UNIVERSIDAD DE SEVILLA
FACULTAD DE FISICA
SECRETARIA
23-12-85
ENTRADA N.º 720

Q.2659 T.S 46

UNIVERSIDAD DE SEVILLA

FACULTAD DE FISICA

ESTUDIO DE LAS FLUCTUACIONES Y CORRELACIONES EN EL ESTADO FUNDAMENTAL DEL NUCLEO

Memoria presentada por
Francisco Barranco Paulano
para optar al grado de
Doctor en Ciencias Físicas

Director: Manuel Lozano Leyva
Profesor titular de
Física Atómica, Molecular y Nuclear

UNIVERSIDAD DE SEVILLA
BIBLIOTECA
FACULTAD DE FISICA

MANUEL LOZANO LEYVA, Profesor Titular de Física Atómica, Molecular y Nuclear de la Facultad de Física de la Universidad de Sevilla;

CERTIFICO

que la presente Memoria sobre

"Estudio de las fluctuaciones y correlaciones en el estado fundamental del núcleo."

ha sido realizada por Francisco BARRANCO PAULANO bajo mi dirección para optar al grado de Doctor en Ciencias Físicas.

Y para que conste, en cumplimiento de la legislación vigente, presento ante la Facultad de Física de esta Universidad la referida Tesis Doctoral.

Sevilla, 23 de Diciembre de 1985

Agradecimientos

Agradezco a mi director de tesis, M. Lozano, el haberme ofrecido la oportunidad y los medios necesarios para la realización de este trabajo, así como el haberme animado en todo momento.

Agradezco al profesor R.A. Broglia, del Niels Bohr Institute de la Universidad de Copenhague, su entusiasmo en nuestra colaboración científica, que ha sido fundamental en el desarrollo de la presente tesis.

Agradezco al profesor G. Madurga, director del Departamento de Física Atómica y Nuclear de la Universidad de Sevilla, el interés mostrado por el trabajo que aquí se presenta.

Agradezco a E. Vigezzi, "il mio fratello", y a I. Gallardo, el calor humano sin el cual mis estancias en Copenhague habrían sido demasiado frías.

Agradezco a Mª Victoria Andrés su ayuda en la corrección final del manuscrito.

Agradezco a mis compañeros de departamento la atmósfera de amistad en la que ha sido tan agradable trabajar.

Muy especialmente agradezco a Mª del Carmen Ledesma su apoyo moral y espiritual, que durante todos estos años me ha servido para mantener a flote la ilusión y la confianza en el trabajo.

A mis padres.

INDICE

Introducción..... 3

Métodos Macroscópicos

Capítulo 1. Fluctuaciones y correlaciones en el estado fundamental.. 6

1.1 Idea central..... 6

1.2 Fluctuaciones en el estado fundamental..... 6

Modos de superficie..... 6

El estado fundamental de los modos de superficie... 9

El estado fundamental del modelo de partículas independientes..... 10

Método de sustracción..... 12

1.3 Efectos de las fluctuaciones en el estado fundamental (ZPF)..... 16

Distribución de densidad..... 16

Fusión y Radioactividad..... 19

1.4 Generalización de las ZPF a otros modos de excitación..... 25

Capítulo 2. Fluctuaciones del estado fundamental en la familia de isótopos del Calcio..... 30

2.1 Radios cuadráticos medios..... 30

2.2 Fusión por debajo de la barrera coulombiana..... 38

Capítulo 3. Emisión radioactiva de ^{14}C por el ^{223}Ra. ZPF a grandes amplitudes..... 43

3.1 Introducción..... 43

3.2 Probabilidad de formación..... 44

Elección de la base. Trayectoria de escisión..... 45

Intensidad de la interacción residual. Parámetro de inercia..... 48

Elementos diagonales. Energía potencial..... 52

Probabilidad de formación..... 53

3.3 Penetración de la barrera coulombiana..... 54

3.4 Constante de desintegración. Comparación con los datos experimentales..... 57

3.5 Efecto de la deformación..... 59

Método Microscópico

Capítulo 4. Renormalización del estado fundamental del modelo de partículas independientes..... 60

4.1 Introducción..... 60

4.2 Acoplamiento partícula-vibración..... 62

Representación diagramática..... 63

4.3 Renormalización de la distribución de densidad..... 65

4.4 Cálculos en un modelo esquemático..... 69

Solución NFT..... 70

Discusión del método macroscópico de las ZPF..... 75

4.5 Cálculo en un caso realista (^{40}Ca)..... 79

Apéndice A. Vértices y signos..... 84

A.1 Parámetros de deformación. Operadores bosónicos..... 84

A.2 $T_{\lambda\mu}$ en segunda cuantización. Operadores fermiónicos. 86

A.3 Elementos de matriz. Vértices..... 88

Apéndice B. Modos normales de vibración. RPA..... 92

B.1 Respuesta a un campo externo..... 92

B.2 Estructura monoparticular de los fonones..... 96

B.3 Regla de suma (EWSR)..... 98

B.4 Probabilidades de transición..... 99

Apéndice C. Deformación de la superficie nuclear en el espacio normal y en el espacio de momentos..... 102

C.1 Parámetros de deformación..... 102

C.2 Campo de desplazamientos..... 103

C.3 Deformación en el espacio de momentos..... 105

C.4 Deformación en el espacio de las fases..... 110

C.5 Superficie de Fermi de los estados de deformación autoconsistente..... 112

La superficie de Fermi de un estado de deformación autoconsistente es esférica..... 112

Los estados de deformación autoconsistente son un mínimo de la energía..... 113

Apéndice D. Estimación de la probabilidad de formación en un modelo de Gas de Fermi 115

Conclusiones 118

Referencias 120

Introducción

Entre las propiedades del núcleo destaca la existencia de estados excitados que en la imagen colectiva corresponden a oscilaciones en la forma de la superficie nuclear alrededor de su posición de equilibrio. El carácter cuántico del sistema tiene como consecuencia que la forma del núcleo esté sometida a fluctuaciones en su estado fundamental. Este hecho ha sido en los últimos años ampliamente utilizado para correlacionar los diversos datos experimentales en los que dichas fluctuaciones se manifiestan y, en especial, las probabilidades de transición con los radios cuadráticos medios y con las secciones eficaces de fusión a energías por debajo de la barrera coulombiana (Reinhard y Drechsel(1979) y Esbensen(1981), respectivamente).

Sin embargo, hasta la aparición del trabajo de Esbensen y Bertsch(1983) no se empezó a comprender hasta dónde llega el efecto de las fluctuaciones y, más concretamente, cuánto modifican los resultados obtenidos con modelos de partículas independientes, como el de Hartree-Fock. Las correcciones que estos autores encuentran son muy importantes, llegando a alterar hasta un 10% la cola de la distribución de densidad, que hoy día se encuentra medida con una precisión mucho mayor.

En el capítulo 1 se hace una presentación crítica de la prescripción de Esbensen y Bertsch, introduciendo algunos nuevos argumentos de plausibilidad y llamando la atención sobre algunas interpretaciones erróneas acerca del efecto de las fluctuaciones en modos isovectoriales contenidas en el artículo original. Se hace repaso a las consecuencias que tienen las fluctuaciones en la distribución de densidad y en procesos de fusión. En este capítulo investigamos también cuáles son los efectos de las fluctuaciones en la barrera coulombiana en procesos de emisión radioactiva y se dan fórmulas sencillas para su consideración.

En el capítulo 2 se estudian las fluctuaciones de la superficie nuclear a lo largo de la familia de isótopos del Calcio. El anómalo comportamiento isotópico de los radios cuadráticos medios y de las secciones eficaces de fusión para energías por debajo de la barrera coulombiana se analiza a la luz de la dependencia con el número de neutrones de la amplitud de las fluctuaciones. Del análisis realizado

para los radios cuadráticos medios se extrae un campo monoparticular promedio tal que los valores de los observables calculados haciendo uso de éste dejan lugar para añadir el efecto de las fluctuaciones.

En el capítulo 3 se desarrolla un modelo para el estudio de las fluctuaciones a muy grandes amplitudes, en las cuales se dan cambios en la estructura nuclear intrínseca. Los diversos aspectos del modelo se exponen en relación con el cálculo de la probabilidad de formación de ^{14}C en el estado fundamental del ^{223}Ra, de notable interés debido al reciente descubrimiento de la emisión radioactiva $^{223}Ra \rightarrow {}^{209}Pb + {}^{14}C$ (Rose y Jones(1984)). La clave del modelo reside en la consideración de la densidad de estados en el espacio de las formas nucleares y la interacción que entre ellas existe.

El capítulo 4 es de carácter bien distinto a los precedentes. En él se desarrolla un método microscópico para el cálculo de las correcciones a los resultados del método Hartree-Fock, basado en el acoplamiento partícula-vibración tratado haciendo uso de la Teoría de Campos del Núcleo, elaborada por Bes et al.(1976). Se presentan cálculos en un modelo esquemático con solución exacta y se comparan los resultados con los obtenidos utilizando el método macroscópico de las ZPF presentado en el primer capítulo. Se exponen también los resultados para un caso realista (^{40}Ca) utilizando ambos métodos. Tanto en el caso del modelo esquemático como en el realista, se investiga la validez de los desarrollos perturbativos en términos de las amplitudes Y de la Aproximación de las Fases Aleatorias (RPA) para el estudio de los efectos de las interacciones residuales en las propiedades del estado fundamental.

Los aspectos puramente matemáticos del presente trabajo y la exposición de la RPA se recogen en cuatro apéndices.

En el Apéndice A se encuentra todo el álgebra de momentos angulares necesaria para los cálculos realistas con la Teoría de Campos del Núcleo. Se incluyen tablas y expresiones compactas muy útiles en la práctica.

En el Apéndice B se expone sucintamente la RPA o, más propiamente, el Modelo Autoconsistente de Bohr y Mottelson(1953) para núcleos vibracionales, recogiéndose fórmulas y conceptos que son utilizados a lo largo de la memoria y que se ha considerado útil tener a mano.

En el Apéndice C se presenta el procedimiento matemático que

ha sido desarrollado para la realización de los cálculos que se exponen en el capítulo 3.

En el Apéndice D se hace una estimación de la probabilidad de formación de partículas pesadas utilizando el Modelo de Gas de Fermi.

Al final de la memoria se recogen las principales conclusiones del trabajo expuesto, así como la bibliografía utilizada.

Métodos macroscópicos

Capítulo 1

Fluctuaciones y correlaciones en el estado fundamental

1.1 Idea central

El punto de partida de la mayoría de los modelos del núcleo es la existencia de un campo promedio en el seno del cual se mueven libremente los nucleones sujetos al Principio de Exclusión de Pauli. Dicho campo promedio, en sus versiones más simples viene caracterizado por tres parámetros a través de la relación

$$V(r) = -\frac{V_0}{1+\exp((r-R)/a))} \quad , \qquad (1.1)$$

donde $V_0 \approx 50$MeV, $a \approx 0.65$fm, y $R=r_0 A^{1/3}$ con $r_0 \approx 1.25$fm.

Debido a que el núcleo es un sistema cuántico, las paredes del campo promedio, donde los nucleones están contenidos, no son estáticas sino que están sometidas a fluctuaciones. De hecho, la solución de la ecuación de Schrödinger asociada con el potencial central de la ec.(1.1) implica una distribución de densidad que engloba las fluctuaciones cuánticas del movimiento de los nucleones y que pueden ser traducidas a fluctuaciones de radio nuclear (ver ec.(1.21)).

Cuando las interacciones nucleares residuales son tenidas en cuenta, el movimiento de los nucleones se hace correlacionado y conlleva comportamientos de tipo colectivo en el núcleo. En particular, el sistema presenta vibraciones de superficie de diferentes multipolaridades que inducen fluctuaciones adicionales en el radio del núcleo.

1.2 Fluctuaciones en el estado fundamental

Modos de superficie

La distribución de densidad isoscalar (o de materia) en el

interior de un núcleo esférico en su estado fundamental puede parametrizarse según

$$\rho(r) = \rho_0 f(r; R, a) \tag{1.2}$$

$$f(r) = \frac{1}{1+\exp((r-R)/a))} \tag{1.3}$$

El parámetro que aparece multiplicando la función de distribución de tipo Fermi tiene el valor característico

$$\rho_0 \approx 0.14\ fm^{-3} \tag{1.4}$$

Un tipo importante de excitaciones del núcleo son aquéllas en las que la distribución de densidad isoscalar se deforma de modo que

$$\rho^{def}(\vec{r}) = \rho_0\ f(r; R(\hat{r}), a) \quad , \tag{1.5}$$

donde el parámetro R de la función de Fermi depende de los ángulos según la expresión

$$R(\hat{r}) = R + \delta = R + R \sum_{n\lambda\mu} \alpha^*_{\lambda\mu}(n)\, Y_{\lambda\mu}(\hat{r}) \tag{1.6}$$

con $\vec{r} \equiv (r, \hat{r})$, representando $\hat{r}$ los ángulos polares. Las cantidades $\alpha_{\lambda\mu}(n)$ son los parámetros de deformación de la superficie nuclear. El origen del índice n se discute en la sección(B.2). En lo que sigue centraremos nuestro estudio en estos estados, caracterizados por (n,λ,μ) y denominados modos isoscalares de superficie.

Para fines prácticos se utiliza la forma aproximada de la parametrización de la ec.(1.5)

$$\rho^{def}(\vec{r}) \approx \rho(r) - R\ \frac{\partial \rho(r)}{\partial r} \sum_{n,\lambda,\mu} \alpha^*_{\lambda\mu}(n)\, Y_{\lambda\mu}(\hat{r}) \tag{1.7}$$

válida para pequeñas amplitudes de deformación. Paralelamente el potencial

monoparticular será

$$V^{def.}(\vec{r}) \approx V(r) - R\,\frac{\partial V(r)}{\partial r}\sum_{n\lambda\mu} \alpha^{*}_{\lambda\mu}(n)\,Y_{\lambda\mu}(\hat{r}) \qquad (1.8)$$

La dinámica de los estados excitados con la densidad de la ec.(1.7) viene determinada por el hamiltoniano (ver sección(A.1))

$$H_v = \frac{1}{2}\sum_{n\lambda\mu}\left(B_\lambda(n)\,|\dot{\alpha}_{\lambda\mu}(n)|^2 + C_\lambda(n)\,|\alpha_{\lambda\mu}(n)|^2\right) \qquad (1.9)$$

donde $B_\lambda(n)$ es el parámetro de inercia y $C_\lambda(n)$ la constante de recuperación correspondientes al estado (n,λ,μ).

Los valores de $B_\lambda(n)$ y $C_\lambda(n)$ pueden determinarse sometiendo el núcleo a la acción de un campo externo (ver sección(B.1)). Utilizando un campo externo dela forma

$$V_{ext.}(t) = r^\lambda Y_{\lambda\mu}\cos(\omega_{ex}\,t) \qquad (1.10)$$

el núcleo absorberá energía si $\omega_{ex} = \omega_\lambda(n) = \sqrt{C_\lambda(n)/B_\lambda(n)}$. Del ritmo con el que esta energía es absorbida se puede determinar experimentalmente la probabilidad de transición reducida

$$B(0\rightarrow\lambda(n)) = \sum_\mu |\langle n\lambda\mu|\,r^\lambda Y_{\lambda\mu}\,|0\rangle|^2$$

$$= \left(\frac{\lambda+2}{4\pi}\,A\,R\,\langle r^{\lambda-1}\rangle\right)^2 \beta^2_\lambda(n)\,, \qquad (1.11)$$

siendo

$$\beta^2_\lambda(n) = (2\lambda+1)\,\frac{\hbar\,\omega_\lambda(n)}{2\,C_\lambda(n)} \qquad (1.12)$$

(para más detalles ver sección(B.4)). De estas ecuaciones pueden determinarse $B_\lambda(n)$ y $C_\lambda(n)$. Los valores así obtenidos son comparables con los resultados de cálculos microscópicos. Entre ellos el que se ha mostrado más adecuado es el de la RPA (ver sección(B.1)). La RPA es un modelo que determina las propiedades de los modos de

superficie a partir de la estructura monoparticular del núcleo y de la interacción de los nucleones con la superficie nuclear.

El estado fundamental de los modos de superficie

Según el Principio de Indeterminación, los parámetros de deformación están sometidos a la relación

$$(\Delta \alpha_{\lambda\mu}(n))(B_\lambda(n)\Delta \dot{\alpha}_{\lambda\mu}(n)) \geqslant \frac{\hbar}{2} \tag{1.13}$$

Haciendo uso del Teorema del Virial

$$B_\lambda(n)(\Delta \dot{\alpha}_{\lambda\mu}(n))^2 = C_\lambda(n)(\Delta \alpha_{\lambda\mu}(n))^2 \tag{1.14}$$

con lo que se obtiene que

$$(\Delta \alpha_{\lambda\mu}(n))^2 \geqslant \frac{\hbar\omega_\lambda(n)}{2C_\lambda(n)} \tag{1.15}$$

Esta cota inferior debe ser considerada en la descripción de las propiedades de los diversos estados cuánticos, en particular, en las del estado fundamental.

Haciendo uso de la distribución de probabilidad de los parámetros $\alpha_{\lambda\mu}(n)$ en el estado fundamental del oscilador armónico (n,λ,μ),

$$g(\alpha_{\lambda\mu}(n);a_\lambda^2(n)) = \sqrt{\frac{1}{2\pi a_\lambda^2(n)}}\,\exp\left\{-\frac{|\alpha_{\lambda\mu}(n)|^2}{2a_\lambda^2(n)}\right\} \tag{1.16}$$

con

$$a_\lambda^2(n) = \frac{\hbar\omega_\lambda(n)}{2C_\lambda(n)} \tag{1.16a}$$

se encuentra

$$\begin{aligned}(\Delta \alpha_{\lambda\mu}(n))^2 &= \int g(\alpha_{\lambda\mu}(n);a_\lambda^2(n))\,|\alpha_{\lambda\mu}(n)|^2\,d\alpha_{\lambda\mu} \\ &= a_\lambda^2(n) = \frac{\hbar\omega_\lambda(n)}{2C_\lambda(n)}\end{aligned} \tag{1.17}$$

que es precisamente la cota mínima del Principio de Indeterminación.

Los valores de las $a_\lambda^2(n)$ pueden ser determinados a partir de los datos experimentales $B(0\rightarrow\lambda(n))$. Despejando $\hbar\omega_\lambda(n)/2C_\lambda(n)$ de las ecs.(1.11) y (1.12) y sustituyendo en la ec.(1.16a) se obtiene

$$(2\lambda+1)a_\lambda^2(n) = \frac{B(0\rightarrow\lambda(n))}{((\lambda+2)AR\langle r^{\lambda-1}\rangle/4\pi)^2} \qquad (1.18)$$

Debido a la aproximación armónica, expresada en la forma del hamiltoniano de la ec.(1.9), la desviación cuadrática media del radio alrededor de su posición de equilibrio, σ^2, es la suma de las producidas por las fluctuaciones asociadas a cada uno de los osciladores (n,λ,μ), es decir

$$\sigma^2 = \sum_{n\lambda} \frac{(2\lambda+1)}{4\pi} a_\lambda^2(n) R^2 \qquad (1.19)$$

Según todo esto, la distribución de densidad observada en el estado fundamental, $\rho(r)$, es la convolución de la distribución que desarrolla las oscilaciones, $\rho_c(r)$, con la distribución $g(R;\sigma^2)$ de tipo gaussiano de la ec.(1.16), es decir,

$$\rho(r) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int ds \exp(-s^2/2\sigma^2)\, \rho_c(r-s) \qquad (1.20)$$

Esta ecuación puede obtenerse considerando la distribución de densidad en el eje Z, sobre el cual sólo las fluctuaciones en los modos $\mu=0$ contribuyen, haciéndose el cálculo especialmente sencillo.

La distribución de densidad $\rho_c(r)$ no debe ser confundida con la que se obtiene al resolver un modelo de partículas independientes, por ejemplo, el de Hartree-Fock. Si tal error se cometiera se sobrecontaría los efectos de las fluctuaciones.

El estado fundamental del modelo de partículas independientes

Gran parte de las fluctuaciones incluídas en la ec.(1.19) están consideradas en la distribución de densidad calculada con un modelo de partículas independientes. En efecto, al utilizar la ecuación

de Schrödinger para estudiar el movimiento de los nucleones en el campo monoparticular promedio, ya se están considerando muchas de las fluctuaciones de la superficie nuclear. La desviación cuadrática media de los parámetros de deformación debida al movimiento mecánico-ondulatorio de los nucleones, $a^2_{o\lambda}$, puede ser evaluada utilizando las ecs.(1.18) y (1.19), siendo

$$(2\lambda+1)\, a^2_{o\lambda}(n) = \frac{B^{IPM}(0\rightarrow\lambda(n)_o)}{((\lambda+2)AR\,\langle r^{\lambda-1}\rangle/4\pi)^2} \qquad (1.21)$$

y por tanto la del radio de la superficie nuclear es

$$\sigma_o^2 = \sum_{n\lambda} \frac{(2\lambda+1)}{4\pi}\, a^2_{o\lambda}(n)\, R^2 \qquad (1.22)$$

Los estados $(n,\lambda,\mu)_0$ en la ec.(1.22) son aquéllos con momento angular λ y proyección μ de la descripción monoparticular. Las cantidades $B^{IPM}(0\rightarrow\lambda(n)_0)$ son las probabilidades de transición reducidas a dichos estados desde el fundamental, descrito éste también con el modelo de partículas independientes.

Para que los valores de σ^2 (ec.(1.19)) y σ_o^2 (ec.(1.22)) sean comparables, el sumatorio que aparece en la ec.(1.22) debe ser restringido a los estados en los que protones y neutrones se mueven en fase, esto es, a estados con isospín cero, como el de los modos de superficie considerados en la anterior subsección.

Otra condición para que las fluctuaciones calculadas con ambos modelos sean comparables es que se cumpla la regla de suma

$$\sum_n \hbar\omega_\lambda(n) B(0\rightarrow\lambda(n)) = \sum_n \hbar\omega_\lambda^{IPM}(n)\, B^{IPM}(0\rightarrow\lambda(n)_o) \; . \qquad (1.23)$$

Esta condición es necesaria para garantizar que ambos modelos se refieren al mismo sistema físico y, en efecto, se satisface utilizando la RPA (sección(B.3)) o cualquier otro modelo razonable del núcleo (Bertsch (1979)).

Por el contrario, la cantidad

$$S_\lambda^{(o)} = \sum_n B(0\rightarrow\lambda(n)) \qquad (1.24)$$

y, por tanto,

$$\sigma^2 = \sum_\lambda S_\lambda^{(0)} \left\{ 4\pi \left((\lambda+2) A \langle r^{\lambda-1} \rangle \right)^{-2} \right\} \qquad (1.25)$$

pueden diferir bastante de un modelo a otro, siendo muy sensibles a las correlaciones entre los nucleones que cada modelo incorpora. Este hecho se pone bien de manifiesto expresando $S_\lambda^{(0)}$ como

$$S_\lambda^{(0)} = \sum_{n\mu} |\langle n\lambda\mu | \hat{T}_{\lambda\mu} | 0 \rangle|^2 = \langle 0 | \hat{T}_\lambda^+ \hat{T}_\lambda | 0 \rangle \qquad (1.26)$$

donde $\hat{T}$ es un operador monoparticular (ec.(1.11)). Esto permite escribir

$$S_\lambda^{(0)} = \int T^*(\vec{r}) \rho(\vec{r},\vec{r}\,') T(\vec{r}\,') \, d^3\vec{r} \, d^3\vec{r}\,' + \\ + \int |T(\vec{r})|^2 \rho(\vec{r}) \, d^3\vec{r} \qquad (1.27)$$

Queda así claro cómo $S_\lambda^{(0)}$ y σ^2 dependen de las correlaciones que a través de la densidad de dos partículas, $\rho(\vec{r},\vec{r}\,')$, están contenidas en el modelo utilizado para calcular los valores de las probabilidades de transición $B(0 \rightarrow \lambda(n))$

<u>Método de sustracción</u>

De lo dicho anteriormente se ve que la cantidad

$$\Delta\sigma^2 = \sigma^2 - \sigma_0^2 \\ = \sum_\lambda \left(S_\lambda^{(0)} - S_{\lambda 0}^{(0)} \right) \left\{ 4\pi \left((\lambda+2) A \langle r^{\lambda-1} \rangle \right)^{-2} \right\} \qquad (1.28)$$

es precisamente una medida de las diferentes correlaciones contenidas en el modelo de los modos de superficie y en el modelo de partícula independiente, ya que la segunda integral de la ec.(1.27) difiere muy poco de un modelo a otro. Así, $\Delta\sigma^2$ constituye claramente una posible

herramienta para el estudio de las correcciones que a una descripción de partículas independientes del núcleo, se deben hacer a causa de las correlaciones.

Cómo se utiliza $\Delta\sigma^2$ para realizar tales correcciones se desprende de las propiedades que posee y que a continuación se muestran.

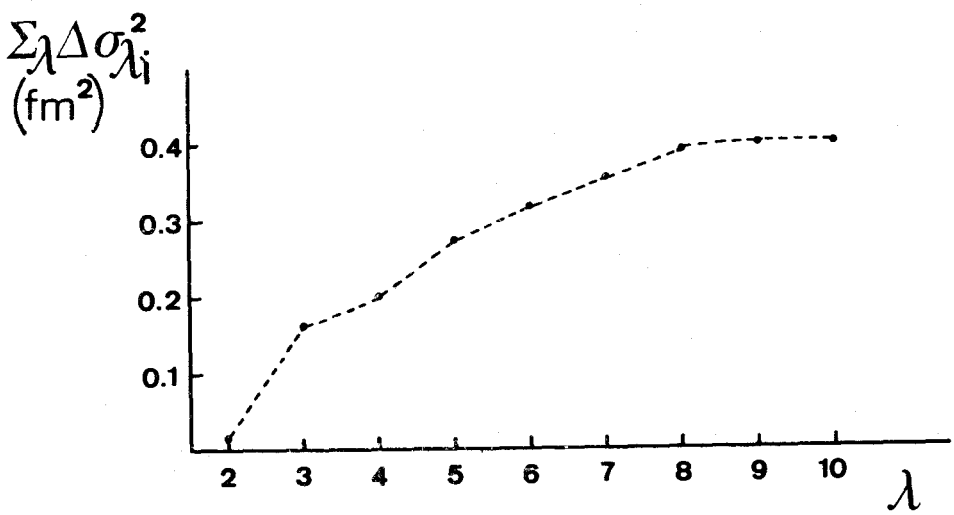
La contribución $\Delta\sigma_\lambda^2$ de una determinada multipolaridad, λ, tiende rápidamente a cero según λ se hace mayor que cierto valor. Este es típicamente $\lambda=6$, que es la multipolaridad a la que empieza a no ser posible mantener movimientos colectivos de la superficie nuclear (Fiolhiais (1985)).

En el caso del núcleo ^{40}Ca los valores obtenidos para $\Delta\sigma_\lambda^2$, σ_λ^2 y $\sigma_{\lambda o}^2$ aparecen en la tabla(1.1). Obsérvese cómo la sustracción de las fluctuaciones del modelo de partículas independientes es de crucial importancia. Tanto σ_λ^2 como $\sigma_{\lambda o}^2$ divergen, mientras que con este tratamiento $\Delta\sigma_\lambda^2$ converge a cero a partir de $\lambda=6$. La divergencia de σ_λ^2 y $\sigma_{\lambda o}^2$ pone de manifiesto lo inadecuado de la hipótesis armónica para grandes multipolaridades.

λ	$\Delta\sigma_\lambda^2$ (fm^2)	σ_λ^2 (fm^2)	$\sigma_{\lambda o}^2$ (fm^2)
2	0.0150	0.0967	0.0817
3	0.1457	0.3207	0.1750
4	0.0367	0.2850	0.2483
5	0.0800	0.5580	0.4780
6	0.0460	0.7342	0.6878
7	0.0372	1.1520	1.0782
8	0.0290	1.5838	1.5548
9	0.0190	1.4942	1.4747
10	0.0030	2.1611	2.1581

Tabla(1.1) Valores de $\Delta\sigma_\lambda^2$, σ_λ^2 y $\sigma_{\lambda o}^2$ que han sido obtenidos utilizando un potencial de oscilador armónico ($\hbar\omega_0=40A^{-1/3}$MeV) y la constante de acoplamiento autoconsistente en el cáculo RPA ($\chi=1$) y con $f(r)=R\frac{\partial V}{\partial r}$ (vease ec.(1.8)) donde V es el potencial Woods-Saxon de la ec.(1.1).

Al ir sumando las diferentes $\Delta\sigma_\lambda^2$, $\Delta\sigma^2$ tiende a un valor finito como puede apreciarse en la figura(1.1). La convergencia de $\sum_\lambda \Delta\sigma_{\lambda i}^2$ se debe a que en ella se recoge exclusivamente el efecto de las correlaciones que dan lugar a la existencia de movimientos colectivos en el núcleo.



Figura(1.1) $\sum_\lambda \Delta\sigma_{\lambda i}^2$ como función de . El valor de saturación (0.41fm^2) es el de .

Suponer que $\Delta\sigma^2$ representa la desviación cuadrática media de la fluctuación que no está presente en la distribución de densidad calculada con el modelo de partículas independientes (Esbensen y Bertsch (1983)), es equivalente a decir que σ_0^2 y $\Delta\sigma^2$ representan las fluctuaciones de dos osciladores independientes pues, es en tal caso cuando las desviaciones cuadráticas medias se suman. Pero del modo en que $\Delta\sigma^2$ ha sido obtenido esto no resulta inmediato. Sin embargo, se da una "circunstancia" que hace que dicha hipótesis sea en efecto razonable.

Una característica de los resultados obtenidos para $\Delta\sigma_\lambda^2$ es su estrecha correlación con $\sigma_\lambda^2(n=1)$, es decir, con la contribución

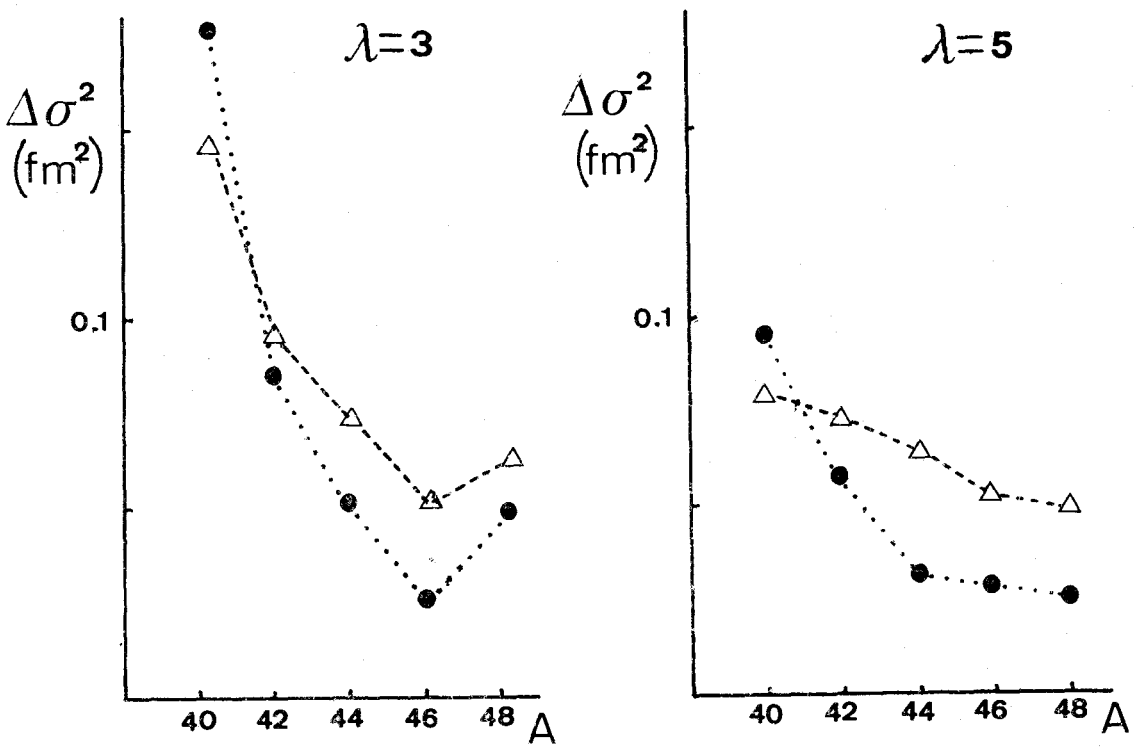
del oscilador colectivo de multipolaridad λ con menor energía. La correlación es mayor cuanto más importante $\Delta\sigma^2_\lambda$. Se tiene que para las multipolaridades λ=3 y λ=5 en el ^{40}Ca

$$\Delta\sigma^2_3 = 0.196\ fm^2 \quad y \quad \Delta\sigma^2_5 = 0.080\ fm^2$$

al mismo tiempo que

$$\sigma^2_3(n=1) = 0.177\ fm^2 \quad y \quad \sigma^2_5(n=1) = 0.093\ fm^2$$

Este paralelismo se observa en otros núcleos, como en los de la familia del Calcio, cuyas $\Delta\sigma^2_\lambda$ se presentan en la figura(1.2).



