UNIVERSIDAD DE SEVILLA
FACULTAD DE MATEMATICAS

IDEALES CONMUTATIVOS EN LAS ALGEBRAS DE LIE RESOLUBLES Y NILPOTENTES

Trabajo que presenta *Juan José López Garzón* para optar al grado de Doctor en Matemáticas.

Vº Bº El Catedrático Director

Fdo. *Francisco Javier Echarte Reula*
Catedrático de Geometría IV y V
de la Universidad de Sevilla.

EL Doctorando

Fdo. *Juan José López Garzón*

Sevilla, Mayo de 1987.

Este trabajo ha sido realizado en la Universidad de Sevilla, bajo la dirección del Catedrático de la Facultad de **Matemáticas**, ***Profesor Dr. D. Francisco Javier Echarte Reula***, gracias a cuya dirección y valiosos consejos ha sido posible su realización. Deseo hacer constar mi profundo agradecimiento.

INDICE

Pág.

- INTRODUCCION I

- CAPITULO 0. PRELIMINARES
  - GRUPOS DE LIE 1
  - ALGEBRA DE UN GRUPO DE LIE 3
  - HOMOMORFISMOS DE GRUPOS DE LIE. SUBGRUPOS 7
  - SUBGRUPOS UNIPARAMETRICOS Y APLICACION EXPONENCIAL 9
  - REPRESENTACION ADJUNTA 12
  - CLASES DE ALGEBRAS DE LIE 14
  - CLASIFICACION DE LAS ALGEBRAS DE LIE SIMPLES 19

- CAPITULO I. CAMPOS CENTRALES Y NORMALES
  - IDEALES UNIDIMENSIONALES EN UN ALGEBRA DE LIE 21
  - PROPIEDADES DE LOS CAMPOS NORMALES 21
  - EJEMPLOS DE CAMPOS CENTRALES Y NORMALES EN ALGEBRAS RESOLUBLES 24
  - CENTRALIZADOR DE UN CAMPO NORMAL 27
  - TIPOS DE ALGEBRAS DE LIE EN RELACION CON SUS IDEALES UNIDIMENSIONALES 32
  - CLASIFICACION DE LAS ALGEBRAS DE LIE RESOLUBLES REALES Y TRIDIMENSIONALES 35
  - CLASIFICACION DE LAS ALGEBRAS DE LIE RESOLUBLES REALES DE 4 DIMENSIONES 41
  - CLASIFICACION DE LAS ALGEBRAS DE LIE NILPOTENTES DE 5 DIMENSIONES 44
  - CLASIFICACION DE LAS ALGEBRAS DE LIE NILPOTENTES DE 6 DIMENSIONES 46

Pág.

- **CAPITULO II. IDEALES CONMUTATIVOS**
  - IDEALES BIDIMENSIONALES 51
  - ESTRUCTURA DE LAS ALGEBRAS DE LIE RESOLUBLES 59
  - EL PROBLEMA DE LA ANTIDERIVACION EN LAS ALGEBRAS DE LIE NILPOTENTES 64

- **CAPITULO III. RELACION ENTRE LAS ALGEBRAS DE LIE Y LOS GRUPOS DE LIE CORRESPONDIENTES**
  - CAMPOS CENTRALES Y NORMALES 76
  - PROPIEDAD METRICA DEL GRUPO DE LOS MOVIMIENTOS DEL PLANO 82
  - INTERPRETACION A NIVEL DE GRUPO DEL PROBLEMA DE LA ANTIDERIVACION DE ALGEBRAS DE LIE NILPOTENTES 83

- **BIBLIOGRAFIA** B1

INTRODUCCION

En esta memoria que presentamos para optar al grado de Doctor, hemos estudiado diversos aspectos de las álgebras de Lie resolubles y nilpotentes. La dificultad de su estudio, todavía no se ha logrado su clasificación, cosa ya ha tiempo realizada con las álgebras semi-simples, ha hecho que nos hayamos centrado en la elección de bases especiales en las que figuran la forma destacada los elementos que definen ideales unidimensionales.

Estos pueden ser de dos clases; los contenidos en el centro de un álgebra de Lie L, generados por cualquier campo X de dicho centro, para el que se verifica $[X,Z]=0$ $\forall Z\in L$ y los generados por elementos $Y\in L$ tales que $[Y,Z]=aY$, $\forall Z\in L$, siendo **a** un elemento del cuerpo base de L, dependientes de Y y de Z. A los primeros X los denominaremos **centrales**, y a los segundos Y **normales**, notaciones que utilizaremos a lo largo de la memoria; siempre por X_i se entenderá un elemento central y por Y_j un elemento normal.

A los elementos de un álgebra les denominaremos **campos**, pues los elementos de un álgebra de Lie no son otra cosa sino los campos invariantes a izquierda (derecha) de un grupo de Lie cuya álgebra sea isomorfa a la dada.

El estudio de propiedades de los campos centrales y normales y de sus ideales unidimensionales es objeto del primer capítulo. Entre las propiedades destaca que el producto corchete de campos normales es nulo y los denominados campos normales conjugados, que son aquellos campos normales tales que cualquier combinación lineal de ellos también es un elemento normal, estableciéndose una condición necesaria y suficiente para que r campos normales linealmente independientes sean conjugados.

El concepto de centralizador de un campo normal, y la reunión de todos ellos, el **centralizador normal**, permite establecer diferencias entre los restantes campos de un álgebra resoluble, no centrales ni normales.

El centralizador de un campo normal de un álgebra de Lie L, que denotamos por $\mathrm{cen}_Y L$, lo definimos como el conjunto de campos $Z \in L$ tales que $[Y,Z]=0$, verificándose que la dimensión del centralizador de un campo normal es una unidad inferior que la dimensión del álgebra a la que pertenece el campo.

Destaca el hecho de que dos campos normales conjugados tienen el mismo centralizador aunque la propiedad recíproca no es cierta, es decir, si dos campos normales tienen el mismo centralizador no se puede afirmar que sean conjugados, como se evidencia en el álgebra $L\{Y_1, Y_2, Z\}$ tal que $[Y_i, Z]=a_i Y_i$, con $a_1 \neq a_2$.

Como consecuencia de que el producto corchete de dos campos cualesquiera del álgebra está contenido en el centralizador normal, obtenemos que el álgebra derivada L' está contenida en dicho centralizador normal.

Un álgebra que contiene ideales unidimensionales no puede ser semi-simple, esto supone que un álgebra en estas condiciones o es resoluble o bien es suma directa de otras, alguna de las cuales es resoluble.

Un álgebra nilpotente no nula, contiene un centro no nulo, luego tiene campos centrales. Nosotros probamos que no contiene campos normales, esto supone que si un álgebra de Lie L contiene algún elemento normal entonces no es ni nilpotente ni semi-simple, por tanto será resoluble, sin ser nilpotente, o suma directa de otras. En tal álgebra nilpotente podemos elegir una base de la forma:

$$\{X_1, \ldots, X_m, Z_1, \ldots, Z_n\}$$

Probamos que si un álgebra de Lie L es resoluble y su álgebra derivada L' no contiene a su centro, entonces L es suma directa del resto del centro y de otra parte que contiene a los demás campos.

Estudiamos la clasificación de las álgebras reales, resolubles tridimensionales, obteniendo el cuadro clasificatorio correspondiente. En ésta y en las restantes clasificaciones definimos cada álgebra por una de sus bases en las que aparecen el mayor número posible de campos centrales y normales linealmente independientes.

Continuamos con la clasificación de las álgebras resolubles de cuatro dimensiones y de las álgebras nilpotentes de cinco y seis dimensiones, atendiendo a la dimensión de sus respectivos centros.

Así, por ejemplo, en el caso de las álgebras nilpotentes de dimensión cinco, vemos que existen, salvo isomorfismos, una sola álgebra con centro tridimensional, tres álgebras distintas con centro bidimensional, y cuatro distintas con centro unidimensional, además, evidentemente, del caso que el centro sea de dimensión cuatro o cinco en cuyo caso el álgebra es conmutativa.

En las clasificaciones de las álgebras nilpotentes de cinco y seis dimensiones, observamos que $\dim L^1 \leq \dim L - 2$, cosa que demostramos que se verifica para toda álgebra nilpotente. El estudio de los campos centrales y normales mas las propiedades reseñadas anteriormente componen el capítulo primero.

Los ideales unidimensionales son un caso particular de los ideales conmutativos y a estos últimos dedicamos el segundo capítulo.

Ya observamos en el capítulo primero que el grupo de Lie de los movimientos del plano tiene un álgebra sin campos centrales ni normales reales, pero en cambio admite campos normales complejos conjugados. Hemos estudiado con detenimiento este ejemplo, deduciendo en qué condiciones un álgebra de Lie resoluble real admite dos campos Z_1, Z_2 no centrales ni normales, pero tales que $Z_1 \pm iZ_2$ sean campos normales, y establecemos la condición necesaria y suficiente para que esto ocurra. Hemos estudiado también la estructura de las álgebras de Lie resolubles atendiendo a la de su álgebra nilpotente derivada, obteniendo tres tipos de campos: los que pertenecen al centro de L' (álgebra derivada), los que pertenecen a L' pero no a su centro y los restantes campos de L, y establecemos que el centro del álgebra derivada L' es un ideal del álgebra L.

Hemos demostrado que un álgebra nilpotente real no contiene ideales bidimensionales ni de ninguna dimensión disjuntos con su centro. También hemos probado que si un álgebra resoluble real contiene un ideal bidimensional conmutativo, que pertenece al centro de L' o tiene camnpos normales o centrales o de lo contrario tiene campos normales imaginarios conjugados.

Utilizando la derivación de las álgebras de Lie, en que el álgebra derivada de un álgebra resoluble es nilpotente y recíprocamente, nos ha permitido estudiar el problema inverso, en el que dada un álgebra nilpotente se plantea el problema de hallar un álgebra resoluble cuya derivada sea la primera.

Hemos probado que en las álgebras nilpotentes, hay unas que son derivadas de otras álgebras nilpotentes y otras no, la más simple de las segundas es el álgebra tridimensional una de cuyas bases es:

$$\{X, Z_1, Z_2\}, \quad [X, Z_i]=0; \quad [Z_1, Z_2]=X$$

Comprobamos que todas las álgebras nilpotentes de tres, cuatro, cinco y seis dimensiones admiten un álgebra resoluble de dimensión una unidad mayor, tal que su derivada es el álgebra nilpotente dada.

Si el álgebra nilpotente M de dimensión tres, cuatro, cinco o seis, admite una base:

$$\{X_1, \ldots, X_m, Z_1, \ldots, Z_n\}$$

existe un álgebra resoluble *L* que admite la base:

$$\{X_1, \ldots, X_m, Z_1, \ldots, Z_n, U\}$$

tal que $[X_i, U]=a_i X_i$ y $[Z_j, U]=b_j Z_j$.

En el capítulo tercero, estudiamos la *"traducción"* de estos hechos a los grupos de Lie correspondientes. Comenzamos por ver qué representa un campo central y normal en los grupos de Lie correspondientes a cada álgebra. En los campos centrales su subgrupo uniparamétrico pertenece al centro, mientras que en los normales su subgrupo uniparamétrico es subgrupo divisor normal pero no perteneciente al centro.

Estudiamos las relaciones entre los campos normales invariantes a izquierda y los campos normales invariantes a derecha, viendo que entre ellos es, $Y=fY'$, donde Y e Y' son campos invariantes a izquierda y derecha respectivamente definidos por el mismo subgrupo uniparamétrico, siendo en **e**, punto unidad $Y_e=Y'_e$

A continuación estudiamos una propiedad de los campos normales imaginarios conjugados del grupo de los movimientos del plano, cuál es el de ser isótropos; es decir, contienen a los puntos cíclicos y por tanto autoortogonales.

Respecto de la antiderivación, vemos cómo a partir de los grupos nilpotentes simplemente conexos, definidos por grupos de matrices triangulares de diagonal $a_{ii}=1$, se puede definir un grupo nilpotente de dimensión una unidad mayor, tal que la derivada de su álgebra coincide con la derivada del álgebra nilpotente dada. Basta para ello sustituir todos los unos de la diagonal principal por e^{ω}.

Previamente, en un llamado capítulo 0, hemos entresacado de la abundante literatura que existe sobre grupos y álgebras de Lie, aquéllo que hemos creído esencial y que enunciamos sin demostración. Entre los puntos tratados están todos aquellos que hemos de utilizar en posteriores capítulos.

Las referencias de este capítulo 0 están sacadas de los libros de ***Bourbaki*** [I] y [II] y ***Chow*** [1]. En los otros capítulos las obras que citamos por el nombre del autor hacen referencia a las incluidas en la páginas *"Referencias"*.

0. PRELIMINARES

CAPITULO 0
PRELIMINARES

0-1 GRUPOS DE LIE

Se denomina *grupo de Lie* a toda variedad diferenciable G, C^∞, que cumple las siguientes condiciones:

1) Entre sus puntos está definida una operación interna respecto de la cual tienen sus puntos la estructura de grupo.

2) La aplicación ϕ: $G \times G \to G$, tal que ϕ: $(p,q) \to pq^{-1}$ es C^∞-diferenciable.

Al punto unidad del grupo lo representaremos por **e**. De la definición se deduce que la aplicación

$$f : G \to G: \qquad f: p \to p^{-1} \quad (\forall p \in G)$$

es C^∞-diferenciable, así como las aplicaciones

$$l_p: x \to px \quad (p, x \in G)$$
$$r_p: x \to xp$$

son también C^∞-diferenciables. A l_p, r_p, **se denominan <u>traslaciones a izquierda y derecha</u>** respectivamente, por ser C^∞ y biyectivas son difeomorfismos de G en G. Las traslaciones a izquierda forman grupo, así como las traslaciones a derecha, y como consecuencia de esto, también los automorfismos internos.

Si G no es una variedad conexa, la componente conexa de **e**, G_e, es un grupo de Lie, y las demás componentes son difermorfas a G_e por poderse obtener unas de otras por traslaciones.

Los grupos de Lie pueden ser conmutativos o no, según lo sea o no la operación interna establecida entre sus puntos. Ejemplos del primer caso lo tenemos en R^n mediante la operación $(X_1,..,X_n)*(Y_1,..,Y_n)=(X_1+Y_1,..,X_n+Y_n)$, grupo isomorfo al de traslaciones en R^n, y del segundo caso el grupo general lineal GL(n,R), donde cada matriz se identifica con el punto $(\alpha_{11},..,\alpha_{1n},..,\alpha_{n1},..,\alpha_{nn}) \in R^{n2}$; $(\alpha_{ij})\in GL(n,2)$. GL(n,R) es una subvariedad de R^{n2} que tiene la estructura de grupo definida en GL(n,R).

Si G,G´ son dos grupos de Lie, sobre la variedad producto G×G´ queda definida la estructura de grupo de Lie, mediante la operación

$$(p,q)*(p',q')=(pp',qq').$$

0-2 ALGEBRA DE UN GRUPO DE LIE

Entre los campos de vectores de un grupo de Lie, campos debidos al hecho de ser todo grupo de Lie, variedad diferenciable, hay unos muy importantes, los llamados ***campos invariantes a izquierda (o derecha)***, que son campos invariantes por las transformaciones dl_p, dr_p, subordinadas por las traslaciones l_p, r_p; dl_p: $X \to X'$.

Todo vector tangente define un campo invariante a izquierda, y sólo uno, con lo que la totalidad de campos invariantes a izquierda definen unívocamente la totalidad de los vectores tangentes (lo mismo puede decirse de los campos invariantes a derecha). Por tanto es suficiente utilizar los campos invariantes a izquierda en el estudio de los grupos de Lie. Dichos campos definen un álgebra $L(G)$ que se denomina ***álgebra de Lie*** del grupo G, ya que si

1) $X, Y \in L(G) \to X+Y \in L(G)$

2) $X \in L(G) \to aX \in L(G)$; $(a \in K)$

3) $X, Y \in L(G) \to [X, Y] \in L(G)$

Si $X_1, \ldots, X_n$ constituyen una base de campos invariantes a izquierda, todas los demás campos X invariantes a izquierda se expresan;

$$X = \Sigma a_i X_i$$

siendo los a_i coeficientes del cuerpo base, existiendo un isomorfismo entre los campos del álgebra $L(G)$, y el espacio tangente a G en e, $T_e(G)$.

