

T. S. - 434

Estudio de fenómenos resonantes en algunos modelos estocásticos sencillos

UNIVERSIDAD DE SEVILLA
SECRETARÍA GENERAL

Queda registrada esta Tesis Doctoral
al folio 50 número 150 del libro
correspondiente.

Sevilla,

11-10-96
El Jefe del Negociado de Tesis.

Rosa de la Hita

Memoria presentada por Jesús Casado Pascual
para optar al grado de Doctor en Física.

Director: Dr. José Javier Brey Ábalo,
Catedrático de Física Teórica de la Universidad de Sevilla.

J. Casado Pascual

Índice

1	Introducción	9
2	Revisión	12
2.1	Introducción	12
2.2	El fenómeno de la resonancia estocástica	14
2.3	Comportamiento cooperativo en un proceso de Wiener modulado periódicamente	21
2.4	El problema de los tiempos de escape en presencia de campos que dependen periódicamente del tiempo	29
2.5	El fenómeno de la activación resonante	33
3	Activación resonante en un modelo cinético simple	40
3.1	Introducción	40
3.2	Descripción del modelo	41
3.3	Variantes y generalizaciones del modelo	48
3.4	Discusión	56
4	Comportamiento resonante en problemas de tiempo de primer paso sobre una red fluctuante	57
4.1	Introducción	57
4.2	Segmento de línea con dos fronteras absorbentes	59
4.3	Segmento de línea con una frontera absorbente y otra reflectante	67
4.4	Discusión	72
5	Comportamiento resonante en un proceso de Poisson sometido a una señal periódica	74
5.1	Introducción	74

5.2	Descripción del modelo	76
5.3	Función de distribución de tiempos de primer paso	79
5.4	Comportamiento resonante del tiempo medio de primer paso	87
5.5	Densidad de potencia espectral	96
5.6	Discusión	108
6	Conclusiones	112
A	Cálculo del MFPT para el modelo simétrico con condiciones iniciales arbitrarias de la posición y del estado de la red	114
B	Cálculo de la expresión (4.59)	121
C	Resolución de la Ec. (5.1)	124
D	Análisis asintótico de la FPTDF de la sección 5.3	126
E	Localización de los picos de la FPTDF de la sección 5.3	132
F	Obtención de la expresión (5.56)	138
G	Análisis asintótico de la expresión (5.60) para $N \gg 1$	144

Lista de figuras

2.1	Potencial biestable débilmente modulado por una fuerza periódica. La Fig. (a) corresponde a instantes de tiempo en los que la fuerza periódica toma su valor máximo (positivo), es decir, a $t = (4n + 1)\pi/(2\omega)$, la (b) a aquéllos en los que toma su valor mínimo (negativo), esto es, a $t = (4n + 3)\pi/(2\omega)$, y la (c) a instantes en los que la fuerza se anula, es decir, a $t = \pi n/\omega$. En las expresiones anteriores n es un cierto número entero.	16
2.2	Comportamiento cualitativo de la PSD frente a la frecuencia para un potencial biestable simétrico. Obsérvese los picos que aparecen en los armónicos impares de la frecuencia ω	18
2.3	Comportamiento cualitativo de la SNR frente a la intensidad del ruido, D . Para una cierta intensidad crítica aparece un máximo global en la SNR.	19
2.4	Densidad de probabilidad de tiempos de permanencia, $P(T)$, frente a T medido en unidades de $T_0/2$, siendo $T_0 = 2\pi/\omega$	20
2.5	Comportamiento de la FPTDF frente al tiempo escalado t/T_0 para el caso $q = 0$ (un único máximo) y $q = 0.03$ (estructura multiplicada), con arrastre $\mu = 0.065$ (líneas finas) y $\mu = 0.1$ (líneas gruesas). El resto de los parámetros toman en todas las curvas los valores $a = 20$, $\omega = 0.1$ y $D = 0.2$	24
2.6	Altura de los picos $n = 7, 6, 5, 4$ y 3 (de izquierda a derecha), frente a la intensidad del ruido D . El resto de los parámetros toman en todas las curvas los valores $a = 20$, $q = 0.04753$, $\mu = 0.055$ y $\omega = 0.2$	25

- 2.7 Comportamiento antirresonante del pico $n = 3$ de la FPTDF para valores de la amplitud del estímulo periódico $g = 0$ (curva inferior), $g = 0.025$ (curva intermedia) y $g = 0.05$ (curva superior). La frecuencia ω se ha elegido de forma que el pico $n = 3$ sea el máximo de la distribución, y el resto de los parámetros toman en todas las curvas los valores $\alpha = 20$ y $\mu = 0.065$ 26
- 2.8 $S(\Omega = \omega)$ frente al arrastre μ para $\omega = 0.075, 0.1, 0.15, 0.2$ (de abajo a arriba). Las líneas continuas corresponden a $g = 0.025$ y las de puntos a $g = 0$. El resto de los parámetros toman en todas las curvas los valores $\alpha = 20$ y $D = 1$ 28
- 2.9 Dependencia respecto a la frecuencia ω del tiempo de permanencia en el segmento de línea $(0, L)$, para un camino aleatorio monodimensional sobre el que actúa un campo sinusoidal. El tamaño del segmento es $L = 50$. Las amplitudes del campo toman los valores $\epsilon = 0.05$ (\diamond), $\epsilon = 0.1$ (\circ) y $\epsilon = 0.3$ (\bullet). 31
- 2.10 Dependencia de $\langle n(\epsilon, \omega) \rangle$ respecto a la amplitud ϵ , para el valor $\alpha = 25$ y tres valores de la frecuencia ω . La línea de puntos pequeños corresponde al valor $\omega = 0.25$, la de puntos grandes a $\omega = 0.15$ y la continua a $\omega = 0.05$ 32
- 2.11 Esquema del modelo. La altura de la barrera de potencial lineal a trozos fluctúa entre los valores $E_0 + \Delta E$ y $E_0 - \Delta E$ con probabilidad de transición por unidad de tiempo γ 34
- 2.12 MFPT frente a la probabilidad de transición por unidad de tiempo para los valores de los parámetros $E_{\pm} = \pm 8T$ 37
- 2.13 Esquema cinético asociado al problema de la barrera fluctuante. 39
- 3.1 Esquema del modelo cinético. El estado de la sustancia intermedia B fluctúa entre B^+ y B^- con una probabilidad de transición por unidad de tiempo γ 42
- 3.2 MFPT frente a γ para el modelo esquematizado en la Fig. 3.1. Los valores de los parámetros son $k_1 = k_2 = k_3 = 1$ y la condición inicial es $a = 1/2$ 47
- 3.3 Variantes del modelo cinético discutido en la sección 3.2. 49
- 3.4 MFPT frente a γ para el modelo representado en la Fig. 3.3(a) y los mismos valores de los parámetros que en la Fig. 3.2. 50
- 3.5 MFPT frente a γ para el modelo representado en la Fig. 3.3(b) y los mismos valores de los parámetros que en la Fig. 3.2. 52

3.6 MFPT frente a γ para la difusión de una partícula sometida a una fuerza externa fluctuante, entre los nudos $n = 0$ y $n = 2$ de una red unidimensional. Los valores de los parámetros son $\alpha = 0.8$, $\lambda_+ = 0.2$ y $\lambda_- = 0.1$ 55

4.1 Esquema de la red fluctuante. 59

4.2 Logaritmo neperiano del MFPT en función del logaritmo neperiano de γ para un segmento de red con dos fronteras absorbentes, y tres tipos de condiciones iniciales. El número de nudos es $N = 100$, y el tiempo se mide en unidades k^{-1} . Las líneas continuas corresponden a la Ec. (4.42) con $l = 0$ (línea delgada), y $l = 25$ (línea gruesa). La línea de puntos corresponde a la Ec. (4.43). Para las dos líneas continuas el estado inicial de la red es $\alpha = 1/2$ 66

4.3 Logaritmo neperiano del MFPT en función del logaritmo neperiano de γ para un segmento de red con una frontera absorbente y la otra reflectante. El número de nudos y la unidad de tiempo son los mismos que en la Fig. 4.2. La condición inicial de la red es $\alpha = 1/2$ 70

4.4 Lo mismo que en la Fig. 4.3 pero con la condición inicial para la red $\alpha = 1$ 71

5.1 FPTDF frente al tiempo escalado t/T_0 , donde $T_0 = 2\pi/\omega$. En todas las curvas $N = 50$, $p = 1$, $\omega = 2$ y $\phi = \pi/2$. Para la línea gruesa $\epsilon = 0$, Ec. (5.14), y para las otras dos $\epsilon = 0.3$. La línea fina representa la expresión exacta, Ec. (5.11), y la de puntos la asintótica, Ec. (5.16). 81

5.2 FPTDF frente al tiempo para los mismos valores que en la Fig. 5.1, con la única diferencia de que ahora $\omega = 0.01$ en todas las curvas. La línea de puntos corresponde a la Ec. (5.17). 81

5.3 Altura de los picos de la FPTDF frente a p para $N = 20$, $\omega = 2$, $\epsilon = 0.2$ y $\phi = \pi/2$. De izquierda a derecha las curvas corresponden a los picos de subíndices $l = 5$, $l = 4$ y $l = 3$, respectivamente. 85

5.4	Altura de los picos de la FPTDF frente a p para los mismos valores de los parámetros que en la Fig. 5.3. De izquierda a derecha las curvas corresponden a los picos de subíndices $l = 35$, $l = 34$ y $l = 33$, respectivamente.	85
5.5	MFPT frente a la frecuencia del estímulo para $\epsilon = 0.1$ (línea continua) y $\epsilon = 0.3$ (línea de puntos). Para las dos curvas $N = 10$, $p = 1$ y $\phi = 0$	89
5.6	MFPT frente a la frecuencia del estímulo para los mismos valores de los parámetros que en la Fig. 5.5, con la única diferencia de que ahora $N = 50$	89
5.7	MFPT frente a la frecuencia del estímulo para $\epsilon = 0.1$ (línea continua) y $\epsilon = 0.3$ (línea de puntos). Para las dos curvas $N = 50$, $p = 1$, y $\phi = \pi/2$	90
5.8	Frecuencia de resonancia, ω^* , frente a N^{-1} para distintos valores de la amplitud ϵ . Empezando por arriba, las curvas corresponden a $\epsilon = 0.05, 0.2, 0.4, 0.6$ y 0.9 , respectivamente. Para todas ellas $\phi = 0$ y $p = 1$	92
5.9	(Primer) mínimo del MFPT, τ^* , frente a N para los mismos valores de ϵ , ϕ y p que en la Fig. 5.8. Empezando por arriba, las curvas corresponden a $\epsilon = 0.9, 0.6, 0.4, 0.2$ y 0.05 , respectivamente.	92
5.10	MFPT frente a ϵ para $\omega = \omega_1 + 2 \cdot 10^{-3}$, $\omega_1 + 10^{-3}$, ω_1 y $\omega_1 - 10^{-3}$ (empezando por la curva de arriba y terminando por la de abajo). Para las tres curvas $N = 30$, $p = 1$ y $\phi = \pi/2$	95
5.11	MFPT frente a ϵ para $\omega = \omega_2 - 2 \cdot 10^{-3}$, $\omega_2 - 10^{-3}$, ω_2 y $\omega_2 + 10^{-3}$ (empezando por la curva de arriba y terminando por la de abajo). Los valores del resto de los parámetros son los mismos que en la Fig. 5.10.	95
5.12	MFPT frente a la frecuencia para los mismos valores de los parámetros que en la Fig. 5.6 y la condición inicial (5.51).	96
5.13	PSD exacta (líneas continuas) y aproximación (5.62) (líneas de puntos) frente a la frecuencia reescalada $N\Omega/(2\pi p)$, para $N = 50$, $\epsilon = 0$, $p = 1$ (curvas inferiores) y $p = 2$ (curvas superiores). La delta del origen ha sido suprimida.	102
5.14	Igual que en la Fig. 5.13 pero para $N = 100$	102

- 5.15 PSD exacta (líneas continuas) y aproximación (5.62) (líneas de puntos) frente a la variable p reescalada, $2\pi p/(N\Omega)$, para $N = 50$, $\epsilon = 0$, $\Omega = 1$ (curvas inferiores) y $\Omega = 2$ (curvas superiores). 104
- 5.16 PSD frente a Ω para $N = 50$ y $p = 1$. Con puntos se ha representado el caso $\epsilon = 0$ (expresión (5.60)). Las curvas de trazo continuo corresponden a $\epsilon = 0.2$, $\omega = 0.5$, $\phi = \pi/2$ (línea gruesa) y $\phi = 0$ (línea delgada). 106
- 5.17 $S(\Omega = \omega)$ frente a $N\omega/(2\pi p)$ para $N = 50$ y $p = 1$. Con línea continua se ha representado el caso $\epsilon = 0.2$ y $\phi = \pi/2$. La línea de puntos corresponde al caso $\epsilon = 0$, esto es, a $S_0(\Omega = \omega)$. 107
- 5.18 $S(\Omega = \omega, p)$ frente a $2\pi p/(N\omega)$ para $N = 50$, $\omega = 0.5$ (curvas inferiores) y $\omega = 1$ (curvas superiores). Con línea continua se ha representado el caso $\epsilon = 0.2$ y $\phi = \pi/2$. La línea de puntos corresponde al caso $\epsilon = 0$, esto es, a $S_0(\Omega = \omega, p)$ 109

Lista de tablas

- 5.1 Pendientes a y a' para los mismos valores de ϵ , ρ y ϕ que en las Figs. 5.8 y 5.9. Los coeficientes a_{ex} y a'_{ex} se han calculado numéricamente a partir de la expresión (5.9), mientras que a_{ap} y a'_{ap} han sido obtenidos resolviendo las Ecs. (5.45) y (5.46). . . 93

Capítulo 1

Introducción

La necesidad de introducir términos de ruido es una característica común a un gran número de sistemas físicos. De hecho, son muchos los sistemas que están sometidos a interacciones externas o internas de las que se desconocen los detalles y que, en consecuencia, deben ser tratadas como ruido.

Por regla general, el ruido presente en los sistemas dinámicos ha sido considerado algo negativo. Pensemos, por ejemplo, en el ruido de fondo que acompaña a una grabación musical. Por este motivo, tradicionalmente los esfuerzos han ido encaminados a minimizar, en la medida de lo posible, sus efectos “desagradables”. Sin embargo, durante los últimos años se ha descubierto que el ruido también puede jugar un papel beneficioso en el comportamiento de determinados sistemas estocásticos.

Quizás, el fenómeno más representativo de este tipo de efectos sea el conocido con el nombre de *resonancia estocástica*, consistente básicamente en el aumento que experimenta la respuesta a una pequeña señal periódica como consecuencia del ruido presente en ciertos sistemas no lineales. Como veremos en el capítulo siguiente, el rango de aplicabilidad de este fenómeno se extiende a una amplia gama de disciplinas (Física, Biología, Climatología, etc.). También se han encontrado efectos resonantes similares, aunque de naturaleza diferente, en determinados sistemas lineales. La característica común que presentan todos ellos es que una cierta magnitud, que depende del problema considerado, se hace máxima o mínima para un valor determinado de la intensidad del ruido. Si, por cualquier motivo, resulta interesante que esta magnitud tome un valor lo más grande posible (o en otros casos, lo más pequeño posible), existirá una intensidad de ruido óptima que beneficiará el

efecto que estamos buscando.

La mayoría de los modelos relacionados con este tipo de problemas presentan dificultades matemáticas tales, que hacen imposible un tratamiento analítico exacto. Por ello, para su estudio es necesario hacer uso de aproximaciones, de técnicas numéricas o de simulación. Así pues, parece interesante elaborar modelos que presenten algún tipo de comportamiento resonante y que, por su sencillez, puedan resolverse de forma exacta. De esta manera, se podrán identificar más claramente los mecanismos que conducen a este tipo de conducta. Éste es precisamente el propósito de esta Memoria. De hecho, en los capítulos 3, 4 y 5 se estudian modelos de una estructura suficientemente sencilla como para que sea viable un tratamiento analítico exacto, y que, bajo ciertas condiciones, muestran un comportamiento resonante análogo al de sistemas más complicados. Todos estos modelos tienen en común el hecho de que están formulados en base a una ecuación maestra. El orden en el que se exponen estos modelos coincide con el que se siguió durante la investigación que ha dado lugar a este trabajo, ya que consideramos que es el más apropiado desde un punto de vista de presentación.

La organización de esta Memoria es la siguiente: el capítulo 2 está dedicado a revisar aquellos modelos que están más estrechamente relacionados con los que estudiamos en los capítulos siguientes. También proponemos una clasificación de los mismos atendiendo al tipo de interacción que produce el efecto resonante. Se pone un énfasis especial en la descripción de las características fundamentales de la resonancia estocástica y de la activación resonante.

En el capítulo 3 estudiamos un modelo cinético sencillo que, bajo ciertas circunstancias, muestra un comportamiento resonante. La característica más importante de este modelo es que para transformarse el reactivo en producto tiene que pasar previamente por una sustancia intermedia que fluctúa entre dos posibles estados. Dada la simplicidad del modelo es posible obtener una solución exacta para el tiempo medio de permanencia en el estado reactivo y, a partir de ella, mostramos que, para ciertas condiciones iniciales, éste presenta un mínimo como función de la probabilidad de transición entre los estados de la sustancia intermedia. Así pues, el estudio de este modelo nos permite poner de manifiesto el importante papel que juegan las condiciones iniciales en la aparición de un comportamiento de este tipo. También proponemos algunas versiones modificadas del modelo original que no presentan comportamiento resonante. De aquí se deduce claramente cuál es el origen

de la resonancia en estos sistemas.

En el capítulo 4 se analiza el problema del movimiento de una partícula en un segmento de red monodimensional que fluctúa entre dos estados. Probamos que las condiciones de frontera son decisivas para la aparición de comportamiento resonante. En concreto, vemos que si se colocan fronteras absorbentes en cada uno de los extremos, el tiempo de permanencia de la partícula en el segmento es una función monótona creciente de la probabilidad de transición por unidad de tiempo entre los estados de la red. Por el contrario, si se sustituye una de las fronteras absorbentes por una reflectante, esta función presenta un mínimo para un cierto valor de la probabilidad de transición de la red. Se muestra también que la existencia del mínimo está directamente relacionada con la presencia de dos mecanismos opuestos que compiten.

El capítulo 5 trata de un modelo parecido al del capítulo anterior pero en el que las probabilidades de transición entre los nudos de la red por unidad de tiempo, en lugar de fluctuar aleatoriamente, varían sinusoidalmente en el tiempo. Obtenemos expresiones explícitas para la función de distribución de tiempos de primer paso y para el tiempo medio de permanencia en el segmento. Al analizar detenidamente la primera de estas cantidades se comprueba que, en un determinado régimen de valores de los parámetros, ésta presenta una estructura multiplicada análoga a la de los sistemas biestables en presencia de ruido. A su vez, el tiempo medio de permanencia exhibe un comportamiento resonante cuando se le expresa en función de la frecuencia del estímulo periódico. Para finalizar el capítulo, se estudia la densidad de potencia espectral que se obtiene al introducir en el modelo un mecanismo de reinyección muy sencillo.

Las conclusiones generales más importantes de esta Memoria se presentan en el capítulo 6. Finalmente, en los apéndices se tratan algunas cuestiones técnicas que no se analizan en los capítulos anteriores.

Capítulo 2

Revisión

2.1 Introducción

Como es bien sabido, el fenómeno de la resonancia en sistemas deterministas se caracteriza básicamente por un crecimiento brusco de la amplitud de determinadas magnitudes oscilatorias (la amplitud de las oscilaciones mecánicas en la resonancia mecánica, la de la intensidad de corriente en la resonancia eléctrica, etc.) que tiene lugar cuando la frecuencia de un estímulo externo se acerca a cierto valor crítico. En los sistemas estocásticos se pueden observar fenómenos análogos, pero en los que el ruido presente juega un papel fundamental. También en estas situaciones aparecen ciertas magnitudes (cociente señal-ruido, tiempo medio de permanencia en una determinada región, etc.) que muestran máximos o mínimos cuando se las representa frente a la frecuencia de la señal, en algunos casos, o frente a algún parámetro característico del ruido, en otros. Por analogía con la resonancia en sistemas deterministas, denominaremos a este tipo de comportamiento *fenómenos resonantes en sistemas estocásticos*.

Dada la amplia variedad de sistemas estocásticos que presentan algún tipo de fenómeno resonante, es conveniente realizar en primer lugar una clasificación de los mismos. La que proponemos en este apartado divide a los sistemas en dos grandes grupos, atendiendo al tipo de interacción que produce la resonancia. En el primero, incluiremos aquéllos en los que el efecto resonante surge como consecuencia de la interacción entre un término de fuerza periódica y el ruido presente en el sistema. En el segundo, con-

sideraremos los sistemas en los que la resonancia es debida a la interacción entre dos contribuciones de ruido, es decir, la fuerza determinista del grupo anterior se sustituye por un término aleatorio que, al entrar en competencia con el ruido presente, produce un determinado efecto resonante.

La bibliografía relacionada con la aparición de fenómenos resonantes en sistemas estocásticos es muy extensa y, por ello, en este capítulo de revisión no se pretenderá hacer un estudio exhaustivo de la misma. En su lugar, tan sólo se analizarán de forma detallada aquellos problemas que están más estrechamente relacionados con el trabajo que desarrollaremos en el resto de la Memoria, de forma que ésta sea, en la medida de lo posible, autocontenida.

Los apartados de este capítulo se pueden dividir en dos partes. La primera, formada por las secciones 2.2, 2.3 y 2.4, estará dedicada a problemas que pueden encuadrarse dentro del primer grupo de la clasificación anterior. En concreto, en la sección 2.2 se analizará el fenómeno de la resonancia estocástica. En ella, describiremos brevemente las características fundamentales de este fenómeno, restringiéndonos al caso típico de una partícula sobreamortiguada que se mueve en un potencial biestable. En las referencias [1] y [2] pueden encontrarse revisiones más detalladas sobre este tema. Las secciones 2.3 y 2.4 estarán dedicadas al estudio de dos modelos más sencillos, ya que sus dinámicas son lineales, que también presentan comportamiento resonante. En concreto, en la sección 2.3 se analizará un proceso de Wiener modulado periódicamente en el tiempo, propuesto por A. R. Bulsara, S. B. Lowen y C. D. Rees [3], en el que la interacción entre el ruido y un estímulo periódico provoca un comportamiento de la función de distribución de tiempos de primer paso ("first passage times density function" FPTDF) y de la densidad de potencia espectral ("power spectral density" PSD) análogo al de los sistemas con resonancia estocástica. A su vez, en la sección 2.4 se tratará un modelo de camino aleatorio sometido a un campo dependiente periódicamente del tiempo, debido a Weiss y sus colaboradores [4, 5], en el que el tiempo medio de escape ("mean first passage time" MFPT) exhibe un comportamiento resonante.

En la segunda parte, sección 2.5, trataremos modelos pertenecientes al segundo grupo de la clasificación. En primer lugar, se estudiará el problema de la activación resonante a través de una barrera fluctuante propuesto por C. R. Doering y J. C. Gadoua [6, 7]. Veremos también el análisis que realizaron de este mismo problema Martin Bier y R. Dean Astumian [8] para el caso particular de barrera grande y fluctuaciones pequeñas, y comprobaremos que

el fenómeno de la activación resonante no puede explicarse a partir de la aproximación cinética de este modelo. Finalmente, se analizará una modificación no markoviana del modelo cinético anterior, debida a C. Van den Broeck [9], que presenta un comportamiento resonante del MFPT análogo al de la barrera fluctuante.

2.2 El fenómeno de la resonancia estocástica

El fenómeno resonante en sistemas estocásticos que ha sido más ampliamente estudiado en los últimos años quizás sea el de la *resonancia estocástica*. Básicamente consiste en el aumento de una pequeña señal periódica inducido por el ruido en sistemas no lineales. Este fenómeno fue propuesto originalmente como una posible explicación de una persistente paradoja de la climatología [10, 11, 12]. Las glaciaciones terrestres suceden con una cierta periodicidad (aproximadamente cada 100.000 años) que coincide con la de los cambios de los parámetros de la órbita terrestre alrededor del Sol. No obstante, estas desviaciones por sí solas no podían causar una modificación tan drástica de la temperatura. De hecho, otros muchos factores sujetos a causas muy diversas, como la oscilaciones de la cantidad de calor recibidas del Sol y almacenadas en la Tierra, ejercen una mayor influencia que el anterior. Los autores antes mencionados sugirieron que estas grandes fluctuaciones, que pueden considerarse como ruido, podían intensificar de alguna forma los pequeños efectos de las variaciones de los parámetros orbitales, produciendo periódicamente las glaciaciones.

La teoría sobre la resonancia estocástica fue confirmada experimentalmente por primera vez utilizando el llamado excitador de Schmitt [13], en el que señales periódicas débiles que recorren un circuito son amplificadas por el ruido aleatorio de fondo. Con posterioridad, se descubrió que este mismo fenómeno también tenía lugar en un laser de anillo [14]. Actualmente, su campo de aplicabilidad se ha ampliado al dominio de la Biología, y más concretamente al estudio de los mecanismos de percepción de pequeñas señales en ambientes ruidosos de determinados animales como, por ejemplo, un tipo de cangrejo de río (el *Procambarus clarkii*). Este cangrejo posee en su cola móvil células mecano-receptoras capaces de captar pequeñas señales ondulatorias aprovechándose para ello del ruido de fondo presente [15].

El mecanismo de la resonancia estocástica puede entenderse fácilmente

mediante un ejemplo mecánico sencillo. Consideremos una partícula sobreamortiguada que se mueve en un potencial biestable $U(x)$. Sobre esta partícula se aplica una fuerza periódica "débil" independiente de la posición. En la frase anterior, "débil" quiere decir que esta fuerza por sí sola no es capaz de provocar la transición de la partícula de un pozo del potencial al otro, de forma que, en ausencia de ruido, el movimiento de la partícula consistiría en pequeñas oscilaciones alrededor del mínimo del pozo en el que fue colocada inicialmente. Al sumar la energía potencial dependiente del tiempo de la que deriva esta fuerza con la correspondiente al doble pozo, el efecto resultante es una subida y una bajada alternativa de los pozos en relación a la barrera (véase Fig. 2.1). Por último, supondremos que sobre la partícula también actúa una fuerza estocástica o ruido que consideraremos gaussiano y blanco de media nula. A diferencia de lo que sucedía con la fuerza periódica, este ruido, por sí solo, sí es capaz de inducir saltos irregulares entre los pozos. La ecuación diferencial estocástica que describe la dinámica de esta partícula sería

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{\partial}{\partial x}U(x, t) + F(t), \quad (2.1)$$

donde

$$U(x, t) = U(x) + \epsilon x \sin(\omega t), \quad (2.2)$$

y

$$\begin{aligned} \langle F(t) \rangle &= 0, \\ \langle F(t)F(s) \rangle &= 2D\delta(t-s). \end{aligned} \quad (2.3)$$

Las constantes D y ϵ pueden considerarse como medidas de la intensidad del ruido y de la fuerza periódica, respectivamente.