Figura(1.2) Valores de (triángulos) y (n=1) (puntos) en la familia de isótopos del Calcio para =3 y =5.

Al ser $\Delta\sigma^2_\lambda$ en magnitud y sistemática cercano a $\sigma^2(n=1)$, parece plausible considerarlo, en relación a $\sigma^2_{\lambda o}$, como la desviación cuadrática media debida a la fluctuación de un oscilador independiente, como en efecto lo es en gran medida el modo (n=1,λ,μ) (sección(B.4)).

La pérdida de colectividad ya comentada para $\lambda > 6$ se manifiesta en que el estado $(n=1,\lambda,\mu)$ es cada vez más similar al construído según el modelo de partículas independientes lo que causa la tendencia de $\Delta\sigma_\lambda^2$ a anularse.

Lo anterior queda resumido simplemente diciendo

$$\Delta\sigma_\lambda^2 \approx \sigma_\lambda^2(n=1) \quad , \tag{1.29}$$

que expresa la localización de los efectos de las correlaciones en las fluctuaciones debidas a los osciladores de marcado carácter colectivo y de baja energía.

En el capítulo 4 se estudian microscópicamente las fluctuaciones en el estado fundamental, poniéndose de manifiesto que el resultado de la ec.(1.29) no es una casualidad sino que, es la existencia de un campo promedio consistente con la distribución de densidad (ecs.(1.7) y (1.8)) la causa de dicha localización.

1.3 Efectos de las fluctuaciones en el estado fundamental (ZPF)

Distribución de densidad

Las fluctuaciones en el estado fundamental determinan que la distribución de densidad que experimentalmente se observa, $\rho(r)$, no sea la calculada según el modelo de partículas independientes

$$\rho_0(r) = \sum_i |\Psi_i(\vec{r})|^2 \quad , \tag{1.30}$$

donde i representa los números cuánticos de los orbitales monoparticulares ocupados. De acuerdo con la interpretación que se ha supuesto para $\Delta\sigma^2$, la distribución que se observa es

$$\rho(r) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\Delta\sigma^2}} \int ds \, \exp(-s^2/2\Delta\sigma^2)\, \rho_0(r-s) \tag{1.31a}$$

expresión similar a la de la ec.(1.20), pero donde se ha efectuado la sustitución

$$\rho_c(r) \longrightarrow \rho_o(r)$$
$$\sigma^2 \longrightarrow \Delta\sigma^2 \qquad (1.32)$$

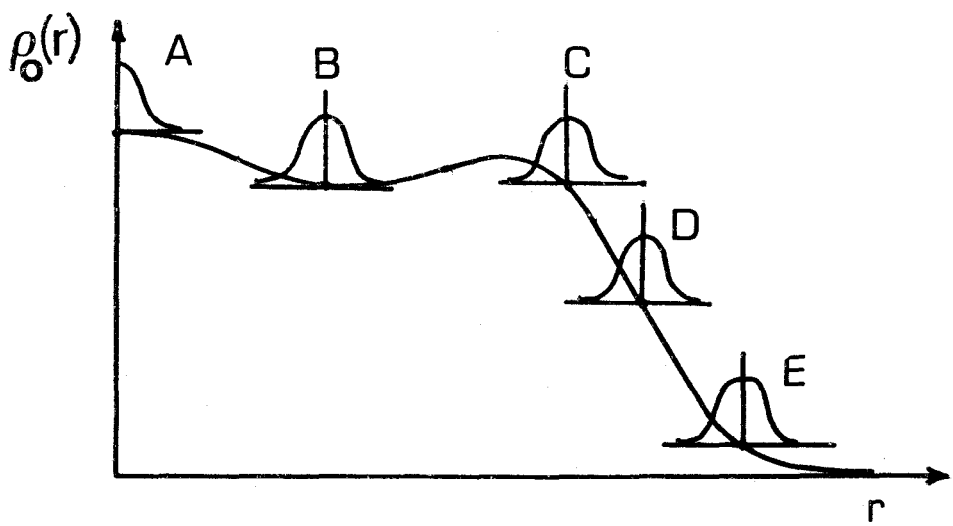
En rigor, para que el volumen nuclear se conserve (pues no estamos ahora interesados en modos de compresión), es decir, para que los modos (n,λ,μ) sean deformaciones exclusivamente de la superficie nuclear, la ec.(1.31a) debe ser modificada de manera que

$$\rho(r) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\Delta\sigma^2}} \int ds \; \exp(-s^2/2\Delta\sigma^2)\, \rho_o(r-s_o-s) \qquad (1.31b)$$

con

$$s_o = -\Delta\sigma^2 / R_o \qquad (1.31c)$$

El efecto que las ZPF tienen sobre la distribución de densidad puede entenderse fácilmente observando la figura(1.3).



Figura(1.3) Convolución de la distribución de densidad (r) con la distribución de probabilidad g(s,).

En el punto D de la figura se da según $g(s, \Delta\sigma^2)$, igual peso a puntos en los que ρ_0 difiere igual y con signo contrario de $\rho_0(r_D)$, debido a que la curvatura de $\rho_0(r)$ en r_D es nula, de modo que $\rho(r_D) = \rho_0(r_D)$. No así ocurre, por ejemplo, en r_B, donde a todos los puntos a los que se da peso poseen ρ_0 mayor que $\rho_0(r_B)$, de modo que $\rho(r_B) > \rho_0(r_B)$. Razonando así, se ve cómo las ZPF tienden a suavizar las oscilaciones de la distribución de densidad en la zona interior, lo cual es muy interesante, ya que es un problema tradicional de los cálculos con modelos de partículas independientes el producir oscilaciones sistemáticamente mayores que las experimentalmente observadas (ver , por ejemplo, Warroquier et al. (1983)).

Otro efecto que también se hace evidente en la figura es el aumento en la difusividad de la superficie, lo que significa un desplazamiento neto de materia hacia el exterior en torno al punto D. Esto se refleja en un aumento del radio cuadrático medio de la distribución, aumento, que en primer orden, puede ser evaluado simplemente como

$$\Delta\langle r^2\rangle \approx 3\Delta\sigma^2 \tag{1.33}$$

existiendo otros términos de orden superior en la difusividad. Esta dependencia tan directa con $\Delta\sigma^2$ permite prever notables efectos isotópicos e isotónicos en los radios cuadráticos medios, ya que los valores de $B(0\rightarrow\lambda(n))$, a los que son proporcionales $\Delta\sigma_\lambda^2$, presentan fuertes variaciones con el número de neutrones y protones de los isótopos e isótonos. La correlación entre los efectos isotópicos en $B(0\rightarrow\lambda(n))$ y en los radios cuadráticos medios era empíricamente bien conocida (Wu et al. (1969)). Reinhard y Drechsel (1979) utilizan el Método de la Coordenada Generadora para calcular el efecto de las correlaciones en los radios cuadráticos medios. Sus resultados serán comentados en el próximo capítulo.

Es importante hacer notar que las correcciones a causa de las ZPF no deben ser hechas a distribuciones de densidad calculadas con los actuales valores de los parámetros de las interacciones efectivas (tipo Skyrme, por ejemplo) utilizadas para generar el campo monoparticular promedio. Estos valores han sido determinados de modo que

dichas densidades sean directamente comparables con los datos experimentales de manera que, promediando sobre la tabla de núclidos, simulan los efectos de las ZPF. Tal procedimiento no es capaz de dar cuenta de las estructuras observadas en los radios cuadráticos medios y, menos aún cuando se quiere describir simultáneamente la zona interior de las distribuciones de densidad experimentales (Warroquier et al. (1983)). Para dar cabida a las correcciones los valores de los parámetros de las interacciones efectivas deben ser modificados de modo que una vez añadidas sea cuando se compare con los datos experimentales. La modificación del campo monoparticular promedio afectará a otros observables como, por ejemplo, las energías monoparticulares. La densidad de niveles alrededor de la energía de Fermi disminuirá puesto que, al igual que en la distribución de densidad, la difusividad del potencial monoparticular será menor que la de los ahora utilizados. La posterior inclusión de las correlaciones aumenta de nuevo la densidad de niveles (Mahaux et al.(1985)) de manera que el acuerdo, cuando se da, entre los actuales cálculos (Beiner et al.(1975)) y los datos experimentales puede ser recuperado(*).

Fusión y Radioactividad

Otra manifestación de las fluctuaciones del campo promedio se encuentra en los procesos de penetración de la barrera coulombiana, como la radioactividad y la fusión con energía cinética en el centro de masas, E, menor que la altura de la barrera, E_B. En efecto, los procesos de fusión y radioactividad vienen gobernados por la probabilidad de que los componentes de la reacción (los núcleos (A,a) fusionantes o producto de la emisión) superen la barrera de potencial producida por la repulsión entre las cargas eléctricas de uno y otro. Dicha probabilidad depende de modo muy crítico de la altura de la barrera y del camino que se recorre por debajo de la misma. Pequeñas fluctuaciones de la barrera pueden afectar en varios órdenes de magnitud

(*) La imagen del potencial monoparticular sometido a fluctuaciones implica necesariamente el fraccionamiento en energía de los estados monoparticulares. Este es un prometedor enfoque para el estudio de magnitudes como el recorrido libre medio de los nucleones en estados cercanos a la energía de Fermi.

la cantidad de eventos de fusión (Esbensen (1981)) o emisión por unidad de tiempo.

a) Fusión

El coeficiente de penetración de la barrera coulombiana, para energías ligeramente inferiores a la altura de ésta (figura (1.4)), viene dado por (Ford et al. (1959))

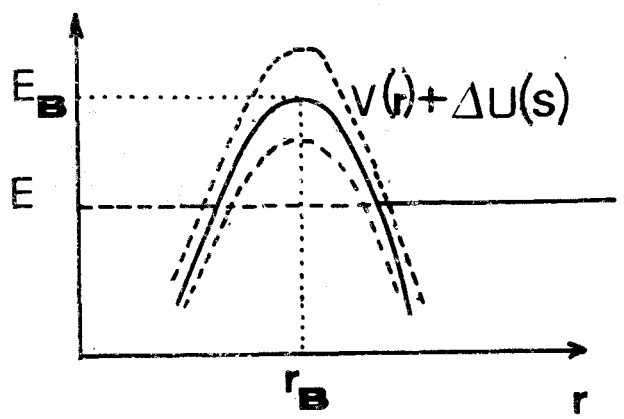
$$T_0(s) \sim \exp\{(E-(E_B+\Delta U(s)))/\epsilon\} \tag{1.34}$$

donde

$$\epsilon = [(-\hbar^2/2\mu)\, d^2V(r)/dr^2]^{1/2}_{r_B}/2\pi \tag{1.35}$$

siendo μ la masa reducida del sistema (A,a). $\Delta U(s)$ es la variación, para la órbita l=0, de la altura de la barrera en función del parámetro de deformación, s, que para el caso de ser ésta cuadrupolar es

$$\Delta U(s) = -(s/r_B)\, E_B(1-3R_A/5r_B) \tag{1.36}$$



Figura(1.4) Esquema de la situación en fusión con E E_B. E es la energía cinética en el centro de masas.

El coeficiente de penetración que se observa es la convolución de $T_0(s)$ con la distribución de probabilidad $g(s,\sigma_p^2)$,

$$T = \int ds\, T_0(s)\, g(s,\sigma_p^2)$$

$$\sim \exp\{(E-(E_B-D_B)/\epsilon\} \qquad (1.37)$$

con

$$D_B = 1/2(\sigma_p/r_B)^2(E_B^2/\epsilon)(1-R_A/r_B) \qquad (1.38)$$

La fluctuación a la que este mecanismo es sensible no tiene que ser estrictamente identificada con $\Delta\sigma^2$, utilizada para corregir la distribución de densidad. En la ec.(1.37) se presupone que la deformación debida a las fluctuaciones es estática para cada valor de s. Esto equivale a exigir que $\omega\tau \ll 1$, donde τ es un tiempo característico del movimiento relativo cercano al punto clásico de retorno y ω la frecuencia asociada a la fluctuación. Esto nos hace restringir σ_p^2 a las fluctuaciones correspondientes a los osciladores de más baja energía. Esto significa que utilizar

$$\sigma_p^2 \sim \Delta\sigma^2 \qquad (1.39)$$

es, no obstante, una razonable aproximación.

En la ec.(1.37) se ve que el efecto de las ZPF es el de bajar la barrera coulombiana en la cantidad D_B, dada por la ec.(1.38). Lo más notable de esta ecuación es que D_B es directamente proporcional a la desviación cuadrática media σ_p^2 . Esto quiere decir que si en los radios cuadráticos medios (ver ec.(1.33)), medidos experimentalmente, se observan estructuras como función, por ejemplo, del número de neutrones, se debe encontrar una estructura réplica de la anterior en las medidas de probabilidad de fusión. Esta correlación será examinada en la familia de isótopos del Calcio en el capítulo siguiente.

b) Radioactividad

La probabilidad de que cierto proceso de emisión radioactiva,

se dé es esencialmente función de dos factores. Uno es la probabilidad de formación de la partícula a en el seno del núcleo emisor, la cual depende fundamentalmente de la correlación entre los nucleones que la componen. El otro factor es la probabilidad de que, una vez formada dicha partícula, sea capaz de atravesar la barrera coulombiana que la separa del exterior.

El ritmo de emisión radioactiva está caracterizado por la constante de desintegración λ a través de la relación

$$dN(t)/dt = -\lambda N(t) \tag{1.40}$$

En esta ecuación N(t) representa el número de núcleos de tipo B que aún no han emitido la partícula a en el instante t. La constante λ es la probabilidad por unidad de tiempo de que un determinado núcleo sufra el proceso de desintegración, que podemos escribir como

$$\lambda = f\, P_{for}(R)\, P_{pen}(R) \quad , \tag{1.41}$$

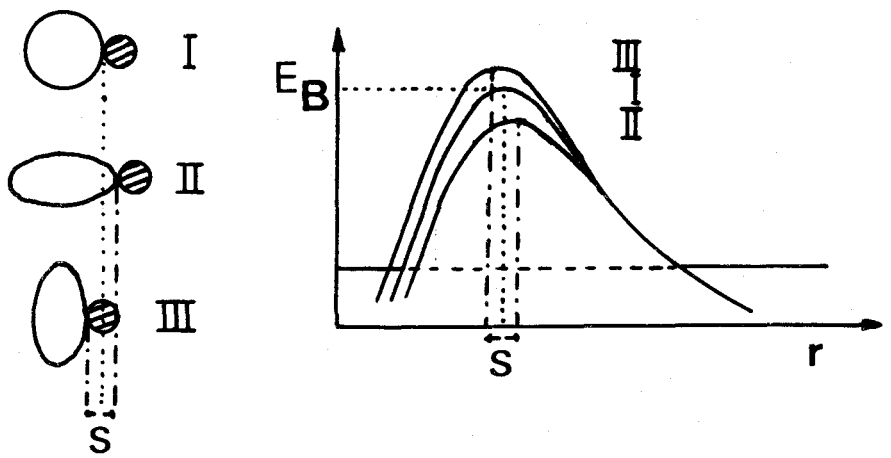
donde f es la frecuencia con la que la partícula a incide sobre la pared de la barrera, $P_{for}(R)$ es la probabilidad de formación a una distancia R, y $P_{pen}(R)$ es la probabilidad de penetración de la barrera coulombiana a partir de la distancia R. En una teoría exacta el valor calculado para λ no puede depender de la elección de R. En la práctica R se elige de modo que el valor de λ dependa lo menos posible de dicha elección.

En este capítulo sólo trataremos el efecto de las ZPF en la $P_{pen}(R)$. El cálculo de $P_{for}(R)$ requiere el estudio de las ZPF en la estructura monoparticular intrínseca, lo que exige la utilización de métodos que serán desarrollados en el capítulo 3.

En lo concerniente a la penetración de la barrera, la situación se esquematiza en la figura(1.5). En ésta aparece la partícula que será emitida (esfera rayada) formada en la superficie del núcleo A. Este aparece con tres deformaciones diferentes, creando cada una de ellas

BIBLIOTECA

una barrera de potencial distinta. La diferencia más notable, para energías de emisión bien por debajo de E_B, es que están desplazadas unas de otras, de modo que en el caso II queda menos barrera por penetrar que en el caso I, y en éste menos que en el caso III.



Figura(1.5) Efecto de las deformaciones de superficie en la barrea coulombiana.

También se diferencian en la altura, en un valor aproximado de (ec.(1.36))

$$\Delta U(s) \approx -(s/r_B)\, E_B\,(1 - 3R_A/5r_B) \qquad (1.42)$$

Este Δ U(s) puede ser convertido en un desplazamiento efectivo, s*, tal que

$$(\partial V(r)/\partial r)\Big|_R s^* = \Delta U(s) \qquad (1.43)$$

Por tanto, el desplazamiento total efectivo es

$$s_{ef} = s + s^* = s\left[1 - (1 - 3R_A/5r_B)(E_B/r_B)/(\partial V/\partial r)_R\right] \qquad (1.44)$$

que es la distancia que la partícula se ahorra en su recorrido por

debajo de la barrera. El efecto que esto tiene en la probabilidad de penetración puede ser calculado utilizando la expresión aproximada (ver Ford et al.(1959))

$$P^{(o)}_{pen}(r) \sim \exp\{2Kr\} \tag{1.45}$$

para el caso de una barrera estática, y donde

$$K = \sqrt{2mE/\hbar^2} \tag{1.46}$$

Según la ec.(1.45), se puede escribir

$$P^{(o)}_{pen}(R+s_{ef}) = P^{(o)}_{pen}(R)\exp(2K_{ef}s) \quad , \tag{1.47}$$

con

$$K_{ef}=K[1-(1-3R_A/5r_B)(E_B/r_B)/(\partial V/\partial r)_R] \tag{1.48}$$

No obstante, para energías bien por debajo de la barrera $k_{ef}\approx k$. La probabilidad de penetración que se observa es, pues,

$$P_{pen}(R) = \int ds\, P^{(o)}_{pen}(R+s)\, g(s;\sigma_R^2) \tag{1.49}$$

donde $g(s,\sigma_R^2)$ es la distribución de probabilidad de que la deformación s se dé en el estado fundamental. También aquí se hace la aproximación

$$\sigma_R^2 \sim \Delta\sigma^2 \tag{1.50}$$

Una expresión muy simple para $P_{pen}(R)$ se obtiene utilizando la forma de $P^{(o)}_{pen}(R+s)$ de la ec.(1.47), y recordando la forma gaussiana de $g(s,\sigma_R^2)$. Así, se obtiene

$$P_{pen}(R) = P_{pen}^{(o)}(R) \int \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_R^2}} \exp(-s^2/2\sigma_R^2) \exp(2k_{ef}s)$$

$$= P_{pen}^{(o)}(R) \exp(2k_{ef}^2 \sigma_R^2) \qquad (1.51)$$

y teniendo en cuenta de nuevo la ec.(1.47), queda

$$P_{pen}(R) = P_{pen}^{(o)}(R + k_{ef}\sigma_R^2) \qquad (1.52)$$

Esta ecuación pone de manifiesto que el efecto de las ZPF es más importante cuanto mayor es el valor de k_{ef}, esto es, cuanto menor sea la longitud de onda de la función de onda de la partícula emitida y, por tanto, cuanto más clásico sea su movimiento.

1.4 Generalización de las ZPF a otros modos de excitación

En las anteriores secciones se han estudiado las ZPF presentes en el estado fundamental de los núcleos esféricos debidas a la existencia de oscilaciones armónicas colectivas de la densidad isoscalar (T=0)

$$\rho(\vec{r}) = \rho_n(\vec{r}) + \rho_p(\vec{r}) \quad , \qquad (1.53)$$

oscilaciones en las que protones y neutrones se mueven en fase. En este tipo de excitaciones la distribución de densidad isovectorial (T=1)

$$\rho_1(\vec{r}) = \rho_n(\vec{r}) - \rho_p(\vec{r}) \qquad (1.54)$$

vale cero en primer orden , supuesto que el número de neutrones, N, y el número de protones, Z, son los mismos.

En las denominadas vibraciones colectivas isovectoriales es la distribución de densidad $\rho_1(\vec{r})$ la que oscila armónicamente, en tanto que la isoscalar permanece, en primer orden, igual a su valor de equilibrio.

En las oscilaciones isovectoriales protones y neutrones se mueven en antifase, lo que, utilizando la misma parametrización que para $\rho^{def}(\vec{r})$ en la ec.(1.7), podemos expresar como

$$\rho_p^{def}(\vec{r}) = \rho_p(\vec{r}) - R\,\partial\rho_p(r)/\partial r \sum_{n\lambda\mu} \alpha^*_{\lambda\mu}(n) Y_{\lambda\mu}(\hat{r}) \qquad (1.55a)$$

en tanto que

$$\rho_n^{def}(\vec{r}) = \rho_n(\vec{r}) + R\,\partial\rho_n(r)/\partial r \sum_{n\lambda\mu} \alpha^*_{\lambda\mu}(n) Y_{\lambda\mu}(\hat{r}) \qquad (1.55b)$$

Obsérvese la diferencia en el signo del segundo término de estas dos ecuaciones.

De modo totalmente análogo al de las precedentes secciones, puede construirse una desviación cuadrática media $\Delta\sigma^2(T=1)$, que es la diferencia entre $\sigma^2(T=1)$ y $\sigma_0^2(T=1)$, calculadas con las ecs.(1.19) y (1.22), respectivamente. Los valores utilizados para $B(0\rightarrow\lambda(n))$ y $B^{IPM}(0\rightarrow\lambda(n)_0)$ son ahora los correspondientes a los modos con T=1. Las $B(0\rightarrow\lambda(n))$ son las experimentalmente obtenidas, o bien, las calculadas con la RPA.

Para realizar el cálculo RPA se debe tener en cuenta que la variación en el potencial monoparticular debido a la deformación de la distribución de densidad $\rho_1(r)$ es

$$\delta V(\vec{r}) = \begin{cases} 1/4\, V_1\ \delta\rho_1(\vec{r})/\rho(0)\ , & \text{neutrones} \\ -1/4\, V_1\ \delta\rho_1(\vec{r})/\rho(0)\ , & \text{protones} \end{cases} \qquad (1.56)$$

donde $V_1 \simeq 100$MeV y $\rho(0)$ es el valor promedio de la densidad isoscalar en el interior del núcleo. La expresión para $\delta V(r)$ de la ec.(1.56) está basada en la hipótesis de que el potencial de simetría, que da cuenta de aproximadamente la mitad de la energía de simetría de la fórmula semiempírica de masas, es un potencial de volumen (Bohr y Mottelson (1975)).

Nótese que el potencial de la ec.(1.56) es repulsivo, es decir, el núcleo es menos ligado con $\delta V(r)$ que si éste no existiera. Por

tanto, las energías de los estados excitados con T=1 calculadas con la RPA, en la que se considera $\delta V(r)$, son mayores que las calculadas en el modelo de partículas independientes, y dado que se cumple que (EWSR)

$$\sum_n \omega_\lambda(n)\, B(0\to\lambda(n)) = \sum_n \omega^{IPM}(n)\, B^{IPM}(0\to\lambda(n)_0) \qquad (1.57)$$

se tiene que

$$\sum_n B(0\to\lambda(n)) < \sum_n B^{IPM}(0\to\lambda(n)_0) \quad , \qquad (1.58)$$

y por tanto

$$\sigma^2(T=1) < \sigma_0^2(T=1) \quad , \qquad (1.59)$$

con lo que queda que

$$\Delta\sigma^2(T=1) < 0 \qquad (1.60)$$

En la tabla(1.2) se presenta los valores de $\Delta\sigma_\lambda^2(T=1)$.

λ	$\Delta\sigma_\lambda^2(fm^2)$	$\sigma_\lambda^2(fm^2)$	$\sigma_{\lambda 0}^2(fm^2)$
1	-0.0011	0.0102	0.0113
2	-0.0056	0.0761	0.0817
3	-0.0136	0.1614	0.1750
4	-0.0170	0.2313	0.2483
5	-0.0277	0.4503	0.4780
6	-0.0200	0.6678	0.6878
7	-0.0200	1.0582	1.0782
8	-0.0200	1.5347	1.5547
9	-0.0140	1.4607	1.4747
10	-0.0030	2.1550	2.1580

Tabla(1.2) Valores de $\Delta\sigma_\lambda^2$, σ_λ^2 y $\sigma_{\lambda 0}^2$ para modos con T=1.

Los valores de $\sigma^2_{\lambda o}$ son los mismos que los de la tabla(1.1), lo que se debe a que estamos trabajando con un núcleo de N=Z.

La interpretación de $\Delta\sigma^2(T=1)$, al ser negativa, como una desviación cuadrática media presenta obvias dificultades. Esbensen y Bertsch (1983) se limitan a sumarla a $\Delta\sigma^2(T=0)$, sin dar ninguna explicación para $\Delta\sigma^2(T=1)<0$, lo que, no obstante, desde un punto de vista cuantitativo no es muy relevante pues, $\Delta\sigma^2(T=1)$ es en valor absoluto mucho menor que $\Delta\sigma^2(T=0)$. En el capítulo 4 se da una interpretación al hecho de que $\Delta\sigma^2(T=1)<0$. Allí se demuestra que tanto en $\Delta\sigma^2(T=0)$ como en $\Delta\sigma^2(T=1)$ existen contribuciones espúreas que se cancelan cuando se considera la suma de ambas. Una vez eliminadas estas contribuciones espúreas ambas desviaciones cuadráticas se hacen positivas, resultanto entonces natural interpretar $\Delta\sigma^2(T=1)$ como una medida de las fluctuaciones adicionales a las que está sometida la distribución de densidad calculada con el modelo de partículas independientes. Se reencuentran así, también para el caso de fluctuaciones con T=1, efectos análogos a los de las ZPF con T=0.

Otros tipos de modos de vibración se pueden dar excitando otros grados de libertad. Hasta aquí hemos discutido los modos isoscalares y los isovectoriales en los que son los grados de libertad espaciales y de isospín los que se consideran. No obstante, los espaciales los hemos sometido a la condición de conservación del volumen y los de isospín a la conservación de la carga ($\mu_T=0$). Permitiendo que el volumen no se conserve se generan los modos de compresión, y permitiendo $\mu_T\neq 0$, se generan los modos de intercambio de carga. Otro grado de libertad es el espín, cuya excitación da lugar a los denominados modos de espín. De notable interés son los efectos de las ZPF en los modos de vibración de pairing (Bes y Broglia (1966)), correspondientes a las excitaciones que cambian el número de partículas en dos, siendo el campo externo que las genera el de la transferencia de dos partículas. Cómo afectan estas ZPF a las energías monoparticulares se puede encontrar en Broglia et al. (1985a), y cómo influyen en los procesos de fusión por debajo de la barrera coulombiana en Broglia (1985).

Asociado con cada una de estas vibraciones existe una variación, δV, del campo promedio, que tratado en la RPA da lugar a un $\Delta\sigma^2$, que, como en los casos de T=0 y T=1 comentados, contienen contribuciones

espúreas, que deben ser eliminadas para una correcta interpretación de los efectos de cada uno de los tipos de ZPF. El método para eliminar estas contribuciones espúreas se presenta en el capítulo 4 en relación con los cálculos microscópicos de las ZPF. Se debe resaltar no obstante que el $\Delta\sigma^2$ de los modos con T=0 es, con mucho, el más importante, y que su mayor contribución es $\sigma^2(n=1)$, es decir, la de los modos de baja energía.

Capítulo 2

Fluctuaciones del estado fundamental en la familia de isótopos del Calcio

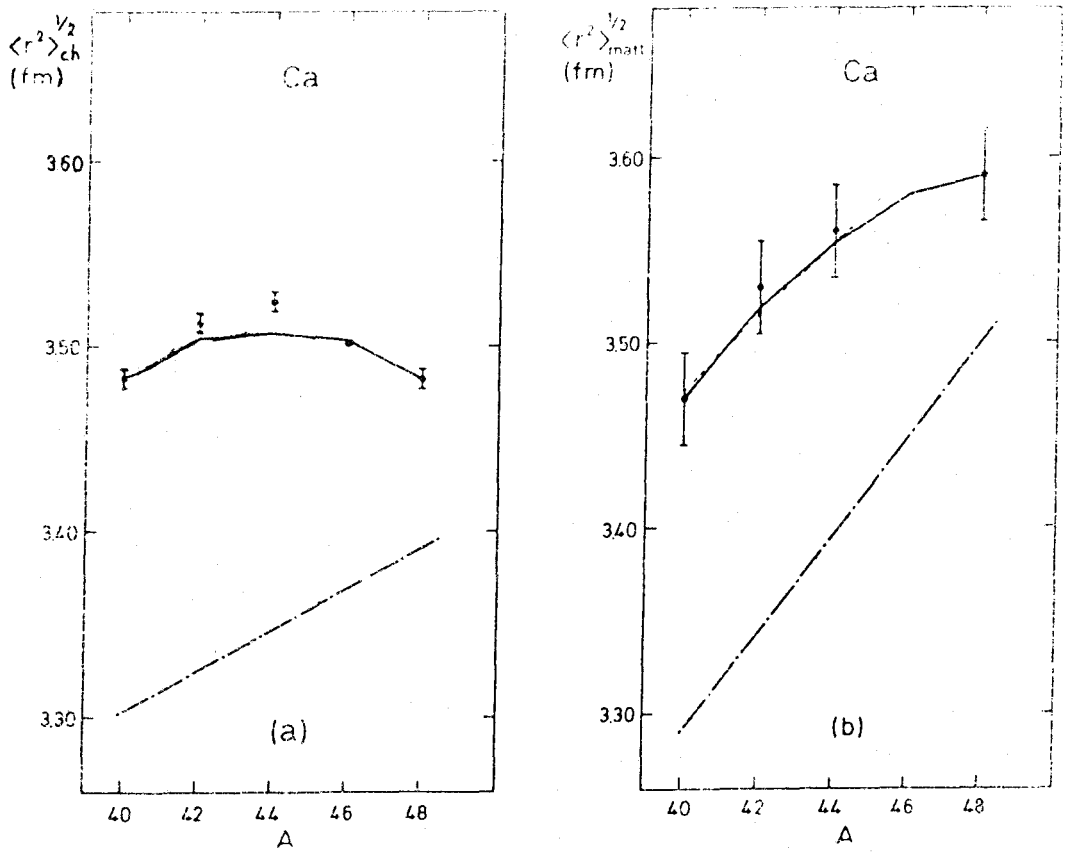
La familia de isótopos del Calcio es de notable interés por las estructuras tan peculiares que presentan los radios cuadráticos medios (MSR) como función del número de neutrones (figura(2.1)). Esta familia presenta asimismo acusadas anomalias isotópicas en las secciones eficaces de fusión para energías alrededor de la barrera de Coulomb (figura(2.2)). Por otro lado el espectro de baja energía de esta familia exhibe marcadas estructuras tanto en la energía de los niveles como en los valores β_λ asociados (figura(2.3)). La idea presentada en el capítulo anterior de que las ZPF asociadas a dichos niveles afectan los MSR y las secciones eficaces de fusión nos dice que existe una relación entre todos estos observables.

Por otra parte los métodos estandar para el estudio de los MSR (Hartree-Fock) o de las secciones eficaces de fusión (barrera unidimensional estática) no son satisfactoriamente aplicables para el estudio de las mencionadas anomalias isotópicas, lo que ofrece la oportunidad de intentar la aplicación de diferentes métodos y modelos. En este capítulo se indica qué es lo que a la luz del método de las ZPF podria ser cambiado o corregido en los diferentes métodos estandar.