Dada la base anterior: $X_1, \ldots, X_n$ de $L(G)$,

$$[X_i, X_j] = \Sigma c^h_{ij} X_h \quad ; \quad (C^h_{ij} \in K)$$

siendo las

$$C^h_{ij}$$

las llamadas constantes de estructura o de ***Maurer-Cartan***. Entre estas constantes se verifican las relaciones:

1) $C^h_{ij} + C^h_{ji} = 0$

2) $\Sigma(C^r_{ij} C^s_{rh} + C^r_{jk} C^s_{ri} + C^r_{hi} C^s_{rj}) = 0$

$(C^h_{ij} \in K)$ $(1 \leqslant i, j, k, h, r, s \leqslant n)$ (K, cuerpo base)

Si G es un grupo de Lie conmutativo, su álgebra $L(G)$ se dice conmutativa, en este caso, si $X,Y \in L(G) \rightarrow [X,Y]=0$. Si un grupo de Lie es producto de otros dos G_1, G_2, se verifica que su álgebra $L(G)$ es suma directa de los álgebras de esos dos.

$$G= G_1 \times G_2 \rightarrow L(G)= L(G_1) \oplus L(G_2)$$

Paralelamente a los campos invariantes a izquierda se pueden definir las formas invariantes a izquierda. Una forma w se dice invariante a izquierda si no varía por translaciones a izquierda, es decir,

$$\text{si} \quad l_p\colon G \rightarrow G$$

$$\delta l_p\colon w \leftarrow w$$

δl_p: aplicación subordinada por l_p sobre las formas.

Se demuestra que una s-forma w es invariante a izquierda, si y sólo si, el resultado de aplicarla a s-campos invariantes a izquierda cualesquiera $X_1 \ldots X_s$, nos da una constante.

$$w(X_1, \ldots, X_s)= \text{cte.}$$

Las formas invariantes a izquierda constituyen una subálgebra del conjunto de formas $\bigwedge(G)$ del grupo G, ya que se verifica:

1) Si w_1, w_2 son s-formas invariantes a izquierda también lo es **w_1+w_2**

2) Si $\lambda\in K$ (K, cuerpo base), w es invariante a izquierda, **λw** también es invariante a izquierda.

3) Si w_1, w_2, son formas invariantes a izquierda, **$w_1\wedge w_2$** también lo es.

4) Si w es invariante a izquierda, **dw** también lo es.

5) Si $X_1,\ldots,X_n$ es una base de campos invariantes a izquierda, la base dual $w_1,\ldots,w_n$ estará compuesta por 1-formas invariantes a izquierda, según el teorema anterior, y todas las demás 1-formas w invariantes a izquierda se escribirán:

$w=\Sigma b_j w_j$ ($b_j\in K$, cuerpo base)
y por tanto si $X=\Sigma a_i X_i$,
se tendrá $w(X)=\Sigma a_i b_i$

6) Si X, Y son invariantes a izquierda y w es una 1-forma invariante a izquierda,

$$dw[X,Y]=-w([X,Y])$$

7) Si $X_1,\ldots,X_n$ es una base de campos invariantes a la izquierda, y $w_1,\ldots,w_n$ es la base dual, se tiene que

$$dw_i=-\frac{1}{2}\Sigma c^i_{jk}w_j \quad w_k$$

0-3 HOMOMORFISMOS DE GRUPOS DE LIE: SUBGRUPOS

Sean **H** y **G** dos grupos de Lie (con K=R,C), el mismo cuerpo base para ambos, una aplicación $\phi: H \to G$ se dice **homorfismos de grupos de Lie**, si se verifica:

1) ϕ es aplicación diferenciable entre las variedades H y G.

2) ϕ es homorfismo entre los grupos H y G.

Paralelamente, dadas dos álgebras de Lie L, L', se dice que Γ es un homomorfismo de L en L', si

1) Γ es lineal

2) Si $X, Y \in L$; $\to \Gamma([X,Y]) = [\Gamma(X), \Gamma(Y)] \in L'$

En ambos casos, si la aplicación es biyectiva se denomina isomorfismo, y si además coinciden H≡G, o $L \equiv L'$ se dice automorfismo de grupos o de álgebras de Lie.

Se prueba que si $\phi: H \to G$ es un homorfismo entre dos grupos de Lie, $d\phi: L(H) \to L(G)$ es un homorfismo entre sus álgebras.

Si el homomorfismo $\phi: H \to G$ es tal que el par (H,ϕ) es una subvariedad de la variedad G, se dice entonces que **H** es un **subgrupo de Lie de G**. Se dice por tanto, que H es **subgrupo de Lie de G**, si se verifica:

1) H es grupo de Lie.

2) $\phi(H)$ es subvariedad de G.

3) $\phi: H \to G$ es un homomorfismo de grupos de Lie.

Dada su álgebra de Lie L, se dice **subálgebra** a todo subespacio vectorial J, tal que si $X,Y \in J$, se sigue que $[X,Y] \in J$.

El teorema de Ado asegura que *"dado un grupo de Lie G, existe una correspondencia biyectiva, salvo isomorfismos, entre los subgrupos conexos de G y las subálgebras de L(G)"*.

Se denomina **ideal** I de un álgebra de Lie, L, a todo subespacio vectorial de L, tal que $\forall X \in I; \forall Y \in L \to [X,Y] \in I$. El concepto de ideal es más restrictivo que el de subálgebra. Si en el teorema anterior, las subálgebras de L son ideales, los subgrupos conexos de G son divisores normales, pudiendo enunciar: *"Existe una correspondencia biyectiva, salvo isomorfismos, entre los subgrupos conexos divisores normales de un grupo de Lie, y los ideales de su álgebra"*.

Un ideal I de un álgebra de Lie L, se dice **conmutativo**, si $\forall X,Y \in I \to [X,Y]=0$, en consecuencia el subgrupo conexo correspondiente es conmutativo además de normal.

Si el homomorfismo ϕ:H $\rightarrow$ G entre grupos de Lie es suprayectivo y tiene su núcleo finito, entonces H/Ker$\phi \simeq$G, se tiene dimH=dim G, y por tanto dim$L$(H)=dim$L$(G), luego dichas álgebras son isomorfas. Recíprocamente, *"entre todos los grupos de Lie conexos que tienen la misma álgebra, salvo isomorfismos, existe un grupo que es simplemente conexo, y todos los demás se obtienen de éste mediante homomorfismos de núcleo finito"* (un número finito de puntos).

0-4 SUBGRUPOS UNIPARAMETRICOS Y APLICACION EXPONENCIAL

Sea G un grupo de Lie, R ó C el cuerpo base, y R el grupo de Lie de la recta real, sea ϕ:R $\rightarrow$ G un homorfismo inyectivo de grupos de Lie.

Al par (R,ϕ) se denomina **subgrupo uniparamétrico** de G. Por ser ϕ diferenciable y R conexo, todo subgrupo uniparamétrico es subvariedad diferenciable 1-dimensional y conexa. La representaremos por ϕ(t); (t$\in$R).

La aplicación inducida, $d\phi: (\partial/\partial r)_o \rightarrow d\phi(\partial/\partial r)_e$, permite definir el campo invariante a izquierda X$\in L$(G), tal que $X_e=d\phi((\partial/\partial r)_o)$. Las trayectorias de X son, por tanto, el subgrupo uniparamétrico **ϕ(t)** y las curvas **g** **ϕ(t)** ($\forall$g$\in G$). Al subgrupo ϕ(t) lo representaremos desde ahora por **ϕ_x(t)**.

Los campos **aX** (a$\in K$) son también invariantes a izquierda, y con las mismas trayectorias que X, por definir en cada puno vectores de la misma dirección, sólo se diferencian las trayectorias en el parámetro que es **at**. Es decir, $\phi_{ax}(t)=\phi_x(at)$.

Dada la aplicación $\phi_x : R \to G$ definida anteriormente, se denomina **aplicación exponencial**, a la aplicación

$$\exp: L(G) \to G$$

definida así:

$$\exp: tX=\phi_x(t)$$

se verifican las igualdades:

1) $\exp(t_1+t_2)X= \exp(t_1X)\times\exp(t_2X)$

2) $\exp(-tX)= \exp^{-1}(tX)$

Por ser ϕ un homomorfismo, $\phi(s+t)=\phi(s)\cdot\phi(t)$, y derivando respecto a **s** y haciendo a continuación s=0, se obtiene:

$$\phi(t)= \exp(t\phi'(o))$$

lo que justifica el nombre de *"exponencial"* dado a dicha aplicación.

$\phi'(t)$ es el vector tangente a $\phi(t)$ para cada vector $t \in R$, luego $\phi'(o)$ es el vector tangente al subgrupo uniparamétrico en el punto **e** (unidad de G). La igualdad anterior permite obtener el subgrupo uniparamétrico $\phi(t)$ a partir del vector tangente definido por el campo correspondiente en el punto unidad.

Recíprocamente, dado el subgrupo uniparamétrico $\phi(t)$, las curvas $\underline{g\phi(t)}$, $\forall g \in G$, son las trayectorias del campo correspondiente, a partir de las cuales podemos determinar el campo.

Si ϕ es un homomorfismo de grupos de Lie, entre los grupos de Lie H y G: $\phi: H \to G$, se verifica que es conmutativo el diagrama:

$$\begin{tikzcd} H \arrow[r, "\phi"] & G \\ L(H) \arrow[u, "\exp"] \arrow[r, "d\phi"] & L(G) \arrow[u, "\exp"'] \end{tikzcd}$$

o dicho de otro modo:

$$\phi(\exp tX) = \exp(d\phi(tX))$$

o también,

$$\phi(\phi_x(t)) = \phi(t)_{d\phi(x)}$$

0-5 REPRESENTACION ADJUNTA

Una representación de un grupo de Lie G, es un homomorfismo de G en GL(n,R), siendo n=dim G. Si el homomorfismo es inyectivo, se denomina **fiel**, y permite representar biyectivamente los elementos de G por los de un subgrupo de matrices de GL(n,R).

Una representación muy importante de un grupo de Lie es su representación adjunta, que se define a partir de los automorfismos internos de G de la siguiente manera:

Sea $\alpha \in G$; ρ_α el automorfismo interno;

$$\rho_\alpha : x \rightarrow \alpha x \alpha^{-1} \quad (x \in G)$$

ρ_α es a la vez un difeomorfismo de G en G, por ser producto de los difeomorfismos l_α, $r_{\alpha^{-1}}$. La aplicación subordinada entre los vectores tangentes a G, transforma cada vector tangente en **e** en otro vector tangente en **e**, ya que $\rho_\alpha(e)=e$. Por tanto:

$$d\rho_\alpha : X_\bullet \to Y_\bullet = M_\alpha X_\bullet \qquad (M_\alpha \in GL(n,R))$$

La aplicación:

$$Ad: G \to GL(n,R)$$

$$Ad: \alpha \to M_\alpha$$

es un homomorfismo de grupos de Lie, que se denomina **representación adjunta** de *G*. El homomorfismo inducido en sus álgebras respectivas:

$$d(Ad): L(G) \to L(GL(n,R)) = \text{End } (G)$$

se nota **ad**. A cada campo $X \in L(G)$ le corresponde el endomorfismo **adX** tal que $\forall Y \in L(G)$ se verifica:

$$ad\ X: Y \to [X,Y]$$

En función de la representación adjunta se define la **forma de Killing**, forma bilineal y simétrica sobre un álgebra de Lie $\boldsymbol{L}$, definida así:

$$\mathcal{K}(X,Y) = \text{Traza } (adX, adY).$$

Esta forma es asociativa, en el sentido de que

$$\mathcal{K}([X,Y],Z) = \mathcal{K}(X,[Y,Z]).$$

<u>0-6 CLASES DE ALGEBRAS DE LIE</u>

Sea $\boldsymbol{G}$ un grupo de Lie, y $\boldsymbol{L}$ su álgebra. Formemos la siguiente sucesión a partir de L; $L^1=[L,L]$; $L^2=[L^1,L^1]$;.... $L^i=[L^{i-1},L^{i-1}]$,...

Se dice que L es **<u>resoluble</u>** si existe un $n\in\mathbf{N}$, $n<\infty$, tal que $L^n\equiv\{0\}$.

De la definición se deduce $L^m\equiv\{0\}$, $\forall m>n$.

Como ejemplos sencillos podemos citar;

1) Si G es conmutativo, su álgebra L se dice <u>conmutativa</u> y tiene la propiedad de que $L^1\equiv[L,L]=\{0\}$. Es el caso más sencillo de álgebras.

2) Si L es bidimensional y no conmutativa, existe siempre una base X,Y tal que: $[X,Y]=X$.

   En consecuencia $L^1\equiv\{X\}$; $L^2\equiv\{0\}$

Es inmediato probar que todas las subálgebras, de un álgebra de Lie resoluble, son resolubles. En consecuencia sus ideales también lo son. L^i es ideal de *L*; y análogamente L^i es ideal de L^{i-1} en toda álgebra *L* resoluble. Si $B \lneq L$ de un álgebra resoluble, L/B también es resoluble.

También se verifica que *"la suma y la intersección de dos ideales resolubles de una misma álgebra son ideales resolubles"*.

La suma de todos los ideales resolubles de un álgebra de Lie es pues un ideal. Es el ideal **máximo** resoluble que denominamos **radical** (radL).

Si radL={0}, es que no existen ideales resolubles, salvo el trivial {0}. Un álgebra con esta propiedad se dice **simple**.

Un álgebra se dice **semi-simple** si no contiene ideales conmutativos no triviales.

Todo álgebra simple es semi-simple, pero el recíproco no es cierto.

En un álgebra semi-simple, [L,L]=L, y por tanto la sucesión $L^1, L^2, \ldots, L^i, \ldots$ tiene todos sus términos iguales a L. No es por tanto resoluble.

Para toda álgebra de Lie L:L/radL es semi-simple. Si L es resoluble, L≡radL.

Formemos ahora la siguiente sucesión a partir de *L*:

$$L_1=[L,L];\ L_2=[L,L_1];\ \ldots;L_i=[L,L_{i-1}];\ \ldots$$

se dice que L es nilpotente, si existe un $n \in \mathbf{N}$, $n<\infty$, tal que $L_n=\{0\}$; se verifica que todo $L^i \subset L_i$, por tanto si L es nilpotente, es también resoluble, pero el recíproco no es cierto.

Si L es un álgebra de Lie resoluble, su álgebra derivada $L^1=[L,L]$ es nilpotente, y recíprocamente.

En la sucesión $L_1, L_2, \ldots, L_i, \ldots$, se verifica que L_i es ideal de L_{i-1} y que L_i es ideal de L.

Todas las subálgebras de un álgebra de Lie nilpotentes son nilpotentes. Si H es ideal de L y L es nilpotente, se sigue que L/H es nilpotente. La suma de dos ideales nilpotentes de la misma álgebra es también nilpotente.

Un grupo de Lie se denomina simple, semi-simple, resoluble, nilpotente,.., según lo sea su álgebra correspondiente.

Ejemplo de grupo resoluble, el formado por las matrices reales triangulares ($a_{ij}=0$; $\forall i>j$; $i,j \leq n$) respecto de la operación producto.

El subgrupo de matrices triangulares, cuyos elementos de la diagonal principal son todos "1", forman un grupo nilpotente.

Los ejemplos más sencillos de grupos semi-simples son: $\underline{S^3}$ (esfera tridimensional), isomorfo al de los cuaternios unimodulares, y el grupo especial lineal tridimensional, SGL(2,R), (conjunto de matrices reales 2×2 de determinante 1).

Se denomina **centro** de un álgebra de Lie L, al conjunto de elementos $X \in L$, tales que $[X,Y]=0$, $\forall Y \in L$. El centro de L es un ideal de L; lo representaremos por **cen$L$**.