La dificultad fundamental que presenta este problema es que, debido a la fuerza periódica dependiente del tiempo, el proceso estocástico es no estacionario y, por lo tanto, la ecuación de Fokker-Planck asociada a la ecuación de Langevin (2.1) no se puede resolver exactamente. Por este motivo, se han desarrollado diversos métodos aproximados para abordar este problema. Estos métodos se pueden clasificar en adiabáticos y no adiabáticos. La aplicación de la aproximación adiabática al problema de la resonancia estocástica fue propuesta originalmente por Wiesenfeld y McNamara [16]. La hipótesis fundamental en la que se basa esta aproximación consiste en suponer que el potencial varía en el tiempo de forma suficientemente lenta, en comparación

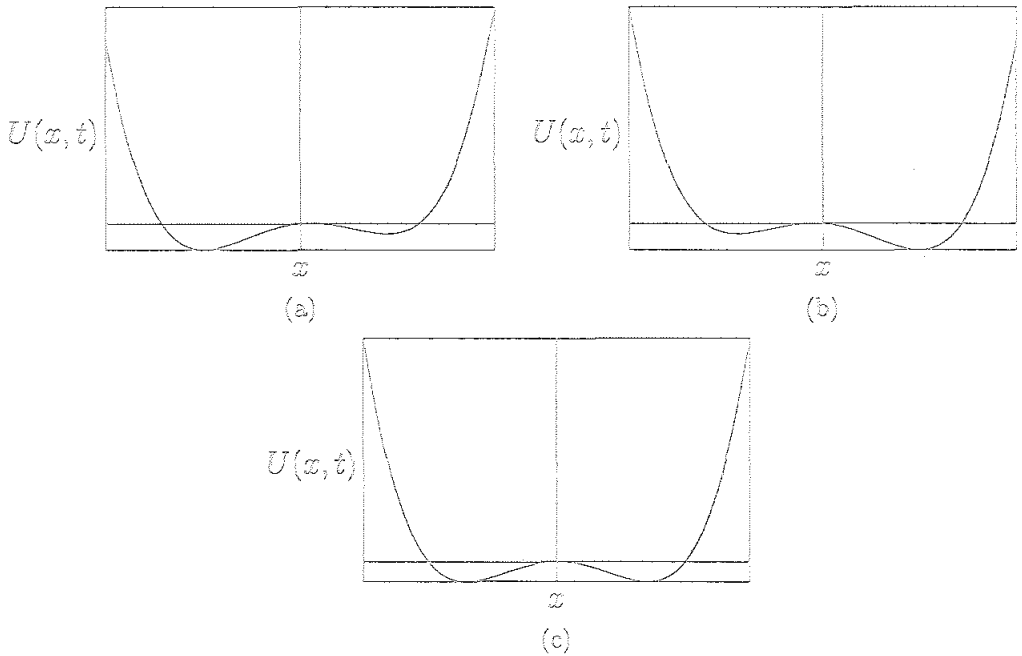


Figura 2.1: Potencial biestable débilmente modulado por una fuerza periódica. La Fig. (a) corresponde a instantes de tiempo en los que la fuerza periódica toma su valor máximo (positivo), es decir, a $t = (4n + 1)\pi/(2\omega)$, la (b) a aquéllos en los que toma su valor mínimo (negativo), esto es, a $t = (4n + 3)\pi/(2\omega)$, y la (c) a instantes en los que la fuerza se anula, es decir, a $t = \pi n/\omega$. En las expresiones anteriores n es un cierto número entero.

con el resto de los tiempos característicos del problema, de manera que la densidad de probabilidad se ajusta "adiabáticamente" a la forma que presenta el potencial en cada instante de tiempo. Los tiempos característicos antes mencionados son el inverso de la probabilidad de transición de Kramers para el potencial sin perturbar, y el inverso de la curvatura en el máximo y en los mínimos del potencial. Basándose en esta hipótesis, Wiesenfeld y McNamara proponen una ecuación maestra para las probabilidades de que la partícula se encuentre en el pozo de la derecha o en el de la izquierda. La resolución de esta ecuación maestra les permite calcular las propiedades estadísticas del sistema considerado (función de autocorrelación de posiciones, densidad de potencia espectral, etc.). Entre los métodos no adiabáticos se encuentran la teoría de Hänggi y Jung [17, 18], y la teoría perturbativa de Marchesoni y colaboradores [19, 20, 21]. En lugar de analizar estos métodos, haremos una descripción de los resultados generales más importantes a los que conducen.

La magnitud que normalmente se utiliza para cuantificar la coherencia que aparece en la respuesta del sistema es la PSD, $S(\Omega)$, que se define básicamente como la transformada de Fourier de la función de autocorrelación de posiciones (obsérvese que Ω es la frecuencia de la transformada mientras que ω es la de la fuerza periódica). Cuando el potencial, en ausencia de campo periódico, es simétrico, como el que aparece en la Fig. 2.1 (c), la PSD consiste en un ruido de fondo de tipo lorentziano con una serie de picos agudos que aparecen en los armónicos impares de la frecuencia ω de la señal periódica (véase la Fig. 2.2). Si el potencial no es simétrico aparecen picos pequeños adicionales en los armónicos pares [22, 23]. La altura del pico fundamental, $S(\omega)$, muestra un máximo cuando se la representa frente al ruido, D , correspondiendo éste al máximo efecto cooperativo entre el ruido y la fuerza periódica. A este tipo de comportamiento fue al que inicialmente se le llamó resonancia estocástica. Posteriormente, se ha preferido utilizar otra magnitud, el cociente señal-ruido ("signal-to-noise ratio" SNR), para caracterizar este fenómeno. La forma práctica de calcular la SNR (normalmente en decibelios) es mediante la expresión

$$\text{SNR} = 10 \log_{10}(S(\omega)/N), \quad (2.4)$$

donde N es el ruido lorentziano de fondo evaluado en la base del pico fundamental de la PSD. Al igual que sucede con la $S(\omega)$, la SNR muestra un máximo cuando se la representa frente a la intensidad del ruido D (véase la Fig. 2.3), aunque éste aparece para una intensidad ligeramente diferente

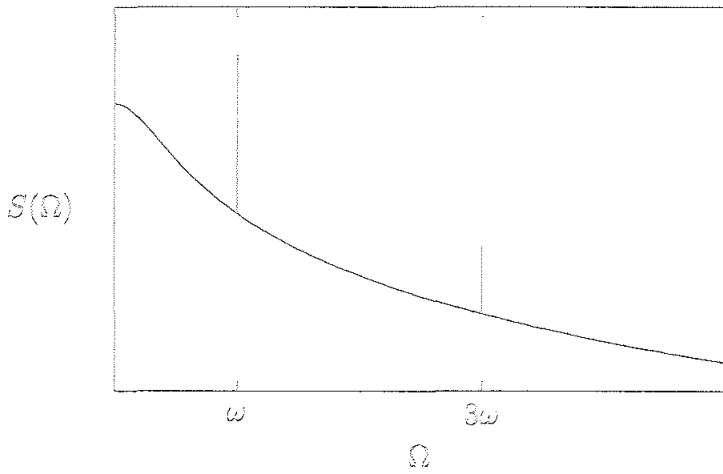


Figura 2.2: Comportamiento cualitativo de la PSD frente a la frecuencia para un potencial biestable simétrico. Obsérvese los picos que aparecen en los armónicos impares de la frecuencia ω .

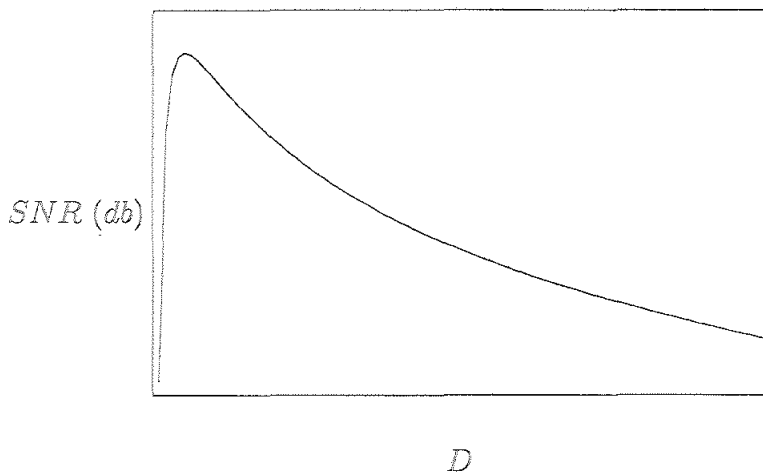


Figura 2.3: Comportamiento cualitativo de la SNR frente a la intensidad del ruido, D . Para una cierta intensidad crítica aparece un máximo global en la SNR.

a la correspondiente al máximo de $S(\omega)$. Para un sistema descrito por una dinámica lineal la SNR debería decrecer monótonamente al aumentar la intensidad del ruido. Así pues, un ingrediente esencial para la existencia de resonancia estocástica será la naturaleza no lineal del problema.

El comportamiento que hemos expuesto anteriormente se puede explicar fácilmente de forma intuitiva. Cuando la intensidad del ruido tiende a cero, $D \rightarrow 0$, la probabilidad de transición de un pozo a otro del potencial tiende a cero, ya que, como antes se mencionó, la fuerza periódica es demasiado débil para provocar este tipo de transiciones. Así pues, la coherencia de la respuesta del sistema tiende a desaparecer. Por otra parte, cuando la intensidad del ruido es demasiado grande esta coherencia también desaparece, ya que el movimiento de la partícula se hace completamente aleatorio. Entre estos dos límites hay un cierto valor de la intensidad del ruido que maximiza la coherencia.

Aunque el comportamiento de la SNR antes descrito es el que normalmente se utiliza como definición de la resonancia estocástica, existen otras

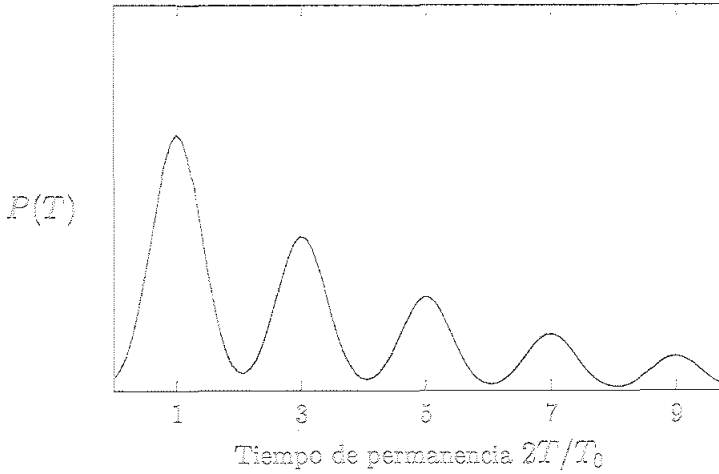


Figura 2.4: Densidad de probabilidad de tiempos de permanencia, $P(T)$, frente a T medido en unidades de $T_0/2$, siendo $T_0 = 2\pi/\omega$.

formas de caracterizar este fenómeno. Una posible descripción alternativa de la respuesta del sistema la proporciona la densidad de probabilidad de tiempos de permanencia de la partícula en uno de los pozos entre dos saltos consecutivos, $P(T)$. Como se observa en la Fig. 2.4, esta función muestra una serie de picos centrados en los múltiplos impares de $T_0/2$, donde $T_0 = 2\pi/\omega$. La altura de estos picos decrece exponencialmente y están superpuestos a un fondo que también decae exponencialmente. La interpretación de este tipo de comportamiento es bien sencilla: la máxima probabilidad de que la partícula se escape del pozo coincide con el primer máximo de la fuerza sinusoidal. Si la partícula no consigue escapar después del primer ciclo, tendrá que esperar a que esta fuerza alcance su siguiente máximo para maximizar su probabilidad de escape, y así sucesivamente. Como se pondrá de manifiesto en las secciones 2.3 y 5.3, esta estructura multiplicada no implica necesariamente la existencia de resonancia estocástica. Al representar la altura de los distintos picos de esta distribución, $P(nT_0/2)$ (con n natural e impar), frente a la intensidad del ruido D se observa un comportamiento análogo al que presentaba la SNR (Fig. 2.3), esto es, ésta alcanza un máximo para un valor

crítico del ruido que depende del pico considerado [18, 24]-[26]. Este mismo tipo de comportamiento aparece también cuando se la representa frente a la frecuencia ω de la fuerza periódica.

El fenómeno de la resonancia estocástica no se restringe únicamente al caso de sistemas biestables. Así, por ejemplo, Wiesenfeld y sus colaboradores [27] han demostrado la existencia de este fenómeno en la respuesta de un sistema muy sencillo, en el que una partícula se mueve hacia una barrera bajo la influencia de un ruido blanco y de una señal periódica débil (incapaz de provocar por sí sola el paso de la partícula a través de la barrera). Después de atravesar la barrera, la partícula es restituida de forma totalmente determinista a su posición inicial. Los resultados obtenidos a partir de este modelo ajustan bastante bien los datos experimentales correspondientes a las células mecano-receptoras del *Procambarus clarkii*. También se han encontrado resultados similares en determinados sistemas extendidos, compuestos por elementos con dinámicas no lineales acoplados entre sí y sometidos a una señal periódica débil y a un ruido de fondo (véase, por ejemplo, las referencias [28]-[31]).

2.3 Comportamiento cooperativo en un proceso de Wiener modulado periódicamente

En un sentido más amplio, el fenómeno de la resonancia estocástica descrito en la sección anterior puede considerarse como un proceso de umbral. La idea consiste básicamente en interpretar el paso por la cima de la barrera de potencial como el cruce de cierto umbral de excitación, que sólo puede realizarse en presencia de ruido. Surge entonces la pregunta de si es posible encontrar efectos cooperativos similares a los anteriormente analizados en sistemas más sencillos, descritos únicamente en términos del cruce de un cierto umbral, sin que esté asociado al paso de una barrera de potencial. Un ejemplo de este tipo de modelos es el estudiado recientemente por A. R. Bulsara, S. B. Lowen y C. D. Rees [3], motivados por el intento de modelar la respuesta de las neuronas sensoriales a señales periódicas deterministas en presencia de un ruido de fondo. Su punto de partida fue un caso particular del proceso de Ornstein-Uhlenbeck sometido a un estímulo periódico, descrito

por la ecuación

$$\frac{dx}{dt} = \lambda(u_r - x) + \mu + F(t) + q \cos(\omega t), \quad (2.5)$$

donde $x(t)$ representa el voltaje de la membrana de la célula. El parámetro μ es un término de arrastre positivo que provoca una tendencia en el potencial a crecer hasta un cierto valor umbral a , en el que se produce la emisión de un impulso, mientras que λ es una constante que gobierna el decaimiento del potencial hacia un valor de reposo u_r . El término de ruido $F(t)$ representa la contribución neta de todos los impulsos que actúan sobre la célula procedentes de las distintas sinapsis, y normalmente se considera gaussiano y δ -correlacionado de media nula y varianza D . Finalmente, el último sumando del segundo miembro da cuenta del estímulo periódico.

Los autores antes citados restringen su estudio al caso $\lambda = 0$. Además, consideran que en el valor umbral del voltaje, $x = a$, existe una frontera absorbente. Cada vez que la variable $x(t)$ cruza esta frontera absorbente, ésta vuelve a colocarse instantáneamente en el punto de partida $a_0 = 0$, eligiendo la fase de forma que el estímulo externo tome de nuevo su valor inicial. La ecuación de Fokker-Planck asociada a la ecuación de Langevin (2.5) con $\lambda = 0$ es

$$\frac{\partial}{\partial t} P(x, t) = -(\mu + q \cos(\omega t)) \frac{\partial P(x, t)}{\partial x} + \frac{D}{2} \frac{\partial^2 P(x, t)}{\partial x^2}, \quad (2.6)$$

donde $P(x, t)$ es la densidad de probabilidad de que el potencial tenga el valor x en el instante t . Esta ecuación esté sometida a la condición de que en $x = a$ existe una frontera absorbente. Haciendo el cambio de variables $y = x - \mu t - (q/\omega) \sin(\omega t)$ y aplicando el método de las imágenes, la Ec. (2.6) puede resolverse aproximadamente (para una discusión acerca de la validez del método utilizado pueden consultarse las referencias [32] y [33]), y a partir de la solución obtenida se puede calcular la FPTDF, $f(t)$, haciendo uso, para ello, de la definición

$$f(t) = -\frac{d}{dt} \int_{-\infty}^a dx P(x, t). \quad (2.7)$$

No vamos a presentar los resultados que se obtienen para estas dos cantidades (véase [3]), sino que discutiremos brevemente algunas de las propiedades más importantes que exhibe la FPTDF.

En el caso particular $q = 0$ (ausencia de estímulo periódico) el MFPT puede calcularse fácilmente a partir de la FPTDF, $f_0(t)$, obteniéndose

$$\bar{t} \equiv t_0 = \frac{a}{\mu}. \quad (2.8)$$

Derivando respecto al tiempo la expresión para $f_0(t)$, también es posible calcular el tiempo de escape más probable, es decir, el tiempo correspondiente al máximo de la FPTDF, resultando

$$t_m = \frac{3D}{2\mu^2} \left\{ \left[1 + \frac{4a^2\mu^2}{9D^2} \right]^{1/2} - 1 \right\}, \quad (2.9)$$

que, como puede observarse, depende de la intensidad del ruido. Al analizar las propiedades de la FPTDF, el acoplo entre las tres escalas de tiempo t_0 , t_m y $T_0 \equiv 2\pi/\omega$ jugará un papel muy importante.

Cuando $q > 0$, el MFPT también puede obtenerse mediante la integración de la $f(t)$. En este caso, considerando que la intensidad del estímulo periódico es suficientemente pequeña en comparación con el arrastre, el resultado que se obtiene es

$$\bar{T} = t_0 \left\{ 1 - \frac{(q/a\omega) \operatorname{sen}(\omega t_0)}{1 + (q/\omega) \operatorname{cos}(\omega t_0)} \right\}. \quad (2.10)$$

Nótese que, como es de esperar, en el límite de altas frecuencias $\bar{T} \rightarrow t_0$.

El comportamiento temporal de la FPTDF depende fuertemente del rango de frecuencias considerado. Así, por ejemplo, cuando la frecuencia del estímulo es muy pequeña, en el sentido de que $\omega \ll 2\pi/t_0$, la FPTDF presenta un único pico localizado aproximadamente en $t = t_m$. En este caso el movimiento está dominado por el ruido y el arrastre, y el MFPT viene dado por $\bar{T} \approx t_0(1 + q/\mu)^{-1}$. Al aumentar la frecuencia del estímulo aparecen picos adicionales en la FPTDF. De hecho, cuando $\omega \rightarrow 2\pi/t_0$, el pico dominante se aproxima a $t = T_0$, comenzando a aparecer otros picos más pequeños en las proximidades de $t = nT_0$, siendo $n > 1$ y entero. En concreto, cuando $\omega = 2\pi/t_0$, la FPTDF presenta un pico dominante en $t = T_0 = t_0$, y picos más pequeños en $t = nT_0$ ($n > 1$). Finalmente, para frecuencias mayores que $2\pi/t_0$, la FPTDF exhibe picos localizados en nT_0 , donde n es un entero positivo. En la Fig. 2.5, se muestra el comportamiento de la FPTDF para dos valores del arrastre μ . Obsérvese que al aumentar el término de arrastre la FPTDF se hace más estrecha. En la figura también se ha representado la

FPTDF para $q = 0$, encontrándose que ésta es la “envolvente” de la correspondiente a $q > 0$. De hecho, si se eligen los parámetros del problema de forma que $t_m = nT_0$, el pico n -ésimo es el más alto de la distribución.

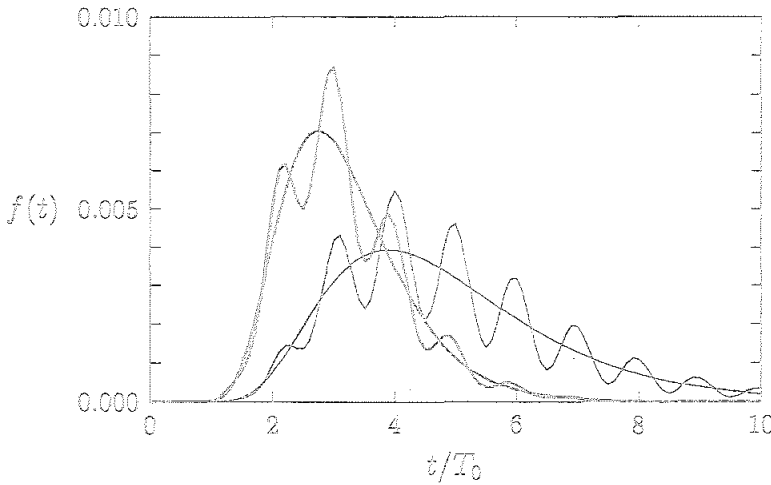


Figura 2.5: Comportamiento de la FPTDF frente al tiempo escalado t/T_0 para el caso $q = 0$ (un único máximo) y $q = 0.03$ (estructura multiplicada), con arrastre $\mu = 0.065$ (líneas finas) y $\mu = 0.1$ (líneas gruesas). El resto de los parámetros toman en todas las curvas los valores $a = 20$, $\omega = 0.1$ y $D = 0.2$.

Otra propiedad interesante que presenta la FPTDF es que, como se pone de manifiesto en la Fig. 2.6, la altura de los picos muestran un máximo cuando se la representa como función de la intensidad del ruido D . Además, para un valor dado de D , un determinado pico (por ejemplo, el n -ésimo) tiende a alcanzar su máxima altura cuando $\mu \rightarrow \mu_c$, siendo $\mu_c = a/(nT_0)$. Esto no implica necesariamente que el pico sea el más alto de la distribución. Si se mantiene esta condición fija y se disminuye el valor de D se consigue que la altura de este pico vaya creciendo, de forma que en el límite $D \rightarrow 0$ el pico tiende a una δ de Dirac. Así pues, el pico n -ésimo alcanzará la máxima altura posible en el límite singular $t_m \rightarrow t_0 \approx nT_0$, es decir, cuando las tres escalas características del sistema coinciden. En este límite, la FPTDF está

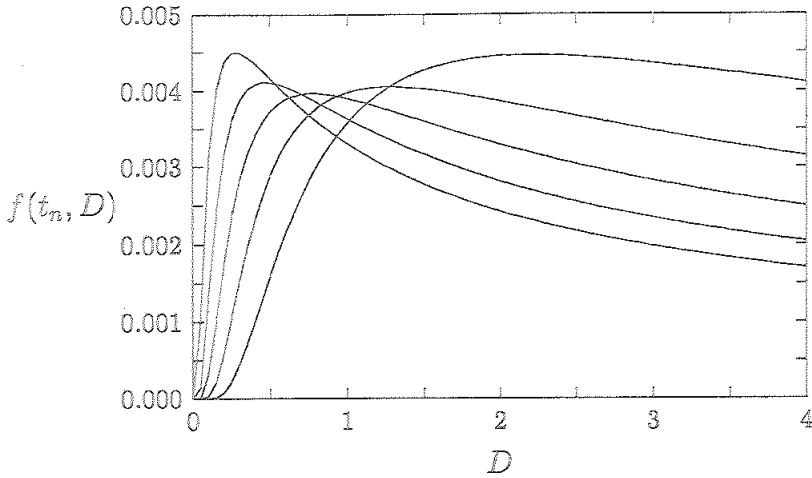


Figura 2.6: Altura de los picos $n = 7, 6, 5, 4$ y 3 (de izquierda a derecha), frente a la intensidad del ruido D . El resto de los parámetros toman en todas las curvas los valores $\alpha = 20, q = 0.04753, \mu = 0.055$ y $\omega = 0.2$.

constituida por un único pico muy estrecho localizado en nT_0 .

Una última propiedad interesante que presenta la FPTDF es la siguiente: fijado un valor del término de arrastre μ y de la varianza del ruido D , se puede elegir la frecuencia del estímulo periódico, ω , de forma que un pico determinado (por ejemplo, el n -ésimo) sea el más alto de la distribución. Para ello, basta tomar la frecuencia de forma que $nT_0 = t_m$. Como se observa en la Fig. 2.7, cuando se representa la altura de este pico frente a la intensidad del ruido D , ésta presenta un mínimo. Obsérvese que al variar D también hay que modificar el valor de la frecuencia, de forma que el pico elegido siga siendo el más alto de la distribución. Este fenómeno también aparece en ausencia del estímulo periódico, es decir, para $q = 0$, cuando se representa la altura del único máximo de la FPTDF frente a D , y puede ser interpretado como una consecuencia de la transición de un régimen en el que el escape está dominado por el arrastre a otro en el que está dominado por la difusión. A este fenómeno se le denomina comportamiento antirresonante.

Como pusimos de manifiesto en la sección anterior, la estructura multipli-

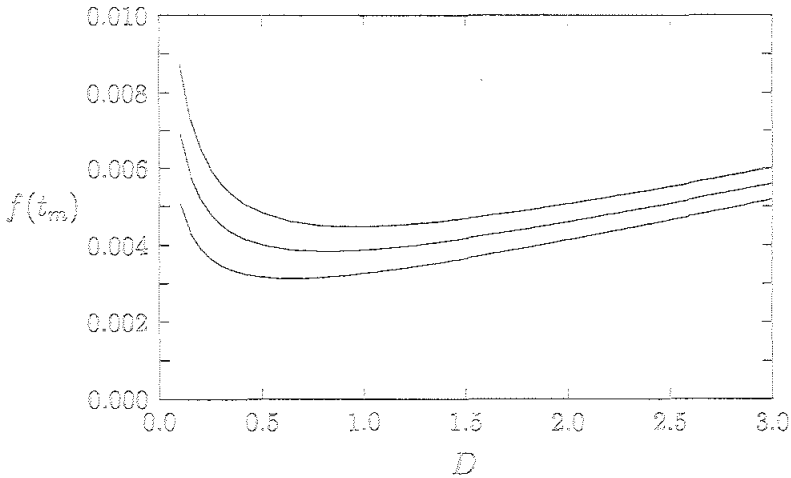


Figura 2.7: Comportamiento antirresonante del pico $n = 3$ de la FPTDF para valores de la amplitud del estímulo periódico $q = 0$ (curva inferior), $q = 0.025$ (curva intermedia) y $q = 0.05$ (curva superior). La frecuencia ω se ha elegido de forma que el pico $n = 3$ sea el máximo de la distribución, y el resto de los parámetros toman en todas las curvas los valores $\alpha = 20$ y $\mu = 0.065$.

cuda de la FPTDF es una propiedad característica de los sistemas biestables con ruido en presencia de un estímulo periódico determinista. Sin embargo, es importante hacer hincapié en el hecho de que el modelo que estamos describiendo difiere de éstos en un aspecto importante. En los modelos biestables con resonancia estocástica la barrera de potencial no puede cruzarse en ausencia de ruido, ya que el estímulo periódico se considera lo suficientemente pequeño como para que esto no suceda. Por el contrario, en este modelo la partícula puede escaparse del segmento incluso en ausencia de ruido, debido al término de arrastre μ .

Finalmente, en la referencia [3] se estudia el comportamiento de la PSD, $S(\Omega)$. Teniendo en cuenta la elección que se realiza de la fase inicial después de cada salida de la partícula, el proceso considerado es de los denominados de reinicialización (renewal process). Como se analizará con más detalle en la sección 5.5 para un modelo similar al que estamos describiendo, la PSD correspondiente a un proceso de reinicialización puede expresarse en función de la transformada de Fourier de la FPTDF. En este apartado nos limitaremos a describir los resultados más relevantes. Éstos se pueden resumir en la aparición de un máximo en la función $S(\Omega = \omega)$ cuando se la representa tanto frente a la intensidad del ruido D como frente al arrastre μ , manteniendo constante el resto de los parámetros del problema. Un ejemplo de este efecto puede verse en la Fig. 2.8. Obsérvese la escasa diferencia entre el comportamiento espectral para $q = 0$ y $q > 0$ (al menos para valores de q no demasiado grandes). El interés de este resultado estriba en el hecho de que, como se pone de manifiesto en [3], la localización de estos máximos está asociada a una sincronización entre las distintas escalas de tiempo, t_m , t_0 y T_0 , características del sistema, de forma análoga a como sucede en el caso de la resonancia estocástica. Sin embargo, si en este modelo se define la SNR como el cociente de la PSD a la frecuencia ω , en presencia y ausencia del estímulo periódico, el resultado que se obtiene es una función monótona decreciente de la intensidad del ruido D y, por tanto, no presenta resonancia estocástica en el sentido estricto de la palabra. En resumen, aunque el modelo descrito en esta sección presenta algunas propiedades similares a las de los sistemas biestables con resonancia estocástica, tanto en lo que respecta a la FPTDF como a la PSD, estamos ante un tipo de comportamiento resonante diferente al que analizamos en la sección anterior.