2.1 Radios cuadráticos medios

Como se ve en la figura(2.1a) el MSR de carga crece con A para ^{40}Ca, ^{42}Ca y ^{44}Ca y entonces decrece, siendo el valor de $\langle r^2 \rangle^{1/2}_{ch.}$ asociado con el ^{48}Ca casi igual que el del ^{40}Ca. Algunos cáculos Hartree-Fock(*) (Warroquier et al. (1983), Campi y Sprung (1982)) predicen un MSR que es esencialmente constante. Asi que aunque reproducen el ^{40}Ca y el ^{48}Ca no reproducen el comportamiento parabólico del MSR de carga a lo largo de la familia. El MSR de materia (figura(2.1b)) crece casi como $A^{1/3}$ entre el ^{40}Ca y el ^{44}Ca, y mucho mas suavemente hasta el ^{48}Ca. Tampoco este comportamiento es reproducido por los

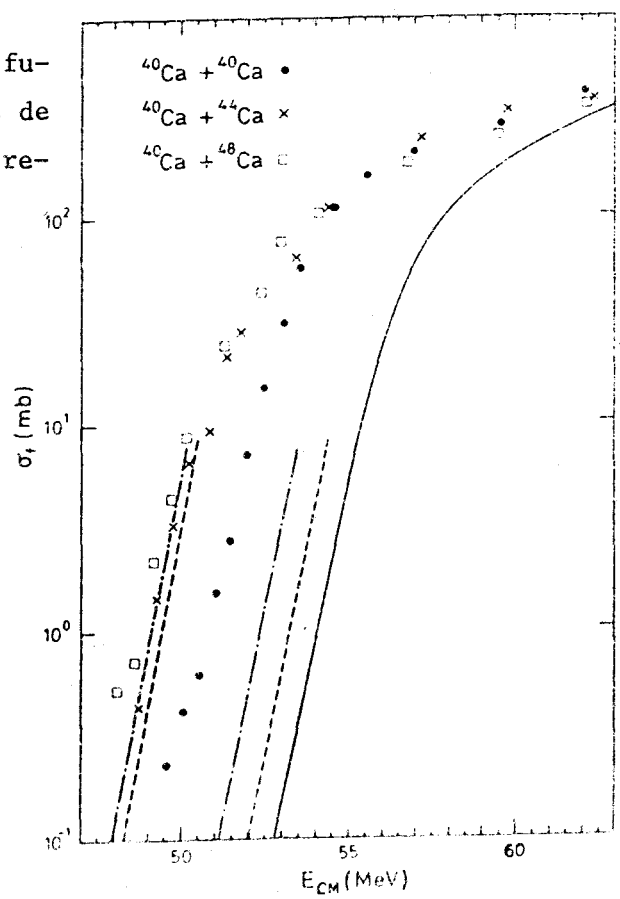
(*)Por Hartree-Fock entendemos tambien Hartree-Fock con BCS para núcleos con capas no cerradas.

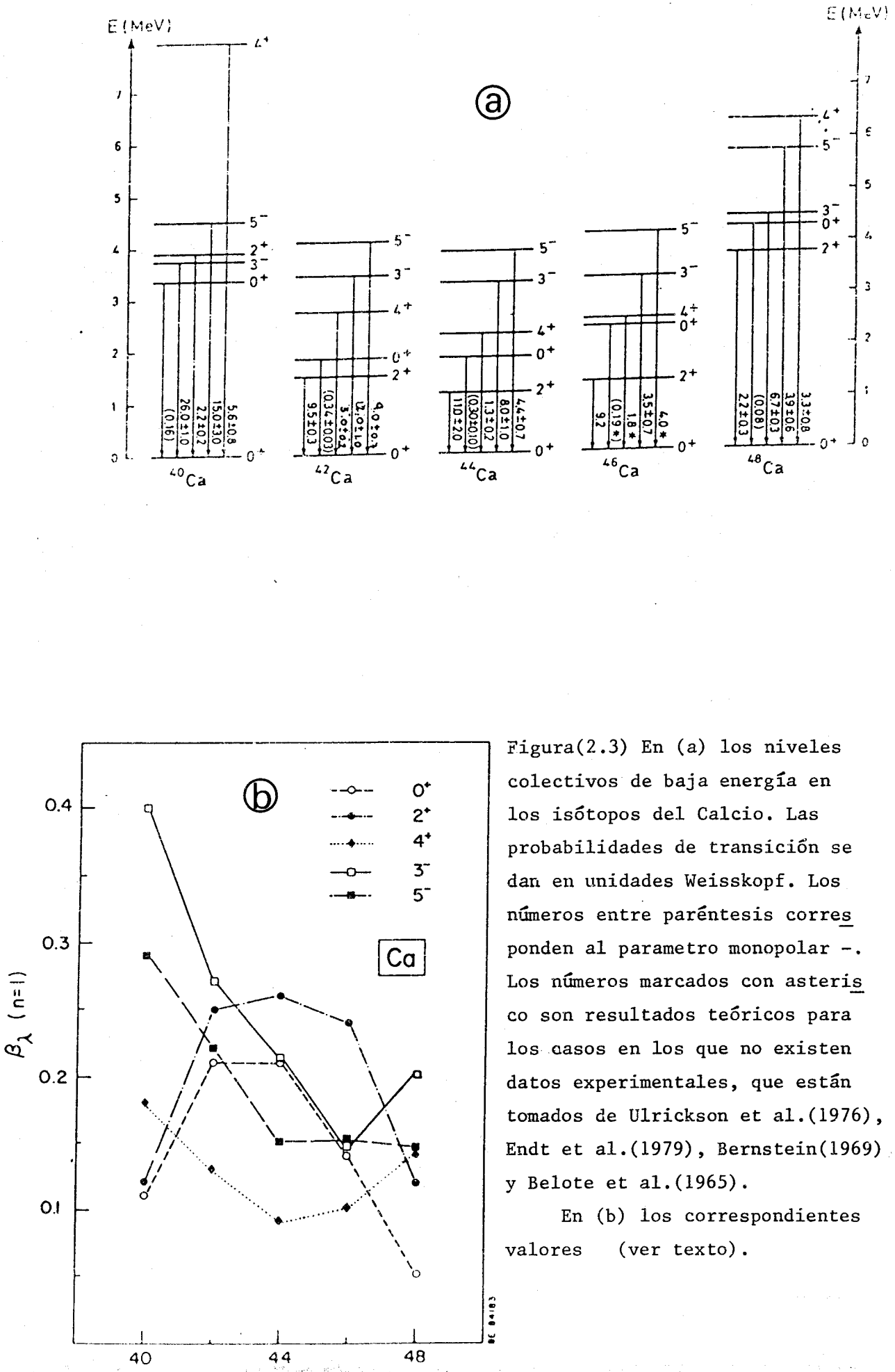


Figura(2.1) Radios cuadráticos medios de los isótopos del Calcio. En (a) los de carga en función del número másico (datos experimentales tomados de Wohlfahrt et al.(1978) y (1981)). En (b) los de materia (datos experimentales tomados de Alkhazov et al.(1977)).

Figura(2.2) Secciones eficaces de fusión (datos experimentales tomados de Aljwain et al.). En trazo fino el resultado del modelo estandar.

En trazo grueso el resultado una vez incluidas las ZPF.





Figura(2.3) En (a) los niveles colectivos de baja energía en los isótopos del Calcio. Las probabilidades de transición se dan en unidades Weisskopf. Los números entre paréntesis corresponden al parametro monopolar -. Los números marcados con asterisco son resultados teóricos para los casos en los que no existen datos experimentales, que están tomados de Ulrickson et al.(1976), Endt et al.(1979), Bernstein(1969) y Belote et al.(1965).

En (b) los correspondientes valores (ver texto).

cálculos Hartree-Fock.

Esta evolución parabólica del MSR con el número de neutrones ha sido desde largo tiempo atrás correlacionado con el comportamiento similar que presentan los valores β_λ de los estados excitados de baja energía de los diferentes isótopos (Reinhard y Drechsel (1979)). No obstante nunca se realizó en este sentido un cálculo completo donde se incorporasen todos los efectos de las correlaciones, esto es, las ZPF de todas las multipolaridades y todos los modos de cada multipolaridad, siendo para ello esencial la utilización del método de sustracción, sin el cual el procedimiento diverge como ya se ha comentado mas arriba (ver por ejemplo tabla(1.1)).

El valor de σ_λ^2 puede ser directamente relacionado con los valores β_λ. Utilizando las ecs.(1.12,16a y 19) resulta inmediato que

$$\sigma_\lambda^2 = \frac{R^2}{4\pi} \sum_n \beta_\lambda^2(n) \tag{2.1}$$

Para una discusión cualitativa resulta muy util tener en mente que el valor aproximado del incremento de las fluctuaciones es

$$\Delta\sigma_\lambda^2 \approx \sigma_\lambda^2(n=1) = \frac{R^2}{4\pi} \beta_\lambda^2(n=1) \tag{2.2}$$

y que por tanto la corrección al MSR es

$$\Delta\langle r^2\rangle = 3\Delta\sigma^2 \tag{2.3a}$$

$$\approx \frac{3R^2}{4\pi} \sum_\lambda \beta_\lambda^2(n=1) \tag{2.3b}$$

En la figura(2.3b) se ve que los estados de paridad positiva 0^+ y 2^+ tienen valor máximo de β_λ para el ^{44}Ca, disminuyendo hacia el ^{40}Ca y el ^{48}Ca. Este comportamiento, según la ec.(2.3b), debe dar lugar a una estructura parabólica de los MSR conforme se avanza en la familia de isótopos.

Por otro lado los valores β_λ de las vibraciones de paridad negativa decrecen yendo del ^{40}Ca al ^{48}Ca, lo que se debe esencialmente al hecho de que la transición monoparticular $1d_{3/2} \rightarrow 1f_{7/2}$ se va bloqueando conforme se añaden neutrones al orbital $1f_{7/2}$ (el espectro monoparticu-

lar aparece en la figura(2.4)). Este comportamiento de los valores β_λ provoca el que los MSR coregidos con las ZPF crezcan mas lentamente al aumentar el número másico que lo que el modelo de partículas independientes predice.

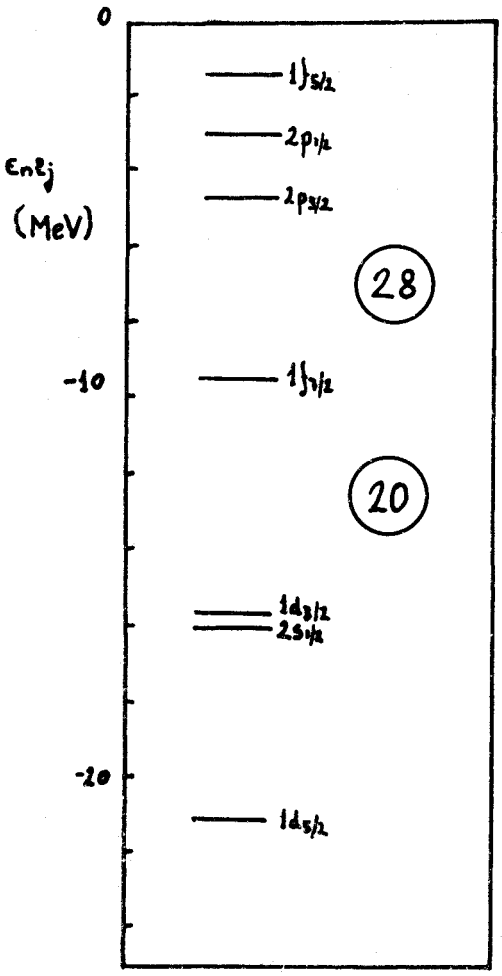


Figura (2.4) Espectro monoparticular de neutrones del ^{48}Ca alrededor de la energía de Fermi, resultado de un cálculo Hartree-Fock con interacción SkyrmeIII.

El valor exacto de $\Delta\sigma^2$ se obtiene según la ec.(1.28) como

$$\Delta\sigma^2 = \sum_\lambda \left(S_\lambda^{(0)} - S_{\lambda 0}^{(0)} \right) \left\{ 4\pi \left((\lambda+2) A \langle r^{\lambda-1} \rangle \right)^{-2} \right\} \qquad (2.4)$$

donde $S_\lambda^{(0)}$ es

$$S_\lambda^{(0)} = \sum_n B(0 \longrightarrow \lambda(n)) \tag{2.5}$$

extendiendose la suma a todas las soluciones del cálculo RPA.

La cantidad $S_{\lambda 0}^{(0)}$ es

$$S_{\lambda 0}^{(0)} = \sum_{(ph)\lambda} B^{IPM}(0 \longrightarrow \lambda(ph)) \tag{2.6}$$

extendiendose en este caso la suma a todas las excitaciones partícula-hueco en la base generada con el método Hartree-Fock. La interacción efectiva utilizada ha sido la SIII.

Los cálculos RPA para isótopos de capas abiertas se han llevado a cabo en la representación de cuasi-partículas. La constante de pairing utilizada para resolver las ecuaciones BCS fue ajustada para la diferencia de masas entre los núcleos pares e impares. Para cada multipolaridad la constante de acoplamiento χ (ec.(B.1)) ha sido ajustada para reproducir en promedio los datos experimentales de la energía y la probabilidad de transición (figura(2.3)). No obstante se ha utilizado la misma para todos los núclidos. Esto es muy importante para que los resultados tengan un significado claro. Si se permitiese jugar libremente con χ de un núclido a otro no se podria hablar rigurosamente de efectos isotópicos debidos a las ZPF. En el caso de los estados de mas baja energía se utilizaron los valores experimentales de los parámetros de deformación $\beta_\lambda(n=1)$ de la figura(2.3). En lo referente a la multipolaridad 0^+, el parámetro monopolar $\rho = \langle \Psi_f | \sum_1^Z r_j^2 | \Psi_i \rangle / R^2$ es extraido de los datos experimentales de la intensidad de la transición monopolar con emisión de un par electrón-positrón. Para que ρ no sea nulo el estado fundamental debe tener mezcla, con amplitud $b \neq 0$, del estado 0_2^+(HF). El parámetro ρ puede ser convertido en un parámetro β efectivo a través de la relación

$$\beta_{ef}^2 = \frac{4\pi}{3}\left(\frac{b}{a}\right)\frac{\rho}{Z} \tag{2.7}$$

siendo

$$a^2 + b^2 = 1 \tag{2.8}$$

Para detalles ver p.552 en Bohr y Mottelson (1975).

El valor de b para los distintos isótopos aparece en la tabla(2.1).

A	40	42	44	46	48
b^2	0.10	0.30	0.30	0.17	0.04

Tabla(2.1) Amplitud al cuadrado del estado 0_2^+(HF) presente en el estado fundamental. Valores tomados de De Voight et al(1974) excepto el del ^{46}Ca, que ha sido interpolado.

Los resultados de estos cálculos para $\Delta\sigma_\lambda^2$ aparecen en la tabla(2.2).

J^π	$\Delta\sigma_\lambda^2(fm^2)$				
	A=40	42	44	46	48
0^+	0.016	0.060	0.060	0.028	0.004
	(0.016)	(0.060)	(0.060)	(0.028)	(0.004)
2^+	0.038	0.114	0.123	0.152	0.029
	(0.019)	(0.083)	(0.098)	(0.085)	(0.021)
4^+	0.084	0.032	0.014	0.023	0.040
	(0.042)	(0.023)	(0.011)	(0.015)	(0.029)
3^-	0.175	0.112	0.091	0.064	0.077
	(0.213)	(0.101)	(0.063)	(0.031)	(0.062)
5^-	0.094	0.086	0.078	0.061	0.059
	(0.109)	(0.067)	(0.034)	(0.032)	(0.031)
$\Delta\sigma^2(fm^2)$	0.407	0.404	0.366	0.308	0.209
	(0.399)	(0.234)	(0.266)	(0.191)	(0.147)

Tabla(2.2) Desviaciones cuadráticas medias asociadas a las ZPF en los modos de vibración de los diferentes isótopos de Calcio.

Todas las multipolaridades $\lambda \leqslant 5$ han sido consideradas, observandose que las contribuciones de los estados colectivos de mas baja energía (cantidades entre parentesis) son las mas importantes.

Haciendo uso de la ec.(2.3a) se encuentran las correcciones $\Delta\langle r^2\rangle$ a los MSR. Estos $\Delta\langle r^2\rangle$ no deben aplicarse a los MSR calculados con

interacciones cuyos parámetros han sido ajustados para intentar reproducir los datos experimentales. Tales parametros incluyen así los efectos de las ZPF aunque promediados sobre toda la tabla de núclidos, por lo que no pueden dar cuenta de los detalles como los que presenta la familia de isótopos del Calcio. Para dar cabida a las correcciones habría que recalcular los parámetros de la interacción (Skyrme por ejemplo) de modo que una vez añadidos los efectos de las ZPF fuera cuando se comparase con los datos experimentales. Este es un proyecto interesante pero muy laborioso, y antes de ser llevado a cabo es conveniente comprobar que la inclusión de las ZPF puede en efecto dar cuenta de los fenómenos observados, así como tener una idea de cuales son los parámetros a modificar y en qué cuantía. Es con este ánimo con el que se ha intentado ajustar los datos experimentales. Para ello hemos supuesto unos MSR sin ZPF ($\langle r^2 \rangle_0^{1/2}$) con dependencia lineal en A, que es lo que se desprende de los cálculos Hartree-Fock referidos. La pendiente y posicion de estas dependencias lineales se han determinado ajustando los MSR de carga y materia del ^{40}Ca y del ^{48}Ca. El resultado de este proceso se presenta en la figura(2.1). En linea discontinua aparecen los MSR sin ZPF. El de materia resulta tal que puede ser expresado como

$$\left(\langle r^2 \rangle_0^{1/2}\right)_{mat.} \approx 0.96 A^{1/3} fm$$
$$\approx \sqrt{\frac{3}{5}}\, 1.24 A^{1/3} fm \qquad (2.9)$$

En linea continua aparece el resultado final para los MSR. Como puede apreciarse las correcciones son en promedio del 5%. Según comentamos, el comportamiento parabólico es, en efecto,debido a las ZPF en multipolaridades pares, en tanto que las impares producen un crecimiento con A mas suave que el de $\langle r^2 \rangle_0^{1/2}$.

El cálculo con el modelo de partículas independientes de lo que debe dar cuenta es de los MSR sin ZPF, es decir, de $\langle r^2 \rangle_0^{1/2}$ de carga y materia. Estos son reproducidos haciendo uso de un potencial Woods-Saxon,

$$V(r) = \frac{V}{1 + \exp\left(\frac{r-R}{a}\right)} \qquad (2.10)$$

con

$$V = V_0 + V_1 [(N-Z)/A] \frac{1}{2} t_z \qquad (2.11)$$

donde se ha utilizado V_0=-52MeV, V_1=100MeV, $R=r_0A^{1/3}$, r_0=1.24fm, a=.45fm. El radio de Coulomb utilizado ha sido $R_c=r_{0c}A^{1/3}$ con r_{0c}=1.20fm (*).

De todos los parámetros el único que se aleja de los estandar es la difusividad. La idea de haber puesto todo el enfasis en la difusividad está basada en el hecho de que una distribución de tipo Woods-Saxon, cuando se convoluciona con una gaussiana, se convierte en otra distribución que puede parametrizarse asimismo con una forma Woods-Saxon que se diferencia de la primera por tener una mayor difusividad (ver figura(1.3)).

El potencial Woods-Saxon encontrado tiene así una difusividad menor que la de los utilizados en los cálculos en los que las ZPF no son consideradas explicitamente, que suele ser a≈0.65fm. El valor utilizado para r_0 ha sido el que se desprende de los $\langle r^2 \rangle_0^{1/2}$ de materia (ec.(2.11)).

Repitiendo los cálculos para el núcleo ^{208}Pb se obtiene $\Delta\sigma^2$=0.22fm^2. Nótese sin embargo que $(\Delta\sigma^2/R)_{^{208}Pb} < (\Delta\sigma^2/R)_{^{48}Ca}$. El potencial sin ZPF que se ha encontrado es tambien aplicable al caso del ^{208}Pb.

2.2 Fusión por debajo de la barrera coulombiana

En la figura(2.2) aparecen los datos experimentales de las secciones eficaces de fusión para energías de centro de masas, E, alrededor de la altura de la barrera coulombiana, E_B , para los sistemas ^{40}Ca-^{40,44,48}Ca.

El modelo estandar (Lefort(1981)) para la interpretación de estos resultados consiste en describir la reacción de fusión en términos de una barrera de potencial unidimensional determinada por el potencial nuclear más el coulombiano más el centrífugo, suponiendo formas nucleares estáticas. Para $E<E_B$ el proceso de fusión se produce por penetración cuántica de la barrera de potencial. Aproximando esta por una parábola invertida (figura(1.4)) y suponiendo que su posición radial y curvatura son aproximadamente las mismas

(*)El MSR es aumentado en 0.65fm^2 debido al tamaño finito de los nucleones. Los efectos c.m. quedan englobados en los parámetros del potencial.

para todas las ondas parciales, la sección eficaz de fusión es (Wong(1973))

$$\sigma_f^{(0)}(E) = \pi r_B^2 \frac{\epsilon}{E} \ln\left\{1 + \exp\left[\frac{E - E_B}{\epsilon}\right]\right\} \qquad (2.12)$$

donde r_B es el radio y E_B la altura de la barrera. La cantidad $\epsilon = (\hbar\omega_B/2\pi)$ es una medida de la anchura de la barrera. La frecuencia ω_B viene dada por

$$\omega_B = \left(-\partial^2\left(U_{aA}^N(r) + U_{aA}^C(r)\right)/\partial r^2\big|_{r_B}/m_{aA}\right)^{1/2} \qquad (2.13)$$

siendo m_{aA} la masa reducida y U_{aA}^N y U_{aA}^C los potenciales nuclear y coulombiano, respectivamente.

Este modelo da buenos resultados para sistemas ligeros y energías moderadas. La situación es diferente para sistemas mas pesados (para una amplia documentación sobre el tema ver MIT(1984)). En este caso los cálculos con este modelo dan resultados que subestiman las secciones eficaces entre dos y tres órdenes de magnitud respecto a las experimentales (figura(1.4)). En estos cáculos estandar se han utilizado barreras coulombianas extraidas de los datos experimentales de σ_f para E bien por encima de E_B (Aljwin et al.), donde los efectos de las ZPF desaparecen (Dasso et al.(1983)).

Invirtiendo las secciones eficaces como función de la energía se obtiene que los potenciales que reproducen los datos de σ_f a $E<E_B$ son totalmente anómalos (Koonin(1984)), eliminándose la posibilidad de describir estos procesos con una barrera monodimensional estática. Esta es una característica general para sistemas en los que los núcleos fusionantes tienen $A \gtrsim 40$.

Las mencionadas discrepancias se deben a que en el modelo estandar se supone que los núcleos fusionantes no poseen grados de libertad internos. Como se ha visto en el capítulo anterior, la existencia de oscilaciones colectivas a baja energía induce ZPF que aumentan la probabilidad de penetración , lo que se traduce en un aumento de la sección eficaz de fusión debido a la bajada efectiva de la barrera, que viene dada por (ec.(1.38))

$$D_{ZPF} = \frac{1}{2}\left(\frac{\sigma_P}{r_B}\right)^2 \frac{E_B^2}{\epsilon}\left(1 - \frac{R_A}{r_B}\right) \qquad (2.14)$$

donde σ_p^2 es la desviación cuadrática media de las fluctuaciones a las que se puede considerar congeladas en el proceso de fusión. Nosotros suponemos que σ_p^2 es proporcional a $\Delta\sigma^2$ de la tabla(2.2). La constante de proporcionalidad la determinamos a partir del hecho de que (figura(2.2))

$$D_{ZPF}(^{40}Ca)\Big|_{exp} \approx 3.5\ MeV \tag{2.15}$$

De la ec.(2.14) se obtiene que

$$\sigma_p^2(40,40) \approx 0.26\,\Delta\sigma_t^2(40,40) \tag{2.16}$$

donde

$$\Delta\sigma_t^2(A_1,A_2) = \Delta\sigma^2(A_1) + \Delta\sigma^2(A_2) \tag{2.17}$$

Haciendo uso de esta normalización se calcula la disminución efectiva, D_{ZPF}, de la altura de la barrera para los sistemas $^{40}Ca+^{44}Ca$ y $^{40}Ca+^{48}Ca$. Los resultados aparecen en la tabla(2.3b).

A	$\Delta\sigma^2(fm^2)$
40	0.41
44	0.37
48	0.21

a)

A_1-A_2	$\Delta\sigma_t^2(fm^2)$	$\Delta\sigma_t^2/\Delta\sigma_{40-40}^2$	$D_{ZPF}(MeV)$
40-40	0.82	1	3.5(exp)
40-44	0.78	0.95	3.3
40-48	0.62	0.76	2.7

b)

A_1-A_2	$D_{1p}(MeV)$	$D_{2p}(MeV)$	$D_t(MeV)$
40-40	---	---	---
40-44	0.1	0.3	0.4
40-48	0.2	0.2	0.4

c)

Tabla(2.3) En a) las ZPF de cada núcleo. En b) las de los diferentes sistemas con sus correspondientes D_{ZPF}. En c) las bajadas efectivas de la barrera debidas al acoplamiento a canales de transferencia de una (1p) y dos (2p) partículas y la total.

Nótese como D_{ZPF} (40+44) es 0.6MeV mayor que D_{ZPF}(40+48) lo que practicamente compensa la diferencia las alturas de las barreras originales, traduciéndose en que las secciones eficaces de fusión de ambos sistemas son esencialmente iguales (figura(2.2)).

Paralelamente al efecto de las vibraciones de superficie se encuentra el de la transferencia de partículas. En el proceso de aproximación durante la fusión los núcleos pueden intercambiar nucleones dando lugar a un aumento de la probabilidad de fusión. Los procesos de transferencia más destacables y el incremento en $(E-E_B)$ que producen, $\tilde{Q}$, se recogen en la tabla(2.4).

$^{40}Ca + ^{40}Ca$	1 part.	$\tilde{Q} \approx -7$MeV
	2 part.	$\tilde{Q} \approx -9$MeV
$^{40}Ca + ^{44}Ca$	$^{41}Ca + ^{43}Ca$	$\tilde{Q} \approx -2.8$MeV
	$^{42}Ca + ^{42}Ca$	$\tilde{Q} \approx +0.8$MeV
	$^{38}Ar + ^{46}Ti$	$\tilde{Q} \approx +3.0$MeV
$^{40}Ca + ^{48}Ca$	$^{41}Ca + ^{47}Ca$	$\tilde{Q} \approx -1.6$MeV
	$^{39}K + ^{49}Sc$	$\tilde{Q} \approx -1.4$MeV
	$^{38}Ca + ^{50}Ca$	$\tilde{Q} \approx +2.6$MeV
	$^{38}Ar + ^{50}Ti$	$\tilde{Q} \approx +7.6$MeV

Tabla(2.4) Valores de $\tilde{Q}$ para reacciones de transferencia de una y dos partículas en sistemas Ca+Ca.

La bajada efectiva de la barrera que producen se recoge en la tabla(2.3c).

Para el sistema $^{40}Ca + ^{40}Ca$ los canales de transferencia son energéticamente tan desfavorables que no tienen ningún efecto apreciable. Para los sistemas $^{40}Ca + ^{44}Ca$ y $^{40}Ca + ^{48}Ca$ la bajada de la barrera qué se produce es la misma. Estas correcciones han sido calculadas haciendo uso de la expresión (Landowne(1984))

$$D_i = \left(-\lambda_- + \epsilon \ln \frac{F^2}{F^2+\lambda_-^2}\right)_i \qquad (2.18)$$

donde λ_- es el autovalor de la energía del estado fundamental respecto a la del canal de entrada cuando se incluye el acoplamiento F con el canal de reacción. En esencia, λ_- se obtiene resolviendo el problema de autovalores

$$\begin{vmatrix} 0-\lambda_- & F \\ F & -\tilde{Q}-\lambda_- \end{vmatrix} = 0 \qquad (2.19)$$

La energía λ_- es siempre negativa, independientemente de los signos de F y de Q, por lo que el acoplamiento siempre aumenta la sección eficaz de fusión. Para más detalles véase Broglia y Barranco(1984) y referencias allí incluidas.

Sumando los efectos de las ZPF y del acoplamiento a los canales de transferencia se obtienen los resultados que aparecen en trazo grueso en la figura(2.2).

En resumen, las mayores fluctuaciones del ^{44}Ca hacen que funda con el ^{40}Ca tanto como lo hace el ^{48}Ca. En adición, los efectos de la transferencia en los sistemas ^{40}Ca+ ^{44}Ca y ^{40}Ca+ ^{48}Ca aumentan ligeramente la sección eficaz de fusión respecto al ^{40}Ca+ ^{40}Ca, en el que la transferencia de nucleones se encuentra energéticamente muy inhibida.

A modo de conclusión de este capítulo podemos decir que los diversos datos experimentales pueden ser entendidos de forma natural dentro del esquema teórico presentado, esto es, en terminos de las fluctuaciones inducidas por los modos de vibracion colectiva de baja energía. Sus efectos son notables y explican las anomalías isotópicas respecto a los modelos estáticos estandar. Estos resultados permiten el aventurarse con confianza en un proyecto más ambicioso que tratará de considerar consistentemente los efectos de las ZPF, recalculando, por ejemplo, los parámetros de la interacción Skyrme para dar cabida a las correcciones, que serían calculadas haciendo uso de la nueva interacción efectiva.

Capítulo 3

Emisión radioactiva de ^{14}C por el ^{223}Ra. ZPF a grandes amplitudes

3.1 Introducción

Los procesos de emisión radioactiva son controlados esencialmente por dos factores. Uno es la probabilidad de formación de la partícula que es emitida. El otro es la probabilidad de penetración de esta partícula a través de la barrera coulombiana.

En la probabilidad de formación, la correlación entre los nucleones en el seno del núcleo juega un papel muy importante. En el caso de la emisión de una partícula α se encuentra que con un modelo de partículas independientes los valores obtenidos para la constante de desintegración, λ , son en promedio cuatro órdenes de magnitud menores que las experimentales (Mang(1964)). La inclusión de correlaciones a través de la mezcla de configuraciones debidas a la interacción residual de pairing produce muy importantes aumentos en λ (Tonozuka y Arima(1979), Janouch y Liotta(1982)). Los resultados así obtenidos se aproximan mucho mas a los datos experimentales, aún cuando son todavia, en promedio, un factor 10 menores.

La interacción de pairing resulta tambien decisiva en el cálculo correcto de la vida media en procesos de fisión espontánea (Nilsson et al(1969)).

Un problema intermedio entre la emisión α y la fisión espontanea es el de la recientemente descubierta emisión de ^{14}C por el ^{223}Ra (Rose y Jones(1984), Gales et al(1984) y Aleksandrov et al(1984)),

$$^{223}Ra \longrightarrow {}^{209}Pb + {}^{14}C \qquad (3.1)$$

La inclusión en este caso de las correlaciones presenta la dificultad de que el ^{14}C tiene demasiados nucleones como para que los métodos utilizados para el cálculo de la probabilidad de formación de la partícula α sean viables.

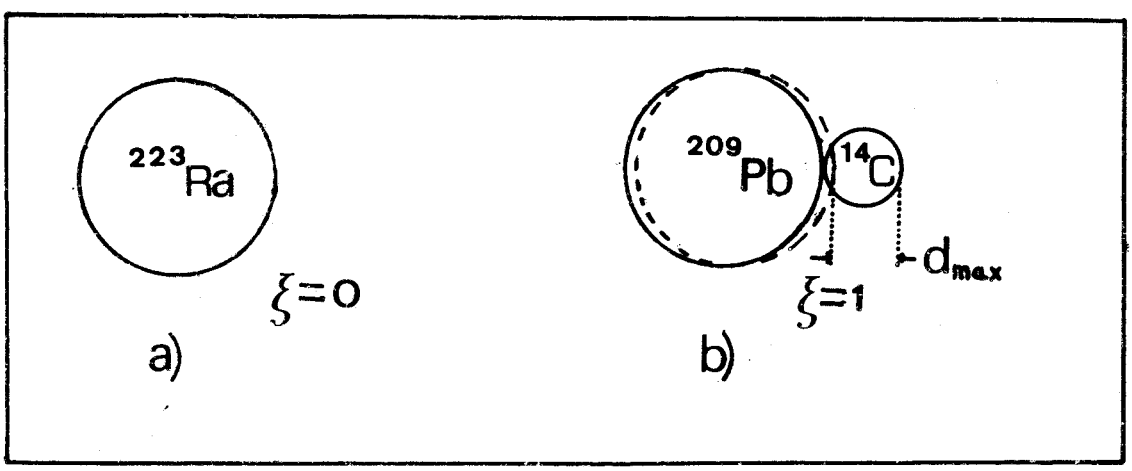
El método que hemos seguido consiste en dividir el proceso de emisión en dos partes. En la primera se considera la formación del ^{14}C

como si fuese un proceso de fisión, aún cuando las técnicas utilizadas para el cálculo de la probabilidad de formación son diversas. En la segunda, a partir del ^{14}C ya formado, se considera a este como una partícula atravesando la barrera de potencial coulombiana del sistema $^{14}C+^{209}Pb$.