Si L es nilpotente no nula, tiene un centro no nulo.

Se denomina **centralizador de S respecto de L** (ScL), al conjunto de elementos $X \in L$, tales que $[X,Y]=0$; ($\forall Y \in S$). Lo representaremos por **$\mathrm{cen}_L S$**.

Si B es ideal de L, se verifica que $\mathrm{cen}_L B$ es ideal de L.

La suma de dos ideales nilpotentes de la misma álgebra es también nilpotente.

La suma de todos los ideales nilpotentes de un álgebra es otro ideal nilpotente que se denomina **nihil-radical de L**, y que representaremos por **(nil-rad$L$)**. Se verifica la propiedad:

$$[L, \mathrm{rad}L] \subset \text{nil-rad}L.$$

En general, un álgebra de Lie no tiene por qué ser necesariamente semi-simple, simple, resoluble o nilpotente, sino que puede ser suma directa de varias álgebras de diferentes clases. Por ejemplo, si a $R^4-\{0\}$, le dotamos de la estructura de grupo de Lie por biyección entre sus puntos y las del grupo de cuaternios no nulos,

$$R^4-\{0\} = \text{centro} \times S^3$$

(siendo el centro de $R^4-\{0\}$ la recta $x_1=x_2=x_3=x_4$)

luego su álgebra es:

$$L(R^4-\{0\})= \text{cen}L \oplus L(S^3)$$

esta última semi-simple, y en general, si $\mathcal{L}$ es un álgebra de un grupo de Lie compacto y real;

$$L= \text{cen}L \oplus [L,L]$$

siendo $[L,L]$ semi-simple. Y más general todavía en toda álgebra de Lie L, no resoluble,

$$\mathcal{L}= \text{rad}L \oplus \mathcal{M}$$

siendo $\mathcal{M}$ semi-simple.

Si $\mathcal{L}$ es resoluble, $\mathcal{L}\equiv$radL; y si $\mathcal{L}$ es nilpotente, $\mathcal{L}\equiv$nil-radL.

Existen criterios que permiten reconocer la clase de un álgebra de Lie, en función de la forma de *Killing* (0-5).

Los criterios de *Cantan* afirman que:

1) L es resoluble si y si sólo si, la forma de *Killing* se anula idénticamente sobre $L \times L'$.

2) L es semi-simple si y sólo si, la forma de *Killing* sobre $L \times L$ es no-degenerada.

0-7 CLASIFICACION DE LAS ALGEBRAS DE LIE SIMPLES

La clasificación de las álgebras de Lie simples sobre un cuerpo base K algebraicamente cerrado de característica cero, se establece en función de los diagramas de *Dynkin*, demostrándose que existen 4 series de álgebras simples, y cinco álgebras simples excepcionales o exóticas. Las cuatro series son las siguientes:

1) $A_l = sl(l+1, K)$; son las álgebras especiales lineales, conjunto de matrices $(l+1) \times (l+1)$ de traza 0.

2) $O(2l+1, K)$; $l > 1$; álgebras de Lie "*ortogonales*" de rango *l*. El álgebra $O(m, k)$ se define como el conjunto de todos los endomorfismos sobre un espacio vectorial $V(\dim V = m)$ tales que si $\vec{u}, \vec{v} \in V$ y $\alpha \in O(m, k)$:

$$\langle\alpha\vec{u},\vec{v}\rangle + \langle\vec{u},\alpha\vec{v}\rangle = 0$$

siendo $\langle\ ,\ \rangle$ una forma bilineal simétrica no-degenerada sobre $V\times V$.

3) $sp(l,K)$; $l>2$, denota las álgebras de Lie simplécticas de rango l. Se definen como el conjunto de endomorfismos sobre un K-espacio vectorial de dimensión $2l$, tales que si $\vec{u},\vec{v}\in V$, y $\alpha\in sp(l,K)$, se verifica,

$$\langle\alpha\vec{u},\vec{v}\rangle + \langle\vec{u},\alpha\vec{v}\rangle = 0$$

donde $\langle\ ,\ \rangle$ es una forma bilineal hemi-simétrica no-degenerada sobre $V\times V$.

4) $O(2l,k)$; $l>3$; álgebra de Lie ortogonales, en que V es de dimensión par.

Toda álgebra semi-simple es suma directa de álgebras simples.

La clasificación de las álgebras resolubles está por hacer. Al estudio de estas álgebras y al de las álgebras nilpotentes dedicamos los capítulos siguientes.

1. CAMPOS CENTRALES Y NORMALES

CAPITULO I
CAMPOS CENTRALES Y NORMALES

I-1 IDEALES UNIDIMENSIONALES EN UN ALGEBRA DE LIE

Sea L un álgebra de Lie sobre un cuerpo base conmutativo. Los ideales unidimesionales se pueden generar o por campos X tales que $[X,Z]=0$, $\forall z \in L$ o bien se generan por campos Y tales que $[Y,Z]=aY$, siendo **a** función de Y y de Z. A los campos X los denominaremos *centrales* y a los campos Y *normales*.

Los campos centrales constituyen el centro de L.

I.2 PROPIEDADES DE LOS CAMPOS NORMALES

Los campos normales verifican las siguientes propiedades:

A) Si Y es normal, entonces aY también es normal. En efecto:

$$\text{Si } [Y,Z]= bY;\ [aY,Z]= abZ = b(aY)$$

B) Si Y_1 e Y_2 son normales, entonces $[Y_1,Y_2]=0$. En efecto, $[Y_1,Y_2]= a_1Y_1$, $[Y_1,Y_2]= a_2,Y_2$, por tanto $a_1Y_1-a_2Y_2=0$. Si Y_1 e Y_2 son linealmente independientes, entonces $a_1=a_2=0$, por tanto: $[Y_1,Y_2]=0$. Si no son linealmente independientes, $Y_1=Y_2/a_1$ de donde $[Y_1,Y_2]=0$.

C) Si los campos normales $Y_1,\dots,Y_r$ son linealmente independientes tales que $[Y_i,Z]=b_iY_i$ para que también sea normal cualquier combinación lineal de ellos es condición necesaria y suficiente que: $b_1=b_2=\dots=b_r$. En efecto:

Si $b_1=\dots=b_r=b$ entonces:

$$[\Sigma a_iY_i,Z]= \Sigma a_i[Y_i,Z]= \Sigma a_ibY_i= b(\Sigma a_iY_i)$$

por tanto Σa_iY_i es normal. Recíprocamente, si Σa_iY_i es normal $[\Sigma a_iY_i,Z]= \lambda\Sigma a_iY_i= \Sigma a_i[Y_i,Z]= \Sigma a_ib_iY_i$, por tanto $b_i=\lambda$ $\forall i$.

DEFINICION I.1

Dos campos normales diremos que son conjugados si $a_1Y_1+a_2Y_2$ también es un campo normal. La conjugación entre campos normales es una relación de equivalencia.

TEOREMA I-1-a

Si dos álgebras de Lie reales son isomorfas, los campos centrales (normales) de la primera de transforman en los campos centrales (normales) de la segunda.

Demostración

Esto es consecuencia de que el producto corchete de dos campos en la primera, se transforma mediante el isomorfismo en el producto corchete de los campos homólogos; luego si $[X,Z]=0 \quad \forall Z\in L_1$ se verificará que $[X',Z']=0 \quad \forall Z'$, luego X' también es central si X lo es. Lo mismo sucede con los campos normales.

TEOREMA I-1-b

Si dos álgebras de Lie reales son isomorfas, sus respectivas sucesiones $L^1, L^2, \ldots, L^i, \ldots$ y las $L_1, L_2, \ldots, L_i, \ldots$ son también isomorfas.

Demostración

La razón es la misma que en el teorema anterior. Sin embargo, el recíproco no es cierto, como pone de manifiesto el siguiente ejemplo:

$L=\{Y_1, Y_2, Z\}$ siendo $[Y_1, Z]= Y_1, \quad [Y_1, Y_2]=0$

$M=\{Y, Z, U\}$ donde $[Y, Z]=0, \quad [Y, U]=Y, \quad [Z, U]=Y+Z$

tienen isomorfos respectivamente; $L^1, L^2, L_1, L_2, \ldots$ y $M^1, M^2, M_1, M_2, \ldots$ y sin embargo las álgebras L y M no son isomorfas, puesto que mientras L contiene dos ideales unidimensionales, M sólo contiene uno.

I.3 EJEMPLOS DE CAMPOS CENTRALES Y NORMALES EN ALGEBRAS RESOLUBLES

3.1) El grupo

$$\begin{pmatrix} e^x & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

con $(x,y) \in R^2$ admite como base de un álgebra de Lie los campos invariantes a izquierda $Y(0,e^x)$; $Z(1,0)$ tal que $[Y,Z]=-Y$, donde Y es normal.

3.2) El grupo

$$\begin{pmatrix} 1 & x & y \\ 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

con $(x,y,z) \in R^3$ admite como base de su álgebra de Lie los campos invariantes a izquierda:

$$X(0,1,0); \quad Z_1(1,0,0); \quad Z_2(0,x,1) \quad \text{tales que:}$$

$$[X,Z_1] = [X,Z_2] = 0, \qquad [Z_1,Z_2] = X$$

En este caso el campo X es central.

3,3) El grupo

$$\begin{pmatrix} e^{x} & z \\ 0 & e^{y} \end{pmatrix}$$

con $(x,y,z)\in R^3$ admite la base: $X(1,1,z)$; $Y(0,0,e^{x})$; $Z(1,0,0)$ siendo:

$$[X,Y] = 0; \quad [Y,Z] = -Y; \quad [Z,X] = 0$$

En este caso el campo X es central y el Y normal. El álgebra es suma directa de dos: $\{X,Y,Z\}=\{X\} \quad \{Y,Z\}$

3,4) Grupo de Heisenberg generalizado

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots\ldots & 0 & z_1 & x_1 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots\ldots & 0 & z_2 & x_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots\ldots & 1 & z_p & x_p \\ 0 & 0 & 0 & \ldots\ldots & 0 & 0 & u \\ 0 & 0 & 0 & \ldots\ldots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

admite como base de su álgebra la siguiente:

$$X_i = \frac{\partial}{\partial x_i} \; ; \quad U = \frac{\partial}{\partial u} + \Sigma z_j \frac{\partial}{\partial x_j} \; ; \quad Z_m = \frac{\partial}{\partial z_m}$$ donde

$[X_i, X_j] = 0$; $[Z_m, Z_p] = 0$; $[X_i, Z_m] = 0$; $[X_i, U] = 0$; $[Z_p, U] = X_p$

Por tanto los campos $X_1, \ldots, X_n$ son centrales y no hay campos normales. Los grupos de Heisenberg son nilpotentes.

3,5) Grupo definido por las matrices:

$$\begin{pmatrix} 1 & y_1 & \ldots\ldots & y_n \\ 0 & e^z & \ldots\ldots & 0 \\ \ldots\ldots & & \ldots\ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots\ldots & e^z \end{pmatrix}$$

su álgebra admite como base de campos invariantes a izquierda la siguiente:

$$Y_1(1,0,\ldots,0);\quad Y_2(0,1,\ldots,0);\quad \ldots\quad Y_n(0,0,\ldots,1);\quad Z(y_1,\ldots,y_n,1)$$

donde $[Y_i, Z] = Y_i$ $(\forall i)$, por tanto todos los campos Y_i son normales, y es número máximo de campos normales que puede contener una base de un álgebra de dimesión n+1, puesto que si todos fueran campos normales, el álgebra sería conmutativa y en realidad serían centrales.

I.4 CENTRALIZADOR DE UN CAMPO NORMAL

En las álgebras resolubles vamos a elegir en cada una de ellas, una base $X_1, \ldots, X_m$ de su centro; seguida del mayor número de campos normales linealmente independientes $Y_1, \ldots, Y_n$ completando la base con otros campos que estudiamos a continuación.

DEFINICION I-2

Se denomina **centralizador de un campo normal** de un álgebra de Lie, L, y denotaremos por $\text{cen}_Y L$ al conjunto de campos $Z \in L$ tales que $[Y,Z]=0$.

TEOREMA I-4-a

Se verifica que $\dim \text{cen}_Y L = \dim L - 1$

Demostración

Sea $\mathbf{X}_1, \ldots, \mathbf{X}_m$, $\mathbf{Y}_1, \ldots, \mathbf{Y}_n$, $\mathbf{Z}_1, \ldots, \mathbf{Z}_p$ una base de L donde X_i e Y_j son los campos citados anteriormente y Z_n otros campos hasta completar la base.

Sea $\mathbf{Y}$ un campo normal, se verifica que $X_i, Y_j \in \text{cen}_Y L$ así como todas sus combinaciones lineales.

Entre los campos $Z_1, \ldots, Z_p$ distinguimos, en primer lugar los $Z_1, \ldots, Z_l$, tales que $[Z_j, Y]=0$ es decir,

$Z_j \in cen_Y L$ con $j \leq l$ y los $Z_{l+1}, \ldots, Z_p$ tales que $[Z_j, Y] = a_j Y$, $a_j \neq 0$.

En este caso $[Z_j/a_j, Y] = Y$; $j = l+1, \ldots, p$ y por tanto:

$$\left[\frac{Z_j}{a_j} - \frac{Z_p}{a_p}, Y\right] = 0$$

con lo que en la base de L se puede sustituir

$$Z_{l+1}, \ldots, Z_{p-1} \quad \text{por} \quad Z'_h = \frac{Z_h}{a_h} - \frac{Z_p}{a_p} \quad (h = l+1, \ldots, p-1)$$

En este caso, todos los campos:

$$X_1, \ldots, X_m, \quad Y_1, \ldots, Y_n, \quad Z_1, \ldots, Z_l, \quad Z'_{l+1}, \ldots, Z'_{p-1}$$

pertenecen al centralizador de Y, y por tanto:

$$\dim L - 1 = \dim cen_Y L$$

<u>**TEOREMA I-4-b**</u>

Si Y es un campo normal de L, se verifica que el centralizador de Y en L es ideal de L.

Demostración

Si $Z \in \text{cen}_Y L$, vamos a probar que $[Z,U] \in \text{cen}_Y L$, $\forall U \in L$. En efecto, conforme a la identidad de *Jacobi*:

$$[Y,[Z,U]] + [Z,[U,Y]] + [U,[Y,Z]] = 0$$

Como $[Y,Z]=0$, la igualdad anterior se reduce a:

$$[Y,[Z,U]] = 0$$

con lo que queda probado el teorema.

TEOREMA I-4-c

Si dos campos normales son conjugados, entonces tienen el mismo centralizador.

Demostración

Sean Y_1 e Y_2 conjugados será $[Y_1,Z]=aY_1$, $[Y_2,Z]=aY_2$ $\forall Z \in L$, si $Z \in \text{cen}_{Y_1} L \Rightarrow [Y_1,Z]=0 \Rightarrow [Y_2,Z]=0$. Por tanto $Z \in \text{cen}_{Y_2} L$, es decir, $\text{cen}_{Y_1} L \subset \text{cen}_{Y_2} L$. Análogamente $\text{cen}_{Y_2} L \subset \text{cen}_{Y_1} L$ y por tanto $\text{cen}_{Y_1} L \equiv \text{cen}_{Y_2} L$.

El recíproco no es cierto, pues puede ser que dos campos normales tengan el mismo centralizador y sin embargo no sean conjugados. Por ejemplo:

$L \equiv \{Y_1, Y_2, Z\}$ tales que $[Y_1,Y_2]=0$, $[Y_1,Z]=aY_1$; $[Y_2,Z]=bY_2$

En este caso $cen_{Y_1}L \equiv cen_{Y_2}L \equiv \{Y_1, Y_2\}$ y cuando $a \neq b \neq 0$ los campos no son conjugados.

La relación $cen_{Y_1}L \equiv cen_{Y_2}L$ es de equivalencia.

