de tensión/deformación, sino que asumen directamente variables promedio en todo el espesor: la tensión longitudinal promedio como $\bar{\sigma}_1 = N_1/t$ y la tensión transversal promedio como $\bar{\sigma}_3 = -pa$, siendo a un parámetro que suponen que depende del material y de la geometría, y p la presión ejercida por el punzón. De la condición de equilibrio radial ($N_1 = pR$) establecen la siguiente relación entre las mencionadas tensiones promedio:

$$\bar{\sigma}_3 = -\bar{\sigma}_1 \frac{t}{aR} \quad (4.34)$$

Como criterio de plastificación utilizan el de Tresca ($\sigma_1 - \sigma_3 = \sigma_f$, siendo σ_f la tensión del fluencia del material). Obtienen así la expresión:

$$\bar{\sigma}_1 = \frac{\sigma_f}{1 + \frac{t}{aR}} \quad (4.35)$$

que muestra que la tensión de plastificación a tracción se reduce si se aplican esfuerzos de compresión mediante un punzón de radio R .

Los autores eligen los valores del parámetro a de forma completamente aleatoria, con el único objeto de ajustarse a los resultados experimentales que analizan.

Entre estos se encuentran varios resultados de ensayos de doblado a 90° de chapas de acero DP (*dual phase*) (Hudgins *et ál.*, 2009; Kim *et ál.*, 2009; Wagoner *et ál.*, 2009), y resultados de ensayos de estirado con punzón cilíndrico en chapas de acero de alta resistencia (Kitting *et ál.*, 2009b). En el primer tipo de ensayos, los resultados experimentales del fallo de chapa los ajustan bien con un valor aproximado de $a = 3,5$, mientras que en el segundo tipo usan un valor $a = 5$.

También realizan un análisis simplificado de la estricción mediante la condición de axil máximo, obteniendo como deformación límite promedio:

$$\bar{\epsilon}_1 = n \left(1 + \frac{t}{aR} \right) \quad (4.36)$$

la cual depende de t/R y del parámetro a .

El principal inconveniente que se le puede atribuir al método de van den Boogaard *et ál.* es el uso del parámetro a , que como afirman los propios autores, se utiliza sin ninguna motivación excepto para que las predicciones se ajusten a los resultados experimentales. Tal y como está definido ($a = -\bar{\sigma}_3/p$), un valor alto de este parámetro implica una distribución de tensiones transversales con una concentración claramente mayor en la superficie de aplicación de la presión, que decrece bruscamente a través del espesor. Estas situaciones son propias de cargas concentradas en áreas pequeñas, como por ejemplo en las operaciones de punzonado o indentación. En el caso particular de estirado de chapa con punzón, tal distribución de tensiones transversales sólo sería posible si el radio del punzón es mucho menor que el espesor de la chapa. Por tanto, puede afirmarse que valores de $a = 5$ como los que proponen los mencionados investigadores, en las situaciones analizadas donde los radios no son tan pequeños, no se ajustan a la física real del problema. En realidad, como se deduce del análisis de los apartados anteriores, aunque los gradientes de tensiones transversales no son lineales, los valores de a están muy próximos a 2, incluso cuando el radio del punzón es del orden del espesor de la chapa.

Si se asume un valor $a = 2$ como un valor aproximado y realista, el método de van den Boogaard *et ál.* puede modificarse fácilmente cambiando los valores promedio en el espesor por los valores promedio en una fracción de volumen de la chapa localizada en una distancia d_{vdB} desde la cara interna. Así, las expresiones (4.34), (4.35) y (4.36) se convierten ahora en:

$$\bar{\sigma}_3(d_{vdB}) = -\bar{\sigma}_1 \frac{d_{vdB}}{2R} \quad (4.37)$$

$$\bar{\sigma}_1(d_{vdB}) = \frac{\sigma_f}{1 + \frac{d_{vdB}}{2R}} \quad (4.38)$$

$$\bar{\varepsilon}_1(d_{vdB}) = n \left(1 + \frac{d_{vdB}}{2R} \right) \quad (4.39)$$

Como lógicamente puede deducirse, estas expresiones son las que se obtienen del modelo anteriormente propuesto de carga flexión-tracción en deformación plana, realizando las simplificaciones pertinentes.

Como es obvio, las conclusiones obtenidas por van den Boogaard *et ál.* con el parámetro a son las mismas que con el método modificado cambiando dicho parámetro por la distancia $d_{vdB} = 2t/a$. Así, por ejemplo, los valores $a = 3,5$ y $a = 5$ usados en el fallo por estricción en ensayos de doblado en chapas de 1,4 mm de espesor (Wagoner *et ál.*, 2009) y de estirado con punzón en chapas de 1,5 mm de espesor (Kitting *et ál.*, 2009b), respectivamente, equivalen a los correspondientes valores $d_{vdB} = 800 \mu\text{m}$ y $d_{vdB} = 600 \mu\text{m}$. Por otro lado, según la modificación propuesta, la dependencia del parámetro a con el material y con la geometría que suponen dichos autores es, en cambio, una dependencia de la distancia d_{vdB} .

Por tanto, se puede concluir que el trabajo de van den Boogaard *et ál.* muestra de forma indirecta que el fallo por estricción está controlado por un volumen crítico de material localizado en una distancia en la cara cóncava de la chapa, reforzando así las ideas presentadas en esta tesis.

4.6. Superficie límite de conformado (SLC)

La utilidad práctica de los DLC tradicionales queda limitada debido que el camino de carga y el efecto de la flexión hacen que se obtengan diferentes curvas límite de conformado. A pesar de ello, sigue siendo útil representar en un sólo DLC familias de curvas correspondientes a procesos de conformado donde sólo varía un parámetro, como por ejemplo una serie de ensayos de estirado con punzones cilíndricos o hemisféricos de diferentes radios. El esquema de la Figura 4.18(izquierda) muestra de forma esquemática uno de estos ejemplos.

De forma equivalente, cada familia de curvas del DLC anterior puede ser gráficamente expresada como una superficie 3D en un diagrama como el representado en la Figura 4.18(derecha). Col y Balan (2007) introdujeron el concepto de *superficie límite de conformado* (SLC), que consiste en generalizar el DLC tradicional, válido sólo para piezas con una curvatura limitada, introduciendo la influencia de la flexión en un tercer eje, caracterizada por la relación entre el espesor de la chapa

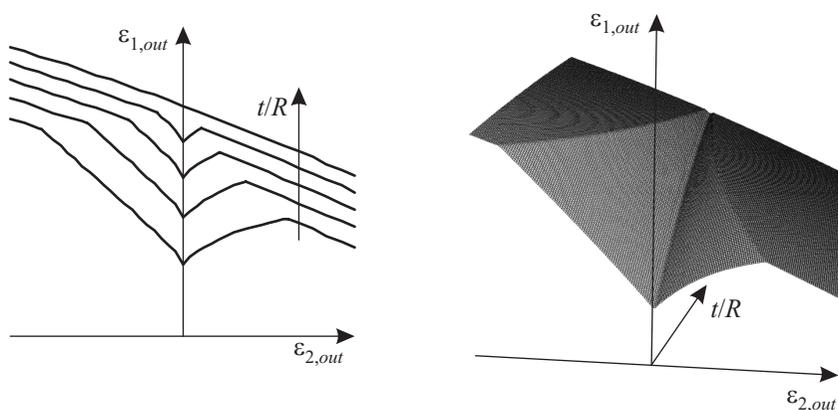


Figura 4.18: Superficie límite de conformado (SLC) esquemática en 2D y 3D.

y el radio del punzón, t/R . Los autores sólo propusieron el concepto de SLC para ilustrar el fenómeno y alertar a la comunidad científica sobre la fuerte influencia de los gradientes. Recientemente, algunos autores han realizado este tipo de representación de los límites de conformado (Vallellano *et al.*, 2008; Allwood y Shouler, 2009).

En cualquiera de las dos representaciones planteadas, la SLC permite evaluar el efecto de la flexión en las operaciones de estirado con punzones de forma. Dicha superficie proporciona un gráfico unificado para caracterizar la influencia del gradiente de tensión/deformación en la conformabilidad de chapas metálicas.

Bibliografía

- Allwood JM, Shouler DR (2009). *Generalised forming limit diagrams showing increased forming limits with non-planar stress states*. International Journal of Plasticity 25:1207–1230
- Arrieux R, Bedrin C, Boivin M (1982). *Determination of an intrinsic forming limit stress diagram for isotropic metal sheets*. En: Proc. 12th Biennial Congress of the International Deep Drawing Research Group, IDDRG, pp. 61–71
- van den Boogaard AH, Emmens WC, Huétink J (2010). *Effect of thickness stress in stretch-bending*. En: Proc. 10th Numiform Conference, Pohang, Korea
- Bressan JD, Williams JA (1983). *The use of a shear instability criterion to predict*

- local necking in sheet metal deformation*. International Journal of Mechanical Sciences 25(3):155–168
- Charpentier P (1975). *Influence of punch curvature on the stretching limits of sheet steel*. Metallurgical and Materials Transactions A 6(9):1665–1669
- Cockcroft MG, Latham DJ (1968). *Ductility and the workability of metals*. Journal of the Institute of Metals 96(2):33–39
- Col A, Balan T (2007). *About the neglected influence of gradients on strain localisation*. En: Proc. Materials Processing and Design: Modeling, Simulation and Applications, NUMIFORM 2007, Interlaken, Switzerland, pp. 147–152
- El-Domiatty A, Shabaik AH (1984). *Bending of work-hardening metals under the influence of axial load*. Journal of Mechanical Working Technology 10:57–66
- El-Domiatty A, Shabara MAN, Al-Ansary MD (1996). *Determination of stretch-bendability of sheet-metals*. International Journal of Machine Tools Manufacture 36(5):635–650
- Emmens WC, van den Boogaard AH (2010). *Contact effect in bending affecting stress and formability*. International Journal of Material Forming 3, Supp. 1:1159–1162
- Freudenthal AM (1950). *The inelastic behavior of engineering materials and structures*. John Wiley & Sons
- Ghosh AK, Hecker SS (1974). *Stretching limits in sheet metals: in-plane versus out-of-plane deformation*. Metallurgical Transactions 5:2161–2164
- Graf AF, Hosford WF (1993a). *Calculations of forming limit diagrams for changing strain paths*. Metallurgical Transactions A 24A:2497–2501
- Graf AF, Hosford WF (1993b). *Effect of changing strain paths on forming limit diagrams of Al 2008-T4*. Metallurgical Transactions A 24A:2503–2512
- Hill R (1952). *On discontinuous plastic states, with special reference to localized necking in thin sheets*. Journal of the Mechanics and Physics of Solids 1(1):19–30
- Hudgins AW, Matlock DK, Speer JG (2009). *Shear failures in bending of advanced high strength steels*. En: Proc. Congress of the International Deep Drawing Research Group, IDDRG, Golden CO, USA, pp. 53–64

- Jain M, Allin J, Lloyd D (1999). *Fracture limit prediction using ductile fracture criteria for forming of an automotive aluminum sheet*. International Journal of Mechanical Sciences 41(10):1273–1288
- Kim JH, Sung JH, Wagoner RH (2009). *Thermo-mechanical modelling of draw-bend formability tests*. En: Proc. Congress of the International Deep Drawing Research Group, IDDRG, Golden CO, USA, pp. 503–512
- Kitting D, Ofenheimer A, Jain M, Pauli H, Rabler G (2008). *Experimental characterisation of failure of stretch-bend steel sheets*. En: Proc. 7th International Conference and Workshop on Numerical Simulation of 3D Sheet Metal Forming Processes, Numisheet 2008, Interlaken, Switzerland, pp. 315–320
- Kitting D, Ofenheimer A, Pauli H, Till ET (2009a). *Application of a “Concave-Side Rule” approach for assessing formability of stretch-bend steel sheets*. International Journal of Material Forming 2, Supp. 1:427–430
- Kitting D, Ofenheimer A, Pauli H, Till ET (2009b). *Forming limits of stretch-bend steel sheets*. En: Proc. Congress of the International Deep Drawing Research Group, IDDRG, Golden, Colorado, USA, pp. 425–435
- Kleemola HJ, Pelkkikangas MT (1977). *Effect of predeformation and strain path on the forming limits of steel copper and brass*. Sheet Metal Industries 63:591–599
- Kuhn P, Hardraht HF (1952). *An engineering method for estimating notch-size effect in fatigue tests on steel, NACA TN2805*. Inf. téc. , Langley Aeronautical Laboratory
- Langer BF (1960). *Application of stress concentration factors*. Inf. Téc. 1, Bettis Tech. Rev. WAPD-BT-18
- Lin G, Hu SJ, Cai W, Stoughton T, Carsley J, Krajewski P (2006). *Evaluation of formability in bending/hemming of aluminum alloys using plane-strain tensile tests*. Inf. téc. , CL-2006-21/MSR 146
- Marciniak Z, Kuczyński K (1967). *Limit strains in the processes of stretch-forming sheet metal*. International Journal of Mechanical Sciences 9:609–620
- Marciniak Z, Duncan JL, Hu SJ (2002). *Mechanics of sheet metal forming*, 2o ed. Butterworth-Heinemann

- Morales D, Martínez-Donaire AJ, Vallellano C, García-Lomas FJ (2009). *Bending effect in the failure of stretch-bend metal sheets*. International Journal of Material Forming 2, Supp. 1:813–816
- Morales D, Vallellano C, Martínez-Donaire AJ, García-Lomas FJ (2010). *Prediction of forming limit strains in metal sheets under stretch-bending conditions*. Steel Research International, Special Edition Metal Forming 2010 81(a):781–784
- Neuber H (1946). *Theory of Notch Stresses: Principle for Exact Stress Calculations*. J.W. Edwards Publisher Inc., Ann Arbor, Michigan
- Peterson RE (1959). *Notch Sensitivity*. En: Sines G, Waisman JL (eds.) *Metal Fatigue*, McGraw-Hill, New York, pp. 293–306
- Ragab AR, Saleh CA (2005). *Evaluation of bendability of sheet metals using void coalescence models*. Metallurgical and Materials Transactions A 395:102–109
- Schleich R, Liewald M, Held C, Sindel M (2009a). *Investigation on the forming limit prediction for aluminium sheet metal alloys*. En: Proc. Congress of the International Deep Drawing Research Group, IDDRG, Golden CO, USA
- Schleich R, Sindel M, Liewald M (2009b). *Investigation on the effect of curvature on forming limit prediction for aluminium sheet alloys at stretch-bending*. International Journal of Material Forming 2(2):69–74
- Stoughton TB (2000). *A general forming limit criterion for sheet metal forming*. International Journal of Mechanical Sciences 42:1–27
- Stoughton TB (2001). *Stress-based forming limits in sheet-metal forming*. Journal of Engineering Materials and Technology 123:417–422
- Stoughton TB (2008). *Generalized metal failure criterion*. En: Proc. 7th International Conference and Workshop on Numerical Simulation of 3D Sheet Metal Forming Processes, Numisheet 2008, Interlaken, Switzerland, pp. 241–246
- Stoughton TB, Yoon JW (2005). *Sheet metal formability analysis for anisotropic materials under non-proportional loading*. International Journal of Mechanical Sciences 47(12):1972–2002
- Stoughton TB, Yoon JW (2010). *A new approach for failure criterion for sheet metals*. International Journal of Plasticity (In press, doi:10.1016/j.ijplas.2010.07.004)

- Stoughton TB, Zhu X (2004). *Review of theoretical models of the strain-based FLD and their relevance to the stress-based FLD*. International Journal of Plasticity 40:1463–1486
- Stören S, Rice JR (1975). *Localized necking in thin sheets*. Journal of the Mechanics and Physics of Solids 23:421–441
- Taylor D (2007). *The theory of critical distances: a new perspective in fracture mechanics*. Oxford
- Tharrett MR, Stoughton TB (2003a). *Stretch-bend forming limits of 1008 AK steel*. SAE paper 2003-01-1157
- Tharrett MR, Stoughton TB (2003b). *Stretch-bend forming limits of 1008 AK steel, 70/30 brass, and 6010 aluminum*. Internal report, Society of Automotive Engineers
- Vallellano C, Morales D, García-Lomas FJ (2008). *On the study of the effect of bending in the formability of metal sheets*. En: Proc. 7th International Conference and Workshop on Numerical Simulation of 3D Sheet Metal Forming Processes, Numisheet 2008, Interlaken, Switzerland, pp. 85–90
- Vallellano C, Morales D, Martínez-Donaire AJ, García-Lomas FJ (2010). *On the use of Concave-Side Rule and Critical-Distance Methods to predict the influence of bending on sheet-metal formability*. International Journal of Material Forming 3, Supp. 1:1167–1170
- Wagoner RH, Kim JH, Sung JH (2009). *Formability of advanced high strength steels*. International Journal of Material Forming 2, Supp. 1:359–362
- Wu PD, Graf A, MacEwen SR, Lloyd DJ, Jain M, Neale KW (2005). *On forming limit stress diagram analysis*. International Journal of Solids and Structures 42:2225–2241
- Yoshida M, Yoshida F, Konishi H, Fukumoto K (2005). *Fracture limits of sheets metals under stretch bending*. International Journal of Mechanical Sciences 47:1885–1896

Capítulo 5

Comparación con resultados experimentales. Discusión

En este capítulo se analizan los resultados experimentales de operaciones de estirado con punzón con diferentes materiales publicados por varios autores. Dichos resultados permiten evaluar la capacidad de predicción de ambos modelos propuestos de carga flexión-tracción en dos pasos y de fallo por estricción localizada y por fractura dúctil.

Las herramientas de análisis que se utilizan son las presentadas en capítulos anteriores. Para evaluar las deformaciones límite de fallo se usan los Diagramas Límite de Conformado (DLC) tradicionales y, para incluir el efecto de la flexión, las Superficies Límite de Conformado (SLC). Los DLC en el espacio de las tensiones (DLCT) permiten representar gráficamente los criterios propuestos en términos del estado tensional del material. Los Diagramas MN o diagramas flector-axil adimensionales permiten examinar los patrones de tensiones en el espesor de la chapa a lo largo de la historia de carga del material.

El efecto de la flexión en el fallo de las chapas se analiza con respecto al fallo producido en condiciones de tensión y deformación uniformes en el espesor, *i.e.* en procesos de estirado en el plano de la chapa. Los límites de fallo por estricción y por fractura en estos últimos procesos se han tomado de resultados experimentales publicados en la literatura para los distintos materiales. Frecuentemente, estos datos experimentales se obtuvieron en unas condiciones de conformado muy concretas, *e.g.* mediante ensayos de tracción pura o de estirado en condiciones de deformación plana. En estos casos, los límites de conformado en diferentes condiciones de de-

formación se han estimado a partir de los datos experimentales mediante diversos métodos expuestos en el primer capítulo.

El criterio de plastificación y el valor las distancias críticas de fallo por estricción y por fractura son factores fundamentales en el modelado del proceso de conformado y del fallo de la chapa. Para cada material analizado, se ha realizado una comparación entre diversos criterios de plastificación, seleccionando el más adecuado en cada caso. Asimismo, se han seleccionado los valores de distancias críticas que mejor se adaptan a los resultados experimentales en cada material, discutiendo su relación con la microestructura.

5.1. Descripción de los ensayos y resultados experimentales

Los resultados experimentales que se analizan en este capítulo son los publicados por Tharrett y Stoughton (2003a,b) y Kitting *et ál.* (2008, 2009a,b, 2010). Aunque en la literatura existen otros trabajos experimentales relevantes sobre el efecto de la flexión, se han escogido estos porque proporcionan los datos y resultados necesarios para evaluar la conformabilidad de chapas metálicas en términos de tensión/deformación. En cambio, en trabajos como los de Demeri (1981b,a) y Sadagopan *et ál.* (2003), los autores midieron el avance del punzón en el instante del fallo pero no las deformaciones de la chapa, y éstas tampoco pueden ser calculadas a partir de los datos publicados.

Ensayos de Tharrett y Stoughton (2003a,b)

Estos investigadores realizaron series de ensayos de estirado con punzón cilíndrico de distintos radios en chapas de diferentes materiales. Los materiales ensayados fueron tres chapas de distinto espesor de acero 1008 AK, una de aluminio 6010 y una de latón 70/30. La Tabla 5.1 resume los espesores y las propiedades mecánicas de estos materiales. Los parámetros K y n son el coeficiente de resistencia y el exponente de endurecimiento por deformación, r_0 y r_{90} son los coeficientes de Lankford y DLC_0 representa la deformación límite de fallo por estricción localizada en un ensayo tipo Nakazima en condiciones de deformación plana.

Los ensayos de estirado con flexión se diseñaron para simular las operaciones de conformado que incorporan esfuerzos simultáneos de tracción y flexión. La Figura 5.1 muestra un esquema del equipo utilizado y sus dimensiones. Las probetas son

avance del punzón hasta el instante del fallo. Asimismo, se midieron también los espesores en el momento del fallo. Debido a la alta relación ancho/espesor de los especímenes en todos los ensayos, las condiciones de deformación en la zona de contacto chapa-punzón fueron cercanas a la deformación plana.

Los resultados para los distintos materiales y espesores de chapa ensayados se muestran en los diagramas de la Figura 5.2. En estos diagramas se representa la deformación en la cara externa de la chapa ($\varepsilon_{1,out}$) en el instante del fallo con respecto a la relación t/R . Tharrett y Stoughton representaron los casos en los que la estricción de la chapa era visible con círculos negros y con círculos blancos los casos donde no se apreció fallo. Los radios de punzón (R) en cada serie de ensayos se señalan en la figura. También se muestra en la figura la deformación límite de fallo en estirado puro en condiciones de deformación plana (DLC_0 , Tabla 5.1). En realidad, dicho valor fue obtenido en un ensayo de estirado con un punzón hemisférico de 50,8 mm de radio, donde el efecto de la flexión es muy pequeño.

En el primero de sus artículos, Tharrett y Stoughton observaron en los resultados de los ensayos en chapas de acero 1008 AK que, en el instante en que se iniciaba la estricción localizada, el valor de la deformación en la cara interna coincidía o era ligeramente superior al valor de la deformación límite de estirado puro (DLC_0). En base a esta observación, sugirieron la Regla de la Cara Cóncava (RCC) como una corrección de la tradicional Regla del Plano Medio (RPM) para tener en cuenta los efectos de doblado. Las curvas teóricas obtenidas según estos dos criterios se representan en la Figura 5.2.

Como se observa en la Figura 5.2, la RCC propuesta por Tharrett y Stoughton supone una mejora considerable frente a la RPM en las predicciones de fallo en chapas de acero 1008 AK para valores intermedios de t/R . Sin embargo, existen algunas discrepancias de la RCC con los resultados experimentales en valores altos y bajos de t/R . Los autores indican que las desviaciones para valores bajos de curvatura pueden ser debidas a que la chapa en estas condiciones no se ajustó bien al punzón en los límites del contacto chapa-punzón. De hecho, los valores obtenidos de los ensayos en chapas de acero con los punzones de mayor radio ($R > 3,175$ mm) no pudieron ser utilizados en su estudio debido a que la estricción se alcanzaba fuera de la zona de contacto, donde los efectos de t/R no juegan ningún papel. Asimismo, los autores optaron a posteriori por descartar también los resultados para los radios de 2,540 mm y 2,032 mm, argumentando que las probetas no presentaban un contacto adecuado con el punzón.