Para este decaimiento el efecto de las correlaciones es también de fundamental importancia. La probabilidad de formación del ^{14}C en un modelo de partículas independientes, donde dichas correlaciones no son consideradas, es unos veinte órdenes de magnitud menor que el valor experimental (ver Apéndice D).

3.2 Probabilidad de formación

Por probabilidad de formación entendemos la probabilidad de que el estado fundamental del ^{223}Ra se encuentre en la configuración $^{14}C+^{209}Pb$ esquematizada en la figura(3.1b) (esferas en contacto).



Figura(3.1) a) Configuración esférica del ^{223}Ra. b) Configuración con ^{14}C formado en contacto con el ^{209}Pb y en linea discontinua la configuración (a) superpuesta.

Según esta definición dicha probabilidad de formación se determina por el cuadrado del elmento de matriz

$$\langle {}^{223}Ra; g.s. | \xi = 1 \rangle \qquad (3.2)$$

Con ξ =1 caracterizamos la configuración con el ^{14}C formado. Este elemento de matriz lo calculamos considerando la mezcla de configuraciones que la interacción residual induce en el estado fundamental del ^{223}Ra, $|^{223}Ra;g.s.\rangle$. El cálculo se hace diagonalizando la interacción residual en una base de estados que, conectados por esta interacción, llevan desde la configuración esférica (ξ=0 en la figura(3.1a)) hasta la que posee el ^{14}C formado en contacto con el ^{209}Pb.

Elección de la base. Trayectoria de escisión

La forma de la superficie nuclear, suponiendo simetría axial alrededor del eje Z, se caracteriza por los parámetros β_L que determinan la dependencia angular del radio de dicha superficie

$$R(\vartheta) = R + \sum_L R\beta_L Y_L(\vartheta) \qquad (3.3)$$

donde $R=1.2A^{1/3}$ es el radio del núcleo esférico y $Y_L(\vartheta)$ es el armónico esférico $Y_{LM}(\vartheta)$ con M=0.

La configuración esférica de la figura(3.1a) está caracterizada por tener todos los β_L nulos. La configuración con el ^{14}C formado en contacto con el ^{209}Pb está caracterizada por el conjunto $\{\beta_L^0\}$ (ver tabla(3.1)), que se obtiene invirtiendo la ec.(3.3) con la función $R(\vartheta)$ de la figura(3.1b) (para más detalles ver sección(C.1)).

L	β_L^0
2	0.100
3	0.107
4	0.109
5	0.111
6	0.101
7	0.097
8	0.077
9	0.071
10	0.045

Tabla(3.1) Valores de $_L$ de la configuración con el ^{14}C formado en contacto con el ^{209}Pb.

Configuraciones intermedias, con valores $\{\beta_L\}$, se pueden definir a través del parámetro de escisión

$$\beta_L = \xi \beta_L^0 \quad , \quad 0 \leq \xi \leq 1 \tag{3.4}$$

siendo

$$\beta_L(1) = \beta_L^0 \quad y \quad \beta_L(0) = 0$$

Suponemos que la trayectoria más probable seguida en el espacio de configuraciones de los parámetros β_L por el ^{223}Ra desde su configuración esférica hasta la formación del ^{14}C, puede ser aproximada mediante la de la ec.(3.4).

Cuando el número de multipolaridades considerado es pequeño, como en el caso de fisión, en el que se consideran fundamentalmente sólo L=2 y 4, se hace un cálculo de las energías monoparticulares para cada deformación determinandose la superficie de mínima energía en el espacio $\{\beta_2, \beta_4\}$. La trayectoria de fisión que se toma es la que pasa por el punto de menor energía para un valor dado de β_2 , que es el grado de libertad dominante. Sin embargo, en el caso de la escisión del ^{14}C un cálculo tan detallado de la superficie de mínima energía resulta mucho más complicado y, aún más importante, existen 8 grados de libertad, β_L (L=1,...,8), cuyas dinámicas son relevantes, lo cual hace infinitamente más tedioso tal procedimiento. Por otro lado, se puede especular que tan gran número de grados de libertad permitirá al sistema adaptarse lo máximo posible a la trayectoria más corta (ec.(3.4)), que desde un punto de vista variacional (Brink(1985)) está favorecida. Se espera así que la trayectoria real no desarrolle más que pequeñas fluctuaciones alrededor de aquélla.

Comenzando en la configuración esférica y aumentando el parámetro de escisión la superficie nuclear se deforma según la ec.(3.3) quedando definida por

$$R(\vartheta;\xi) = R + \sum_L R\,\beta_L(\xi)\,Y_L(\vartheta) \tag{3.5a}$$

La distribución de momentos para ξ=0 es isótropa, estando deli-

mitada por una superficie de Fermi esférica de radio igual al momento de Fermi,

$$p_F \simeq 1.36\hbar\, fm^{-1} \tag{3.5b}$$

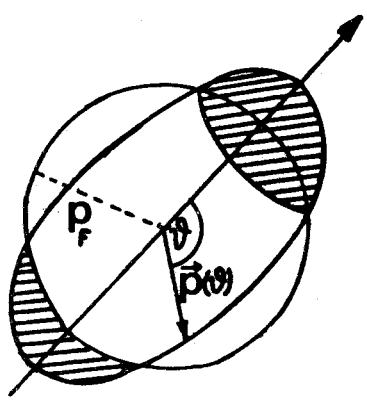
Para un valor finito de ξ la distribución de momentos se distorsiona según la transformación (secciones(C.1-3))

$$\vec{p} \longrightarrow (1+\xi\,\vec{\nabla}\otimes\vec{u}(\vec{r},\xi))\vec{p} \tag{3.6}$$

donde $\vec{u}(\vec{r};\xi)$ es el desplazamiento aplicado al punto $\vec{r}$ al deformar incompresiblemente el núcleo de modo que su superficie está descrita por la ec.(3.5a). Tal distorsión provoca un aumento de la energía cinética, que es mínima para ξ=0. Los nucleones que poseen un momento $p>p_F$ ocupan un volumen del espacio de las fases $V_d(\xi)$, que para deformaciones puramente cuadrupolares es (ver sección(C.4))

$$V_d(\xi) = [2\times(2\pi p_F^3)(\xi\beta_2^0\sqrt{\frac{5}{4\pi}}\frac{1}{3\sqrt{3}})(\frac{4\pi}{3}R^3) \tag{3.7}$$

Cuando ξ es tal que $V_d(\xi)$ es igual a $(2\pi\hbar)^3$, que es precisamente el espacio de las fases ocupado por una partícula, el sistema puede conseguir de nuevo una distribución de momentos isótropa moviendo las partículas que tienen $p>p_F$ al volumen de espacio de las fases que se encuentra vacío con $p<p_F$ (ver figura(3.2)). A tal incremento



Figura(3.2) Distorsión de la superficie de Fermi.

del parámetro de escisión, $\xi_{est.}$, corresponde una configuración de mínima energía de deformación estable (sección(C.5)). En rigor $V_d(\xi_{est.})$ debe alcanzar el valor $2\times(2\pi\hbar)^3$, ya que al mismo tiempo debe cambiar el estado de la partícula que se mueve en sentido contrario en la órbita conjugada, pasando ésta también al interior de la esfera de Fermi.

En el volumen $2\times(2\pi\hbar)^3$ se pueden alojar 8 nucleones con diferentes orientaciones del espín e isospín. Debido a la interacción espín-órbita y a la coulombiana se rompen las simetrías en espín e isospín, respectivamente, por lo que la vuelta a la distribución de momentos esférica no se lleva a cabo cambiando simultáneamente el estado de movimiento de las ocho partículas, sino a través de cuatro cambios sucesivos de configuración monoparticular que supondremos uniformemente distribuídos entre $\xi=0$ y $\xi=\xi_{est}$. En cada uno de estos cambios de configuración monoparticular se modifica el estado de movimiento de dos partículas que se mueven en órbitas conjugadas.

A partir de cada deformación estable la superficie de Fermi se deforma desde la situación esférica, ahora según

$$\vec{p} \longrightarrow (1+(\xi-\xi_{est})\vec{\nabla}\otimes\vec{u}(\vec{r},\xi))\vec{p} \qquad (3.8)$$

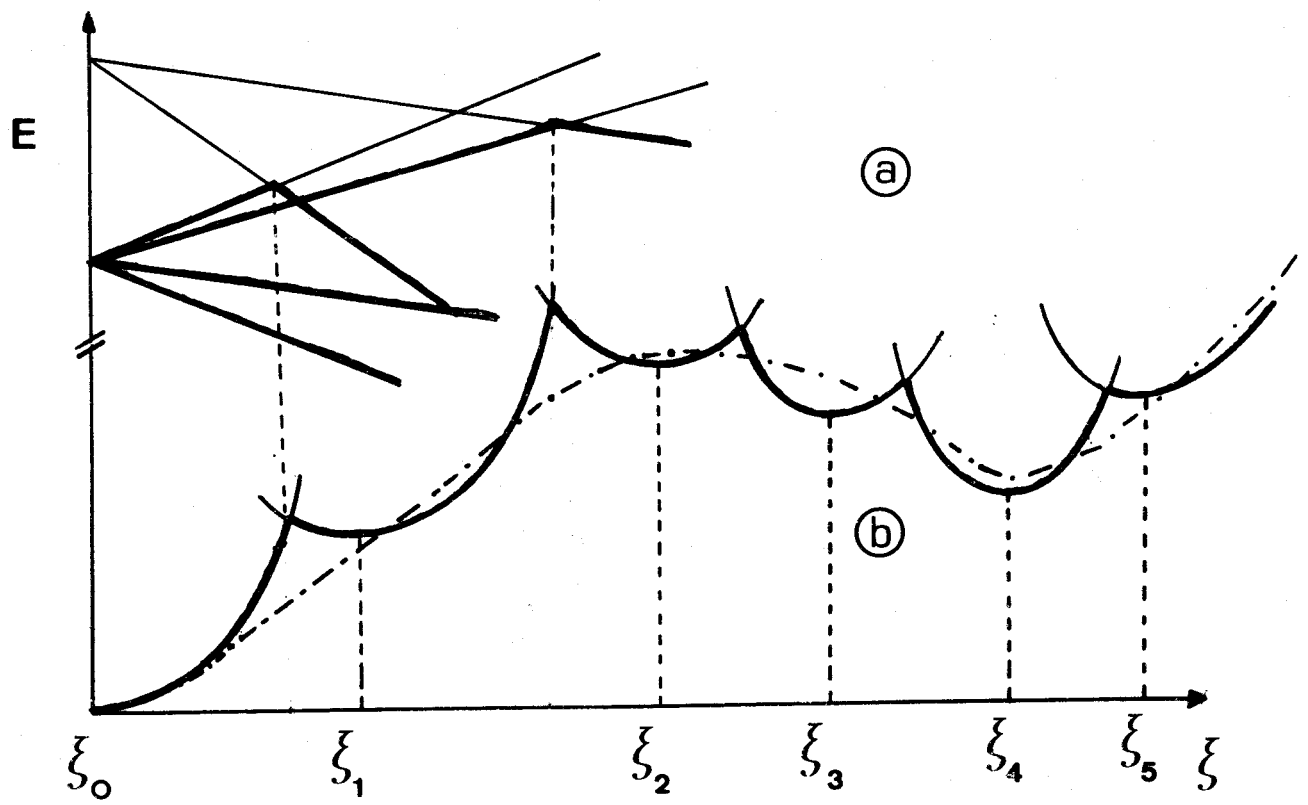
pasando a través de las configuraciones monoparticulares intermedias hasta que de nuevo se puede hacer esférica.

En la figura(3.3b) se representa esquemáticamente la energía mínima del sistema en función del parámetro ξ. Las configuraciones intermedias mencionadas corresponden a los mínimos suaves en la energia.

En el proceso de formación del ^{14}C el sistema va pasando de una configuración a otra mediante la interacción de pairing, que conecta estados que se diferencian en el movimiento de dos partículas en órbitas conjugadas.

Intensidad de la interacción residual. Parámetro de inercia

Suponiendo que sólo configuraciones vecinas son conectadas por la interacción residual, el hamiltoniano del sistema es, en la base truncada



Figura(3.3) Representación esquemática de la energía monoparticular como función del parámetro de escisión.

$$
\begin{array}{c|cccc}
H & |\varphi_\xi^{(0)}=0\rangle & |\varphi_\xi^{(1)}\rangle & |\varphi_\xi^{(2)}\rangle & \cdots \\
\hline
\langle\varphi_\xi^{(0)}=0| & E_0 & \Delta_{10} & 0 & \cdots \\
\langle\varphi_\xi^{(1)}| & \Delta_{10}^* & E_1 & \Delta_{12} & \cdots \\
\langle\varphi_\xi^{(2)}| & 0 & \Delta_{12}^* & E_2 & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots &
\end{array}
\tag{3.9}
$$

El problema de autovalores a resolver es

$$
\begin{pmatrix}
\cdots & \vdots & & & \\
 & E_{i-1} & \Delta & & \\
 & \Delta & E_i & \Delta & \\
 & & \Delta & E_{i+1} & \cdots \\
 & & & \vdots &
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} \vdots \\ f_{i-1} \\ f_i \\ f_{i+1} \\ \vdots \end{pmatrix}
= E
\begin{pmatrix} \vdots \\ f_{i-1} \\ f_i \\ f_{i+1} \\ \vdots \end{pmatrix}
\tag{3.10}
$$

donde se ha aproximado $\Delta_{i,i+1}$ por un acoplamiento promedio, Δ . Una vez resuelta esta ecuación la probabilidad de formación se calcula como $P_{for}=|f_{\xi=1}|^2$.

Resulta útil aproximar la ec.(3.10) por la ecuación diferencial

$$
-\frac{\hbar^2}{2B}\frac{d^2\psi}{d\xi^2} + V(\xi)\psi(\xi) = E\,\psi(\xi)
\tag{3.11a}
$$

La correspondencia entre ambas se obtiene escribiendo esta ecuación diferencial en diferencias finitas, quedando en la forma del sistema de ecuaciones lineales

$$
\begin{pmatrix}
\cdots & \vdots & & \vdots & \\
 & V(\xi_{i-1})+\frac{\hbar^2}{B(\Delta\xi)^2} & -\frac{\hbar^2}{2B(\Delta\xi)^2} & 0 & \cdots \\
 & -\frac{\hbar^2}{2B(\Delta\xi)^2} & V(\xi_i)+\frac{\hbar^2}{B(\Delta\xi)^2} & -\frac{\hbar^2}{2B(\Delta\xi)^2} & \\
\cdots & 0 & -\frac{\hbar^2}{2B(\Delta\xi)^2} & V(\xi_{i+1})+\frac{\hbar^2}{B(\Delta\xi)^2} & \cdots \\
 & \vdots & & \vdots &
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} \vdots \\ \psi(\xi_{i-1}) \\ \psi(\xi_i) \\ \psi(\xi_{i+1}) \\ \vdots \end{pmatrix}
= E
\begin{pmatrix} \vdots \\ \psi(\xi_{i-1}) \\ \psi(\xi_i) \\ \psi(\xi_{i+1}) \\ \vdots \end{pmatrix}
\tag{3.11b}
$$

Por comparación con la ec.(3.10) se tiene que el parámetro de inercia es

$$B = -\frac{\hbar^2}{2\Delta}\frac{1}{(\Delta\xi)^2} \tag{3.12}$$

Además $V(\xi^{(i)})$ es, salvo una constante, el elemento diagonal E_i. Las funciones de onda están relacionadas según

$$|f_i|^2 \simeq |\Psi(\xi_i)|^2 \Delta\xi \tag{3.13}$$

La cantidad $(\Delta\xi)$ es la distancia promedio en el parámetro de escisión entre dos configuraciones vecinas. Dicho de otro modo,

$$\Delta\xi = \frac{1}{n} \tag{3.14}$$

donde n es el número de configuraciones desde la esférica, $|\xi^{(0)}=0\rangle$, hasta la que posee el ^{14}C formado en contacto con el ^{209}Pb, $|\xi^{(n)}=1\rangle$. El valor encontrado para n ha sido 12.

En un cálculo microscópico el valor de n corresponde al número de cruces entre niveles monoparticulares al ir aumentando el parámetro de escisión desde cero hasta uno. Esto ha sido comprobado positivamente en el caso de procesos de fisión, a los que el presente formalismo es aplicable. En la figura(3.3a) se representa esquemáticamente la aparición de las configuraciones intermedias en relación con dichos cruces de niveles.

La ec.(3.12) para el parámetro de inercia pone de manifiesto cómo para un valor dado de $(\Delta\xi)$ al sistema le cuesta menos trabajo moverse a lo largo de la coordenada ξ cuanto mayor sea la interacción entre una configuración y la siguiente.

La intensidad de la interacción residual puede ser estimada aplicando este formalismo al caso de los procesos de fisión y comparando con los cálculos microscópicos de tipo Hartree-Fock-Bogoliubov (Nilsson et al(1969)). El parámetro de inercia obtenido en esta última referencia corresponde en promedio a poner en la ec.(3.12)

$$\Delta \simeq 1.6\ \mathrm{MeV} \tag{3.15}$$

que es del orden del gap de pairing (Bertsch(1980)).

Elementos diagonales. Energia potencial

Para poder resolver el problema de autovalores de la ec(3.10) o la ecuación diferencial (3.11a), y obtener así la probabilidad de formación, sólo falta conocer los elementos diagonales E_i, o el potencial $V(\xi)$ que, salvo una constante que no afecta a la dinámica, son equivalentes.

La energía E_o de la configuración $|\xi=0\rangle$ es

$$E_0 = B(^{223}Ra) - B(^{209}Pb) - B(^{14}C) \simeq 31.85\,\mathrm{MeV} \tag{3.16}$$

donde las cantidades B son las energías de ligadura, que han sido tomadas de Jagdish(1985).

Por otra parte, de procesos de colisión ión-ión se sabe que el máximo de la barrera coulombiana corresponde a una distancia entre el ^{14}C y el ^{209}Pb que puede parametrizarse como

$$r_B = [1.07(A_{Pb}^{1/3} + A_C^{1/3}) + 2.72]\,\mathrm{fm} \simeq 11.65\,\mathrm{fm} \tag{3.17}$$

con una altura

$$E_B = \frac{Z_C Z_{Pb} e^2}{r_B}\left(1 - \frac{a}{r_B}\right) \simeq 57.77\,\mathrm{MeV} \tag{3.18}$$

donde a=0.6fm es un parámetro de difusividad (Broglia y Winther (1981)).

A cada distancia r entre el ^{14}C y el ^{209}Pb corresponde un valor del parámetro de escisión que puede ser determinado de la relación

$$r = \xi\, d_{max} + C \tag{3.19}$$

que proviene de la definición de ξ (ec.(3.4)). Dados los radios del ^{223}Ra, el ^{209}Pb y el ^{14}C se tiene que d_{max}=5.0fm y C=5.0fm. El significado de d_{max} queda patente en la figura(3.1b). Por tanto, la energía E_B corresponde a un valor del parámetro de escisión

$$\xi_B = \frac{r_B - C}{d_{max}} \approx 1.33 \text{ MeV} \tag{3.20}$$

Asumiendo una dependencia cuadrática del potencial con el parámetro de escisión,

$$V(\xi) = \frac{1}{2} K \xi^2 + a \tag{3.21}$$

que es el tipo de dependencia del Modelo de la Gota Líquida, el valor que se obtiene para K ajustando los dos puntos conocidos del potencial es

$$K \approx 30 \text{ MeV} \tag{3.22}$$

Probabilidad de formación

La solución a la ecuación diferencial (3.11a) puede ser escrita y evaluada sin necesidad de más cálculo. La densidad de probabilidad en el parámetro de escisión de encontrar el sistema con una deformación ξ en el estado fundamental es

$$\rho(\xi) \equiv |\Psi(\xi)|^2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{\xi^2}{2\sigma^2}\right) \tag{3.23}$$

con

$$\sigma^2 = \frac{1}{n}\sqrt{\frac{\Delta}{2K}} \approx 0.0135 \tag{3.24}$$

donde se han utilizado los valores

$$n = 12 \quad , \quad \Delta = 1.6 \text{ MeV} \quad , \quad K = 30 \text{ MeV} \tag{3.25}$$

Para la formación del ^{14}C, es decir, para $\xi=1$, se encuentra $\rho(1)\sim10^{-16}$, cantidad a la que es directamente proporcional la probabilidad de emisión. Resolviendo el problema de autovalores de la ec.(3.10) el resultado que se obtiene es $\rho(1)\sim10^{-13}$, con un valor para $\sigma^2=0.0166$.

Queremos hacer notar que pequeños cambios en los parámetros que aparecen en la ec.(3.25) pueden fácilmente modificar en un orden de magnitud el valor obtenido para $\rho(1)$ y, por tanto, el de la probabilidad de emisión. No obstante, estos resultados son cuantitativamente significativos como se comprende si se tiene en cuenta que un cálculo en el que no se considera la interacción residual, arroja un valor $\rho(1)\sim10^{-45}$ a 10^{-30} (ver Apéndice D).

La ec.(3.23) para $\rho(\xi)$ expresa el efecto de las fluctuaciones cuánticas adicionales inducidas por la interacción residual. Si Δ la hacemos tender a cero sabemos que aún debe existir la probabilidad $\sim10^{-45}$ de que el ^{14}C se forme, que proviene de las fluctuaciones contenidas en el modelo de partículas independientes. La fluctuación suma de ambas es

$$\sigma_T^2 = \sigma^2 + \sigma_0^2 \tag{3.26}$$

El valor de σ_0^2 puede ser evaluado utilizando la ec.(3.23) y el valor 10^{-45} de la probabilidad de formación. Así

$$\sigma_0^2 \approx -\frac{1}{2\ln 10^{-45}} \approx 0.0048 \tag{3.27}$$

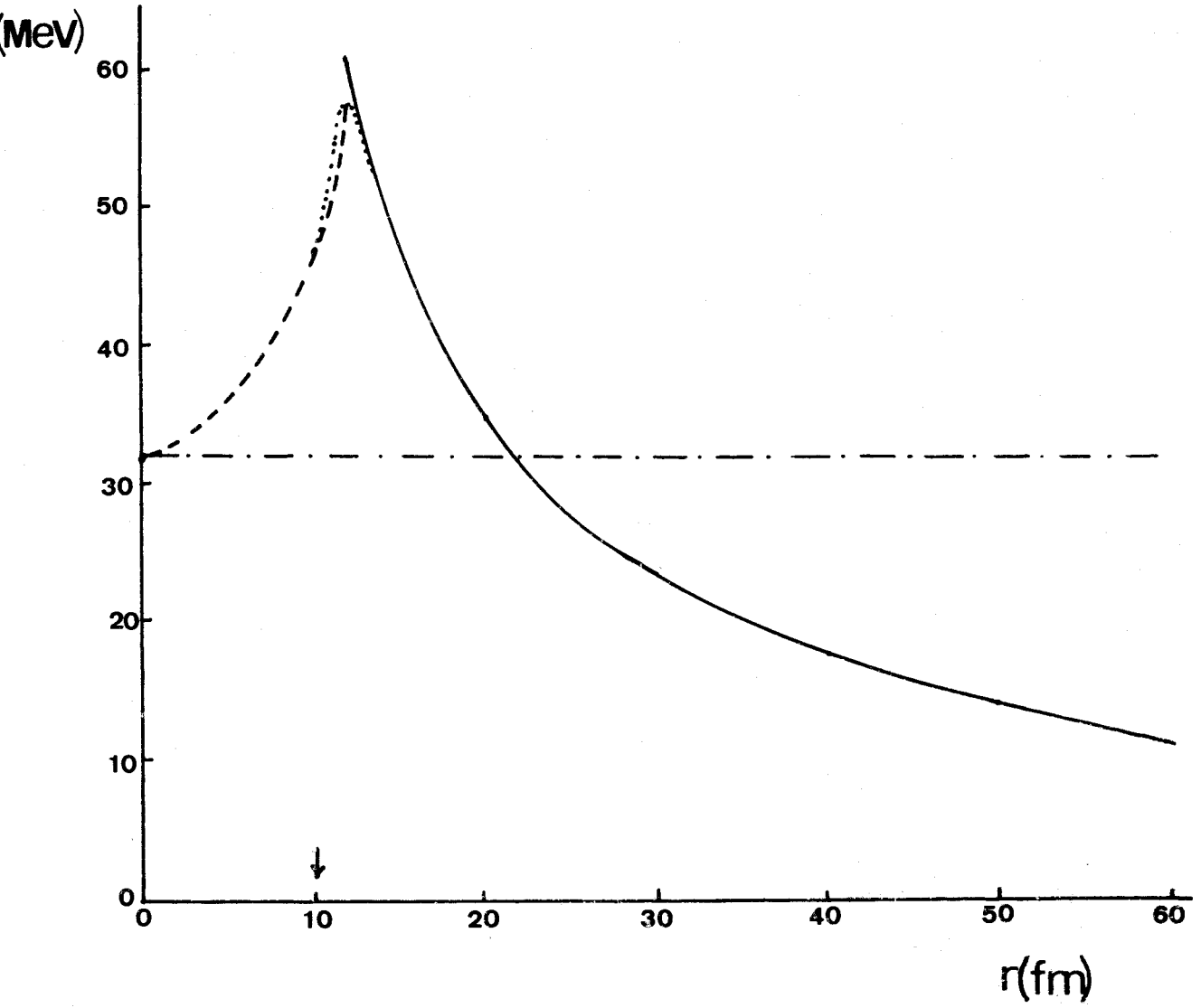
obteniéndose $\sigma_T^2=0.0183$ ($\sigma_T^2=0.0214$ con la solución de la ec.(3.10)), lo que hace que la probabilidad de formación se eleve hasta ser del orden de $10^{-12}(10^{-9})$. Con estos números puede que se estén sobrecontando efectos, ya que no es obvio que σ^2 y σ_0^2 correspondan a fenómenos totalmente independientes. No obstante, pueden ser tomados como un límite superior de los cálculos.

3.3 Penetración de la barrera coulombiana

Una vez formado el ^{14}C en contacto con el ^{209}Pb, aún debe aquél

atravesar la barrera coulombiana del sistema siendo su movimiento descrito en este proceso como la propagación de una partícula.

En la figura(3.4) se presenta la energía potencial del sistema en función de la distancia entre el ^{14}C y el ^{209}Pb.



Figura(3.4) En trazo continuo se indica el potencial coulombiano junto con el potencial $V(\xi)$ de la ec.(3.21), que está en linea a trazo discontinuo. En linea punteada la conexión entre ambos potenciales cuyo máximo viene dado por las ecs.(3.17-18). En trazo con puntos y rayas la energía en reposo del sistema en el estado inicial respecto a la del final. Con una flecha se indica el radio correspondiente a la situación de contacto entre el ^{14}C y el ^{209}Pb.

La probabilidad de penetración de la barrera coulombiana puede sercalculada utilizando la fórmula (Tonozuka y Arima(1979))

$$P_{pen}(r_c) = \frac{K r_c}{[F_0^2(Kr_c) + G_0^2(Kr_c)]} \tag{3.28}$$

En esta ecuación K es el número de onda

$$K = \sqrt{\frac{2\mu E_0}{\hbar^2}} \simeq 4.55 fm^{-1} \tag{3.29}$$

donde E_0 es la energía disponible para el decaimiento que aparece en la ec.(3.16), y μ es la masa reducida del sistema Pb+C. F_o y G_o son las funciones de Coulomb regular e irregular, respectivamente. El valor de r_c es la distancia entre los centros del ^{14}C y el ^{209}Pb en la configuración de contacto indicada con una flecha en la figura(3.4).

Debido a la existencia en el ^{14}C y en el ^{209}Pb de modos vibracionales colectivos a baja energía, la probabilidad de penetración puede aumentar varios órdenes de magnitud. La fluctuación de la superficie de ambos núcleos produce asímismo fluctuaciones en la anchura de la barrera coulombiana que, en promedio, son favorables a que el ^{14}C atraviese la barrera. La probabilidad de penetración incluyendo estos efectos viene dada por la transformación (ec.(1.52))

$$P_{pen}(r_c) \longrightarrow P_{pen}(r_c + K\Delta\sigma^2) \tag{3.30}$$

donde $\Delta\sigma^2$ es la desviación cuadrática media en el radio debida a la fluctuación asociada con dichos modos colectivos, obteniéndose, considerando los estados de menor energía (Lederer et al.(1978))

$$\Delta\sigma^2 = (\Delta\sigma^2)_{Pb} + (\Delta\sigma^2)_C \approx 0.16 fm^2 \tag{3.31}$$

Utilizando la ec.(3.30) se obtiene que la probabilidad de penetración aumenta en tres órdenes de magnitud, pasando de

$$P_{pen}(10.0\,fm) \approx .269 \times 10^{-27} \quad \text{(sin corrección)}$$

a

$$P_{pen}(10.7\,fm) \approx .222 \times 10^{-24} \quad \text{(con corrección)} \tag{3.32}$$

Las fluctuaciones asociadas con el ^{209}Pb inducen un aumento de un orden de magnitud, en acuerdo con cálculos de canales acoplados (Landowne y Dasso(1985)).

3.4 Constante de desintegración. Comparación con los datos experimentales

La constante de desintegración λ puede calcularse haciendo uso de la fórmula (Tonozuka y Arima(1979))

$$\lambda = \frac{4}{\hbar} P_{pen}(r_c + K\Delta\sigma^2) \left\{ \sqrt{\frac{\hbar^2 r_c}{2\mu}}\, \mathcal{Y}(r_c) \right\}^2 \tag{3.33}$$

donde $\mathcal{Y}(r_c)$ está definida de manera que

$$\rho(\xi = 1)\, d\xi = \mathcal{Y}^2(r_c)\, r_c^2\, dr \tag{3.34}$$

Utilizando la correspondencia entre el parámetro de escisión y la distancia radial de la ec.(3.19), se obtiene que

$$\mathcal{Y}^2(r_c) = \frac{\rho(\xi = 1)}{d_{max}\, r_c^2} \tag{3.35}$$

Sustituyendo los valores encontrados para $\rho(1)$ y $P_{pen}(V_c+K\Delta\sigma^2)$ en la ec.(3.33) los resultados que se obtienen son (Barranco et al(1985a))

no corr.	$\sigma_0^2=0.0048$	$\lambda\sim10^{-50}-10^{-35}s^{-1}$	a)
ec. dif. (3.11a)	$\sigma^2=0.0135$	$\lambda\sim10^{-21}\ s^{-1}$	b)
	$\sigma_T^2=0.0183$	$\lambda\sim10^{-17}\ s^{-1}$	c)
ec. aut. (3.10)	$\sigma^2=0.0166$	$\lambda\sim10^{-18}\ s^{-1}$	d)
	$\sigma_T^2=0.0214$	$\lambda\sim10^{-14}\ s^{-1}$	e)

(3.36)

Experimentalmente se encuentra (Rose y Jones(1984))

$$\lambda_{exp.}\sim 10^{-15}s^{-1} \tag{3.37}$$

Este valor está comprendido entre las cotas teóricas (d) y (e) en la ec.(3.36), que son las obtenidas resolviendo la ecuación de autovalores (3.10). No obstante, de los márgenes que el cálculo teórico presenta se ve que el acuerdo con el dato experimental no puede ser interpretado más que como una prueba de que el presente modelo ofrece un adecuado marco para el estudio de procesos de emisión radioactiva de "partículas" muy pesadas, como el ^{14}C.

Los márgenes en los resultados del modelo se verán muy disminuidos si en vez de estudiar valores absolutos de la constante de decaimiento, se estudian valores relativos entre diferentes canales de emisión de partículas pesadas en un determinado núcleo, o entre diferentes núcleos. Al hacer tal tipo de estudio relativo el resultado está sujeto a la determinación de menos parámetros, lo que puede reducir en gran parte los márgenes del resultado teórico.

3.5 Efecto de la deformación

La existencia de una deformación promedio en el estado fundamental del ^{223}Ra,

$$\beta_2 \simeq 0.15 \text{ (prolata)} \tag{3.38}$$

favorece la emisión del ^{14}C en la dirección del eje de simetría, ya que el número de pasos que el sistema debe dar hasta la formación del ^{14}C es, en dicha dirección, uno menos que en el caso esférico. Esto se traduce en que la probabilidad de formación en la dirección del eje de simetría aumenta un factor 10^2(*). Lo contrario ocurre en la dirección perpendicular a la de simetría.

El efecto neto, suponiendo una dependencia lineal de la probabilidad de formación con el ángulo respecto al eje de simetría, es el aumento de un orden de magnitud en la probabilidad de emisión.

(*) Esto podría ser comprobado experimentalmente polarizando la muestra emisora.