Entre los campos que tienen el mismo centralizador que un campo normal, no todos son normales, ya que si Y_1 e Y_2 son dos campos normales que tienen el mismo centralizador y no son conjugados, cualquier combinación $a_1Y_1+a_2Y_2$ tiene el mismo centralizador y no es normal.

Una clase de campos conjugados está contenida en una clase de campos con el mismo centralizador.

Si dos campos normales Y_1, Y_2 de un álgebra de Lie tienen distinto centralizador, la intersección de ambos centralizadores es tal que:

$$\dim (cen_{Y_1}L \cap cen_{Y_2}L) = \dim L-2$$

y en general si hay h campos normales con distinto centralizador, dos a dos, será:

$$\dim (cen_{Y_1}L \cap \ldots\ldots \cap cen_{Y_h}L) = \dim L-h$$

A la intersección de los centralizadores de todos los campos normales la denominaremos **centralizador normal**, lo representaremos por **CN**. El centralizador normal del álgebra de Lie L es un ideal de L.

Entonces una base de L la podemos escribir:

$$X_1, \ldots, X_m,\ Y_1, \ldots, Y_n,\ Z_1, \ldots, Z_p,\ Z_{p+h}, \ldots, Z_{p+n}$$

donde $\{X_1, \ldots, X_m, Y_1, \ldots, Y_n, Z_1, \ldots, Z_p\}$ es base del centralizador normal. Y para cada $Y_i \in L$, existe un Z_k tal que $[Y_i, Z_k] \neq 0$ con $k=p+1 \ldots p+h$.

TEOREMA I-4-d

El producto corchete $[Z_j, Z_h]$ pertenece al centralizador normal $\forall j, h$.

Demostración

En la igualdad de Jacobi,

$$([Z_j, Z_h], Y_i) + ([Z_h, Y_i], Z_j) + ([Y_i, Z_h], Z_j) = 0$$

se verifica que $[Y_i, Z_j] = [Y_i, Z_n] = 0$ o bien: $[Y_i, Z_j] = aY_i$, $[Y_i, Z_n] = 0$, luego resulta:

$$[[Z_j, Z_n], Y_i] = 0$$

Por tanto: $[Z_j, Z_h] \in cen_{y_i} L$

COROLARIO

Si L es un álgebra de Lie resoluble, se verifica que

$$L' = [L,L] \subset CN$$

ya que si $[X_i,Y_j]=[X_i,Z_n]=0$ y $[Y_i,Z_n]=0$ o bien $[Y_i,Z_n]=a_iY_i$ y como $[Z_i,Z_j]\in CN$, resultará que todos los productos que constituyen $[L,L]$ están contenidos en el centralizador normal. Luego,

$$[L,L] \subset CN$$

I.5 TIPOS DE ALGEBRAS DE LIE EN RELACION CON SUS IDEALES UNIDIMENSIONALES

Un álgebra de Lie que contiene un ideal unidimensional no trivial no puede ser semi-simple, ya que éstas no contienen ideales abelianos no triviales, y por tanto tampoco puede ser simple.

TEOREMA I-5-a

Si un álgebra de Lie es nilpotente no puede contener campos normales.

Demostración

Si Y es normal $[Y,Z]=aY$; $\forall Z\in L$, siendo $a\neq 0$ para algún Z al menos. Se deduce pues que: $Y\in L_1=[L,L]$ Por el mismo motivo, $Y\in L_2=[L_1,L]$ y en definitiva $Y\in L_n=[L_{n-1},L]$ y por tanto no podrá ser $L_n\equiv\{0\}$, y como consecuencia L no será nilpotente.

COROLARIO

Un álgebra de Lie que tiene campos normales no es semi-simple, ni nilpotente. Por tanto, o es resoluble, sin ser nilpotente, o es suma directa de otras.

TEOREMA I-5-b

Si L es un álgebra resoluble, y $L'=[L,L]$ no contiene al centro de L, entonces L es suma directa de dos álgebras.

Demostración

Si L tiene una base:

$$L \equiv \{X_1\ldots X_r,\ X_{r+1}\ldots X_m,\ Y_1\ldots Y_n,\ Z_1\ldots Z_p\}$$

donde $X_1\ldots X_r$, $X_{r+1}\ldots X_m$ constituyen una base de un centro, tales que el subespacio definido por los campos $X_1\ldots X_r$ no está contenido en L'; entonces el subespacio formado por

$X_1 \ldots X_r$ no es resultado de los productos corchetes de ningún par de campos de L con lo que:

$$L = \{X_1 \ldots X_r\} \oplus \{X_{r+1} \ldots X_m,\ Y_1 \ldots Y_n,\ Z_1 \ldots Z_p\}$$

Ejemplos:

a) El álgebra de tres dimesiones $L \equiv \{X, Y, Z\}$ donde $[X,Y]=[X,Z]=0$, $[Y,Z]=Y$, es suma directa de $\{X\} \oplus \{Y,Z\}$.

b) El álgebra $\{X_1, X_2, Y, Z\}$ tal que $[X_i, Y]=[X_i, Z]=0$, $[Y,Z]=Y$. Es, asimismo:

$$L = \{X_1, X_2\} \oplus \{Y, Z\}$$

c) El álgebra $L \equiv \{X, Y_1, Y_2, Z\}$ donde:

$[X, Y_i]=[X,Z]=0$; $[Y_i, Z]=Y_i$ es tal que $L \equiv \{X\} \oplus \{Y_1, Y_2, Z\}$

Un álgebra puede no ser resoluble y sin embargo satisfacer el teorema anterior; así en el grupo de Lie sobre $R^4-\{0\}$ definido por los cuaternios no nulos, un álgebra $\{X, Z_1, Z_2, Z_3\} = \{X\} \quad \{Z_1, Z_2, Z_3\}$ donde $\{Z_1, Z_2, Z_3\}$ es el álgebra semi-simple de S^3 y $\{X\}$ es el centro.

En este caso $L = \mathrm{cen}L \oplus L'$

I.6 CLASIFICACION DE LAS ALGEBRAS DE LIE RESOLUBLES REALES Y TRIDIMENSIONALES

Vamos a clasificar las álgebras de Lie resolubles reales y tridimensionales, atendiendo a las dimensiones de sus sucesivas álgebras derivadas L^1, L^2, L^3; y en cada uno de estos casos vamos a tener en cuenta el hecho de que los ideales sean centrales o normales.

1º) Si L^1 es de dimensión cero, entonces L es conmutativa y todos sus campos son centrales.

2º) Si L^1 es de dimensión uno, como L^1 es un ideal de L, el campo que genera L^1, es un ideal unidimensional y por tanto dicho campo es central o normal.

Ejemplos:

a) Dado el grupo $\begin{pmatrix} e^x & z \\ 0 & e^y \end{pmatrix}$

una base de campos invariantes a izquierda es:

$X(1,1,Z)$; $Y(0,0,e^x)$; $Z(1,0,0)$ tales que:

$[X,Y]=[X,Z]=0$; $[Y,Z]=-Y$

En este caso $\dim L^1=1$ siendo Y un campo normal.

b) El álgebra de base $\{X, Z_1, Z_2\}$ tales que:

$$[X, Z_i]=0, \quad [Z_1, Z_2]=X$$

es tal que $\dim L^1=1$ siendo X un campo central.

Este es el ejemplo más sencillo de álgebra nilpotente no conmutativa.

3º) Sea L^1 de dimesión dos, se puede presentar uno de los siguientes casos:

3.1) Si L^1 no es conmutativa, es decir, si $\dim L^1=2$, $\dim L^2=1$, y $\dim L^3=0$.

Este caso es imposible pues se tendrá: $L=\{Z_1, Z_2, Z_3\}$; $L^1=\{Z_1, Z_2\}$; $L^2=\{Z_1\}$ siendo:

$$[Z_1, Z_2]=aZ_1; \quad [Z_1, Z_3]=bZ_1; \quad [Z_2, Z_3]=cZ_1+dZ_2$$

En este caso aplicando la identidad de *Jacobi* resulta:

$$ad=0 \Rightarrow a=0$$

entonces la dimensión de L^2 es cero y L^1 sería conmutativa.

Si es $d=0$, entonces $\dim L^1=1$ en contra de la hipótesis.

3.2) Si L' es bidimensional y conmutativa, sea su base $\{Z_1, Z_2\}$, siendo $\{Z_1, Z_2, Z_3\}$ base de L. Se tendrá:

$$[Z_1, Z_2]=0; \quad [Z_1, Z_3]=a_1 Z_1+a_2 Z_2; \quad [Z_2, Z_3]=b_1 Z_1+b_2 Z_2$$

donde, por ser L' bidimensional, se verificará:

$$A = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$$

Tal álgebra no puede tener campos centrales, ya que si

$$U= \sum_1^3 m_i Z_i$$

es central se verificará:

$$[\sum_{i=1}^3 m_i Z_i, Z_1]= 0 \Rightarrow m_3 a_1= 0, \quad m_3 a_2= 0$$

Si es $a_1=a_2=0$ entonces $A=0$ en contra de la hipótesis. Si es $m_3=0$, será

$$[\sum_{i=1}^2 m_i Z_i, Z_3]= 0, \quad \text{lo que supone:}$$

$$m_1 a_1+m_2 b_1=0; \quad m_1 a_2+m_2 b_2=0,$$

sistema homogéneo que para ser compatible exige que:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = 0$$

en contra de la hipótesis de ser L' bidimensional.

Estudiemos en este caso la existencia de campos normales:

Si $U=\sum_{i=1}^{3} m_i Z_i$ es normal, se verificará:

$$[\sum_{i=1}^{3} m_i Z_i, Z_1] = \lambda \sum_{i=1}^{3} m_i Z_i \quad \text{de donde resulta:}$$

$$\begin{aligned} \lambda m_1 + m_3 a_1 &= 0 \\ \lambda m_2 + m_3 a_2 &= 0 \\ \lambda m_3 &= 0 \end{aligned}$$

La condición de compatibilidad de este sistema homogéneo viene dada por:

$$\begin{vmatrix} \lambda & 0 & a_1 \\ 0 & \lambda & a_2 \\ 0 & 0 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^3 = 0$$

Lo que supone que

$$\begin{aligned} m_3 a_1 &= 0 \\ m_3 a_2 &= 0 \end{aligned}$$

Distinguimos los siguientes casos:

a) $\mathbf{a_1=a_2=0}$ lo que supone $A=0$ en contra de la hipótesis de ser L^1 bidimensional.

b) Sea $m_3=0$ siendo $a_1\neq 0$, $a_2\neq 0$, será $U=m_1Z_1+m_2Z_2$ verificándose que: $[U,Z_i]=0$, con $i=1,2$. Se tendrá que:

$[U,Z_3]=[m_1Z_1+m_2Z_2,Z_3]=m_1(a_1Z_1+a_2Z_2)+m_2(b_1Z_1+b_2Z_2)=$
$=\mu(m_1Z_1+m_2Z_2)$. Por tanto,

$$m_1(a_1-\mu)+m_2b_1 = 0;$$
$$m_1a_2+m_2(b_2-\mu) = 0$$

La condición de compatibilidad de este sistema homogéneo exige:

$$\begin{vmatrix} a_1-\mu & b_1 \\ a_2 & b_2-\mu \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \mu^2-\mu(a_1+b_2)+a_1b_2-a_2b_1 = 0$$

Al ser el término independiente distinto de cero se presentan los siguientes casos:

a) **Dos raíces distintas no nulas**, lo que supone dos campos normales reales.

<u>Ejemplo</u>: $\mathcal{L}\equiv\{Y_1,Y_2,Z\}$; $[Y_i,Z]=a_iY_i$; $[Y_1,Y_2]=0$

b) **Una raíz doble**, lo que supone un campo normal.

<u>Ejemplo</u>: $\mathcal{L}\equiv\{Y,Z,U\}$; $[Y,Z]=0$, $[Y,U]=Y$; $[Z,U]=Y+Z$

c) **Dos raíces imaginarias conjugadas.**

El grupo de los movimientos del plano, admite como base de su álgebra: $\{Z_1,Z_2,Z_3\}$ tales que $[Z_1,Z_2]=0$; $[Z_3,Z_1]=Z_2$; $[Z_2,Z_3]=Z_1$. Se prueba que los campos $Z_1\pm iZ_2$ son normales y generan dos ideales unidimensionales complejos.

A este ejemplo nos vamos a referir en el capítulo próximo.

Las álgebras de Lie tridimensionales y resolubles atendiendo a la dimensión de su centro las podemos clasificar como sigue:

1) Que el centro sea de dimensión tres $\{X_1, X_2, X_3\}$; en este caso el álgebra es conmutativa y equivale también al caso $\{X_1, X_2, Z\}$ siendo $[X_i, Z]=0$

2) Que el centro sea de dimensión uno. Pueden presentarse los siguientes casos:

2.1) Que tenga un campo normal.

$\{X, Y, Z\}$; $[X, Y]=[X, Z]=0$, $[Y, Z]=-Y$

2.2) Que no tenga ningún campo normal

$\{X, Z_1, Z_2\}$, tal que $[X, Z_i]=0$; $[Z_1, Z_2]=X$

3) Que el centro sea nulo. Pueden presentarse los siguientes casos:

3.1) Que tenga un campo normal.

<u>Ejemplo</u>: $\{Y, Z, U\}$; $[Y, Z]=0$; $[Y, U]=Y$

$[Z, U]=Y+Z$

3.2) Que L tenga dos campos normales reales.

$L\equiv\{Y_1, Y_2, Z\}$; $[Y_i, Z]=a_i Y_i$; $[Y_1, Y_2]=0$

3.3) Que no tenga campos normales reales.

$\{Z_1, Z_2, Z_3\}$ donde

$[Z_1, Z_2]=0$, $[Z_3, Z_1]=Z_2$, $[Z_2, Z_3]=Z_1$

En este caso, como se ha visto, $Z_1 \pm iZ_2$ son campos normales complejos conjugados.

I-7 CLASIFICACION DE LAS ALGEBRAS RESOLUBLES REALES DE 4-DIMENSIONES

Vamos a considerar la clasificación de las álgebras resolubles de 4-dimensiones, obtenidas a partir de la clasificación que figura en *Bernat* [1]. Como siempre, designaremos por X_i a los campos centrales y por Y_j a los normales.

1) Si existiese una base $L\equiv\{X_1, X_2, X_3, X_4\}$ con cuatro campos centrales, ésta álgebra es conmutativa.

   Si existiera una base con tres campos centrales $L\equiv\{X_1, X_2, X_3, Z\}$ todos los productos corchete serán nulos y en consecuencia Z será también central y estaríamos en el caso anterior.

2) Si existe una base con dos campos centrales X_1, X_2 será $L\equiv\{X_1, X_2, Y, Z\}$ $[X_i, Y]=[X_i, Z]=0$; $[Y, Z]=Y$ o bien $L\equiv\{X_1, X_2, Z_1, Z_2\}$ $[Z_1, Z_2]=X_1$ $[X_i, Z_j]=0$

En ambos casos L' no contiene al centro de L y ésta es suma directa de dos álgebras, siendo respectivamente:

$L \equiv \{X_1\} \oplus \{X_2\} \oplus \{Y, Z\}$ y

$L \equiv \{X_2\} \oplus \{X_1, Z_1, Z_2\}$

3) Si hay una base con un campo X caben las siguientes posibilidades:

3-a) $L \equiv \{X, Y_1, Y_2, Z\}$ siendo $[Y_i, Z] = a_i Y_i$. En este caso L' tampoco contiene al centro de L y será:

$L \equiv \{X\} \oplus \{Y_1, Y_2, Z\}$

3-b) $L \equiv \{X, Y, Z_1, Z_2\}$ siendo la tabla multiplicativa:

$[Y, Z_1] = -Y$; $[Y, Z_2] = 0$; $[Z_1, Z_2] = X$,

$[X, Y] = [X, Z_i] = 0$

3-c) $L \equiv \{X, Z_1, Z_2, Z_3\}$ siendo:

$[X, Z_i] = 0$; $[Z_1, Z_2] = Z_3$; $[Z_1, Z_3] = X$;

$[Z_2, Z_3] = 0$

Tal álgebra es nilpotente.