En cuanto a la discrepancia de la RCC con los ensayos en las chapas de acero

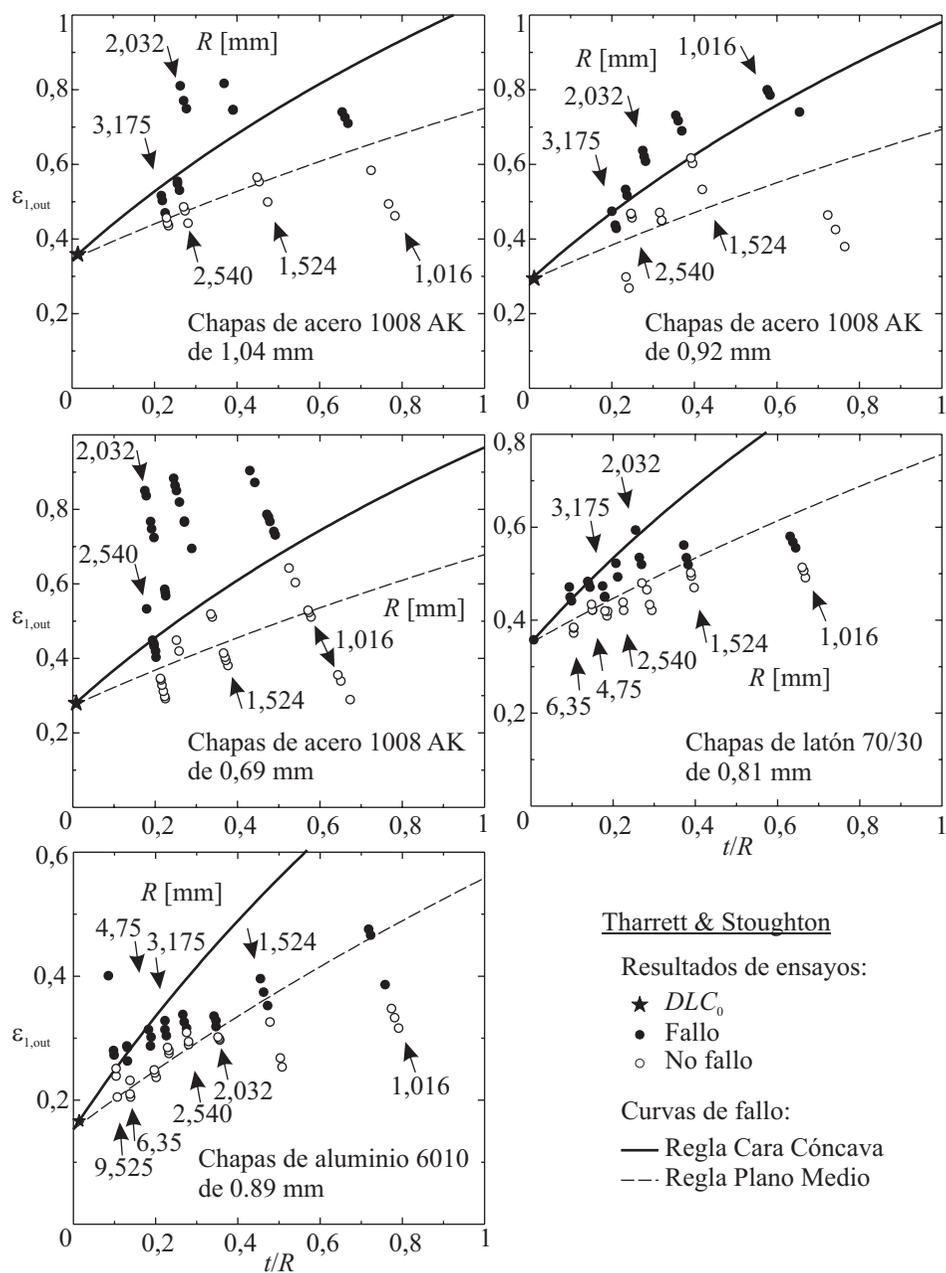


Figura 5.2: Deformaciones reales en la cara externa de la chapa *vs.* la relación t/R : resultados experimentales y predicciones de fallo por estricción obtenidos por Tharrett y Stoughton (2003a,b).

con radios pequeños ($R = 1,016$ mm), los autores insinuaron en un principio que podría estar debido en parte al hecho de que las deformaciones han sido medidas en la proyección en un plano de la superficie curva mallada de la cara externa de la chapa. Otra posibilidad, quizás más acertada, la achacan a la dificultad de detectar el inicio de la estricción en un material relativamente grueso con un punzón de radio afilado (en estas situaciones es habitual que se produzca indentación del punzón en la chapa). Sin embargo, la justificación de Tharrett y Stoughton que en este trabajo se considera más acertada la sugirieron en un artículo posterior al analizar los ensayos en chapas de latón 60/30 y aluminio 6010 (Tharrett y Stoughton, 2003b). Como se aprecia en la Figura 5.2, en estos materiales la RCC no se ajusta bien en valores altos de t/R . Los autores sugirieron entonces la posibilidad de que en estos casos se produjera un fallo prematuro de la chapas (*i.e.* una fractura superficial previa a la estricción localizada).

Ensayos de Kitting *et ál.* (2008, 2009a,b, 2010)

Los autores presentan 3 series de ensayos de estirado con punzones cilíndricos de diferentes radios, variando entre 1 y 20 mm. Las probetas eran de chapa de acero de alta resistencia H340LAD de 1,5 mm de espesor. Las propiedades mecánicas del material se muestran en la Tabla 5.2.

Límite elástico	343,7 MPa	r_0	0,755
Resistencia a rotura	437,6 MPa	r_{45}	1,018
Elongación uniforme	15,5 %	r_{90}	0,763

Tabla 5.2: Propiedades mecánicas del acero H340LAD

Los ensayos se diseñaron para simular 3 condiciones de deformación distintas: uniaxial, deformación plana y biaxial. Se emplearon probetas de 265 mm por 106 mm con un ancho menor en la región central de la chapa. En todos los casos la dirección longitudinal de los especímenes se alineó con la dirección de laminación.

La Figura 5.3 muestra tres imágenes tomadas tras la rotura del material en un ensayo Nakazima y en dos ensayos con punzones cilíndricos de radios 7 y 1 mm, respectivamente. En las dos primeras imágenes se aprecia claramente la estricción, la cual, como indican los autores, precede a la fractura. En la tercera imagen se observa, sin embargo, la indentación del punzón de 1 mm de radio en la chapa. Dicha indentación invalida el ensayo, como se ha discutido antes.

La Figura 5.4 muestra en un diagrama ε_1 - ε_2 la evolución de la deformación

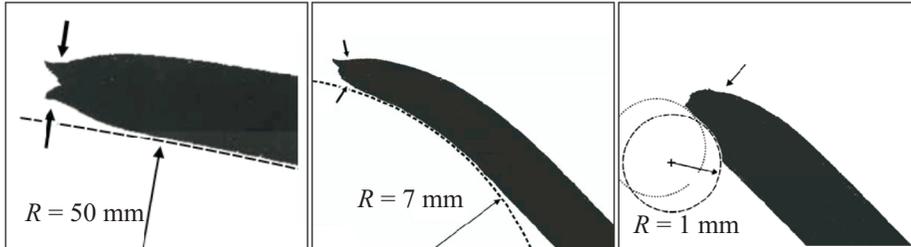


Figura 5.3: Vistas de secciones de chapa de acero H340LAD de 1,5 mm en el instante del fallo en el ensayo de Nakazima (punzón hemisférico de 50 mm de radio) y en la primera serie de ensayos con punzones de radios 7 y 1 mm (Kitting *et ál.*, 2008).

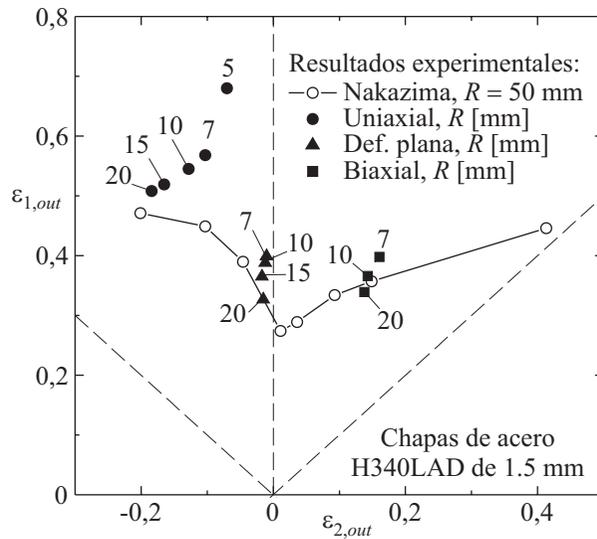


Figura 5.4: Resultados experimentales de los ensayos en chapas de acero H340LAD de 1,5 mm (Kitting *et ál.*, 2008, 2009a,b, 2010).

en la cara externa de la chapa al inicio de la estricción localizada para diferentes radios de punzón y condiciones de deformación (uniaxial, deformación plana y biaxial). Se muestra también la curva límite de conformado obtenida con ensayos Nakazima.

5.2. Predicción del fallo

A continuación se evalúan los métodos propuestos de predicción del fallo por estricción y por fractura, para las chapas de acero 1008 AK, latón 70/30, aluminio 6010 y acero H340LAD. Las predicciones se realizan con distintos valores de distancias críticas comparándolas con los datos experimentales en cada material presentados anteriormente. Finalmente, se discute la relación entre la distancia crítica óptima y la microestructura del material.

5.2.1. Chapas de acero 1008 AK

La Figura 5.5 muestra, junto con los resultados experimentales, la evolución de la deformación en la cara externa de la chapa en cada ensayo calculada mediante el modelo propuesto de flexión-tracción en dos pasos. Al ser el punzón cilíndrico, los radios principales en la cara interna de la chapa durante la etapa de tracción son $R_1 = R$ y $R_2 = \infty$, siendo R el radio del punzón. Asimismo, la condición de deformación plana en los ensayos se impone haciendo las relaciones entre velocidades de deformación $\beta^M = \beta^N = 0$.

Las constantes del material vienen dadas en la Tabla 5.1. El límite elástico del acero 1008 AK se ha estimado en $\sigma_0 = 187$ MPa (véase Ayres, 1983). El criterio de fluencia utilizado es el de Hosford (1979) (Apéndice A) con un exponente $a = 6$. Con este criterio, la relación entre tensiones principales en las condiciones de deformación plana se mantiene constante durante todo el proceso de flexión-tracción ($\alpha^M = \alpha^N = cte.$), siendo los valores de estas constantes 0,529, 0,538 y 0,531, para las chapas de 1,04, 0,92 y 0,69 mm de espesor, respectivamente. Para añadir precisión a las predicciones, la RCC se ha calculado de forma que incluya el pequeño efecto de flexión presente en los ensayos Nakazima. Los valores estimados de DLC_0 a partir de las mediciones experimentales (véase la Tabla 5.1) vienen dados en la Tabla 5.3.

Como se puede apreciar en la Figura 5.5, en general los caminos de deformación teóricos se ajustan razonablemente bien a los resultados experimentales. Estos resultados se ajustan mejor con valores bajos y medios de t/R , como era de esperar

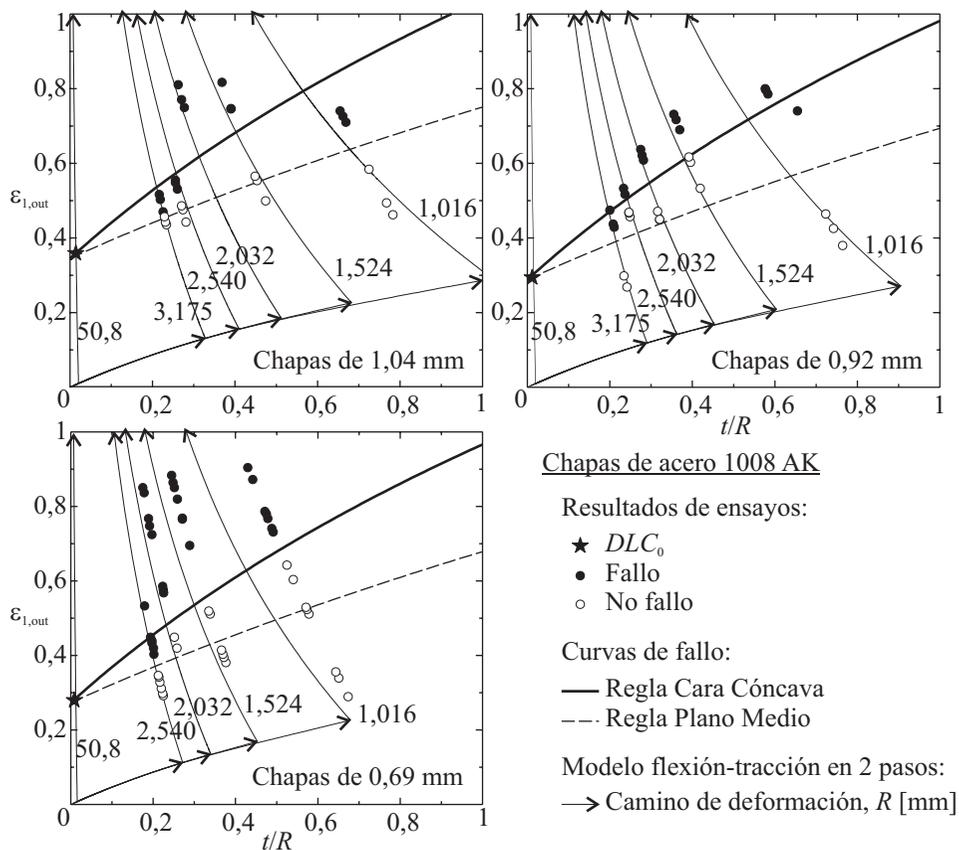


Figura 5.5: Efecto de la flexión (t/R) en la deformación principal máxima de fallo en la cara externa ($\varepsilon_{1,out}$) en chapas de acero 1008 AK.

	Acero 1008 AK		
t_0 [mm]	0,690	0,920	1,040
DLC_0 (experimental)	0,278	0,293	0,358
DLC_0 (estimación)	0,272	0,288	0,345

Tabla 5.3: Valores estimados de DLC_0 para las chapas de acero 1008 AK en los ensayos Nakazima de Tharrett y Stoughton

por la hipótesis de curvaturas moderadas adoptada en el modelo. Nótese la variación con t/R de las dos etapas de flexión y posterior tracción en cada ensayo. En la primera, el espesor se mantiene constante y el radio de la cara interna decrece desde infinito hasta alcanzar el radio del punzón, aumentando así la relación t/R . En la segunda, el radio se mantiene constante y el espesor se reduce, disminuyendo de esta forma t/R .

También se muestra en la Figura 5.5 la trayectoria teórica de deformación en el ensayo Nakazima usado para la obtención del valor de DLC_0 . En este caso el punzón utilizado es uno hemiesférico de radio 50,8 mm y el ancho de la chapa es tal que se consiguen condiciones de deformación plana. Así, los radios principales usados en el modelo flexión-tracción son $R_1 = R_2 = 50,8$ mm y las condiciones de deformación vienen dadas por $\beta^M = 1$ para la primera etapa de flexión y $\beta^N = 0$ para la segunda de tracción. Las relaciones entre tensiones reducidas son $\tilde{\alpha}^M = 1,007$ y $\tilde{\alpha}^N = 0,529$, respectivamente. Como se puede observar en la figura, el camino de deformación predicho pasa por el punto experimental con bastante precisión.

Predicción de la estricción localizada

La Figura 5.6 muestra las predicciones del fallo por estricción localizada para los tres espesores de chapa según los conceptos de distancias críticas introducidas en el capítulo anterior. Los diagramas de la izquierda incluyen las predicciones obtenidas considerando, como variable característica que controla el fallo, la tensión efectiva local a una cierta distancia de la cara interna de la chapa (*i.e.* basado en el *Método del Punto* de los Métodos de Distancias Críticas). Los diagramas de la derecha muestran las predicciones obtenidas considerando el valor promedio del estado tensional en la fracción de espesor crítico de chapa (*i.e.* basado en el *Método de la Línea*). Las distancias críticas (d_{neck}) empleadas fueron 0, 100, 200 y 300 μm . En todos los casos se puede apreciar el efecto de la distancia crítica en la predicción del fallo.

Las predicciones empleando ambas variables efectivas, local y promedio, coinciden si la distancia crítica es nula ($d_{neck} = 0$), como es obvio. Como se observa en la figura, estas curvas coinciden con la RCC en valores bajos y medios de t/R , lo que significa que en estos casos los criterios de fallo expresados en términos de deformaciones o de tensiones son equivalentes. En cambio, en valores altos de t/R las curvas se separan debido a que la respuesta tensión-deformación del material durante la carga inversa compresión-tracción en las fibras internas no alcanza

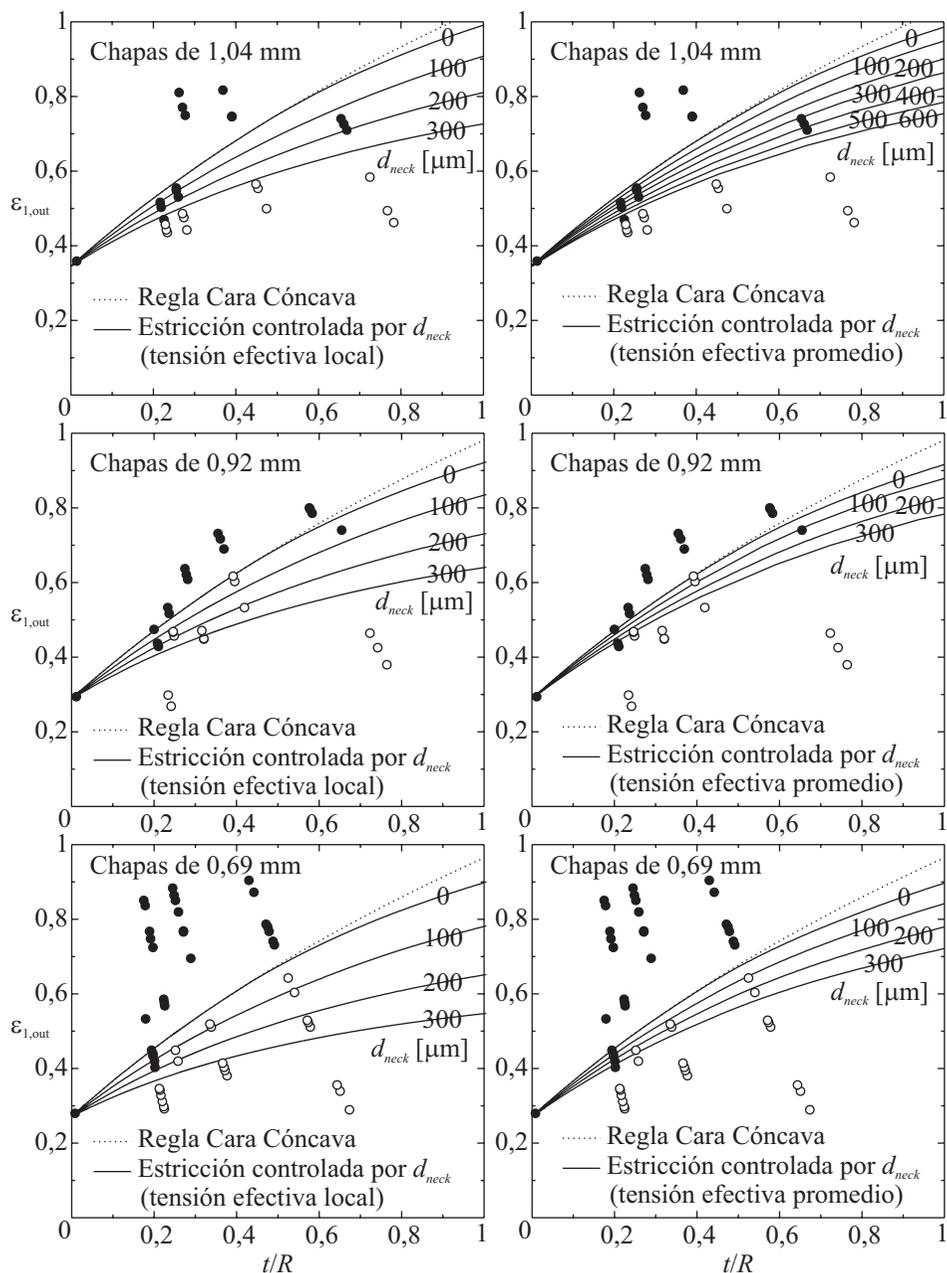


Figura 5.6: Efecto de la distancia crítica (d_{neck}) en el fallo por estricción localizada en chapas de acero 1008 AK, considerando una tensión efectiva local (izquierda) y una tensión efectiva promedio (derecha).

en el instante del fallo la curva tensión-deformación del material original, *i.e.* no se alcanza el denominado *efecto memoria*, el cual sí está incluido en el modelo propuesto.

Al aumentar el valor de la distancia crítica, las curvas de fallo se desplazan hacia abajo en las gráficas, mejorando así las predicciones. Al comparar las gráficas de la izquierda y las de la derecha, se observa claramente que las predicciones en las primeras coinciden aproximadamente con las obtenidas para un valor doble de distancia crítica en las segundas. Esto es debido a que el gradiente de tensiones es aproximadamente lineal en la fracción de espesor considerada, *i.e.* el valor promedio de tensión efectiva en una cierta distancia de la cara interna, $(\overline{\sigma_1 - \sigma_3})(d_{neck})$, es aproximadamente igual al valor de tensión efectiva local en el punto medio, $(\sigma_1 - \sigma_3)(d_{neck}/2)$. La misma tendencia se observa en los próximos subapartados, donde se analizan los resultados experimentales en las chapas de latón 70/30, aluminio 6010 y acero H340LAD. Como ya ha sido comentado en el capítulo anterior, parece más realista asumir que la estricción depende de un valor promedio en la fracción de material crítico, y no de un valor local en el interior del material. Por este motivo, de ahora en adelante sólo se considerará el modelo de fallo por estricción controlado por la tensión efectiva promedio, basado en el Método de la Línea.

Por tanto, considerando solamente las gráficas de la derecha en la Figura 5.6, las distancias críticas (d_{neck}) que mejor se adaptan a priori a los resultados experimentales pueden variar mucho, entre 0 y 600 μm , dependiendo del espesor de chapa. Pero si se descartan los ensayos con radios grandes señalados por Tharrett y Stoughton y los ensayos con el radio menor donde presumiblemente el fallo se produjo por fractura superficial, se aprecia que las predicciones para los tres espesores de chapa se ajustan razonablemente bien para d_{neck} variando entre 0 y 200 μm (Vallellano *et ál.*, 2008a, 2010; Morales *et ál.*, 2009, 2010).