Método microscópico

Capítulo 4

Renormalización del estado fundamental del modelo de partículas independientes

4.1 Introducción

El estado fundamental de un núcleo (N,Z) en un modelo de partículas independientes (IPM) está descrito por el determinante de Slater formado con los (N,Z) estados monoparticulares de menor energía. Los estados monoparticulares provienen de resolver la ecuación de Schrödinger para una particula en el seno de un potencial de un cuerpo (potencial monoparticular). Desde un punto de vista variacional el mejor potencial monoparticular es aquel con el que se obtiene el determinante de Slater que minimiza la energía del sistema. Tal determinante es la denominada solución Hartree-Fock (HF) y el potencial que la genera es el denominado potencial HF.

La diferencia entre el hamiltoniano real y el hamiltoniano HF es la interacción residual.

La interacción residual puede ser tenida en cuenta diagonalizando la en una base truncada de estados de partículas independientes o determinantes de Slater. En esta linea están los tradicionales cálculos del Modelo de Capas.

Un tratamiento alternativo a la diagonalización de la interacción residual es mediante el desarrollo perturbativo. En principio este metodo presenta el inconveniente de tener que considerar la actuación de la interacción residual en muchos ordenes de magnitud, lo que sucede especialmente en nucleos que presentan espectros vibracionales colectivos. En estos casos la consideración adicional en la base de los estados de vibración incorpora de un golpe gran parte del efecto de la interacción residual, de modo que los cálculos perturbativos pueden ser detenidos en los primeros ordenes. La contrapartida es la aparición de efectos y estados espúreos que provienen de estar utilizando una base sobrecompleta. Estos problemas quedan resueltos utilizando la Teoría del Campo Nuclear (NFT) (Bortignon et al.(1977)).

En la NFT se trata perturbativamente el acoplamiento entre el movimiento de las partículas y las vibraciones nucleares (PVC), que da lugar a la renormalización de las diferentes propiedades del núcleo calculadas según el IPM. Ejemplo típico de esta renormalización son las cargas efectívas de los nucleones.

En este capítulo centramos nuestra atención en el efecto renormalizador que el PVC tiene sobre la distribución de densidad en los núcleos esféricos. Se presta especial atención a la comparación y conexión con el método macroscópico de las Fluctuaciones del estado fundamental (ZPF) presentado en el capítulo 1. Para ello se estudia un modelo esquemático que permite analizar con especial sencillez los diferentes aspectos y detalles de ambos métodos. Se presenta tambien en un caso realista.

4.2 Acoplamiento Partícula-Vibración(*)

El acoplamiento del movimiento de las partículas con las vibraciones de superficie (PVC) viene determinado por la modificación del campo nuclear monoparticular debida a la deformación de la superficie del núcleo (ec.(1.8))

$$H_{pv}(\vec{r}) = -R\frac{\partial V}{\partial r}\sum_{n\lambda\mu}\alpha^{*}_{\lambda\mu}(n)\,Y_{\lambda\mu}(\hat{r}) \qquad (4.1)$$

En las vibraciones colectivas los parámetros $\alpha_{\lambda\mu}(n)$ describen oscilaciones armónicas en el tiempo. Debido al caracter cuántico del sistema, dichos parámetros presentan fluctuaciones incluso en el estado fundamental, que son las que originan la renormalización de las diferentes propiedades calculadas con un modelo de partículas independientes, y en particular de la distribución de densidad.

Definiendo los usuales operadores de creación ($O^{+}_{\lambda\mu}$) y destrucción ($O_{\lambda\mu}$) de cuantos de vibración (fonones), el hamiltoniano de PVC toma la forma

$$H_{pv}(\vec{r}) = -\sum_{n\lambda\mu} T_{\lambda\mu}(\vec{r})\sqrt{\frac{\hbar\omega_{\lambda}(n)}{2C_{\lambda}(n)}}\left(O_{\lambda\mu}(n) + (-1)^{\lambda+\mu}O^{+}_{\lambda-\mu}(n)\right) \qquad (4.2)$$

donde $\hbar\omega_{\lambda}(n)$ es la energía del cuanto de vibración de números cuánticos (n,λ,μ) y $C_{\lambda}(n)$ la constante de recuperación asociada a dicho modo de vibración. Los valores de $\hbar\omega_{\lambda}(n)$ y $C_{\lambda}(n)$ pueden determinarse a partir de los datos experimentales de la energía y ritmo de absorción de la misma por parte del núcleo en presencia de un campo externo (ver ecs.(1.10-12)). En ausencia de datos experimentales, dichos valores se calculan haciendo uso de la RPA, que es la teoría microscópica standard más adecuada (la RPA se presenta en el Apendice B). El número cuántico es el momento angular que transporta la vibración y su proyección sobre el eje Z. El número cuántico n es necesario para distinguir las diferentes estructuras microscópicas que pueden sustentar una vibración con (λ,μ) (ver sección(B.2)). El operador

(*) En esta sección se presenta un estracto del contenido completamente detallado del Apendice A.

monoparticular que aparece en la ec.(4.2) es

$$T_{\lambda\mu}(\vec{r}) = R\frac{\partial V}{\partial r}\, i^{\lambda} Y_{\lambda\mu}(\hat{r}) \tag{4.3}$$

Representación Diagramática

La notación del tratamiento perturbativo de $H_{pv}(r)$ de la ec.(4.2) se hace mucho más sencilla haciendo uso de representaciones diagramáticas de los diferentes elementos que entran en el cálculo. Estos son: los estados monoparticulares, estados de vibración y elementos de matriz de los diferentes operadores.

El estado fundamental, en orden cero, de un núcleo de subcapas cerradas, $|0\rangle$, se representa con la ausencia de cualquier línea y ,en este formalismo, es equivalente al vacío en orden cero de la Electrodinámica Cuántica (QED).

Cuando el núcleo de subcapas cerradas no se encuentra en el estado fundamental, sino en un estado excitado de vibración $|(n,\lambda,\mu)\rangle$, su estado se representa con una línea ondulada

$$O^{+}_{\lambda\mu}(n)|0\rangle = |(n\lambda\mu)\rangle \longrightarrow \left.\begin{matrix}(n\lambda\mu)\\ \\ O^{+}_{\lambda\mu}(n)\times\!\!-\!-\end{matrix}\right\}, \quad O_{\lambda\mu}(n)|(n\lambda\mu)\rangle = |0\rangle \longrightarrow \left.\begin{matrix}O_{\lambda\mu}(n)\times\!\!-\!-\\ \\ (n\lambda\mu)\end{matrix}\right\} \tag{4.4}$$

Cuando al núcleo de subcapas cerradas se le añade una partícula en un estado monoparticular desocupado (estado de partícula) $|(nljm)\rangle$, su estado se representa mediante una flecha hacia arriba

$$a^{+}_{nljm}|0\rangle = |(nljm)\rangle \longrightarrow \left.\begin{matrix}(nljm)\\ \uparrow\\ a^{+}_{nljm}\times\!\!-\!-\end{matrix}\right., \quad a_{nljm}|(nljm)\rangle = |0\rangle \longrightarrow \left.\begin{matrix}a_{nljm}\times\!\!-\!-\\ \uparrow\\ (nljm)\end{matrix}\right. \tag{4.5}$$

donde $a^{+}_{nljm}(a_{nljm})$ es el operador de creación(destrucción) de partícula.

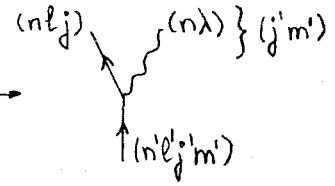
Cuando al núcleo de subcapas cerradas se le sustrae una partícula de un estado monoparticular ocupado (estado de hueco) $|(nljm)\rangle$, su estado se representa mediante una flecha hacia abajo

$$b^{+}_{nljm}|0\rangle = (-1)^{j-m}|(nlj-m)^{-1}\rangle \longrightarrow \left.\begin{matrix}(nljm)\\ \downarrow\\ b^{+}_{nljm}\times\!\!-\!-\end{matrix}\right., \quad b_{nljm}(-1)^{j-m}|(nlj-m)^{-1}\rangle = |0\rangle \longrightarrow \left.\begin{matrix}b_{nljm}\times\!\!-\!-\\ \downarrow\\ (nljm)\end{matrix}\right. \tag{4.6}$$

donde $b^{+}_{nljm}(b_{nljm})$ es el operador de creación(destrucción) de hueco (nljm). El factor de fase $(-1)^{j-m}$ que aparece en la ec.(4.6) se introduce para conferir al operador fermiónico b^{+} propiedades de transformación frente a rotaciones iguales a las del operador a^{+}

Los elementos de matriz de $H_{pv}(r)$ se representan mediante los denominados vértices, que conectan estados que se diferencian en el estado de movimiento de una partícula o hueco y en un cuanto de vibración. Así el elemento de matriz $\langle(nlj)(n\lambda);j'm'|H_{pv}(r)|n'l'j'm'\rangle$ se representa mediante el vértice

$$\langle(n\ell j)(n\lambda);(j'm')|H_{pv}(\vec{r})|n'\ell'j'm'\rangle \longrightarrow$$

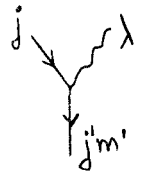


(4.7)

Por comodidad de notación, en general se omitirán los números cuánticos nl de los estados monoparticulares, n del estado de vibración y la llave del acoplamiento de momentos angulares.

Analogamente se tiene

$$\langle j^{-1}\lambda;\ j'm'\ |H_{pv}(\vec{r})|\ (\overline{j'm'})^{-1}\rangle \longrightarrow$$



(4.8)

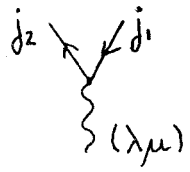
donde se ha introducido

$$|(\overline{jm})\rangle = (-1)^{j-m}\ |(j-m)\rangle \tag{4.9}$$

Estos son los denominados vértices de scattering.

Otro tipo de elementos de matriz de $H_{pv}(r)$ son aquellos en los que una partícula que se encontraba ocupando un estado de hueco pasa a ocupar un estado de partícula, apareciendo así una configuración partícula-hueco,

$$\langle j_2 j_1^{-1};\lambda\mu|H_{pv}(\vec{r})|\lambda\mu\rangle \longrightarrow$$



(4.10)

Otro tipo de elemento de matriz es

$$\langle 0 | H_{pv}(\vec{r}) | (j_2 j_1^{-1}) \lambda \lambda ; 00 \rangle \longrightarrow \tag{4.11}$$

Estos dos últimos son los denominados vértices RPA, pues son los considerados en la RPA para el estudio de la estructura microscópica de los fononess(ver ec.(B.24)).

Los valores de los diferentes vértices se encuentran en el Apéndice A, ecs.(A.19-24).

Nótese que el vértice de la ec.(4.11) da lugar a la inestabilidad del vacío de orden cero (el de Hartree-Fock, por ejemplo) frente a la excitación de 2p-2h (dos partículas y dos huecos), ya que el fonón tiene una estructura que es combinación lineal de excitaciones 1p-1h. Esto es, el vacío $|0\rangle$ puede generar espontáneamente configuraciones 2p-2h, si bien la conservación de la energía exige que sólo sean configuraciones virtuales. No obstante, y como ocurre en QED, estos procesos virtuales dan lugar a la renormalización de los diferentes observables.

4.3 Renormalización de la distribución de densidad

El operador de distribución de densidad es

$$\hat{\rho}(\vec{r}) = a^{+}(\vec{r})\, a(\vec{r}) \tag{4.12}$$

donde $a^{+}(\vec{r})$ es el operador de creación de un nucleón en el punto $\vec{r}$. Este se puede expresar en función de los a^{+}_{nljm} y de las funciones de onda monoparticulares asociadas según

$$a^{+}(\vec{r}) = \sum_{k} \varphi^{*}_{k}(\vec{r})\, a^{+}_{k} \tag{4.13}$$

denotando con k el conjunto de números cuánticos (nljm). Así, el operador de distribución de densidad se puede expresar como

$$\hat{\rho}(\vec{r}) = \sum_{k\ell} \varphi^{*}_{k}(\vec{r})\, \varphi_{\ell}(\vec{r})\, a^{+}_{k}\, a_{\ell} \tag{4.14}$$

El elemento de matriz

$$\rho(\vec{r}) = \langle \Psi | \hat{\rho}(\vec{r}) | \Psi \rangle \tag{4.15}$$

es la densidad del sistema en el punto $\vec{r}$ cuando se encuentra en el estado $|\Psi\rangle$.

Cuando $|\Psi\rangle$ es el estado fundamental del IPM la distribución de densidad es

$$\rho_0(\vec{r}) = \sum_j \varphi_j^*(\vec{r})\, \varphi_j(\vec{r}) \tag{4.16}$$

donde j recorre los orbitales de hueco.

Debido a la existencia del elemento de matriz de la ec.(4.11), esto es, debido a la inestabilidad del estado fundamental del IPM frente a excitaciones 2p-2h, la función de onda que describe el estado fundamental debe ser combinación lineal de varias configuraciones.

Utilizando la teoría de perturbaciones independientes del tiempo, el estado fundamental, $|\,\rangle$, incluyendo el efecto de $H_{pv}(r)$ hasta segundo orden es

$$|\,\rangle = \left\{ |C_0\rangle + |C_1\rangle + |C_2\rangle \right\} / \left\{ \langle C_0|C_0\rangle + \langle C_1|C_1\rangle \right\} \tag{4.17}$$

donde

$$|C_0\rangle = |0\rangle \tag{4.18a}$$

$$|C_1\rangle = \sum_{\substack{(1p-1h)\\ 1fonon}} \frac{\langle (1p-1h)(1fonon)|\, H_{pv}(\vec{r})\, |0\rangle}{\epsilon_{(1p-1h)(1fonon)}} \, |(1p-1h)(1fonon)\rangle \tag{4.18b}$$

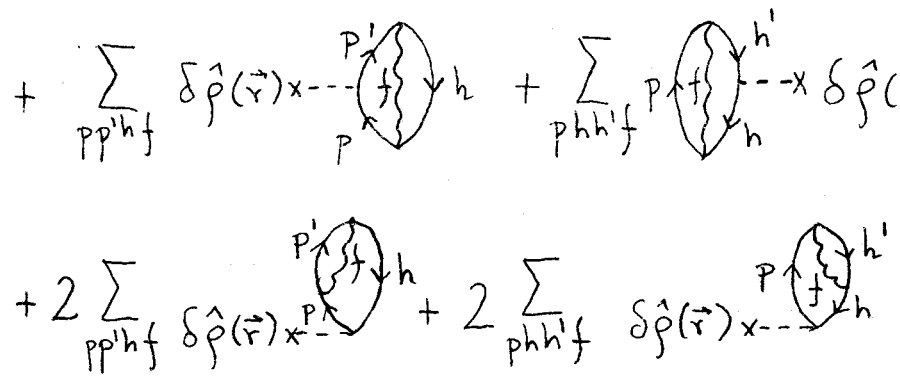
$$|C_2\rangle = \sum_{\substack{(1p-1h)\\ (1p'-1h')\\ (1fonon)}} \frac{\langle (1p'-1h')|\, H_{pv}(\vec{r})\, |(1p-1h)(1fonon)\rangle \langle (1p-1h)(1fonon)|\, H_{pv}(\vec{r})\, |0\rangle}{\epsilon_{(1p'-1h')}\;\; \epsilon_{(1p-1h)(1fonon)}} \times$$

$$\times\, |(1p'-1h')\rangle +$$

$$+\, |C_2'\rangle$$

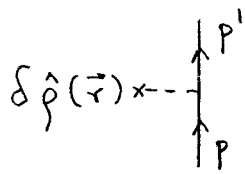
La componente $|C_2\rangle$ se ha descompuesto en el término explícito y $|C_2\rangle$. Este último no contribuye en segundo orden a corregir $\rho(\vec{r})$ sino en órdenes superiores. Utilizando la expresión de la ec.(4.17) para el estado fundamental se obtiene que, hasta segundo orden, la distribución de densidad es, expresada gráficamente

$$\rho(\vec{r}) \equiv \langle 1|\hat{\rho}(\vec{r})|1\rangle = \rho_0(\vec{r}) \qquad (a)$$

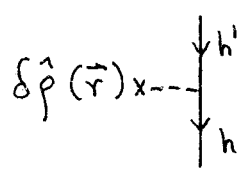


(4.19)

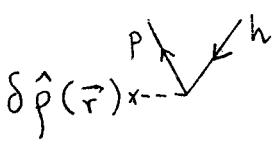
donde los elementos de matriz del operador $\delta\hat{\rho}(\vec{r}) = \hat{\rho}(\vec{r}) - \rho_0(\vec{r})$ son



$$= \varphi^*_{p'}(\vec{r})\,\varphi_p(\vec{r}) \qquad (4.20a)$$



$$= -(-1)^{m_h - j_h}(-1)^{m_{h'} - j_{h'}}\,\varphi^*_{-h}(\vec{r})\,\varphi_{-h'}(\vec{r}) \qquad (4.20b)$$



$$= (-1)^{m_h - j_h}\,\varphi^*_p(\vec{r})\,\varphi_{-h}(\vec{r}) \qquad (4.20c)$$

En estas expresiones $\varphi_{-h}(\vec{r})$ es la función de onda del estado de partícula independiente con número cuántico magnético contrario al de $\varphi_h(\vec{r})$.

Los diagramas se evalúan siguiendo las reglas del método perturbativo Rayleigh-Schrödinger (Bes et al.(1976)).

La ec.(4.19) para $\rho(\vec{r})$ es exactamente la que se obtiene aplicando las reglas de la NFT, en la que todos los problemas de sobrecompletitud de la base empleada para el desarrollo perturbativo de la ec.(4.17) están resueltos. En la expresión obtenida para $\rho(\vec{r})$ aparecen tres tipos de términos. El primero es la distribución de densidad de IPM, que es la que se obtendría si todos los vértices se anularan. El segundo tipo, que denominamos diagramas de corrección de reocupación (RC), es en el que sólo aparecen vértices RPA. Estas son las correciones que han sido consideradas en varios trabajos precedentes, como Gogny(1979) y Moya(1982), en los que se utiliza la RPA y el TDHF respectivamente. El tercer tipo, que denominamos diagramas de corrección de potencial de corelación (CPC), es en el que aparecen vértices de scattering. Estos diagramas provienen de la componente $|C_2\rangle$ en el desarrollo perturbativo de la ec.(4.17). Como se ve en la ec.(4.18c), $|C_2\rangle$ incorpora componentes (1p-1h) a la función de onda del estado fundamental. A estas componentes se llega a través de procesos de segundo orden, pasando previamente por configuraciones (1p-1h)(1fonón), que en esencia son configuraciones (2p-2h). Las componentes (1p-1h) no pueden pues estar presentes en el estado fundamental a no ser que tambien existan componentes (2p-2h). La presencia de estas componentes (1p-1h) no contradice el resultado de que el estado fundamental HF no puede ser mejorado añadiendo <u>exclusivamente</u> configuraciones (1p-1h). En términos muy esquemáticos se puede decir que $|0\rangle_{HF}$ es mejor que $|0\rangle_{HF} + |C_2\rangle$, pero que $|0\rangle_{HF} + |C_1\rangle + |C_2\rangle$ es mejor que $|0\rangle_{HF}$.

Este tercer tipo de contribuciones no puede surgir dentro del marco de la RPA. Esta es una aproximación de primer orden (ec.B.6) y los efectos de segundo orden que contiene son simplemente aquellos que provienen de la repetición de los de primer orden(*)(ver ec.(4.18b)) Es pues necesario ir más allá de la RPA para obtener todas las contribuciones de segundo orden, lo cual se realiza con el desarrollo perturbativo de la ec.(4.17) o, en general, haciendo uso de la NFT.

(*) Es tambien ésta la razón por la que los momentos cuadrupolares de los estados de vibración calculados en la RPA son siempre mucho menores que los observados experimentalmente.

4.4 Cálculos en un modelo esquemático.

En esta sección se estudia un sencillo modelo esquemático, ideado por Esbensen y Bertsch(1983), que contiene las características más sobresalientes de los casos reales.

Este modelo esquemático se puede resolver exactamente, lo que permite comprobar la validez de los métodos y aproximaciones que se han presentado en este capítulo y en el primero, es decir, el de las ZPF.

Se consideran un protón y un neutrón moviéndose en el seno de un potencial armónico unidimensional. El hamiltoniano es

$$H_0 = \sum_{i=n}^{P} \left\{ -\frac{\hbar^2}{2M}\frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + \frac{1}{2} K x_i^2 \right\} \tag{4.21}$$

La distribución de densidad del protón o el neutrón en el estado fundamental es

$$\rho_0(x) = (2\pi\sigma_0^2)^{-1/2} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma_0^2}\right) \tag{4.22}$$

donde

$$\sigma_0^2 = \frac{\hbar}{2\sqrt{MK}} = \frac{\hbar^2}{2M\epsilon} \tag{4.23}$$

con

$$\epsilon = \hbar\sqrt{\frac{K}{M}} \tag{4.24}$$

Si ahora se introduce el acoplamiento

$$V_{res} = -C\, x_p x_n \tag{4.25}$$

entre el protón y el neutrón, el hamiltoniano total H se puede separar en dos términos usando la transformación

$$\xi = (x_p + x_n)/\sqrt{2} \quad , \quad \eta = (x_p - x_n)/\sqrt{2} \tag{4.26}$$

Se obtiene entonces

$$H = -\frac{\hbar^2}{2M}\frac{\partial^2}{\partial\xi^2} + \frac{1}{2}(K-C)\xi^2 - \frac{\hbar^2}{2M}\frac{\partial^2}{\partial\eta^2} - \frac{1}{2}(K+C)\eta^2 \tag{4.27}$$

y la distribución de densidad del protón o el neutrón se puede calcular analíticamente, siendo una gaussiana con desviación standard

$$\sigma^2 = \sigma_0^2 \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{\sqrt{1-\frac{C}{K}}} + \frac{1}{\sqrt{1+\frac{C}{K}}}\right\} \tag{4.28}$$

Cualquier otro observable puede calcularse analíticamente dada la sencillez del hamiltoniano H en la ec.(4.27). Así, por ejemplo, la vibración (isoscalar, isovectorial) en la coordenada (ξ, η) tiene asociado el cuanto de energía,

$$\hbar\omega_{\mp} = \hbar\sqrt{\frac{K\mp C}{M}} \tag{4.29}$$

y una desviación cuadrática media

$$\sigma_{\mp}^2 = \frac{\hbar}{2\sqrt{M(K\mp C)}} \tag{4.30}$$

Esta es la resolución exacta del problema que aparece en Esbensen y Bertsch(1983).

Solución NFT

Para estudiar los efectos de V_{res} utilizando la NFT lo primero que se debe hacer es calcular la interacción de los nucleones con los fonones, y conocer las propiedades de éstos que, en los casos rea-

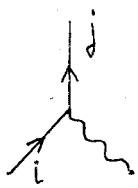
se obtienen haciendo uso de las ecs.(B.22-23), siendo

$$\sigma_{\mp}^{2} = \frac{\hbar^2}{4C^2\omega_{\mp}} \frac{1}{\dfrac{2(\sigma_0^2/2)\omega_0}{(\omega_0^2-\omega_{\mp}^2)^2}} \tag{4.36a}$$

$$= \frac{\hbar}{2\sqrt{M(K\mp C)}} \tag{4.36b}$$

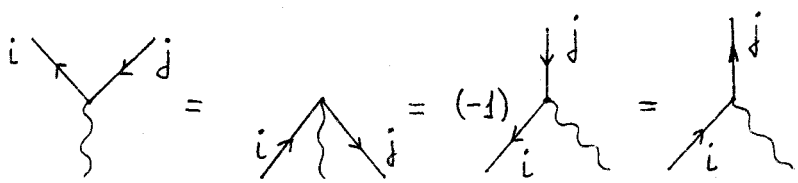
que también coinciden con el resultado del cálculo exacto (ec.(4.30)).

Los vértices de la interacción partícula-vibración pueden ahora evaluarse sustituyendo el valor de $\sigma_{\mp}^{2}$ en la ec.(A.19), obteniéndose



$$= \pm\, c\, \sigma_{\mp} \langle i|X|j\rangle/\sqrt{2} = \frac{1-\left(\dfrac{\omega_{\mp}}{\omega_0}\right)^2}{\sqrt{2\,\dfrac{\omega_{\mp}}{\omega_0}}}\, K\sigma_0 \langle i|X|j\rangle, \tag{4.37}$$

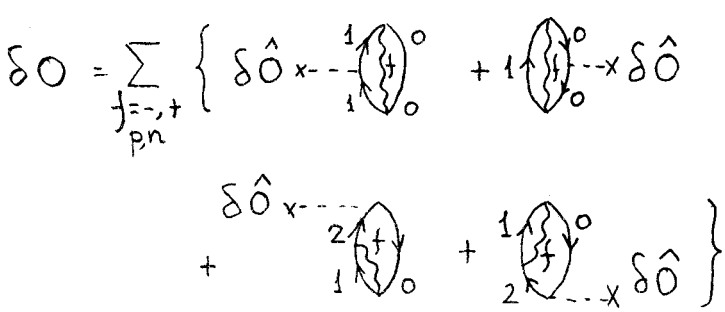
y de la relación entre vértices (con partículas con espin cero)



(4.38)

Los índices i y j representan el número cuántico de oscilador de los estados de partícula independiente calculados con el potencial Hartree-Fock que es precisamente el potencial de oscilador armónico de la ec.(4.21).

Con estos elementos pueden ser calculadas las correcciones NFT en segundo orden a cualquier observable monoparticular $\hat{O}$, que son



(4.39)

Resulta especialmente sencillo calcular la corrección a la desvia-

ción típica, σ_o^2 , de la coordenada del protón, lo que es equivalente a calcular la corrección al radio cuadrático medio de carga. Utilizando los elementos de matriz de oscilador

$$\langle 0|x^2|0\rangle = \sigma_o^2 \qquad \langle 1|X|0\rangle = \sigma_o$$

$$\langle 1|x^2|1\rangle = 3\sigma_o^2 \qquad \langle 1|X|2\rangle = \sqrt{2}\sigma_o$$

$$\langle 2|x^2|0\rangle = \sqrt{2}\,\sigma_o^2 \tag{4.40}$$

para el diagrama (a) se obtiene

$$D_a = \sum_{f=-,+} c^2 \sigma_f^2 \frac{\sigma_o^2}{2} (3\sigma_o^2) \left(\frac{1}{\hbar(\omega_o+\omega_f)}\right)^2 \tag{4.41a}$$

y para los otros

$$D_b = \sum_{f=-,+} c^2 \sigma_f^2 \frac{\sigma_o^2}{2} (-\sigma_o^2) \left(\frac{1}{\hbar(\omega_o+\omega_f)}\right)^2 \tag{4.41b}$$

$$D_c = \sum_{f=-,+} c^2 \sigma_f^2 \frac{\sigma_o^2}{\sqrt{2}} (\sqrt{2}\sigma_o^2) \frac{1}{\hbar(\omega_o+\omega_f)} \frac{1}{2\hbar\omega_o} \tag{4.41c}$$

$$D_d = D_c \tag{4.41d}$$

La suma de los diagramas RC (a y b) es

$$D_{RC} = D_a + D_b = \sum_{f=-,+} c^2 \sigma_f^2 \sigma_o^4 \frac{1}{\hbar^2(\omega_o+\omega_f)^2} \tag{4.42a}$$

La suma de los diagramas CPC (c y d) es

$$D_{CPC} = D_c + D_d = \sum_{f=-,+} c^2 \sigma_f^2 \sigma_o^4 \frac{1}{\hbar(\omega_o+\omega_f)\omega_o} \tag{4.42b}$$

Nótese que la corrección D_{CPC} es siempre mayor que la D_{RC}, salvo que $\omega_f=0$, caso en el que son iguales. En situaciones reales típicas se encuentra que D_{CPC} es un 75% de la corrección total a los radios cuadráticos medios. Esto pone de manifiesto la necesidad de ir más allá de la RPA (corrección D_{RC}) cuando se quieren calcular correcciones a la distribución de densidad Hartree-Fock.

Las ecs.(4.42) pueden ser simplificadas utilizando la expresión para σ_f^2 de la ec.(4.36), quedando

$$D_{RC} = \sum_{f=-,+} \frac{(1-E_f)^2}{4E_f}\sigma_0^2 \tag{4.43a}$$

$$D_{CPC} = \sum_{f=-,+} \frac{(1+E_f)(1-E_f)^2}{4E_f}\sigma_0^2 \qquad \text{con} \qquad E_f = \frac{\omega_f}{\omega_0} \tag{4.43b}$$

La suma de ambas contribuciones es

$$D = D_{RC} + D_{CPC} = \sum_{f=-,+} \frac{(2+E_f)(1-E_f)^2}{4E_f}\sigma_0^2 \tag{4.44}$$

Finalmente, la desviación cuadrática media total resulta

$$\sigma^2 = \sigma_0^2 + D = \sigma_0^2\,\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{E_-} + \frac{1}{E_+}\right\} \tag{4.45}$$

donde se ha utilizado la propiedad

$$E_-^2 + E_+^2 = 2 \tag{4.46}$$

que se deduce inmediatamente de la ec.(4.34) para ω_- y ω_+. Haciendo uso de esta misma ecuación σ^2 puede escribirse como

$$\sigma^2 = \sigma_0^2\,\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{\sqrt{1-\frac{C}{K}}} + \frac{1}{\sqrt{1+\frac{C}{K}}}\right\} \tag{4.47}$$

que coincide con el resultado del cálculo exacto (ec.(4.28)).

El hecho de que el cálculo perturbativo reproduzca la solución exacta cuando se considera tan sólo hasta segundo orden se debe a que todos los diagramas de orden superior se cancelan entre sí. Esto puede entenderse fácilmente si se considera que los diagramas de orden superior contienen dos o más fonones y que, por lo tanto, puede interpretarse como interacción entre los diferentes modos normales de vibración que, según la forma del hamiltoniano de la ec.(4.27), no existe. Esta característica es la gran virtud de este modelo que permite estudiar en "estado puro" el efecto de las correlaciones sin complicarlo con otro tipo de fenómenos que,si bien son interesantes, no son el objeto del presente trabajo.

A modo de conclusión de esta sección puede decirse que, el efecto de las correlaciones inducidas por la interacción residual y las correcciones que implican a la distribución de densidad de la aproximación Hartree-Fock, no pueden ser evaluados correctamente utilizando solamente los diagramas de la RPA que los subestima en al menos un 50%. Es necesario incorporar procesos de segundo orden adicionales que pueden considerarse mediante la NFT.

Discusión del método macroscópico de las ZPF

Paralelamente a como se calcula $\Delta\sigma^2$ en el capítulo 1, en función de los elementos de matriz del operador τ, $\Delta\sigma^2$ es ahora

$$\Delta\sigma^2 = \sigma^2 - \sigma_0^2 \tag{4.48}$$

con

$$\sigma^2 = 2\sum_{f=-,+} |\langle f|F|\rangle|^2 \tag{4.49}$$

$$|\rangle = |n_p=0, n_n=0\rangle$$

$$\sigma_0^2 = 2\sum_{ph} |\langle ph|F|\rangle|^2 \tag{4.50}$$

donde el campo monoparticular

$$F = X_p/\sqrt{2} \tag{4.51}$$

es en el presente modelo el análogo a

$$\tau = R\frac{\partial V}{\partial r} \tag{4.52}$$

en el caso del modelo realista (ecs.(4.32) y (B.3)). El valor de σ_0^2 definido de este modo es precisamente el de la ec.(4.23). En efecto,

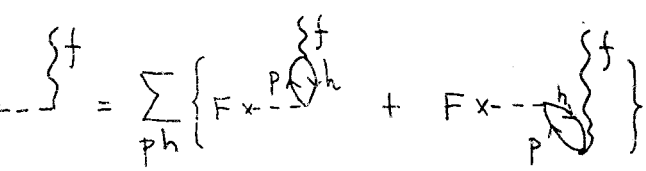
$$\sigma_0^2 = 2\sum_{ph} |\langle ph|F|\rangle|^2 = 2\sum_{ph} \langle |F|ph\rangle\langle ph|F|\rangle$$

$$= 2\langle |F\Big(\sum_{ph} |ph\rangle\langle ph|\Big)F|\rangle \tag{4.53}$$

y por ser F un operador monoparticular, en la anterior expresión se puede poner $(\sum_{ph}|ph\rangle\langle ph|)\rightarrow 1$, con lo que

$$\sigma_0^2 = 2\langle |F^2|\rangle = 2\langle 0|X^2|0\rangle = \frac{\hbar^2}{2M\epsilon} \tag{4.54}$$

El elemento de matriz que aparece en la ec.(4.49) para σ^2 se calcula en la RPA utilizando el desarrollo (para detalles ver sección(B.2))



$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\langle 1|X|0\rangle}{\hbar(\omega_0-\omega_f)} + \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\langle 1|X|0\rangle}{\hbar(\omega_0+\omega_f)} \tag{4.55}$$

Haciendo uso de los elementos de matriz que aparecen en las ecs.(4.38-40) y utilizando la ec.(4.36) para evaluar los vértices, se obtiene

$$\langle f|F|\rangle = \sqrt{\frac{\omega_0}{4\omega_f}}\,\sigma_0 \tag{4.56}$$

Por tanto,

$$\sigma^2 = 2 \sum_f \frac{\omega_0}{4\omega_f} \sigma_0^2 \tag{4.57}$$

que coincide con el resultado del cálculo exacto (ec.(4.28)).