4) Que el centro sea nulo. Entonces pueden presentarse los siguientes casos:

4-1) Existencia de una base con tres campos normales bien reales como en:

$L \equiv \{Y_1, Y_2, Y_3, Z\}$; con $[Z, Y_1] = Y_1$;

$[Z, Y_2] = \alpha Y_2$, $[Z, Y_3] = \beta Y_3$

o dos de ellos imaginarios conjugados, como en:

$L \equiv \{Y, Z_1, Z_2, Z_3\}$ donde:

$[Z_1, Y] = aY$; $[Z_1, Z_2] = \beta Z_2 - Z_3$; $[Z_1, Z_3] = Z_1 + \beta Z_3$

$[Y, Z_2] = [Y, Z_3] = [Z_2, Z_3] = 0$.

En este caso $Z_2 \pm i Z_3$ son normales.

4-2) Dos campos normales

que pueden ser ambos reales como en:

$L \equiv \{Y_1, Y_2, Z_1, Z_2\}$ siendo:

$[Y_1, Y_2] = 0$, $[Z_1, Y_1] = \alpha Y_1$, $[Y_1, Z_2] = 0$;

$[Y_2, Z_1] = -Y_2$, $[Y_2, Z_2] = 0$; $[Z_1, Z_2] = Z_2 + Y_2$

o dos campos normales imaginarios conjugados:

$L \equiv \{Z_1, Z_2, Z_3, Z_4\}$ siendo:

$[Z_1, Z_3] = Z_3$, $[Z_1, Z_4] = Z_4$, $[Z_2, Z_3] = -Z_4$

$[Z_2, Z_4] = Z_3$, $[Z_1, Z_2] = 0$, $[Z_3, Z_4] = 0$

Los campos $Z_3 \pm i Z_4$ son normales.

4-3) Que exista una base con un solo campo normal.

- $L \equiv \{Y, Z_1, Z_2, Z_3\}$ donde:

  $[Z_1, Z_3] = Z_3$, $[Z_1, Y] = Y$; $[Z_2, Z_3] = Y$

  $[Z_1, Z_2] = 0$; $[Z_2, Y] = 0$, $[Z_3, Y] = 0$

- $L \equiv \{Y, Z_1, Z_2, Z_3\}$ siendo:

  $[Z_1, Z_2] = Z_2 + Z_3$, $[Z_1, Z_3] = Z_3 + Y$, $[Z_1, Y] = Y$;

  $[Z_2, Z_3] = [Z_2, Y] = [Z_3, Y] = 0$

- $L \equiv \{Y, Z_1, Z_2, Z_3\}$

  $[Z_2, Z_3] = Y$; $[Z_1, Z_2] = (\alpha - 1) Z_2$; $[Z_1, Z_3] = Z_3$

  $[Z_1, Y] = \alpha Y$; $[Z_2, Y] = [Z_3, Y] = 0$

- $L \equiv \{Y, Z_1, Z_2, Z_3\}$ donde:

  $[Z_2, Z_3] = Y$; $[Z_1, Z_2] = Z_2 + Z_3$; $[Z_1, Z_3] = Z_3$

$[Z_1, Y]=2Y, \quad [Z_2, Y]=[Z_3, Y]=0$

- $L\equiv\{Y, Z_1, Z_2, Z_3\}$ siendo:

$[Z_2, Z_3]=Y; \quad [Z_1, Z_2]=\alpha Z_2-Z_3; \quad [Z_1, Z_3]=Z_2+\alpha Z_3$

$[Z_1, Y]=2\alpha Y; \quad [Z_2, Y]=[Z_3, Y]=0$

I-8 CLASIFICACION DE LAS ALGEBRAS NILPOTENTES DE 5-DIMENSIONES

Vamos a dar la clasificación de las álgebras de Lie nilpotentes de dimensión 5, siguiendo a *Morosov* [1] y *Magnin* [1]. Junto a la base de dichas álgebras damos las dimensiones de la sucesión, L, L_1, L_2...

En la tabla multiplicativa no señalaremos los productos nulos.

Como un álgebra de Lie nilpotente no nula tiene un centro no nulo, y además no tiene campos normales, existen bases de un álgebra nilpotente que podemos escribir así:

$$L\equiv\{X_1, \ldots, X_m, Z_1, \ldots, Z_n\}$$

Podemos, pues, clasificar las álgebras nilpotentes de 5 dimensiones, atendiendo a la dimensión de su centro.

8-1) <u>Centro de dimensión cinco</u>

8-1-a) $\{X_1, X_2, X_3, X_4, X_5\}$, (5,0),
álgebra conmutativa. Si el centro es de dimensión 4, todos los productos serán cero, y por tanto, será conmutativa y el centro es, en definitiva, de dimensión 5.

8-2) <u>Centro de dimensión tres</u>

8-2-a) $\{X_1, X_2, X_3, Z_1, Z_2\}$; (5,1)
$[Z_1, Z_2]=X_3$

8-3) <u>Centro de dimensión dos</u>

8-3-a) $\{X_1, X_2, Z_1, Z_2, Z_3\}$ (5,2)
$[Z_1, Z_2]=X_1$; $[Z_1, Z_3]=X_2$
Algebra de Heisenberg.

8-3-b) $\{X_1, X_2, Z_1, Z_2, Z_3\}$ (5,3,2)
$[Z_1, Z_2]=Z_3$, $[Z_1, Z_3]=X_1$, $[Z_2, Z_3]=X_2$

8-3-c) $\{X_1, X_2, Z_1, Z_2, Z_3\}$ (5,2,1)
$[Z_1, Z_2]=Z_3$, $[Z_1, Z_3]=X$

8-4) <u>Centro de dimensión uno</u>

8-4-a) $\{X, Z_1, Z_2, Z_3, Z_4\}$ (5,1)
$[Z_1, Z_2]=[Z_3, Z_4]=X$

8-4-b) $\{X_1, Z_1, Z_2, Z_3, Z_4\}$ (5,2,1)

$[Z_1, Z_2]=Z_3$; $[Z_1, Z_3]=[Z_2, Z_4]=X$

8-4-c) $\{X, Z_1, Z_2, Z_3, Z_4\}$ (5,3,2,1)

$[Z_1, Z_2]=Z_3$; $[Z_1, Z_3]=Z_4$; $[Z_1, Z_4]=X$

8-4-d) $\{X, Z_1, Z_2, Z_3, Z_4\}$ (5,3,2,1)

$[Z_1, Z_2]=Z_3$; $[Z_1, Z_3]=Z_4$, $[Z_1, Z_4]=[Z_2, Z_3]=X$

I-9 CLASIFICACION DE LAS ALGEBRAS DE LIE NILPOTENTES DE DIMENSION 6

Siguiendo a los mismos autores que en el párrafo anterior y con análogo criterio y anotaciones, vamos a dar la clasificación de las álgebras de Lie nilpotentes de dimensión seis, si bien aquí vamos a prescindir de aquellas álgebras suma directa de otras.

9-1) Centro de dimensión tres

9-1-a) $\{X_1, X_2, X_3, Z_1, Z_2, Z_3\}$; (6,3)

$[Z_1, Z_2]=X_3$; $[Z_1, Z_3]=X_1$; $[Z_2, Z_3]=X_2$

9-2) Centro de dimensión dos

9-2-a) $\{X_1, X_2, Z_1, Z_2, Z_3, Z_4\}$; (6,3,1)

$[Z_1, Z_2]=Z_3$; $[Z_1, Z_3]=X_1$; $[Z_1, Z_4]=X_2$

9-2-b) $\{X_1, X_2, Z_1, Z_2, Z_3, Z_4\}$; (6,2)

$[Z_1, Z_2]=X_1$; $[Z_1, Z_3]=X_2$; $[Z_2, Z_4]=X_2$

9-2-c) $\{X_1, X_2, Z_1, Z_2, Z_3, Z_4\}$; (6,2)

$[Z_1, Z_3]=X_1$; $[Z_1, Z_4]=X_2$; $[Z_2, Z_3]=\gamma X_2$; $[Z_2, Z_4]=X_1$

$(\gamma \neq 0)$

9-2-d) $\{X_1, X_2, Z_1, Z_2, Z_3, Z_4\}$; (6,3,1)

$[Z_1, Z_2]=X_2$; $[Z_1, Z_3]=Z_4$; $[Z_1, Z_4]=X_1$; $[Z_2, Z_3]=X_1$

9-2-e) $\{X_1, X_2, Z_1, Z_2, Z_3, Z_4\}$; (6,3,1)

$[Z_1, Z_3]=Z_4$; $[Z_1, Z_4]=X_1$; $[Z_2, Z_3]=X_2$

9-2-f) $\{X_1, X_2, Z_1, Z_2, Z_3, Z_4\}$; (6,3,2)

$[Z_1, Z_2]=Z_3+Z_4$; $[Z_1, Z_3]=X_1$; $[Z_2, Z_4]=X_2$

9-2-g) $\{X_1, X_2, Z_1, Z_2, Z_3, Z_4\}$; (6,3,2)

$[Z_1, Z_2]=Z_3$; $[Z_1, Z_3]=X_1$; $[Z_1, Z_4]=X_2$; $[Z_2, Z_3]=X_2$

9-2-h) $\{X_1, X_2, Z_1, Z_2, Z_3, Z_4\}$; (6,3,2)

$[Z_1, Z_2]=Z_3$; $[Z_1, Z_3]=X_1$; $[Z_1, Z_4]=X_2$

$[Z_2, Z_4]=X_1$; $[Z_2, Z_3]=\gamma X_2$; $(\gamma \neq 0)$

9-2-i) $\{X_1, X_2, Z_1, Z_2, Z_3, Z_4\}$; (6,4,3,1)

$[Z_1, Z_2]=Z_3$; $[Z_1, Z_3]=Z_4$; $[Z_1, Z_4]=X_1$; $[Z_2, Z_3]=X_2$

9-3) <u>Centro de dimensión cero</u>

9-3-a) $\{X_1, Z_1, Z_2, Z_3, Z_4, Z_5\}$ (6,4,3,2,1)

$[Z_1, Z_2]=Z_3$; $[Z_1, Z_3]=Z_4$; $[Z_1, Z_4]=Z_5$; $[Z_1, Z_5]=X$

9-3-b) $\{X_1, Z_1, Z_2, Z_3, Z_4, Z_5\}$ (6,2,1)

$[Z_1, Z_3]=Z_4$; $[Z_1, Z_4]=X$; $[Z_2, Z_5]=X$

9-3-c) $\{X_1, Z_1, Z_2, Z_3, Z_4, Z_5\}$ (6,3,1)

$[Z_1, Z_2]=Z_5$; $[Z_1, Z_3]=Z_4$; $[Z_1, Z_4]=X$; $[Z_2, Z_5]=X$

9-3-d) $\{X_1, Z_1, Z_2, Z_3, Z_4, Z_5\}$ (6,3,1)

$[Z_1, Z_3]=Z_4$; $[Z_1, Z_4]=X$; $[Z_2, Z_3]=Z_5$;

$[Z_2, Z_5]=\gamma X$ $(\gamma\neq 0)$

9-3-e) $\{X_1, Z_1, Z_2, Z_3, Z_4, Z_5\}$ (6,3,2,1)

$[Z_1, Z_2]=Z_3+Z_5$; $[Z_1, Z_3]=Z_4$; $[Z_1, Z_4]=X$; $[Z_2, Z_5]=X$

9-3-f) $\{X_1, Z_1, Z_2, Z_3, Z_4, Z_5\}$ (6,3,2,1)

$[Z_1, Z_3]=Z_4$; $[Z_1, Z_4]=Z_5$; $[Z_1, Z_5]=Z_6$;

$[Z_2, Z_3]=Z_5$; $[Z_2, Z_4]=X$

9-3-g) $\{X_1, Z_1, Z_2, Z_3, Z_4, Z_5\}$ (6,3,2,1)

$[Z_1, Z_2]=Z_3$; $[Z_1, Z_3]=Z_4$; $[Z_1, Z_4]=X$; $[Z_2, Z_5]=X$

9-3-h) $\{X_1, Z_1, Z_2, Z_3, Z_4, Z_5\}$ (6,4,3,1)

$[Z_1, Z_2]=Z_3$; $[Z_1, Z_3]=Z_4$; $[Z_1, Z_4]=X$;

$[Z_2, Z_3]=Z_5$; $[Z_2, Z_5]=\gamma X$ $(\gamma\neq 0)$

9-3-i) $\{X_1, Z_1, Z_2, Z_3, Z_4, Z_5\}$ (6,4,3,2,1)

$[Z_1, Z_2]=Z_3$; $[Z_1, Z_3]=Z_4$; $[Z_1, Z_4]=Z_5$;

$[Z_1, Z_5]=X$; $[Z_2, Z_3]=X$

9-3-j) $\{X_1, Z_1, Z_2, Z_3, Z_4, Z_5\}$ (6,4,3,2,1)

$[Z_1, Z_2]=Z_3$; $[Z_1, Z_3]=Z_4$; $[Z_1, Z_4]=Z_5$;

$[Z_1, Z_5]=X$; $[Z_2, Z_3]=Z_5$; $[Z_2, Z_4]=X$

9-3-k) $\{X_1, Z_1, Z_2, Z_3, Z_4, Z_5\}$ (6,4,3,2,1)

$[Z_1, Z_2]=Z_3$; $[Z_1, Z_5]=X$; $[Z_2, Z_3]=Z_4$;

$[Z_2, Z_4]=Z_5$; $[Z_3, Z_4]=X$

9-3-1) $\{X_1, Z_1, Z_2, Z_3, Z_4, Z_5\}$ (6,4,3,2,1)

$[Z_1, Z_2]=Z_3$; $[Z_1, Z_3]=Z_5$; $[Z_1, Z_5]=X$;

$[Z_2, Z_3]=Z_4$; $[Z_2, Z_4]=Z_5$; $[Z_3, Z_4]=X$

A la vista de las álgebras de Lie nilpotentes de 5,6 dimensiones, se prueba que el álgebra derivada, $[L,L]$ tiene de dimensión 3 ó 4 a lo sumo según L sea de cinco o seis dimensiones.

Esto no es privativo de estas álgebras de baja dimensión, sino que se verifica en general el:

TEOREMA I-9-a

Si L es un álgebra de Lie nilpotente de dimensión n, no suma directa de otras, se verifica que:

$$\dim [L,L] \leqslant n-2$$

Demostración

En efecto, si $\dim[L,L]=n$, entonces $[L,L]=L$ y en este caso el álgebra no sería nilpotente ni siquiera resoluble.

Si $\dim[L,L]=n-1$, y $[L,L]$ no contuviera al centro de L, se descompondrá en suma directa de otras según el teorema I-5-b.

Si dim$[L,L]$=n-1 y L^1 contuviera al centro de L, una base de $[L,L]$ podrá ser:

$$\{X_1,\ldots,X_p,Z_1,\ldots,Z_{q-1}\}$$

siendo $\{X_1,\ldots,X_p,Z_1,\ldots,Z_{q-1},Z_q\}$ base de L. En este caso,

$$L_2\equiv[L,L_1]\equiv[\{X_1,\ldots,X_p,Z_1,\ldots,Z_q\},\{X_1,\ldots,X_q,Z_1,\ldots,Z_{q-1}\}]\equiv L_1$$

puesto que L_2 contendrá todos los productos $[Z_i,Z_j]$ que son los que generan a L_1, luego $L_2\equiv L_1$ lo que contradice a la hipótesis de ser L nilpotente. En consecuencia:

$$\dim[L,L]\leqslant n-2$$

2. IDEALES CONMUTATIVOS

CAPITULO II
IDEALES CONMUTATIVOS

II-1 IDEALES BIDIMENSIONALES

Los ideales unidimensionales estudiados en el capítulo anterior son un caso particular de ideales conmutativos. Vamos a considerar los ideales conmutativos bidimensionales y para ello vamos a volver a estudiar el ejemplo (I-6-C) del grupo de los movimientos sobre el plano euclídeo, cuya álgebra L admite una base $\{Z_1, Z_2, Z_3\}$ tal que

$$[Z_1, Z_2]=0 \qquad [Z_2, Z_3]=Z_1 \qquad [Z_3, Z_1]=Z_2$$

Esta álgebra no contiene campos centrales ni normales reales, pero sin embargo son campos normales los $Z_1 \pm iZ_2$, siendo $\{Z_1, Z_2\}$ base de un ideal bidimensional de L. Intentemos generalizar este resultado. Sea L un álgebra real resoluble, y sea

$$X_1, \ldots, X_m, Y_1, \ldots, Y_n, Z_1, \ldots, Z_s, Z_{s+1}, \ldots, Z_p$$

una base, tal como la definimos en I-4. Vamos a estudiar si existen dos campos Z_i, Z_j tal que Z_i+cZ_j sea un campo normal, siendo $\underline{c}$ complejo, no real. Veamos en qué condiciones es esto posible.