Predicción de la fractura superficial

Para analizar el fallo por fractura es necesario en primer lugar estimar la deformación de fractura en condiciones de deformación plana ($\varepsilon_{1,frac}$) para las diferentes chapas. Esta se puede calcular a partir de los resultados experimentales de ensayos de tracción pura en aceros 1008 AK publicados por Ayres (1983) y haciendo uso de los criterios de fractura dúctil de Freudenthal (1950), Cockcroft y Latham (1968) y Tresca (véase el Apartado 1.4). Ayres midió unas deformaciones principales mayor y menor de 0,67 y $-0,27$, respectivamente, en el instante de la

fractura. Los distintos valores de $\varepsilon_{1,frac}$ calculados se muestran en la Tabla 5.4 para las 3 chapas de acero.

	Acero 1008 AK		
t_0 [mm]	0,690	0,920	1,040
$\varepsilon_{1,frac}$ (Freudenthal)	0,583	0,584	0,579
$\varepsilon_{1,frac}$ (Cockcroft y Latham)	0,552	0,552	0,549
$\varepsilon_{1,frac}$ (Tresca)	0,440	0,433	0,436

Tabla 5.4: Estimación de los límites de fractura en deformación plana en chapas de acero 1008 AK

El DLC de la Figura 5.7(izquierda) muestra, para las chapas de 1.04 mm de espesor, las curvas de fractura obtenidas mediante los criterios mencionados y los correspondientes valores de $\varepsilon_{1,frac}$ en $\beta = 0$. Nótese cómo estas tres curvas incluyen el resultado experimental de Ayres. El diagrama $\varepsilon_{1,out}$ vs. t/R de la Figura 5.7(derecha) muestra, junto con los resultados experimentales de Tharrett y Stoughton, las predicciones de fractura mediante la Regla de la Cara Convexa.

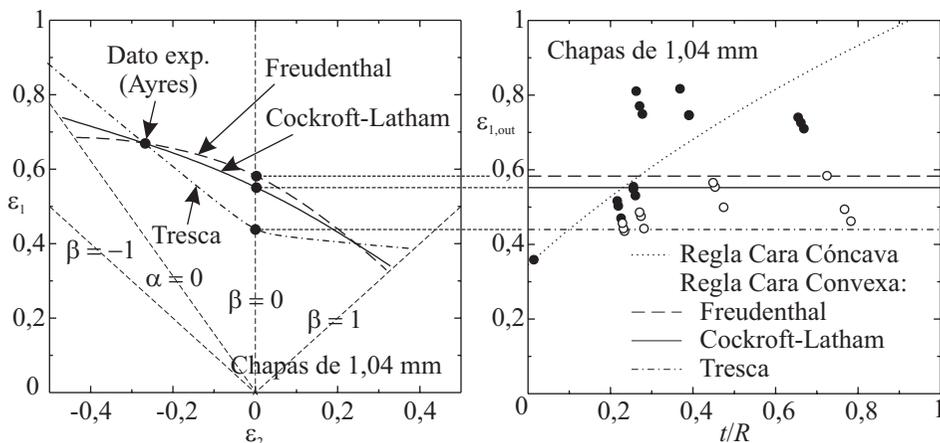


Figura 5.7: Cálculo del límite de fractura en deformación plana ($\varepsilon_{1,frac}$) y Regla de la Cara Convexa ($\varepsilon_{1,out} = \varepsilon_{1,frac}$) en chapas de acero 1008 AK de 1,04 mm de espesor.

Se puede observar que los criterios de Freudenthal y de Cockcroft y Latham proporcionan resultados similares, mientras que el de Tresca proporciona resultados excesivamente bajos. Esta tendencia se observa en todos los espesores de chapa. En efecto, el criterio de Tresca conduce a buenos resultados en materiales relati-

vamente poco dúctiles como se ha comprobado en distintas aleaciones de aluminio (Jain *et ál.*, 1999; Vallellano *et ál.*, 2008b; Zadpoor *et ál.*, 2009), mientras que para materiales muy dúctiles los criterios integrales de Freudenthal y de Cockcroft y Latham presentan mejores predicciones (Takuda *et ál.*, 1997a,b, 2000; Han y Kim, 2003; Ozturk y Lee, 2004). Dado que el uso del criterio de fractura de Cockcroft y Latham está más extendido y contrastado en operaciones de conformado, será éste el que se considere en adelante.

La Figura 5.8 muestra las predicciones del fallo por fractura para los tres espesores de chapa empleando los conceptos de distancia crítica. De manera análoga a la Figura 5.6, las gráficas de la izquierda representan el modo de fallo controlado por una tensión efectiva local $(\sigma_1 - \sigma_3)(d_{frac})$, y las gráficas de la derecha por una tensión efectiva promedio $(\overline{\sigma_1 - \sigma_3})(d_{frac})$. Al comparar ambos métodos se encuentran las mismas similitudes que en el fallo por estricción: las curvas de fallo usando el estado tensional local coinciden aproximadamente con las que usan una tensión característica promedio, al considerar un valor doble de d_{frac} medida desde la cara externa de la chapa. Dado que parece razonable asumir que la fractura superficial está controlada por lo que sucede en el frente de grieta, en adelante sólo se considerará el modelo de fallo basado en la tensión efectiva local a una cierta distancia de la cara externa de la chapa.

A diferencia del fallo por estricción, la curva de fractura considerando un distancia crítica nula ($d_{frac} = 0$) coincide con la Regla de la Cara Convexa en todo el rango de valores posibles de curvatura (t/R). En efecto, dado que la inversión de la carga se produce sólo en las fibras cercanas a la cara interna, su efecto no se percibe en el material en la cara externa. En la figura se aprecia que estos métodos predicen razonablemente bien los resultados experimentales para valores altos de t/R , aunque los subestima ligeramente.

Al aumentar el valor de la distancia crítica (d_{frac}), las curvas de fallo se desplazan hacia arriba, mejorando las predicciones de fallo de los datos de Tharrett y Stoughton. Considerando solamente las gráficas de la izquierda en la Figura 5.8, correspondientes al fallo controlado por la tensión efectiva local, la curva que mejor se adapta a los resultados experimentales de los tres espesores de chapa es la correspondiente a una distancia crítica de aproximadamente $200 \mu\text{m}$ (Vallellano *et ál.*, 2008a, 2010; Morales *et ál.*, 2009, 2010).

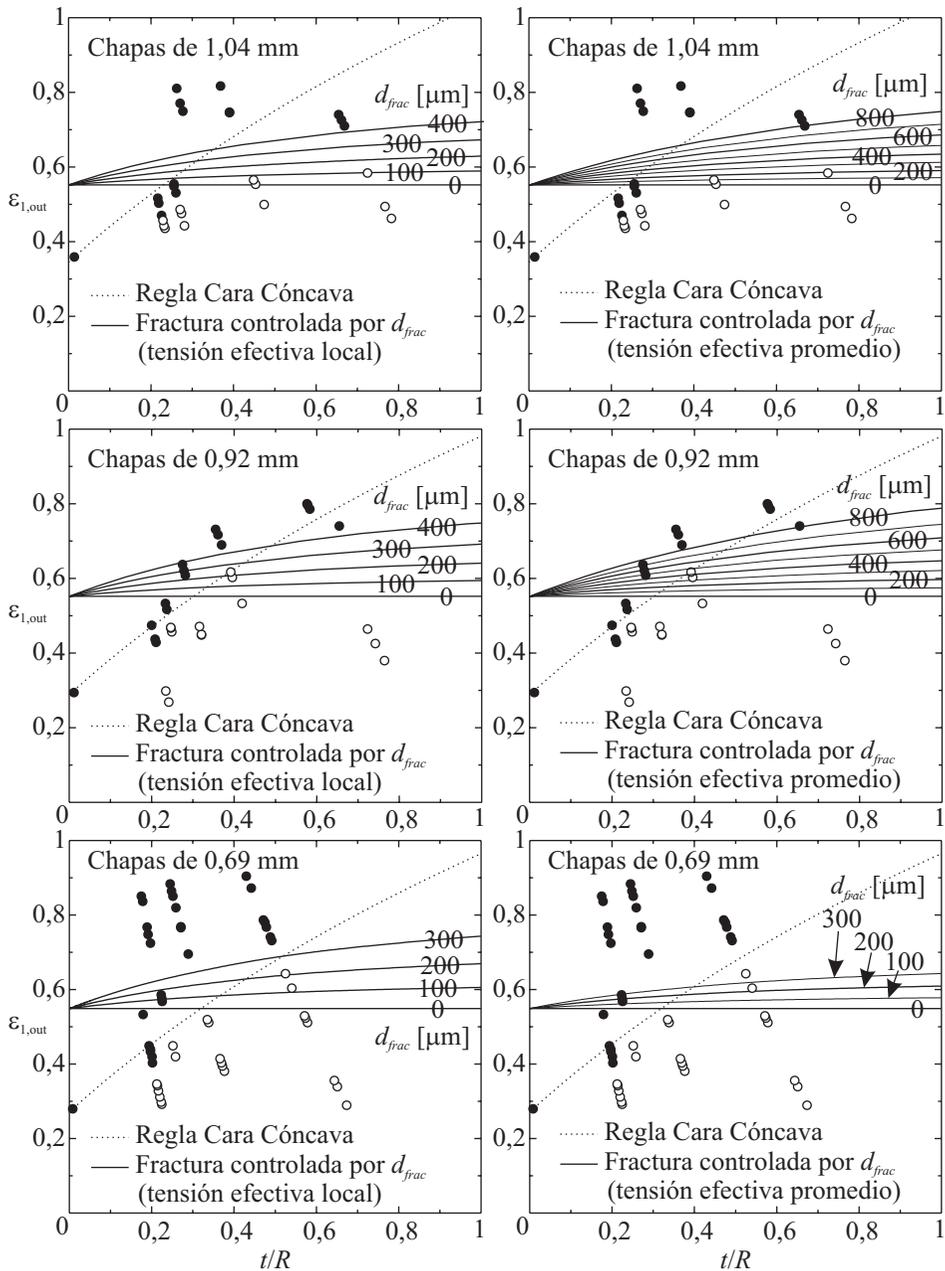


Figura 5.8: Efecto de la distancia crítica (d_{frac}) en el fallo por fractura superficial en chapas de acero 1008 AK, considerando una tensión efectiva local (izquierda) y una tensión efectiva promedio (derecha).

Criterio generalizado de fallo

Combinando los análisis de fallo por estricción y por fractura se encuentra que la fracción de material que controla el fallo por estricción (d_{neck}) y la que controla el fallo por fractura (d_{frac}) son aproximadamente del mismo valor en las tres chapas analizadas: $d_{neck} \approx d_{frac} \approx 200 \mu\text{m}$. Según esta estimación, dichas distancias críticas parecen ser independientes del espesor de la chapa, estando de acuerdo con las ideas planteadas en este trabajo. Con estas distancias críticas se propone como curva general de fallo la representada en la Figura 5.9, obtenida de la intersección de las correspondientes curvas de fallo por estricción y fractura (Vallellano *et ál.*, 2008a, 2010; Morales *et ál.*, 2009, 2010). Nótese que los resultados experimentales para relaciones bajas de t/R , que quedan por debajo de la curva general de fallo, son los que fueron desechados por Tharrett y Stoughton.

El criterio de fallo seleccionado puede ilustrarse gráficamente en el espacio de las tensiones. La Figura 5.10 muestra la evolución hasta el instante del fallo de la tensión efectiva que controla la estricción, $(\overline{\sigma_1 - \sigma_3})(d_{neck})$, y la que controla la fractura, $(\sigma_1 - \sigma_3)(d_{frac})$, para las chapas de acero 1008 AK de 1,04 mm de espesor. A la izquierda de la figura se muestra un DLCT ($\sigma_1 - \sigma_3$ vs. $\sigma_2 - \sigma_3$) que incluye además la superficie de plastificación inicial y los límites de tensiones $\sigma_{1,neck}(\alpha)$ y $\sigma_{1,frac}(\alpha)$ en condiciones de deformación plana. Como ya se ha mencionado, en estas condiciones la relación entre las tensiones principales (*i.e.* la pendiente de las trayectorias de tensión efectiva) es constante y viene dada por $\alpha = 0,529$.

La Figura 5.10(derecha) muestra el efecto de la flexión en la tensión efectiva en un diagrama $\sigma_1 - \sigma_3$ vs. t/R . Las líneas discontinuas en la figura representan la evolución de $(\overline{\sigma_1 - \sigma_3})(d_{neck} = 200\mu\text{m})$ en el proceso de flexión-tracción en dos pasos para los distintos radios de punzón utilizados en los ensayos. Las líneas continuas representan la evolución de $(\sigma_1 - \sigma_3)(d_{frac} = 200\mu\text{m})$ en los mismos procesos. Para cada radio de punzón, la evolución de ambas tensiones efectivas se ha calculado hasta el instante en el que se produce en primer lugar uno de los dos modos de fallo, estricción o fractura, representado en la figura con un punto grueso. Así, se observa que el fallo por estricción se predice poco antes de la fractura para los dos radios de punzón mayores (3,175 y 2,540 mm), mientras que para los demás casos (2,032, 1,524 y 1,016 mm) la fractura superficial se predice antes que la estricción.

Por completitud, se ha representado también en la Figura 5.10(derecha) el ensayo Nakazima con un punzón hemiesférico de 50,8 mm de radio empleado por Tharrett y Stoughton para la obtención del DLC_0 (línea de puntos). Se representa

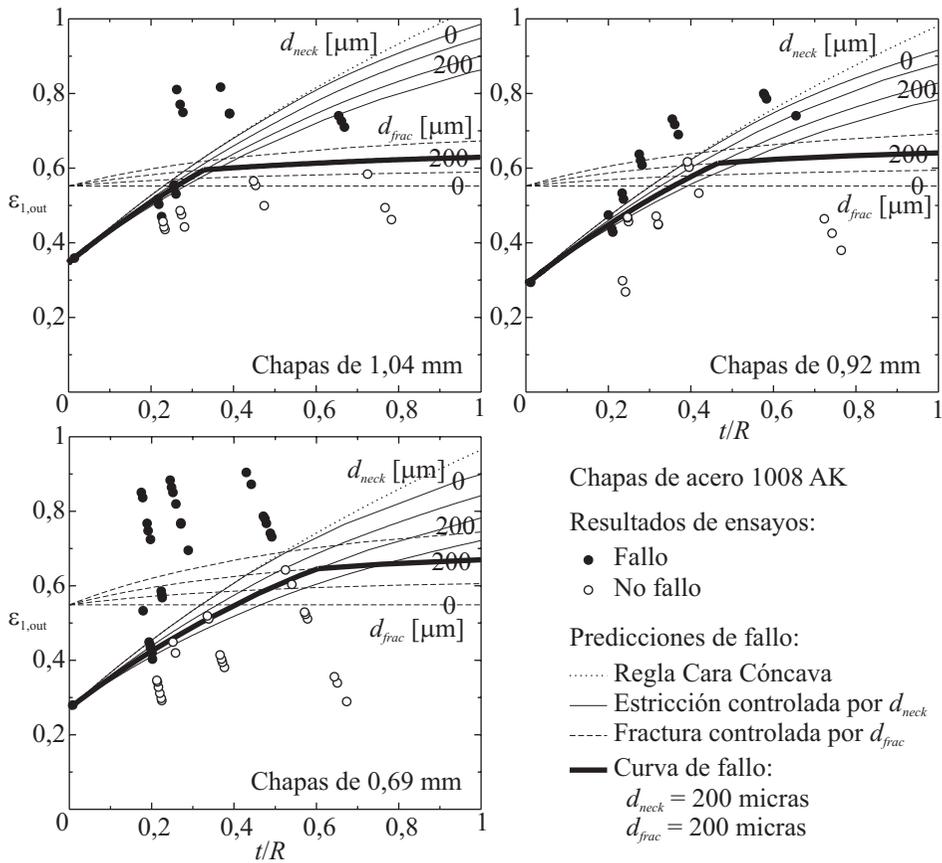


Figura 5.9: Criterio generalizado de fallo en chapas de acero 1008 AK.

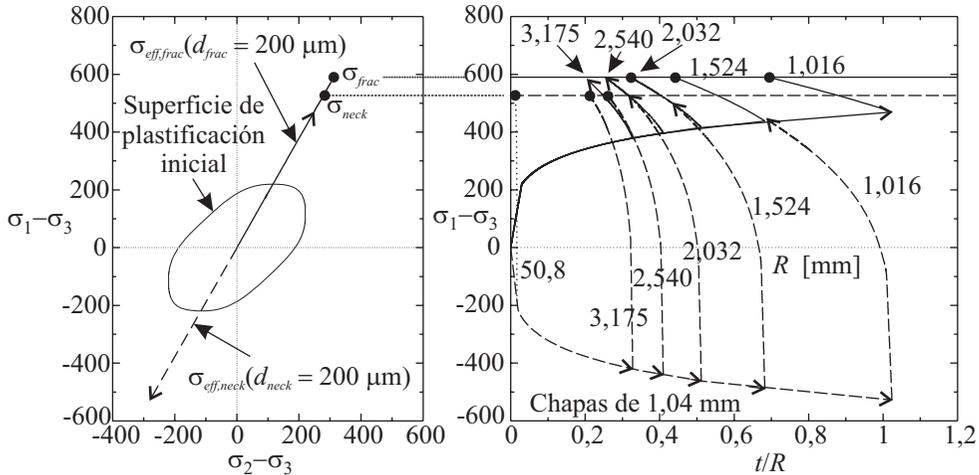


Figura 5.10: Trayectorias de la variable característica que controla el fallo por estricción, $(\overline{\sigma_1 - \sigma_3})(d_{neck} = 200\mu\text{m})$, y por fractura, $(\sigma_1 - \sigma_3)(d_{frac} = 200\mu\text{m})$, en chapas de acero 1008 AK de 1,04 mm de espesor.

la evolución de la etapa de flexión con una relación $\tilde{\alpha}^M = 1,007$ (donde no se llega a producir plastificación), y la etapa de tracción con una relación $\tilde{\alpha}^N = 0,529$. Sólo se representa la curva de evolución de fallo por estricción dado que este modo de fallo es el que prevalece.

5.2.2. Chapas de latón 70/30

La Figura 5.11 muestra los resultados experimentales, junto con las predicciones de la RCC y de la RPM, obtenidos por Tharrett y Stoughton (2003b) para chapas de latón 70/30 de 0,81 mm de espesor. Los autores comprobaron que la RCC no se ajusta a los resultados experimentales, arguyendo la posibilidad de un *fallo prematuro* no detectado, previo a la estricción localizada, en los ensayos con valores medios y altos de t/R . En cambio, la RPM parece ajustarse mucho mejor en este material que la RCC.

En la Figura 5.11 se muestran también las trayectorias de deformación en la cara externa de la chapa obtenidas con el modelo flexión-tracción en dos pasos para los distintos punzones ensayados. Las condiciones de deformación durante el conformado son las mismas que en las chapas de acero ($\beta^M = \beta^N = 0$). Las constantes del material vienen dadas en la Tabla 5.1. El límite elástico del latón 70/30 se estima en 112,5 MPa (Wagoner, 1982). El criterio de fluencia utilizado

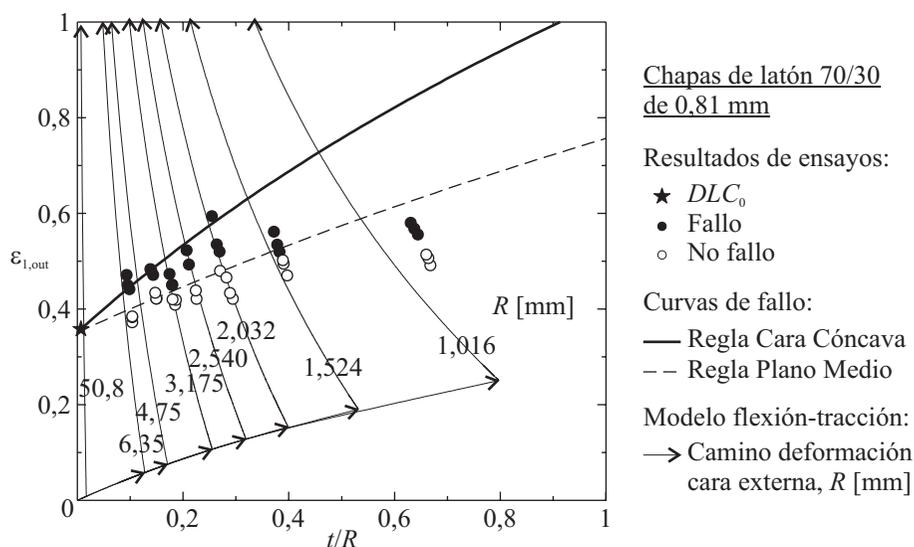


Figura 5.11: Efecto de la flexión (t/R) en la deformación principal máxima en la cara externa ($\epsilon_{1,out}$) en el fallo de chapas de latón 70/30 de 0,81 mm de espesor.

es el de Hosford (1979) (Apéndice A), ahora con un exponente $a = 8$. Con este criterio se obtienen unas relaciones entre tensiones $\alpha^M = \alpha^N = 0,489$, constantes durante todo el proceso.

En general, se observa que la evolución teórica de la deformación se ajusta razonablemente bien a los resultados experimentales (Figura 5.11). Existen, sin embargo, algunas discrepancias para los radios mayores ($R = 4,75$ y $R = 6,35$ mm), donde precisamente las predicciones deberían ajustarse mejor. Como se verá posteriormente, lo mismo sucede en los ensayos en chapas de aluminio 6010 realizados por los mismos autores.

La Figura 5.12 muestra las curvas de fallo por estricción y por fractura para distintas distancias críticas. Al igual que en las chapas de acero 1008 AK, se ha asumido que la variable efectiva que controla la estricción es la tensión promedio en d_{neck} en la cara interna de la chapa, y para la fractura es la tensión local a d_{frac} desde la cara externa.

El valor de la deformación límite de estricción en ausencia de flexión se ha estimado en $DLC_0 = 0,358$ a partir del valor del ensayo Nakazima (0,351 en la Tabla 5.1). El límite de fractura en deformación plana ($\epsilon_{1,frac} = 0,422$) se ha obtenido mediante el criterio de Cockcroft y Latham (1968) a partir de la deformación de

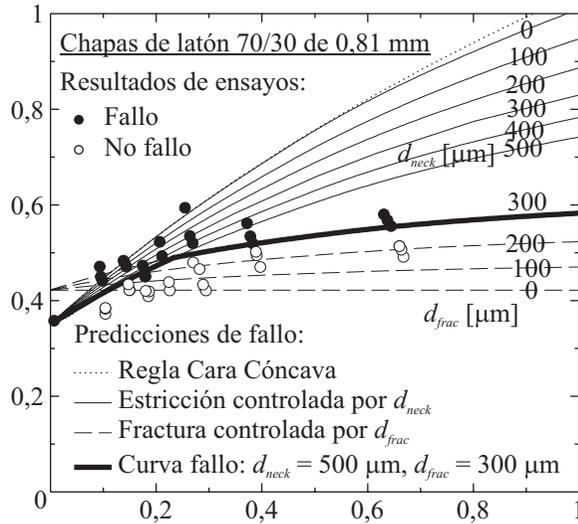


Figura 5.12: Criterio generalizado de fallo en chapas de latón 70/30 de 0,81 mm de espesor.