El incremento en la fluctuación debido a las correlaciones inducidas por la interacción residual es

$$\Delta\sigma^2 = \sum_f \left(\frac{\omega_0}{2\omega_f} - \frac{1}{2} \right) \sigma_0^2 \tag{4.58}$$

donde, $\Delta\sigma^2$ se ha escrito de modo que se pueda conectar con lo dicho en el capítulo 1. En efecto, al ser $\frac{1}{2}\sigma_0^2$ la fluctuación en el sistema sin perturbar debida a los modos isoscalares (o isovectoriales) de tipo partícula-hueco, $\Delta\sigma^2$ puede ser desglosado en

$$\Delta\sigma_-^2 = \left(\frac{\omega_0}{2\omega_-} - \frac{1}{2} \right) \sigma_0^2 \tag{4.59}$$

y

$$\Delta\sigma_+^2 = \left(\frac{\omega_0}{2\omega_+} - \frac{1}{2} \right) \sigma_0^2$$

que son los homólogos de $\Delta\sigma^2$(T=0) y $\Delta\sigma^2$(T=1) respectivamente, definidos en el capítulo 1.

Para este modelo la prescripción de corregir la distribución de densidad de Hartree-Fock, convolucionándola con una gaussiana de desviación cuadrática media $\Delta\sigma^2$, resulta ser exacta. No obstante, como se vió en la sección(1.5)), la interpretación de $\Delta\sigma_+^2$ como el efecto del canal isovectorial en la fluctuación total del sistema presenta la dificultad primera de que es negativa pues $\omega_+ > \omega_0$(ver ec.(4.34)). En segundo lugar, en el cálculo NFT precedente las contribuciones de los canales isoscalares e isovectoriales a la fluctuación total son (ec.(4.44))

$$D_- = \frac{\left(2 + \frac{\omega_-}{\omega_0}\right)\left(1 - \frac{\omega_-}{\omega_0}\right)^2}{4\left(\frac{\omega_-}{\omega_0}\right)} \sigma_0^2 \tag{4.60a}$$

y

$$D_+ = \frac{\left(2+\frac{\omega_+}{\omega_0}\right)\left(1-\frac{\omega_+}{\omega_0}\right)^2}{4\left(\frac{\omega_+}{\omega_0}\right)}\,\sigma_0^2 \qquad (4.60b)$$

respectivamente, que son necesariamente positivas.

La causa de esta discrepancia se encuentra en que, tanto en $\Delta\sigma_-^2$ como en $\Delta\sigma_+^2$ existen contribuciones no físicas que, sin embargo, se cancelan al sumar ambas.

Para una correcta interpretación de los efectos de los canales isoscalares e isovectoriales por separado en el marco del método macroscópico de las ZPF, es necesario identificar y eliminar dichas contribuciones no físicas. Estas corresponden a los términos lineales en el desarrollo en potencias de C de las ecs.(4.59a,b) para $\Delta\sigma_\mp^2$. Estos términos no deben existir ya que la densidad sin perturbar está calculada con el método autoconsistente Hartree-Fock. Sustituyendo la expresión para $\omega_\mp$ de la ec.(4.34) en la ec.(4.59) para $\Delta\sigma_\mp^2$ y desarrollando en potencias de C, el término de primer orden es

$$\left(\Delta\sigma_\mp^2\right)^{(1)} = \pm\frac{C}{4K} \qquad (4.61)$$

Sustrayendo esta contribución a $\Delta\sigma_\mp^2$ y utilizando la ec.(4.34), se tiene

$$\Delta\sigma_\mp^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{1\mp\frac{C}{K}}} \mp \frac{C}{2K} - 1\right)\sigma_0^2 \qquad (4.62)$$

Haciendo uso de nuevo de la ec.(4.34) en la ec.(4.60) para $D_\mp$, calculado con la NFT, queda

$$D_\mp = \frac{\left(2+\sqrt{1\mp\frac{C}{K}}\right)\left(1-\sqrt{1\mp\frac{C}{K}}\right)^2}{4\sqrt{1\mp\frac{C}{K}}}\,\sigma_0^2$$

que, simplificando, se transforma en

$$D_\mp = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{1\mp\frac{C}{K}}} \mp \frac{C}{2K} - 1\right)\sigma_0^2 \qquad (4.63)$$

Esto quiere decir que, la sustracción de $(\Delta\sigma_{\mp}^{2})^{(1)}$ pone el cálculo macroscópico ZPF y el microscópico NFT en perfecto acuerdo respecto al efecto de los diferentes canales de la interacción residual, permitiendo, al haber convertido $\Delta\sigma_{\mp}^{2}$ en una cantidad positiva, interpretarla como la desviación cuadrática media asociada a una fluctuación adicional a las presentes en la solución Hartree-Fock.

4.5 Cálculo en un caso realista (^{40}Ca)

En esta sección se presenta un cálculo microscópico de las correcciones a la distribución de densidad del ^{40}Ca que provienen de los canales de vibración de superficie isoscalar e isovectorial (Broglia, Barranco y Gallardo(1985)).

El potencial monoparticular y el factor de forma del acoplamiento partícula-vibración (ec.(B.1)) utilizados son los mismos que en el capítulo 1, esto es, un potencial de oscilador armónico con

$$\hbar\omega_o = 40\, A^{-1/3}\ \mathrm{MeV} \tag{4.64}$$

y

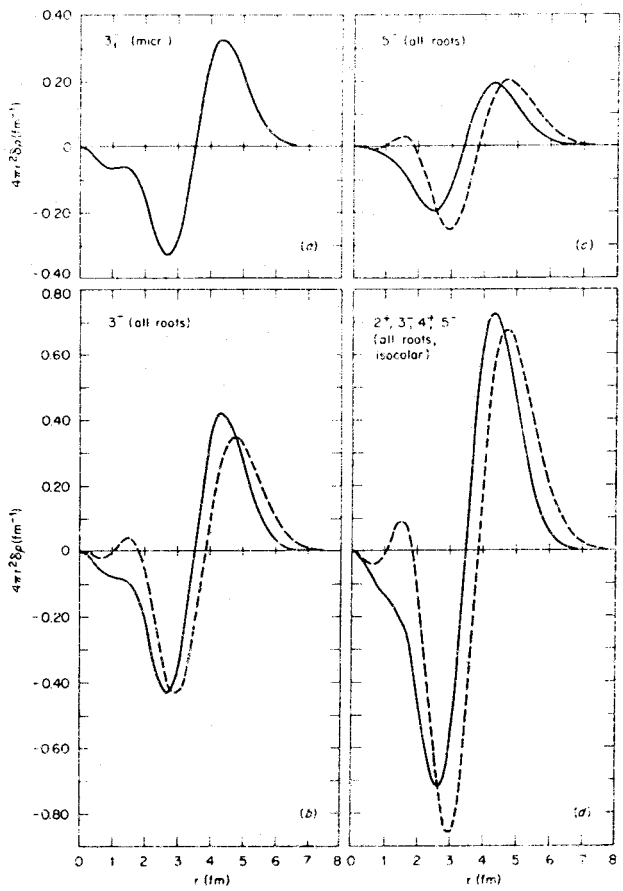
$$f(r) = R\,\frac{\partial V(r)}{\partial r} \tag{4.65}$$

respectivamente, donde V(r) es el potencial Woods-Saxon de la ec.(1.1). Para el cálculo de las energías de los estados monoparticulares se incluye la interacción espín-órbita que aparece en Bohr y Mottelson(1969),

$$V_{LS} = 22\,(\vec{\ell}\cdot\vec{s})\,r_o^2\,\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left[1+\exp\left(\frac{r-R}{a}\right)\right]^{-1}\mathrm{MeV} \tag{4.66}$$

con $R=r_oA^{1/3}$, r_o=1.25fm y a=0.65fm. En los cálculos RPA se utiliza la constante de acoplamiento autoconsistente, es decir, χ=1 en la ec.(B.1) del acoplamiento partícula-vibración.

En la figura(4.1) se presenta la corrección $\delta\rho(r)$ calculada cuando en los diagramas de renormalización de la densidad (ec.(4.39)) se inclu-



Figura(4.1) Correcciones a la distribución de densidad con la inclusión de diferentes multipolaridades. En trazo continuo el cálculo NFT. En trazo discontinuo el cálculo con el método macroscópico de las ZPF (ec.(1.31b)).

yen diferentes conjuntos de fonones.

De la comparación de la figura(4.1a) y (4.1b) se aprecia cómo la mayor parte del efecto del canal 3^- de la interacción residual se debe a la fluctuación asociada con el modo de vibración de menor energía. Esta es una característica general para cualquier multipolaridad que tenga un efecto notable, lo que no se trata de una casualidad sino de un aspecto esencial de los modos isoscalares de superficie, que son los más importantes en la renormalización de la distribución de densidad. En efecto, para que la corrección sea importante, la energía del fonón que entra en los diagramas no debe ser muy grande, y como a baja energía sólo el primer modo es colectivo (fuerte acoplamiento partícula-vibración), es su contribución la más importante.

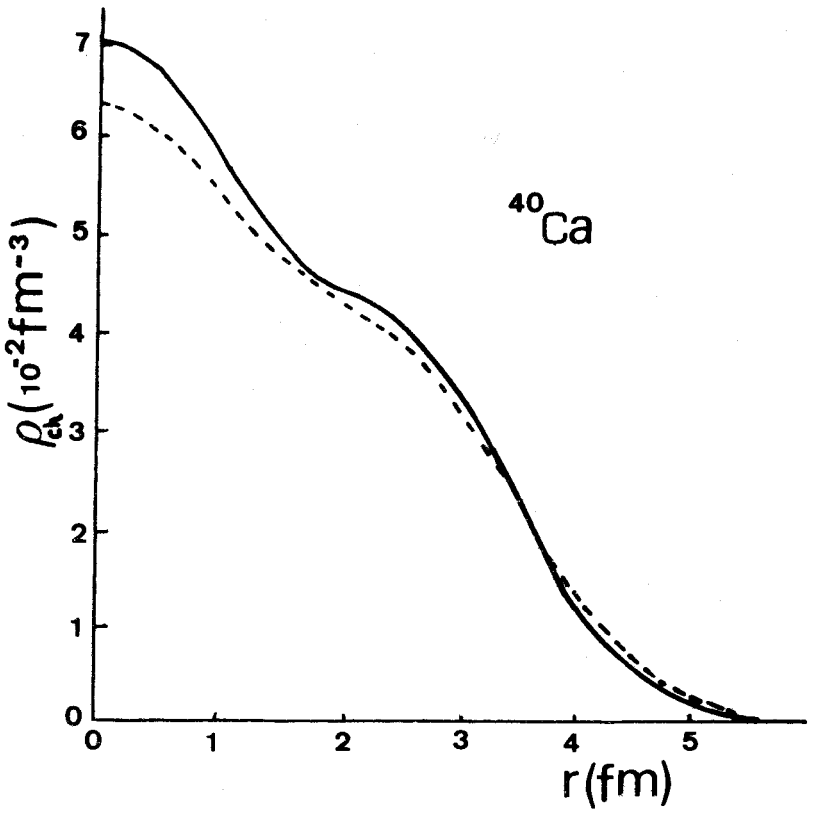
La corrección debida al 3^- de menor energía ha sido calculada también por Kodel, Platonov y Saperstein(1982) utilizando la Teoría de Sistemas Fermiónicos Finitos Autoconsistentes, obteniendo resultados en acuerdo con los aquí presentados.

Sólo los canales de baja multipolaridad contribuyen a la renormalización. En el caso del ^{40}Ca a partir de $\lambda=6$ los efectos disminuyen rápidamente haciéndose despreciables, lo que coincide con los resultados del método macroscópico ZPF, expuestos en el capítulo 1.

En la figura(4.1) aparece en trazo discontinuo la corrección a la distribución de densidad calculada utilizando el método ZPF (ec.(1.31b)). El acuerdo con el cálculo NFT es notable, sobre todo en la magnitud de la corrección que en la zona de la superficie llega a ser del 10% de la distribución de densidad no perturbada. Esto tiene importantes consecuencias en el valor del radio cuadrático medio. En la tabla(4.1) aparecen las correcciones a éste debidas a los diferentes canales, calculada con los métodos ZPF y NFT.

La inclusión de los fonones isosvectoriales es necesaria en el método ZPF para eliminar las contribuciones no físicas. Esbensen y Bertsch(1983) estiman que el efecto de este canal es a lo sumo un 25% de reducción en la corrección al radio cuadrático medio. Nosotros hemos encontrado que el $\Delta\sigma^2$ isovectorial, incluyendo las contribuciones no físicas, atenúa en incremento en el radio cuadrático medio haciéndolo $\Delta\langle r^2\rangle=0.655fm^2$. El efecto real (físico) del canal isovectorial, calculado con la NFT, es $\Delta\langle r^2\rangle(T=1)=0.093fm^2$.

En el cálculo microscópico NFT se encuentra que el 70% de las



Figura(4.2) En trazo continuo la distribución de densidad sin correlaciones. En trazo discontinuo con la inclusión de correlaciones.

	$\Delta\langle r^2\rangle$	(fm^2)
λ^π	Macr.(ZPF)	Micr.(NFT)
2^+	0.045	0.045
3^-	0.437	0.477
4^+	0.110	0.091
5^-	0.240	0.234
	0.832	0.847

Tabla(4.1) Aumento en el radio cuadrático medio debido a los diferentes canales.

correcciones al radio cuadrático medio provienen de los diagramas CPC, es decir, aquéllos no incluidos en los tradicionales desarrollos RPA. Esto puede entenderse en términos del mayor número de vértices de scattering de partículas que de huecos, debido a la asimetría de la base monoparticular alrededor de la energía de Fermi. Esta asimetría se debe al tamaño finito del núcleo, es decir, a la existencia de una superficie. En núcleos mayores dicha asimetría es menor, desapareciendo en el caso de materia nuclear, dándose entonces una cancelación entre los diagramas CPC con scattering de partículas y de huecos. Esto se refleja en el caso del ^{208}Pb, encontrándose una corrección al radio cuadrático medio en relación al radio total notablemente menor que la del ^{40}Ca, siendo (Barranco y Broglia(1985))

$$\left(\frac{\Delta\sigma^2}{R^2}\right)_{^{208}Pb} = 0.15 \left(\frac{\Delta\sigma^2}{R^2}\right)_{^{40}Ca} \qquad (4.67)$$

En conclusión, los cálculos microscópicos NFT corroboran en amplia medida los resultados obtenidos con el método macroscópico ZPF, que ha demostrado ser de gran utilidad para la comprensión de un amplio espectro de fenómenos, algunos de los cuales tratados en la presente memoria.

Apéndice A

Vértices y signos

A.1 Parámetros de deformación. Operadores bosónicos

La modificación en el potencial monoparticular debida a una pequeña deformación de la superficie nuclear se puede parametrizar según (ec.(1.8))

$$H_{pv}(\vec{r}) = -X f(r) \sum_{\lambda\mu} Y_{\lambda\mu}(\hat{r})\, \alpha^*_{\lambda\mu} \qquad (A.1a)$$

Las coordenadas de la partícula están especificadas por $(r,\hat{r})$, donde r es la distancia al centro del núcleo y $\hat{r}$ representa los ángulos ϑ y φ. $\alpha_{\lambda\mu}$ son los parámetros que describen la deformación de la superficie nuclear.

Los convenios de fases para elementos de matriz reducidos que seguiremos son los utilizados en Bohr y Mottelson (1975). Por este motivo es conveniente expresar $H_{pv}(\vec{r})$ como

$$H_{pv}(\vec{r}) = -X \sum_{\lambda\mu} T_{\lambda\mu}(\vec{r})\, A^*_{\lambda\mu} \qquad (A.1b)$$

con

$$T_{\lambda\mu}(\vec{r}) = f(r)\, i^{\lambda}\, Y_{\lambda\mu}(\hat{r})$$

$$A_{\lambda\mu} = i^{\lambda}\, \alpha_{\lambda\mu} \qquad (A.2)$$

De este modo el operador monoparticular, $T_{\lambda\mu}(\vec{r})$, se transforma bajo conjugación del modo adecuado,

$$T^*_{\lambda\mu}(\vec{r}) = (-1)^{\lambda+\mu}\, T_{\lambda-\mu}(\vec{r}) \qquad (A.3)$$

/

Bajo rotaciones $T_{\lambda\mu}(\vec{r})$ se transforma como el tensor $Y_{\lambda\mu}(\hat{r})$. Similares propiedades posee $A_{\lambda\mu}$, ya que $H_{pv}(\vec{r})$ es un escalar.

Los parámetros $A_{\lambda\mu}$ pueden ser utilizados como variables dinámicas en la descripción de oscilaciones de la superficie nuclear. El hamiltoniano que describe las oscilaciones de pequeña amplitud debe ser de la forma

$$H_v = 1/2 \sum_{\lambda\mu} \left(B_\lambda |\dot{A}_{\lambda\mu}|^2 + C_\lambda |A_{\lambda\mu}|^2 \right) \qquad (A.4)$$

ya que ésta es la expresión más general y de menor orden en $A_{\lambda\mu}$ y $\dot{A}_{\lambda\mu}$ que es escalar e invariante bajo inversión temporal (Rowe (1970)). Tal hamiltoniano describe oscilaciones armónicas.

El operador cuántico $A_{\lambda\mu}$ puede ser expresado como

$$A_{\lambda\mu} = (\hbar\omega_\lambda / 2C_\lambda)^{1/2} \left(O^+_{\lambda\mu} + (-1)^{\lambda+\mu} O_{\lambda-\mu} \right) \qquad (A.5)$$

con

$$\omega_\lambda = (C_\lambda / B_\lambda)^{1/2} \qquad (A.6)$$

$O^+_{\lambda\mu}$ ($O_{\lambda\mu}$) es el operador bosónico (*) de creación (destrucción) de un cuanto de excitación $\hbar\omega_\lambda$ que transporta un momento angular λ con proyección μ sobre el eje Z.

El hamiltoniano H_v, expresado en términos de los operadores bosónicos, es

$$H_v = \sum_{\lambda\mu} \hbar\omega_\lambda \left(O^+_{\lambda\mu} O_{\lambda\mu} + 1/2 \right) \qquad (A.7)$$

Sustituyendo la expresión de $A_{\lambda\mu}$ de la ec.(A.5) en la ec.(A.1b) de H_{pv} se obtiene

$$H_{pv}(\vec{r}) = -X \sum_{\lambda\mu} T_{\lambda\mu}(\vec{r}) (\hbar\omega_\lambda / 2C_\lambda)^{1/2} \left(O_{\lambda\mu} + (-1)^{\lambda+\mu} O^+_{\lambda-\mu} \right) \qquad (A.8)$$

(*) Verifica $[O_{\lambda'\mu'}, O^+_{\lambda\mu}] = \delta_{\lambda\lambda'} \delta_{\mu\mu'}$ y $[O_{\lambda'\mu'}, O_{\lambda\mu}] = [O^+_{\lambda'\mu'}, O^+_{\lambda\mu}] = 0$

A.2 $T_{\lambda\mu}$ en segunda cuantización. Operadores fermiónicos

Resulta muy útil expresar el operador $T_{\lambda\mu}(\vec{r})$ en segunda cuantización,

$$\hat{T}_{\lambda\mu} = \sum_{i,j} \langle j | T_{\lambda\mu} | i \rangle \; a_j^+ a_i \qquad (A.9)$$

a_j^+ (a_j) es el operador fermiónico (*) de creación (destrucción) de un nucleón en un estado caracterizado por los números cuánticos denotados por el índice j. Los índices recorren una base completa de estados monoparticulares, que en el caso de núcleos esféricos conviene especificar con (t_z,n,l,s,j,m), siendo t_z=+1/2 para neutrones, t_z=-1/2 para protones, n el número cuántico radial, l es momento angular orbital, s el espín (s=1/2), j el momento angular total y m su proyección sobre el eje Z.

Por sencillez de notación en lo que sigue y mientras no se diga lo contrario sólo especificaremos los números cuánticos j y m. Así

$$\hat{T}_{\lambda\mu} = \sum_{\substack{j_1 m_1 \\ j_2 m_2}} \langle j_2 m_2 | T_{\lambda\mu}(\vec{r}) | j_1 m_1 \rangle \; a^+_{j_2 m_2} a_{j_1 m_1} \qquad (A.10)$$

El elemento de matriz que aparece en la ec.(A.10), según el teorema de Wigner-Eckart, puede ser expresado como

$$\langle j_2 m_2 | T_{\lambda\mu}(\vec{r}) | j_1 m_1 \rangle = (-1)^{j_2 - m_2} \begin{pmatrix} j_2 & \lambda & j_1 \\ -m_2 & \mu & m_1 \end{pmatrix} \langle j_2 \| T_\lambda \| j_1 \rangle \qquad (A.11)$$

Los valores y principales propiedades de los símbolos 3j y de los elementos de matriz reducidos aparecen en la tabla(A.1). Estos han sido tomados de De-Shalit y Talmi (1963) y de Bohr y Mottelson (1969), respectivamente.

Utilizando dichas propiedades y el teorema de Wigner-Eckart, la ec.(A.10) puede ser transformada en

$$\hat{T}_{\lambda\mu} = \sum_{\substack{j_1 m_1 \\ j_2 m_2}} (\lambda\mu j_1 m_1 | j_2 m_2) / \sqrt{2j_2 + 1} \; \langle j_1 \| T_\lambda \| j_2 \rangle \; a^+_{j_2 m_2} a_{j_1 m_1} \qquad (A.12)$$

(*) $\{a_i, a_j^+\} = \delta_{ij}$ y $\{a_i, a_j\} = \{a_i^+, a_j^+\} = 0$

Simbolos 3j

Valor

$$\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & -m_3 \end{pmatrix} = \frac{(-1)^{j_1-j_2+m_3}}{\sqrt{2j_3+1}} \, (j_1 m_1 j_2 m_2 | j_3 m_3)$$

Propiedades

$$\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} j_2 & j_3 & j_1 \\ m_2 & m_3 & m_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} j_3 & j_1 & j_2 \\ m_3 & m_1 & m_2 \end{pmatrix} =$$

$$= (-1)^{j_1+j_2+j_3} \begin{pmatrix} j_1 & j_3 & j_2 \\ m_1 & m_3 & m_2 \end{pmatrix} ,$$

$$\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ -m_1 & -m_2 & -m_3 \end{pmatrix} = (-1)^{j_1+j_2+j_3} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix}$$

Elementos de matriz reducidos

Valor

$$\langle n_2 \ell_2 j_2 \| T_\lambda \| n_1 \ell_1 j_1 \rangle = i^{\ell_1+\lambda-\ell_2} (-1)^{j_1+\lambda-j_2} \left(\frac{(2\lambda+1)(2j_1+1)}{4\pi} \right)^{1/2}$$

$$\times (j_1 1/2 \, \lambda 0 | j_2 1/2) \, (n_2 \ell_2 j_2 | f | n_1 \ell_1 j_1)$$

$$(n_2 \ell_2 j_2 | f | n_1 \ell_1 j_1) = \int_0^\infty R_{n_2 \ell_2 j_2}(r) \, f(r) \, R_{n_1 \ell_1 j_1}(r) \, r^2 dr$$

Propiedad

$$\langle n_2 \ell_2 j_2 \| T_\lambda \| n_1 \ell_1 j_1 \rangle = (-1)^{j_1-j_2+\lambda} \langle n_1 \ell_1 j_1 \| T_\lambda \| n_2 \ell_2 j_2 \rangle$$

Tabla(A.1) Valores y propiedades de los simbolos 3j y de los elementos de matriz reducidos.

Esta forma de $\hat{T}_{\lambda\mu}$ resulta muy útil para evaluar ciertos procesos provocados por H_{pv}. Otra forma que tiene gran utilidad es

$$\hat{T}_{\lambda\mu} = \sum_{\substack{j_1 m_1 \\ j_2 m_2}} -(j_2 m_2 j_1 m_1 | \lambda\mu)/\sqrt{2\lambda+1}\, \langle j_2 \| T_\lambda \| j_1 \rangle\, a^+_{j_2 m_2}\, b^+_{j_1 m_1} \qquad (A.13)$$

con

$$b^+_{jm} = (-1)^{j-m}\, a_{j-m} \qquad (A.14)$$

para cuya obtención se han vuelto a utilizar las propiedades que aparecen en la tabla(A.1). El operador b^+_{jm} se denomina operador creación de hueco. Es un operador fermiónico que transporta un momento angular j con componente Z igual a m. Otra expresión para $\hat{T}_{\lambda\mu}$ de interés es

$$\hat{T}_{\lambda\mu} = \sum_{\substack{j_1 m_1 \\ j_2 m_2}} (\lambda\mu j_1 m_1 | j_2 m_2)/\sqrt{2j_2+1}\, \langle j_1 \| T_\lambda \| j_2 \rangle (\delta_{j_1 j_2}\delta_{m_1 m_2} - b^+_{j_2 m_2}\, b_{j_1 m_1}) \qquad (A.15)$$

En núcleos de capas cerradas los operadores a^+ (a) se utilizan para describir estados monoparticulares con energía mayor que la energía de Fermi. Para los de energía menor que la energía de Fermi se utilizan los operadores b^+ (b).

En lo que sigue se hará uso de representaciones gráficas para ecuaciones y elementos de matriz. La correspondencia entre unos y otros se recoge en la tabla(A.2).

A.3 Elementos de matriz. Vértices

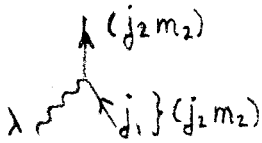
Sustituyendo la expresión de la ec.(A.12) para $\hat{T}_{\lambda\mu}$ en la ec.(A.8) de H_{pv}, se obtiene

$$\hat{H}_{pv} = -\chi \sum_{\substack{\lambda\mu \\ j_1 m_1 \\ j_2 m_2}} (\lambda\mu j_1 m_1 | j_2 m_2)/\sqrt{2j_2+1}\, \langle j_1 \| T_\lambda \| j_2 \rangle\, a^+_{j_2 m_2}\, a_{j_1 m_1} \times$$
$$\times (\hbar\omega_\lambda / 2C_\lambda)^{1/2} (O_{\lambda\mu} + (-1)^{\lambda+\mu} O^+_{\lambda -\mu}) \qquad (A.16)$$

a^+_{jm} x-- jm a_{jm} x-- jm	$\langle jm \vert a^+_{jm} \vert 0\rangle$ $\langle 0 \vert a_{jm} \vert jm\rangle$
b^+_{jm} x-- jm b_{jm} x-- jm	$\langle (\overline{jm})^{-1} \vert b^+_{jm} \vert 0\rangle$ $\langle 0 \vert b_{jm} \vert (\overline{jm})^{-1}\rangle$ $\vert \overline{jm}\rangle = (-1)^{j-m} \vert j-m\rangle$
$O^+_{\lambda\mu}$ x-- $\lambda\mu$ $O_{\lambda\mu}$ x-- $\lambda\mu$	$\langle \lambda\mu \vert O^+_{\lambda\mu} \vert 0\rangle$ $\langle 0 \vert O_{\lambda\mu} \vert \lambda\mu\rangle$
j_1m_1 j_2m_2 $a^+_{j_1m_1} b^+_{j_2m_2}$ x-- $O^+_{\lambda\mu} b_{j_2m_2} a_{j_1m_1}$ x-- $\lambda\mu$ j_1m_1 j_2m_2	$\langle j_1m_1, (\overline{j_2m_2})^{-1} \vert a^+_{j_1m_1} b^+_{j_2m_2} \vert 0\rangle$ $\langle \lambda\mu \vert O^+_{\lambda\mu} b_{j_2m_2} a_{j_1m_1} \vert j_1m_1, (\overline{j_2m_2})^{-1}\rangle$

Tabla(A.2) Correspondencia entre elmentos de matriz y representacioes gráficas. El estado $\vert (jm)^{-1}\rangle$ es el que se obtiene de eliminar la partícula que ocupa el orbital caracterizado con $(j\ m)$.

Esta forma de H_{pv} es idónea para calcular el elemento de matriz esquematizado por el vértice

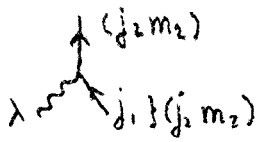


$$= \langle j_2 m_2 | H_{pv} | (\lambda j_1) j_2 m_2 \rangle \qquad (A.17)$$

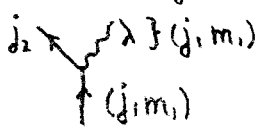
ya que en la ec.(A.16) H_{pv} está expresado en un acoplamiento en el que este elemento de matriz aparece concentrado en un solo término. En efecto, sumando sobre los índices μ y m_1 o m_2 en la ec.(A.16) resulta

$$\hat{H}_{pv} = -\chi \sum_{\lambda j_1} \sum_{j_2 m_2} \langle j_1 \| T_\lambda \| j_2 \rangle / \sqrt{2j_2+1}\, (\hbar\omega_\lambda / 2C_\lambda)^{1/2} a^+_{j_2 m_2} [O^+_\lambda a^+_{j_1}]^+_{j_2 m_2}$$
$$-\chi \sum_{\lambda j_2} \sum_{j_1 m_1} \langle j_1 \| T_\lambda \| j_2 \rangle / \sqrt{2j_1+1}\, (\hbar\omega_\lambda / 2C_\lambda)^{1/2} [a^+_{j_2} O^+_\lambda]_{j_1 m_1} a_{j_1 m_1} \qquad (A.18)$$

Así resulta inmediato que

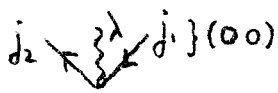


$$= -\chi (\hbar\omega_\lambda / 2C_\lambda)^{1/2} \langle j_1 \| T_\lambda \| j_2 \rangle / \sqrt{2j_2+1} \qquad (A.19)$$

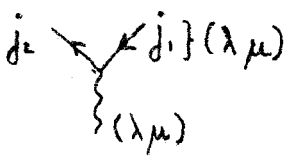


$$= -\chi (\hbar\omega_\lambda / 2C_\lambda)^{1/2} \langle j_1 \| T_\lambda \| j_2 \rangle / \sqrt{2j_1+1} \qquad (A.20)$$

De modo análogo, sustituyendo la expresión de $\hat{T}_{\lambda\mu}$ de la ec.(A.13) en la ec.(A.8) y sumando sobre las componentes Z de todos los momentos angulares que están acoplados, se obtiene

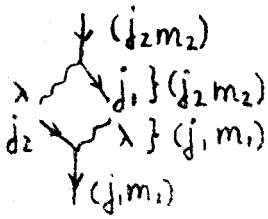


$$= \chi (\hbar\omega_\lambda / 2C_\lambda)^{1/2} \langle j_2 \| T_\lambda \| j_1 \rangle \qquad (A.21)$$



$$= \chi (\hbar\omega_\lambda / 2C_\lambda)^{1/2} \langle j_2 \| T_\lambda \| j_1 \rangle / \sqrt{2\lambda+1} \qquad (A.22)$$

Del mismo modo, pero sustituyendo la expresión de $\hat{T}_{\lambda\mu}$ de la ec.(A.15) en la ec.(A.8) se obtiene



$$= \chi(\hbar\omega_\lambda/2C_\lambda)^{1/2}\langle j_1\|T_\lambda\|j_2\rangle/\sqrt{2j_2+1} \qquad (A.23)$$

$$= \chi(\hbar\omega_\lambda/2C_\lambda)^{1/2}\langle j_1\|T_\lambda\|j_2\rangle/\sqrt{2j_1+1} \qquad (A.24)$$

En el caso de λ=0, y sólo en este caso, pues $\sum_m(\lambda 0 jm|jm)=0$ para $\lambda\neq 0$, es formalmente posible el elemento de matriz (ver ec.(A.15))

$$H_{pv} \Big\}^{\lambda=0} = -\chi\sqrt{(2j+1)\hbar\omega_0/2C_0}\sum_{j;E_j<E_F}\langle j\|T_0\|j\rangle = -\chi(\hbar\omega_0/2C_0)^{1/2}/\sqrt{4\pi}\int\rho(r)f(r)d^3\vec{r} \qquad (A.25)$$

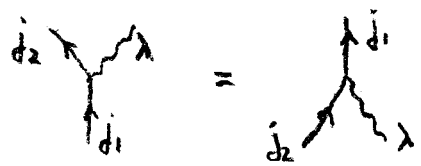
Ningún modo monopolar se puede dar deformando exclusivamente la superficie, lo que podemos expresar diciendo que $C_0\rightarrow\infty$ para tal modo, con lo que el anterior elemento de matriz se anula. Otros tipos de modos monopolares se pueden dar, estando regidos por un hamiltoniano como el de la ec.(A.1), pero en el que el factor de forma f(r) ya no es el característico de los modos de superficie, sin nodos, sino otro, $f^{(n)}(r)$, que posee $n>0$ nodos. No obstante, en un modelo autoconsistente para describir los estados monoparticulares, la integral de la ec.(A.25) con $f^{(n)}(r)$ en lugar de f(r) debe anularse, lo que impone ciertas restricciones sobre $f^{(n)}(r)$.