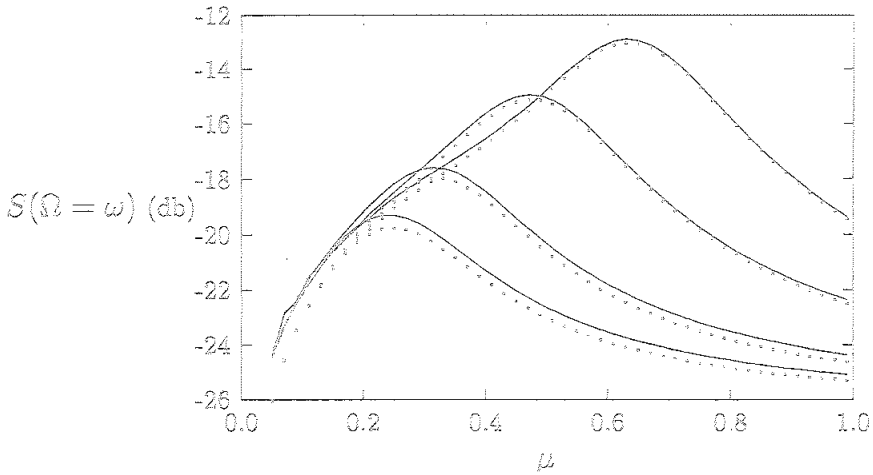


Figura 2.8: $S(\Omega = \omega)$ frente al arrastre μ para $\omega = 0.075, 0.1, 0.15, 0.2$ (de abajo a arriba). Las líneas continuas corresponden a $q = 0.025$ y las de puntos a $q = 0$. El resto de los parámetros toman en todas las curvas los valores $\alpha = 20$ y $D = 1$.

2.4 El problema de los tiempos de escape en presencia de campos que dependen periódicamente del tiempo

En dos artículos publicados en 1988 y 1993, Weiss y sus colaboradores estudiaron las propiedades estadísticas del tiempo de permanencia de una partícula en un segmento de línea, suponiendo que ésta se encuentra sometida a un campo externo dependiente sinusoidalmente del tiempo [4, 5]. Más concretamente, su trabajo se restringe a dos casos, el de un camino aleatorio en tiempo discreto y el de un proceso de difusión. En este apartado discutiremos únicamente el primero de éstos, ya que es el que más se asemeja a los modelos que estudiaremos en los capítulos posteriores. Los resultados obtenidos por estos autores ponen claramente de manifiesto que el campo oscilatorio puede crear una cierta coherencia en el movimiento de la partícula, capaz de reducir significativamente el tiempo de permanencia en el segmento. Las consecuencias que se deducen de este modelo tienen importancia práctica en el problema de la electroforesis y otros procesos de separación de moléculas grandes de ADN [34]-[38].

El modelo propuesto consiste básicamente en una partícula que lleva a cabo un camino aleatorio monodimensional con tiempo discreto sobre el segmento de línea $(0, L)$. Los nudos $r = 0$ y $r = L$ se consideran absorbentes. Sea $p_n(r|r_0)$ la probabilidad de que la partícula se encuentre en el nudo r -ésimo en el paso de tiempo n , suponiendo que inicialmente estaba en el r_0 -ésimo. Estas probabilidades satisfacen la ecuación maestra con tiempo discreto

$$p_{n+1}(r|r_0) = \frac{1}{2}[1 + \epsilon(n)]p_n(r-1|r_0) + \frac{1}{2}[1 - \epsilon(n)]p_n(r+1|r_0), \quad (2.11)$$

donde $\epsilon(n) = \epsilon \sin(\omega n)$ es el campo periódico. Estas ecuaciones están sometidas a las condiciones de contorno $p_r(0|r_0) = p_n(L|r_0) = 0$. La magnitud de mayor interés es la probabilidad de supervivencia de la partícula en el segmento, que se define como

$$s(n|r_0) = \sum_{r=1}^{L-1} p_n(r|r_0). \quad (2.12)$$

A partir de esta cantidad se pueden obtener los distintos momentos del tiempo de permanencia en el segmento. Así, por ejemplo, el momento j -ésimo

puede expresarse de la forma siguiente

$$\langle n^j \rangle = j \sum_{n=1}^{\infty} n^{j-1} s(n|r_0). \quad (2.13)$$

En concreto, el primero de estos momentos, $\langle n \rangle$, sería el tiempo medio de permanencia en el segmento, es decir, el número medio de iteraciones que se tienen que producir para que la partícula sea absorbida por algunas de las fronteras. En [4] se analiza fundamentalmente el caso de una distribución de probabilidades inicial uniforme, es decir, de la forma

$$p_0(r) = \frac{1}{L-1}. \quad (2.14)$$

En la Fig. 2.9 se muestra el comportamiento del tiempo medio de permanencia en el segmento frente a la frecuencia, para tres valores de la amplitud de la señal periódica. Los resultados se han obtenido resolviendo numéricamente la Ec. (2.11). Como puede observarse, $\langle n(\omega) \rangle$ presenta un mínimo a determinada frecuencia característica ω^* . Así pues, cuando el tiempo característico del campo periódico entra en "resonancia" con la escala de tiempo establecida por el proceso aleatorio, lo cual sucede para $\omega = \omega^*$, se induce un movimiento coherente en el sistema que minimiza el tiempo que tarda la partícula en escaparse del segmento. El comportamiento de la frecuencia de resonancia con el tamaño del segmento, para valores grandes de éste, es del tipo

$$\omega^*(L) \sim 1/L. \quad (2.15)$$

En [4] también se analiza la dependencia respecto a L del tiempo de permanencia en el segmento, para un valor fijo de la frecuencia. Este comportamiento depende del valor que toma la frecuencia, observándose que para $\omega \neq \omega^*$ es de la forma

$$\langle n(L, \omega) \rangle \sim L^2, \quad (2.16)$$

mientras que para $\omega = \omega^*$ pasa a ser

$$\langle n(L, \omega^*) \rangle \sim L. \quad (2.17)$$

Si se añade una fase inicial al término sinusoidal, de forma que éste sea

$$\epsilon(n) = \epsilon \operatorname{sen}(n\omega + \phi), \quad (2.18)$$

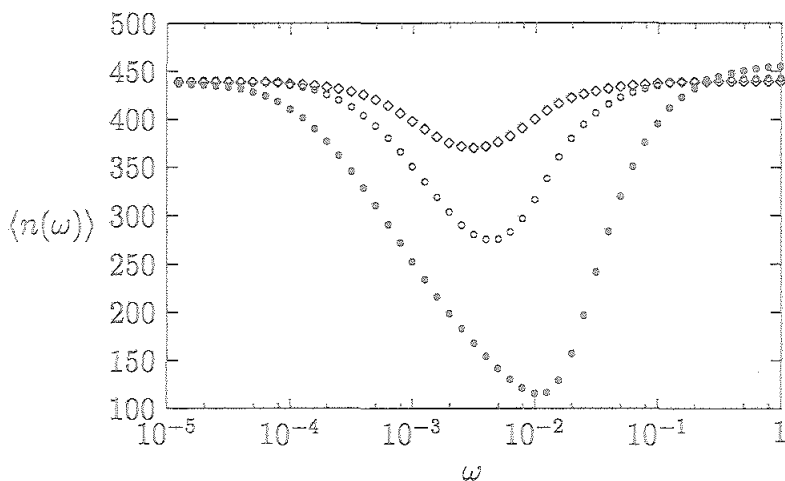


Figura 2.9: Dependencia respecto a la frecuencia ω del tiempo de permanencia en el segmento de línea $(0, L)$, para un camino aleatorio monodimensional sobre el que actúa un campo sinusoidal. El tamaño del segmento es $L = 50$. Las amplitudes del campo toman los valores $\epsilon = 0.05$ (\diamond), $\epsilon = 0.1$ (\circ) y $\epsilon = 0.3$ (\bullet).

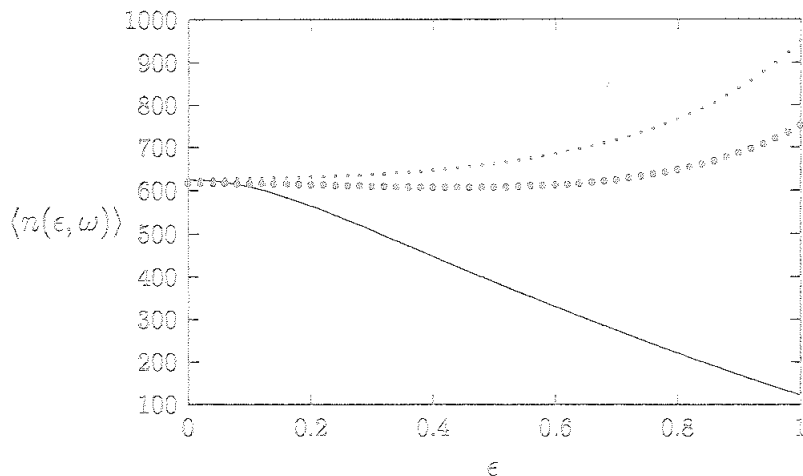


Figura 2.10: Dependencia de $\langle n(\epsilon, \omega) \rangle$ respecto a la amplitud ϵ , para el valor $\alpha = 25$ y tres valores de la frecuencia ω . La línea de puntos pequeños corresponde al valor $\omega = 0.25$, la de puntos grandes a $\omega = 0.15$ y la continua a $\omega = 0.05$.

los valores que se obtienen para el tiempo medio de permanencia difieren significativamente de los correspondientes a $\phi = 0$, excepto en el régimen de altas frecuencias, en el que los efectos de la fase inicial dejan de ser relevantes. No obstante, al promediar respecto a ϕ el tiempo medio de permanencia sigue presentando un mínimo para una cierta frecuencia, aunque ya no es tan pronunciado como en el caso de fase nula.

Posteriormente, Gitterman y Weiss [5] analizaron la dependencia respecto a la amplitud del campo sinusoidal del tiempo medio de permanencia en el segmento. En su estudio se restringen al caso de una fase inicial $\phi = \pi/2$, y a una condición inicial del tipo

$$p_0(j) = \delta_{j,a}, \quad (2.19)$$

siendo $L = 2a$.

Como se muestra en la Fig. 2.10, aparecen tres regímenes bien diferenciados en el comportamiento de $\langle n(\epsilon, \omega) \rangle$ considerado como función de ϵ .

Estos tres regímenes corresponden a distintos valores de la frecuencia. Para valores de ω suficientemente pequeños, $\langle n(\epsilon, \omega) \rangle$ es una función monótona decreciente de ϵ . Existe también un régimen intermedio de frecuencias en el que $\langle n(\epsilon, \omega) \rangle$ presenta un mínimo para un cierto valor de ϵ , mostrando, por tanto, un comportamiento no monótono. En la región de altas frecuencias, $\langle n(\epsilon, \omega) \rangle$ crece monótonamente. Utilizando un análogo continuo, los autores consiguen interpretar esta transición como una manifestación del paso de un régimen difusivo a otro determinista dominado por el término de arrastre.

2.5 El fenómeno de la activación resonante

Esta sección la vamos a dedicar al estudio de un fenómeno resonante de naturaleza diferente al estudiado en los apartados anteriores. Ahora el comportamiento resonante no surge como consecuencia de la competencia entre una fuerza determinista periódica y un ruido, sino que es debido a la interacción entre dos términos de ruido. Comenzaremos revisando con cierto detalle un trabajo, debido a C. R. Doering y J. C. Gadoua [6, 7], en el que se analiza el problema de la activación térmica sobrearmortiguada a través de una barrera de potencial lineal a trozos, cuya pendiente fluctúa entre dos valores de acuerdo con un proceso de Markov dicotómico. Más concretamente, su estudio se restringe al tiempo medio de primer paso por la barrera. Tanto de forma analítica, como mediante simulación de Monte Carlo, muestran que esta magnitud presenta un mínimo como función de la probabilidad de transición por unidad de tiempo entre los dos posibles estados de la barrera.

Sea $X(t)$ la variable estocástica que determina la posición de la partícula sobrearmortiguada, y $V(X, t)$ el potencial fluctuante al que está sometida. Si suponemos que el sistema se encuentra en contacto con un baño térmico caracterizado por la fuerza estocástica $\xi(t)$, la ecuación diferencial estocástica que describe la evolución temporal de $X(t)$ será

$$\frac{dX(t)}{dt} = -\frac{\partial}{\partial X} V(X, t) + (2T)^{1/2} \xi(t). \quad (2.20)$$

El ruido se supone blanco y gaussiano, con

$$\langle \xi(t) \xi(s) \rangle = \delta(t - s), \quad (2.21)$$

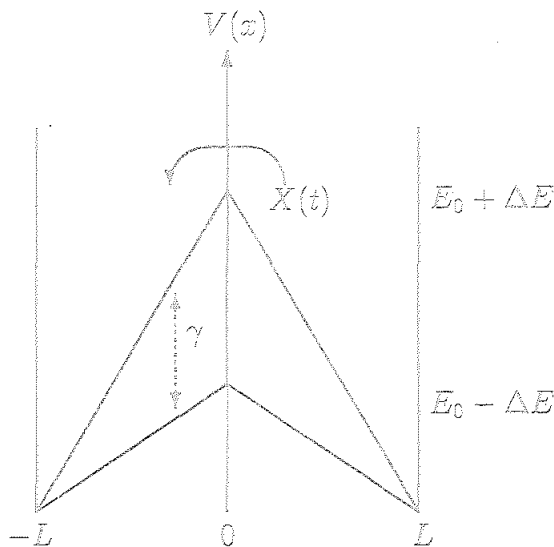


Figura 2.11: Esquema del modelo. La altura de la barrera de potencial lineal a trozos fluctúa entre los valores $E_0 + \Delta E$ y $E_0 - \Delta E$ con probabilidad de transición por unidad de tiempo γ .

donde tanto la masa de la partícula, como la constante de Boltzmann, se han considerado igual a la unidad, y el tiempo se ha medido en unidades del coeficiente de fricción.

Como antes se mencionó, el potencial $V(X, t)$ fluctúa aleatoriamente entre dos configuraciones, $V_+(X)$ y $V_-(X)$, de acuerdo con un proceso de Markov dicotómico (véase la Fig. 2.11). Así pues, si $P_{\pm}(t)$ son las probabilidades de que en el instante t el potencial se encuentre en las configuraciones $V_{\pm}(X)$, éstas satisfacen la ecuación maestra

$$\begin{aligned} \frac{dP_+(t)}{dt} &= -\gamma P_+(t) + \gamma P_-(t), \\ \frac{dP_-(t)}{dt} &= -\gamma P_-(t) + \gamma P_+(t), \end{aligned} \quad (2.22)$$

siendo γ la probabilidad de transición por unidad de tiempo entre los estados del potencial.

Siguiendo el método general propuesto por Zwanzig [39] para resolver problemas con ruido dinámico, la densidad de probabilidad compuesta $\rho_{\pm}(x, t)$ de que en el instante de tiempo t la variable $X(t)$ tome el valor x y la configuración del potencial sea \pm satisface el sistema de ecuaciones de Fokker-Planck acopladas

$$\begin{aligned}\frac{\partial \rho_+(x, t)}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial x} \left[V'_+(x) + T \frac{\partial}{\partial x} \right] \rho_+(x, t) - \gamma \rho_+(x, t) + \gamma \rho_-(x, t), \\ \frac{\partial \rho_-(x, t)}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial x} \left[V'_-(x) + T \frac{\partial}{\partial x} \right] \rho_-(x, t) - \gamma \rho_-(x, t) + \gamma \rho_+(x, t).\end{aligned}\tag{2.23}$$

La condición inicial que se impone a este sistema de ecuaciones diferenciales es la siguiente

$$\rho_{\pm}(x, 0) = \frac{1}{2} \delta(x - L),\tag{2.24}$$

es decir, se supone que en $t = 0$ la partícula está situada en la posición $x = L$ y que las dos posibles configuraciones del potencial son equiprobables. A este sistema de ecuaciones se le imponen las siguientes condiciones de contorno

$$\rho_{\pm}(x = 0, t) = 0,\tag{2.25}$$

y

$$-\left[V'_{\pm}(x) + T \frac{\partial}{\partial x} \right] \rho_{\pm}(x, t) \Big|_{x=L} = 0,\tag{2.26}$$

esto es, en el punto más alto de la barrera se coloca una frontera absorbente, mientras que en el extremo $x = L$ se considera una frontera reflectante (flujo igual a cero).

A partir de la distribución de probabilidad compuesta se puede calcular la distribución de probabilidad de tiempos de primer paso mediante la expresión

$$F(t) = \int_0^L dx [\rho_+(x, t) + \rho_-(x, t)],\tag{2.27}$$

y, una vez calculada ésta, obtener el tiempo medio de primer paso

$$\langle \tau \rangle = \int_0^{\infty} dt F(t).\tag{2.28}$$

En su artículo los autores se restringen al caso de un potencial lineal a trozos del tipo del mostrado en la Fig. 2.11, ya que de esta forma el sistema de ecuaciones en derivadas parciales (2.23) se transforma en uno de coeficientes constantes que puede resolverse por métodos habituales. Aun así, la solución general para el tiempo medio de permanencia es bastante complicada, y en la referencia [6] sólo se muestra para el caso concreto en el que $E_0 = 0$ y la altura de la barrera fluctúa entre $\pm\Delta E$. Como hemos venido haciendo, únicamente vamos a discutir los resultados más interesantes que se deducen de esta solución. Cuando la barrera de potencial fluctúa muy lentamente en comparación con el tiempo medio requerido para cruzar la barrera más alta, el MFPT tiende al promedio de los correspondientes a las dos configuraciones de la barrera. A su vez, cuando la barrera fluctúa muy rápidamente en comparación con el tiempo típico de paso, el MFPT tiende al asociado a una barrera promedio de altura $\langle E \rangle = E_+/2 + E_-/2$, siendo $E_{\pm} = E_0 \pm \Delta E$. Como se observa en la Fig. 2.12, entre estos dos límites el tiempo medio de permanencia presenta un mínimo para un cierto valor de la probabilidad de transición por unidad de tiempo entre los estados del potencial. Mediante simulación de Monte Carlo, estos autores también comprobaron que la resonancia se produce cuando los cruces a través de la barrera tienen lugar en el momento en el que ésta se encuentra con mayor probabilidad en la configuración de menor altura.

Más tarde, Martín Bier y R. Dean Astumian [8] estudiaron este mismo modelo en el caso particular de barrera grande y fluctuaciones pequeñas (es decir, para $\Delta E/E_0$ pequeño). En concreto, utilizando métodos descritos en [40], transformaron el sistema de ecuaciones en derivadas parciales (2.23) en otro en derivadas ordinarias, de cuya solución podía calcularse el MFPT. Realizando un análisis asintótico de la solución obtuvieron el comportamiento asintótico del MFPT para diversos regímenes de la probabilidad de transición por unidad de tiempo γ . Para valores de γ suficientemente pequeños el comportamiento resultante es

$$\langle \tau \rangle \approx \frac{E_0^2 e^{-E_0 + \Delta E} + E_0^2 e^{-E_0 - \Delta E} + 4\gamma}{2[E_0^4 e^{-2E_0} + (E_0^2 e^{-E_0 + \Delta E} + E_0^2 e^{-E_0 - \Delta E}) \gamma]}, \quad (2.29)$$

mientras que para $\gamma \rightarrow \infty$ el MFPT tiende desde abajo a $E_0^{-2} \exp(E_0)$. La expresión (2.29) parece ser una buena aproximación del comportamiento del MFPT para valores de γ del mismo orden que el MFPT a través de la barrera

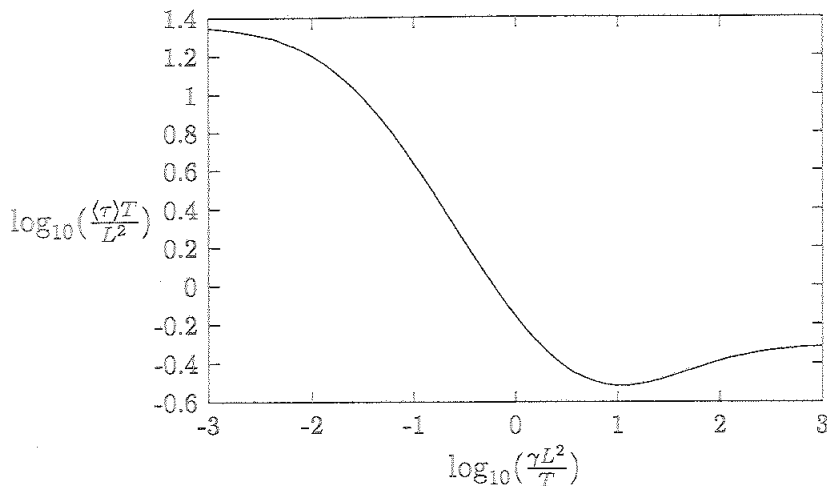


Figura 2.12: MFPT frente a la probabilidad de transición por unidad de tiempo para los valores de los parámetros $E_{\pm} = \pm 8T$.

superior e inferior. De hecho, se puede obtener una buena estimación del valor mínimo del MFPT tomando el límite de esta expresión para $\gamma \rightarrow \infty$.

La Ec. (2.29) puede interpretarse en base al esquema cinético que se muestra en la Fig. 2.13. En ella, el reactivo R representa a la partícula situada a la derecha de la barrera de potencial (antes de cruzarla), y puede encontrarse en dos posibles estados, R_+ cuando la barrera toma el valor $E_0 + \Delta E$ y R_- cuando toma el valor $E_0 - \Delta E$. La transición hacia el estado producto absorbente P , corresponde al paso a través de la barrera, y se realiza con probabilidades de transición por unidad de tiempo k_+ cuando el estado del reactivo es R_+ , y k_- cuando es R_- . La evolución de las concentraciones de los reactivos (que en nuestro caso representarían las densidades de probabilidad $\rho_+(x, t)$ y $\rho_-(x, t)$ integradas entre 0 y L) satisfacen la ecuación maestra

$$\begin{aligned} \frac{dP_+(t)}{dt} &= -(\gamma + k_+)P_+(t) + \gamma P_-(t), \\ \frac{dP_-(t)}{dt} &= -(\gamma + k_-)P_-(t) + \gamma P_+(t). \end{aligned} \quad (2.30)$$

Este sistema de ecuaciones diferenciales se puede resolver sin dificultad para

condiciones iniciales arbitrarias, y a partir de su solución es fácil calcular el MFPT correspondiente a la transformación de reactivo en producto. El resultado que se obtiene cuando se consideran las condiciones iniciales particulares $P_+(0) = P_-(0) = 1/2$ es

$$\langle \tau \rangle^{\text{cin}} = \int_0^{\infty} dt [P_+(t) + P_-(t)] = \frac{k_+ + k_- + 4\gamma}{2[k_+k_- + (k_+ + k_-)\gamma]}, \quad (2.31)$$

donde se ha utilizado el superíndice “cin” para distinguirlo del MFPT correspondiente al modelo de la barrera fluctuante. Si en el resultado anterior se sustituye k_+ y k_- por las expresiones aproximadas de las probabilidades de transición por unidad de tiempo a través de las barreras de alturas $E_0 + \Delta E$ y $E_0 - \Delta E$ en ausencia de fluctuaciones, esto es, si hacemos $k_+ = E_0^2 e^{-E_0 - \Delta E}$ y $k_- = E_0^2 e^{-E_0 + \Delta E}$, se reobtiene la Ec. (2.29). El acuerdo que existe entre la aproximación cinética y el MFPT exacto se extiende al rango de validez de la Ec. (2.29), dejando de ser una aproximación aceptable cuando la probabilidad de transición por unidad de tiempo pasa a ser del orden del MFPT a través de una barrera de altura cero. De hecho, la aproximación cinética no da cuenta del crecimiento que se produce en el MFPT después de que éste alcance su mínimo. Esto se pone claramente de manifiesto observando que la expresión (2.31) (o el caso particular (2.29)) es una función monótona decreciente de γ para $k_+ \neq k_-$. Así pues, un modelo cinético de este tipo no puede explicar la aparición de activación resonante.

En un intento de delimitar los mecanismos esenciales que conducen a la activación resonante, se han propuesto modelos estocásticos más sencillos que reproduzcan ese tipo de fenomenología. En concreto, los problemas que analizaremos en los dos capítulos siguientes van encaminados en esta dirección. Ahora nos limitaremos a exponer brevemente un ejemplo, propuesto por C. Van den Broeck [9], que generaliza el modelo cinético que acabamos de describir. Para ello, en lugar de suponer densidades de probabilidad exponenciales para la salida de los estados R_+ y R_- después de un tiempo de permanencia t , considera formas más generales, $\psi_+(t)$ y $\psi_-(t)$, de estas funciones. Admitiendo que cada vez que el reactivo pasa de uno de sus estados al otro se vuelve a reinicializar el tiempo de permanencia en éste, y que inicialmente el reactivo se encuentra con igual probabilidad en cualquiera de sus dos estados, la transformada de Laplace, $\hat{P}(s)$, de la distribución de tiempos

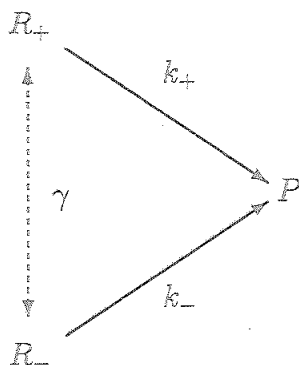


Figura 2.13: Esquema cinético asociado al problema de la barrera fluctuante.

de supervivencia del reactivo, $P(t)$, viene dada por la expresión

$$\hat{P}(s) = \frac{2 + \hat{\psi}_+(s + \gamma)\hat{\psi}_-(s + \gamma) - \frac{3}{2} [\hat{\psi}_+(s + \gamma) + \hat{\psi}_-(s + \gamma)]}{\gamma [\hat{\psi}_+(s + \gamma) + \hat{\psi}_-(s + \gamma) - \hat{\psi}_+(s + \gamma)\hat{\psi}_-(s + \gamma)]}, \quad (2.32)$$

donde $\hat{\psi}_\pm(s)$ son las transformadas de Laplace de $\psi_\pm(t)$, respectivamente. A partir de $\hat{P}(s)$ puede calcularse fácilmente el MFPT haciendo $s = 0$, observándose que para determinadas elecciones de $\psi_\pm(t)$ (como, por ejemplo, $\psi_\pm(t) = \delta(t - k_\pm^{-1})$ con k_+ y k_- suficientemente distintos) se obtiene un mínimo del MFPT frente a γ . Este tipo de comportamiento también puede obtenerse eligiendo la misma densidad de probabilidad para la salida de los estados R_+ y R_- , es decir, haciendo $\psi_+(t) = \psi_-(t) = \psi(t)$. Así pues, introduciendo una dinámica no markoviana en el modelo cinético de la Fig. 2.13 se consigue reproducir un comportamiento del MFPT análogo al del modelo propuesto C. R. Doering y J. C. Gadoua. En el próximo capítulo veremos que no es necesario considerar este tipo de dinámica para conseguir que un modelo cinético presente un comportamiento resonante del MFPT.

Capítulo 3

Activación resonante en un modelo cinético simple

3.1 Introducción

Para entender claramente el origen de la activación resonante parece interesante determinar si es posible observar un fenómeno similar en modelos cinéticos simples. En la sección 2.5 del capítulo anterior vimos dos ejemplos encaminados en este sentido. El primero, propuesto por Bier y Astumian [8], consistía en un modelo cinético markoviano, en el que reactivo fluctuaba con una cierta probabilidad de transición por unidad de tiempo entre dos posibles estados internos. Estos dos estados presentaban distintas velocidades de decaimiento hacia el producto final, considerado este último como un estado absorbente. Cuando la probabilidad de transición por unidad de tiempo entre los estados internos era pequeña, el modelo presentaba un comportamiento muy parecido al observado en el proceso de escape a través de una barrera lineal [6] en el límite de barrera grande y fluctuaciones pequeñas. No obstante, a medida que esta probabilidad de transición iba aumentando, el modelo dejaba de mostrar un comportamiento similar al de [6] y, de hecho, no presentaba activación resonante. El segundo modelo, estudiado por Van der Broeck [9], era una variante no markoviana del anterior, en el que la distribución de tiempos de espera para los estados internos del reactivo era no exponencial. En este caso, sí aparecía activación resonante.