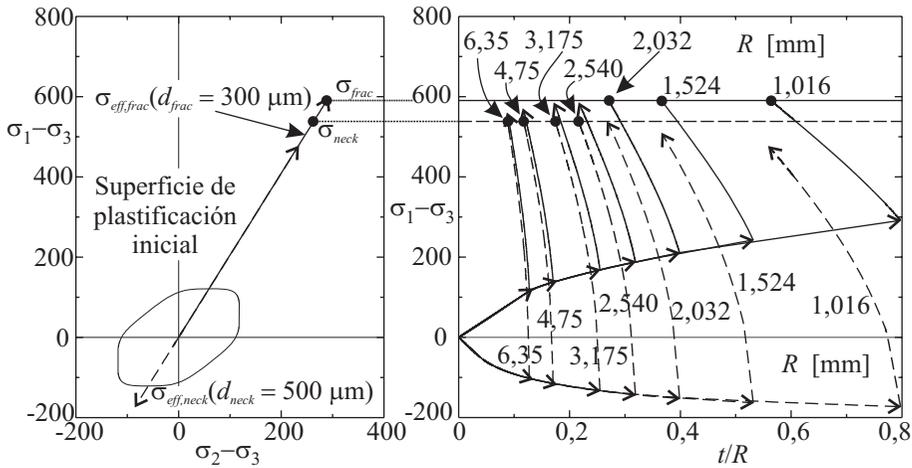


Figura 5.13: Trayectorias de la variable característica que controla el fallo por estricción, $(\sigma_1 - \sigma_3)(d_{neck} = 500 \mu\text{m})$, y por fractura, $(\sigma_1 - \sigma_3)(d_{frac} = 300 \mu\text{m})$, en chapas de latón 70/30 de 0,81 mm de espesor.

fractura bajo tracción uniaxial (0.48) obtenido por Wagoner (1982).

Como se observa en la Figura 5.12, los valores de distancias críticas que mejor se adaptan a los resultados experimentales son aproximadamente $d_{neck} = 500 \mu\text{m}$ y $d_{frac} = 300 \mu\text{m}$.

Por último, la Figura 5.13 muestra las trayectorias de las variables efectivas que controlan el fallo por estricción y por fractura con las distancias críticas adoptadas, en un DLCT y en un diagrama $(\sigma_1 - \sigma_3)$ vs. t/R , respectivamente. Para una descripción detallada de la representación de dicha gráfica se refiere al lector a la explicación de la Figura 5.10, análoga a esta para el acero 1008 AK. En la gráfica de la izquierda se puede deducir, tomando la superficie de plastificación inicial como referencia, que la tensión efectiva equivalente en el instante del fallo es muy superior en todos los ensayos a la del final de la primera etapa de flexión. En estas situaciones, el efecto de la plastificación inversa en las fibras internas de la chapa (*efecto memoria*) puede despreciarse. Asimismo, nótese en la gráfica de la derecha que el fallo por estricción se produce en los ensayos con radios mayores y el fallo por fractura en los ensayos con radios menores.

5.2.3. Chapas de aluminio 6010

La Figura 5.14 muestra los resultados experimentales, junto con las predicciones de la RCC y de la RPM, obtenidos por Tharrett y Stoughton (2003b) para chapas de aluminio 6010 de 0,89 mm de espesor. Al igual que en las chapas de latón 70/30, los autores comprobaron que la RCC no se ajusta a los resultados experimentales. Como se aprecia en la citada figura, la RPM tampoco se ajusta bien en este material.

De nuevo, las trayectorias de deformación en la cara externa de la chapa obtenidas con el modelo flexión-tracción en dos pasos se ajustan razonablemente bien a los resultados experimentales (Figura 5.14), con discrepancias similares en los ensayos con mayores radios de punzón a las observadas en las chapas de latón.

Como en los casos anteriores, las condiciones de deformación durante el conformado son $\beta^M = \beta^N = 0$. Las constantes del material vienen dadas en la Tabla 5.1. El límite elástico del aluminio 6010 se estima en 202 MPa (Sachdev, 1990). Empleando el criterio de Hosford (1979) (Apéndice A) con un exponente $a = 8$, las relaciones entre tensiones son $\alpha^M = \alpha^N = 0,520$, las cuales se mantienen constantes durante todo el proceso de carga.

La Figura 5.15 muestra las curvas de fallo por estricción y por fractura para diferentes críticas d_{neck} y d_{frac} . Las deformaciones límite en ausencia de flexión

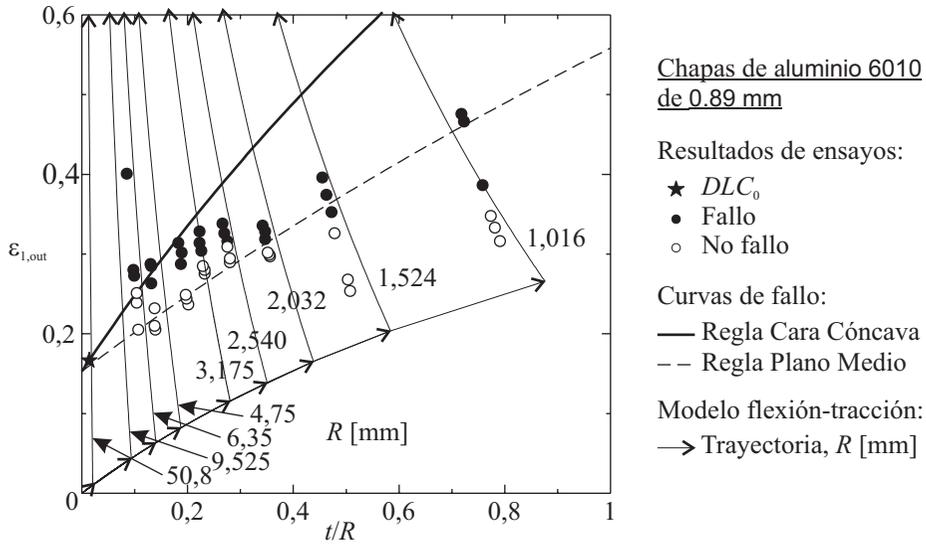


Figura 5.14: Efecto de la flexión (t/R) en la deformación principal máxima en la cara externa ($\epsilon_{1,out}$) en el fallo de chapas de aluminio 6010 de 0,89 mm de espesor.

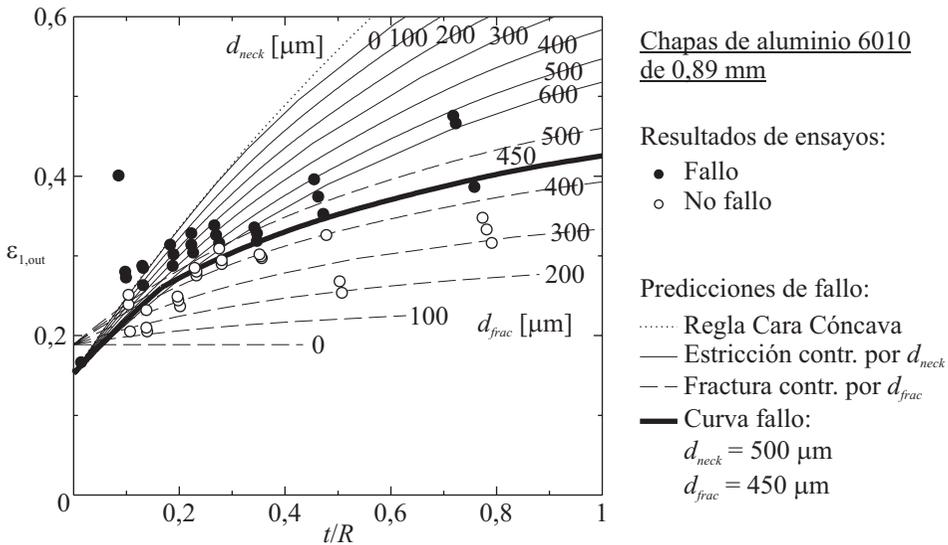


Figura 5.15: Criterio generalizado de fallo en chapas de aluminio 6010 de 0,89 mm de espesor.

y en condiciones de deformación plana son $DLC_0 = 0,152$ para estricción (calculado a partir del valor obtenido en el ensayo Nakazima de la Tabla 5.1) y para fractura $\varepsilon_{1,frac} = 0,189$. Este último límite de fractura se ha obtenido a partir de los resultados experimentales de Sachdev (1990) en condiciones equi-biaxiales de deformación, extrapolándolos a condiciones de deformación plana mediante el criterio de fractura dúctil de Tresca. Para las chapas de aluminio, se ha probado que el criterio de Tresca reproduce satisfactoriamente el fallo por fractura (Jain *et ál.*, 1999; Vallellano *et ál.*, 2006, 2008b).

Como se aprecia en la Figura 5.15, las distancias críticas que mejor ajustan los resultados experimentales están en torno a $d_{neck} = 500 \mu\text{m}$ para el fallo por estricción localizada y $d_{frac} = 450 \mu\text{m}$ para el fallo por fractura dúctil. La curva de fallo que se obtiene con estos valores reproduce razonablemente bien los resultados experimentales. Nótese que algunas curvas de fractura con valores bajos de d_{frac} no se prolongan a partir de un cierto valor de t/R . Este valor representa la situación en la que el fallo se produce en la etapa de flexión según el modelo flexión-tracción propuesto.

5.2.4. Chapas de acero de alta resistencia H340LAD

A diferencia de los materiales anteriores, el análisis de los datos experimentales de Kitting *et ál.* (2008, 2009a,b, 2010) en chapas de acero H340LAD se realiza directamente en el DLC. Dado que todos los especímenes fallaron por estricción localizada, el análisis se restringe a este modo de fallo.

La Figura 5.16 muestra la evolución en varios ensayos de la deformación en la cara externa de la chapa calculada mediante el modelo propuesto de flexión-tracción en dos pasos, hasta alcanzar los valores de los ensayos. Nótese que los primeros tramos de trayectoria, correspondientes a la etapa de flexión en condiciones de deformación plana (punzones cilíndricos), son mayores para los radios más pequeños.

En la Figura 5.16 se muestran también las predicciones realizadas con la RCC, mediante líneas continuas para cada una de las series de ensayos de Kitting *et ál.* (en condiciones de carga uniaxial, deformación plana y biaxial). Como se observa en la figura, las predicciones sobrevaloran ligeramente los ensayos en carga uniaxial, a excepción del ensayo realizado con el radio menor ($R = 5 \text{ mm}$), que queda muy subestimado. Para las otras dos series completas, las predicciones son claramente muy superiores a los resultados experimentales, inhabilitando el uso de la RCC.

La Figura 5.17 muestra las predicciones realizadas con el modelo de fallo pro-

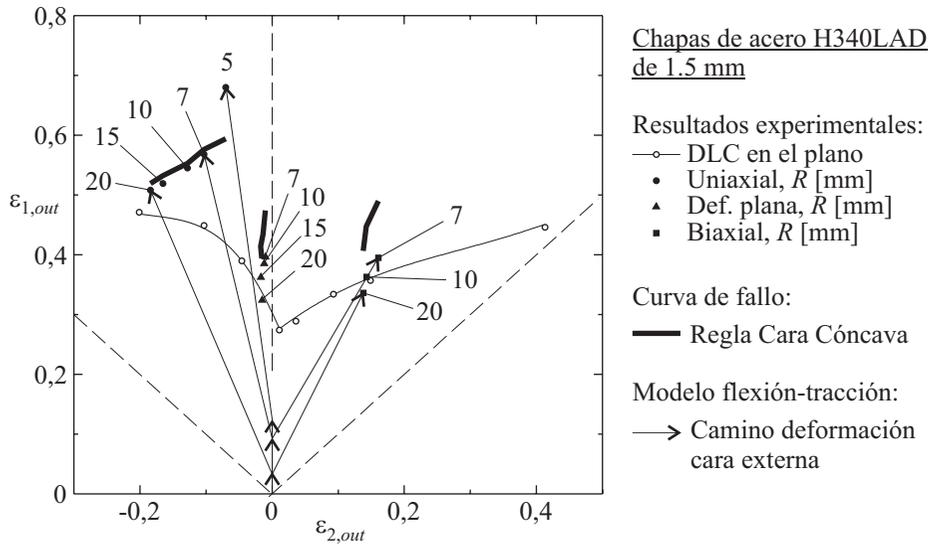


Figura 5.16: Caminos de deformación y predicciones de fallo por estricción mediante la Regla de la Cara Cóncava en chapas de acero H340LAD de 1,5 mm de espesor.

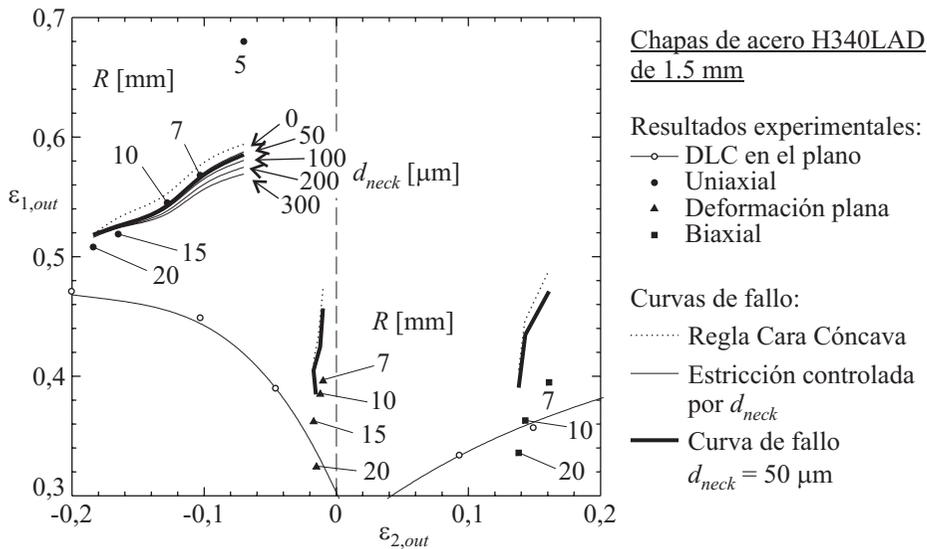


Figura 5.17: Predicciones del fallo por estricción mediante el modelo propuesto en chapas de acero H340LAD de 1,5 mm de espesor.

puesto empleando distancias críticas (d_{neck}). En la primera serie de ensayos se presentan los resultados para diferentes distancias críticas, comprendidas entre 0 y 300 μm . Como se puede ver, las predicciones se mejoran significativamente con respecto a las de la RCC, a excepción de nuevo del ensayo con radio de 5 mm. Aunque los ensayos con radios de 20 y 15 mm están ligeramente sobreestimados, los de radios de 10 y 7 mm se predicen razonablemente bien. Se aprecia en la figura que un aumento de d_{neck} no consigue mejorar las predicciones de los radios mayores, mientras que las de los otros dos radios se empeoran. La mejor aproximación a este conjunto de ensayos se ha estimado en un valor alrededor de $d_{neck} = 50 \mu\text{m}$, marcada en la figura con trazo más grueso (Morales *et ál.*, 2009, 2010; Vallellano *et ál.*, 2010).

En los casos de los ensayos en deformación plana y biaxial se puede observar cómo el modelo propuesto sigue sobreestimando los valores experimentales. En este caso sólo se muestran las predicciones para una distancia crítica de 50 μm . Se observa que aunque la predicción baja ligeramente respecto a los resultados obtenidos con la RCC, esta mejora no es suficiente.

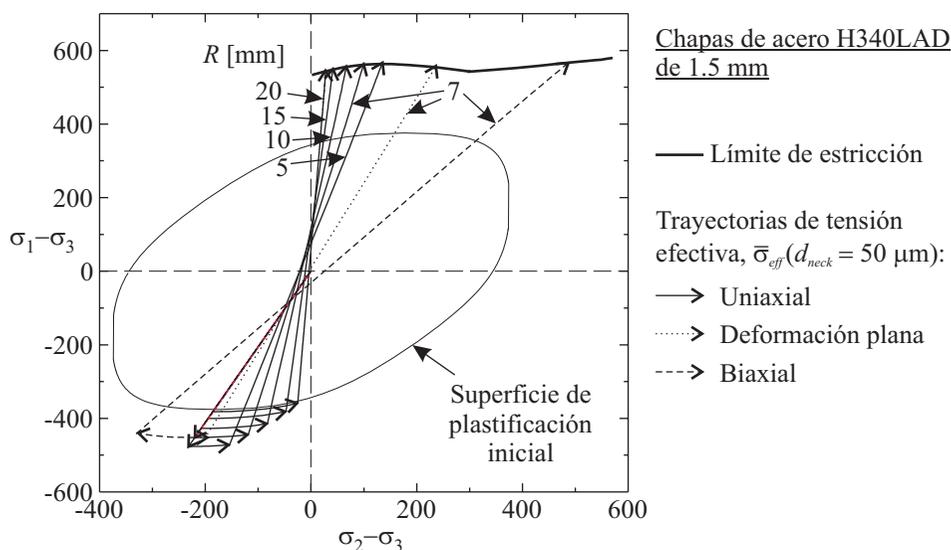


Figura 5.18: Trayectorias de la variable característica que controla el fallo por estricción, $(\overline{\sigma_1 - \sigma_3})(d_{neck} = 50 \mu\text{m})$, en chapas de acero H340LAD de 1,5 mm de espesor.

Para ilustrar el criterio de fallo adoptado con una distancia crítica $d_{neck} = 50 \mu\text{m}$, la Figura 5.18 muestra en un DLCT las trayectorias de la tensión efectiva que

controla el fallo. En el diagrama se ilustra el instante de fallo predicho en varios ensayos, representado por el corte de la trayectoria de la variable efectiva con la curva límite de fallo por estricción.

A pesar de las discrepancias observadas es necesario comentar ciertas anomalías detectadas en los resultados experimentales de Kitting *et ál.* Por un lado, resulta paradójico que los propios autores descarten el resultado en carga uniaxial para el punzón de 5 mm en sus publicaciones posteriores sin argumentar motivo alguno. Como se puede observar en la Figura 5.17 dicho punto es el que presenta mayores desviaciones respecto a las predicciones. Por otra parte, resulta igualmente inusual ver cómo varios de los resultados experimentales en deformación plana y biaxial se sitúan por debajo de la curva límite de conformado. En efecto, es un hecho bien establecido que las curvas de conformado si sitúan en niveles de deformación mayores a medida que disminuye el radio del punzón, y esto no es lo que ocurre con los resultados de Kitting *et ál.* Aunque los autores en sus publicaciones no mencionan nada al respecto, parece que los resultados se encuentran ciertamente desplazados hacia abajo, bien por haber variado sus condiciones de ensayo o bien de medida. Sólo con fines ilustrativos, la Figura 5.19 muestra el ajuste que se obtendría desplazando los datos de Kitting *et ál.* en deformación plana y biaxial. Es llamativo que al menos la tendencia y el rango de valores se predigan razonablemente bien.

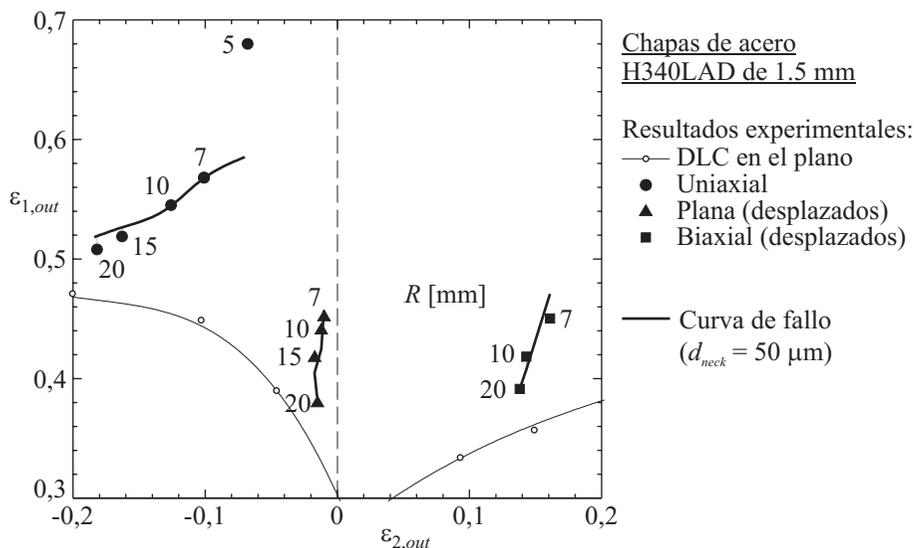


Figura 5.19: Predicciones del fallo por estricción mediante el modelo propuesto en chapas de acero H340LAD de 1,5 mm de espesor (resultados experimentales desplazados).

5.2.5. Distancias críticas vs. microestructura

Como ya ha sido expuesto en el capítulo anterior, en esta tesis se asume que la resistencia al fallo del material está influenciada por la evolución del estado tensional a una cierta distancia crítica de la cara interna/externa de la chapa. Esta hipótesis de trabajo, basada en las Teorías clásicas de Distancias Críticas, asume que tanto los límites de fallo por estricción (σ_{neck}) y fractura (σ_{frac}) como las correspondientes distancias críticas (d_{neck} y d_{frac}) son propiedades del material. Así, para los materiales analizados anteriormente, los límites de fallo se han estimado a partir de resultados experimentales. En cuanto a las distancias críticas, éstas se asumen que pueden depender de la microestructura del material, de manera similar a otras propiedades del material (*e.g.* el exponente de endurecimiento por deformación, n). Para explorar esta idea, a continuación se comparan los valores de distancias críticas que mejor se ajustan a los resultados experimentales de los materiales analizados con el diámetro medio de grano del material.

La Tabla 5.5 muestra los valores de distancias críticas (d_{neck} y d_{frac}), obtenidos anteriormente, y el tamaño medio de grano (D) para los materiales analizados. El acero 1008 AK tiene un grano de entre 22 y 25 μm de diámetro medio (Ayres, 1984). Los granos del latón 70/30 son aproximadamente equiaxiales, pero su tamaño es variable, entre 25 y 50 μm (Vial, 1988). En el aluminio 6010 la microestructura exhibe un grano de forma y tamaño variables, siendo el valor medio de este último aproximadamente 50 – 75 μm (véase fotografía ampliada en Sachdev, 1990). El tamaño medio de grano del acero H340LAD es $6,19 \pm 2,47 \mu\text{m}$ (cortesía de D. Kitting).

	d_{neck} [μm]	d_{frac} [μm]	D [μm]
Acero 1008 AK	200	200	22 – 25
Latón 70/30	500	300	25 – 50
Aluminio 6010	500	450	50 – 75
Acero H340LAD	50	–	3,7 – 8,7

Tabla 5.5: Distancias críticas en los modos de fallo por estricción (d_{neck}) y fractura (d_{frac}) y tamaño medio de grano (D) para los materiales analizados

Una relación simple entre distancia crítica y microestructura es el número de granos en cada distancia crítica. La Tabla 5.6 muestra los valores de los cocientes d_{neck}/D y d_{frac}/D para cada material.