Otros elementos de matriz distintos de los de las ecs.(A.19-24) pueden ser obtenidos a partir de éstos. Para ello basta transformar los vértices geométricamente, recordando que:

a) $\langle j_1\|T_\lambda\|j_2\rangle = (-1)^{j_1-j_2+\lambda}\langle j_2\|T_\lambda\|j_1\rangle$

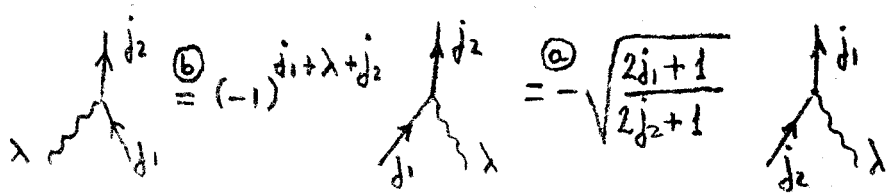
b) $(j_1 m_1 j_2 m_2|j_3 m_3) = (-1)^{j_1+j_2+j_3}(j_2 m_2 j_1 m_1|j_3 m_3)$

c) los elementos de matriz son reales, es decir,



(A.26)

Por ejemplo (ver ec.(A.19)):



(A.27)

Apéndice B

Modos normales de vibración. RPA

B.1 Respuesta a un campo externo

La variación en el campo nuclear promedio debida a una pequeña deformación de la superficie nuclear se puede parametrizar como (ec.(A.1))

$$H_{pv} = -\chi \sum_{\lambda\mu} T_{\lambda\mu}(\vec{r}) A^*_{\lambda\mu} \qquad (B.1)$$

Por sencillez de notación nos restringiremos a una sola multipolaridad y proyección (λ,μ). Definiendo además

$$\tau_{\lambda 0}(\vec{r}) = T_{\lambda 0}(\vec{r}) i^{-\lambda}, \quad \Gamma_{\lambda 0} = A_{\lambda 0} i^{-\lambda} \qquad \mu = 0$$

$$\tau_{\lambda\mu} = \left(T_{\lambda\mu}(\vec{r}) i^{-\lambda} + T^*_{\lambda\mu}(\vec{r}) i^{\lambda} \right)/\sqrt{2} \qquad \tau_{\lambda -\mu} = i\left(T_{\lambda\mu}(\vec{r}) i^{-\lambda} - T^*_{\lambda\mu}(\vec{r}) i^{\lambda} \right)/\sqrt{2}$$

$$\Gamma_{\lambda\mu} = \left(A_{\lambda\mu} i^{-\lambda} + A^*_{\lambda\mu} i^{\lambda} \right)/\sqrt{2} \qquad \Gamma_{\lambda -\mu} = i\left(A_{\lambda\mu} i^{-\lambda} - A^*_{\lambda\mu} i^{\lambda} \right)/\sqrt{2}$$

$$\mu > 0 \qquad (B.2)$$

podemos escribir

$$H^{(\lambda\mu)}_{pv} = -\chi\, \tau(\vec{r}) \Gamma \qquad (B.3)$$

con τ y Γ reales y sin ninguna pérdida de generalidad, debido a la relación existente entre $T^*_{\lambda\mu}$ $(A^*_{\lambda\mu})$ y $T_{\lambda -\mu}$ $(A_{\lambda -\mu})$ (ec.(A.3)).

Un campo externo aplicado al núcleo tiene, en general, una amplitud Γ_{ex} en el canal (λ,μ) que estudiamos. Dicho canal del campo externo puede ser expresado como

$$V_{ex} = -\chi\, \tau(\vec{r}) \Gamma_{ex} \qquad (B.4)$$

Si la amplitud de dicho campo tiene una dependencia temporal de tipo armónico

$$\Gamma_{ex} = (\Gamma_{ex})_0 \cos \omega_{ex} t \tag{B.5}$$

existirán ciertos valores de ω_{ex} para los cuales la amplitud $(\Gamma)_0$ de oscilación de la superficie nuclear será máxima. Dichos valores de ω_{ex} son las frecuencias características de los modos normales de vibración o fonones del canal (λ,μ).

Si $(\Gamma_{ex})_0$ es suficientemente pequeña, el estado perturbado viene dado por (Bohr y Mottelson (1975))

$$|\rangle = |0\rangle + \frac{\chi}{2\hbar} (\Gamma_{ex})_0 \sum_a \left(\frac{\exp(-i\omega_{ex}t)}{\omega_a - \omega_{ex}} + \frac{\exp(i\omega_{ex}t)}{\omega_a + \omega_{ex}} \right) \tau_a |a\rangle ,$$

con $$\tau_a = \langle a | \tau(\vec{r}) | 0 \rangle \tag{B.6}$$

El índice a denota los números cuánticos adicionales a (λ,μ) necesarios para especificar el modo normal representado por $|a\rangle$. El vector $|0\rangle$ representa el estado fundamental del sistema.

Por ser $\tau(\vec{r})$ un operador monoparticular, se tiene que

$$\langle | \tau(\vec{r}) | \rangle = \int \tau(\vec{r}) \, \rho(\vec{r}) \, d^3\vec{r} \tag{B.7}$$

donde, $\rho(\vec{r})$ es la distribución de densidad deformada correspondiente al estado perturbado $|\rangle$ de la ec.(B.6). El valor del momento inducido, $\langle | \tau(\vec{r}) | \rangle$, puede ser relacionado con la amplitud de la deformación de $\rho(\vec{r})$. Desarrollando $\rho(\vec{r})$ en potencias de Γ , se encuentra (μ=0, por sencillez)

$$\rho(\vec{r}) \approx \rho_0(r) - R \frac{\partial \rho_0}{\partial r} \Gamma_{\lambda 0} Y_{\lambda 0}(\hat{r}) \tag{B.8}$$

Sustituyendo en la ec.(B.7) se tiene

$$\langle | \tau(\vec{r}) | \rangle = -\chi_s \Gamma \tag{B.9}$$

con

$$\chi_s = \int f(r) \frac{\partial \rho_0}{\partial r} R r^2 dr \tag{B.10}$$

donde se ha tenido además en cuenta la definición de $\tau(\vec{r})$, ec.(B.2), y la de $T_{\lambda\mu}(\vec{r})$, ec.(A.2)).

Por otro lado, el valor del momento inducido por la acción del campo externo puede ser evaluado utilizando la expresión para $|\rangle$ de la ec.(B.6), resultando

$$\langle | \tau(\vec{r}) | \rangle = -\chi_s K(\omega_{ex}) \Gamma_{ex} = -\chi_s K(\omega_{ex}) (\Gamma_{ex})_0 \cos \omega_{ex} t \tag{B.11}$$

con

$$K(\omega_{ex}) = -\frac{2\chi}{\hbar \chi_s} \sum_a \frac{|\tau_a|^2 \omega_a}{(\omega_a^2 - \omega_{ex}^2)} \tag{B.12}$$

Por tanto, de las ecs.(B.9) y (B.11) se obtiene que la superficie nuclear oscila con una amplitud dada por

$$\Gamma = (\Gamma)_0 \cos \omega_{ex} t \tag{B.13}$$

con

$$(\Gamma)_0 = K(\omega_{ex}) (\Gamma_{ex})_0 \tag{B.14}$$

Para evaluar $K(\omega_{ex})$ se necesita conocer las frecuencias propias ω_a y los elementos de matriz τ_a. Estos pueden determinarse exigiendo consistencia con la respuesta del sistema que se obtiene desarrollando el estado perturbado $|\rangle$ en una base de la que las frecuencias y elementos de matriz se conocen previamente. Dicha base es la constituída

por las excitaciones monoparticulares, $\{|i\rangle\}$.

La perturbación a la que los nucleones están sometidos es la suma del campo externo (ec.(B.4)) más el campo inducido (ecs.(B.3) y (B.13)),

$$H_{pv}^{total} = -\chi\, \tau(\vec{r})\,(\Gamma_{ex}+\Gamma) \tag{B.15}$$

El momento inducido expresado en la base $\{|i\rangle\}$ es por tanto,

$$\langle|\tau(\vec{r})|\rangle = -\chi_s\, K^o(\omega_{ex})\left((\Gamma_{ex})_o + K(\omega_{ex})(\Gamma_{ex})_o\right)\cos\omega_{ex}t \tag{B.16}$$

con

$$K^o(\omega_{ex}) = -\frac{2\chi}{\hbar\,\chi_s}\sum_i \frac{|\tau_i|^2\omega_i}{(\omega_i^2-\omega_{ex}^2)} \tag{B.17}$$

La consistencia se obtiene exigiendo que el momento inducido según las ecs.(B.11) y (B.16) sean iguales,

$$K(\omega_{ex}) = K^o(\omega_{ex})\left(1 + K(\omega_{ex})\right) \tag{B.18}$$

Despejando

$$K(\omega_{ex}) = \frac{K^o(\omega_{ex})}{\left(1 - K^o(\omega_{ex})\right)} \tag{B.19}$$

Las frecuencias propias ω_a pueden ahora ser calculadas. Estas vienen dadas por los polos de $K(\omega_{ex})$ (ver ec.(B.12)) que, según la ec.(B.19), se determinan con la condición

$$K^o(\omega_a) = 1 \tag{B.20a}$$

que, utilizando la ec.(B.17), se puede poner como

$$\frac{2\chi\chi_s}{\hbar}\sum_i \frac{|t_i|^2\omega_i}{(\omega_i^2-\omega_a^2)} = -1 \qquad (B.20b)$$

con

$$t_i = \tau_i / \chi_s \qquad (B.21)$$

Los elementos de matriz son proporcionales a los residuos de $K(\omega)$ en $\omega=\omega_a$, de modo que de la ec.(B.19) se obtiene

$$|\tau_a|^2 = -\frac{\hbar\chi_s}{\chi}\left(\left(\frac{\partial K^0(\omega)}{\partial\omega}\right)_{\omega=\omega_a}\right)^{-1}$$

$$= \frac{\hbar^2\chi_s^2}{4\chi^2\omega_a}\left(\sum_i \frac{|\tau_i|^2\omega_i}{(\omega_i^2-\omega_a^2)^2}\right)^{-1} \qquad (B.22)$$

El parámetro de inercia, B_a, y la constante de recuperación, C_a, asociadas al modo de vibración $|a\rangle$, quedan determinados a partir de los valores de ω_a y τ_a, obtenidos con las ecs.(B.20) y (B.22), respectivamente. Utilizando la representación Γ del operador $\tau(\vec{r})$ (ec.(B.9)), y expresando Γ en función de los operadores bosónicos O_a^+ y O_a (ecs.(B.2) y (A.5)), queda

$$|\tau_a|^2 = \chi_s^2\,\frac{\hbar\omega_a}{2C_a} \qquad (B.23)$$

De la ec.(A.6), $\omega=(C/B)^{1/2}$, se puede despejar el parámetro de inercia.

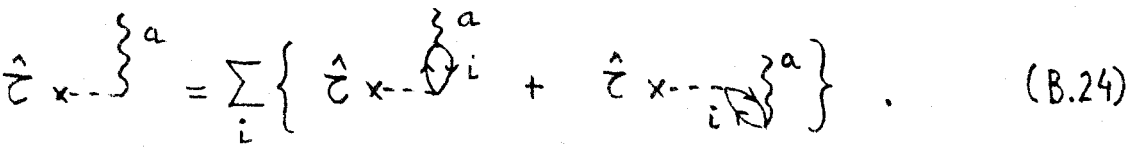
Así, las propiedades de los modos normales quedan establecidas en función del movimiento de los componentes elementales del núcleo, los nucleones, y de la interacción de éstos con el potencial promedio que los confina, representada por H_{pv} (ec.(B.1)).

Por razones de tipo histórico el tratamiento descrito en esta sección se denomina Aproximación de las Fases Aleatorias, RPA.

B.2 Estructura monoparticular de los fonones

El mecanismo monoparticular mediante el cual un fonón es excitado,

puede ser expresado gráficamente, siguiendo en primer orden de perturbaciones, como



(B.24)

Para la interpretación de los diferentes elementos gráficos, ver apéndice A.

El segundo miembro de esta ecuación pone bien de manifiesto que los nucleones están sometidos a la acción del campo externo, representado por $\hat{\tau}$, así como a la de los campos internos, representados por los vértices entre fermiones y bosones. Los valores de estos vértices son los de las ecs.(A.21-22), con los cuales y aplicando las reglas usuales de la teoría de perturbaciones, se puede reescribir la ec.(B.24) como

$$\tau_a = \sum_i \frac{i^\lambda}{\hbar} \left\{ \frac{T_i^2}{2\lambda+1} \frac{\chi\sqrt{\hbar\omega_a/2C_a}}{\omega_a - \omega_i} - \left[(-1)^{\lambda-\mu}\right] \frac{T_i^2}{2\lambda+1} \frac{\chi\sqrt{\hbar\omega_a/2C_a}}{\omega_a + \omega_i} \right\} \tag{B.25}$$

con

$$T_i = \langle j_p \| T_\lambda \| j_h \rangle$$

y

$$|i\rangle = |j_p j_h^{-1}; \lambda\mu\rangle , \quad \hbar\omega_i = \epsilon_p - \epsilon_h \quad . \tag{B.26}$$

Uno de los factores $(-1)^{\lambda-\mu}$ en la ec.(B.25) proviene de que en el vértice de la ec.(A.22) el fonón y el estado $|i\rangle$ están acoplados a momento angular cero. El otro factor $(-1)^{\lambda-\mu}$ se debe a que el campo externo actúa en el segundo término con la parte conjugada de la que actúa en el primero.

Sustituyendo la relación de dispersión en la anterior ecuación para τ_a, se obtiene

$$|\tau_a|^2 = \chi_s^2 \frac{\hbar\omega_a}{2C_a} \tag{B.27}$$

lo que constata la validez del desarrollo representado en la ec.(B.24). De la estructura de dicho desarrollo resulta evidente que el operador de creación $O^{+}_{\lambda\mu}$ se puede expresar como

$$O^{+}_{\lambda\mu} = \sum_{p,h} \left\{ X_{ph}(\lambda)\, \beta^{+}(\lambda\mu; j_p j_h^{-1}) + (-1)^{\lambda-\mu} Y_{ph}(\lambda)\, \beta(\lambda-\mu; j_p j_h^{-1}) \right\} \tag{B.28}$$

con

$$\beta^{+}(\lambda\mu; j_p j_h^{-1}) = [a^{+}_{p} b^{+}_{h}]^{\lambda}_{\mu} \tag{B.29}$$

y

$$X_{ph}(\lambda) = \frac{\chi\sqrt{\hbar\omega_a/2C_a}}{\hbar\omega_a - \hbar\omega_i} \frac{\langle j_p \| T_\lambda \| j_h \rangle}{\sqrt{2\lambda+1}}$$

$$Y_{ph}(\lambda) = -\frac{\chi\sqrt{\hbar\omega_a/2C_a}}{\hbar\omega_a + \hbar\omega_i} \frac{\langle j_p \| T_\lambda \| j_h \rangle}{\sqrt{2\lambda+1}} \tag{B.30}$$

$X_{ph}(\lambda)$ e $Y_{ph}(\lambda)$ se denominan amplitudes RPA del fonón $|\lambda\,\mu\rangle$. Para especificar totalmente el modo de vibración se precisa de una etiqueta adicional, n, debido a que para un (λ,μ) dado, la relación de dispersión de la ec.(B.20) posee, en general, más de una raiz. El origen de esta diversidad está en las diferentes estructuras monoparticulares que dichos fonones poseen.

B.3 Regla de Suma (EWSR)

Tomando el límite $\omega \to \infty$ en la ec.(B.19) se obtiene

$$\sum_{a} |\tau_a|^2 \omega_a = \sum_{i} |\tau_i|^2 \omega_i \tag{B.31}$$

Esta propiedad se denomina Regla de Suma Lineal en la Energía, EWSR. La principal característica de la suma pesada linealmente con la energía de los elementos de matriz de un operador monoparticular, $\tau(\vec{r})$ en este caso, y que sólo depende de la posición, es que puede ser expresada como valor medio en el estado fundamental de un operador monoparticular. Así, la suma en la ec.(B.31) es equivalente a (Bohr y Mottelson (1975))

$$S^{(1)}(\hat{\tau}_\lambda) = \langle 0 | \frac{\hbar^2}{2M} \sum_{\mu,h} | \nabla_h \tau_{\lambda\mu}(\vec{r}_h) |^2 | 0 \rangle . \qquad (B.32)$$

$S^{(1)}(\hat{\tau}_\lambda)$ es prácticamente insensible a los detalles de la función de onda utilizada para describir el estado fundamental $|0\rangle$. Al ser el valor medio de un operador monoparticular, $S^{(1)}(\hat{\tau}_\lambda)$ no depende de las funciones de correlación, como la densidad de dos partículas $\rho(\vec{r},\vec{r}\,')$, que pueden diferenciar una descripción del estado fundamental de otra que posea $\rho(\vec{r})$ similar.

Otras sumas, $S^{(n)}(\hat{\tau}_\lambda)$, con $n \neq 1$, no tienen esta propiedad y son mucho más sensibles a las correlaciones.

B.4 Probabilidades de transición

La probabilidad por unidad de tiempo de una transición eléctrica de multipolaridad λ y proyección μ es (Segré (1972))

$$\Gamma_E(\lambda,\mu) = \frac{8\pi(\lambda+1)\, e^2}{\hbar \lambda [(2\lambda+1)!!]^2} \left(\frac{\omega}{c}\right)^{2\lambda+1} |M^E_{\lambda\mu}|^2 \qquad (B.33)$$

donde ω es la frecuencia de la radiación, $\omega = |E_i - E_f|/\hbar$, con E_i y E_f la energía del estado inicial y final, respctivamente, y

$$M^E_{\lambda\mu} = \langle \Psi_i | \sum_{k=1}^{Z} r_k^\lambda Y_{\lambda\mu}(\hat{r}_k) | \Psi_f \rangle \qquad (B.34)$$

La probabilidad de transición independientemente de la polarización μ es

$$\Gamma_E(\lambda) = \frac{1}{2J_i+1} \sum_{\substack{m_i \\ m_f \\ \mu}} \Gamma_E(\lambda,\mu)$$

$$= \frac{8\pi(\lambda+1)\, e^2}{\hbar \lambda [(2\lambda+1)!!]^2} \left(\frac{\omega}{c}\right)^{2\lambda+1} B_E(\lambda, J_i \rightarrow J_f) \qquad (B.35)$$

donde m_i y m_f son los números cuánticos magnéticos de el estado inicial y final, respectivamente, y

$$B_E(\lambda, J_i \rightarrow J_f) = \frac{1}{2J_i+1} \sum_{\substack{m_i \\ m_f \\ \mu}} |M^E_{\lambda\mu}|^2 \qquad (B.36)$$

es la denominada probabilidad de transición reducida.

El elemento de matriz $M^E_{\lambda\mu}$ puede ser evaluado utilizando un desarrollo perturbativo como el de la ec.(B.24), obteniendose, para transiciones donde el estado fundamental es el inicial o el final

$$M^E_{\lambda\mu} = \sum_{(ph)prot.} (X_{ph}(\lambda) + Y_{ph}(\lambda))\, m_{\lambda\mu}(ph) \qquad (B.37)$$

con

$$m_{\lambda\mu}(ph) = \langle \varphi_p | r^\lambda Y_{\lambda\mu}(\hat{r}) | \varphi_h \rangle \qquad (B.38)$$

siendo φ una función de onda monoparticular. Utilizando la ec.(B.30) para $X_{ph}(\lambda)$ e $Y_{ph}(\lambda)$ y suponiendo que $\langle \varphi_p | r^\lambda Y_{\lambda\mu} | \varphi_h \rangle$ y $\langle \varphi_p | T_{\lambda\mu} | \varphi_h \rangle$ son proporcionales, la ec.(B.37)se transforma en

$$M^E_{\lambda\mu} = \frac{\lambda+2}{4\pi} ZR\langle r^{\lambda-1}\rangle \sqrt{\frac{\hbar\omega_\lambda}{2C_\lambda}}\, i^\lambda \begin{cases} \times 1 & , (0 \rightarrow (\lambda\mu)) \\ \times(-1)^{\lambda+\mu} & , ((\lambda\mu \rightarrow 0) \end{cases} \qquad (B.39)$$

y por tanto

$$B_E(0 \rightarrow \lambda) = \left(\frac{\lambda+2}{4\pi} ZR\langle r^{\lambda-1}\rangle\right)^2 \beta_\lambda^2 \qquad (B.40)$$

con

$$\beta_\lambda^2 = (2\lambda+1)\frac{\hbar\omega_\lambda}{2C_\lambda} \qquad (B.41)$$

En caso de que el campo externo afecte por igual a neutrones y protones la probabilidad de transición reducida se obtiene simplemente cambiando Z por A en la ec.(B.40), así

$$B(0 \rightarrow \lambda) = \left(\frac{\lambda+2}{4\pi} AR\langle r^{\lambda-1}\rangle\right)^2 \beta_\lambda^2 \qquad (B.42)$$

La probabilidad de transición reducida se suele expresar en unidades de Weisskopf o monoparticulares. La unidad Weisskopf se define como

$$W.u.(B(0\rightarrow\lambda)) = \frac{2\lambda+1}{4\pi}\left(\frac{3}{\lambda+3}\right)^2 (1.2A^{1/3})^{2\lambda} fm^{2\lambda} \qquad (B.43)$$

que es un valor característico de la probabilidad de transición reducida de una transición monoparticular.

Se dice que un estado vibracional es muy colectivo cuando su probabilidad reducida de transición expresada en unidades Weisskopf es mucho mayor que la unidad,

$$B_{wu}(0\longrightarrow\lambda) >> 1 \qquad (B.44)$$

Esto corresponde a fonones que tienen amplitudes X e Y notables en gran número de configuraciones (p-h), como se desprende facilmente de las ecs.(B.36-37).

Apéndice C

Deformación de la superficie nuclear en el espacio normal y en el espacio de momentos

C.1 Parámetros de deformación

Limitándose al caso de deformaciones con simetría axial alrededor del eje Z, el radio de la superficie nuclear puede ser parametrizado como

$$R(\vartheta) = R + \sum_L R\beta_L Y_L(\vartheta) \qquad (C.1)$$

donde, R es el radio original y $Y_L(\vartheta)$ es el armónico esférico $Y_{LM}(\vartheta)$ con M=0. Las β_L se denominan parámetros de deformación.

La distribución de densidad del núcleo deformado es (ec.(1.8))

$$\rho_\beta(r,\vartheta) \approx \rho(r) - \sum_L \beta_L R \frac{\partial\rho(r)}{\partial r} Y_L(\vartheta) \qquad (C.2)$$

Multiplicando esta ecuación por $Y_L(\vartheta)$ e integrando sobre ϑ y sobre r , se obtiene el valor de

$$\beta_L = 2\pi \int \rho_\beta(r,\vartheta) Y_L(\vartheta) d\vartheta dr \Big/ R \int \frac{\partial\rho(r)}{\partial r} dr$$

$$= 2\pi \int \rho_\beta(r,\vartheta) Y_L(\vartheta) d\vartheta dr \Big/ R\,\rho(r=0) \qquad (C.3)$$

Al haber integrado sobre r de este modo, las β_L calculadas con la anterior ecuación son equivalentes a las de la ec.(C.1) para cualquier amplitud de deformación. Así, en la aproximación de difusividad nula, esto es,

$$\rho_\beta(r,\vartheta) = \begin{cases} \rho(r=0) & \text{si} \quad r < R(\vartheta) \\ 0 & \text{si} \quad r > R(\vartheta) \end{cases} \qquad (C.4)$$

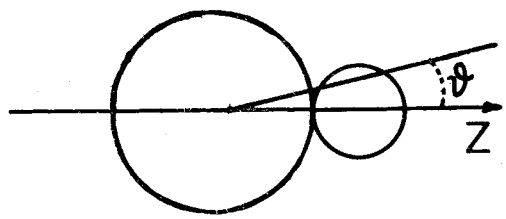
con lo que de la ec.(C.3), se tiene

$$\beta_L = 2\pi \int_0^{\pi}\int_0^{R(\vartheta)} \rho(r=0)\, Y_L(\vartheta)\, d\vartheta dr / R\,\rho(r=0)$$

$$= 2\pi \int_0^{\pi} R(\vartheta)\, Y_L(\vartheta)\, d\vartheta / R \qquad (C.5)$$

que es, exactamente, lo que se obtiene de la ec.(C.1) al multiplicar por $Y_L(\vartheta)$ e integrar sobre ϑ.

La ventaja de la ec.(C.3) es que tiene una forma que permite generalizarla a casos en los que la ec.(C.5) no es válida, como, por ejemplo, cuando $R(\vartheta)$ no es univaluada (ver figura(C.1)).



Figura(C.1) Caso de distribución de densidad con $R(\vartheta)$ multivaluada.

C.2 Campo de desplazamientos

La deformación de la distribución de densidad del tipo de la ec.(C.4) se produce mediante el desplazamiento $\int \vec{u}(\vec{r},\xi)d\xi$ del diferencial de volumen centrado en $\vec{r}$. El diferencial de desplazamiento $\vec{u}(\vec{r},\xi)d\xi$ es lo que dicho diferencial de volumen se desplaza cuando la distribución de densidad pasa de tener deformación ξ a tener deformación $\xi+d\xi$, donde, ξ es un parámetro que determina un punto sobre la trayectoria en el espacio de los parámetros β_L a lo largo de la cual vamos deformando el núcleo.

El campo $\vec{u}(\vec{r},\xi)$ lo sometemos a la condición

$$\vec{\nabla}\vec{u}(\vec{r},\xi) = 0 \qquad (C.6)$$

que expresa el hecho de que las deformaciones que consideramos no comprimen la materia nuclear. Esta condición se cumple utilizando la parametrización

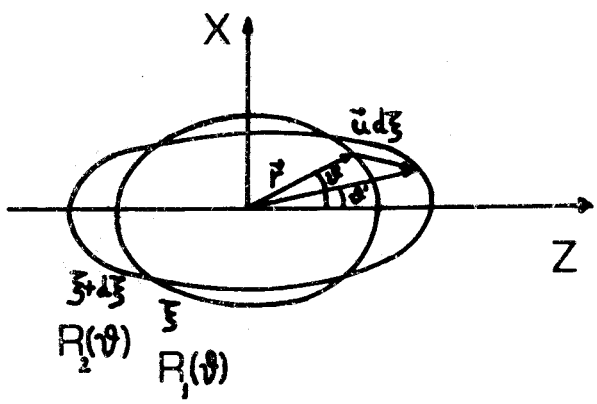
$$\vec{u}(\vec{r},\xi) = \sum_L c_L(\xi)\,\vec{\nabla}\left[r^L Y_L(\vartheta)\right] \qquad (C.7)$$

Omitiremos en lo que sigue la dependencia explícita con ξ .

Los parámetros c_L pueden determinarse a partir de los β_L exigiendo que (ver figura(C.2))

$$R_1(\vartheta)\cos\vartheta + u_z(R_1(\vartheta),\vartheta)\,d\xi = R_2(\vartheta')\cos\vartheta'$$

$$R_1(\vartheta)\,\mathrm{sen}\,\vartheta + u_x(R_1(\vartheta),\vartheta)\,d\xi = R_2(\vartheta')\,\mathrm{sen}\,\vartheta' \qquad (C.8)$$



Figura(C.2) Desplazamiento de $\vec{r}$ a $\vec{r}+\vec{u}d\xi$, estando $\vec{r}$ sobre la superficie $R_1(\vartheta)$ y $\vec{r}+\vec{u}d\xi$ sobre la superficie $R_2(\vartheta)$. $R_1(\vartheta)$ se caracteriza por la defomación ξ y $R_2(\vartheta)$ por $\xi+d\xi$.

El valor de ϑ' en la anterior ecuación se determina según

$$\operatorname{sen}\vartheta' = \frac{R_1(\vartheta)\operatorname{sen}\vartheta + u_x(R_1(\vartheta),\vartheta)\,d\xi}{\sqrt{R_1^2(\vartheta)+u^2(R_1(\vartheta),\vartheta)\,d\xi+2\vec{u}(R_1(\vartheta),\vartheta)\cdot\vec{R}_1(\vartheta)\,d\xi}} \qquad (C.9)$$

Las componentes u_x y u_z son

$$u_x(r,\vartheta) = \cos\vartheta\, u_\vartheta(r,\vartheta) + \operatorname{sen}\vartheta\, u_r(r,\vartheta)$$

$$u_z(r,\vartheta) = \cos\vartheta\, u_r(r,\vartheta) - \operatorname{sen}\vartheta\, u_\vartheta(r,\vartheta) \qquad (C.10)$$

donde (ver ec.(C.7))

$$u_r(r,\vartheta) = \sum_L C_L\, L\, r^{L-1}\, Y_L(\vartheta)$$

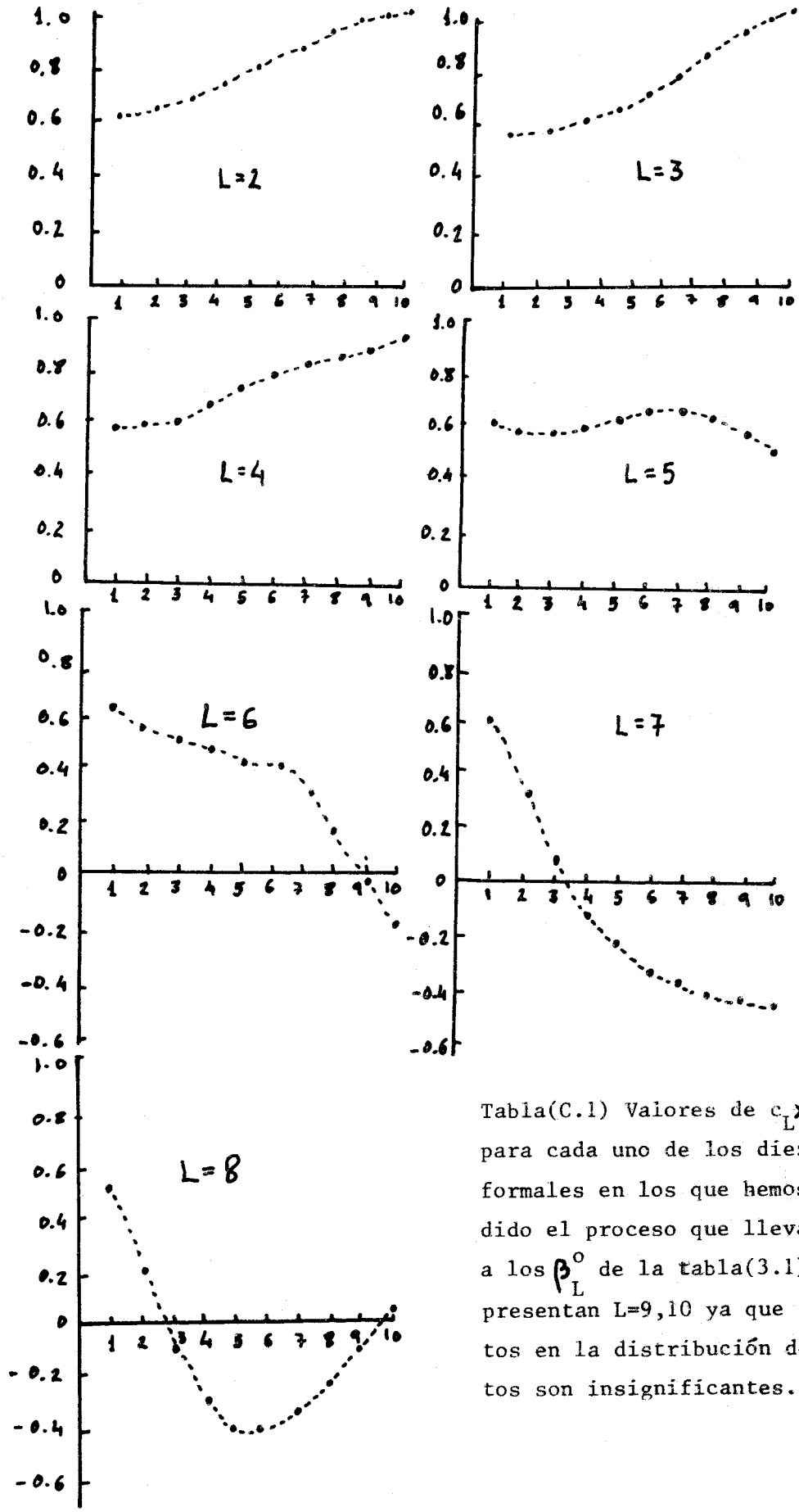
$$u_\vartheta(r,\vartheta) = \sum_L C_L\, r^L\, dY_L(\vartheta)/d\vartheta \qquad (C.11)$$

De las ecs.(C.8-11) se determinan los valores de C_L, resolviendo-viéndolas iterativamente con el método de mínimos cuadrados. En la práctica el parámetro ξ se ha elegido como la distancia en el semieje positivo Z entre $R(\vartheta)$ y el radio original R dividido por la distancia final, con lo que $0 \leq \xi \leq 1$.