El propósito de este capítulo es presentar un modelo cinético sencillo [41]

que, bajo ciertas circunstancias, muestre un comportamiento resonante parecido al señalado por Doering y Gadoua en [6]. Hay varias razones que conceden relevancia al estudio de este modelo. En primer lugar, es markoviano, a diferencia del propuesto por Van den Broeck en [9]. En segundo lugar, su simplicidad técnica nos permitirá determinar de forma precisa bajo qué condiciones aparece el fenómeno resonante y, en particular, el importante papel que juegan las condiciones iniciales en su aparición. Finalmente, el modelo hace posible la identificación del mecanismo responsable de la resonancia. Como veremos, ésta es debida a las fluctuaciones de un estado intermedio que conecta el estado inicial y final. Estas fluctuaciones deben tener efectos opuestos sobre las transiciones que se producen desde el estado intermedio hasta el inicial y el final. El modelo aquí presentado puede generalizarse de muy diversas formas, conservando el comportamiento resonante. En particular, nos permitirá explicar el comportamiento de la barrera lineal fluctuante analizada en [6].

La organización del resto de este capítulo es la siguiente: en la sección 3.2, describiremos nuestro modelo y encontraremos expresiones exactas para el MFPT desde el estado inicial (reactivo) al final (producto). Estudiaremos también las condiciones bajo las cuales aparece activación resonante. En la sección 3.3 discutiremos algunas versiones modificadas de este modelo que no presentan comportamiento resonante. Comparándolas, mostraremos claramente el origen de la activación resonante en este tipo de modelos. Concluiremos con un breve resumen de los resultados más relevantes.

3.2 Descripción del modelo

El modelo cinético que vamos a estudiar en este capítulo está claramente esquematizado en la Fig. 3.1. Como puede observarse, el reactivo A se transforma en el producto C a través de una sustancia intermedia B . Ésta, debido por ejemplo a la influencia de algunas condiciones externas, fluctúa entre dos estados, a los que llamaremos B^+ y B^- , con una probabilidad de transición por unidad de tiempo γ . Así pues, la sustancia B permanecerá en uno de los estados, antes de transitar al otro, un tiempo aleatorio con una distribución de probabilidades exponencial de media γ^{-1} . Cuando B se encuentra en el estado B^+ , solamente son posibles las transiciones desde B hasta A , siendo k_1 la probabilidad por unidad de tiempo de que se produzca una de

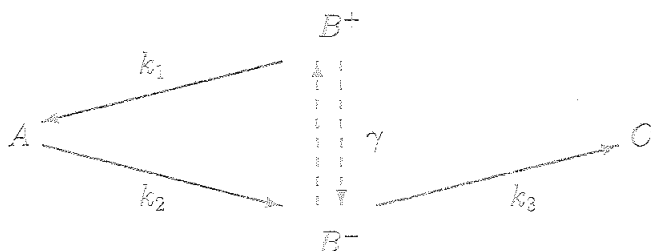


Figura 3.1: Esquema del modelo cinético. El estado de la sustancia intermedia B fluctúa entre B^+ y B^- con una probabilidad de transición por unidad de tiempo γ .

estas transiciones. Por el contrario, cuando B se encuentra en el estado B^- , se pueden producir transiciones desde A hasta B y desde B hasta C , con probabilidades de transición por unidad de tiempo k_2 y k_3 , respectivamente. Por tanto, el estado B actúa como un mecanismo de control para la transformación de A en C . Nuestro propósito será encontrar la evolución temporal de las concentraciones de A y B promediadas respecto al ruido, entendiendo como tal las fluctuaciones que experimenta el estado de la sustancia B .

Para formular matemáticamente este problema, llamemos $P(A, t)$ y $P(B, t)$ a las concentraciones en el instante t de las sustancias A y B , respectivamente. Si recordamos el carácter absorbente de C , llegamos a la conclusión de que la ecuación maestra que describe la evolución temporal de estas concentraciones será

$$\frac{\partial}{\partial t} P(A, t) = k_{BA}[B(t)] P(B, t) - k_{AB}[B(t)] P(A, t), \quad (3.1)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} P(B, t) = k_{AB}[B(t)] P(A, t) - [k_{BA}[B(t)] + k_{BC}[B(t)]] P(B, t). \quad (3.2)$$

En las expresiones anteriores, las probabilidades de transición por unidad de tiempo $k_{AB}[B(t)]$, $k_{BA}[B(t)]$ y $k_{BC}[B(t)]$ no son constantes, ya que dependen del estado $B(t)$ de la sustancia B . Este estado es un proceso dicotómico, cuyos valores permitidos son B^+ y B^- . Si llamamos $p_+(t)$ y $p_-(t)$ a las probabilidades de que en el instante t el proceso estocástico $B(t)$ tome los

valores B^+ y B^- , respectivamente, éstas verificarán la ecuación maestra

$$\frac{\partial}{\partial t} p_+(t) = \gamma p_-(t) - \gamma p_+(t), \quad (3.3)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} p_-(t) = \gamma p_+(t) - \gamma p_-(t). \quad (3.4)$$

Cuando la sustancia B se encuentra en el estado B^+ , las probabilidades de transición por unidad de tiempo toman los valores $k_{AB}[B(t) = B^+] = k_{BC}[B(t) = B^+] = 0$ y $k_{BA}[B(t) = B^+] = k_1$, mientras que si está en el estado B^- valen $k_{AB}[B(t) = B^-] = k_2$, $k_{BA}[B(t) = B^-] = 0$ y $k_{BC}[B(t) = B^-] = k_3$.

El problema así planteado es un ejemplo típico de lo que se ha dado en llamar sistemas con ruido dinámico. Estos sistemas se caracterizan por el hecho de que alguno de los parámetros de la ecuación que los describe (probabilidades de transición por unidad de tiempo, coeficiente de difusión, etc.), en lugar de ser constantes, son funciones estocásticas del tiempo. Los valores permitidos que pueden tomar estos parámetros pueden ser discretos, como en el modelo que vamos a analizar, o bien continuos. En el primero de los casos, la evolución de la distribución probabilidades de los parámetros viene gobernada por una ecuación maestra, mientras que en el segundo, por una del tipo Fokker-Planck asociada a cierta ecuación de Langevin. Para una revisión bastante completa de este tipo de problemas, así como una discusión de un método general para resolverlos, puede consultarse la ref.[39]. A fin de aplicar este método, debemos introducir en primer lugar las concentraciones parcialmente promediadas de A y de B , para un estado dado de B . Estas concentraciones serán representadas por $P_{\pm}(A, t)$ y $P_{\pm}(B, t)$, donde los signos $+$ y $-$ hacen referencia, respectivamente, a los estados B^+ y B^- de la sustancia B . Así, por ejemplo, $P_+(A, t)$ será la concentración de la sustancia A en el instante t , suponiendo que B se encuentra en el estado B^+ . Evidentemente, la concentración real de A en el instante t con independencia del estado de B , $P(A, t)$, vendrá dada por

$$P(A, t) = P_+(A, t) + P_-(A, t), \quad (3.5)$$

y, de la misma forma, para la sustancia B ,

$$P(B, t) = P_+(B, t) + P_-(B, t). \quad (3.6)$$

De acuerdo con el método descrito en [39], las concentraciones $P_{\pm}(A, t)$ y $P_{\pm}(B, t)$ satisfacen el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\frac{\partial}{\partial t} P_{+}(A, t) = -\gamma P_{+}(A, t) + k_1 P_{+}(B, t) + \gamma P_{-}(A, t), \quad (3.7)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} P_{-}(A, t) = -(k_2 + \gamma) P_{-}(A, t) + \gamma P_{+}(A, t), \quad (3.8)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} P_{+}(B, t) = -(k_1 + \gamma) P_{+}(B, t) + \gamma P_{-}(B, t), \quad (3.9)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} P_{-}(B, t) = -(k_3 + \gamma) P_{-}(B, t) + k_2 P_{-}(A, t) + \gamma P_{+}(B, t), \quad (3.10)$$

que tienen una fácil interpretación en términos de balance. Como condición inicial supondremos que en $t = 0$ sólo está presente la sustancia A , siendo la distribución de probabilidades entre los estados de B totalmente arbitraria. Así pues, tomaremos

$$P_{+}(A, 0) = \alpha, \quad P_{-}(A, 0) = 1 - \alpha, \quad (3.11)$$

$$P_{+}(B, 0) = P_{-}(B, 0) = 0, \quad (3.12)$$

con $0 \leq \alpha \leq 1$. El MFPT para la transformación de A en C viene dado por la expresión [42]

$$\tau = \int_0^{\infty} dt [P(A, t) + P(B, t)]. \quad (3.13)$$

Si integramos las Ecs.(3.7)-(3.10) respecto al tiempo entre cero e infinito, y hacemos uso de las expresiones (3.11)-(3.12), llegamos al siguiente sistema de ecuaciones

$$-\alpha = -\gamma\alpha_{+} + k_1\beta_{+} + \gamma\alpha_{-}, \quad (3.14)$$

$$-1 + \alpha = -(k_2 + \gamma)\alpha_{-} + \gamma\alpha_{+}, \quad (3.15)$$

$$0 = -(k_1 + \gamma)\beta_{+} + \gamma\beta_{-}, \quad (3.16)$$

$$0 = -(k_3 + \gamma)\beta_{-} + k_2\alpha_{-} + \gamma\beta_{+}, \quad (3.17)$$

siendo

$$\alpha_{+} = \int_0^{\infty} dt P_{+}(A, t), \quad (3.18)$$

$$\alpha_{-} = \int_0^{\infty} dt P_{-}(A, t), \quad (3.19)$$

$$\beta_{+} = \int_0^{\infty} dt P_{+}(B, t) \quad (3.20)$$

y

$$\beta_- = \int_0^{\infty} dt P_-(B, t). \quad (3.21)$$

Evidentemente, en función de las cantidades definidas anteriormente la expresión (3.13) toma la forma

$$\tau = \alpha_+ + \alpha_- + \beta_+ + \beta_-. \quad (3.22)$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones (3.14)-(3.17) se obtiene

$$\alpha_+ = \frac{a}{\gamma} + \frac{k_1}{(k_1 + \gamma)k_3} + \frac{k_1k_3 + (k_1 + k_3)\gamma}{(k_1 + \gamma)k_2k_3}, \quad (3.23)$$

$$\alpha_- = \frac{k_1k_3 + (k_1 + k_3)\gamma}{(k_1 + \gamma)k_2k_3}, \quad (3.24)$$

$$\beta_+ = \frac{\gamma}{(k_1 + \gamma)k_3}, \quad (3.25)$$

$$\beta_- = \frac{1}{k_3}, \quad (3.26)$$

y, utilizando la expresión (3.22), resulta.

$$\tau = \frac{2(k_1 + k_2 + k_3)\gamma^2 + 2(k_2 + k_3)\gamma k_1 + (\gamma + k_1)ak_2k_3}{(\gamma + k_1)\gamma k_2k_3}. \quad (3.27)$$

Los comportamientos de τ para los dos valores límites de γ , $\gamma \rightarrow 0$ y $\gamma \rightarrow \infty$, se pueden entender fácilmente. Cuando γ es muy grande, el resultado anterior se comporta como

$$\tau \rightarrow \tau_{\infty} = \frac{2(k_1 + k_2 + k_3)}{k_2k_3}, \quad (3.28)$$

y, por tanto, es independiente de la condición inicial a para el estado de B . De hecho, éste es el resultado que se obtiene al calcular el MFPT para el proceso

$$A \rightleftharpoons B \rightarrow C, \quad (3.29)$$

y sustituir las probabilidades de transición por unidad de tiempo por sus valores de equilibrio, que son $k_1/2$ para la transición de B a A , $k_2/2$ para la de A a B , y $k_3/2$ para la de B a C .

Por otra parte, en el límite de desorden estático, es decir, para $\gamma \rightarrow 0$, τ tiende a infinito (excepto en el caso particular en el que $a = 0$) debido

a que, cuando B se encuentra en el estado B^+ , es imposible la transición desde A hasta C . Veamos ahora si el MFPT presenta un mínimo entre los dos valores límites anteriores. Derivando la expresión (3.27) respecto a γ e igualando a cero, llegamos a la conclusión de que los puntos estacionarios de $\tau(\gamma)$ satisfacen la ecuación

$$(2k_1^2 - \alpha k_2 k_3) \gamma^2 - 2\alpha k_1 k_2 k_3 \gamma - \alpha k_1^2 k_2 k_3 = 0. \quad (3.30)$$

De las dos soluciones de la ecuación anterior, la única que puede ser positiva¹ para determinados valores de los parámetros es

$$\gamma_0 = \frac{k_1 (\alpha k_2 k_3)^{1/2}}{2^{1/2} k_1 - (\alpha k_2 k_3)^{1/2}}, \quad (3.31)$$

que, de acuerdo con los comportamientos límites antes estudiados, tiene que corresponder a un mínimo de $\tau(\gamma)$. En consecuencia, la condición que tienen que verificar los parámetros para que γ_0 sea positiva y, por tanto, tenga sentido físico, es

$$2k_1^2 > \alpha k_2 k_3. \quad (3.32)$$

Además, sustituyendo la expresión (3.31) en la (3.27) se llega al siguiente resultado para el valor mínimo del MFPT

$$\tau_0 \equiv \tau(\gamma_0) = -\frac{\alpha}{k_1} + \frac{2}{k_2} + \frac{2}{k_3} + \frac{2^{3/2} \alpha^{1/2}}{(k_2 k_3)^{1/2}}. \quad (3.33)$$

Por lo tanto, cuando se cumple la relación (3.32) entre las probabilidades de transición por unidad de tiempo k_1 , k_2 y k_3 , y la distribución de probabilidades inicial de los estados fluctuantes de B , caracterizada por el parámetro α , el MFPT presenta un comportamiento resonante. Es importante hacer hincapié en el papel tan importante que juega la condición inicial del estado de B para determinar la aparición de resonancia. En concreto, para unos valores dados de las probabilidades de transición por unidad de tiempo (tales que $k_1 \neq 0$), siempre podremos elegir un valor de α suficientemente pequeño de forma que aparezca resonancia. Como ejemplo, en la Fig. 3.2 hemos representado el MFPT frente a γ para $k_1 = k_2 = k_3 = 1$. La condición inicial

¹Puesto que γ es una probabilidad de transición por unidad de tiempo, tiene que ser necesariamente positiva.

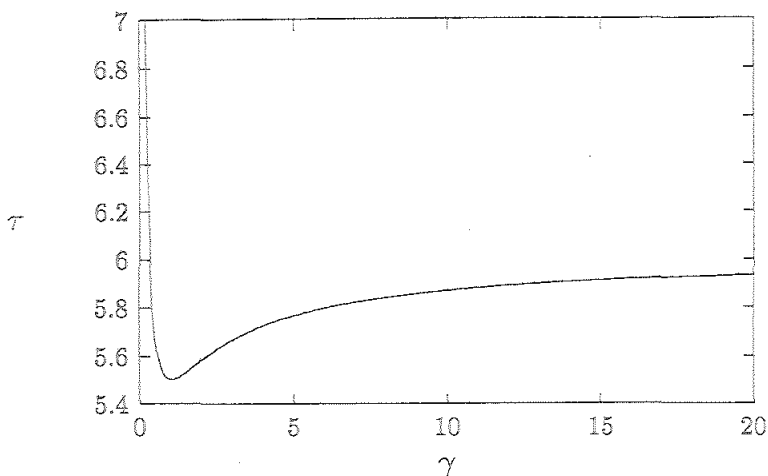


Figura 3.2: MFPT frente a γ para el modelo esquematizado en la Fig. 3.1. Los valores de los parámetros son $k_1 = k_2 = k_3 = 1$ y la condición inicial es $a = 1/2$.

elegida es $a = 1/2$, que corresponde a la distribución estacionaria del estado de B suponiendo que está aislado. Como predice la Ec. (3.31), la resonancia tiene lugar para $\gamma_0 = 1$.

Para poner más claramente de manifiesto el origen de la resonancia, es conveniente reescribir la expresión (3.27) de la forma siguiente

$$\tau = \frac{a}{\gamma} + \frac{2k_1}{k_2k_3} \frac{\gamma}{\gamma + k_1} + 2 \left(\frac{1}{k_2} + \frac{1}{k_3} \right). \quad (3.34)$$

La probabilidad de transición γ entre los estados de B aparece en dos de los sumandos del segundo miembro de la expresión anterior. El primero de ellos es una función decreciente de γ que se anula cuando $a = 0$ ó cuando $\gamma \rightarrow \infty$. El segundo es una función creciente de γ que tiende al valor asintótico $2k_1/(k_2k_3)$, y no depende de la condición inicial a . Así pues, las fluctuaciones juegan un doble papel. Por un lado, facilitan el decaimiento de la probabilidad inicial de encontrar al sistema en la configuración en la que es imposible la transición hacia el producto C . Por otro lado, impiden

que todas las transiciones desde A hasta B terminen en C , ya que parte de la sustancia que llega a B es devuelta a A . La competencia entre estos dos papeles es la que lleva, en algunos casos, a la aparición de activación resonante. Para que ésta tenga lugar, la segunda tendencia debe dominar frente a la primera en el límite de valores grandes de γ .

Como medida del efecto resonante, introduzcamos la magnitud

$$R \equiv \tau_{\infty} - \tau_0 = \frac{2k_1^2 + ak_2k_3}{k_1k_2k_3} - \frac{2^{3/2}a^{1/2}}{(k_2k_3)^{1/2}}. \quad (3.35)$$

De la expresión anterior se sigue inmediatamente que, para un valor dado de a , la resonancia es tanto más fuerte cuanto mayor sea el valor de k_1 , y menores sean los valores de k_2 y k_3 . Concretamente, en el límite de $k_1 \rightarrow \infty$ se tiene que

$$\gamma_0 \rightarrow \frac{(ak_2k_3)^{1/2}}{2^{1/2}}, \quad (3.36)$$

y R diverge debido a que τ_{∞} también lo hace.

3.3 Variantes y generalizaciones del modelo

Para identificar el mecanismo básico responsable del comportamiento resonante parece conveniente estudiar variantes del modelo anterior que no presenten este fenómeno. Consideremos en primer lugar el modelo esquematizado en la Fig. 3.3(a). La interpretación de este esquema es parecida al de la Fig. 3.1, con la única diferencia de que ahora el decaimiento al producto C se produce cuando la sustancia B se encuentra en el estado B^+ . Así pues, de acuerdo con el método descrito en [39], las concentraciones parcialmente promediadas $P_{\pm}(A, t)$ y $P_{\pm}(B, t)$ satisfacen en este caso el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\frac{\partial}{\partial t} P_+(A, t) = -\gamma P_+(A, t) + k_1 P_+(B, t) + \gamma P_-(A, t), \quad (3.37)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} P_-(A, t) = -(k_2 + \gamma) P_-(A, t) + \gamma P_+(A, t), \quad (3.38)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} P_+(B, t) = -(k_1 + k_3 + \gamma) P_+(B, t) + \gamma P_-(B, t), \quad (3.39)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} P_-(B, t) = -\gamma P_-(B, t) + k_2 P_-(A, t) + \gamma P_+(B, t). \quad (3.40)$$

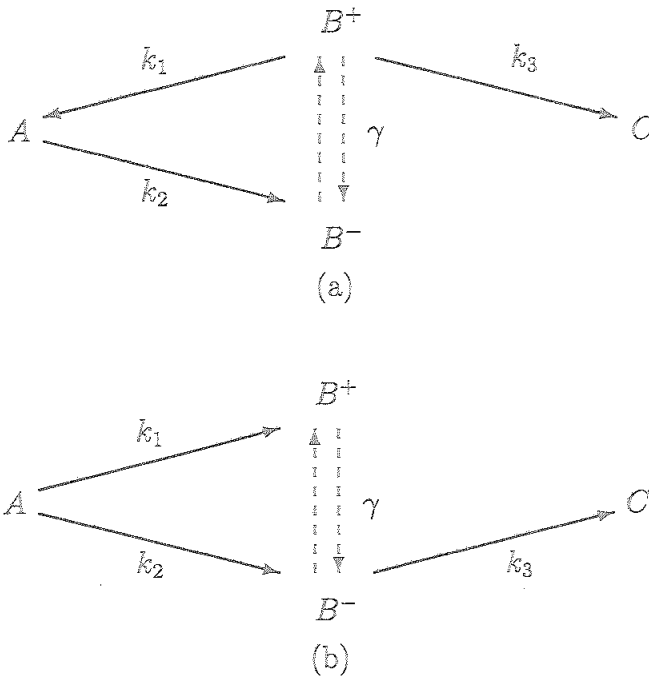


Figura 3.3: Variantes del modelo cinético discutido en la sección 3.2.

Si consideramos las condiciones iniciales (3.11) y (3.12), y aplicamos el mismo procedimiento que utilizamos en la sección 3.2, llegamos al siguiente resultado para el MFPT

$$\tau = \frac{2(k_1 + k_2 + k_3)\gamma + 2k_1k_2 + (1 + a)k_2k_3}{\gamma k_2 k_3} \quad (3.41)$$

El límite para $\gamma \rightarrow \infty$ de esta expresión coincide con la Ec. (3.28). Por tanto, los dos modelos presentan el mismo comportamiento en el límite de altas probabilidades de transición por unidad de tiempo entre los estados de B . Éste es el resultado esperado, ya que el razonamiento que hicimos en el primer modelo también es aplicable aquí. Si derivamos la expresión (3.41) respecto a γ se obtiene

$$\frac{\partial \tau}{\partial \gamma} = -\frac{2k_1 + (a + 1)k_3}{\gamma^2 k_3} \quad (3.42)$$

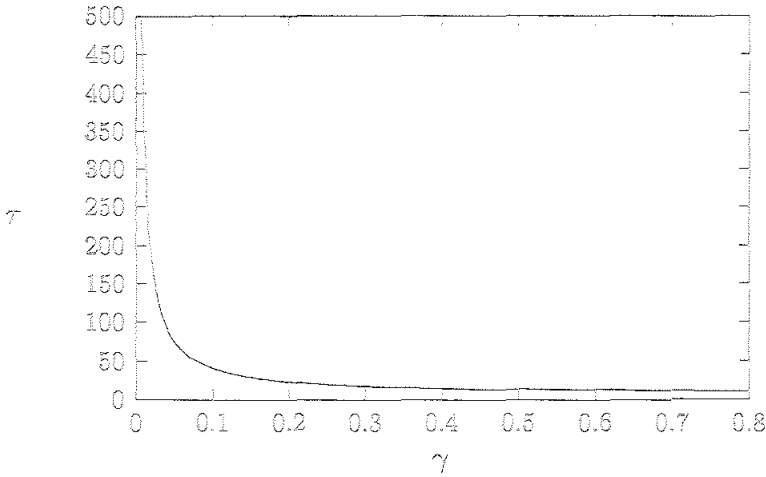


Figura 3.4: MFPT frente a γ para el modelo representado en la Fig. 3.3(a) y los mismos valores de los parámetros que en la Fig. 3.2.

Así pues, el MFPT es una función monótona decreciente de γ independientemente de los valores que tomen los parámetros k_1 , k_2 , k_3 y α , γ , en consecuencia, $\tau(\gamma)$ no presenta comportamiento resonante. Como ejemplo, en la Fig. 3.4 se ha representado el MFPT correspondiente a este modelo, Ec. (3.41), frente a γ , para los mismos valores de los parámetros que en la Fig. 3.2.

Consideremos ahora la variante descrita en la Fig. 3.3(b). En este modelo las concentraciones parcialmente promediadas $P_{\pm}(A, t)$ y $P_{\pm}(B, t)$ satisfacen el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\frac{\partial}{\partial t} P_+(A, t) = -(k_1 + \gamma) P_+(A, t) + \gamma P_-(A, t), \quad (3.43)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} P_-(A, t) = -(k_2 + \gamma) P_-(A, t) + \gamma P_+(A, t), \quad (3.44)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} P_+(B, t) = -\gamma P_+(B, t) + k_1 P_+(A, t) + \gamma P_-(B, t), \quad (3.45)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} P_-(B, t) = -(k_3 + \gamma) P_-(B, t) + k_2 P_-(A, t) + \gamma P_+(B, t). \quad (3.46)$$

El resultado que se obtiene para el MFPT, supuestas las condiciones iniciales (3.11) y (3.12), es

$$\tau = \frac{2(k_1 + k_2 + k_3)\gamma^2 + (2k_1k_2 + (2-a)k_1k_3 + ak_2k_3)\gamma + ak_1k_2k_3}{(k_1 + k_2)k_3\gamma^2 + \gamma k_1k_2k_3}. \quad (3.47)$$

Es importante señalar que, en esta variante, el límite para $\gamma \rightarrow \infty$ del MFPT toma la forma

$$\tau_\infty = \frac{2(k_1 + k_2 + k_3)}{(k_1 + k_2)k_3}, \quad (3.48)$$

y, por lo tanto, difiere del resultado que obtuvimos en los dos modelos anteriores, Ec. (3.28). Esta diferencia se puede entender fácilmente si tenemos en cuenta que ahora los valores de equilibrio de las probabilidades de transición por unidad de tiempo del proceso (3.29) son $(k_1 + k_2)/2$ para la transición de A a B , 0 para la de B a A y $k_3/2$ para la de B a C .

Derivando la expresión (3.47) respecto a γ , se obtiene

$$\frac{\partial \tau}{\partial \gamma} = - \frac{((2-a)k_1^2 + ak_2^2)\gamma^2 + 2(k_1 + k_2)ak_1k_2\gamma + ak_1^2k_2^2}{(k_1k_2 + (k_1 + k_2)\gamma)^2\gamma^2}. \quad (3.49)$$

Puesto que $0 \leq a \leq 1$, la expresión anterior es siempre negativa y, por tanto, el MFPT es de nuevo una función monótona decreciente de γ . En consecuencia, tampoco en este modelo tiene lugar efecto resonante. En la Fig. 3.5 se ha representado el MFPT dado por la Ec. (3.47) frente a γ , para los mismos valores de los parámetros que en la Fig. 3.2, observándose el comportamiento antes descrito.

De los resultados obtenidos para los tres modelos analizados anteriormente podemos concluir que, para que sea posible el efecto resonante, los dos estados de la sustancia intermedia B deben jugar papeles opuestos en el proceso de transformación de A en C . Con esto queremos decir que uno de los dos estados debe favorecer por completo esta transformación, mientras que el otro debe dificultarla totalmente. De esta forma, las fluctuaciones entre los estados B^+ y B^- generan una competencia que es la responsable del fenómeno resonante. Este doble papel se pone claramente de manifiesto en el modelo esquematizado en la Fig. 3.1 que, como antes vimos, presenta comportamiento resonante para determinados valores de los parámetros. El estado B^- favorece en los dos pasos (de A a B y de B a C) la transformación de A en C , mientras que el estado B^+ , no sólo bloquea la transformación

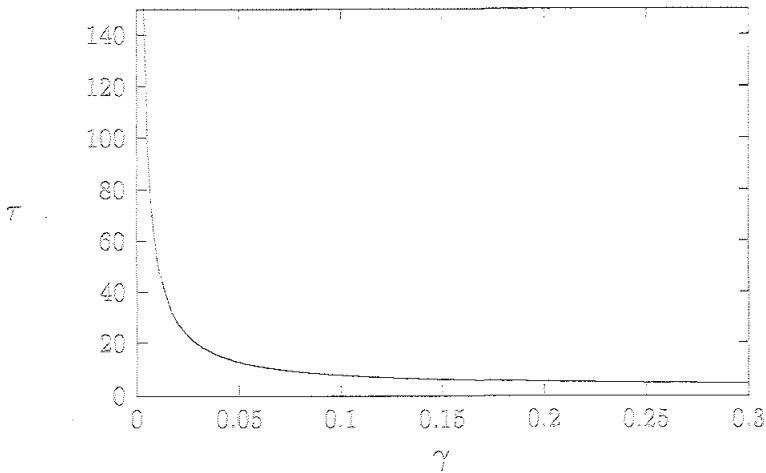


Figura 3.5: MFPT frente a γ para el modelo representado en la Fig. 3.3(b) y los mismos valores de los parámetros que en la Fig. 3.2.

de B en C , sino que también restituye parte de la sustancia B a la inicial A . Por el contrario, en el modelo de la Fig. 3.3(b), aunque el estado B^- favorece la transformación de A en C de la misma manera que en el anterior, el estado B^+ en parte la favorece, al permitir el paso de A a B , y en parte la impide, ya que de B no puede transitar a C . Igualmente, en el modelo representado en la Fig. 3.3(a), tanto el estado B^+ como el B^- favorecen y dificultan simultáneamente la transformación de A en C . Por este motivo, ninguno de estos dos modelos exhibe comportamiento resonante.