Para el acero 1008 AK, según los métodos propuestos de fallo controlado por

	d_{neck}/D	d_{frac}/D
Acero 1008 AK	8 – 10	8 – 10
Latón 70/30	10 – 20	6 – 12
Aluminio 6010	7 – 10	6 – 9
Acero H340LAD	6 – 13	–
Media	8 – 10	8 – 9

Tabla 5.6: Número de granos abarcado en las distancias críticas en el fallo por estricción (d_{neck}/D) y por fractura (d_{frac}/D) para los materiales analizados

una porción de material ($d_{neck} = d_{frac} = 200 \mu\text{m}$), ambos modos de fallo por estricción y por fractura dependen de lo que ocurre en unos espesores de 8 – 10 granos de material en las caras interna y externa de la chapa, respectivamente. En el caso del latón 70/30, si la estricción está controlada por un espesor $d_{neck} = 500 \mu\text{m}$, el número de granos en esta fracción de material está comprendido entre 10 y 20. En el fallo por fractura la fracción crítica de material es algo menor ($d_{frac} = 300 \mu\text{m}$), entre 6 y 12 veces el tamaño del grano. Para el aluminio 6010, la estricción ($d_{neck} = 500 \mu\text{m}$) está controlada por una fracción de material de 7 – 10 veces el tamaño de grano, y la fractura ($d_{frac} = 450 \mu\text{m}$) por 6 – 9 veces. Por último, en el acero H340LAD, la estricción está controlada por un espesor entre 6 y 13 veces el tamaño de grano ($d_{neck} = 50 \mu\text{m}$).

Como muestra claramente la Tabla 5.6, en todos los materiales analizados (acero 1008 AK, latón 70/30, aluminio 6010 y acero H340LAD) se obtienen unos valores aproximados de distancias críticas muy acotados. Tomando valores medios aproximados, la estricción está controlada por 8 – 10 veces el tamaño de grano y la fractura por 8 – 9 veces. Dada la diversidad de los tipos de material que se han analizado, parece razonable concluir que es acertada la idea propuesta en este trabajo, de que el fallo de la chapa está controlado por una fracción crítica de volumen independiente del espesor y que dicho tamaño crítico depende fundamentalmente de la microestructura del material. No obstante, es necesario un mayor trabajo experimental para confirmar definitivamente esta hipótesis y para establecer una relación más precisa del fallo con la microestructura.

5.3. Superficies límite de conformado

Como se comentó en el Capítulo 4, la superficie límite de conformado (SLC) proporciona una representación 3D de la superficie de fallo en ejes ε_1 - ε_2 - t/R , donde t/R refleja la severidad del gradiente de tensión/deformación en el espesor de la chapa. Las SLC que se muestran en este apartado se han calculado a partir de los diagramas límite de conformado en tensiones (DLCT) y en deformaciones (DLC) analizados anteriormente. En la mayoría de los materiales estudiados no se conocen suficientes resultados experimentales para poder establecer un DLC experimental completo (a través de las dos curvas límite de conformado de estricción localizada y de fractura dúctil). A falta de datos experimentales los DLC se han completado, cuando ha sido necesario, mediante algunos de los criterios de fallo expuestos en el Capítulo 1.

La Figura 5.20 muestra el DLC y el correspondiente DLCT, para las chapas de acero 1008 AK de 1,04 mm de espesor, las de latón 70/30 y las de aluminio 6010. Los diagramas para las chapas de acero 1008 AK de 0,92 y 0,69 mm de espesor no se exponen por brevedad. Los diagramas para el acero H340LAD ya han sido expuestos con anterioridad en las Figuras 5.17 y 5.18 (Apartado 5.2.4).

Como es habitual, en condiciones de deformación biaxial (cuadrante derecho del diagrama ε_1 - ε_2), la estricción localizada se ha estimado mediante el método de Marciniak y Kuczyński (1967) (método M-K), para los tres materiales representados en la Figura 5.20. De acuerdo con los resultados de Graf y Hosford (1990), el parámetro de imperfección del espesor (f_0) en la zona de estricción tomado ha sido $f_0 = 0,995$ para las chapas de acero 1008 AK, $f_0 = 0,988$ para las de latón 70/30 y $f_0 = 0,997$ para las de aluminio 6010.

En el cuadrante izquierdo de los DLC (valores negativos de ε_2) se ha usado el método de Hill (1952) para predecir la estricción en las chapas de acero 1008 AK y latón 70/30. En cambio, para el aluminio 6010 la curva límite de estricción se ha estimado a partir de la deformación medida en un ensayo de tracción ($\varepsilon_u = 0,2$, Sachdev, 1990), mediante una aproximación lineal similar a la que se obtiene con el método de Hill. Los datos experimentales se muestran en la Figura 5.20 mediante cuadrados sólidos.

En cuanto a las curvas límite de fractura, éstas se corresponden con las curvas de fractura dúctil empleadas en el apartado anterior, al estimar los límites de fallo en condiciones de deformación plana ($\varepsilon_{1,frac}$). Los resultados experimentales de los ensayos de Ayres (1983), Wagoner (1982) y Sachdev (1990) se muestran con un círculo sólido en la Figura 5.20. Como ya se discutió, los criterios utilizados son

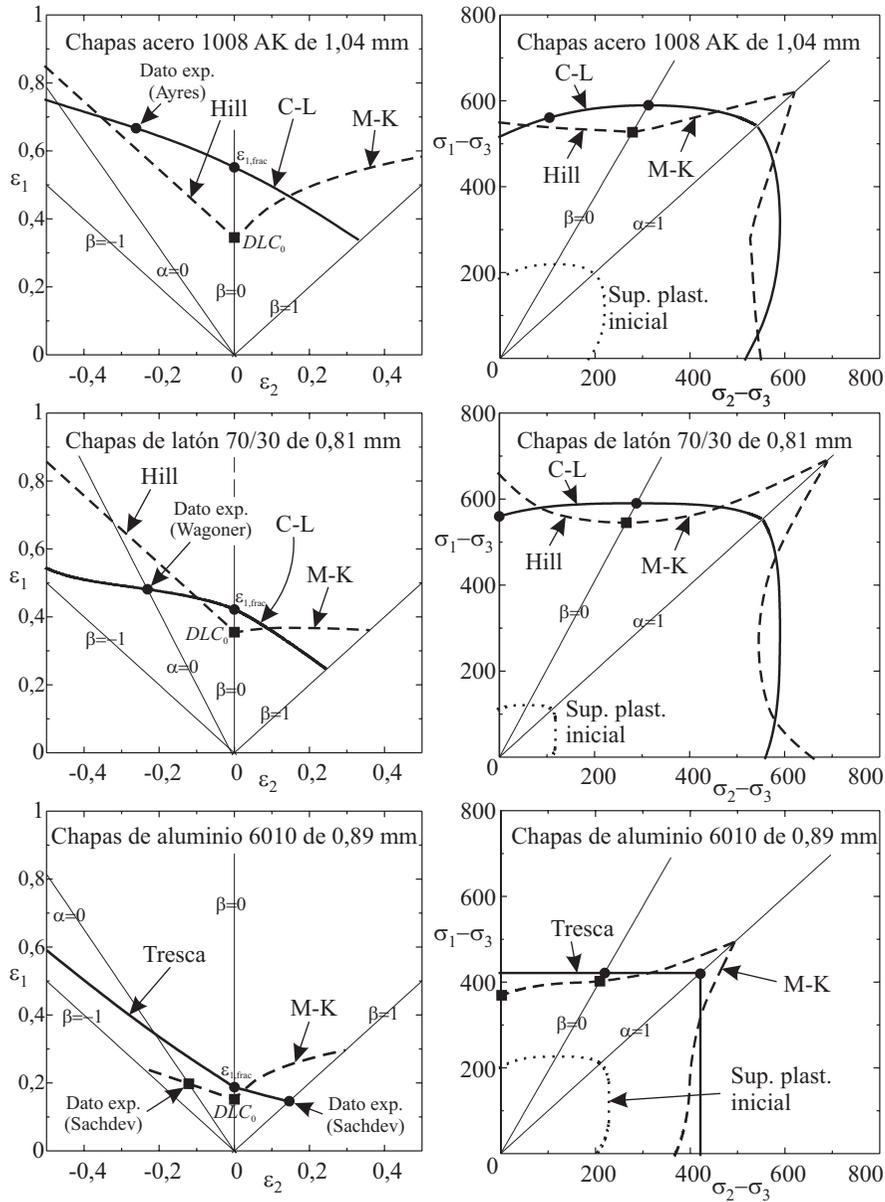


Figura 5.20: Diagramas límite de conformado en deformaciones (DLC, izquierda) y en tensiones (DLCT, derecha): superficies de plastificación inicial (.....) y curvas de fallo por estricción (---) y fractura (—).

los más adecuados a cada material. Así, el criterio de Cockcroft y Latham (1968) (C-L) se emplea en las chapas de acero 1008 AK y las de latón 70/30, y el criterio de Tresca se usa para las chapas de aluminio 6010.

Los DLCT de la Figura 5.20(derecha) se han calculado asumiendo el criterio de plastificación de Hosford (1979) y una ley de comportamiento plástico de tipo Hollomon ($\sigma_{eq} = K\varepsilon_{eq}^n$). Al igual que en los DLC, los puntos experimentales se representan mediante cuadrados sólidos para estricción y mediante círculos sólidos para fractura.

Como se aprecia en la Figura 5.20, la mayor conformabilidad del latón se refleja en el DLCT, dado el pequeño tamaño de la superficie de plastificación inicial y los valores relativamente altos de límite de fallo en tensiones. La menor conformabilidad la muestra el aluminio y se refleja en los relativamente bajos límites de fallo, sobre todo si se compara con el acero, donde el tamaño de la superficie de plastificación es similar.

Finalmente, se debe hacer notar que las estimaciones obtenidas del criterio de Hill y del método M-K dependen fuertemente del exponente de endurecimiento del material (n), siendo el límite de deformación principal máxima en condiciones de deformación plana igual o del orden de éste ($DLC_0 \approx n$). Sin embargo, el DLC_0 experimental difiere del exponente de endurecimiento (véase la Tabla 5.1, pág. 195). En las chapas de acero 1008 AK, el valor de DLC_0 es superior al predicho por ambos métodos de estricción localizada, mientras que en las chapas de latón 70/30 y en las de aluminio 6010 es inferior. Con objeto de incluir los valores experimentales en los correspondientes DLC de la Figura 5.20, las predicciones teóricas de la deformación principal máxima en el fallo han sido corregidas consecuentemente.

La Figura 5.21 muestra distintas secciones de las SLC para valores diferentes de t_0/R en las chapas de acero 1008 AK (1,04, 0,92 y 0,69 mm de espesor), las de latón 70/30, las de aluminio 6010 y las de acero de H340LAD. Para cuantificar el efecto de la flexión se ha considerado el espesor inicial de la chapa en vez del espesor actual (t/R), el cual depende del proceso de conformado. Como se puede observar, la curva de fallo para cada relación t_0/R se obtiene de la intersección de las correspondientes curvas de estricción y de fractura. Para las chapas de acero H340LAD se muestran solamente las curvas de fallo por estricción, al no tener datos de fractura para este material.

Es interesante resaltar que las curvas de fallo en la Figura 5.21 han sido calculadas en el rango máximo de valores $\beta^N = -1$ y $\beta^N = 1$ durante la segunda

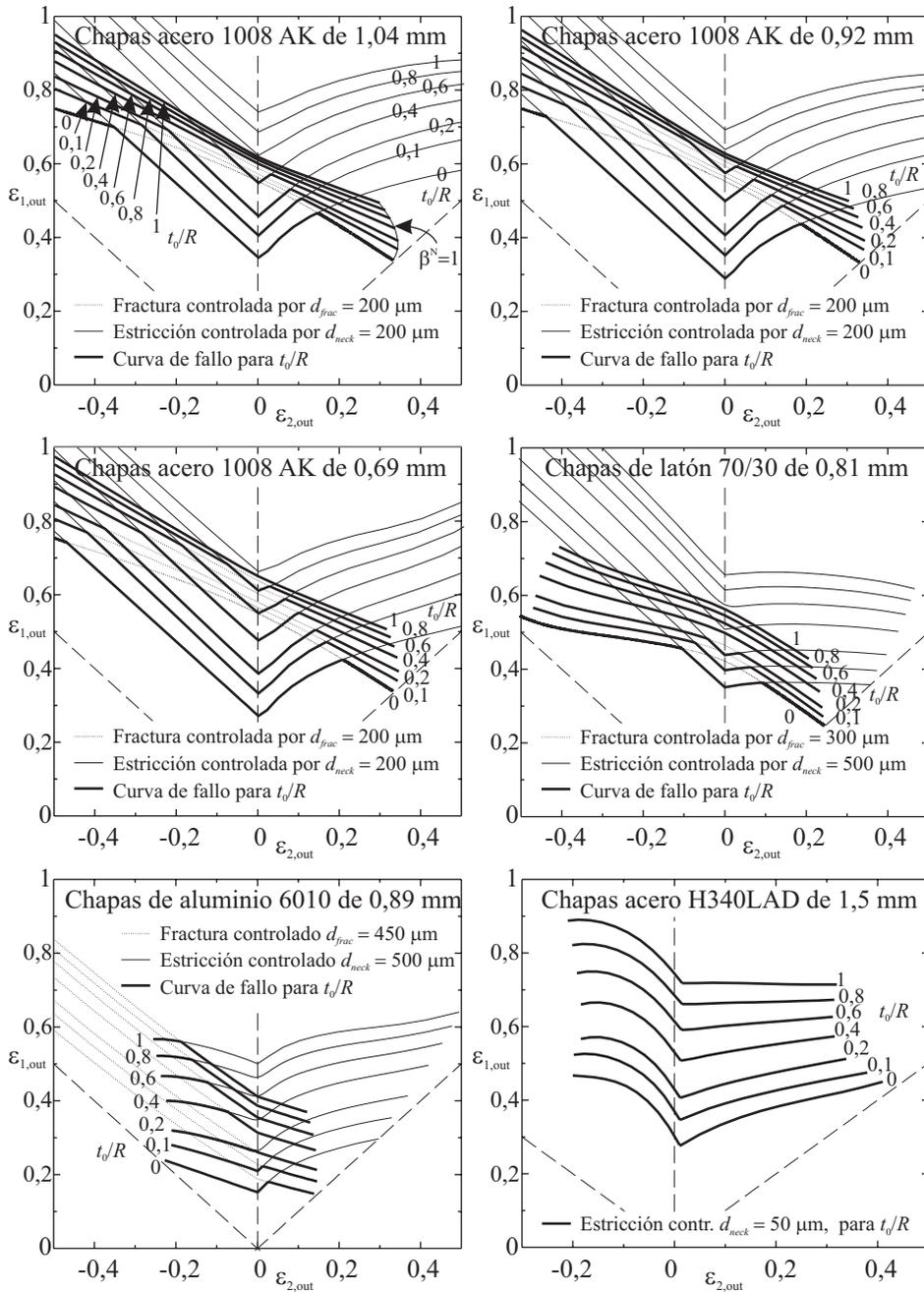


Figura 5.21: Evolución de las curvas límite de conformado para chapas de acero 1008 AK, latón 70/30, aluminio 6010 y acero H340LAD, en función de la relación t_0/R .

etapa en el modelo de flexión-tracción, siendo β^N la relación entre velocidades de deformación en la superficie media de la chapa. Debido al efecto de la flexión, la deformación principal máxima en la cara externa de la chapa en los mencionados valores extremos es mayor que la deformación menor. Por este motivo, los extremos de las curvas de fallo se van alejando de las pendientes -1 y 1 en los diagramas (nótese en el primer diagrama la curva señalada con $\beta^N = 1$), los cuales sólo son representativos de las condiciones de deformación en procesos de carga proporcional.

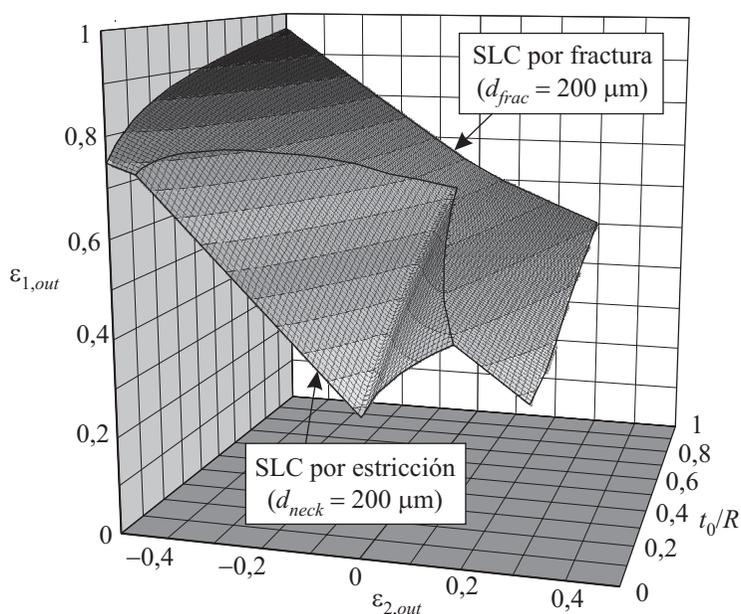


Figura 5.22: Superficie límite de conformado para chapas de acero 1008 AK de 0,92 mm.

Finalmente, como ejemplo ilustrativo, la Figura 5.22 muestra la superficie general de fallo en 3D para las chapas de acero 1008 AK de 0,92 mm de espesor, equivalente a la segunda gráfica de la Figura 5.21. De forma análoga a las curvas generales de fallo en 2D, la superficie general de fallo se ha obtenido mediante la intersección de las correspondientes superficies de estricción y de fractura (Vallellano *et ál.*, 2008a).

5.4. Análisis mediante diagramas MN

Además de los diagramas límite de conformado en deformaciones (DLC y SLC) y en tensiones (DLCT), los diagramas MN o diagramas flector-axil adimensionales constituyen otra herramienta complementaria a las anteriores para evaluar la conformabilidad de chapas en operaciones con esfuerzos combinados de flexión y tracción (Vallellano *et ál.*, 2008a; Morales *et ál.*, 2009). En particular, para los resultados experimentales analizados, se hará uso a continuación de los diagramas MN desarrollados con el modelo de carga flexión-tracción en dos pasos propuesto en el capítulo anterior.

La Figura 5.23 muestra los diagramas MN en condiciones de deformación plana ($\beta^M = \beta^N = 0$) para las chapas de acero 1008 AK, latón 70/30, aluminio 6010 y acero H340LAD. En cada diagrama MN se muestran las regiones P_E , P_{PE} , P'_P y P_P , la evolución flector-axil correspondiente al flector elástico máximo y la evolución flector-axil correspondiente a un radio de punzón nulo o de máxima curvatura teórica (para más detalles véase el Capítulo 3, apartados 3.3.5 y 3.3.6). También se muestran las curvas de fallo por estricción y por fractura para distintos valores de distancias críticas (d_{neck} y d_{frac}). En trazo grueso aparecen las curvas generales de fallo, obtenidas por intersección de las correspondientes curvas de estricción y fractura, para los valores de distancias críticas establecidos en los análisis anteriores. Los valores de d_{neck} y d_{frac} aparecen subrayados en cada diagrama.

Los diagramas MN proporcionan una información completa de la conformabilidad de las chapas en procesos de estirado con punzón. La capacidad del material para ser conformado se representa por el área encerrada por la curva de fallo y los ejes de abscisas y ordenadas. El eje de ordenadas representa operaciones de doblado mediante flexión pura y el eje de abscisas operaciones de estirado en el plano de la chapa mediante tracción pura. Obviamente, el fallo por estricción se produce en situaciones donde predomina la tracción, como muestra la localización cercana al eje de ordenadas del tramo de la curva de fallo correspondiente a la estricción en cada diagrama MN. Las áreas más grandes son indicativas de la mayor conformabilidad del material. Como se puede observar al comparar los distintos materiales, las chapas de latón 70/30 son las que muestran una mayor conformabilidad y las de acero H340LAD las que menos. Nótese en el último diagrama MN de la figura que se desconocen los datos de fractura del acero H340LAD, de manera que su conformabilidad será previsiblemente aún menor.

Para un análisis más detallado, el diagrama MN para las chapas de acero 1008 AK de 1,04 mm se muestra de nuevo en la Figura 5.24, al que se han incorporado

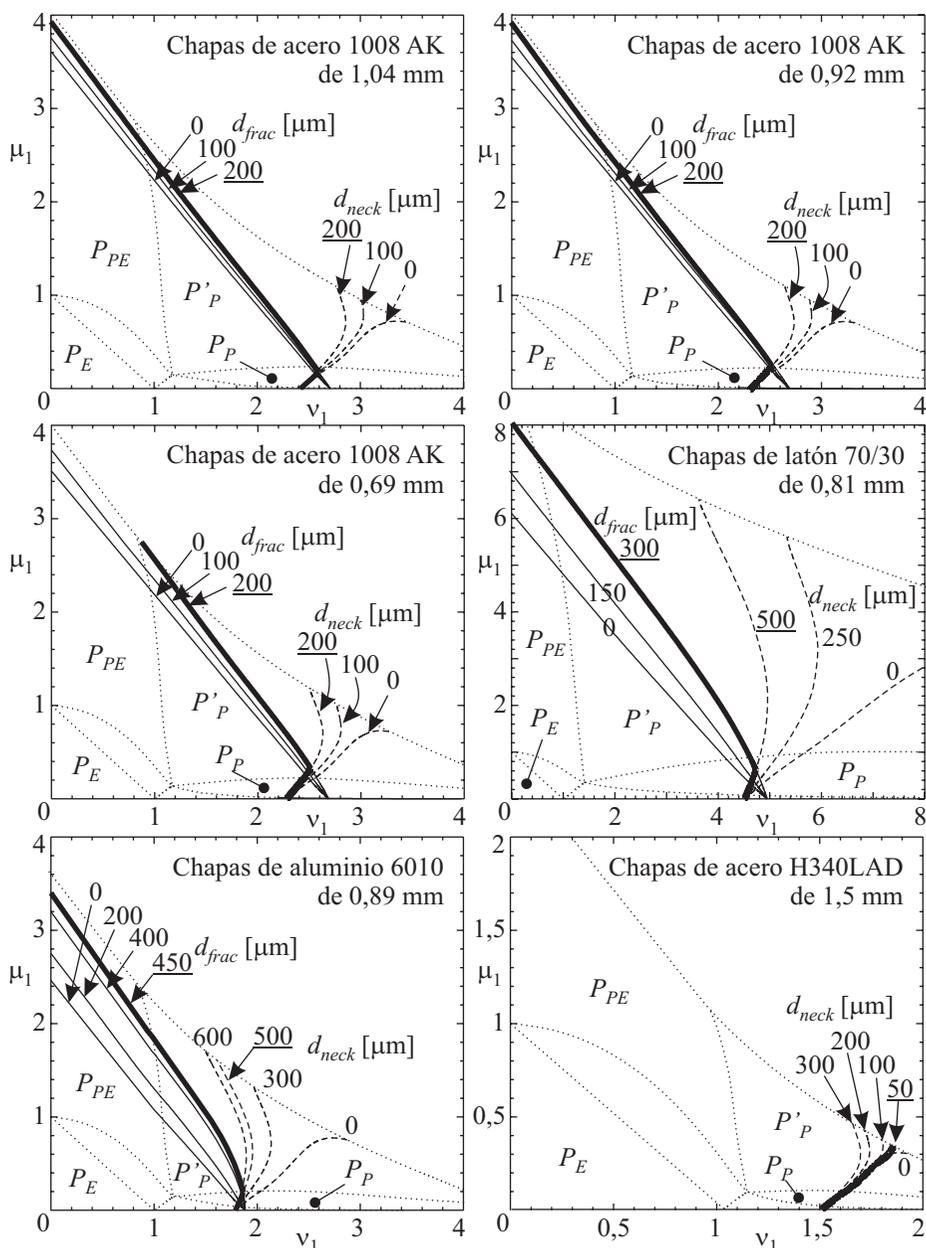


Figura 5.23: Diagramas MN en deformación plana: límites de transición entre patrones de tensiones (·····) y curvas de estricción (---) y fractura (—).