Para el caso de la deformación cuyos parámetros aparecen en la tabla(3.1), y tomando $d\xi = 0.1$, es decir, 10 pasos, los parámetros C_L encontrados se presentan en la tabla(C.1).

C.3 Deformación en el espacio de momentos

La distribución de velocidades o momentos en el estado fundamental de un núcleo esférico es, aproximadamente (piénsese en un Gas de Fermi), homogénea e isótropa, siendo el máximo momento permitido el denominado momento de Fermi



Tabla(C.1) Valores de $c_L \times 10^L \times d\xi$ para cada uno de los diez pasos formales en los que hemos dividido el proceso que lleva de $\beta_L=0$ a los β_L^o de la tabla(3.1). No se presentan L=9,10 ya que sus efectos en la distribución de momentos son insignificantes.

$$K_F \approx 1.36\ fm^{-1} \tag{C.12}$$

La distribución de momentos está, pues, caracterizada por una superficie de Fermi esférica de radio k_F.

Cuando se aplica al núcleo una deformación $\Delta\xi$, la distribución de momentos cambia. La función de onda que describe el núcleo deformado puede ser aproximada, para $\Delta\xi$ pequeño, como (Bertsch (1980))

$$\Psi_{\Delta\xi}(\vec{r}_1,\vec{r}_2,\ldots) = \Psi(\vec{r}_1+\Delta\xi\vec{u}(\vec{r}_1),\vec{r}_2+\Delta\xi\vec{u}(\vec{r}_2),\ldots) \tag{C.13}$$

donde $\Delta\xi\vec{u}(\vec{r})$ es el campo de desplazamientos asociado con la deformación .

La distribución de momentos en el núcleo deformado se obtiene a partir de la del núcleo esférico a través de la transformación

$$\vec{p} \longrightarrow (1+\Delta\xi(\vec{\nabla}\otimes\vec{u}))\vec{p} \tag{C.14}$$

La superficie de Fermi deja de ser esférica convirtiéndose en el elipsoide

$$\vec{K}_S = (1+\Delta\xi(\vec{\nabla}\otimes\vec{u}))\vec{K}_F \tag{C.15}$$

Utilizando la parametrización de $\vec{u}(\vec{r})$ de la ec.(C.7), el tensor $\vec{\nabla}\otimes\vec{u}$ puede ser expresado como

$$\vec{\nabla}\otimes\vec{u} = \sum_L c_L(\vec{\nabla}\otimes\vec{u})_L$$

con

$$(\vec{\nabla}\otimes\vec{u})_L = \vec{\nabla}\otimes(\vec{\nabla}\, r^L Y_L(\vartheta)) \tag{C.16}$$

La expresión de $(\vec{\nabla}\otimes\vec{u})_L$ para diferentes valores de L, aparece en la tabla(C.2a). En ésta se puede comprobar que la divergencia de u es cero para todo L,

$$\operatorname{div} \vec{u}_L = \operatorname{traza} (\vec{\nabla} \otimes \vec{u})_L = 0 \qquad (C.17)$$

También se puede ver que $(\vec{\nabla} \otimes \vec{u})_L$ es simétrico y que se cumple

$$[(\vec{\nabla} \otimes \vec{u})_L]_{(i,x)}(z,x,y) = [(\vec{\nabla} \otimes \vec{u})_L]_{(i,y)}(z,y,x) \qquad (C.18)$$

Utilizando estas propiedades basta conocer $((\vec{\nabla} \otimes \vec{u})_L)_{zz}$, $((\vec{\nabla} \otimes \vec{u})_L)_{zx}$, $((\vec{\nabla} \otimes \vec{u})_L)_{xx}$ y $((\vec{\nabla} \otimes \vec{u})_L)_{xy}$, cuyas expresiones para L=6, 7 y 8 aparecen en la tabla(C.2b).

L=2

$$\sqrt{\frac{5}{4\pi}}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

L=3

$$\sqrt{\frac{7}{4\pi}}\begin{pmatrix} 6z & -3x & -3y \\ -3x & -3z & 0 \\ -3y & 0 & -3z \end{pmatrix}$$

L=4

$$\frac{1}{8}\sqrt{\frac{9}{4\pi}}\begin{pmatrix} 96z^2-48x^2-48y^2 & -96xz & -96yz \\ -96xz & 36x^2-48z^2+12y^2 & 24xy \\ -96yz & 24xy & 36y^2-48z^2+12x^2 \end{pmatrix}$$

L=5

$$\frac{1}{8}\sqrt{\frac{11}{4\pi}}\begin{pmatrix} 160z^3-240z(x^2+y^2) & -240z^2x+60x(x^2+y^2) & -240z^2y+60y(x^2+y^2) \\ -240z^2x+60x(x^2+y^2) & -80z^3+180zx^2+60zy^2 & 120zxy \\ -240-^2y+60y(x^2+y^2) & 120zxy & -80z^3+180zy^2+60zx^2 \end{pmatrix}$$

Tabla(C.2a) Algunos de los tensores $(\vec{\nabla} \otimes \vec{u})_L$ expresados en la forma:

$$(\vec{\nabla} \otimes \vec{u})_L \equiv \begin{pmatrix} u_{zz} & u_{zx} & u_{zy} \\ u_{xz} & u_{xx} & u_{xy} \\ u_{yz} & u_{yx} & u_{yy} \end{pmatrix}$$

L=6

$$u_{zz}=\frac{1}{16}\sqrt{\frac{13}{4\pi}}(480z^4-1440z^2(x^2+y^2)+180(x^2+y^2))$$
$$u_{zx}=\frac{1}{16}\sqrt{\frac{13}{4\pi}}(-960z^3x+720zx(x^2+y^2))$$
$$u_{xx}=\frac{1}{16}\sqrt{\frac{13}{4\pi}}(-240z^4+1080z^2x^2+360z^2y^2-150x^4-30y^4-180x^2y^2)$$
$$u_{xy}=\frac{1}{16}\sqrt{\frac{13}{4\pi}}(840z^2xy-120x^3y-120xy^3)$$

L=7

$$u_{zz}=\frac{1}{16}\sqrt{\frac{15}{4\pi}}(672z^5-3360z^3(x^2+y^2)+1260z(x^2+y^2)^2)$$
$$u_{zx}=\frac{1}{16}\sqrt{\frac{15}{4\pi}}(-1680z^4x+2520z^2x(x^2+y^2)-210x(x^2+y^2)^2)$$
$$u_{xx}=\frac{1}{16}\sqrt{\frac{15}{4\pi}}(-336z^5+2520z^3x^2+840z^3y^2-1050zx^4-210zy^4-1260zx^2y^2)$$
$$u_{xy}=\frac{1}{16}\sqrt{\frac{15}{4\pi}}(2520z^3xy-840zx^3y-840zxy^3)$$

L=8

$$u_{zz}=\frac{1}{16}\sqrt{\frac{17}{4\pi}}(896z^6-6720z^4(x^2+y^2)+5040z^2(x^2+y^2)^2-280(x^2+y^2)^3)$$
$$u_{zx}=\frac{1}{16}\sqrt{\frac{17}{4\pi}}(-2898z^5x+6300z^3x(x^2+y^2)-1890zx(x^2+y^2)^2+210zx(x^2+y^2+z^2)^2)$$
$$u_{xx}=\frac{1}{16}\sqrt{\frac{17}{4\pi}}(-448z^6+5040z^4x^2+1680z^4y^2-4200z^2x^4-840z^2y^4-5040z^2x^2y^2+$$
$$+245x^6+35y^6+525x^4y^2+315x^2y^4)$$
$$u_{xy}=\frac{1}{16}\sqrt{\frac{17}{4\pi}}(6930z^4xy-3780z^2xy(x^2+y^2+z^2)+210xy(x^2+y^2+z^2)^2)$$

Tabla(C.2b) Igual que la tabla(C.2a).

C.4 Deformación en el espacio de las fases

Como se demuestra en la sección(C.5), un estado de deformación ξ es estable cuando su distribución de momentos está caracterizada por una superficie de Fermi esférica. Una deformación adicional $\Delta\xi$ distorsiona la superficie del núcleo tanto en el espacio normal como en el de momentos. En esta sección se calcula cuanto es el volumen del espacio de fases desplazado por la deformación adicional.

En el caso de una deformación cuadrupolar se tiene

$$\vec{\nabla}\otimes\vec{u} = c_2\sqrt{\frac{5}{4\pi}}\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix} \tag{C.19}$$

lo que hace que la superficie de Fermi sea (ver figura(C.3))

$$\vec{p}_s(\vartheta) = p_F\left[1+\Delta\xi\, c_2\sqrt{\frac{5}{4\pi}}\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix}\cos\vartheta\\ \operatorname{sen}\vartheta\\ 0\end{pmatrix} \tag{C.20}$$

que hasta primer orden en c_L es

$$p(\vartheta) = |\vec{p}_s(\vartheta)| \approx p_F - \Delta\xi\, c_2\sqrt{\frac{5}{4\pi}}\,(3\cos^2\vartheta - 1)\,p_F \tag{C.21}$$

El volumen sombreado en la figura es

$$V_p = 2\times 2\pi\int_0^{\vartheta_L}\int_{p_F}^{p(\vartheta)} p^2\,dp\,\operatorname{sen}\vartheta\,d\vartheta$$

$$= 2\times(2\pi p_F^3)\left(\Delta\xi\, c_2\sqrt{\frac{5}{4\pi}}\right)(3\cos^3\vartheta - \cos\vartheta)\Big|_{\cos\vartheta = 1/\sqrt{3}}^{\cos\vartheta = 1}$$

$$= 2\times(2\pi p_F^3)\left(\Delta\xi\, c_2\sqrt{\frac{5}{4\pi}}\,\frac{2}{3\sqrt{3}}\right) \tag{C.22}$$

El valor de ϑ_L se determina de $p(\vartheta_L)=p_F$ en la ec.(C.21).

La distorsión de la distribución de momentos de la ec.(C.20) ocurre en todos los puntos del volumen del núcleo. Por tanto, el

volumen sombreado representa, en el espacio de las fases,

$$V_d = [2 \times (2\pi p_F^3)(\Delta\xi\, c_2 \sqrt{\frac{5}{4\pi}})\frac{2}{3\sqrt{3}}][\frac{4\pi}{3} R^3] \qquad (C.23)$$

donde se ha supuesto que la situación original es la del núcleo esferico de radio R.

El número de partículas corespondientes a este volumen es directamente proporcional a él,

$$n = C\, V_d \qquad (C.24)$$

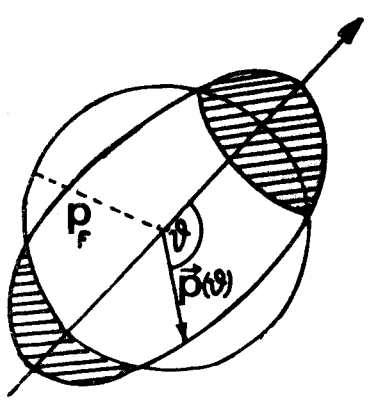
pudiendose determinar la constante de proporcionalidad a partir de la expresión

$$A = C\, \frac{4\pi}{3} R^3\, \frac{4\pi}{3} p_F^3 \qquad (C.25)$$

Finalmente

$$n = 2\Delta\xi\, c_2 \sqrt{\frac{5}{12\pi}}\, A \qquad (C.26)$$

Para otros tipos de deformaciones y partiendo de un estado con el núcleo deformado en el espacio normal la situación no es tan simple pues, $(\vec{\nabla} \otimes \vec{u})$ depende del punto en el cual se considera la distorsión de la distribución de momentos y, ademas, el volumen del núcleo no es el de una simple esfera.



Figura(C.3) Distorsión de la superficie de Fermi.

En la práctica el volumen desplazado en el espacio de fases se calcula numericamente. Para realizar tal cálculo conviene elegir como como sistema de coordenadas en el espacio de momentos las determinadas por los ejes propios del tensor $(\vec{\nabla}\otimes\vec{u})$.

C.5 Superficie de Fermi de los estados de deformación autoconsistente

La superficie de Fermi de un estado de deformación autocnsistente es esférica

El modo mas sencillo de demostrarlo es utilizando un campo promedio de tipo Nilsson, esto es, con el hamiltoniano monoparticular

$$H = \frac{p^2}{2M} + \frac{1}{2} M (\omega_x^2 x^2 + \omega_y^2 y^2 + \omega_z^2 z^2) \qquad (C.27)$$

La distribución de densidad del estado fundamental de este hamiltoniano está caracterizada por los radios cuadráticos medios en las tres direcciones,

$$\overline{x^2} = \frac{1}{A} \sum_{i=1}^{A} \langle x_i^2 \rangle = \frac{1}{A} \frac{\hbar^2}{M\omega_x} \sum_{i=1}^{A} (n_x + \frac{1}{2})_i \text{, etc.} \qquad (C.28)$$

Un estado de deformación autoconsistente se caracteriza por tener un potencial con la misma forma que la distribución de densidad (Mottelson (1958)), esto es, por verificarse la condición de autoconsistencia

$$\overline{x^2} / \overline{y^2} / \overline{z^2} \equiv \frac{1}{\omega_x^2} / \frac{1}{\omega_y^2} / \frac{1}{\omega_z^2} \qquad (C.29)$$

Utilizando el teorema del virial,

$$\frac{1}{2} M \omega_x^2 \overline{x^2} = \frac{1}{2} \frac{\overline{p_x^2}}{M} \text{, etc.} \qquad (C.30)$$

de la condición de autoconsistencia se sigue que

$$\overline{p_x^2} \,/\, \overline{p_y^2} \,/\, \overline{p_z^2} \equiv 1 \qquad (C.31)$$

que corresponde a una superficie de Fermi esférica.

<u>Los estados de deformación autoconsistente son un minimo de la energía</u>

Definiendo

$$\Sigma_x = \sum_{i=1}^{A} \left(n_x + \frac{1}{2}\right)_i \,, \text{ etc.} \qquad (C.32)$$

de la ec.(C.28) se puede escribir

$$\overline{x^2} \,/\, \overline{y^2} \,/\, \overline{z^2} \equiv \frac{\Sigma_x}{\omega_x} \,/\, \frac{\Sigma_y}{\omega_y} \,/\, \frac{\Sigma_z}{\omega_z} \qquad (C.33)$$

con lo que la condición de autoconsistencia se puede expresar como

$$\Sigma_x \,/\, \Sigma_y \,/\, \Sigma_z \equiv \frac{1}{\omega_x^2} \,/\, \frac{1}{\omega_y^2} \,/\, \frac{1}{\omega_z^2} \qquad (C.34a)$$

o bien

$$\Sigma_x \omega_x = \Sigma_y \omega_y = \Sigma_z \omega_z \qquad (C.34b)$$

Supongase que el núcleo adquiera una deformación que conservando el volumen se aparte de esta condición de autoconsistencia de modo que

$$\omega_z = \omega_x \frac{\Sigma_x}{\Sigma_y} \epsilon \quad , \quad \Sigma_y \omega_y = \Sigma_x \omega_x \qquad (C.35)$$

siendo $\epsilon = 1$ para la situación autoconsistente. La condición de conservación del volumen,

$$\omega_x \omega_y \omega_z = \omega_0^3 \qquad (C.36)$$

determina que

$$\omega_x = \omega_0 \sqrt[3]{\frac{\Sigma_z}{\epsilon \Sigma_x}}$$

$$\omega_y = \omega_x$$

$$\omega_z = \omega_0 \sqrt[3]{\frac{\Sigma_z}{\epsilon \Sigma_x}} \frac{\Sigma_x}{\Sigma_z} \epsilon \qquad (C.37)$$

donde se ha supuesto simetría axial, $\Sigma_x = \Sigma_y$.

La energía del sistema es

$$E = \hbar \sum_{i=1}^{A} (n_x \omega_x + n_y \omega_y + n_z \omega_z + \frac{3}{2})_i \qquad (C.38)$$

que utilizando la definición de Σ_i se puede poner como

$$E = \hbar (\Sigma_x \omega_x + \Sigma_y \omega_y + \Sigma_z \omega_z) \qquad (C.39)$$

Sustituyendo aqui las expresiones para ω_i de la ec.(C.37) se obtiene

$$E = \hbar \Sigma_x \omega_0 \sqrt{\frac{\Sigma_z}{\Sigma_x}} \left(2\sqrt[3]{\frac{1}{\epsilon}} + \sqrt[3]{\epsilon^2}\right) \qquad (C.40)$$

Según esta expresión la energía es un minimo para $\epsilon = 1$, es decir, la condición de autoconsistencia da lugar a una deformación estable.

Apéndice D

Estimación de la probabilidad de formación en un modelo de Gas de Fermi

La probabilidad de formación del ^{14}C en contacto con el ^{209}Pb (figura(3.1b)), a partir del estado fundamental del ^{223}Ra, descrito en un modelo de partículas independientes, viene dada por el elemento de matriz al cuadrado

$$P_{for} = | < Det^{223}Ra \, | \, Det^{209}Pb \otimes Det^{14}C > |^2 \qquad (D.1)$$

Con Det se denota un determinante de Slater.

Un límite superior a P_{for} se puede estimar mediante la expresión (Bertsch (1985))

$$P_{for} = \left[\int \frac{\rho_{Ra}(\vec{r}) \, \rho_{Pb+C}(\vec{r})}{A \, \rho_0} \, d^3\vec{r} \right]^{2A} \qquad (D.2)$$

donde, A es el número másico del ^{223}Ra y ρ_0 es la densidad nuclear promedio.

Las aproximaciones y la precisión de la expresión de la ec.(D.2) se pueden ver en un sencillo modelo unidimensional.

Supongamos dos partículas en una caja monodimensional de longitud L. El solapamiento con otra caja de iguales características pero desplazada una distancia R_0 de la primera es

$$I = \frac{1}{L^2} \left\{ \int_{-L/2+R_0}^{L/2} e^{iK_1x_1} e^{iK_2x_2} e^{-iK_1(x_1-R_0)} e^{-iK_2(x_2-R_0)} \, dx_1 dx_2 - \right.$$

$$\left. - \int_{-L/2+R_0}^{L/2} e^{iK_1x_1} e^{iK_2x_2} e^{-iK_1(x_2-R_0)} e^{-iK_2(x_1-R_0)} \, dx_1 dx_2 \right\} \qquad (D.3)$$

El primer término es el directo y el segundo es el de intercambio. Desarrollando las integrales en la ec.(D.3) se obtiene

$$I = \frac{1}{L^2} e^{iK_1R_0} e^{iK_2R_0} \left[(L-R_0)^2 - \frac{2}{(K_1-K_2)^2} \left(1 - \cos(K_1-K_2)(L-R_0)\right)\right] \tag{D.4}$$

Como puede comprobarse

$$I_D^2 = \left[\left(\frac{L-R_0}{L} \right)^2 \right]^2 \tag{D.5}$$

es una cota superior a I^2 . El exponente interior corresponde al número de partículas que hay en la caja. En el caso de que se tengan un número A de partículas, resulta

$$P_{for} = |I|^2 \leq \left(\frac{L-R_0}{L} \right)^{2A} \tag{D.6}$$

Como se puede comprobar esto es equivalente a poner

$$P_{for} \leq \left\{ \int \frac{\rho_1(x)\,\rho_2(x)}{A\,\rho_0} dx \right\}^{2A} \tag{D.7}$$

con

$$\rho_0 = A / L \tag{D.8}$$

En el caso del solapamiento entre la configuración esférica del ^{223}Ra y la que posee un ^{14}C formado en contacto con el ^{209}Pb, se tiene

$$P_{for} \leq \left[\int \frac{\rho_{Ra}^{Pb}(\vec{r})\,\rho_{Pb}(\vec{r})}{A_{Pb}\,\rho_0} d^3\vec{r} \right]^{2A_{Pb}} \left[\int \frac{\rho_{Ra}^{C}(\vec{r})\,\rho_{C}(\vec{r})}{A_{C}\,\rho_0} d^3\vec{r} \right]^{2A_{C}} \left(\frac{223}{209} \right)^{209} \tag{D.8}$$

donde, $\rho_{Ra}^{Pb}(\vec{r})$ y $\rho_{Ra}^{Pb}(\vec{r})$ son las distribuciones de densidad de 209 y 14 partículas en el volumen del ^{223}Ra esférico, respectivamente. El factor $(223/209)^{209}$ corresponde al número de particiones en las que el solapamiento entre $\rho_{Ra}^{Pb}(\vec{r})$ y $\rho_{Pb}(\vec{r})$ no es despreciable. La fracción

(223/209) se obtiene dividiendo la densidad de niveles en el ^{223}Ra por la densidad de niveles en el ^{209}Pb calculadas en un modelo de Gas de Fermi. Tal fracción corresponde, en promedio, al número de estados monoparticulares del ^{223}Ra a los que un determinado estado monoparticular del ^{209}Pb se puede solapar significativamente.

Utilizando la ec.(D.8), se obtiene

$$P_{for} \sim 10^{-45} \tag{D.9}$$

Si en lugar de las particiones mencionadas se consideran todas las posibles, es decir, $\binom{223}{14} \sim 10^{21}$, se obtiene

$$P_{for} \sim 10^{-30} \tag{D.10}$$

Por otro lado, calculando numéricamente la expresión de la ec.(D.2) queda

$$P_{for} \sim 10^{-30} \tag{D.11}$$

que coincide con el resultado de tomar todas las particiones, ec.(D.10).

Conclusiones

1. La distribución de densidad, corregida al considerar el efecto de las fluctuaciones inducidas por las vibraciones colectivas (ZPF), presenta oscilaciones en el interior del núcleo que son más suaves que las predichas por el modelo de partículas independientes.

2. Debido a las ZPF, la difusividad de la superficie nuclear aumenta, dando lugar a un incremento del radio cuadrático medio (MSR) que, en núcleos de $A \approx 40$, es del orden del 5%.

3. Las fluctuaciones en el radio nuclear dan lugar a fluctuaciones en la barrera coulombiana que, en los procesos de fusión a bajas energías, así como en los procesos de desintegración radioactiva, pueden aumentar la probabilidad de penetración entre dos y tres órdenes de magnitud.

4. La amplitud de las ZPF es muy sensible a la estructura monoparticular alrededor de la energía de Fermi. En particular, las vibraciones de paridad positiva producen ZPF que dan lugar a una dependencia cuadrática de los MSR con el número másico en la familia de isótopos del Calcio. Las de paridad negativa disminuyen acusadamente con el número de neutrones, siendo ésta la causa de la igualdad de los MSR de carga de los núcleos ^{40}Ca y ^{48}Ca.

5. La dependencia con el número de neutrones de las ZPF en la familia del Calcio es la causa por la que a bajas energías el sistema $^{40}Ca+^{44}Ca$ funde con igual probabilidad que el $^{40}Ca+^{48}Ca$.

6. Las ZPF en la forma de la superficie nuclear pueden aumentar la probabilidad de configuraciones geométricas exóticas en decenas de órdenes de magnitud. Esto se ha comprobado para el caso de la desintegración radioactiva $^{223}Ra \rightarrow ^{209}Pb+^{14}C$.

7. Basándose en el tratamiento de la Teoría de Campos del Núcleo (NFT) del acoplamiento del movimiento de los nucleones con las vibraciones nucleares, se ha desarrollado un método microscópico para el estudio de la renormalización de la distribución de densidad Hartree-Fock, debida a las correlaciones en el estado fundamental

del núcleo.

8. A la luz del tratamiento microscópico se ha desarrollado un método para la correcta evaluación de las ZPF inducidas por los diferentes tipos (espín, isospín) de vibración.

9. Cálculos en un modelo esquemático, con solución analítica exacta, muestran la validez y equivalencia de los métodos microscópico y macroscópico (ZPF).

10. En el marco del mencionado modelo esquemático se demuestra la insuficiencia de la Aproximación de las Fases Aleatorias (RPA) para el estudio de las correlaciones en el estado fundamental, que subestima sus efectos en la distribución de densidad en más de un 50%.

11. El método microscópico para la consideración de las correlaciones ha sido aplicado a un caso realista (^{40}Ca) encontrándose también un notable acuerdo con los resultados del método macroscópico.

Referencias

-Aleksandrov, D.V., Beliatsky, A.F., Glukhov, Y.A., Nikolsky, E.Y., Vovotsky, B.G., Ogloblin, A.A. y Stepanov, D.N., JETF 40(1984)152.

-Aljwain, H.A., Ldoux, R.J., Beckerman, M., Gazes, S.B., Wiguins, J., Cosman, E.R., Bets, R.R., Saini, S. y Hansen, O. (será publicado).

-Alkhazov,G.D., Bauer, T., Bertini, R., Bombot, L., Bing, O.,Boudard,.A., Bruge, G., Catz, H., Chaumeaux, A., Couvert, P., Fontaine, J.M., Hibou,F., Igo, G.J., Lugol, J.C. y Matoba, M., Nucl. Phys. A280(1977)365.

-Barranco, F. y Broglia, R.A., Phys. Lett. 151B(1985)90.

-Barranco, F., Broglia, R.A., Bertsch, G.F. y Liotta, R. (1985a) (será publicado).

-Beiner, M., Flocard, H., Van Giai, N. y Quentin, P., Nucl. Phys. A238(1975)29.

-Belote, T.A., Bjerregaard, J.H., Hansen, O. Satchler, G.R., Phys. Rev. 138B(1965)1067.

-Bernstein, A.M., Adv. Nucl. Phys. 3(1969)325.

-Bertsch, G.F., Proceedings de la conferencia Nuclear Spectroscopy, Gull Lake, Michigan(1979).

-Bertsch, G.F., Phys. Lett. 95B(1980)157.

-Bertsch, G.F., comunicación privada (1985).

-Bes, D. y Broglia, R.A., Nucl. Phys. A80(1966)289.

-Bes, D.R., Broglia, R.A., Dussel, G.G., Liotta, R.J. y Sofia, H.M., Nucl. Phys. A260(1976)1.

-Bohr, Aa. y Mottelson, B. Mat. Fys. Med. Dan. Vid. Selsk. 27 nº16(1953).

-Bohr, Aa.y Mottelson, B., Nuclear Structure, Vol. 1, Benjamin,N.Y.(1969).

-Bohr, Aa.y Mottelson, B., Nuclear Structure, Vol. 2, Benjamin,N.Y.(1975).

-Bortignon, P.F., Broglia, R.A., Bes, D.R. y Liotta, R.J., Phys. Rep. 30C(1977)307.

-Brink, D.M., Proceedings de la escuela de verano (1984) de Erice Frontiers in Nuclear Physics, Plenum Press,(1985).

-Broglia, R.A. y Winther, Aa., Heavy Ion Reactions I, Benjamin, (1981).

-Broglia, R.A., Barranco, F. y Gallardo, M., Proceedings of the Niels Bohr Centenial Conference, Copenhagen, May 20-24, (1985)193.

-Broglia, R.A., Diebel, M., Barranco, F, y Frauendorf, S., Proceedings of the XXIII International Winter Meeting on Nuclear Physics, Bormio, Italia, (1985a).

-Broglia, R.A. y Barranco, F., International Conference on Fusion Reactions Bellow the Coulomb Barrier, MIT, June 13-15, (1984).

-Broglia, R.A., Proceedings of the Hirscheeg Workshop, (1985).

-Dasso, C.H., Landowne, S. y Winther, Aa., Nucl. Phys. A405(1983)381.

-De-Shalit, A. y Talmi, I., Nuclear Shell Theory, Academic Press, N.Y., (1975).

-Endt, P.M., At. Data Nucl. Data Tables 23(1979)3,547.

-Esbensen, H., Nucl. Phys. A352(1981)147.

-Esbensen, H. y Bertsch, G.F., Phys. Rev. C28(1983)355.

-Fiolhiais, C.,Proceedings de la escuela de verano Theory of Nuclear Structure and Reactions, La Rábida, Huelva, (1985).

-Ford, K.W., Hill, D.L., Wakano, M. y Wheeler, J.A., Annals of Physics 7(1959)239.

-Gales, S., Houraui, E., Houssonnois, M., Schapira, J.P., Stab, L. y Vergnes, M., Phys. Rev. Lett. 53(1984)759.

-Gogny, D., Lecture Notes in Physics 108(1979)88.

-Janouch, F.A. y Liotta, R., Phys. Rev. C25(1982)2123.

-Khodel, V.A., Platonov, A.P. y Saperstein, E.E., J. Phys. G, Nucl. Phys. 8(1982)967.

-Koonin, S.E., International Conference on Fusion Reactions Below the Coulomb Barrier, MIT, June 13-15, (1984).

-Landowne, S., International Conference on Fusion Reactions Below the Coulomb Barrier, MIT, June 13-15, (1984).

-Landowne, S. y Dasso, C.H., (1985) (será publicado).

-Lederer, S. et al., Table of Isotopes, Willey Interscience, (1978).

-Lefort, M., Heavy Ion Collisions, ed. R. Bock, Vol. 2, North Holland, Amsterdam, (1981)45.

-Mahaux, C., Bortignon, P.F., Broglia, R.A. y Dasso, C.H., Phys. Rep. 120(1985)1.

-Mang, H.J., Ann. Rev. Nucl. Sci. 14(1964)1.

-MIT, International Conference on Fusion Reactions Below the Coulomb Barrier, MIT, June 13-15, (1984).

-Mottelson, B.R., Proceedings de L'école de Physique Théorique Les Houches, Dunod, (1958).

-Moya de Guerra, E., Phys. Rev. Lett. 48(1982)922.

-Nilsson, S.G., Tsang, C.F., Sobiczewski, A.S., Szymanski, Z., Wycech,S., Gustafson, C., Lamm, I., Möller, P. y Nilsson, B., Nucl. Phys. A131(1969)1.

-Reinhard, P.G. y Drechsel, D., Z. Physik A290(1979)85.

-Rose, H.J. y Jones, G.A., Nature 307(1984)245.

-Rowe, D.J., Nuclear Collective Motion, Methuen and Co. Ltd., (1970).

-Tonozuka, I. y Arima, A., Nucl. Phys. A323(1979)45.

-Ulrickson, M., Hartwig, W., Benczer-Koller, N., Mac Donald, J.R. y Tape, J.W., Phys. Rev. C13(1976)536.

-Warroquier, M., Heide, K. y Wenes, G., Nucl. Phys. A404(1983)269.

-Wohlfart, H.D., Shera, E.B., Hoehn, M.V., Yamazaki, Y., Fricke, G. y Steffen, R.M., Phys. Lett. 73B(1978)131.

-Wohlfart, H.D., Shera, E.B., Hoehn, M.V., Yamazaki,Y. y Steffen,R.M., Phys. Rev. C23(1981)533.

-Wong, C.Y., Phys. Rev. 31(1973)766.

-Wu, C.S. y Wilets, L., Ann. Rev. Nucl. Science 19(1969)527.

D. Francisco Barranco Paulano

"Estudio de las Fluctuaciones y Correlaciones en el Estado Fundamental del Núcleo".

8 febrero 86

UNIVERSIDAD DE SEVILLA
BIBLIOTECA
FACULTAD DE FISICA