Para finalizar esta sección, consideremos que el proceso que lleva desde A hasta C corresponde a la difusión de una partícula en una red monodimensional desde el nudo $n = 0$ al nudo $n = 2$, en presencia de un campo externo. En este caso, las probabilidades de transición por unidad de tiempo hacia la derecha y hacia la izquierda son, respectivamente, $(1 - \lambda)\omega$ y $(1 + \lambda)\omega$, siendo $0 < \lambda < 1$. El parámetro λ es proporcional a la pendiente del potencial externo, o lo que es lo mismo, a la fuerza externa [43] y ω es una frecuencia natural que utilizaremos para fijar la escala de tiempos y, en consecuencia, haremos igual a la unidad a partir de ahora.

Supongamos ahora que, como consecuencia de fluctuaciones en el campo externo, el parámetro λ fluctúa entre dos valores, a los que llamaremos λ_+ y λ_- , con probabilidad de transición por unidad de tiempo γ . Las probabilidades parcialmente promediadas de encontrar a la partícula en el nudo n -ésimo para un valor dado de λ obedecerán la ecuación maestra

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} P_+(1, t) = & - (1 - \lambda_+ + \gamma) P_+(1, t) \\ & + (1 + \lambda_+) P_+(2, t) + \gamma P_-(1, t), \end{aligned} \quad (3.50)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} P_-(1, t) = & - (1 - \lambda_- + \gamma) P_-(1, t) \\ & + (1 + \lambda_-) P_-(2, t) + \gamma P_+(1, t), \end{aligned} \quad (3.51)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} P_+(2, t) = & - (2 + \gamma) P_+(2, t) \\ & + (1 - \lambda_+) P_+(1, t) + \gamma P_-(2, t), \end{aligned} \quad (3.52)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} P_-(2, t) = & - (2 + \gamma) P_-(2, t) \\ & + (1 - \lambda_-) P_-(1, t) + \gamma P_+(2, t), \end{aligned} \quad (3.53)$$

donde hemos introducido una frontera reflectante en $n = 0$ y una absorbente en $n = 2$. Puesto que uno de los dos valores del parámetro λ (el más pequeño) favorece más que el otro la salida de la partícula, es de esperar que este modelo presente un comportamiento resonante en una cierta región del espacio de los parámetros. Como en los modelos estudiados anteriormente, el cálculo del MFPT correspondiente a las condiciones iniciales $P_+(1, 0) = a$, $P_-(1, 0) = 1 - a$ y $P_+(2, 0) = P_-(2, 0) = 0$ es directo. El resultado es

$$\tau = \frac{\beta_2 \gamma^2 + \beta_1 \gamma + \beta_0}{\xi_2 \gamma^2 + \xi_1 \gamma + \xi_0}, \quad (3.54)$$

siendo

$$\beta_2 = 2(6 - \lambda_+ - \lambda_-), \quad (3.55)$$

$$\begin{aligned} \beta_1 = & 18 - (5 + 2a)\lambda_- - (7 - 2a)\lambda_+ + a\lambda_-^2 \\ & + \lambda_+\lambda_- + (1 - a)\lambda_+^2, \end{aligned} \quad (3.56)$$

$$\begin{aligned} \beta_0 = & 3 - (6 - 5a)\lambda_+ - (1 + 5a)\lambda_- + 3(1 - a)\lambda_+^2 + 3a\lambda_-^2 \\ & + 2\lambda_+\lambda_- - a\lambda_-^2\lambda_+ - (1 - a)\lambda_-\lambda_+^2, \end{aligned} \quad (3.57)$$

$$\xi_2 = (\lambda_+ + \lambda_- - 2)^2, \quad (3.58)$$

$$\xi_1 = 6 - 7(\lambda_+ + \lambda_-) + 3(\lambda_+ + \lambda_-)^2 - (\lambda_+ + \lambda_- + 2)\lambda_+\lambda_-, \quad (3.59)$$

$$\xi_0 = (\lambda_+ - 1)^2(\lambda_- - 1)^2. \quad (3.60)$$

De esta expresión se deduce inmediatamente que el límite para $\gamma \rightarrow \infty$ del MFPT es

$$\tau_\infty = \frac{\beta_2}{\xi_2} = \frac{2(6 - \lambda_+ - \lambda_-)}{(\lambda_+ + \lambda_- - 2)^2}, \quad (3.61)$$

mientras que el correspondiente a $\gamma \rightarrow 0$ es

$$\tau^* \equiv \lim_{\gamma \rightarrow 0} \tau(\gamma) = \frac{\beta_0}{\xi_0}. \quad (3.62)$$

El estudio detallado del MFPT es muy complicado dada la extensión de la expresión. No obstante, si $\tau^* > \tau_\infty$, se puede confirmar la existencia de efecto resonante estudiando la corrección de primer orden en γ^{-1} a τ_∞ . Cuando esta corrección es negativa $\tau(\gamma)$ debe presentar necesariamente un mínimo para un cierto valor finito de γ . Si nos restringimos a la condición inicial $\alpha = 1/2$ es fácil comprobar que

$$\tau^* - \tau_\infty = \frac{(\lambda_+ - \lambda_-)^2 Q(\lambda_+, \lambda_-)}{2(\lambda_+ - 1)^2(\lambda_- - 1)^2(\lambda_+ + \lambda_- - 2)^2}, \quad (3.63)$$

donde $Q(\lambda_+, \lambda_-)$ es un polinomio en λ_+ y λ_- que puede escribirse del modo siguiente

$$\begin{aligned} Q(\lambda_+, \lambda_-) &= 2(\lambda_+ - 1)^2 + 2(\lambda_- - 1)^2 + 8(1 - \lambda_+)(1 - \lambda_-) \\ &+ (1 - \lambda_+)(1 - \lambda_-)(2 - \lambda_+ - \lambda_-). \end{aligned} \quad (3.64)$$

Puesto que para los valores de λ_+ y λ_- permitidos (λ_+ y $\lambda_- \in (0, 1)$) se verifica que $Q(\lambda_+, \lambda_-) > 0$, para la condición inicial considerada siempre se cumple que $\tau^* - \tau_\infty > 0$. Por otra parte, el comportamiento asintótico del MFPT para $\gamma \gg 1$ es

$$\tau \sim \frac{2(6 - \lambda_+ - \lambda_-)}{(\lambda_+ + \lambda_- - 2)^2} - \frac{(\lambda_+ - \lambda_-)^2 [16 - (\lambda_+ + \lambda_- - 2)^2]}{2(\lambda_+ + \lambda_- - 2)^4} \gamma^{-1} + \mathcal{O}(\gamma^{-2}), \quad (3.65)$$

y, por tanto, la corrección en γ^{-1} es siempre negativa. De todo esto se sigue que, para $\alpha = 1/2$, el sistema presenta comportamiento resonante con independencia de los valores que tomen los parámetros λ_+ y λ_- . Este resultado

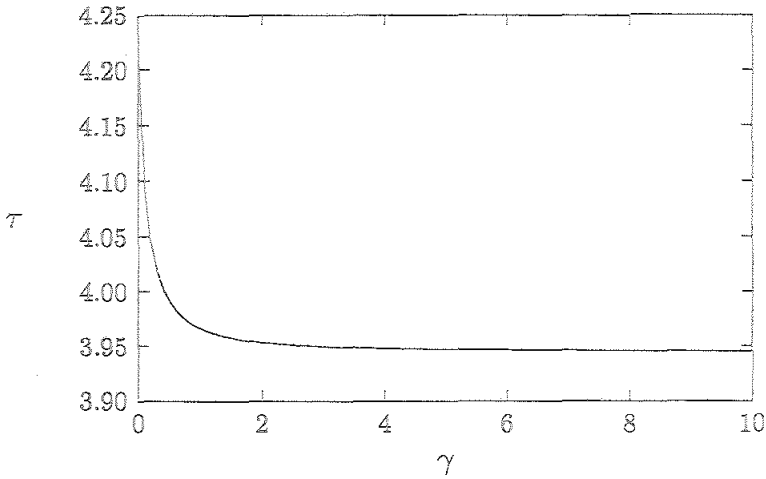


Figura 3.6: MFPT frente a γ para la difusión de una partícula sometida a una fuerza externa fluctuante, entre los nudos $n = 0$ y $n = 2$ de una red unidimensional. Los valores de los parámetros son $a = 0.8$, $\lambda_+ = 0.2$ y $\lambda_- = 0.1$.

no es cierto en general para otros valores de a . Como ejemplo de esto, en la Fig. 3.6 se ha representado el MFPT frente a γ para $a = 0.8$, $\lambda_+ = 0.2$ y $\lambda_- = 0.1$. Puede observarse que éste decae monótonamente hacia τ_∞ y, por lo tanto, no presenta comportamiento resonante.

Si aumentamos el número de estados intermedios B , escalamos convenientemente las probabilidades de transición por unidad de tiempo con la densidad de nudos y tomamos el límite continuo, puede probarse [43] que este sistema es equivalente al movimiento de una partícula browniana en una barrera lineal estudiado por Doering y Gadoua [6]. De acuerdo con los resultados anteriores, no es sorprendente que el modelo analizado por estos autores presente resonancia para cualquier pareja de valores de la pendiente de la barrera, ya que ellos se restringen a la condición inicial $a = 1/2$. En vista del análisis presentado aquí, cabe especular que este comportamiento resonante puede desaparecer para otras condiciones iniciales.

3.4 Discusión

En este capítulo hemos mostrado que el fenómeno resonante denominado activación resonante puede entenderse en términos de un modelo cinético simple. La característica fundamental del modelo es la presencia de un estado intermedio fluctuante. La simplicidad técnica de la ecuación maestra que gobierna la evolución temporal del sistema nos ha permitido obtener una expresión exacta para el tiempo medio de primer paso en función de los parámetros del sistema y de las condiciones iniciales. De esta forma, ha sido posible efectuar un análisis detallado de las condiciones requeridas para la aparición de comportamiento resonante. Una condición necesaria parece ser que las fluctuaciones del estado intermedio tengan efectos cualitativamente diferentes sobre las probabilidades de transición por unidad de tiempo que apuntan en la dirección del estado final y aquéllas que señalan en la dirección opuesta.

Otro hecho interesante que hemos obtenido en este capítulo es que las condiciones iniciales del problema tienen un efecto muy importante sobre el fenómeno resonante. Éstas no sólo influyen en la amplitud del fenómeno, sino que además determinan su aparición. Por tanto, deben tenerse en cuenta a la hora de diseñar experimentos que muestren activación resonante. En este sentido, aunque no hemos pretendido relacionar nuestro modelo con ningún sistema real, está claro que por su estructura puede ser útil para describir determinadas reacciones químicas. Además, algunas generalizaciones de nuestro modelo, como la descrita al final de la sección 3.3, pueden aplicarse al estudio de diversos problemas físicos, por ejemplo, la difusión de una partícula en una barrera lineal fluctuante [6].

Capítulo 4

Comportamiento resonante en problemas de tiempo de primer paso sobre una red fluctuante

4.1 Introducción

En este capítulo, vamos a analizar la posibilidad de que presente activación resonante una partícula que describe un camino aleatorio monodimensional sobre una red fluctuante [44]. En concreto, consideraremos una red homogénea que fluctúa en el tiempo entre dos estados. El tiempo característico de relajación será el mismo para los dos estados y, por tanto, la fracción de tiempo de permanencia en cada uno de ellos también será la misma. En uno de los estados de la red, la partícula sólo puede moverse hacia la derecha, mientras que en el otro, sólo lo puede hacer hacia la izquierda. La magnitud que vamos a estudiar es el tiempo medio de permanencia de la partícula en un segmento dado de línea.

Nuestro modelo es similar al estudiado por Fletcher et al. [4], que hemos comentado en el capítulo 2. Sin embargo, en lugar de una fuerza externa oscilatoria, nosotros introducimos transiciones aleatorias que favorecen el movimiento en un sentido y lo impiden en el otro. La diferencia más importante entre el fenómeno de la resonancia estocástica y el de la activación

resonante aquí presentado es que, en este último, no hay ninguna fuerza oscilatoria externa. El efecto resonante se produce como consecuencia de la interacción entre dos contribuciones de ruido. Si el modelo que proponemos presenta un efecto de este tipo bajo determinadas condiciones de frontera (lo cual es cierto, como veremos en la sección 4.3) estaremos ante un fenómeno de activación resonante. Por tanto, si comparamos nuestros resultados con los obtenidos en la referencia [4], podremos obtener información directa acerca de las analogías y diferencias que existen entre la resonancia estocástica y la activación resonante. En particular, probaremos que la activación resonante está íntimamente relacionada con la introducción de algún tipo de asimetría en el sistema. En nuestro modelo esto lo conseguiremos modificando las condiciones de frontera. Este requisito parece no ser necesario en el caso de la resonancia estocástica, como se pone de manifiesto en la referencia [4]. No obstante, a pesar de las diferencias que presentan estos dos tipos de fenómenos en lo referente a los requisitos necesarios para su aparición, veremos que cuando se manifiesta el efecto resonante, éste es muy similar en los dos casos.

La organización de este capítulo será la siguiente: en la sección 4.2 estudiaremos el movimiento de una partícula entre dos fronteras absorbentes, y calcularemos una expresión exacta para el MFPT, que resulta ser una función monótona creciente de la probabilidad de transición de la red por unidad de tiempo. Probaremos también que este resultado es independiente del estado inicial de la red, así como de la distribución inicial de posiciones de la partícula. En la sección 4.3, analizaremos el caso en el que una de las fronteras absorbentes se sustituye por una reflectante. De nuevo, es posible obtener una expresión exacta para el MFPT. A diferencia de lo que sucedía en el caso anterior, éste presenta ahora un mínimo para un cierto valor de la probabilidad de transición de la red por unidad de tiempo. Como veremos también en esa sección, la existencia de este mínimo está directamente relacionada con la presencia de dos mecanismos opuestos que compiten. Para finalizar, presentaremos un breve resumen y discutiremos los resultados obtenidos más interesantes.

4.2 Segmento de línea con dos fronteras absorbentes

Consideremos un camino aleatorio monodimensional descrito por la ecuación maestra

$$\frac{\partial}{\partial t} p_n(t) = -(w_+ + w_-) p_n(t) + w_+ p_{n-1}(t) + w_- p_{n+1}(t), \quad (4.1)$$

en la que $p_n(t)$ representa la probabilidad de que la partícula se encuentre en el nudo n -ésimo en el instante t , siendo w_+ y w_- las probabilidades de transición por unidad de tiempo hacia la derecha y hacia la izquierda, respectivamente. Estas probabilidades no son constantes, sino que fluctúan en el tiempo de la forma siguiente. La red, como un todo, puede encontrarse en dos posibles estados que vendrán caracterizados por el parámetro α . Cuando $\alpha = 1$, se tiene que $w_+ = k$ y $w_- = 0$, mientras que para $\alpha = 2$, $w_+ = 0$ y $w_- = k$. Con otras palabras, cuando la red se encuentra en el estado $\alpha = 1$ ($\alpha = 2$) sólo son posibles transiciones a la derecha (izquierda) con una probabilidad de transición por unidad de tiempo k . La variación en el tiempo de α viene dada a su vez por otra ecuación maestra con una probabilidad de transición fija γ , es decir, la red permanece en un estado, antes de saltar al otro, un tiempo aleatorio con una distribución de probabilidades exponencial de media γ^{-1} . En la Fig. 4.1 se ilustra gráficamente la descripción anterior.

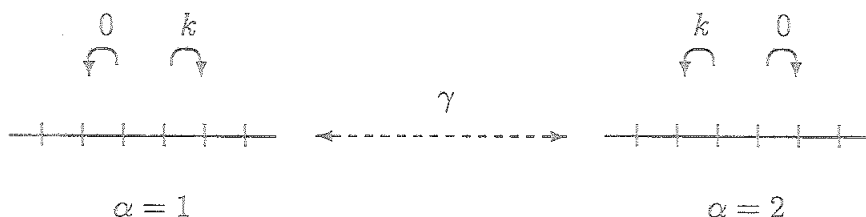


Figura 4.1: Esquema de la red fluctuante.

Estamos interesados en el cálculo del tiempo medio de permanencia de una partícula en el segmento $[-N, N]$. En esta sección vamos a considerar que la partícula puede abandonar el segmento por cualquiera de los dos extremos

y, por lo tanto, introduciremos fronteras absorbentes en los nudos $n = -N$ y $n = N$. A este modelo, para distinguirlo del que estudiaremos en la sección siguiente, lo denominaremos *modelo simétrico*, ya que presenta las mismas condiciones de frontera en los dos extremos. Al igual que sucedía con el sistema estudiado en el capítulo anterior, estamos ante un problema típico de desorden dinámico. Siguiendo el esquema general revisado por Zwanzig en la referencia [39], describiremos la evolución temporal del sistema en términos de las probabilidades compuestas, $p_n(\alpha, t)$, de que en el instante de tiempo t la partícula esté en el nudo n -ésimo y el estado de la red sea α . Estas probabilidades obedecen a la ecuación maestra

$$\frac{\partial}{\partial t} p_{-N}(1, t) = -(k + \gamma)p_{-N}(1, t) + \gamma p_{-N}(2, t), \quad (4.2)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} p_n(1, t) = -(k + \gamma)p_n(1, t) + k p_{n-1}(1, t) + \gamma p_n(2, t), \quad (4.3)$$

para $-N + 1 \leq n \leq N$,

$$\frac{\partial}{\partial t} p_n(2, t) = -(k + \gamma)p_n(2, t) + k p_{n+1}(2, t) + \gamma p_n(1, t), \quad (4.4)$$

para $-N \leq n \leq N - 1$, y

$$\frac{\partial}{\partial t} p_N(2, t) = -(k + \gamma)p_N(2, t) + \gamma p_N(1, t). \quad (4.5)$$

La interpretación en términos de balance de estas ecuaciones está clara. A las Ecs. (4.2) y (4.5), debido a las fronteras absorbentes, les falta la contribución correspondiente a la llegada de partículas procedentes de los nudos contiguos. Evidentemente, la probabilidad de que una partícula se encuentre en el nudo n -ésimo, con independencia del estado de la red, será

$$p_n(t) = p_n(1, t) + p_n(2, t). \quad (4.6)$$

Especifiquemos ahora las condiciones iniciales que vamos a imponer. En $t = 0$ supondremos que la partícula se encuentra en el origen, y que la red tiene la misma probabilidad de estar en cualquiera de sus dos estados, esto es,

$$p_n(\alpha, 0) = \frac{1}{2} \delta_{n,0}. \quad (4.7)$$

El MFPT viene dado por [42]

$$\tau = \sum_{n=-N}^N \int_0^{\infty} dt p_n(t). \quad (4.8)$$

Puesto que tanto las Ecs. (4.2)-(4.5) como la condición inicial (4.7) son invariantes ante la transformación $n, 1 \rightarrow -n, 2$, la solución también debe presentar esta propiedad de simetría, es decir, debe de cumplirse

$$p_n(1, t) = p_{-n}(2, t) \quad (4.9)$$

y, por tanto,

$$\begin{aligned} \tau &= \sum_{n=-N}^N \int_0^{\infty} dt p_n(1, t) + \sum_{n=-N}^N \int_0^{\infty} dt p_n(2, t) \\ &= 2 \sum_{n=-N}^N \int_0^{\infty} dt p_n(1, t) = 2 \sum_{n=-N}^N \alpha_n, \end{aligned} \quad (4.10)$$

donde hemos introducido la notación

$$\alpha_n = \int_0^{\infty} dt p_n(1, t). \quad (4.11)$$

Si integramos las Ecs. (4.2)-(4.5) respecto al tiempo entre cero e infinito, haciendo uso de la propiedad (4.9) y de la condición inicial (4.7), llegamos a que

$$(k + \gamma)\alpha_{-N} - \gamma\alpha_N = 0 \quad (4.12)$$

y

$$(k + \gamma)\alpha_n - k\alpha_{n-1} - \gamma\alpha_{-n} = \frac{1}{2}\delta_{n,0}, \quad (4.13)$$

para $-N + 1 \leq n \leq N$. Obsérvese que, debido a las fronteras absorbentes, para $k \neq 0$ se verifica que $\lim_{t \rightarrow \infty} p_n(\alpha, t) = 0$ y, por tanto, el límite superior de la integral de las derivadas de las probabilidades se anula siempre. Para resolver el sistema de ecuaciones (4.12)-(4.13), vamos a sumar la Ec. (4.13) desde $n = -l + 1$ hasta $n = l$, con $1 \leq l \leq N$, obteniendo así la expresión

$$\alpha_l - \alpha_{-l} = \frac{1}{2(k + \gamma)}. \quad (4.14)$$

Introduciendo este resultado en la Ec. (4.13), llegamos a la siguiente relación de recurrencia

$$\alpha_{l-1} = \alpha_l + \frac{\gamma}{2k(k+\gamma)}, \quad (4.15)$$

cuya solución en función de α_N es

$$\alpha_n = \alpha_N + \frac{(N-n)\gamma}{2k(k+\gamma)}, \quad (4.16)$$

para $0 \leq n \leq N$. Aún nos falta determinar α_N , pero se calcula fácilmente particularizando la Ec. (4.14) para $l = N$ y comparando el resultado con la Ec. (4.12). Si resolvemos el sistema de ecuaciones que nos queda, se obtiene que $\alpha_N = 1/(2k)$. Luego,

$$\alpha_n = \frac{1}{2k} + \frac{(N-n)\gamma}{2k(k+\gamma)}, \quad (4.17)$$

para $0 \leq n \leq N$ y, utilizando de nuevo la Ec. (4.14),

$$\alpha_n = \frac{\gamma(N+n+1)}{2k(k+\gamma)}, \quad (4.18)$$

para $-N \leq n \leq -1$. El uso de la igualdad $\sum_{n=1}^N n = N(N+1)/2$ y de la Ec. (4.10), nos permite ya obtener fácilmente el siguiente resultado para el MFPT

$$\tau = \frac{N+1}{k} + \frac{N(N+1)\gamma}{k(k+\gamma)}. \quad (4.19)$$

Antes de pasar a discutir las implicaciones que se deducen de este resultado, vamos a probar que no depende del estado inicial de la red que hemos elegido. Consideremos, en lugar de la Ec. (4.7), la siguiente condición inicial

$$p_n(1,0) = a\delta_{n,0}, \quad p_n(2,0) = (1-a)\delta_{n,0}, \quad (4.20)$$

con $0 \leq a \leq 1$. Evidentemente, las condiciones de simetría de la Ec. (4.9) no se pueden aplicar a este caso más general y, por tanto, tendremos que considerar el conjunto completo de Ecs. (4.2)-(4.5). Integrándolas respecto al tiempo desde cero hasta infinito, llegamos al sistema de ecuaciones

$$(k+\gamma)\alpha_{-N} - \gamma\beta_{-N} = 0, \quad (4.21)$$

$$(k + \gamma)\alpha_n - k\alpha_{n-1} - \gamma\beta_n = a\delta_{n,0}, \quad (4.22)$$

para $-N + 1 \leq n \leq N$,

$$(k + \gamma)\beta_n - k\beta_{n+1} - \gamma\alpha_n = (1 - a)\delta_{n,0}, \quad (4.23)$$

para $-N \leq n \leq N - 1$, y

$$(k + \gamma)\beta_N - \gamma\alpha_N = 0. \quad (4.24)$$

En las expresiones anteriores α_n se define como en la Ec. (4.11) y

$$\beta_n = \int_0^\infty dt p_n(2, t). \quad (4.25)$$

Descompongamos ahora α_n y β_n en la forma

$$\alpha_n = \alpha_n^s + \alpha_n', \quad (4.26)$$

$$\beta_n = \beta_n^s + \beta_n', \quad (4.27)$$

donde α_n^s y β_n^s son las soluciones del problema simétrico anterior, es decir, con la condición inicial (4.7). Por tanto, se verifica que $\alpha_n^s = \beta_{-n}^s$. Sustituyendo las expresiones (4.26) y (4.27) en las Ecs. (4.21)-(4.24) obtenemos

$$(k + \gamma)\alpha'_{-N} - \gamma\beta'_{-N} = 0, \quad (4.28)$$

$$(k + \gamma)\alpha'_n - k\alpha'_{n-1} - \gamma\beta'_n = (a - \frac{1}{2})\delta_{n,0}, \quad (4.29)$$

para $-N + 1 \leq n \leq N$,

$$(k + \gamma)\beta'_n - k\beta'_{n+1} - \gamma\alpha'_n = (\frac{1}{2} - a)\delta_{n,0}, \quad (4.30)$$

para $-N \leq n \leq N - 1$, y

$$(k + \gamma)\beta'_N - \gamma\alpha'_N = 0. \quad (4.31)$$

De la estructura antisimétrica que presentan las ecuaciones anteriores es fácil deducir que su solución debe verificar que

$$\alpha'_n = -\beta'_{-n}, \quad (4.32)$$

para $-N \leq n \leq N$. Esto implica que la expresión del MFPT,

$$\tau = \sum_{n=-N}^N (\alpha_n + \beta_n), \quad (4.33)$$

se reduce a

$$\tau = \sum_{n=-N}^N (\alpha_n^s + \beta_n^s) = 2 \sum_{n=-N}^N \alpha_n^s, \quad (4.34)$$

que es el mismo resultado que obtuvimos con la condición inicial (4.7). Por tanto, el MFPT es independiente del valor de a .

Como sucede normalmente en los problemas de desorden dinámico, los comportamientos de τ para los dos valores límites de la probabilidad de transición por unidad de tiempo γ tienen una interpretación sencilla. Para valores muy grandes de γ , la Ec. (4.19) se reduce a

$$\tau \longrightarrow \tau_\infty = \frac{(N+1)^2}{k}, \quad (4.35)$$

que es el MFPT correspondiente a una partícula que tiene en todo instante la misma probabilidad de transición por unidad de tiempo, $k/2$, de saltar a la derecha o a la izquierda. Por otra parte, en el límite de desorden estático $\gamma \rightarrow 0$, resulta

$$\tau \longrightarrow \tau_0 = \frac{N+1}{k}, \quad (4.36)$$

que es el tiempo medio que tardaría una partícula, situada inicialmente en el nudo $n=0$, en abandonar el intervalo $[0, N]$, moviéndose únicamente hacia la derecha con probabilidad de transición k .

Si derivamos la Ec. (4.19) con respecto a γ obtenemos que

$$\frac{\partial \tau}{\partial \gamma} = \frac{N(N+1)}{(k+\gamma)^2} > 0. \quad (4.37)$$

Por tanto, el MFPT es una función monótona creciente de γ , que toma valores comprendidos entre τ_0 y τ_∞ . Este resultado tiene fácil explicación ya que, al aumentar γ , la partícula realiza un mayor número de cambios de sentido en su movimiento. Por consiguiente, aumenta el tiempo que tarda en alcanzar una frontera y salir del intervalo. En este modelo no aparece pues fenómeno de resonancia.