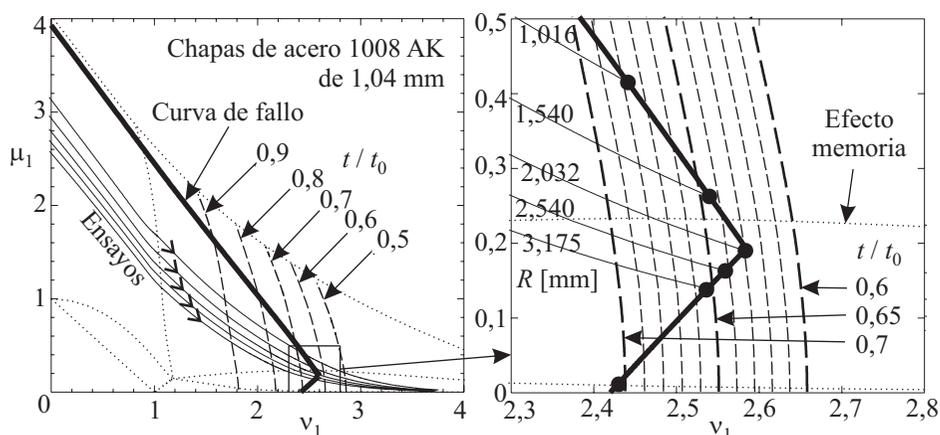


Figura 5.24: Diagrama MN en deformación plana para las chapas de acero 1008 AK de 1,04 mm de espesor: trayectorias flector-axil en los ensayos (—), reducción del espesor (---), límites de transición entre patrones de tensiones (·····) y curva general de fallo (—).

las trayectorias flector-axil con los radios de punzón utilizados en los ensayos y las curvas isoparamétricas de reducción de espesor ($\tau = t/t_0 = cte.$). Nótese cómo en la trayectoria flector-axil se reducen el espesor y el momento flector adimensional (μ_1) al aumentar el esfuerzo de tracción adimensional (ν_1). En la ampliación de la derecha se muestra la predicción del instante de fallo en cada ensayo mediante un punto grueso, el cual se corresponde con la intersección de la trayectoria con la curva de fallo. Como se puede observar, para cada ensayo el diagrama permite la estimación de la reducción de espesor y de los valores de axil y flector en el instante del fallo.

Los diagramas MN obtenidos con el modelo propuesto de flexión-tracción en dos pasos permiten identificar las situaciones en las que el material exhibe *efecto memoria* como consecuencia del cierre de ciclos tensión-deformación en aquellas fibras que han sufrido inversión en su deformación plástica. En la Figura 5.24(derecha) se muestra en línea de puntos las situaciones en las que se alcanza el efecto memoria. Así, se puede apreciar que, de los cinco ensayos ilustrados en la figura, solamente los tres con mayores radios de punzón intersectan dicha curva y el fallo se produce por tanto una vez alcanzado el efecto memoria. En los otros dos ensayos con radios menores, por el contrario, al no alcanzarse el efecto memoria la respuesta tensión-deformación del material en el instante del fallo diferirá de la del material virgen.

El modelado y análisis de la influencia de la energía almacenada en el material, al cerrar sucesivos ciclos de tensión-deformación, en el fallo por estricción localizada o fractura va más allá del objetivo de la presente tesis.

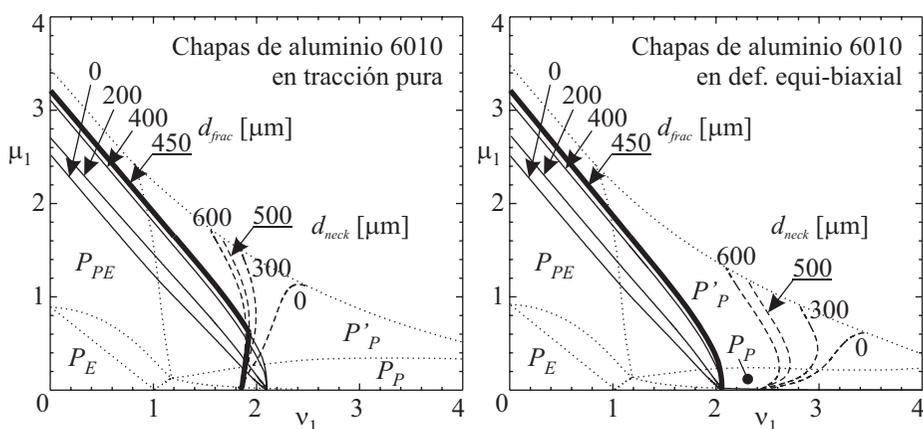


Figura 5.25: Diagramas MN en tracción pura y deformación equi-biaxial para chapas de aluminio 6010: límites de transición entre patrones de tensiones (·····) y curvas de fallo por estricción (---), fractura (—) y general (—■—).

Todos los diagramas MN anteriores han sido obtenidos en condiciones de deformación plana. La Figura 5.25 muestra otros dos diagramas MN para el aluminio 6010, en condiciones de tracción pura y deformación equi-biaxial, respectivamente. Para este material se conocen medidas experimentales, presentadas anteriormente, del fallo por estricción en tracción pura y del fallo por fractura en deformación equi-biaxial. De esta manera, las previsiones en estas condiciones de conformado serán teóricamente mejores que en otras basadas en estimaciones del fallo. Dichas condiciones se han impuesto en la segunda etapa o etapa de tracción en el modelo de carga propuesto ($\alpha^N = 0$ y $\beta^N = 1$, respectivamente), dado que en la primera etapa o etapa de flexión las condiciones de deformación vienen impuestas por la forma del punzón.

Como se aprecia en los tres diagramas MN para el aluminio 6010 de las Figuras 5.23 y 5.25, los límites de transición entre patrones de tensiones son prácticamente los mismos. En cambio, como era de esperar, las curvas de fallo cambian al variar las condiciones de deformación (β^N). Básicamente, tanto las curvas de estricción como las de fractura se desplazan en el eje de abscisas, además de variar ligeramente su forma, en especial las de estricción. Nótese en las tres curvas generales de fallo

cómo en tracción pura el tramo correspondiente al fallo por estricción es mayor que en deformación plana, *i.e.* el modo de fallo por estricción se predice para una flexión más severa, mientras que en deformación equi-biaxial el fallo se produce siempre por fractura.

5.5. Comparativa de criterios de fluencia

Para las predicciones realizadas en esta tesis se ha empleado el criterio de plastificación no cuadrático de Hosford (1979). Las principales ventajas de dicho criterio son su sencillez y la posibilidad de reproducir el comportamiento de diversos materiales ajustando apropiadamente su exponente. No obstante, existen en la literatura multitud de criterios de plastificación, desde los más simples como los de Mises para materiales isótropos y Hill (1979) cuadrático para anisótropos, hasta los criterios de Barlat *et ál.* (1997, 2003, 2005) o aquellos basados en plasticidad cristalina. En lo que sigue se realiza un análisis sobre la influencia del criterio de plastificación en las predicciones obtenidas. Para ello, se comparan los resultados actuales con aquellos obtenidos con los criterios de Mises y Hill cuadrático, al ser los más simples y extendidos en la literatura y *software* de análisis por elementos finitos.

La Figura 5.26 muestra las curvas de plastificación inicial en el espacio de las tensiones (DLCT) obtenidas mediante los criterios de plastificación de Mises, Hill y Hosford, para todos los materiales analizados. Como se puede observar, el criterio de plastificación influye en la forma de la curva de plastificación de todos los materiales. En especial, el criterio de Hill difiere significativamente de los de Mises y Hosford en las chapas de acero 1008 AK (prácticamente iguales en los tres espesores) y en las de aluminio 6010. Además, el criterio de plastificación también alterará la evolución del estado tensional durante el conformado, a través de la relación entre tensiones (α , véase el Apéndice A).

Las Figuras 5.27 y 5.28 muestran en un DLCT para cada material analizado las curvas de fallo por estricción y por fractura, respectivamente, en el espacio de las tensiones (DLCT) obtenidas mediante los mismos criterios de plastificación anteriores. Por claridad en la exposición, tanto las curvas de plastificación inicial como las de cada modo de fallo se muestran en diagramas separados. Como era de esperar, las curvas de fallo también dependen del criterio de plastificación. En general se observa que, dadas unas condiciones de conformado, un mayor límite de plastificación conlleva un mayor límite de fallo. Al comparar las tres chapas de

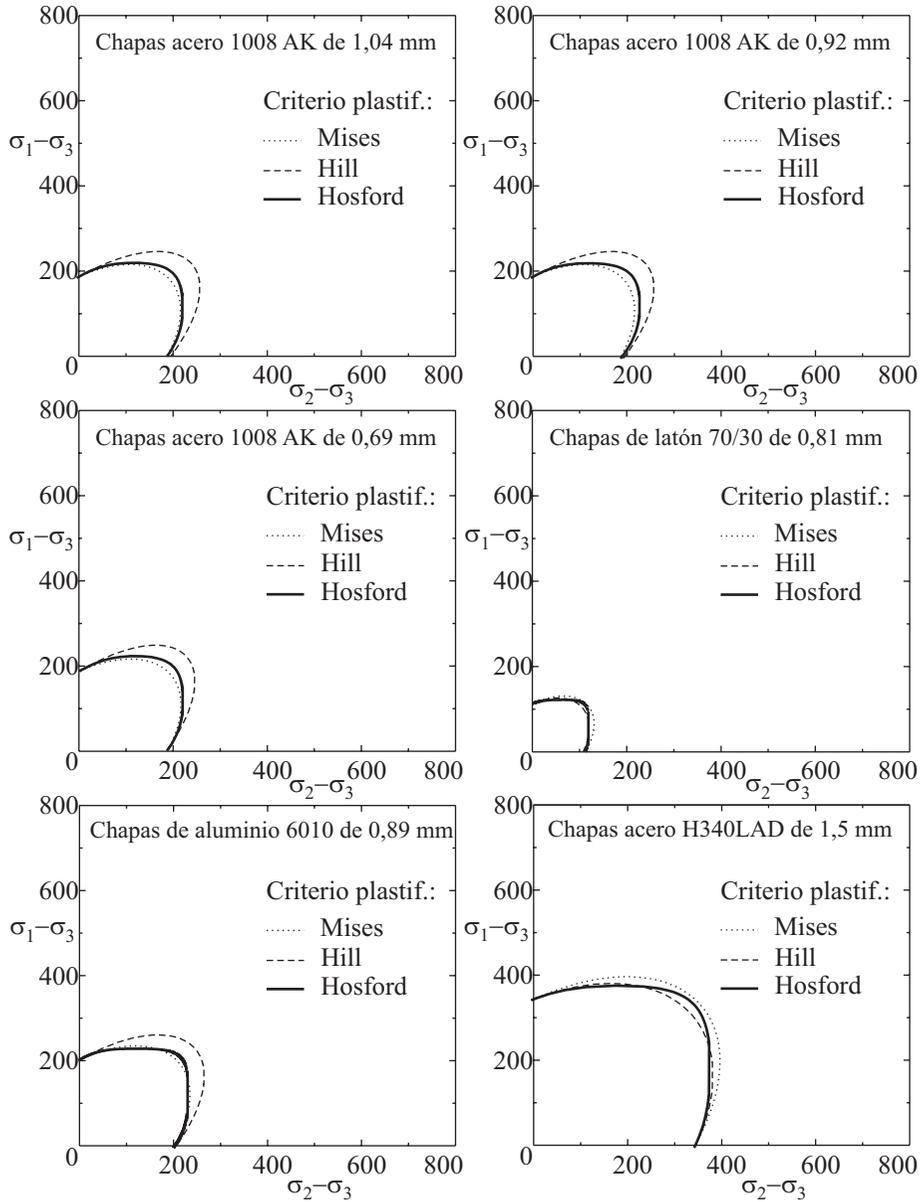


Figura 5.26: Diagramas límite de conformado en tensiones (DLCT) para distintos criterios de fluencia: curvas de plastificación inicial.

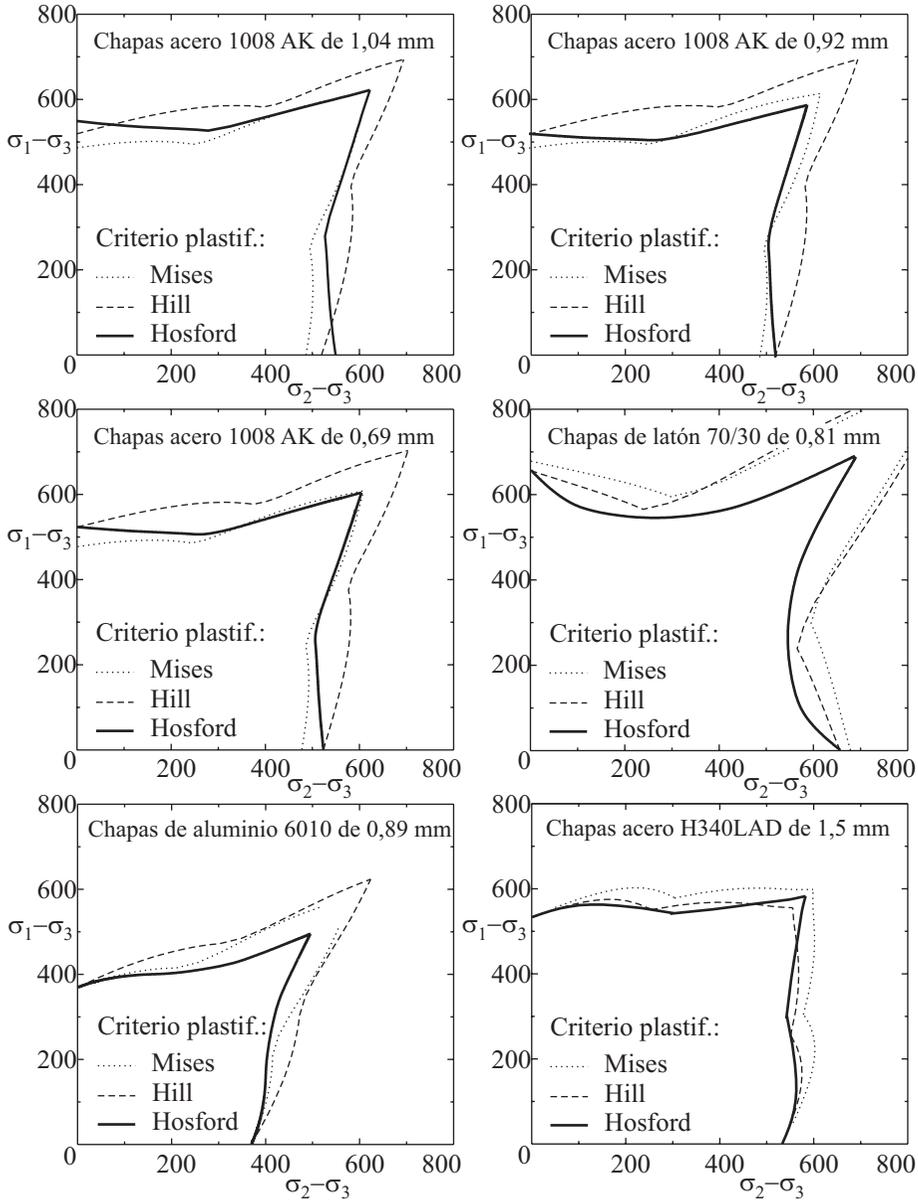


Figura 5.27: Diagramas límite de conformado en tensiones (DLCT) para distintos criterios de fluencia: curvas de fallo por estricción localizada.

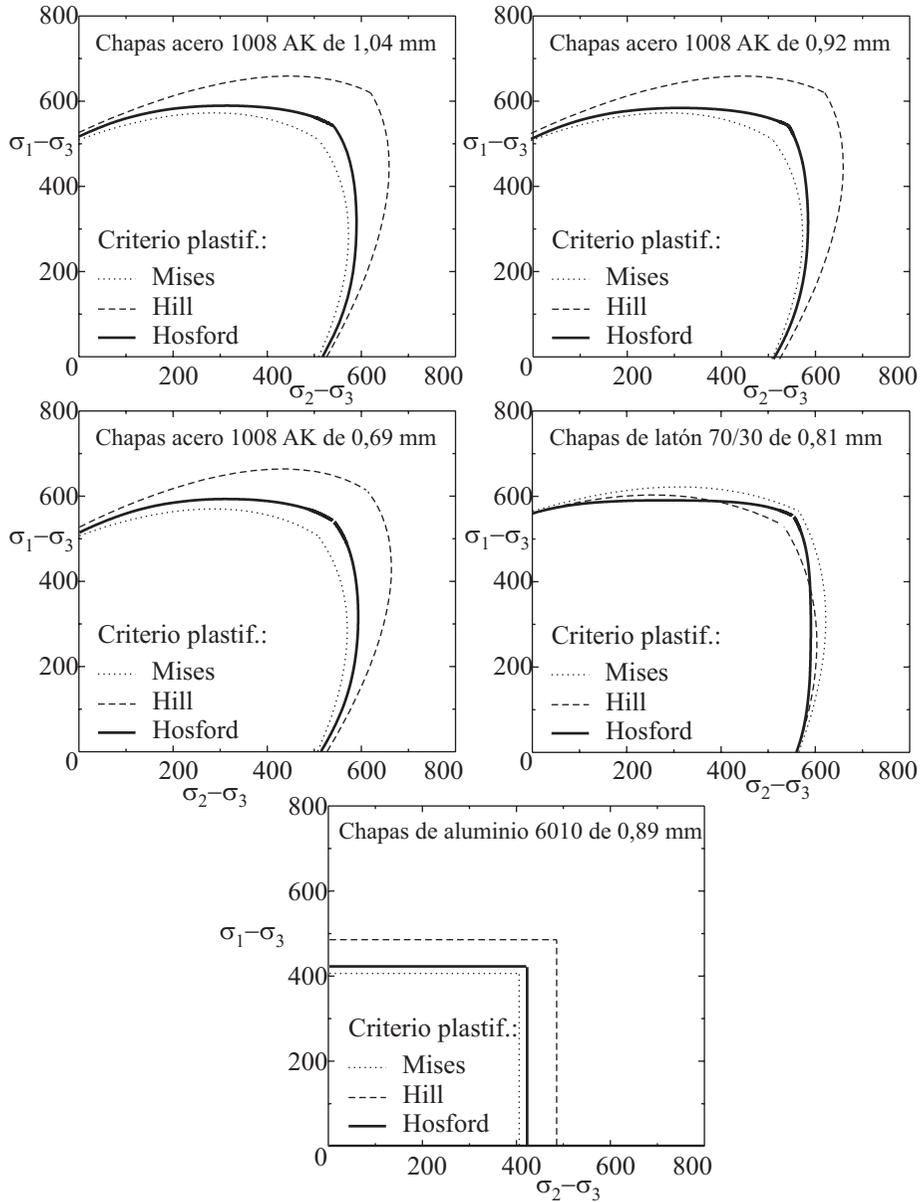


Figura 5.28: Diagramas límite de conformado en tensiones (DLCT) para distintos criterios de fluencia: curvas de fallo por fractura dúctil.

acero 1008 AK se observa que las diferencias en todas las curvas son mínimas.

En todos los materiales, las curvas de estricción (Figura 5.27) presentan una tensiones sin fallo mayores en condiciones de tensión equi-biaxial ($\alpha = 1$). También se observa que, con la excepción del aluminio 6010, las curvas de estricción presentan un vértice en condiciones de deformación plana ($\alpha \approx 0,5$), correspondiente al vértice DLC_0 en los DLC (véase las Figuras 5.16 y 5.20). En cuanto al fallo por fractura (Figura 5.28), en todos los casos se obtienen curvas más suaves, con formas variando entre la curva ampliada de plastificación y la lineal del criterio de Tresca, como es el caso del aluminio 6010. Nótese en todos los materiales que las diferencias en la predicción del fallo utilizando un criterio de plastificación u otro pueden ser considerables, llegando a superar los 200 MPa dependiendo de las condiciones del proceso.

A pesar de las grandes diferencias señaladas en tensiones en la predicción del fallo, éstas se convierten en despreciables en el espacio de las deformaciones. En efecto, nótese que los DLCT se calculan a partir de los valores límite de deformación en procesos en ausencia de flexión (DLC tradicionales), bien experimentales o bien estimados a partir de valores experimentales. Así, el proceso de cálculo parte del DLC en el plano para generar el DLCT, evalúa el modelo de fallo en tensiones para una operación de estirado con flexión y *regresa* al espacio de las deformaciones para evaluar la conformabilidad de la chapa. En ambos sentidos de cálculo, deformación-tensión y tensión-deformación, se utiliza el mismo criterio de plastificación, de manera que su efecto es de segundo orden (Stoughton, 2000, 2001).

Como se puede apreciar, las predicciones de deformación límite de fallo en las chapas de acero 1008 AK, latón 70/30 y aluminio 6010, son distintas dependiendo del criterio de plastificación. Para el acero H340LAD, en cambio, las predicciones no varían debido a que se disponía del DLC experimental. Se puede concluir que la correcta elección del modelo de plastificación es determinante cuando se estima el DLC mediante los métodos tradicionales de predicción de fallo.