Tengamos en cuenta los siguientes resultados:

TEOREMA II-1-a

Si $\underline{Z_i+cZ_i}$ es normal, se sigue que $[Z_i,Z_j]=0$.

Demostración

Si $\underline{Z_i+cZ_i}$ es un campo normal, e $\underline{Y_n}$ también, $[Z_i+cZ_j Y_n]=0$

luego

$$[Z_i,Y_n]+c[Z_j,Y_n]=0$$

por tanto,

$$aY_n+ca'Y_n=0 \Rightarrow a+ca'=0; \quad a,a'\in R$$

y siendo $c=c_1+ic_2$ queda:

$$a + c_1a' = 0$$
$$c_2a' = 0$$

Como $\underline{c}$ no es real, $c_2\neq 0$, luego $a'=0 \Rightarrow a=0$

luego en consecuencia,

$$[Z_i,Y_n] = [Z_j,Y_n] = 0 \qquad (\forall Y_n)$$

La igualdad anterior exige que $i,j\leqslant s$, es decir, que Z_i y Z_j pertenezcan al centralizador normal de L. Por tanto, sin pérdida de generalidad podemos hacer $i=1$, $j=2$.

Entonces se verifica:

$$[Z_1+cZ_2, Z_1] = \lambda\ (Z_1+cZ_2)$$
$$[Z_1+cZ_2, Z_2] = \mu\ (Z_1+cZ_2)$$

luego,

$$c[Z_2, Z_1] = \lambda\ (Z_1+cZ_2)$$
$$[Z_1, Z_2] = \mu\ (Z_1+cZ_2)$$

y como $[Z_1, Z_2]$ es un campo real y $[Z_1, Z_2]=\mu Z_1+\mu cZ_2$, se sigue que $\mu\epsilon R$, $\mu c\epsilon R$, $\mu(c_1+ic_2)\epsilon R$, cosa sólo posible si $\mu c_2=0$, pero $c_2\neq 0 \Rightarrow \mu=0$. En consecuencia llegamos a una primera conclusión:

$$\underline{[Z_1, Z_2] = 0} \qquad \text{(II-I-1)}$$

Z_1, Z_2 son la base de una subálgebra conmutativa.

TEOREMA II-1-b

Los campos Z_1 y Z_2 son base de un ideal.

Demostración

Sea Z_j un elemento cualquiera de L $(j=3,\ldots,p)$, $[Z_1+cZ_2, Z_j]=\lambda(Z_1+cZ_2)$, siendo $c=c_1+ic_2$, $\lambda=\lambda_1+i\lambda_2$. Haciendo operaciones llegamos a las siguientes igualdades:

$$[Z_1, Z_j] = \frac{\lambda_1 c_2 - c_1\lambda_2}{c_2} Z_1 - \frac{\lambda_2(c_2^2+c_1^2)}{c_2} Z_2$$

$$(\forall j) \qquad (II-1-2)$$

$$[Z_2, Z_j] = \frac{\lambda_2}{c_2} Z_1 + \frac{\lambda_1 c_2 + \lambda_2 c_1}{c_2} Z_2$$

en consecuencia **$\{Z_1, Z_2\}$ forman la base de un ideal**.

Podemos enunciar:

*"Para que dos campos Z_1, Z_2 de un álgebra resoluble real, que no sean ni centrales, ni combinaciones lineales de campos normales, y tal que exista una combinación lineal de ellos Z_1+cZ_2 (c complejo no real), que sea normal, es condición necesaria que tales campos **sean base de un ideal conmutativo**."*

Supuesta cumplida esta condición, y si hacemos

$$[Z_i, Z_j]=a_{ij}Z_1+b_{ij}Z_2 \quad (i=1,2;\ j=3,\ldots,p) \qquad (II-1-3)$$

$$[Z_1+cZ_2, Z_j] = \lambda_j\ (Z_1+cZ_2);$$
$$c = c_1+ic_2; \qquad \lambda_j = \lambda_1+i\lambda_2$$

obtenemos:

$$a_{1j}+c_1a_{2j} = \lambda_1$$
$$b_{1j}+c_1b_{2j} = \lambda_1c_1-\lambda_2c_2$$
$$c_2a_{2j} = \lambda_2$$
$$c_2b_{2j} = \lambda_2c_1+\lambda_1c_2$$

de donde se sigue $\forall j$:

$$c_1 = \frac{b_{2j}-a_{1j}}{2a_{2j}}$$
$$c_2^2 = \frac{(b_{2j}-a_{1j})^2+4b_{1j}a_{2j}}{-4a_{2j}^2} \qquad \text{(II-1-4)}$$

y en consecuencia:

$$c_1^2 + c_2^2 = -\frac{b_{1j}}{a_{2j}}$$

y por tanto

$$\frac{b_{2j}-a_{1j}}{2a_{2j}} \quad \text{y} \quad -\frac{b_{1j}}{a_{2j}}$$

son constantes para todo j.

Recíprocamente, si I es un ideal bidimensional y conmutativo, que para una de sus bases $\{Z_1,Z_2\}$, y respecto a los coeficientes (II-1-3) se cumplen las condiciones

(II-1-4), se verifica que existe un **c** dado por estas condiciones para el que se cumple:

$$[Z_1+cZ_2, Z_j] = \lambda_j \; (Z_1+cZ_2) \qquad \text{(II-1-5)}$$

Demostración

Haciendo

$$c = c_1+ic_2 = \frac{b_{2j}-a_{1j}}{2a_{2j}} + i\sqrt{-\frac{(b_{2j}-a_{1j})^2+4b_{1j}a_{2j}}{4a_{2j}^2}}$$

y

$$[Z_i, Z_j] = a_{ij}Z_1+b_{ij}Z_2 \qquad (i=1,2;\; j=3,4,\ldots,p)$$

se prueba que se verifica la igualdad (II-1-5).

TEOREMA II-1-c

Si Z_1+cZ_2 es un campo normal, siendo Z_1, Z_2 dos campos de un álgebra de Lie resoluble real, se verifica que $Z_1+\bar{c}Z_2$ es otro campo normal.

Demostración

Para Z_1+cZ_2 normal, se verifica para todo Z_j que:

$$[Z_1+cZ_2, Z_j] = \lambda_j \ (Z_1+cZ_2)$$

Se prueba inmediatamente que

$$[Z_1+\bar{c}Z_2, Z_j] = \bar{\lambda}_j \ (Z_1+\bar{c}Z_2)$$

siendo $\bar{c}$, $\bar{\lambda}$ los conjugados de c y λ respectivamente.

En consecuencia el ideal $I\{Z_1, Z_2\}$ se descompone en dos ideales unidimensionales complejos.

TEOREMA II-1-d

Los campos $[Z_1, Z_j]$ y $[Z_2, Z_j]$ son linealmente independientes.

Demostración

Si

$$[Z_1, Z_j] = a_{1j}Z_1+b_{1j}Z_2$$
$$[Z_2, Z_j] = a_{2j}Z_1+b_{2j}Z_2$$

para que fueran linealmente dependientes haría falta que

$$\begin{vmatrix} a_{1j} & b_{1j} \\ a_{2j} & b_{2j} \end{vmatrix} = 0$$

y teniendo en cuenta (II-1-4), esto se traducirá en que:

$$a_{1j}^2 + 2c_1 a_{1j} a_{2j} + a_{2j}^2 (c_1^2+c_2^2) = 0$$

o lo que es lo mismo, que:

$$(a_{1j}+a_{2j}c_1)^2 + c_2^2 a_{2j}^2 = 0$$

cosa imposible, ya que $c_2 \neq 0 \neq a_{2j}$, pues si $a_{2j}=0 \Rightarrow b_{ij}=0$, $b_{2j}=a_{1j}$, y entonces Z_1 y Z_2 serían campos normales reales en contra de lo supuesto.

TEOREMA II-1-e

Dada una base $\{Z_1, Z_2\}$ de un ideal conmutativo que cumple las condiciones (II-1-4), es siempre posible encontrar otra base $\{Z'_1, Z'_2\}$ de dicho ideal, tal que $Z'_1+iZ'_2$ sea campo normal.

Demostración

1º) Si $c=ic_2$ $(c_1=0)$ la base es $\{Z_1, c_2Z_2\}$ ya que $[Z_1+i(c_2Z_2), Z_j] = \lambda(Z_1+i(c_2Z_2))$

2º) Sea $c=c_1+ic_2$, $(c_2\neq 0)$ y $Z_i=p_{i1}Z'_1+p_{i2}Z'_2$, $(|p_{ij}|\neq 0)$.

De $[Z_1+cZ_2, Z_j] = \lambda(Z_1+cZ_2)$ se deduce:

$$\left[Z'_1 + \frac{p_{12}+cp_{22}}{p_{11}+cp_{21}} Z'_2, Z_j\right] = \lambda\left(Z'_1 + \frac{p_{12}+cp_{22}}{p_{11}+cp_{21}} Z'_2\right)$$

Haciendo

$$\frac{p_{12} + cp_{22}}{p_{11} + cp_{21}} = i$$

resulta:

$$c_1 p_{22} + c_2 p_{21} = -p_{12}$$
$$c_1 p_{21} - c_2 p_{22} = -p_{11}$$

valores que hacen que $|p_{ij}| \neq 0$ ya que:

$$\begin{vmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -c_1 p_{21} + c_2 p_{22} & -c_1 p_{22} - c_2 p_{21} \\ p_{21} & p_{22} \end{vmatrix} =$$

$$= c_2 (p_{22}^2 + p_{21}^2) \neq 0 \quad \text{ya que} \quad p_{22} \neq 0 \quad \text{o} \quad p_{21} \neq 0 \text{ y } c_2 \neq 0.$$

En consecuencia, $\{Z'_1, Z'_2, Z_j\}$ $\forall j$ es una base isomorfa a la del grupo de los movimientos del plano ya estudiado.

II-2 ESTRUCTURA DE LAS ALGEBRAS DE LIE RESOLUBLES

Sea L un álgebra de Lie resoluble, y sea L' su álgebra derivada que es nilpotente y por tanto contiene un centro no nulo.

Los campos de L se pueden clasificar en tres clases:

1º) Campos pertenecientes al centro de L' (cenL')

2º) Campos de L' no pertenecientes a su centro.

3º) Campos de L no pertenecientes a L'.

Si designamos por Z_i a los primeros, U_j a los segundos, y V_h a los terceros, una base de L se puede escribir:

$$L \equiv \{Z_1, \ldots, Z_m, U_1, \ldots, U_n, V_1, \ldots, V_p\}$$

$\{Z_1, \ldots, Z_m\}$ es una base del centro de L', y $\{Z_1, \ldots, Z_m, U_1, \ldots, U_n\}$ es una base de L'.

Se verifica el

TEOREMA II-2-a

El centro de L' es un ideal del álgebra L.

Demostración

De la igualdad

$$[Z_i,[U_j,V_h]]+[U_j,[V_h,Z_i]]+[V_h,[Z_i,U_j]] = 0$$

siendo nulos el primero y último sumandos queda:

$$[U_j,[V_h,Z_i]] = 0$$

Por otra parte también obviamente:

$$[Z_k,[V_h,Z_i]] = 0$$

luego $[Z_i,V_h]$ que pertenece a L', tanto al multiplicarlo por cualquier Z_k, como por cualquier U_j, da cero; luego $[Z_j,V_h]\in \mathrm{cen}L'$, y como por otra parte, $[Z_i,Z_j]=[Z_i,U_j]=0$, queda probado el teorema.

TEOREMA II-2-b

Un álgebra de Lie nilpotente real, no puede contener ideales bidimensionales disjuntos con su centro.

Demostración

En el capítulo I (teorema I-5-a), hemos probado que un álgebra real nilpotente no puede contener campos normales, por tanto no tiene ideales unidimensionales disjuntos de su centro.

Supongamos que L contenga un ideal bidimensional I, disjunto de su centro, $[L,I]\neq 0$ pues de lo contrario $I\in \mathrm{cen}L$. La $\dim[L,I]\neq 1$, pues de lo contrario si $[L,I]=\lambda Z$, $[L,Z]=kZ$, y Z sería normal en contra de lo supuesto.

Entonces necesariamente $\dim[L,I]=2$ y en consecuencia $[L,I]=I$. De esto se deducirá

$$L_1=[L,L] \supseteq [L,I]=I$$
$$L_2=[L_1,L] \supseteq [L,I]=I$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$L_n \supseteq I$. *Por tanto ningún* $L_n=\{0\}$, luego L no será nilpotente. Esto es, no existe un ideal I, bidimensional disjunto con el centro de un álgebra nilpotente.

El teorema anterior es un caso particular del siguiente:

TEOREMA II-1-c

Un álgebra de Lie nilpotente no puede contener ideales n-dimensionales disjuntos con su centro.

Demostración

Supongamos demostrado por inducción para ideales de dimensión menor que **n**. Sea I un ideal n-dimensional de un álgebra nilpotente L, disjunto con el centro. Si $[L,I]=I$ aplicamos la demostración anterior.

Si $[L,I]=I_1 \subset I$, entonces I_1 también es un ideal ya que $[L,I_1]\subset[L,I]\equiv I_1$; además I_1 es de dimensión menor que n y disjunto con el centro ya que $I_1 \subset I$ e $I \cap \mathrm{cen} L=\{0\}$, lo cual no es posible por hipótesis.

TEOREMA II-2-d

Dada un álgebra de Lie resoluble real, e I un ideal bidimensional y conmutativo que pertenece al centro de L', no admitiendo I campos centrales ni normales reales, se verifica que contiene campos normales complejos.

Demostración

Tomemos como base del álgebra L la siguiente:

$$\{Z_1, Z_2, \ldots, Z_m, U_1, U_2, \ldots, U_n, V_1, \ldots, V_p\}$$

donde $\{Z_1, \ldots, Z_m, U_1, \ldots, U_n\}$ es una base de L' y $\mathrm{cen}L' = \{Z_1, Z_2, \ldots, Z_m\}$. Sea $\{Z_1, Z_2\}$ una base del ideal I.

Conforme a la identidad de Jacobi:

$$[Z_i,[V_j,V_h]]+[V_j,[V_h,Z_i]]+[V_h,[Z_i,V_j]] = 0, \qquad i=1,2$$

Teniendo en cuenta que el primer sumando es nulo y que:

$$[Z_i,V_j] = a_{ij}Z_1+b_{ij}Z_2 \qquad (i=1,2)$$

se obtiene:

$$a_{ih}a_{1j}+b_{ih}a_{2j}-a_{ij}a_{1h}-b_{ij}a_{2h} = 0$$
$$a_{ih}b_{1j}+b_{ih}b_{2j}-a_{ij}b_{1h}-b_{ij}b_{2h} = 0$$

de donde deducimos:

$$\frac{b_{1h}}{a_{2h}} = \frac{b_{1j}}{a_{2j}}$$

$$\frac{b_{2h}-a_{1h}}{a_{2h}} = \frac{b_{2j}-a_{1j}}{a_{2j}}$$

que son las condiciones (II-1-4) y por tanto queda probado el teorema.