En el apéndice A, se desarrolla un método que permite calcular el MFPT para condiciones iniciales arbitrarias del estado de la red y de la posición de la partícula. El caso más general posible que podemos considerar para la condición inicial de la probabilidad compuesta es

$$p_n(1, 0) = \alpha p_n, \quad p_n(2, 0) = (1 - \alpha)p_n, \quad (4.38)$$

donde p_n es la probabilidad de que la partícula se encuentre inicialmente en el nudo n -ésimo independientemente del estado de la red. En el apéndice antes mencionado se prueba que, en este caso, el MFPT viene dado por

$$\tau = \sum_{l=-N}^N (a\tau(l, 1) + (1 - a)\tau(l, 2)) p_l, \quad (4.39)$$

siendo

$$\tau(l, \alpha) = \frac{(N + 1 + (-1)^\alpha l)(k + \gamma(N + 1 - (-1)^\alpha l))}{k(k + \gamma)}, \quad (4.40)$$

para $\alpha = 1$ y 2 . Las funciones $\tau(l, \alpha)$ son monótonas crecientes de γ , ya que

$$\frac{\partial \tau(l, \alpha)}{\partial \gamma} = \frac{N^2 - l^2 + N - (-1)^\alpha l}{(k + \gamma)^2} \geq 0. \quad (4.41)$$

Como la forma general del MFPT es una combinación lineal con coeficientes positivos de estas funciones, él mismo será una función monótona creciente de γ . Por tanto, no aparece fenómeno resonante, cualquiera que sea el estado inicial de la red y la distribución inicial para la posición de la partícula. En ese apéndice también se calcula el MFPT para dos condiciones iniciales especialmente interesantes. La primera corresponde a una partícula localizada inicialmente en el nudo l -ésimo, con la red en un estado arbitrario, es decir, con probabilidad a de estar en el estado $\alpha = 1$ y, por tanto, probabilidad $1 - a$ de estar en $\alpha = 2$. El resultado que se obtiene es

$$\tau = \frac{k(N + 1 + (1 - 2a)l) + \gamma((N + 1)^2 - l^2)}{k(k + \gamma)}, \quad (4.42)$$

que, como se observa, se reduce a la Ec. (4.19) cuando $l = 0$. En la otra condición inicial la partícula está uniformemente distribuida entre todos los

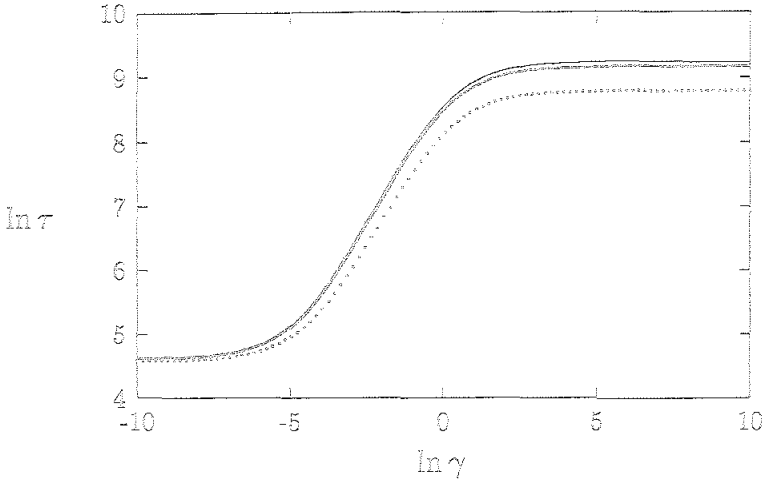


Figura 4.2: Logaritmo neperiano del MFPT en función del logaritmo neperiano de γ para un segmento de red con dos fronteras absorbentes, y tres tipos de condiciones iniciales. El número de nudos es $N = 100$, y el tiempo se mide en unidades k^{-1} . Las líneas continuas corresponden a la Ec. (4.42) con $l = 0$ (línea delgada), y $l = 25$ (línea gruesa). La línea de puntos corresponde a la Ec. (4.43). Para las dos líneas continuas el estado inicial de la red es $\alpha = 1/2$.

nudos, mientras que el estado de la red es el mismo que antes. El MFPT que resulta es

$$\tau = \frac{N+1}{k} + \frac{2N(N+1)\gamma}{3k(k+\gamma)}. \quad (4.43)$$

Al igual que sucedía al colocar inicialmente a la partícula en el nudo $l = 0$, este resultado es independiente del estado inicial de la red.

En la Fig. 4.2 se representan el MFPT, como función de γ , para distintos tipos de condiciones iniciales. El número de nudos considerado es $N = 100$, el tiempo se mide en unidades de k^{-1} , y el estado inicial de la red es el asociado al valor $\alpha = 1/2$. Las líneas continuas corresponden a condiciones iniciales de la partícula en los nudos $l = 0$ (línea delgada) y $l = 25$ (línea gruesa). La línea de puntos se ha obtenido con una distribución uniforme de la posición

inicial de la partícula. Como probamos anteriormente, no aparece ningún fenómeno resonante.

4.3 Segmento de línea con una frontera absorbente y otra reflectante

En esta sección vamos a estudiar una modificación del modelo anterior. Sustituiremos la frontera absorbente del nudo $n = -N$ por una reflectante, de forma que la partícula sólo pueda abandonar el segmento por el nudo $n = N$. Esto rompe la simetría del sistema ya que, en este caso, la partícula se mueve hacia la salida cuando la red se encuentra en el estado $\alpha = 1$, mientras que se aleja de ésta cuando la red está en el estado $\alpha = 2$. Por consiguiente, los dos estados de la red dejan de ser equivalentes, de ahí que a este modelo lo denominemos *modelo asimétrico*. Las ecuaciones que nos determinan la evolución temporal de las distribuciones de probabilidades compuestas son

$$\frac{\partial}{\partial t} p_{-N}(1, t) = -(k + \gamma) p_{-N}(1, t) + \gamma p_{-N}(2, t), \quad (4.44)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} p_{-N}(2, t) = -\gamma p_{-N}(2, t) + k p_{-N+1}(2, t) + \gamma p_{-N}(1, t), \quad (4.45)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} p_n(1, t) = -(k + \gamma) p_n(1, t) + k p_{n-1}(1, t) + \gamma p_n(2, t), \quad (4.46)$$

para $-N + 1 \leq n \leq N$,

$$\frac{\partial}{\partial t} p_n(2, t) = -(k + \gamma) p_n(2, t) + k p_{n+1}(2, t) + \gamma p_n(1, t), \quad (4.47)$$

para $-N + 1 \leq n \leq N - 1$, y

$$\frac{\partial}{\partial t} p_N(2, t) = -(k + \gamma) p_N(2, t) + \gamma p_N(1, t). \quad (4.48)$$

Obsérvese que las Ecs. (4.44)-(4.48) sólo se diferencian de las (4.2)-(4.5) en que, cuando la red se encuentra en el estado $\alpha = 2$, hemos suprimido el término de salida de probabilidad por el nudo $n = -N$, de forma que esta frontera pasa de ser absorbente a ser reflectante. Las condiciones iniciales que vamos a elegir son nuevamente las dadas por las Ecs. (4.20). En el caso

límite $\gamma = 0$, con $a \neq 1$, β_n diverge porque $p_{-N}(2, t)$ no tiende a cero cuando t tiende a infinito. Consecuentemente, el MFPT también diverge. El caso $\gamma = 0$ con $a = 1$ se reduce al modelo discutido en la sección anterior, ya que la frontera en $n = -N$ no juega ningún papel. El MFPT será, por tanto, $\tau(\gamma = 0, a = 1) = (N+1)/k$. Así pues, a partir de ahora nos restringiremos al caso $\gamma \neq 0$. Si integramos las Ecs. (4.44)-(4.48) respecto al tiempo, teniendo en cuenta la expresión (4.20), obtenemos el sistema de ecuaciones

$$(k + \gamma)\alpha_{-N} - \gamma\beta_{-N} = 0, \quad (4.49)$$

$$\gamma\beta_{-N} - k\beta_{-N+1} - \gamma\alpha_{-N} = 0, \quad (4.50)$$

$$(k + \gamma)\alpha_n - k\alpha_{n-1} - \gamma\beta_n = a\delta_{n,0}, \quad (4.51)$$

para $-N + 1 \leq n \leq N$,

$$(k + \gamma)\beta_n - k\beta_{n+1} - \gamma\alpha_n = (1 - a)\delta_{n,0}, \quad (4.52)$$

para $-N + 1 \leq n \leq N - 1$, y

$$(k + \gamma)\beta_N - \gamma\alpha_N = 0. \quad (4.53)$$

Para resolver este sistema vamos a buscar soluciones que sean lineales en n . Esto está motivado por los resultados que obtuvimos en la sección anterior. Si encontramos soluciones de este tipo, éstas serán únicas, dado el carácter compatible determinado del sistema lineal que queremos resolver. Así pues, escribimos

$$\alpha_n = \mu_1 + n\mu_2, \quad (4.54)$$

para $0 \leq n \leq N$,

$$\alpha_n = \mu'_1 + n\mu'_2, \quad (4.55)$$

para $-N \leq n \leq -1$,

$$\beta_n = \nu_1 + n\nu_2, \quad (4.56)$$

para $1 \leq n \leq N$,

$$\beta_n = \nu'_1 + n\nu'_2, \quad (4.57)$$

para $-N + 1 \leq n \leq 0$, y

$$\beta_{-N} = \nu_0, \quad (4.58)$$

siendo $\mu_1, \mu_2, \mu'_1, \mu'_2, \nu_1, \nu_2, \nu'_1, \nu'_2$, y ν_0 parámetros a determinar que no dependen de n . Hemos elegido nueve parámetros independientes porque

al sustituir las expresiones (4.54)-(4.58) en las ecuaciones (4.49)-(4.53), obtendremos nueve relaciones entre ellos y, por tanto, un número menor de parámetros nos puede llevar a una incompatibilidad. Realizando cálculos algebraicos sencillos, es fácil obtener los valores de α_n y β_n . Si hacemos uso de éstos y de la Ec. (4.33), el MFPT que resulta es

$$\tau = \frac{1-a}{\gamma} + \frac{2(1-a)N}{k+\gamma} + \frac{2(N+1)}{k} + \frac{3N(N+1)\gamma}{k(k+\gamma)}. \quad (4.59)$$

En el apéndice B se detallan estas operaciones. Se puede observar que si hacemos $a = 1$ en la expresión anterior y, posteriormente, tomamos el límite $\gamma \rightarrow 0$, obtenemos

$$\lim_{\gamma \rightarrow 0} \tau(\gamma, a = 1) = \frac{2(N+1)}{k} = 2\tau(\gamma = 0, a = 1). \quad (4.60)$$

Este resultado refleja el hecho de que τ , considerado como función de (γ, a) , presenta una discontinuidad en $(0, 1)$. Esto puede ponerse de manifiesto también verificando que los límites $\gamma \rightarrow 0$ y $a \rightarrow 1$ de la Ec. (4.59) no conmutan.

Al comparar las expresiones (4.19) y (4.59) se observa que el MFPT cambia de manera no trivial al introducir una frontera reflectante en el problema. Este cambio se debe a la ruptura de simetría que sufre el sistema al modificar las condiciones en sus extremos. Si calculamos la derivada respecto a γ de la expresión (4.59), el resultado que obtenemos es

$$\frac{\partial \tau}{\partial \gamma} = \frac{(\alpha - 1 + (1 + 2\alpha)N + 3N^2)\gamma^2 - 2(1 - \alpha)k\gamma - (1 - \alpha)k^2}{\gamma^2(k + \gamma)^2}. \quad (4.61)$$

El único valor positivo de γ que anula esta derivada es

$$\gamma_0 = k(1 - a)^{1/2} \frac{(1 - a)^{1/2} + (3N(N + 1) - 2(1 - a)N)^{1/2}}{3N(N + 1) - (2N + 1)(1 - a)}. \quad (4.62)$$

Es fácil comprobar que, para este valor, la derivada segunda de τ respecto a γ es siempre positiva. De todo esto se sigue que, para $a \neq 1$, $\tau(\gamma)$ presenta un mínimo en γ_0 . Para $\gamma > \gamma_0$, τ se aproxima monótonamente al valor asintótico

$$\tau_\infty = \frac{(3N + 2)(N + 1)}{k}. \quad (4.63)$$

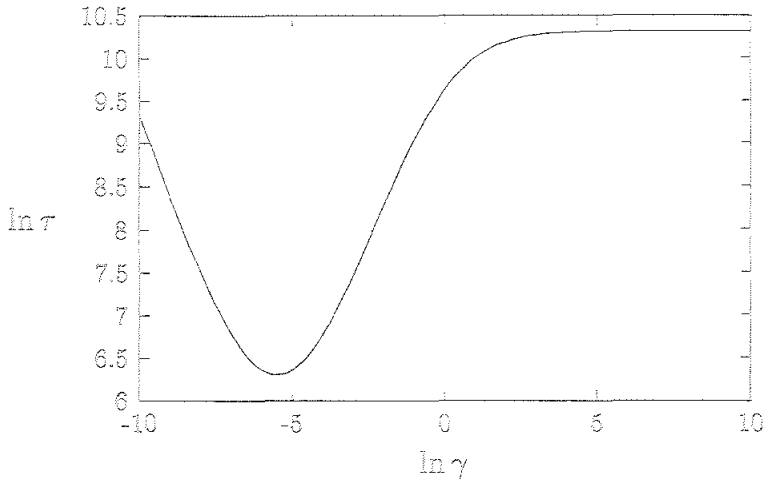


Figura 4.3: Logaritmo neperiano del MFPT en función del logaritmo neperiano de γ para un segmento de red con una frontera absorbente y la otra reflectante. El número de nudos y la unidad de tiempo son los mismos que en la Fig. 4.2. La condición inicial de la red es $a = 1/2$.

Cuando $a = 1$, el MFPT es una función monótona creciente de γ que presenta una discontinuidad en $\gamma = 0$, como se discutió anteriormente. Obsérvese también que τ aumenta cuando k disminuye, independientemente del valor de γ .

Por tanto, para $a \neq 1$ aparece un efecto resonante en el MFPT. Para ilustrar los resultados anteriores, en las Figs. 4.3 y 4.4 hemos representado el logaritmo neperiano de τ frente al de γ . Al igual que en la Fig. 4.2, $N = 100$ y el tiempo se mide en unidades de k^{-1} . La condición inicial de la red en la Fig. 4.3 es $a = 1/2$, que corresponde al estado estacionario de la distribución de probabilidades de la red cuando está aislada. Como predice la Ec. (4.62), la resonancia tiene lugar para $\gamma_0 \simeq 4 \cdot 10^{-3}$. En la Fig. 4.4 hemos elegido $a = 1$ y, por tanto, no se observa fenómeno resonante alguno.

El origen de la resonancia se puede identificar fácilmente en la Ec. (4.59). Los dos primeros sumandos del segundo miembro de esta expresión, que no están presentes en el caso de dos fronteras absorbentes, son funciones

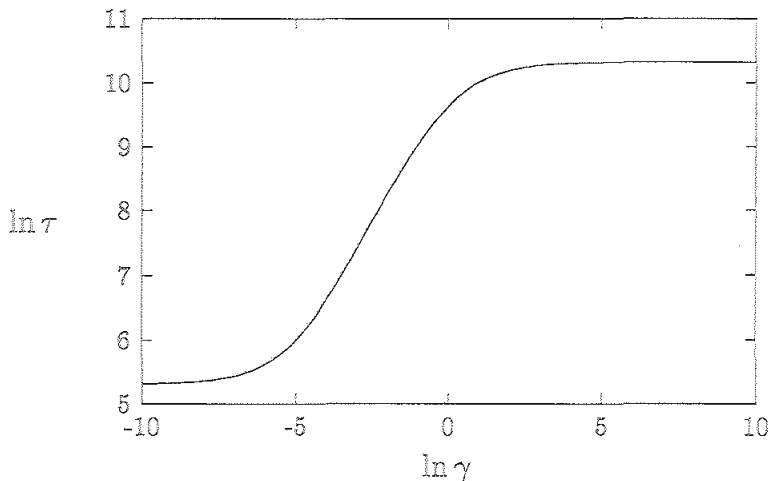


Figura 4.4: Lo mismo que en la Fig. 4.3 pero con la condición inicial para la red $\alpha = 1$.

decrecientes de γ para $\alpha \neq 1$, y tienden a cero para $\gamma \rightarrow \infty$. Los otros dos términos son funciones crecientes de γ que tienden al valor asintótico $(3N + 2)(N + 1)/k$. Además, estos últimos no dependen de la condición inicial de α . De esta forma, las fluctuaciones que sufre la red juegan un doble papel. Primeramente, facilitan el decaimiento de la probabilidad inicial de encontrar a la red en el estado $\alpha = 2$, es decir, aquél en el que las transiciones de la partícula hacia la frontera absorbente están prohibidas. En segundo lugar, hacen que la partícula no tenga tiempo de escapar sin cambiar su dirección de movimiento. La competencia entre estos dos papeles es la que provoca la activación resonante.

Las expresiones (4.59) y (4.62) también nos permiten determinar los comportamientos asintóticos de τ y γ_0 para $N \gg 1$. En concreto, el de γ_0 es de la forma

$$\gamma_0 \sim \left(\frac{1 - \alpha}{3} \right)^{1/2} \frac{k}{N} + \mathcal{O}(N^{-2}). \quad (4.64)$$

En el caso del MFPT, este comportamiento depende del valor de γ . Cuando se considera que la probabilidad de transición entre los estados de la red es

distinta de γ_0 y fija, es decir, independiente de N , τ se comporta para $N \gg 1$ como sigue:

$$\tau \sim \frac{3\gamma}{k(k+\gamma)}N^2 + \frac{2(2-a)k + 5\gamma}{k(k+\gamma)}N + \frac{1-a}{\gamma} + \frac{2}{k} + \mathcal{O}(N^{-1}). \quad (4.65)$$

Por el contrario, para $\gamma = \gamma_0$ el comportamiento es de la forma

$$\begin{aligned} \tau \sim & \frac{2(2-a + (3(1-a))^{1/2})}{k}N \\ & + \frac{a+1 + 3^{-1/2}(2a+1)(1-a)^{1/2}}{k} + \mathcal{O}(N^{-1}). \end{aligned} \quad (4.66)$$

Así pues, los comportamientos dominantes de las expresiones anteriores, esto es, $\gamma_0 \sim \mathcal{O}(N^{-1})$, $\tau \sim \mathcal{O}(N^2)$ para $\gamma \neq \gamma_0$, y $\tau \sim \mathcal{O}(N)$ para $\gamma = \gamma_0$, son muy similares a los obtenidos por Fletcher et al. en [4], (véase el capítulo 2).

4.4 Discusión

A lo largo de este capítulo de la Memoria, hemos analizado el comportamiento de una partícula que realiza un camino aleatorio sobre una red monodimensional que fluctúa en el tiempo. Más concretamente, hemos estudiado el tiempo medio de permanencia de ésta sobre un segmento de red. Utilizando métodos más o menos generales, se han obtenido expresiones exactas para esta magnitud suponiendo dos tipos de condiciones de frontera. En el primer caso las dos fronteras son absorbentes, mientras que en el segundo una es absorbente y la otra reflectante. Bajo determinadas condiciones, hemos probado que el MFPT exhibe un comportamiento resonante, en el sentido de que se induce un cierto movimiento coherente que reduce el tiempo de permanencia de la partícula en el segmento. Una condición que parece necesaria para que esto suceda es que los estados de la red no sean equivalentes en lo que se refiere a la salida de la partícula. Así, se obtiene una explicación de por qué aparece resonancia con sólo una frontera absorbente y, por el contrario, no surge cuando en ambos extremos hay fronteras de este tipo. En caso de que las dos fronteras sean absorbentes, también es previsible la aparición de un comportamiento resonante, siempre y cuando los estados de la red no sean simétricos ante el intercambio de izquierda y derecha. Esta condición

de asimetría no parece necesaria en el modelo estudiado por Fletcher et al. en la referencia [4]. El comportamiento resonante que mostramos en este capítulo, al que nos hemos referido como activación resonante, tiene un origen diferente al estudiado por los autores antes mencionados. En lugar de una fuerza externa oscilatoria, la causa de la resonancia en nuestro modelo es la fluctuación que sufre la red en el tiempo. El papel jugado por la frecuencia de la fuerza en los modelos de resonancia estocástica es ocupado ahora por la probabilidad de transición entre los estados de la red. No obstante, cuando se manifiesta el efecto resonante, existen algunas semejanzas entre los dos fenómenos. Por ejemplo, la probabilidad de transición resonante γ_0 , dada por la Ec. (4.62), presenta un comportamiento asintótico para $N \gg 1$ del tipo $\gamma_0 \sim \mathcal{O}(N^{-1})$. Ésta es la misma dependencia que aparece en la referencia [4] para la frecuencia de resonancia. Asimismo, para $\gamma \neq \gamma_0$, se ha probado que $\tau \sim \mathcal{O}(N^2)$, mientras que para $\gamma = \gamma_0$, se obtiene una dependencia asintótica lineal, es decir, del tipo $\tau \sim \mathcal{O}(N)$. Estos comportamientos también coinciden con los obtenidos numéricamente en [4].

Capítulo 5

Comportamiento resonante en un proceso de Poisson sometido a una señal periódica

5.1 Introducción

En este capítulo, vamos a estudiar las propiedades de respuesta, ante un estímulo periódico externo, de un modelo muy sencillo. Se trata de un camino aleatorio monodimensional, análogo al estudiado en el capítulo anterior, pero en el que las probabilidades de transición entre nudos por unidad de tiempo, en lugar de fluctuar aleatoriamente, varían sinusoidalmente en el tiempo [45]. En este sentido, el modelo aquí propuesto es parecido tanto al camino aleatorio monodimensional con campo dependiente del tiempo estudiado por Fletcher, Havlin y Weiss [4], como al proceso de Wiener modulado periódicamente de Bulsara, Lowen y Rees [3]. De hecho, muchos de los efectos cooperativos que se observan en estos dos modelos (véase el capítulo 2) son muy similares a los que vamos a obtener a continuación, aunque también aparecerán algunas diferencias significativas.

La teoría de los tiempos de primer paso en caminos aleatorios monodimensionales con probabilidades de transición por unidad de tiempo independientes del tiempo está bien establecida, y se conocen expresiones exactas que permiten calcular sus propiedades estadísticas. No obstante, los métodos que se utilizan generalmente no se pueden aplicar cuando está presente un campo

externo dependiente del tiempo. Por esta razón, Fletcher et al. [4] utilizan métodos numéricos y perturbativos para estudiar el tiempo medio de primer paso en su modelo. En nuestro caso, este problema lo vamos a solventar simplificando al máximo el modelo considerado. Para ello supondremos que la partícula solamente puede moverse en uno de los dos sentidos, o lo que es lo mismo, consideraremos que las probabilidades de transición por unidad de tiempo en el sentido contrario son siempre nulas. De esta forma, el modelo propuesto se transforma en un proceso de Poisson sometido a una señal periódica [42]. Puesto que la partícula no puede regresar a un nudo después de haberlo abandonado, no será necesario introducir ninguna frontera absorbente a la hora de calcular el tiempo medio de primer paso. De hecho, cualquier nudo puede hacer las veces de frontera absorbente. Al introducir esta simplificación, la ecuación maestra asociada al modelo descrito se puede resolver exactamente sin dificultad y, por tanto, es posible estudiar analíticamente las propiedades de respuesta de este sistema sin apenas introducir aproximaciones. Todo esto nos permitirá entender mejor el origen de los efectos resonantes observados. En concreto, vamos a analizar con bastante detalle el papel relevante que juega la fase inicial del estímulo periódico, punto al que no se le ha prestado demasiada atención hasta el momento. El modelo que analizaremos puede utilizarse para describir determinados fenómenos que aparecen en muy diversas áreas. Por ejemplo, el voltaje de la membrana que controla la emisión de señales de una neurona crece en el tiempo, hasta alcanzar un valor umbral para el que se produce la emisión [46]. Si suponemos que el crecimiento es monótono y que los incrementos sucesivos de voltaje tienen lugar con una probabilidad por unidad de tiempo que depende sinusoidalmente del tiempo, podremos utilizar nuestro modelo para describir la evolución de este sistema.

Este capítulo está organizado de la forma siguiente: en la sección 5.2 formularemos claramente el modelo que vamos a estudiar y, además, obtendremos expresiones explícitas exactas para la FPTDF y el MFPT. La estructura que presenta la FPTDF será analizada detalladamente en la sección 5.3, donde también se verá que ésta muestra características propias de los sistemas biestables con ruido en presencia de una fuerza periódica. La sección 5.4 será dedicada al estudio del MFPT. En ella se probará que el MFPT exhibe un comportamiento resonante cuando se expresa en función de la frecuencia del estímulo. La forma de esta función depende fuertemente de la fase inicial del término periódico. Este parámetro también juega un

papel muy importante en la determinación del comportamiento que presenta el MFPT cuando se varía la amplitud del estímulo. Concretamente, veremos que, en algunos casos, cuando se varía la frecuencia del término sinusoidal, el MFPT realiza transiciones, pasando de ser una función monótona decreciente de la amplitud del estímulo a crecer con ella. En la sección 5.5 estudiaremos la densidad de potencia espectral que se obtiene al introducir en nuestro modelo un mecanismo de reinyección muy simple. El caso en el que la amplitud del estímulo periódico es nula será analizado detenidamente, y se presentarán también algunos resultados que se observan cuando esta amplitud es distinta de cero. Finalmente, en la sección 5.6 haremos un breve resumen y discusión de los resultados más relevantes.