Bibliografía

- Ayres RA (1983). *Evaluating hardening laws at large tensile strains in sheet specimens*. Metallurgical and Materials Transactions A 14(11):2269–2275
- Ayres RA (1984). *SHAPESET: a process to reduce sidewall curl springback in High-Strength Steel rails*. Journal Applied Metalworking 3(2):127–134

- Barlat F, Maeda Y, Chung K, Yanagawa M, Brem JC, Hayashida Y, Lege DJ, Matsui K, Murtha SJ, Hattori S, C BR, Makosey S (1997). *Yield function development for aluminum alloy sheets*. Journal of the Mechanics and Physics of Solids 45:1727–1763
- Barlat F, Brem JC, Yoon JW, Chung K, Dick RE, Lege DJ, Pourboghrat F, Choi SH, Chu E (2003). *Plane stress yield function for aluminum alloy sheet. Part I: theory*. International Journal of Plasticity 19:1297–1319
- Barlat F, Aretz H, Yoon JW, Karabin ME, Brem JC, Dick RE (2005). *Linear transformation-based anisotropic yield functions*. International Journal of Plasticity 21:1009–1039
- Cockcroft MG, Latham DJ (1968). *Ductility and the workability of metals*. Journal of the Institute of Metals 96(2):33–39
- Demeri MY (1981a). *The formability of a dual phase steel*. Metallurgical Transactions A 12:1187–1196
- Demeri MY (1981b). *The stretch bending of sheet metal*. Journal Applied Metalworking 2(1):3–10
- Freudenthal AM (1950). *The inelastic behavior of engineering materials and structures*. John Wiley & Sons
- Graf AF, Hosford WF (1990). *Calculations of forming limit diagrams*. Metallurgical and Materials Transactions A 21(1):87–94
- Han HN, Kim KH (2003). *A ductile fracture criterion in sheet metal forming process*. Journal of Materials Processing Technology 142(1):231–238
- Hill R (1952). *On discontinuous plastic states, with special reference to localized necking in thin sheets*. Journal of the Mechanics and Physics of Solids 1(1):19–30
- Hill R (1979). *Theoretical plasticity of textured aggregates*. Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society 85:179–191
- Hosford WF (1979). *On yield loci of anisotropic cubic metals*. En: Proc. 7th North America Metalworking Conference S.M.E., Dearborn, Michigan, U.S.A., p. 191
- Jain M, Allin J, Lloyd D (1999). *Fracture limit prediction using ductile fracture criteria for forming of an automotive aluminum sheet*. International Journal of Mechanical Sciences 41(10):1273–1288

- Kitting D, Ofenheimer A, Jain M, Pauli H, Rabler G (2008). *Experimental characterisation of failure of stretch-bend steel sheets*. En: Proc. 7th International Conference and Workshop on Numerical Simulation of 3D Sheet Metal Forming Processes, Numisheet 2008, Interlaken, Switzerland, pp. 315–320
- Kitting D, Ofenheimer A, Pauli H, Till ET (2009a). *Application of a “Concave-Side Rule” approach for assessing formability of stretch-bend steel sheets*. International Journal of Material Forming 2, Supp. 1:427–430
- Kitting D, Ofenheimer A, Pauli H, Till ET (2009b). *Forming limits of stretch-bend steel sheets*. En: Proc. Congress of the International Deep Drawing Research Group, IDDRG, Golden, Colorado, USA, pp. 425–435
- Kitting D, Ofenheimer A, Pauli H, Till ET (2010). *A phenomenological concept to predict formability in stretch-bending forming operations*. En: Proc. 13th International ESAFORM Conference on Material Forming, Brescia, Italy
- Marciniak Z, Kuczyński K (1967). *Limit strains in the processes of stretch-forming sheet metal*. International Journal of Mechanical Sciences 9:609–620
- Morales D, Martínez-Donaire AJ, Vallellano C, García-Lomas FJ (2009). *Bending effect in the failure of stretch-bend metal sheets*. International Journal of Material Forming 2, Supp. 1:813–816
- Morales D, Vallellano C, Martínez-Donaire AJ, García-Lomas FJ (2010). *Prediction of forming limit strains in metal sheets under stretch-bending conditions*. Steel Research International, Special Edition Metal Forming 2010 81(a):781–784
- Ozturk F, Lee D (2004). *Analysis of forming limits using ductile fracture criteria*. Journal of Materials Processing Technology 147(3):397–404
- Sachdev AK (1990). *Development of an aluminum sheet alloy with improved formability*. Metallurgical Transactions A 21A:165–176
- Sadagopan S, Wong C, Huang M, Yan B, Urban D (2003). *Formability characterization of a new generation of high strength steels*. Final report, AISI/DOE Technology Roadmap Program
- Stoughton TB (2000). *A general forming limit criterion for sheet metal forming*. International Journal of Mechanical Sciences 42:1–27

- Stoughton TB (2001). *Stress-based forming limits in sheet-metal forming*. Journal of Engineering Materials and Technology 123:417–422
- Takuda H, Fujimoto H, Kuroda Y, Hatta N (1997a). *Finite element analysis of formability of a few kinds of special steel sheets*. Steel Research 68(9):398–402
- Takuda H, Mori K, Fujimoto H, Hatta N (1997b). *Fracture prediction in stretch forming using finite element simulation combined with ductile fracture criterion*. Archives of Applied Mechanics 67(3):143–150
- Takuda H, Mori K, Takakura N, Yamaguchi K (2000). *Finite element analysis of limit strain in biaxial stretching of sheet metals allowing for ductile fracture*. International Journal of Mechanical Sciences 42(4):785–798
- Tharrett MR, Stoughton TB (2003a). *Stretch-bend forming limits of 1008 AK steel*. SAE paper 2003-01-1157
- Tharrett MR, Stoughton TB (2003b). *Stretch-bend forming limits of 1008 AK steel, 70/30 brass, and 6010 aluminum*. Internal report, Society of Automotive Engineers
- Vallellano C, Guzmán C, García-Lomas FJ (2006). *Failure prediction in stretched sheets of aluminium 2024-T3*. Material Science Forum 256(1):91–96
- Vallellano C, Morales D, García-Lomas FJ (2008a). *On the study of the effect of bending in the formability of metal sheets*. En: Proc. 7th International Conference and Workshop on Numerical Simulation of 3D Sheet Metal Forming Processes, Numisheet 2008, Interlaken, Switzerland, pp. 85–90
- Vallellano C, Morales D, García-Lomas FJ (2008b). *A study to predict failure in biaxially stretched sheets of aluminum alloy 2024-T3*. Materials and Manufacturing Processes 23(3):303–310
- Vallellano C, Morales D, Martínez-Donaire AJ, García-Lomas FJ (2010). *On the use of Concave-Side Rule and Critical-Distance Methods to predict the influence of bending on sheet-metal formability*. International Journal of Material Forming 3, Supp. 1:1167–1170
- Vial C (1988). *Yield locus of 70/30 brass sheet metals*. International Journal of Mechanical Sciences 30(2):137–143

Wagoner RH (1982). *Plastic behavior of 70/30 brass sheet*. Metallurgical Transactions A 13A:1491–1500

Zadpoor AA, Sinke J, Benedictus R (2009). *Formability prediction of high strength aluminum sheets*. International Journal of Plasticity 25(12):2269–2297

Capítulo 6

Conclusiones finales

A continuación se resumen las conclusiones más destacadas de esta tesis. También se indican los posibles desarrollos futuros que pueden realizarse a partir del trabajo efectuado.

6.1. Conclusiones

En la presente tesis se ha analizado el efecto de la flexión en la conformabilidad de chapas metálicas considerando los dos modos de fallo más comunes en la práctica: la estricción localizada y la fractura dúctil. El mecanismo de deformación de la chapa en la zona del fallo se ha modelado fundamentalmente bajo acciones combinadas de tracción y flexión. Se han tenido en cuenta simultáneamente, a diferencia de otros trabajos, diversos factores como la doble curvatura, la anisotropía del material, las variaciones de las tensiones y deformaciones en el espesor y el camino de deformación de cada fibra. Se ha desarrollado un primer modelo de carga proporcional, apropiado para operaciones de abombamiento hidráulico (*bulge*). No obstante, el estudio se ha centrado básicamente en las operaciones de estirado con punzón, debido a que son las que habitualmente se utilizan para estudiar experimentalmente el efecto de la flexión en el fallo. Para estas operaciones se ha propuesto un modelo de carga flexión-tracción en dos pasos en condiciones de tensión plana y válido, por tanto, para radios de curvatura que exceden aproximadamente cuatro veces el espesor de la chapa. El efecto de la tensión transversal en el espesor también ha sido considerado pero sólo para condiciones de deformación plana, en cuyo caso ha sido posible obtener una solución analítica. Haciendo

uso de dicho modelo se plantea una descripción del fallo de la chapa basada en la combinación de los recientes conceptos de Reglas de las Caras Cóncava y Convexa con las ideas clásicas de Distancias Críticas, ampliamente usadas para caracterizar el efecto de los gradientes de tensiones en diversos mecanismos de fallo (fatiga, fractura, etc.). La descripción planteada permite conjeturar con cierta base física sobre la relación entre la conformabilidad y la microestructura del material.

La primera conclusión importante que se extrae de este trabajo es que, en condiciones de flexión, los modos de fallo de estricción localizada y de fractura dúctil son independientes. En general, que ocurra uno u otro depende de la severidad del gradiente de tensión/deformación en el espesor, además de otros efectos ya conocidos como la ductilidad del material y las condiciones de deformación. Así, en situaciones donde predomina la tracción la estricción es el mecanismo de fallo más probable. En cambio, cuando el gradiente de tensión/deformación es suficientemente severo, el fallo se producirá por fractura dúctil en la superficie más deformada de la chapa.

Haciendo uso de estas ideas, la capacidad de predicción del modelo propuesto ha sido evaluada de manera satisfactoria mediante resultados experimentales obtenidos de la literatura. Se han analizado un total de cuatro materiales diferentes entre los que se encuentran aceros, aluminio y bronce. Las relaciones de doblado R/t_0 han variado entre 3 y 13 aproximadamente. La conformabilidad de estos materiales, incluido el efecto de la flexión, se ha caracterizado mediante superficies límite de conformado, recientemente propuestas en la literatura. Otras herramientas de análisis empleadas han sido los diagramas límite de conformado en deformaciones y en tensiones, así como los diagramas MN. Estos últimos han sido perfeccionados en este trabajo para incluir los modos de fallo por estricción y fractura y el efecto del camino de deformación de las fibras en el espesor de la chapa.

6.1.1. Modelado del proceso de deformación

Los dos modelos de carga desarrollados, proporcional y de flexión-tracción en dos pasos, muestran la importancia de considerar adecuadamente el proceso de deformación en operaciones de conformado de chapa en las que existen gradientes de tensión/deformación en el espesor. El modelo de carga proporcional ha mostrado que la proporcionalidad en la evolución de las tensiones y deformaciones conlleva un conformado de la chapa como el que se produce en los procesos de abombamiento. El segundo modelo desarrollado, de flexión-tracción en dos pasos,

es un modelo original del presente trabajo y ha sido propuesto a partir de las observaciones experimentales descritas en la literatura al analizar la conformabilidad de chapas en operaciones de estirado con punzones de forma. El mayor efecto de la flexión observado en los primeros instantes de estas operaciones se ha modelado mediante una primera etapa de flexión pura hasta que la chapa se adapta a la forma del punzón. Esta es seguida de una segunda etapa de tracción pura hasta el fallo de la chapa. Dicho modelo ha permitido poner de manifiesto el proceso compresión-tracción que se produce en las fibras en la cara interna de la chapa, cuyo efecto es mayor cuanto más pequeño es el radio del punzón. La evolución de estas fibras ha sido descrita asumiendo un endurecimiento cinemático del material. Las predicciones realizadas con este modelo de la deformación y de la reducción de espesor se ajustan muy razonablemente a los resultados experimentales analizados.

A juicio del autor, la consideración expresa de la inversión de la deformación en las operaciones de estirado con punzón supone otra aportación original importante de esta tesis. Hasta donde el autor ha podido analizar, dicha inversión y su efecto son generalmente obviados en los análisis existentes en la literatura. El análisis detallado del efecto de estos ciclos de carga-descarga en el mecanismo de fallo de chapa se escapa del objetivo inicial del presente trabajo, abriendo no obstante una interesante vía de desarrollo futuro.

6.1.2. Modelado del fallo

Los denominados Métodos de Distancias Críticas han proporcionado una aproximación adecuada para estudiar las condiciones necesarias que concurren en la iniciación de la estricción localizada o de la fractura dúctil en el conformado de chapa donde existen esfuerzos de flexión. Una de las ideas importantes que se desprenden de estos modelos y que pueden aplicarse al fallo de chapas en presencia de gradientes de deformación es que la resistencia al fallo del material está principalmente influenciada por el estado tensional en un volumen crítico de material. La otra idea relevante es que el tamaño de este volumen crítico, representado a través de una cierta distancia crítica desde la superficie de la chapa, presenta una clara dependencia con el tipo de material empleado, especialmente con su tamaño microestructural (*e.g.* el tamaño de grano).

De acuerdo con las ideas adoptadas se ha postulado que cada uno de los dos modos de fallo de chapa, estricción y fractura, está controlado por la resistencia al fallo de un volumen crítico de material diferente. En el fallo por estricción la última resistencia a la inestabilidad plástica la ofrece el volumen de material

menos deformado, *i.e.* el material situado en el cara interna de la chapa. Dicho volumen crítico se ha caracterizado mediante una distancia crítica a la cara interior. En el caso de la fractura, el fallo está controlado por la resistencia a la fractura del material más deformado, cuyo volumen crítico se ha descrito mediante una distancia crítica medida desde la cara externa de la chapa.

Para modelar el fallo de chapa se han investigado las ideas de dos Métodos de Distancias Críticas, denominados Método de la Línea y Método del Punto. En este trabajo se ha considerado que el fallo por estricción se ajusta mejor mediante el Método de la Línea, dado que parece razonable asumir que todo el volumen crítico del material menos deformado contribuye en la inestabilidad plástica. Así, el fallo por estricción se ha modelado asumiendo que éste está controlado por el valor promedio de una tensión efectiva en una distancia crítica a la cara interna de la chapa. En cambio, en la fractura superficial no está tan claro que exista una contribución similar de todo el volumen crítico del material más deformado en el mecanismo de fractura, de manera que para este modo de fallo se han adoptado las ideas del Método del Punto. De esta forma, la fractura se ha modelado asumiendo que el fallo está controlado por el valor local de una tensión efectiva a una distancia crítica a la cara externa de la chapa. En cualquier caso, la elección de uno de los dos Métodos de Distancias Críticas o de cualquier otro que permita describir el fallo de una chapa es un problema abierto a futuras propuestas.

En ambos modos de fallo se ha usado como tensión característica de fallo la diferencia entre la tensión principal máxima y la tensión transversal en el espesor ($\sigma_1 - \sigma_3$). La elección de esta variable no es nueva y ha sido utilizada en la literatura por diferentes investigadores con resultados satisfactorios. El modelado del fallo en términos de tensiones es otro factor diferenciador de esta tesis respecto a otros trabajos anteriores. Dichos trabajos predicen el fallo basándose en límites de la deformación, mientras que el modelo de fallo propuesto permite minimizar el efecto de la no proporcionalidad en el camino de deformación, lo cual tiene una especial relevancia en las fibras que invierten su deformación en la cara interior de la chapa.

El análisis de los resultados experimentales de acuerdo con el modelo de fallo propuesto muestra que las distancias críticas en ambos modos de fallo están en clara relación con la microestructura del material. Se concluye que el fallo por estricción está controlado por un volumen de material aproximado de entre 8 y 10 veces el tamaño de grano en la cara interna de la chapa. De manera similar, se concluye que el fallo por fractura está controlado por un volumen de material en la cara externa de 8 o 9 granos, aproximadamente. Las predicciones mejoran

considerablemente las obtenidas aplicando simplemente las Reglas de las Caras Cóncava y Convexa.

Por último, hay que hacer observar que aunque la aproximación realizada para predecir el fallo por estricción difiere de los métodos tradicionales basados en una bifurcación de la solución en las ecuaciones (véase el Capítulo 1), ambas no son mutuamente excluyentes. En particular, se ha comprobado que las predicciones realizadas con el modelo propuesto y con la condición de axil máximo pueden ser igual de precisas (véase el Apartado 4.5). La principal ventaja del enfoque adoptado frente al de bifurcación es que las predicciones de fallo parecen ser realistas al estar basadas en medidas experimentales, mientras que ninguno de los métodos de bifurcación está universalmente aceptado.

6.2. Trabajos futuros

Una primera vía de desarrollo futuro podría ser el análisis y modelado del efecto en el fallo por estricción de la chapa de la energía almacenada en el material durante la inversión de la deformación en ciertas fibras interiores en las operaciones de estirado con punzón. Como ya ha sido expuesto, dicha energía se almacena al cerrarse los sucesivos ciclos tensión-deformación en el material en la cara interna de la chapa, zona más próxima al punzón. Esta energía será mayor cuanto menor sea el radio del punzón. El estudio debería incluir una descripción apropiada de dichos ciclos tensión-deformación. En particular, la regla de endurecimiento cinemático puro utilizada en esta tesis es susceptible de ser mejorada mediante un modelo más realista, presumiblemente asumiendo una regla de endurecimiento combinado cinemático-isótropo acorde al comportamiento del material. Para ello se hace necesaria una caracterización adecuada del comportamiento cíclico del material mediante ensayos de compresión-tracción de las chapas.

Por otro lado, también sería interesante un estudio a nivel microestructural de los fenómenos físicos que concurren en el fallo por estricción y fractura. Así, una descripción más realista de ambos modos de fallo permitiría dilucidar el método más apropiado para modelar el fallo bajo gradientes de tensión/deformación, *e.g.* basado en el Método de la Línea, en el Método del Punto o en cualquier otro de los existentes. Dicho estudio permitiría asimismo una mejor estimación de la correlación entre la conformabilidad del material y su microestructura.

Por último, la extensión natural de las ideas desarrolladas en esta tesis es su aplicación a nivel industrial para el análisis de operaciones de conformado de chapa

donde existen combinaciones de esfuerzos de tracción y flexión. El primer paso de este ambicioso objetivo es la implementación de las técnicas presentadas en este trabajo en alguno de los códigos numéricos actuales, *e.g.* de elementos finitos, que día a día se están integrando como una herramienta habitual de trabajo en el ámbito del conformado plástico.

Apéndice A

Criterios de plastificación en tensión plana

En tensión plana y en direcciones principales, los estados de tensión y deformación plástica en un material rígido-plástico pueden ser expresados en función de σ_1 y $d\varepsilon_1$ como:

$$\begin{array}{lll} \sigma_1 & \sigma_2 = \alpha\sigma_1 & \sigma_3 = 0 \\ d\varepsilon_1 & d\varepsilon_2 = \beta d\varepsilon_1 & d\varepsilon_3 = -(1 + \beta)d\varepsilon_1 \end{array} \quad (\text{A.1})$$

donde las condiciones de tensión/deformación vienen dadas por las relaciones:

$$\alpha = \frac{\sigma_2}{\sigma_1} \quad , \quad \beta = \frac{d\varepsilon_2}{d\varepsilon_1} \quad (\text{A.2})$$

El criterio de plastificación permite establecer las siguientes relaciones entre variables y que son funciones de los parámetros de anisotropía del material:

$$\begin{array}{l} \alpha(\beta) \text{ , o su inversa } \beta(\alpha) \\ \varphi(\alpha) = \frac{\sigma_{eq}}{\sigma_1} \\ \rho(\beta) = \frac{d\varepsilon_{eq}}{d\varepsilon_1} \end{array} \quad (\text{A.3})$$

A.1. Criterio de von Mises

En tensión plana y direcciones principales, el criterio de von Mises viene dado por:

$$\begin{aligned}\sigma_{eq} &= \sqrt{\sigma_1^2 - \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2} = |\sigma_1| \sqrt{1 - \alpha + \alpha^2} \\ d\varepsilon_{eq} &= \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{d\varepsilon_1^2 + d\varepsilon_1 d\varepsilon_2 + d\varepsilon_2^2} = \frac{2|d\varepsilon_1|}{\sqrt{3}} \sqrt{1 + \beta + \beta^2}\end{aligned}\quad (\text{A.4})$$

De estas expresiones se obtienen fácilmente las siguientes relaciones entre variables:

$$\begin{aligned}\varphi(\alpha) &= \frac{\sigma_{eq}}{\sigma_1} = (\text{signo } \sigma_1) \sqrt{1 - \alpha + \alpha^2} \\ \rho(\beta) &= \frac{d\varepsilon_{eq}}{d\varepsilon_1} = (\text{signo } d\varepsilon_1) \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{1 + \beta + \beta^2}\end{aligned}\quad (\text{A.5})$$

El vector normal a la superficie de plastificación viene dado por:

$$n_{ij} = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} = \frac{\partial \sigma_{eq}}{\partial \sigma_{ij}}$$

de donde se obtiene:

$$n_1 = \frac{\partial \sigma_{eq}}{\partial \sigma_1} = \frac{2\sigma_1 - \sigma_2}{2\sigma_{eq}}, \quad n_2 = \frac{\partial \sigma_{eq}}{\partial \sigma_2} = \frac{2\sigma_2 - \sigma_1}{2\sigma_{eq}}$$

La regla de la normalidad establece:

$$d\varepsilon_{ij} = n_{ij} d\Lambda$$

donde el multiplicador plástico viene dado por $d\Lambda = d\varepsilon_{eq}$ al aplicar la condición de igualdad del trabajo plástico $\sigma_{eq} d\varepsilon_{eq} = \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}$. Así:

$$d\varepsilon_1 = n_1 d\varepsilon_{eq} = \frac{2\sigma_1 - \sigma_2}{2\sigma_{eq}} d\varepsilon_{eq}, \quad d\varepsilon_2 = n_2 d\varepsilon_{eq} = \frac{2\sigma_2 - \sigma_1}{2\sigma_{eq}} d\varepsilon_{eq}$$

Dividiendo ambas expresiones se obtiene la relación $\beta(\alpha)$ y su inversa $\alpha(\beta)$:

$$\begin{aligned}\beta(\alpha) &= \frac{2\alpha - 1}{2 - \alpha} \\ \alpha(\beta) &= \frac{2 + \beta}{2 + \beta}\end{aligned}\quad (\text{A.6})$$

A.2. Criterio cuadrático de Hill (1948)

El criterio de plastificación cuadrático de Hill (1948) para materiales anisótropos, en condiciones de tensión plana, es un caso especial del criterio general dado

en el Apéndice C. En este criterio, la tensión equivalente viene dada por:

$$\sigma_{eq} = \sqrt{\frac{r_{90}\sigma_1^2 + r_0\sigma_2^2 + r_0r_{90}(\sigma_1 - \sigma_2)^2}{r_{90}(1+r_0)}} = |\sigma_1| \sqrt{\frac{r_{90} + r_0\alpha^2 + r_0r_{90}(1-\alpha)^2}{r_{90}(1+r_0)}} \quad (\text{A.7})$$

siendo r_0 y r_{90} los coeficientes de Lankford en las direcciones de laminación y transversal de la chapa, respectivamente. Si $r_0 = r_{90} = 1$, el criterio coincide con el de von Mises para materiales isótropos.