II-3 EL PROBLEMA DE LA ANTIDERIVACION EN ALGEBRAS DE LIE NILPOTENTES

Hay álgebras de Lie nilpotentes que son derivadas de otras álgebras de Lie nilpotentes. Basta considerar un álgebra L resoluble, y sean $L^1, L^2, \ldots, L^r=\{0\}$ las sucesivas álgebras derivadas todas ellas nilpotentes, y a partir de la L^2 derivadas también de otras álgebras nilpotentes.

Pero existen álgebras nilpotentes que no son derivadas de ninguna nilpotente, por ejemplo el álgebra nilpotente más sencilla; no conmutativa;

$$M \equiv \{X, Z_1, Z_2\}; \qquad ([X, Z_i]=0;\ [Z_1, Z_2]=X)$$

Para esta álgebra no existe ninguna nilpotente cuya álgebra derivada sea M.

En efecto, si existiese un álgebra nilpotente

$$L\ \{X_1,\dots,X_m,\underline{X,Z_1,Z_2},U_1,\dots,U_n\}$$

tal que $L'\equiv\{X_1,Z_1,Z_2\}$ se verificaría que X pertenece o no al centro de L.

Estudiemos el primer caso.

a) $X\in \mathrm{cen} L$; $L\equiv\{X_1,\dots,X_m,\underline{X,Z_1,Z_2},U_1,\dots,U_n\}$ el centro de $L\equiv\{X_1,\dots,X_m,X\}$

$$[X_i,X]=[X_i,Z_j]=[X_i,U_h]=[X,Z_i]=[X,U_j]=0$$
$$[Z_1,Z_2]=X;\quad [Z_i,U_j]=a_i,X+b_{ij}Z_1+c_{ij}Z_2$$
$$[U_i,U_j]=m_{ij}X+n_{ij}Z_1+p_{ij}Z_2$$

$$L_2=[L,L']=[\{X_1\dots X_m,X,Z_1,Z_2,U_1\dots U_n\},\ \{X,Z_1,Z_2\}];$$

por ser L nilpotente $L_2\subset L_1$, y además $X\in L_2$, pues al multiplicar $Z_1\in L$; $Z_2\in L_1$ obtenemos X, por ser $L_2\subset L_1$, o bien:

$L_2\equiv\{X,Z_1\}$; (lo mismo podríamos decir para $\{X,Z_2\}$)
$L_2\equiv\{X\}$

a-1) Si $L_2\equiv\{X,Z_1\}\Rightarrow [Z_i,U_j]=a_{ij}X+b_{ij}Z_1$ $(c_{ij}=0)$; de la igualdad:

$$[Z_i,[U_j,U_h]]+[U_j,[U_h,Z_i]]+[U_h,[Z_i,U_j]]=0;\quad \text{(II-3-1)}$$
$$[Z_i,m_{jh}X+n_{jh}Z_1+p_{jh}Z_2]+[U_j,-a_{ih}X-b_{ih}Z_1]+$$
$$+[U_h,a_{ij}X+b_{ij},Z_1]=0$$

Si $\underline{i=1}$ $\Rightarrow$ $p_{jh}+b_{1h}a_{1j}-b_{1j}a_{1h}=0$

Si $\underline{i=2}$ $\Rightarrow$ $-n_{jh}+b_{2h}a_{1j}-b_{2j}a_{1h}=0$

$$b_{2h}b_{1j}-b_{2j}b_{1h}=0$$

Pero $L_3\subset L_2 \Rightarrow L_3\equiv\{X\} \Rightarrow [Z_1,U_j]=a_{1j},X \quad (b_{1j}=0) \Rightarrow$
$\Rightarrow p_{jh}=0 \Rightarrow [U_j,U_h]=m_{jh}X+n_{jh}Z_1$;

Entonces $L'\equiv\{X,Z_1\}$ y no $\{X,Z_1,Z_2\}$ como hemos supuesto.

a-2) Si $L_2\equiv\{X\} \Rightarrow [Z_i,U_j]=a_{ij}X$; en (II-3-1),

$$\begin{array}{l} i=1;\ p_{jh}=0 \\ i=2;\ n_{jh}=0 \end{array} \qquad [U_j,U_h]=m_{jh}X$$

en consecuencia $L'\equiv\{X\}$ en lugar de $\{X,Z_1,Z_2\}$.

b) $X\notin \text{cen}L$

$L\equiv\{X_1,\dots,X_m,\underline{X,Z_1,Z_2},U_1,\dots,U_n\}$; $\quad \text{cen}L\equiv\{X_1,\dots,X_m\}$,
$L'\equiv\{X,Z_1,Z_2\}$; $\quad [X,U_i]=a_iX+b_iZ_1+c_iZ_2$;
$[Z_i,U_j]=a_{ij}X+b_{ij}Z_1+c_{ij}Z_2$

De la igualdad:

$[X,[Z_i,U_j]]+[Z_i,[U_j,X]]+[U_j,[X,Z_i]]=0$, queda:

$$\begin{array}{l} i=1;\ c_j=0 \\ i=2;\ b_j=0 \end{array} \qquad \text{luego} \quad [X,U_i]=a_iX$$

luego X será normal, cosa imposible en un álgebra nilpotente.

En consecuencia tenemos la siguiente clasificación:

1º) Algebras de Lie nilpotentes que son derivadas de álgebras de Lie nilpotentes.

2º) Algebras de Lie nilpotentes que no son derivadas de otras álgebras de Lie nilpotentes.

Sabemos que toda álgebra de Lie resoluble tiene por álgebra derivada una nilpotente, y recíprocamente toda álgebra de Lie nilpotente es derivada de una resoluble.

Sea $M \equiv \{X_1, \ldots, X_m, Z_1, \ldots, Z_n\}$ un álgebra de Lie nilpotente, ($\{X_1, \ldots, X_m\}$; base del cen$M$). Y sea L un álgebra resoluble tal que $L' \equiv M$. L admitirá una base

$$L \equiv \{X_1, \ldots, X_m, Z_1, \ldots, Z_n, \ldots, U_1, \ldots, U_p\}$$

en donde:

$$[X_i, X_j] = [X_i, Z_j] = 0$$

$$[X_i, U_j] = \Sigma^h a_{ij} X_h$$

Ejemplos:

Las siguientes álgebras de Lie nilpotentes son derivadas de álgebras resolubles de dimensión una unidad mayor.

A) Las álgebras conmutativas $M \equiv \{X_1, \ldots, X_m\}$, $[X_i, X_j]=0$ son derivadas del álgebra resoluble $L \equiv \{X_1, \ldots, X_m, U\}$ donde $[X_i, U]=X_i \quad \forall i$

B) El álgebra nilpotente de Heisenberg $\{X_1, X_2, Z_1, Z_2, Z\}$ donde $[X_i, X_j]=[X_i, Z_j]=[X_i Z]=0 \quad [Z_i, Z]=X_i \quad \forall i, j$ son derivadas de las álgebras resolubles

$$\{X_1, X_2, Z_1, Z_2, Z, U\}$$

verificando que:

$$\begin{aligned}
[X_1, U] &= (c+a)X_1 \\
[X_2, U] &= (c+b)X_2 \\
[Z_1, U] &= aZ_1 \\
[Z_2, U] &= bZ_2 \\
[Z, U] &= cZ
\end{aligned}$$

C) El álgebra nilpotente $M=\{X, Z_1, Z_2\}$, $[X, Z_i]=0$, $[Z_1, Z_2]=X$ ya estudiada es derivada del álgebra resoluble:

$$L \equiv \{X, Z_1, Z_2, U\}$$

donde

$$\begin{aligned}
[X, U] &= aX \\
[Z_1, U] &= (1+a)Z_1 \qquad a \neq -1 \\
[Z_2, U] &= -Z_2
\end{aligned}$$

D) El álgebra nilpotente $M \equiv \{X, Z_1, Z_2, Z_3\}$ donde $[X, Z_i]=0$, $[Z_1, Z_2]=Z_3$; $[Z_1, Z_3]=X$; $[Z_2, Z_3]=0$ es derivada de la $L \equiv \{X, Z_1, Z_2, Z_3, U\}$ siendo:

$$\begin{aligned}
[X, U] &= aX \\
[Z_1, U] &= bZ_1 \\
[Z_2, U] &= (a-2b)Z_2 \\
[Z_3, U] &= (a-b)Z_3
\end{aligned}$$

En todos estos ejemplos se verifica que además de ser $\dim L = \dim L' + 1$ es $[X_i, U] = a_i X_i$, $[Z_j, U] = b_j Z_j$

Veamos en qué condiciones es esto posible:

Si $M = \{X_1, \ldots, X_m, Z_1, \ldots, Z_n\}$ es un álgebra nilpotente y $L \equiv \{X_1, \ldots, X_m, Z_1, \ldots, Z_n, U\}$ tal que $L' \equiv M$; verificándose que: $[X_i, X_j] = [X_i, Z_j] = 0$

$$[Z_i, Z_j] = \Sigma\ \alpha^p_{ip} X_p + \Sigma\ \beta^q_{ij} Z_q$$

Por otra parte teniendo en cuenta la identidad de Jacobi:

$$[[Z_i, Z_j], U] + [[Z_j, U], Z_i] + [[U, Z_i], Z_j] = 0$$

se sigue que:

$[[Z_i, Z_j], U] = (b_i + b_j)[Z_i, Z_j]$ y por tanto:

$$\begin{aligned} a_p &= b_i + b_j \quad (\text{si } \alpha^p_{ij} \neq 0) \\ b_q &= b_i + b_j \quad (\text{si } \beta^q_{ij} \neq 0) \end{aligned} \qquad \text{(II-3-2)}$$

Este sistema ha de ser compatible para que pueda existir un álgebra L que cumpla esas condiciones y como es homogénea deberá tener solución distinta de la $a_i = b_j = 0\ \forall i, j$.

A cada base de $M=\{X_1,..,X_m,Z_1,..,Z_n\}$ le corresponde un U distinto. Es posible que la solución $b_i=a_j=0$ $(\forall i,j)$ sea para una base pero no para otra.

Así, si consideramos el álgebra nilpotente:

$M=\{X,Z_1,Z_2,Z_3\}$; $[X,Z_i]=0$, $[Z_1,Z_2]=Z_3$, $[Z_2,Z_3]=0$, $[Z_1,Z_3]=X$

entonces:

$$b_1+b_2 = b_3$$
$$b_1+b_3 = a$$

de donde M es derivada del álgebra resoluble $\{X,Z_1,Z_2,Z_3,U\}$ siendo:

$$[X,U] = (2b_1+b_2)X$$
$$[Z_1,U]= b_1Z_1$$
$$[Z_2,U]= b_2Z_2$$
$$[Z_3,U]= (b_1+b_2)Z_3$$

Si hacemos el siguiente cambio de base:

$$X'=X;\ Z'_1=Z_1;\ Z'_2=a_1Z_1+a_2Z_2+a_3Z_3;\ Z'_3=Z_3$$

se tiene:

$$[Z'_1,Z'_2]=[Z_1,a_1Z_1+a_2Z_2+a_3Z_3]=a_2Z_3+a_3X=a_2Z'_3+a_3X'$$
$$[Z'_1,Z'_3]=X'$$
$$[X',Z'_1]= 0$$

y entonces:

$$b'_1+b'_2= b'_3= a'$$
$$b'_2+b'_3= a' \qquad \Rightarrow \quad b'_1=b'_2=b'_3=a'=0$$
$$b'_1+b'_3= a'$$

Es decir, el hecho de ser todos los b_i, a_j iguales a cero puede ser debido a la base elegida.

TEOREMA II-3-a

Si en las condiciones vistas hasta ahora, todos los a_i, b_j son nulos, la nueva álgebra L es también nilpotente y U es un campo central.

Demostración

Si

$$[X_i, U]= 0$$
$$[Z_j, U]= 0$$

se deduce que **U** es central.

Por otra parte,

$$[L, L]=[M, M]=M_1, \quad y \quad L_2=[L, L_1]=[L, M_1]=M_2$$

y en general $L_i=M_i$; luego si **M** es nilpotente también lo es L, y la derivada de L no es **M** sino M_1. Luego no queda el problema resuelto.

TEOREMA II-3-b

A cada base $\{X_1, \ldots, X_m, Z_1, \ldots, Z_n\}$, si le corresponde un **U**, le corresponde también cualquier otro **kU** ($k \in K$, cuerpo base).

Demostración

Si

$$[X_i, U] = a_i X_i \quad \rightarrow \quad [X_i, kU] = k a_i X_i$$
$$[Z_j, U] = b_j Z_j \quad \rightarrow \quad [Z_j, kU] = k b_j Z_j$$

luego sirve el **kU** siendo las nuevas $a'_i = k a_i$; $b'_j = k b_j$.

TEOREMA II-3-c

Si a la base $\{X_1, \ldots, X_m, Z_1, \ldots, Z_n\}$ le corresponde un U, a la base $\{h_1 X_1, \ldots, h_m X_m, k_1 Z_1, \ldots, k_n Z_n\}$ le corresponde el mismo U.

Demostración

Sean

$$[X_i, U] = a_i X_i; \qquad [Z_j, U] = b_j Z_j \quad (\forall i, j)$$
$$[h_i X_i, U] = h_i [X_i, U] = h_i a_i X_i = a_i (h_i X_i)$$
$$[k_j Z_j, U] = k_j [Z_j, U] = k_j b_j Z_j = b_j (k_j Z_j)$$

luego sirve el mismo U, y las mismas a_i, b_j.

TEOREMA II-3-d

Todas las álgebras nilpotentes de dimensiones cinco o seis, son derivadas de álgebras resolubles de dimensión una unidad mayor, siendo

$$[X_i, U] = a_i X_i; \quad [Z_j, U] = b_j Z_j$$

Expresamos a continuación todas las álgebras de dimensión cinco o seis nombrándolas por las claves utilizadas en I-8 y I-9 dando a continuación las relaciones entre los a_i y b_j para cada caso.

ALGEBRAS DE CINCO DIMENSIONES

8-3-a) Algebra de Heisenberg estudiada.
Ejemplo: b) de II-3.