5.2 Descripción del modelo

Consideremos un camino aleatorio sobre una red monodimensional, en el que la partícula está sometida a un campo externo dependiente del tiempo. Para simplificar al máximo los cálculos, supondremos que el movimiento sólo está permitido en un único sentido, por ejemplo, hacia la derecha. Si llamamos $p_n(t)$ a la probabilidad de que la partícula se encuentre situada en el nudo n -ésimo en el instante t , la ecuación maestra que nos describe la evolución temporal de este sistema será

$$\frac{\partial}{\partial t} p_n(t) = \alpha(t) (p_{n-1}(t) - p_n(t)), \quad (5.1)$$

donde la probabilidad de transición, $\alpha(t)$, es una función no negativa del tiempo. Imponiendo la condición inicial

$$p_n(0) = \delta_{n,l}, \quad (5.2)$$

la Ec.(5.1) se puede resolver fácilmente como se explica en el apéndice C o, de modo alternativo, mediante el método de la función generatriz [42]. El resultado es

$$p_n(t) = \begin{cases} \frac{\exp[-I(t)]}{(n-l)!} [I(t)]^{n-l} & \text{si } n \geq l \\ 0 & \text{si } n < l, \end{cases} \quad (5.3)$$

con

$$I(t) = \int_0^t dt' \alpha(t'). \quad (5.4)$$

Para una condición inicial general $p_n(0)$, la solución se puede calcular a partir de la expresión anterior mediante superposición, obteniéndose

$$p_n(t) = \sum_{n'=-\infty}^n \frac{p_{n'}(0)}{(n-n')!} [I(t)]^{n-n'} \exp[-I(t)]. \quad (5.5)$$

Supongamos ahora que la partícula se encuentra inicialmente dentro del segmento de línea $[0, N]$. Así pues, para $n \geq N$, el sumatorio de la expresión (5.5) se extenderá desde $n' = 0$ hasta $n' = N$. Nuestro interés se centrará en el estudio de las propiedades asociadas a los tiempos de llegada de la partícula al nudo $N + 1$. Puesto que la partícula sólo se mueve hacia la derecha, nunca regresará a un nudo después de haberlo abandonado. Por tanto, la FPTDF, a la que llamaremos $f(t)$, se puede calcular multiplicando la probabilidad de que la partícula se encuentre en el nudo N -ésimo por la probabilidad de que salga de éste, es decir,

$$f(t) = \alpha(t)p_N(t). \quad (5.6)$$

A su vez, el MFPT vendrá dado por la expresión

$$\tau = \int_0^{\infty} dt t f(t) = \sum_{n=0}^N \int_0^{\infty} dt p_n(t). \quad (5.7)$$

Si se introduce en el resultado anterior la solución (5.5) y se utiliza la siguiente propiedad de las función gamma incompleta $\Gamma(n, x)$ [47]

$$\frac{\Gamma(n, x)}{\Gamma(n)} = \exp(-x) \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^k}{k!}, \quad (5.8)$$

la igualdad (5.7) adquiere la forma

$$\tau = \sum_{n=0}^N \frac{p_n(0)}{\Gamma(N+1-n)} \int_0^{\infty} dt \Gamma(N+1-n, I(t)). \quad (5.9)$$

A partir de ahora consideraremos la condición inicial (5.2) con $l = 0$. Además, nos restringiremos al caso de un campo externo oscilatorio del tipo sinusoidal, de manera que

$$\alpha(t) = p + \epsilon \sin(\omega t + \phi). \quad (5.10)$$

El parámetro ϵ mide la amplitud de estímulo periódico y, con el fin de que $\alpha(t)$ sea siempre positiva, toma valores pertenecientes al intervalo $[0, p]$. El ángulo ϕ representa la fase inicial del estímulo. Teniendo en cuenta las especificaciones anteriores, la FPTDF de la Ec. (5.6) se reduce a

$$f(t) = \frac{\alpha(t)}{N!} [I(t)]^N \exp[-I(t)], \quad (5.11)$$

siendo

$$I(t) = pt - \frac{\epsilon}{\omega} (\cos(\omega t + \phi) - \cos \phi). \quad (5.12)$$

Para valores de ϵ en el intervalo antes mencionado, la función $I(t)$ es monótona creciente, ya que, como antes dijimos, su derivada $\alpha(t)$ es siempre positiva. Aunque en la mayoría de los cálculos que realizaremos posteriormente utilizaremos la expresión exacta de $f(t)$, Ec. (5.11), en uno de ellos necesitaremos hacer uso de su aproximación lineal en el estímulo externo. Si desarrollamos la Ec. (5.11) en potencias de ϵ/p y nos quedamos en el primer orden, el resultado que se obtiene es

$$f^{(1)}(t) = f_0(t) \left[1 + \frac{\epsilon}{p} \left(\sin(\omega t + \phi) + \frac{pt - N}{\omega t} (\cos(\omega t + \phi) - \cos \phi) \right) \right], \quad (5.13)$$

donde

$$f_0(t) = \frac{p}{N!} (pt)^N \exp(-pt) \quad (5.14)$$

es la FPTDF para el proceso de Poisson en ausencia del estímulo periódico. En el caso del MFPT esta aproximación se puede obtener linealizando la expresión (5.9), o bien introduciendo la Ec. (5.13) en la (5.7) y realizando las integrales que aparecen. Un cálculo directo da

$$\tau^{(1)} = \tau_0 - \frac{\epsilon}{\omega p} \left[\cos \phi - \frac{\cos \left((N+1) \arctan \frac{\omega}{p} + \phi \right)}{\left(1 + \frac{\omega^2}{p^2} \right)^{\frac{N+1}{2}}} \right], \quad (5.15)$$

siendo τ_0 el MFPT de la distribución $f_0(t)$, es decir, $\tau_0 = (N+1)/p$.

5.3 Función de distribución de tiempos de primer paso

El comportamiento temporal de la FPTDF depende del valor que tome la frecuencia de la perturbación externa. En el apéndice D se realiza un análisis asintótico detallado de la expresión (5.11) en el límite de $N \gg 1$. Los resultados que se obtienen permanecen cualitativamente válidos siempre que N no sea demasiado pequeño. Comenzaremos resumiendo las principales conclusiones que se derivan de este análisis suponiendo, por sencillez, que ϵ y p no están excesivamente próximos. Las condiciones de validez de las aproximaciones realizadas cuando ϵ es muy próximo a p se estudian en el apéndice antes mencionado.

A frecuencias altas, entendiendo como tales aquéllas para las que el parámetro $\omega N^{1/2}/p$ es del orden de la unidad o mucho mayor que ésta, la FPTDF viene dada por

$$f(t) \simeq \frac{N^{-1/2}}{\sqrt{2\pi}} \alpha(t) \exp \left[-\frac{1}{2N} (I(t) - N)^2 \right]. \quad (5.16)$$

La región dominante de la distribución está caracterizada por la condición $I(t) \sim \mathcal{O}(N)$, lo cual nos lleva a que $t \sim \mathcal{O}(\tau_0)$. En esta zona la FPTDF presenta una serie de picos debido al factor $\alpha(t)$.

Para frecuencias más pequeñas, tales que $\omega N^{1/2}/p \ll 1$, la expresión (5.16) se reduce a la forma gaussiana¹

$$f(t) \simeq \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp \left[-\frac{(t - t_m)^2}{2\sigma^2} \right], \quad (5.17)$$

donde

$$\sigma = \frac{N^{1/2}}{p + \epsilon \operatorname{sen}(\omega t_m + \phi)} \quad (5.18)$$

representa la anchura de la distribución, y t_m es el tiempo en el que la función

$$h(t) = \exp \left[-\frac{1}{2N} (I(t) - N)^2 \right] \quad (5.19)$$

¹Estrictamente hablando, esta aproximación y la de la expresión (5.16) sólo son válidas en la región donde $f(t)$ no es exponencialmente pequeña, como se pone de manifiesto en el apéndice D.

alcanza su máximo. El parámetro t_m viene dado por la solución de la ecuación $I(t_m) = N$ o, más explícitamente,

$$p\omega t_m - \epsilon(\cos(\omega t_m + \phi) - \cos \phi) = \omega N, \quad (5.20)$$

que, en general, tiene que resolverse mediante métodos numéricos o gráficos. De la expresión (5.17) se deduce inmediatamente que, en este régimen de frecuencias, la FPTDF presenta un único pico localizado en $t = t_m$.

Finalmente, en el rango de muy bajas frecuencias, definido por $\omega N/p \ll 1$, la solución de la Ec. (5.20) es

$$t_m \simeq \frac{N}{p + \epsilon \sin \phi}, \quad (5.21)$$

mientras que la expresión (5.18) toma la forma más sencilla

$$\sigma \simeq \frac{N^{1/2}}{p + \epsilon \sin \phi} = \frac{t_m}{N^{1/2}}. \quad (5.22)$$

En este último régimen, la FPTDF deja de depender de la frecuencia del estímulo externo.

Cuando N no es asintóticamente grande, la separación de las escalas de frecuencias que acabamos de describir no está tan bien definida. No obstante, como se pone de manifiesto en las Figs. 5.1 y 5.2, los tres rangos discutidos anteriormente siguen identificándose claramente. En la Fig. 5.1 se representa la FPTDF calculada a partir de la expresión (5.11) frente al tiempo, para los valores de los parámetros $N = 50$, $p = 1$, $\epsilon = 0.3$, $\phi = \pi/2$ y $\omega = 2$. También se muestran los resultados obtenidos cuando se utilizan $f_0(t)$ y la Ec. (5.16). De acuerdo con la discusión anterior, se observa que $f(t)$ oscila alrededor de $f_0(t)$. En la Fig. 5.2 todos los parámetros valen lo mismo que antes salvo la frecuencia, que pasa a tomar el valor más pequeño $\omega = 0.01$. Las curvas presentadas corresponden a las Ecs. (5.11), (5.14) y (5.17). Las diferencias que se advierten entre las curvas asintóticas y las exactas desaparecen prácticamente en la escala de las figuras cuando se toma un valor de N suficientemente grande, por ejemplo, $N = 100$.

La estructura multiplicada de la FPTDF es una propiedad bien conocida desde hace tiempo de los sistemas biestables con ruido, sometidos a una fuerza externa que depende periódicamente del tiempo [26]. Más recientemente, Bulsara, Lowen y Rees [3] encontraron una estructura similar en un camino

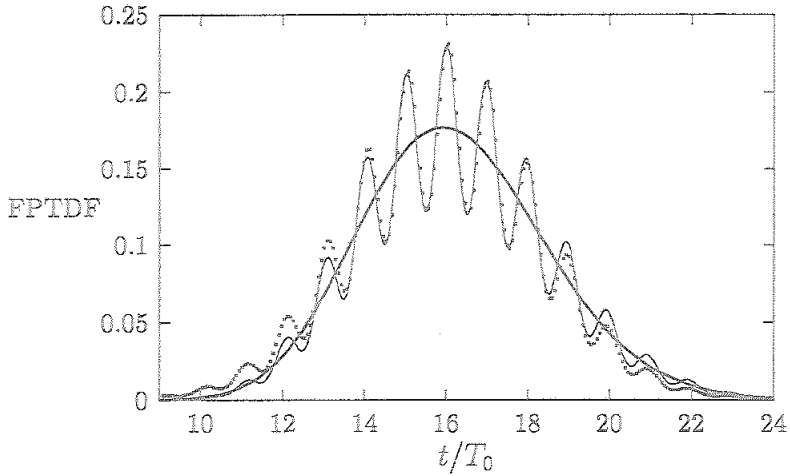


Figura 5.1: FPTDF frente al tiempo escalado t/T_0 , donde $T_0 = 2\pi/\omega$. En todas las curvas $N = 50$, $p = 1$, $\omega = 2$ y $\phi = \pi/2$. Para la línea gruesa $\epsilon = 0$, Ec. (5.14), y para las otras dos $\epsilon = 0.3$. La línea fina representa la expresión exacta, Ec. (5.11), y la de puntos la asintótica, Ec. (5.16).

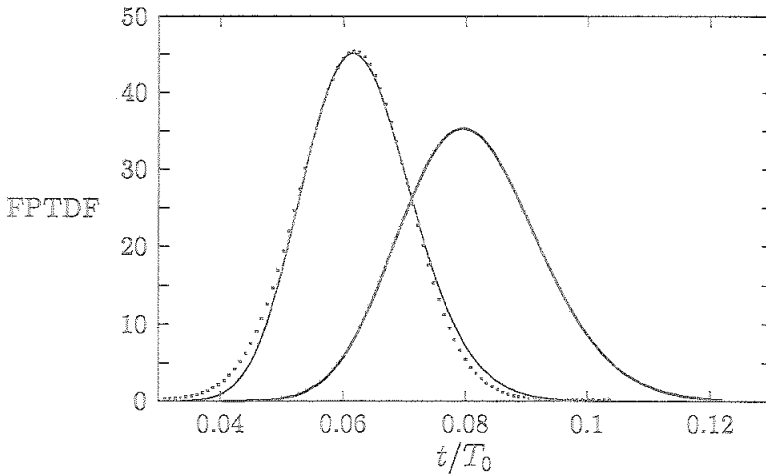


Figura 5.2: FPTDF frente al tiempo para los mismos valores que en la Fig. 5.1, con la única diferencia de que ahora $\omega = 0.01$ en todas las curvas. La línea de puntos corresponde a la Ec. (5.17).

aleatorio continuo con una frontera absorbente y en presencia de una señal periódica. De hecho, su modelo es parecido al nuestro, en el sentido de que, en ambos, la presencia de un término de arrastre garantiza la llegada de la partícula a la frontera, con independencia de los valores que tomen los parámetros del sistema. Por el contrario, en los modelos biestables con resonancia estocástica [26], cuando el término de arrastre es excesivamente pequeño, éste no es capaz de provocar el salto de la partícula a través de la barrera de potencial en ausencia de ruido.

La localización exacta de los picos de la FPTDF depende de una forma bastante complicada de todos los parámetros del sistema. No obstante, las posiciones t_l de los picos situados en la región relevante de la distribución (aquella en la que $f(t)$ no es exponencialmente pequeña) se pueden expresar aproximadamente del modo siguiente:

$$t_l \simeq \frac{1}{\omega} \left(2\pi l + \frac{\pi}{2} - \phi \right), \quad (5.23)$$

donde l toma aquellos valores enteros que hacen a t_l positiva. Rigurosamente hablando, la aproximación anterior es válida en el límite

$$\frac{p^3}{\omega N \epsilon} |t_l - t_m| \ll 1, \quad (5.24)$$

de donde se sigue que será tanto mejor cuanto más cerca se encuentre el pico del máximo de la campana. El apéndice E contiene una prueba detallada de estos resultados. En la práctica, la Ec. (5.23) nos proporciona una estimación bastante aceptable de la posición de todos los picos "visibles" de la distribución, como se pone de manifiesto en la Fig. 5.1. Evidentemente, si existe un entero k tal que $t_m = (2\pi k + \pi/2 - \phi)/\omega$, el pico situado en t_m será el más alto de la distribución.

Estudiemos ahora cómo depende la FPTDF de p . Si se deriva dos veces el logaritmo neperiano de la función de distribución respecto a este parámetro se obtiene

$$(\ln f_p)' \equiv \frac{\partial \ln f}{\partial p} = \frac{1}{\alpha} + \frac{Nt}{I} - t \quad (5.25)$$

y

$$(\ln f_p)'' \equiv \frac{\partial^2 \ln f}{\partial p^2} = -\frac{1}{\alpha^2} - \frac{Nt^2}{I^2}. \quad (5.26)$$

De estas expresiones es fácil deducir que $(\ln f_p)'$ presenta asíntotas verticales en los puntos p_1 y p_2 definidos mediante las ecuaciones $\alpha(p_1, t) = 0$ e $I(p_2, t) = 0$. Puesto que, para $p > \epsilon$, las funciones $I(p, t)$ y $\alpha(p, t)$ son estrictamente positivas, p_1 y p_2 no pueden estar contenidos en este rango de valores de p . De hecho, no es difícil ver que $p_1 \leq \epsilon$ y $p_2 < \epsilon$. Excepto en estas singularidades, $(\ln f_p)'$ es una función monótona decreciente de p que tiende a $-t$ cuando p tiende a infinito. En consecuencia, existe un valor crítico $p = p_c$ perteneciente al intervalo $(\max(p_1, p_2), \infty)$ que anula a $(\ln f_p)'$. Para este valor, la FPTDF como función de p presenta un máximo (recuérdese que $(\ln f_p)''$ es siempre negativa). Además de este máximo, debe haber otro situado entre las dos asíntotas. Apliquemos ahora estos resultados a estudiar cómo depende de p la altura de un pico de la distribución. De la expresión (5.23) se sigue que la localización de los picos de la zona relevante de la distribución es aproximadamente independiente de p . Por tanto, de acuerdo con lo anterior, la altura del pico l -ésimo presentará máximos en los valores de p que satisfacen la ecuación de segundo grado

$$I(p, t_l) + t_l \alpha(p, t_l) [N - I(p, t_l)] = 0, \quad (5.27)$$

obtenida haciendo $t = t_l$ en la expresión (5.25), e igualándola a cero. De las dos raíces de esta ecuación tenemos que eliminar la que se encuentra entre las dos asíntotas verticales, ya que es siempre menor que ϵ . La otra, a la que llamaremos $p_{c,l}$, viene dada por

$$p_{c,l} = \frac{1}{2t_l} \left[A + (B^2 + 4N)^{1/2} \right], \quad (5.28)$$

donde

$$A = N + 1 - \frac{\epsilon \cos \phi}{\omega} - \epsilon t_l \quad (5.29)$$

y

$$B = N - 1 - \frac{\epsilon \cos \phi}{\omega} + \epsilon t_l. \quad (5.30)$$

Para determinados valores de los parámetros, el segundo miembro de la expresión (5.28) es menor que ϵ y, por lo tanto, no será posible observar el máximo en la región de parámetros en la que el modelo está definido. Si tenemos en cuenta las Ecs. (5.28), (5.29) y (5.30), y manejamos, por el momento, a t_l como si se tratase de una variable continua, es fácil comprobar

que

$$\frac{\partial p_{c,l}}{\partial t_l} = -\frac{1}{t_l} \left[p_{c,l} + \frac{\epsilon}{2} \frac{(B^2 + 4N)^{1/2} - B}{(B^2 + 4N)^{1/2}} \right]. \quad (5.31)$$

Así pues, para los valores de $p_{c,l}$ en los que estamos interesados, es decir, para $p_{c,l} > \epsilon$, esta derivada será siempre negativa. En consecuencia, al aumentar el índice l , $p_{c,l}$ disminuye, llegando a ser para l suficientemente grande menor que ϵ . Si queremos determinar el valor extremo de t_l , \hat{t}_M , a partir del cual las alturas de los picos no presentan un máximo, bastará hacer $p_{c,l} = \epsilon$ en la expresión (5.28), resultando que

$$\hat{t}_M = \frac{C + (C^2 + 8D)^{1/2}}{4\epsilon\omega}, \quad (5.32)$$

donde

$$C = (2N + 1)\omega - 2\epsilon \cos \phi \quad (5.33)$$

y

$$D = \epsilon\omega \cos \phi. \quad (5.34)$$

Por consiguiente, los únicos picos cuyas alturas presentan un máximo para un cierto valor de p son aquéllos que están localizados a la izquierda de \hat{t}_M , es decir, los que cumplen la desigualdad $t_l \leq \hat{t}_M$. En la Fig. 5.3 se representa la altura de los picos correspondientes a $l = 3, 4$ y 5 frente a p , para los valores de los parámetros que aparecen en el pie de figura. Usando la expresión (5.32) se llega a la conclusión de que $\hat{t}_M = 102.5$, lo cual nos lleva a que $M = 32.62$. Por tanto, la discusión anterior predice que el último pico que presenta un máximo es el localizado en $t = t_{32}$. Como se pone de manifiesto en la Fig. 5.4, este resultado está próximo al obtenido numéricamente, esto es, a $t = t_{33}$. Es importante hacer notar que el hecho de que un pico alcance su máxima altura no implica que éste sea el más alto de la FPTDF para ese valor de p .

El comportamiento resonante en la altura de los picos de la FPTDF que hemos estudiado anteriormente es un fenómeno bastante conocido en otro tipo de modelos como, por ejemplo, los sistemas dinámicos biestables en presencia de ruido, y los procesos de Wiener con arrastre y una frontera absorbente [3]. En esta última referencia, Bulsara et al. señalan también un comportamiento antirresonante de la FPTDF, consistente en la aparición de un mínimo en la altura máxima de la distribución cuando se la representa

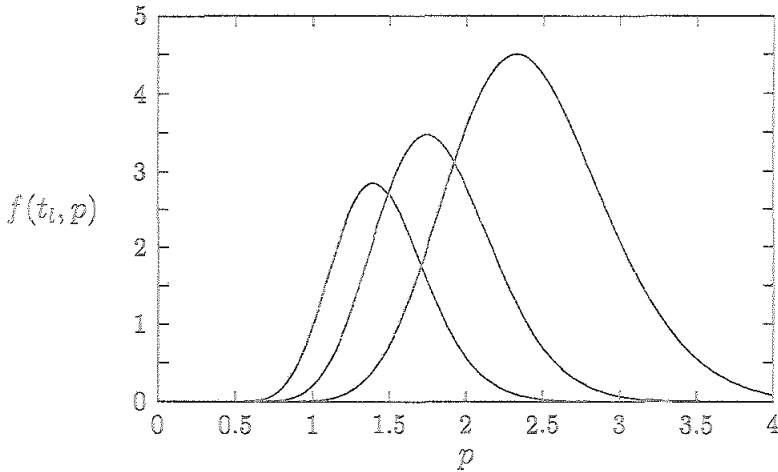


Figura 5.3: Altura de los picos de la FPTDF frente a p para $N = 20$, $\omega = 2$, $\epsilon = 0.2$ y $\phi = \pi/2$. De izquierda a derecha las curvas corresponden a los picos de subíndices $l = 5$, $l = 4$ y $l = 3$, respectivamente.

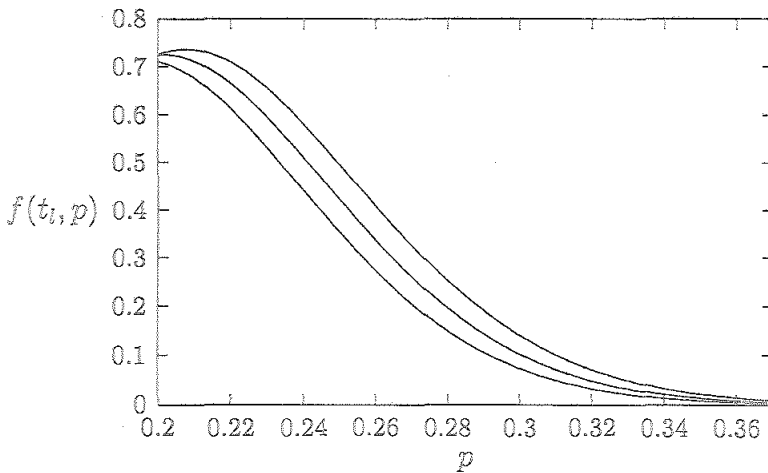


Figura 5.4: Altura de los picos de la FPTDF frente a p para los mismos valores de los parámetros que en la Fig. 5.3. De izquierda a derecha las curvas corresponden a los picos de subíndices $l = 35$, $l = 34$ y $l = 33$, respectivamente.

frente al ruido. Este tipo de efecto no está presente en nuestro modelo. En el caso en el que $\epsilon = 0$, esto se pone claramente de manifiesto derivando la expresión (5.14) respecto a p . De esta forma se observa que para cualquier valor de t , y en concreto para el que hace máxima la distribución, la derivada es positiva y, en consecuencia no aparece mínimo alguno. Lo mismo sucede cuando $\epsilon \neq 0$, como se prueba de la forma siguiente. Para un valor dado de p siempre se puede encontrar una cierta frecuencia tal que un determinado pico, por ejemplo el l -ésimo, sea el más alto de la distribución. Esto se consigue eligiendo una frecuencia $\omega = \hat{\omega}_l$ de forma que la "envolvente" de los picos de $f(t)$ alcance su máximo en $t = t_l$. La ecuación de la "envolvente", $\tilde{f}(t)$, se obtiene haciendo $\cos(\omega t + \phi) = 0$ y $\sin(\omega t + \phi) = 1$ en la expresión de $f(t)$. Si tomamos el logaritmo neperiano del resultado obtenido y derivamos respecto al tiempo, se llega a

$$\frac{\partial \ln \tilde{f}(t)}{\partial t} = p \frac{N - pt - \frac{\epsilon}{\omega} \cos \phi}{pt + \frac{\epsilon}{\omega} \cos \phi}. \quad (5.35)$$

Para obtener $\hat{\omega}_l$ basta resolver la ecuación resultante de igualar a cero la expresión anterior con $t = t_l$. De esta manera se deduce que la frecuencia buscada es

$$\hat{\omega}_l = \frac{p}{N} \left(2\pi l + \frac{\pi}{2} - \phi + \frac{\epsilon}{p} \cos \phi \right). \quad (5.36)$$

Al variar p , las distintas distribuciones que se consiguen presentan todas ellas su máximo en el pico l -ésimo. La altura de este máximo, $f_{\text{máx}}(p)$, se puede calcular sustituyendo los valores de t_l y $\hat{\omega}_l$ en la Ec. (5.11), obteniéndose

$$f_{\text{máx}}(p) = \frac{p + \epsilon}{N!} N^N \exp(-N), \quad (5.37)$$

que es independiente del pico concreto l que hayamos elegido. Puesto que el lado derecho de la expresión anterior es una función monótona creciente de p , la cantidad considerada no presenta comportamiento resonante ni antirresonante. Esta característica diferencia a este modelo tanto de los sistemas biestables como de los procesos de Wiener de la ref.[3].

5.4 Comportamiento resonante del tiempo medio de primer paso

En esta sección vamos a estudiar el comportamiento del MFPT como función de los distintos parámetros que aparecen en el modelo. Consideremos en primer lugar su dependencia respecto a la frecuencia ω . Si tenemos en cuenta la expresión (5.9) junto con la condición inicial (5.2) para $l = 0$, es fácil obtener que

$$\tau(0) \equiv \tau(\omega = 0) = \frac{\tau_0}{1 + \frac{\epsilon}{p} \operatorname{sen} \phi} \quad (5.38)$$

y

$$\tau(\infty) \equiv \lim_{\omega \rightarrow \infty} \tau(\omega) = \tau_0. \quad (5.39)$$

Estos resultados son previsibles, ya que cuando ω es muy pequeña, la probabilidad de transición por unidad de tiempo, $\alpha(t)$, se hace prácticamente constante e igual a $p + \epsilon \operatorname{sen} \phi$, mientras que para ω muy grande, varía tan rápidamente en el tiempo que podemos sustituirla por su valor medio en un período, es decir, por p . También se puede obtener sin dificultad que

$$\left(\frac{\partial \tau}{\partial \omega} \right)_{\omega=0} = - \frac{(N+1)(N+2)\epsilon \cos \phi}{2(p + \epsilon \operatorname{sen} \phi)^3}. \quad (5.40)$$

Resulta evidente que si la pendiente inicial de $\tau(\omega)$ es negativa y $\tau(0) \leq \tau(\infty)$, debe existir al menos una cierta frecuencia ω^* para la cual la función $\tau(\omega)$ alcance un mínimo relativo. Esta frecuencia ω^* dependerá en general del resto de los parámetros del sistema, es decir, de N , ϵ , p , y ϕ . Del mismo modo, cuando la pendiente inicial es positiva, también es posible que $\tau(\omega)$ presente un mínimo, pero en este caso tiene que haber necesariamente un máximo a frecuencias más bajas. Si la pendiente inicial es negativa y $\tau(0) > \tau(\infty)$ no se podrá sacar ninguna conclusión de las Ecs. (5.38)-(5.40).

La expresión (5.40) pone de manifiesto que el signo de la pendiente inicial de $\tau(\omega)$ está determinado por el valor que toma la fase inicial ϕ de la perturbación sinusoidal. El mismo parámetro determina también si $\tau(0)$ es mayor o menor que $\tau(\infty)$. Para $0 \leq \phi \leq \pi/2$ el MFPT siempre presenta un mínimo, ya que se verifica que $\tau(0) \leq \tau(\infty)$, y además la pendiente inicial de $\tau(\omega)$ es negativa. Como mencionamos en el capítulo 2, Fletcher, Havlin y Weiss [4] encontraron un efecto parecido a éste en el caso de una partícula que difunde

en un segmento de línea terminado en dos fronteras absorbentes, y denominaron a ω^* frecuencia de resonancia. Su estudio numérico se restringió al caso $\phi = 0$ y, por lo tanto, no discutieron el papel relevante que juega la fase inicial de la perturbación. La estructura de la expresión (5.9) hace pensar en la posibilidad de que la función $\tau(\omega)$ presente más de un mínimo. Este hecho se observa mucho más claramente si consideramos la aproximación lineal en ϵ del MFPT, Ec. (5.15). Para que además del primer mínimo relativo aparezcan otros que sean apreciables, el término $\cos((N+1)\arctan(\omega/p) + \phi)$ debe oscilar antes de que el factor $(1 + \omega^2/p^2)^{-(N+1)/2}$ lo haga excesivamente pequeño. Esto se consigue eligiendo un N suficientemente grande, para valores fijos del resto de los parámetros, como se muestra en las Figs. 5.5 y 5.6. En ellas se ha representado el MFPT frente a la frecuencia para $N = 10$ y $N = 50$, respectivamente. En cada uno de los casos hemos considerado dos valores de la amplitud, a saber, $\epsilon = 0.1$ y $\epsilon = 0.3$, siendo para todas las curvas $\phi = 0$ y $p = 1$. En las curvas correspondientes a $N = 50$ se distinguen con claridad al menos dos mínimos, mientras que cuando $N = 10$ sólo aparece uno.

Para $\phi = \pi/2$, el MFPT tiene un mínimo absoluto en $\omega = 0$, como se pone de manifiesto en la Fig. 5.7 para dos valores distintos del parámetro ϵ . La existencia de este mínimo tiene una fácil explicación. Si $\phi = \pi/2$, la probabilidad de transición por unidad de tiempo, $\alpha(t)$, toma su valor más grande posible en $t = 0$. Por tanto, el mínimo de $\tau(\omega)$ tiene que corresponder al caso límite en el que $\alpha(t)$ permanezca constante en el tiempo, lo cual se consigue cuando $\omega = 0$.