De la expresión anterior se obtiene la relación:

$$\varphi(\alpha) = \frac{\sigma_{eq}}{\sigma_1} = (\text{signo } \sigma_1) \sqrt{\frac{r_{90} + r_0\alpha^2 + r_0r_{90}(1-\alpha)^2}{r_{90}(1+r_0)}} \quad (\text{A.8})$$

El vector normal a la superficie de plastificación se calcula como:

$$n_1 = \frac{\partial\sigma_{eq}}{\partial\sigma_1} = \frac{r_{90}\sigma_1 + r_0r_{90}(\sigma_1 - \sigma_2)}{r_{90}(1+r_0)\sigma_{eq}}, \quad n_2 = \frac{\partial\sigma_{eq}}{\partial\sigma_2} = \frac{r_0\sigma_2 - r_0r_{90}(\sigma_1 - \sigma_2)}{r_{90}(1+r_0)\sigma_{eq}}$$

y los incrementos de deformación mediante la regla de la normalidad como:

$$d\varepsilon_1 = \frac{r_{90}\sigma_1 + r_0r_{90}(\sigma_1 - \sigma_2)}{r_{90}(1+r_0)\sigma_{eq}} d\varepsilon_{eq}, \quad d\varepsilon_2 = \frac{r_0\sigma_2 - r_0r_{90}(\sigma_1 - \sigma_2)}{r_{90}(1+r_0)\sigma_{eq}} d\varepsilon_{eq}$$

Dividiendo ambas expresiones se obtiene la relación $\beta(\alpha)$ y su inversa $\alpha(\beta)$:

$$\begin{aligned} \beta(\alpha) &= \frac{r_0\alpha - r_0r_{90}(1-\alpha)}{r_{90} + r_0r_{90}(1-\alpha)} \\ \alpha(\beta) &= \frac{r_{90}\beta + r_0r_{90}(1+\beta)}{r_0 + r_0r_{90}(1+\beta)} \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

La relación $\rho = d\varepsilon_{eq}/d\varepsilon_1$ se obtiene de la expresión de $d\varepsilon_{eq}$ o bien, si ésta no se conoce, se puede calcular a partir de la condición de igualdad del trabajo plástico:

$$\sigma_{eq}d\varepsilon_{eq} = \sigma_1d\varepsilon_1 + \sigma_2d\varepsilon_2 = \sigma_1d\varepsilon_1(1 + \alpha\beta)$$

de donde se obtiene:

$$\rho(\beta) = \frac{d\varepsilon_{eq}}{d\varepsilon_1} = \frac{\sigma_1}{\sigma_{eq}}(1 + \alpha\beta) = \frac{1 + \alpha\beta}{\varphi(\alpha)} \quad (\text{A.10})$$

y donde $\varphi(\alpha)$ y $\alpha(\beta)$ vienen dados en (A.8) y (A.9), respectivamente.

A.3. Criterio no cuadrático de Hosford (1979)

El criterio de plastificación no cuadrático propuesto por Hosford (Hosford, 1979; Logan y Hosford, 1980; Hosford, 1985) para materiales anisótropos es un

caso especial de uno de los criterios no cuadráticos, para materiales con anisotropía planar, propuestos por Hill (1979). El criterio se expresa como:

$$r_{90}(1+r_0)\sigma_{eq}^a = r_{90}|\sigma_1|^a + r_0|\sigma_2|^a + r_0r_{90}|\sigma_1 - \sigma_2|^a \quad (\text{A.11})$$

donde el exponente a es normalmente mayor que 2. Los valores sugeridos en la literatura son $a = 6$ para metales BCC y $a = 8$ para materiales FCC. En general, el exponente a toma un valor par positivo, de manera que los valores absolutos en (A.11) son innecesarios. Nótese además que este criterio se reduce al cuadrático propuesto por Hill si $a = 2$, y al de von Mises si además $r_0 = r_{90} = 1$.

De la expresión anterior se obtiene fácilmente la relación:

$$\varphi(\alpha) = \frac{\sigma_{eq}}{\sigma_1} = (\text{signo } \sigma_1) \left(\frac{r_{90} + r_0\alpha^a + r_0r_{90}(1-\alpha)^a}{r_{90}(1+r_0)} \right)^{1/a} \quad (\text{A.12})$$

Los incrementos de deformación se obtienen de la regla de la normalidad como:

$$d\varepsilon_1 = \frac{r_{90}\sigma_1^{a-1} + r_0r_{90}(\sigma_1 - \sigma_2)^{a-1}}{r_{90}(1+r_0)\sigma_{eq}^{a-1}} d\varepsilon_{eq}$$

$$d\varepsilon_2 = \frac{r_0\sigma_2^{a-1} - r_0r_{90}(\sigma_1 - \sigma_2)^{a-1}}{r_{90}(1+r_0)\sigma_{eq}^{a-1}} d\varepsilon_{eq}$$

Dividiendo ambas expresiones se obtiene la relación:

$$\beta(\alpha) = \frac{r_0\alpha^{a-1} - r_0r_{90}(1-\alpha)^{a-1}}{r_{90} + r_0r_{90}(1-\alpha)^{a-1}} \quad (\text{A.13})$$

La relación inversa, $\alpha(\beta)$, no puede resolverse analíticamente sino que debe hacerse por métodos numéricos, usando la expresión anterior para cada valor de β . Así, por ejemplo, existen 7 soluciones para esta ecuación si $a = 8$, pero sólo una es real.

Igualmente, la deformación equivalente no puede expresarse como una función sencilla de las componentes del tensor de deformaciones. En cambio, puede obtenerse usando la definición de trabajo plástico, como en el caso del apartado anterior. Así, se obtiene la relación:

$$\rho(\beta) = \frac{d\varepsilon_{eq}}{d\varepsilon_1} = \frac{1 + \alpha\beta}{\varphi(\alpha)} \quad (\text{A.14})$$

donde $\varphi(\alpha)$ y $\alpha(\beta)$ vienen dados en (A.12) y (A.13), respectivamente.

Bibliografía

Hill R (1948). *A theory of the yielding and plastic flow of anisotropic metals*. Proceedings of the Royal Society 193A:281–297

-
- Hill R (1979). *Theoretical plasticity of textured aggregates*. Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society 85:179–191
- Hosford WF (1979). *On yield loci of anisotropic cubic metals*. En: Proc. 7th North America Metalworking Conference S.M.E., Dearborn, Michigan, U.S.A., p. 191
- Hosford WF (1985). *Comments on anisotropic yield criteria*. International Journal of Mechanical Sciences 27(7/8):423–427
- Logan R, Hosford WF (1980). *Upper-bound anisotropic yield locus calculations assuming $\langle 111 \rangle$ -pencil glide*. International Journal of Mechanical Sciences 22(7):419–430

Apéndice B

Regla de endurecimiento de Ziegler en tensión plana

Sea $f(\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}^p)$ una función de plastificación que define los posibles estados y evoluciones de un punto. El criterio de plastificación asumiendo un endurecimiento isótropo se expresa como:

$$f(\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}^p) = \sigma_{eq}(\sigma_{ij}) - \sigma_Y(\varepsilon_{eq}^p) \leq 0 \quad (\text{B.1})$$

siendo la tensión equivalente $\sigma_{eq}(\sigma_{ij})$ una función del estado tensional del punto, responsable de la forma de la superficie de plastificación, y donde el término $\sigma_Y(\varepsilon_{eq}^p)$, que representa el límite de fluencia actual, controla su tamaño.

Mientras que el endurecimiento isótropo cambia sólo el tamaño de la superficie de plastificación y no varía la posición de su centro, el cinemático no altera el tamaño y sí el centro de la superficie de plastificación. El criterio de plastificación asumiendo un endurecimiento cinemático se expresa entonces como:

$$f(\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}^p) = \tilde{\sigma}_{eq}(\sigma_{ij} - \omega_{ij}(\varepsilon_{ij}^p)) - \sigma_0 = \tilde{\sigma}_{eq}(\tilde{\sigma}_{ij}) - \sigma_0 \leq 0 \quad (\text{B.2})$$

siendo σ_0 el límite elástico y donde se han introducido las *tensiones reducidas* ($\tilde{\sigma}_{ij}$), que son las tensiones medidas desde el centro actual (ω_{ij}) de la curva de plastificación:

$$\tilde{\sigma}_{ij} = \sigma_{ij} - \omega_{ij}(\varepsilon_{ij}^p) \quad (\text{B.3})$$

El vector normal a la superficie de plastificación viene dado por:

$$n_{ij} = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} = \frac{\partial \tilde{\sigma}_{eq}}{\partial \sigma_{ij}} = \frac{\partial \tilde{\sigma}_{eq}}{\partial \tilde{\sigma}_{kl}} \frac{\partial \tilde{\sigma}_{kl}}{\partial \sigma_{ij}} = \frac{\partial \tilde{\sigma}_{eq}}{\partial \tilde{\sigma}_{kl}} \delta_{ik} \delta_{jl} = \frac{\partial \tilde{\sigma}_{eq}}{\partial \tilde{\sigma}_{ij}} \quad (\text{B.4})$$

y donde n_{ij} es una función de $\tilde{\sigma}_{ij}$, es decir de σ_{ij} y de ω_{ij} .

Se admite que $\tilde{\sigma}_{eq}(\tilde{\sigma}_{ij})$ es una función homogénea de grado 1 de las tensiones que satisface, por tanto, el teorema de Euler:

$$\tilde{\sigma}_{eq}(\tilde{\sigma}_{ij}) = \frac{\partial \tilde{\sigma}_{eq}}{\partial \tilde{\sigma}_{ij}} = n_{ij} \tilde{\sigma}_{ij} \quad (\text{B.5})$$

Así, el criterio de plastificación puede expresarse como:

$$f(\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}^p) = \tilde{\sigma}_{eq}(\tilde{\sigma}_{ij}) - \sigma_0 = n_{ij} \tilde{\sigma}_{ij} - \sigma_0 \leq 0 \quad (\text{B.6})$$

La regla de la normalidad establece:

$$d\varepsilon_{ij}^p = \frac{\partial \tilde{\sigma}_{eq}(\tilde{\sigma}_{ij})}{\partial \tilde{\sigma}_{ij}} d\Lambda = n_{ij} d\Lambda \quad (\text{B.7})$$

siendo $d\Lambda$ el multiplicador plástico, no negativo. Multiplicando ambos miembros por $\tilde{\sigma}_{ij}$ y usando (B.5) se obtiene:

$$\tilde{\sigma}_{ij} d\varepsilon_{ij}^p = \tilde{\sigma}_{ij} n_{ij} d\Lambda = \tilde{\sigma}_{eq} d\Lambda \quad (\text{B.8})$$

que representa una equivalencia entre los trabajos plásticos de las tensiones reducidas tridimensionales ($\tilde{\sigma}_{ij}$) y la tensión reducida monodimensional ($\tilde{\sigma}_{eq}$) sobre la magnitud $d\Lambda$, que se identifica por tanto con la deformación plástica equivalente monodimensional: $d\varepsilon_{eq}^p = d\Lambda$. Por tanto, la regla de la normalidad (B.7) puede reescribirse como:

$$d\varepsilon_{ij}^p = n_{ij} d\varepsilon_{eq}^p \quad (\text{B.9})$$

La variación de f con las deformaciones plásticas se produce a través de ω_{ij} , que es dependiente de aquellas. La relación de consistencia ($df = 0$) se obtiene como:

$$df = \frac{\partial \tilde{\sigma}_{eq}(\tilde{\sigma}_{ij})}{\partial \tilde{\sigma}_{ij}} d\tilde{\sigma}_{ij} = \frac{\partial \tilde{\sigma}_{eq}(\tilde{\sigma}_{ij})}{\partial \tilde{\sigma}_{ij}} (d\sigma_{ij} - d\omega_{ij}) = n_{ij} d\sigma_{ij} - n_{ij} d\omega_{ij} = 0 \quad (\text{B.10})$$

Las reglas de traslación regulan el desplazamiento del centro de la superficie de plastificación, acompañando toda la superficie de plastificación dicho desplazamiento como un sólido rígido. En general, la traslación del centro de la superficie de plastificación dependerá de las deformaciones y tendrá una dirección definida por un tensor d_{ij} . De forma general, el tensor de traslación puede escribirse en la forma:

$$d\omega_{ij} = c d\varepsilon_{eq}^p d_{ij} \quad (\text{B.11})$$

siendo c una constante positiva que se deduce relacionando las expresiones anteriores con el ensayo monodimensional de tracción.

Las reglas de traslación más habituales son la de Prager y la de Ziegler. En la primera se supone que la traslación del centro de la superficie de plastificación se produce según la normal, es decir que $d_{ij} = n_{ij}$; en este caso el vector de traslación adopta la forma $d\omega_{ij} = c d\varepsilon_{ij}^p$. En la regla de Ziegler se supone que la traslación se produce en la dirección de la tensión reducida, es decir que $d_{ij} = \tilde{\sigma}_{ij}$. Por tanto, según la regla de Ziegler, el tensor de traslación (B.11) viene dado por:

$$d\omega_{ij} = c d\varepsilon_{eq}^p \tilde{\sigma}_{ij} \quad (\text{B.12})$$

La constante c se calcula particularizando el desarrollo anterior para un criterio de plastificación concreto y a partir de los resultados del ensayo de tracción, en el que los vectores de tensiones, tensiones reducidas y su desviador, y deformaciones plásticas, en direcciones principales vienen dados por:

$$\begin{aligned} (\sigma_1 \quad \sigma_2 \quad \sigma_3)^T &= (\sigma^p \quad 0 \quad 0)^T \\ (\tilde{\sigma}_1 \quad \tilde{\sigma}_2 \quad \tilde{\sigma}_3)^T &= (\sigma^p \quad 0 \quad 0)^T - (\omega_1 \quad \omega_2 \quad \omega_3)^T \\ (\tilde{\sigma}_1^d \quad \tilde{\sigma}_2^d \quad \tilde{\sigma}_3^d)^T &= (2\sigma^p/3 \quad -\sigma^p/3 \quad -\sigma^p/3)^T - (\omega_1^d \quad \omega_2^d \quad \omega_3^d)^T \\ (d\varepsilon_1^p \quad d\varepsilon_2^p \quad d\varepsilon_3^p)^T &= (d\varepsilon^p \quad -d\varepsilon^p/2 \quad -d\varepsilon^p/2)^T \end{aligned} \quad (\text{B.13})$$

Criterio de von Mises

El criterio de plastificación de von Mises viene dado por:

$$f(\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}^p) = \tilde{\sigma}_{eq}(\tilde{\sigma}_{ij}) - \sigma_0 = \sqrt{\frac{3}{2} \tilde{\sigma}_{ij}^d \tilde{\sigma}_{ij}^d} - \sigma_0 = 0 \quad (\text{B.14})$$

y donde el vector normal a la superficie de plastificación se obtiene como:

$$n_{ij} = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} = \frac{3}{2\sigma_0} \tilde{\sigma}_{ij}^d \quad (\text{B.15})$$

Como las deformaciones plásticas varían con n_{ij} , y éstas con $\tilde{\sigma}_{ij}^d$, para que se cumpla $d\varepsilon_2 = d\varepsilon_3$ en (B.13) debe cumplirse también $\tilde{\sigma}_2^d = \tilde{\sigma}_3^d$ y, por tanto, se deduce que para ello $\omega_2^d = \omega_3^d$, es decir $\omega_2 - \omega_{kk}/3 = \omega_3 - \omega_{kk}/3$, lo que implica $\omega_2 = \omega_3$. Por tanto, las tensiones reducidas del ensayo de tracción son:

$$(\tilde{\sigma}_1 \quad \tilde{\sigma}_2 \quad \tilde{\sigma}_3)^T = (\sigma^p - \omega_1 \quad -\omega_2 \quad -\omega_2)^T \quad (\text{B.16})$$

El criterio de von Mises, cuando sólo hay tensiones normales, se escribe en la forma:

$$\tilde{\sigma}_{eq} = \sqrt{\frac{1}{2} [(\tilde{\sigma}_1 - \tilde{\sigma}_2)^2 + (\tilde{\sigma}_1 - \tilde{\sigma}_3)^2 + (\tilde{\sigma}_2 - \tilde{\sigma}_3)^2]} = \sigma^p - \omega_1 + \omega_2 \quad (\text{B.17})$$

y de esta expresión:

$$d\tilde{\sigma}_{eq} = d\sigma^p - d\omega_1 + d\omega_2 \quad (\text{B.18})$$

Usando $\tilde{\sigma}_{eq} = \sigma_0$ y $d\tilde{\sigma}_{eq} = 0$ se obtiene:

$$\begin{aligned} \sigma_0 &= \tilde{\sigma}^p - \omega_1 + \omega_2 \\ 0 &= d\sigma^p - d\omega_1 + d\omega_2 \end{aligned} \quad (\text{B.19})$$

y usando la regla de Ziegler $d\omega_{ij} = cd\varepsilon_{eq}^p \tilde{\sigma}_{ij}$:

$$0 = d\sigma^p - cd\varepsilon^p(\sigma^p - \omega_1) + cd\varepsilon^p(-\omega_2) = d\sigma^p - cd\varepsilon^p\sigma_0 \quad (\text{B.20})$$

en la que se ha hecho $d\varepsilon_{eq}^p = d\varepsilon^p$. Despejando c se obtiene:

$$c = \frac{1}{\sigma_0} \frac{d\sigma^p}{d\varepsilon^p} = \frac{H}{\sigma_0} \quad (\text{B.21})$$

La regla de endurecimiento de Ziegler queda entonces como:

$$d\omega_{ij} = \frac{Hd\varepsilon_{eq}^p}{\sigma_0} (\sigma_{ij} - \omega_{ij}) \quad (\text{B.22})$$

Criterio de plastificación en tensión plana

Si en vez del criterio de von Mises se usa uno cualquiera de los criterios en tensión plana ($\sigma_3 = 0$) del Apéndice A, es evidente que la superficie de plastificación se trasladará en el plano (σ_1, σ_2) , es decir $\omega_3 = 0$ y, por tanto, se tiene que $\tilde{\sigma}_3 = 0$ como se deduce de (B.13). Como además el ensayo es de tracción debe cumplirse $\omega_2 = \omega_3$ y, por tanto, las tensiones reducidas quedan como:

$$(\tilde{\sigma}_1 \quad \tilde{\sigma}_2 \quad \tilde{\sigma}_3)^T = (\sigma^p - \omega_1 \quad 0 \quad 0)^T \quad (\text{B.23})$$

Sustituyendo en cualquiera de los criterios de plastificación se obtiene:

$$\tilde{\sigma}_{eq} = \tilde{\sigma}_1 = \sigma^p - \omega_1 \quad (\text{B.24})$$

y de aquí:

$$d\tilde{\sigma}_{eq} = d\sigma^p - d\omega_1 \quad (\text{B.25})$$

Usando $\tilde{\sigma}_{eq} = \sigma_0$ y $d\tilde{\sigma}_{eq} = 0$ se obtiene:

$$\begin{aligned} \sigma_0 &= \sigma^p - \omega_1 \\ 0 &= d\sigma^p - d\omega_1 \end{aligned} \quad (\text{B.26})$$

y usando la regla de Ziegler $d\omega_{ij} = cd\varepsilon_{eq}^p \tilde{\sigma}_{ij}$:

$$0 = d\sigma^p - cd\varepsilon^p(\sigma^p - \omega_1) = d\sigma^p - cd\varepsilon^p\sigma_0 \quad (\text{B.27})$$

que coincide con la expresión (B.20) obtenida mediante el criterio de von Mises.

Por tanto, despejando c se obtiene la misma expresión anterior:

$$c = \frac{1}{\sigma_0} \frac{d\sigma^p}{d\varepsilon^p} = \frac{H}{\sigma_0} \quad (\text{B.28})$$

y la misma expresión de la regla de Ziegler:

$$d\omega_{ij} = \frac{Hd\varepsilon_{eq}^p}{\sigma_0}(\sigma_{ij} - \omega_{ij}) \quad (\text{B.29})$$

Apéndice C

Criterio cuadrático de Hill en deformación plana

En direcciones principales, el criterio de plastificación cuadrático de Hill (1950) para materiales anisótropos viene dado por:

$$2f(\sigma_{ij}) \equiv F(\sigma_2 - \sigma_3)^2 + G(\sigma_3 - \sigma_1)^2 + H(\sigma_1 - \sigma_2)^2 = 1 \quad (\text{C.1})$$

siendo F , G y H constantes del material. El criterio se reduce al de von Mises cuando el material es isótropo, *i.e.* $F = G = H$. De la regla de flujo correspondiente se obtienen los incrementos de deformación plástica como (Tan *et ál.*, 1995):

$$\begin{aligned} d\varepsilon_1 &= [H(\sigma_1 - \sigma_2) + G(\sigma_1 - \sigma_3)]d\lambda \\ d\varepsilon_2 &= [F(\sigma_2 - \sigma_3) + H(\sigma_2 - \sigma_1)]d\lambda \\ d\varepsilon_3 &= [G(\sigma_3 - \sigma_1) + F(\sigma_3 - \sigma_2)]d\lambda \end{aligned} \quad (\text{C.2})$$

siendo $d\lambda$ el multiplicador plástico, no negativo.

La tensión equivalente y la deformación plástica equivalente se expresan como:

$$\begin{aligned} \sigma_{eq} &= \sqrt{\frac{3}{2} \frac{F(\sigma_2 - \sigma_3)^2 + G(\sigma_3 - \sigma_1)^2 + H(\sigma_1 - \sigma_2)^2}{F + G + H}} \\ d\varepsilon_{eq} &= \sqrt{\frac{2}{3} (F + G + H) \frac{F(Gd\varepsilon_2 - Hd\varepsilon_3)^2 + G(Hd\varepsilon_3 - Fd\varepsilon_1)^2 + H(Fd\varepsilon_1 - Gd\varepsilon_2)^2}{(FG + GH + HF)^2}} \end{aligned} \quad (\text{C.3})$$

donde las constantes F , G y H se expresan en función de los coeficientes de Lankford en las direcciones de laminación (r_0) y transversal (r_{90}) como:

$$r_0 = \frac{H}{G} \quad , \quad r_{90} = \frac{H}{F} \quad (\text{C.4})$$

Considérese el caso de deformación plana en la dirección transversal de laminación, $d\varepsilon_2 = 0$. Por conservación de volumen se tiene que $d\varepsilon_3 = -d\varepsilon_1$ y de la regla de flujo (C.2) se obtiene:

$$\sigma_2 = \frac{F\sigma_3 + H\sigma_1}{F + H}$$

Sustituyendo las expresiones de $d\varepsilon_2$, $d\varepsilon_3$ y σ_2 en (C.3) y teniendo en cuenta (C.4), la tensión equivalente y la deformación equivalente en condiciones de deformación plana se obtienen como:

$$\sigma_{eq} = \frac{|\sigma_1 - \sigma_3|}{C} \quad (C.5)$$

$$d\varepsilon_{eq} = C|d\varepsilon_1| \quad (C.6)$$

siendo:

$$C = \sqrt{\frac{2}{3} \frac{(1 + r_{90})(1 + r_0 + r_0/r_{90})}{1 + r_0 + r_{90}}} \quad (C.7)$$

Bibliografía

- Hill R (1950). The mathematical theory of plasticity. Oxford, Clarendon Press
- Tan Z, Persson B, Magnusson C (1995). *Plastic bending of anisotropic sheet metals*. International Journal of Mechanical Sciences 37(4):405–421