8-3-b) $a_1=2b_1+b_2$; $a_2=b_1+2b_2$; $b_3=b_1+b_2$

8-4-a) $a_1=b_1+b_2=b_3+b_4$

8-4-b) $b_3=b_1+b_2$; $a_1=b_1+b_3=b_2+2b_1$

8-4-c) $b_3=b_1+b_2$; $b_4=b_1+b_3$; $a_1=b_1+b_4$

8-4-d) $b_3=b_1+b_2$; $b_4=b_1+b_3$; $a_1=b_1+b_4=b_2+b_3$

ALGEBRAS DE SEIS DIMENSIONES

9-1-a) $a_1=b_1+b_3$; $a_2=b_2+b_3$; $a_3=b_1+b_2$

9-2-a) $b_3=b_1+b_2$; $a_1=b_1+b_3$; $a_2=b_1+b_4$

9-2-b) $a_1=b_1+b_2$; $a_2=b_1+b_3=b_2+b_4$

9-2-c) $b_1=b_2$; $b_3=b_4$; $a_1=a_2=b_1+b_3$

9-2-d) $a_2=3b_1$; $b_4=b_1+b_3$; $a_1=2b_1+b_3$; $b_2=2b_1$

9-2-e) $b_4=b_1+b_3$; $a_1=b_1+b_4$; $a_2=b_2+b_3$

9-2-f) $b_1+b_2=b_3$; $b_1+b_2=b_4$; $a_1=2b_1+b_2$; $a_2=b_1+2b_2$

9-2-g) $b_4=2b_2$; $b_3=b_1+b_2$; $a_1=2b_1+b_2$; $a_2=2b_2+b_1$

9-2-h) $b_2=b_1$; $b_3=2b_1$; $b_4=2b_1$; $a_1=3b_1$; $a_2=3b_1$

9-2-i) $b_3=b_1+b_2$; $b_4=2b_1+b_2$; $a_1=3b_1+b_2$; $a_2=b_1+2b_2$

9-3-a) $b_3=b_1+b_2$; $b_4=2b_1+b_2$; $b_5=3b_1+b_2$; $a_1=4b_1+b_2$

9-3-b) $b_1+b_3=b_4$; $b_1+b_4=a=2b_1+b_3$; $b_5=2b_1+b_3-b_2$

9-3-c) $b_3=2b_2-b_1$; $b_4=b_2$; $b_5=3b_1/2+b_3/2$; $a=b_1+2b_2$

9-3-d) $b_1=b_2$; $b_1+b_3=b_4$; $2b_1+b_3=a$; $b_1+b_3=b_5$

9-3-e) $b_2=2b_1$; $b_3=b_5=3b_1$; $b_4=4b_1$; $a=5b_1$

9-3-f) $b_2=2b_1$; $b_4=b_1+b_3$; $b_5=2b_1+b_3$; $a=3b_1+b_3$

9-3-g) $b_3=b_1+b_2$; $b_4=2b_1+b_2$; $b_5=3b_1$; $a=3b_1+b_2$

9-3-h) $b_3=2b_1$; $b_4=3b_1$; $a=4b_1$; $b_5=3b_1$; $b_2=b_1$

9-3-i) $b_2=3b_1$; $b_3=4b_1$; $b_4=5b_1$; $b_5=6b_1$; $a=7b_1$

9-3-j) $2b_1=b_2$; $b_3=3b_1$; $b_4=4b_1$; $b_5=5b_1$; $a=6b_1$

9-3-k) $b_3=b_1+b_2$; $b_4=b_1+2b_2$; $b_5=b_1+3b_2$; $a=2b_1+3b_2$

9-3-l) $b_1=2b_2$; $b_3=3b_2$; $b_4=4b_2$; $b_5=5b_2$; $a=7b_2$

3. RELACIONES ENTRE LAS ALGEBRAS DE LIE Y LOS GRUPOS DE LIE CORRESPONDIENTES

CAPITULO III

RELACIONES ENTRE LAS ALGEBRAS DE LIE Y LOS GRUPOS DE LIE CORRESPONDIENTES

III-1 CAMPOS CENTRALES Y NORMALES

A cada álgebra de Lie le corresponde, salvo isomorfismos, un grupo de Lie conexo y simplemente conexo. Hasta ahora hemos estudiado algunos aspectos de las álgebras de Lie; vamos a ver cómo se *"traducen"* estos aspectos en los grupos de Lie correspondientes.

A cada subálgebra de Lie le corresponde un subgrupo conexo del grupo de Lie correspondiente, y si la subálgebra es ideal, el subgrupo correspondiente es normal. Entonces, ¿qué papel desempeñan los campos centrales y normales en el grupo de Lie?.

Si X es un campo central, su ideal uniparamétrico se corresponde con el subgrupo uniparamétrico $\psi_t(Y)$, contenido en su centro. Sea Y un campo normal, el subgrupo uniparamétrico $\psi_t(Y)$ deberá ser normal y en consecuencia, $\forall g \in G$, $\forall t \in R$ existirá un $t' \in R$ tal que:

$$g\psi_t(Y) = \psi_{t'}(Y)g$$

Sea Y un campo normal invariante a izquierda de un grupo de Lie G. Sea Y' el campo normal invariante a derecha correspondiente $Y_e = Y'_e$, es decir; ambos están engendrados por un subgrupo uniparamétrico $\psi_t(Y)$ que tiene que ser normal. Entonces para cada punto $g \in G$, y $t \in R$, $t' \in R$ tal que

$$g\psi_t(Y) = \psi_{t'}(Y)g,$$

y por tanto las trayectorias de Y e Y' que contienen a g son la misma, y en consecuencia los vectores tangentes Y_g, Y'_g tienen la misma dirección, siendo por tanto:

$$Y'_g = aY_g, \quad a \in R$$

y en general

$$Y' = fY, \quad f \in F(G) \qquad (1)$$

Si Y_1, Y_2 son dos campos normales invariantes a izquierda e Y'_1, Y'_2 sus correspondientes campos normales a derecha:

$$Y'_i = f_i Y_i,$$

y en consecuencia

$$[Y'_1, Y'_2] = [f_1 Y_1, f_2 Y_2] = f_1 Y_1(f_2) Y_2 - f_2 Y_2(f_1) Y_1 = 0$$

Si Y_1, Y_2 son linealmente independientes esto exige que:

$$Y_1(f_2)=0 \qquad Y_i(f_j)=0, \qquad i\neq j$$
$$Y_2(f_1)=0$$

¿Cuál es el significado geométrico del hecho de ser $Y(f)=0$?

Sean, localmente, Y un campo de componentes $(a_1,\dots,a_n)$ respecto de la base canónica local $(e_1,\dots,e_n)$ siendo

$$e_i=\frac{\partial}{\partial x_i}$$

y sea $f(x_1,\dots,x_n)=0$ la ecuación local de una hipersuperficie en G.

Las componentes de la normal, vector no necesariamente unitario, son:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} \;\dots\dots\; \frac{\partial f}{\partial x_n}$$

$$Y(f)=\Sigma a_i \frac{\partial f_i}{\partial x_i} = 0$$

Es decir, el vector $Y(a_1,\dots,a_n)$ es perpendicular al vector normal

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} \cdots\cdots \frac{\partial f}{\partial x_n}$$

por tanto Y es tangente a la hipersuperficie $f(x_1,...,x_n)=0$.

Si de los ideales unidimensionales pasamos a los ideales de r-dimensiones, siendo:

$Z_1,...,Z_r$ una base de campos invariante a izquierda de un cierto ideal, el subgrupo **H** correspondiente de dimensión r es normal, por tanto gH=Hg; luego las clases a izquierda y derecha coinciden y por tanto los campos invariantes a derecha correspondientes, $Z'_1,...,Z'_r$ tales que en **e**, punto unidad, los vectores $(Z_i)_e=(Z'_i)_e$, son tales que en un punto $g\epsilon G$, verifican

$$(Z'_i)_g \in T_g(gH)=T_g(Hg)$$

En consecuencia se pueden expresar como combinación de los vectores $(Z_1)_g$ ... $(Z_r)_g$ con cieficientes variables, luego en general:

$$Z'_i= \Sigma f_{ij}Z_j \qquad (i,j=1,..,r)$$

Si el ideal es conmutativo,

$$0=[Z'_i,Z'_h]=[\Sigma f_{ij}Z_j,\Sigma f_{hk}Z_k]=$$
$$= \Sigma f_{ij}Z_j(f_{hk})Z_k-\Sigma f_{hk}Z_k(f_{ij})Z_j= 0$$

lo que exige que:

$$Z_j(f_{hk}) = 0 = Z_k(f_{ij})$$

que es una generalización del resultado anterior.

APLICACION:

Sea $\{Z_1, Z_2\}$ un ideal conmutativo de campos invariantes a izquierda tal que $Z_1 \pm iZ_2$ sean campos normales.

Entonces sean Z'_1, Z'_2 el ideal homólogo de campos invariantes a derecha tales que:

$$(Z'_1)_e = (Z_1)_e, \quad [Z'_1, Z'_2] = 0, \quad \text{y} \quad Z'_1 \pm iZ'_2$$

sean campos normales. Entonces, por (1) es:

$$Z'_1 \pm iZ'_2 = (f+ig)(Z_1 \pm iZ_2)$$

de donde:

$$Z'_1 = fZ_1 - gZ_2$$
$$Z'_2 = gZ_1 + fZ_2$$

Como es $[Z'_1, Z'_2] = 0$ se tendrá:

$$[fZ_1-gZ_2, gZ_1+fZ_2]=0$$

lo que exige que:

$$(fZ_1-gZ_2)(g) = (gZ_1+fZ_2)(f)$$
$$(fZ_1-gZ_2)(f) = (gZ_1+fZ_2)(g)$$

o lo que es lo mismo:

$$Z'_1(g) = Z'_2(f)$$
$$Z'_1(f) = Z'_2(g)$$

CASO PARTICULAR DEL GRUPO DE LOS MOVIMIENTOS DEL PLANO

En este grupo, una base de campos invariantes a izquierda es:

$$Z_1(\cos\psi, \operatorname{sen}\psi, 0);\quad Z_2(-\operatorname{sen}\psi, \cos\psi, 0);\quad Z_3(0,0,1)$$

Los campos invariantes a derecha correspondientes son:

$$Z'_1(1,0,0);\quad Z'_2(0,1,0);\quad Z'_3(-y,x,1)$$

Z_1+iZ_2 es un campo normal de componentes:

$$(\cos\psi - i\operatorname{sen}\psi, \operatorname{sen}\psi + i\cos\psi, 0)$$

Su correspondiente $Z'_1+iZ'_2$ es: $(1,i,0)$

Se verifica:

$$Z'_1+iZ'_2= (f+ig)(Z_1+iZ_2)$$

donde $f+ig= \cos\psi+i\,\mathrm{sen}\,\psi$ y en este caso:

$$Z'_1(f)=Z'_2(g)=Z'_1(g)=Z'_2(f)= 0$$

III-2 PROPIEDAD METRICA DEL GRUPO DE LOS MOVIMIENTOS DEL PLANO

Hemos visto que dicha álgebra admite como base:

$$L\equiv\{Z_1,Z_2,Z_3\} \quad \text{siendo} \quad [Z_1,Z_2]=0;\ [Z_2,Z_3]=Z_1;\ [Z_3,Z_1]=Z_2$$

Los campos normales $Z_1\pm iZ_2$ tienen como componentes respecto de la base anterior $(1,\pm i,0)$ precisamente las coordenadas de los puntos cíclicos del plano. Esto es debido a que al multiplicar Z_1 y Z_2 por Z_3 nos da un campo perpendicular, y en consecuencia al multiplicar cualquier $\lambda_1Z_1+\lambda_2Z_2$ por Z_3 obtenemos un campo perpendicular a él. Si al multiplicar $Z_1\pm iZ_2$ por Z_3 volvemos a obtener el mismo campo es que es isótropo (perpendicular a sí mismo), sus componentes son, por tanto, las coordenadas de los puntos cíclicos.

III-3 INTERPRETACION A NIVEL DE GRUPO DE LIE DEL PROBLEMA DE LA ANTIDERIVACION DE ALGEBRAS DE LIE NILPOTENTES

Sea un grupo de Lie G nilpotente conexo y simplemente conexo definido por un grupo de matrices triangulares cuya diagonal principal es la de {1, 1, . . , 1}.

$$\begin{pmatrix} 1 & x_1 & \dots & x_n \\ 0 & 1 & \dots & x_{2n-1} \\ \dots & & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Si en esta diagonal principal sustituimos los "1" por e^{ω}, obtenemos el grupo de Lie G´:

$$\begin{pmatrix} e^{\omega} & x_1 & \dots & x_n \\ 0 & e^{\omega} & \dots & x_{2n-1} \\ \dots & & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & e^{\omega} \end{pmatrix}$$

Si el primero tiene un álgebra $\{X_1, \dots, X_m, Z_1, \dots, Z_n\}$, el segundo es de dimensión una unidad mayor; su álgebra admite una base de la forma $\{X_1,\dots,X_m,Z_1,\dots,Z_n,U\}$ donde U es un campo central, ya que el subgrupo uniparamétrico:

$$\begin{pmatrix} e^u & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^u & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & e^u \end{pmatrix} = e^u I$$

pertenece al centro, ya que I (matriz unidad) conmuta con cualquier matriz, y este subgrupo uniparamétrico es el correspondiente al campo U.

Entonces,

$$[X_i,U]=0; \quad [Z_j,U]=0$$

y por tanto es:

$$a_i=0, \quad b_j=0 \qquad \forall i,j$$

Esta es la explicación al caso de ser las a_i y b_j todas nulas. El nuevo grupo G´ resulta también nilpotente y su álgebra derivada es la misma que el álgebra derivada del grupo G, por tanto, no nos sirve como solución. En este caso la derivada del segundo no es el primero, sino que las derivadas de ambas álgebras coinciden.

Veamos a continuación algunos casos concretos:

Veamos a continuación algunos casos concretos:

1) Sea el grupo conmutativo:

$$\begin{pmatrix} 1 & x_1 & \cdots & x_n \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots\cdots & & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Su álgebra $\{X_1,\ldots,X_m\}$, $[X_i,X_j]=0 \quad (\forall i,j)$.

El grupo resoluble:

$$\begin{pmatrix} e^u & x_1 & \cdots & x_n \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots\cdots & & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

tiene álgebra de Lie que admite la base:

$$\{X_1,\ldots,X_m,U\}; \quad [X_i,U]=X_i \quad (\forall i)$$

que coincide con el ejemplo (II-3-a) donde $a_i=1 \quad (\forall i)$

2) Sea:

$$\begin{pmatrix} 1 & x & y \\ 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

el grupo de Heisenberg cuya álgebra admite la base:

El grupo resoluble:

$$\begin{pmatrix} 1 & x & y \\ 0 & e^{u} & z \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

su álgebra correspondiente, además de ser una unidad mayor, tiene por derivada el álgebra del grupo de Heisenberg citado, ya que admite una base $\{X, Z_1, Z_2, U\}$ tal que:

$$[X,U]=0, \qquad [Z_1,U]=Z_1, \qquad [Z_2,U]=-Z_2$$
$$[X,Z_1]=0, \qquad [X,Z_2]=0, \qquad [Z_1,Z_2]=X$$

donde $a=0$, $b_1=1$, $b_2=-1$.

3) El grupo dado por las matrices:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & z_1 & x_1 \\ 0 & 1 & z_2 & x_2 \\ 0 & 0 & e^{u} & y \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

es resoluble y su álgebra, una de cuyas bases es

$$\{X_1, X_2, Y, Z_1, Z_2, U\}$$

tiene como tabla multiplicativa

$$[X_i,U]=0; \qquad [Z_i,U]=Z_i; \qquad [Y,U]=-Y;$$
$$[X_1,X_2]=[Z_i,X_j]=[X_i,Y]=0; \qquad [Y,Z_i]=X_i$$

luego su derivada coincide con el álgebra del grupo de Heisenberg

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & z_1 & x_1 \\ 0 & 1 & z_2 & x_2 \\ 0 & 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

siendo $a_1=a_2=0$; $b_1=b_2=1$; $b_3=-1$

BIBLIOGRAFIA

- ***BERNAT-CONZE-DUFLO-LEVY-VERNE.*** Representation des grupes de Lie resolubles.
Dunod-Paris 1972.

- ***BOURBAKI (I).*** Groupes et algebres de Lie. Chapitre I. Elements de Mathematique.
Hermann. Paris 1971.

- ***BOURBAKI (II).*** Groupes et algebres de Lie. Chapitre 9. Elements de Mathematique.
Hermann. Paris 1982.

- ***CORDERO-FERNANDEZ-GRAY.*** Symplectic Manifolds with Kähler structure.
Santiago 1985.

- ***CHOW.*** General Theory of Lie algebras. Vol I y II. Gordon and Breach.
New York 1978.

- ***ECHARTE F.J.*** Etude des Algebres de Lie resolubles reelles qui admettent des ideaux unidimensionnels n´appartenant pas au centre. Lecture Notes in Mathematics. Nº 1209.
Springer-Verlag 1986.

- ***GOODMAN.*** Lectures Notes nº 562. Nilpotent Lie Groups.
Springer-Verlag 1985.

- ***JIMENEZ ACCON.*** Grupos de Lie conexos y Subgrupos uniparamétricos.

- ***MAGNIN.*** Sur les algebres de Lie Nilpotentes de dimension $\leqslant$ 7.
  Journal of Geometry-Physies. Vol 3. Nº 1. 1986.

- ***MATEOS F.*** Grupos de Lie conexos en relación con sus subgrupos uniparamétricos.

- ***MOROSON.*** Clasificación de las álgebras de Lie nilpotentes de dimensión 6. Isvestia Vyschih Uchebugh. Zavedenii Matematika 1958.

- ***PROCEEDINGS-NEW BRUNSWICH.*** New Jersey 1981. Lectures Notes nº 933. Lie Algebras and related topics.
  Springer-Verlag 1982.