También es posible estudiar el comportamiento asintótico, para $N \gg 1$, de la frecuencia ω^* a la que aparece el primer máximo o mínimo de $\tau(\omega)$. Para ello tendremos que recorrer toda la gama de frecuencias, empezando por las más bajas, hasta encontrar el primer punto estacionario de la función $\tau(\omega)$. En el apéndice D se probó que para frecuencias pequeñas, que son las primeras que debemos estudiar, el comportamiento asintótico de $f(t)$ viene dado aproximadamente por la expresión (5.17). Asimismo, demostramos también que el parámetro t_m , que evidentemente coincide con el MFPT, tiene que ser solución de la Ec. (5.20). Si derivamos esta última ecuación respecto a ω , y utilizamos el hecho de que ω^* es un punto estacionario de $\tau(\omega)$, obtenemos

$$p\tau^* + \epsilon\tau^* \sin(\omega^*\tau^* + \phi) = N, \quad (5.41)$$

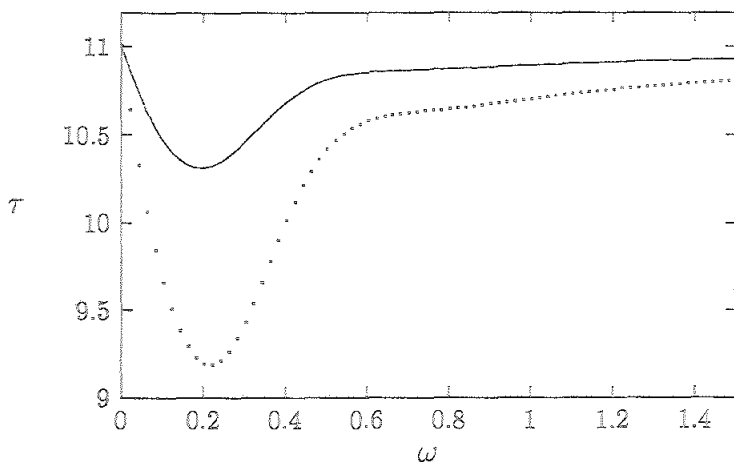


Figura 5.5: MFPT frente a la frecuencia del estímulo para $\epsilon = 0.1$ (línea continua) y $\epsilon = 0.3$ (línea de puntos). Para las dos curvas $N = 10$, $p = 1$ y $\phi = 0$.

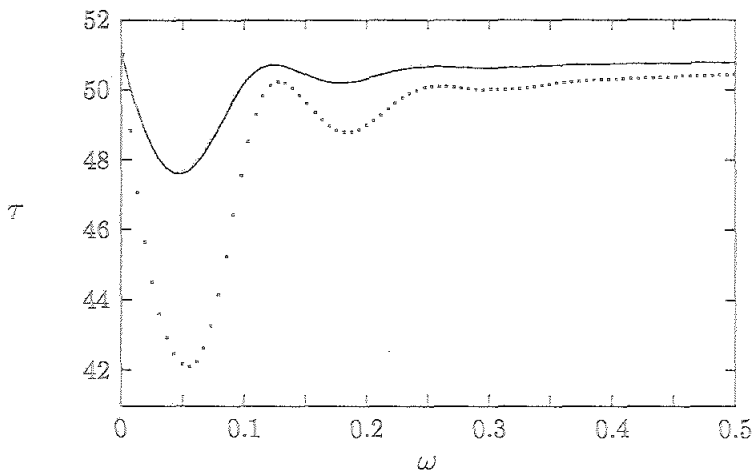


Figura 5.6: MFPT frente a la frecuencia del estímulo para los mismos valores de los parámetros que en la Fig. 5.5, con la única diferencia de que ahora $N = 50$.

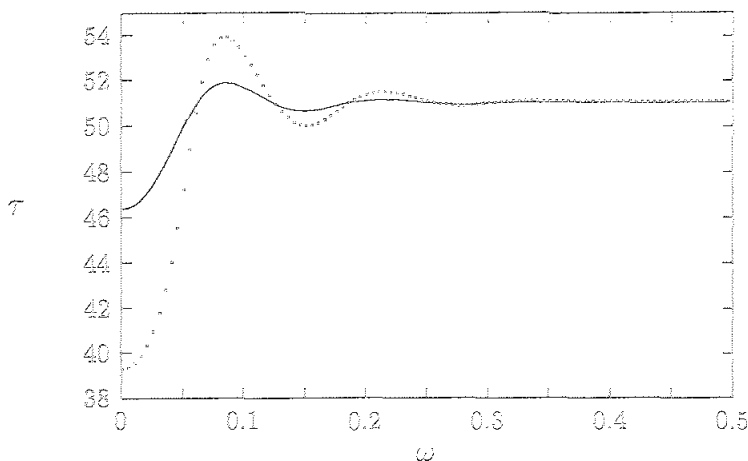


Figura 5.7: MFPT frente a la frecuencia del estímulo para $\epsilon = 0.1$ (línea continua) y $\epsilon = 0.3$ (línea de puntos). Para las dos curvas $N = 50$, $p = 1$, y $\phi = \pi/2$.

donde $\tau^* = \tau(\omega^*)$. Por otra parte, τ^* debe ser solución de la Ec. (5.20) con $\omega = \omega^*$. Así pues, utilizando (5.41) es fácil comprobar que τ^* además tiene que verificar la siguiente ecuación

$$\cos(\omega^* \tau^* + \phi) - \cos \phi + \omega^* \tau^* \sin(\omega^* \tau^* + \phi) = 0. \tag{5.42}$$

Como vimos en la sección 5.3, cuando $\omega/p \ll N^{-1}$ el MFPT es aproximadamente independiente de la frecuencia del estímulo externo. Por tanto, el primer punto estacionario no se puede encontrar en esta zona. La siguiente gama de frecuencias que tenemos que inspeccionar es aquella en la que $\omega/p \sim \mathcal{O}(N^{-1})$. Supongamos, pues, que se cumple la condición

$$\frac{\omega^*}{p} \sim aN^{-1}, \tag{5.43}$$

siendo a un número del orden de la unidad. Si realizamos balance en la Ec. (5.42), o bien nos fijamos en la Ec. (5.41), es fácil concluir que el comportamiento asintótico de $p\tau^*$, para $N \gg 1$, es del tipo

$$p\tau^* \sim a'N. \tag{5.44}$$

Como se ha puesto de manifiesto en los capítulos anteriores, estos tipos de dependencias asintóticas parecen ser bastante habituales en problemas de caminos aleatorios sobre un segmento de línea en los que aparece comportamiento resonante del MFPT [4, 44]. Al sustituir las expresiones (5.43) y (5.44) en las Ecs. (5.41) y (5.42) se llega a

$$a' + \frac{\epsilon}{p} a' \text{sen}(aa' + \phi) = 1 \quad (5.45)$$

y

$$\cos(aa' + \phi) - \cos \phi + aa' \text{sen}(aa' + \phi) = 0. \quad (5.46)$$

Resolviendo esta pareja de ecuaciones acopladas se puede determinar las pendientes a y a' para valores dados de p , ϵ y ϕ . En las Figs. 5.8 y 5.9 se representan, respectivamente, ω^* y τ^* frente a N para distintos valores de la amplitud ϵ . Las curvas se han obtenido numéricamente a partir de la expresión (5.9), considerando $\phi = 0$ y $p = 1$. En ellas se confirman claramente los comportamientos asintóticos (5.43) y (5.44). Además, si se comparan las pendientes de estas curvas para valores grandes de N con las soluciones que se obtienen al resolver las Ecs. (5.45) y (5.46), la concordancia es excelente, como se pone de manifiesto en la tabla 5.1. Las discrepancias se encuentran dentro del error numérico esperado. Puesto que estamos interesados en el primer punto estacionario, debemos elegir, para cada ϵ/p , las soluciones que nos conduzcan a los valores positivos de a y a' más pequeños posibles. De la Ec. (5.45) se deduce que el producto aa' es independiente de ϵ/p . En consecuencia, $\omega^* \tau^*$ también será aproximadamente independiente de este cociente, ya que se verifica que $\omega^* \tau^* \sim aa'$. Teniendo esto en cuenta, la Ec. (5.45) nos permite afirmar que τ^* será una función creciente de ϵ/p cuando $\text{sen}(aa' + \phi)$ sea negativo, y decreciente cuando sea positivo. Evidentemente, el comportamiento de ω^* será el inverso del anterior.

Examinemos ahora la dependencia del MFPT respecto a ϵ . A partir de la expresión (5.15) se puede calcular la pendiente inicial de $\tau(\epsilon)$, resultando

$$\left(\frac{\partial \tau}{\partial \epsilon} \right)_{\epsilon=0} = \frac{1}{\omega p} \left[\frac{\cos \left((N+1) \arctan \frac{\omega}{p} + \phi \right)}{\left(1 + \frac{\omega^2}{p^2} \right)^{(N+1)/2}} - \cos \phi \right]. \quad (5.47)$$

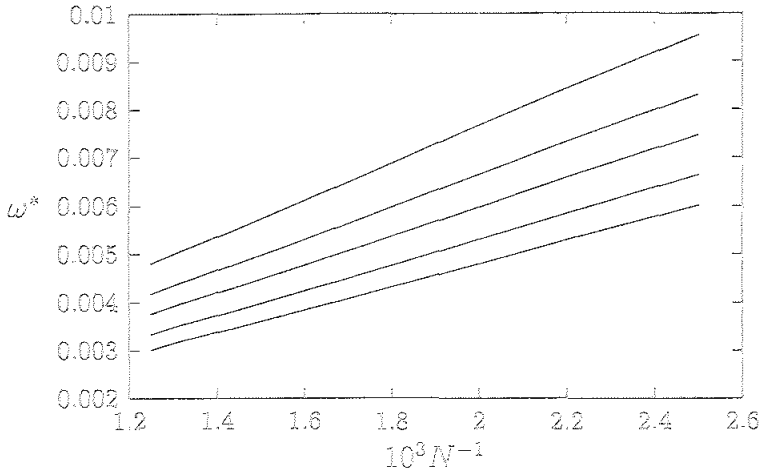


Figura 5.8: Frecuencia de resonancia, ω^* , frente a N^{-1} para distintos valores de la amplitud ϵ . Empezando por arriba, las curvas corresponden a $\epsilon = 0.05, 0.2, 0.4, 0.6$ y 0.9 , respectivamente. Para todas ellas $\phi = 0$ y $p = 1$.

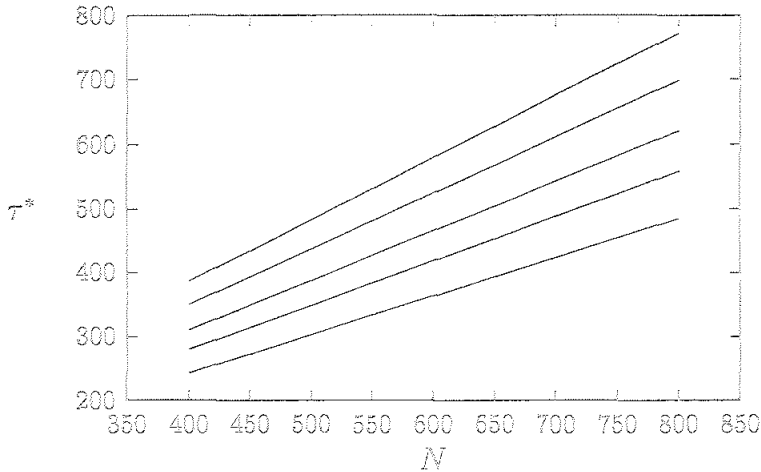


Figura 5.9: (Primer) mínimo del MFPT, τ^* , frente a N para los mismos valores de ϵ , ϕ y p que en la Fig. 5.8. Empezando por arriba, las curvas corresponden a $\epsilon = 0.9, 0.6, 0.4, 0.2$ y 0.05 , respectivamente.

ϵ	a_{ex}	a_{ap}	a'_{ex}	a'_{ap}	$a_{\text{ex}} a'_{\text{ex}}$	$a_{\text{ap}} a'_{\text{ap}}$
0.05	0.965	0.965	2.402	2.416	2.316	2.331
0.20	0.873	0.873	2.650	2.669	2.313	2.331
0.40	0.775	0.775	2.978	3.007	2.309	2.331
0.60	0.697	0.697	3.310	3.345	2.307	2.331
0.90	0.605	0.605	3.806	3.851	2.305	2.331

Tabla 5.1: Pendientes a y a' para los mismos valores de ϵ , p y ϕ que en las Figs. 5.8 y 5.9. Los coeficientes a_{ex} y a'_{ex} se han calculado numéricamente a partir de la expresión (5.9), mientras que a_{ap} y a'_{ap} han sido obtenidos resolviendo las Ecs. (5.45) y (5.46).

Por tanto, ésta dependerá, entre otros factores, de la fase inicial ϕ del estímulo. En primer lugar, vamos a considerar el valor $\phi = \pi/2$, de forma que

$$\left(\frac{\partial \tau}{\partial \epsilon}\right)_{\epsilon=0} = -\frac{1}{\omega p} \frac{\text{sen}\left((N+1) \arctan \frac{\omega}{p}\right)}{\left(1 + \frac{\omega^2}{p^2}\right)^{(N+1)/2}}. \quad (5.48)$$

Para valores fijos de N y p , el segundo miembro de la expresión anterior es positivo o negativo dependiendo del argumento de la función seno, o lo que es lo mismo, de la frecuencia. Así pues, para que la pendiente inicial de $\tau(\epsilon)$ sea positiva y, por consiguiente, $\tau(\epsilon)$ sea una función creciente para valores pequeños de ϵ , la frecuencia ω tiene que estar comprendida dentro de los intervalos

$$p \tan \frac{(2k+1)\pi}{N+1} < \omega < p \tan \frac{2(k+1)\pi}{N+1}, \quad (5.49)$$

con $k = 0, 1, 2, \dots, k_1$, siendo k_1 el mayor número entero menor o igual que $(N-3)/4$, esto es, $k_1 = [(N-3)/4]$. Por el contrario, cuando

$$p \tan \frac{2k\pi}{N+1} < \omega < p \tan \frac{(2k+1)\pi}{N+1}, \quad (5.50)$$

con $k = 0, 1, 2, \dots, k_2$ y $k_2 = [(N-1)/4]$, $\tau(\epsilon)$ será decreciente para ϵ pequeño. Los valores k_1 y k_2 se han obtenido teniendo en cuenta que el argumento máximo de la función seno de la expresión (5.48) es $(N+1)\pi/2$.

Esta transición del MFPT, de ser una función decreciente de la amplitud de la señal periódica a crecer con ella, fue puesta de manifiesto por Gitterman y Weiss en la ref. [5]. En ese artículo se estudia el mismo sistema que en la ref.[4], es decir, un camino aleatorio monodimensional entre dos fronteras absorbentes, pero con la diferencia de que en este caso la fase inicial de la señal es igual a $\pi/2$, en lugar de ser 0 (véase el capítulo 2 para una revisión de los resultados que obtuvieron). En nuestro modelo, la frecuencia más baja a la que tiene lugar la transición es $\omega_1 = p \tan(\pi/(N+1))$, pero también aparecen otras transiciones de un régimen a otro para frecuencias de la forma $\omega_l = p \tan(l\pi/(N+1))$, donde l toma valores de acuerdo con lo mencionado anteriormente. Cuando l es par la pendiente inicial de $\tau(\epsilon)$ cambia de positiva a negativa al aumentar la frecuencia, mientras que para l impar el paso es de negativa a positiva. El comportamiento de $\tau(\epsilon)$ es muy diferente cuando $\phi = 0$, ya que, en ese caso, el segundo miembro de la expresión (5.47) es negativo para cualquier valor de la frecuencia ω y, por tanto, no aparece transición alguna. Esto pone de manifiesto, una vez más, el papel tan importante que juega la fase inicial del estímulo externo en la determinación de las propiedades del MFPT y, en concreto, de la dependencia de éste respecto a la amplitud de la perturbación.

Hasta este momento sólo se ha estudiado la pendiente inicial de $\tau(\epsilon)$ y, en consecuencia, nada se puede afirmar aún acerca del carácter monótono global de esta función. Analizando numéricamente la expresión (5.9) puede verse que, cuando ϕ toma valores en los que aparecen transiciones, se observan unas bandas estrechas de frecuencias, próximas a las de transición y situadas en la zona de pendientes iniciales positivas, para las cuales $\tau(\epsilon)$ muestra un comportamiento no monótono. Así pues, para las transiciones correspondientes a un valor de l par, la banda está localizada por debajo de ω_l , mientras que para las asociadas a un l impar, está por encima de ω_l . Cuando se eligen frecuencias suficientemente lejanas a las de transición, el MFPT pasa a ser una función monótona de ϵ . Estos comportamientos se ponen claramente de manifiesto en las Figs. 5.10 y 5.11. En ellas se ha representado τ frente a ϵ para cuatro valores de la frecuencia cercanos al de la primera transición, Fig. 5.10, y al de la segunda, Fig. 5.11. En todas las curvas $N = 30$, $p = 1$ y $\phi = \pi/2$.

Todos los resultados presentados hasta ahora se han restringido a la condición inicial (5.2) con $l = 0$. No obstante, la mayoría de ellos siguen siendo cualitativamente válidos para otros tipos de condiciones iniciales. En con-

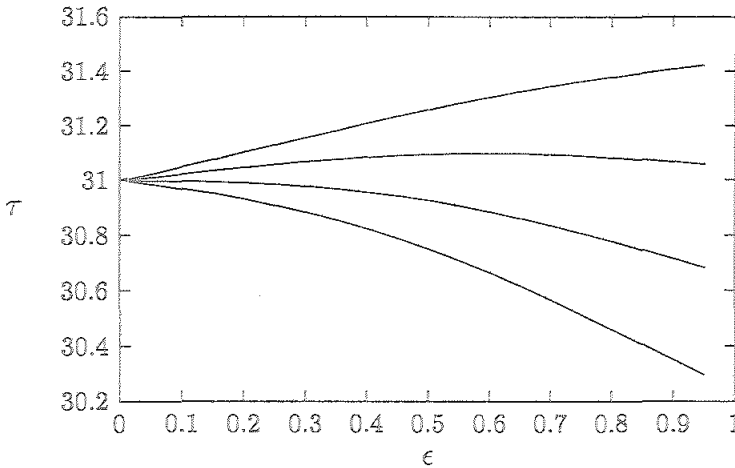


Figura 5.10: MFPT frente a ϵ para $\omega = \omega_1 + 2 \cdot 10^{-3}$, $\omega_1 + 10^{-3}$, ω_1 y $\omega_1 - 10^{-3}$ (empezando por la curva de arriba y terminando por la de abajo). Para las tres curvas $N = 30$, $p = 1$ y $\phi = \pi/2$.

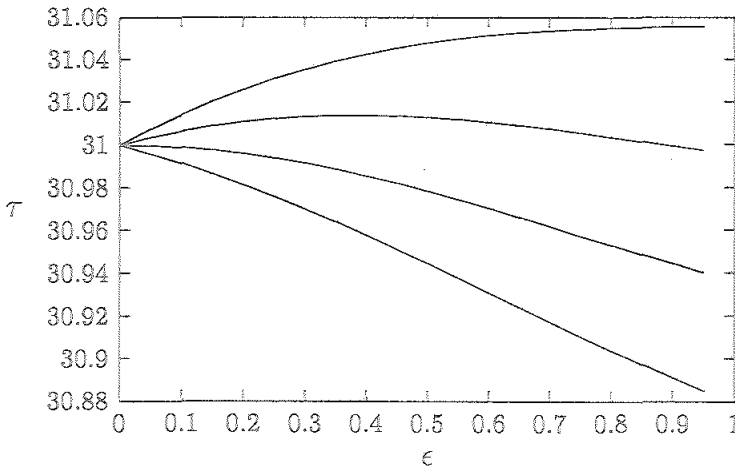


Figura 5.11: MFPT frente a ϵ para $\omega = \omega_2 - 2 \cdot 10^{-3}$, $\omega_2 - 10^{-3}$, ω_2 y $\omega_2 + 10^{-3}$ (empezando por la curva de arriba y terminando por la de abajo). Los valores del resto de los parámetros son los mismos que en la Fig. 5.10.

creto, si consideramos que inicialmente la distribución de probabilidades es uniforme, es decir, del tipo

$$p_n(0) = \frac{1}{N+1} \sum_{i=0}^N \delta_{n,i}; \tag{5.51}$$

las curvas correspondientes a la dependencia del MFPT respecto a la frecuencia, Figs. 5.5 y 5.6, se suavizan y los máximos de la Fig. 5.6 prácticamente desaparecen, como se muestra en la Fig. 5.12. En ella se ha representado el MFPT frente a la frecuencia para los mismos valores de los parámetros que en la Fig. 5.6, pero con la condición inicial uniforme (5.51).

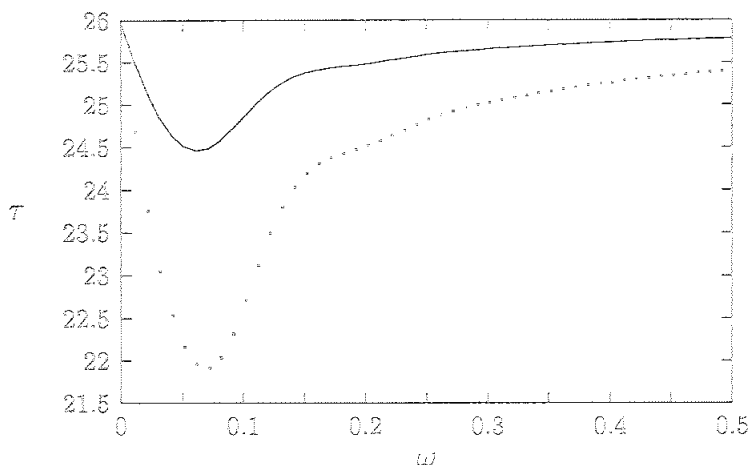


Figura 5.12: MFPT frente a la frecuencia para los mismos valores de los parámetros que en la Fig. 5.6 y la condición inicial (5.51).

5.5 Densidad de potencia espectral

En los apartados anteriores hemos estudiado las propiedades estadísticas correspondientes a una partícula que se escapa una única vez de un segmento de línea. Supongamos ahora que cada vez que la partícula abandona el segmento es reinyectada de nuevo en éste, emitiendo un pulso que, por simplicidad,

tiene forma de delta de Dirac. Este tipo de sistemas se han utilizado para modelar la emisión de señales de las neuronas sensoriales [46]. Si en $t = 0$ colocamos por primera vez a la partícula en su posición inicial y consideramos solamente los M primeros pulsos, la señal emitida será el proceso estocástico $y_M(t)$ definido por

$$y_M(t) = \sum_{j=1}^M \delta(t - t_j), \quad (5.52)$$

siendo cada t_j una variable aleatoria que representa el instante de tiempo en el que se ha emitido el pulso j -ésimo. Si llamamos ξ_j al intervalo de tiempo entre dos pulsos consecutivos, es decir, $\xi_j = t_j - t_{j-1}$ con $t_0 = 0$, las variables t_j se podrán escribir alternativamente del modo siguiente

$$t_j = \sum_{l=1}^j \xi_l. \quad (5.53)$$

Existen diversas formas de reinyectar a la partícula en el segmento, pero la más sencilla de todas, que será la que utilizaremos, consiste en colocarla instantáneamente en la posición de partida, haciendo que el estímulo periódico vuelva a tomar de nuevo su valor inicial [3, 27]. De esta forma, la probabilidad de transición por unidad de tiempo entre los instantes t_j y t_{j+1} será $\alpha(t - t_j)$ y, por tanto, los intervalos ξ_j serán variables aleatorias independientes con la misma distribución de probabilidades $f(\xi_j)$ dada por la expresión (5.11). En consecuencia, el camino aleatorio se convierte en un proceso de reinicialización (renewal process).

Nuestro interés se centrará concretamente en el estudio de la densidad de potencia espectral (PSD) de este sistema, definida como

$$S(\Omega) = \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{\langle |\hat{y}_M(\Omega)|^2 \rangle}{M\tau}. \quad (5.54)$$

Los corchetes angulares $\langle \dots \rangle$ indican promedios sobre todas las realizaciones del proceso estocástico, o lo que es lo mismo, sobre las variables aleatorias ξ_l . A su vez, τ es el valor medio de las variables ξ_l , que viene dado por la Ec. (5.9) con $p_n(0) = \delta_{n,0}$, e $\hat{y}_M(\Omega)$ es la transformada de Fourier de $y_M(t)$, es decir,

$$\hat{y}_M(\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{i\Omega t} y_M(t). \quad (5.55)$$

Una propiedad importante que presentan los procesos de reinicialización es que la PSD de la señal emitida se puede expresar a partir de la FPTDF mediante la relación [48]

$$S(\Omega) = \frac{1}{\tau^2} \delta\left(\frac{\Omega}{2\pi}\right) + \frac{1}{\tau} \operatorname{Re} \left[\frac{1 + \hat{f}(\Omega)}{1 - \hat{f}(\Omega)} \right], \quad (5.56)$$

donde

$$\hat{f}(\Omega) = \int_0^\infty dt e^{i\Omega t} f(t). \quad (5.57)$$

En el apéndice F se presenta una prueba detallada de este resultado.

Supongamos, por el momento, que la amplitud de la señal del estímulo periódico es nula, es decir, $\epsilon = 0$. En este caso, la FPTDF se reduce a la función $f_0(t)$ de la expresión (5.14). Introduciendo esta función en la Ec. (5.57) y simplificando convenientemente, se obtiene

$$\hat{f}_0(\Omega) = \frac{1}{(1 + (\Omega/p)^2)^{(N+1)/2}} [\cos((N+1)\rho) + i \operatorname{sen}((N+1)\rho)], \quad (5.58)$$

siendo

$$\rho = \arccos \frac{1}{(1 + (\Omega/p)^2)^{1/2}}. \quad (5.59)$$

La rama del arccoseno considerada anteriormente es aquélla para la cual ρ está comprendido dentro del intervalo $[0, \pi/2]$. Si sustituimos la expresión (5.58) en la Ec. (5.56), se llega al siguiente resultado para la PSD

$$S_0(\Omega) = \left(\frac{p}{N+1}\right)^2 \delta\left(\frac{\Omega}{2\pi}\right) + \frac{p}{N+1} \frac{1 - x^{2(N+1)}}{1 + x^{2(N+1)} - 2x^{N+1} \cos[(N+1) \arccos x]}, \quad (5.60)$$

donde el subíndice 0 hace referencia a que $\epsilon = 0$, y

$$x = \frac{1}{(1 + (\Omega/p)^2)^{1/2}}. \quad (5.61)$$

La expresión anterior es excesivamente complicada como para obtener conclusiones analíticas a partir de ella. En consecuencia, vamos a restringirnos al caso límite más sencillo en el que el número de nudos en el segmento es

muy grande, es decir, $N \gg 1$. En el apéndice G se prueba que entonces el comportamiento asintótico de la PSD es

$$S_0(\Omega) \sim \left(\frac{p}{N}\right)^2 \delta\left(\frac{\Omega}{2\pi}\right) + \frac{p}{N} \frac{\sinh\left[\frac{N}{2}\left(\frac{\Omega}{p}\right)^2\right]}{\cosh\left[\frac{N}{2}\left(\frac{\Omega}{p}\right)^2\right] - \cos[N\Omega/p]}. \quad (5.62)$$

Este mismo comportamiento se puede obtener también sustituyendo en la expresión (5.56) la transformada de Fourier de la aproximación gaussiana de la función $f_0(t)$, esto es, del resultado (5.16) con $\epsilon = 0$.

Veamos ahora qué consecuencias podemos deducir de este resultado. En primer lugar, vamos a estudiar la dependencia de la PSD respecto a la frecuencia Ω a p constante. Para ello, es conveniente introducir, al igual que en el apéndice G, la variable adimensional

$$\tilde{\Omega} = N^{1/2} \frac{\Omega}{p}. \quad (5.63)$$

Como se pone de manifiesto en el apéndice antes citado, esta variable presenta la ventaja de ser como mucho del orden de la unidad en la región relevante de la PSD, entendiendo como tal, la zona en la que la PSD no es aproximadamente constante. Si expresamos $S_0(\Omega)$, para $\Omega \neq 0$, en función de esta variable, se obtiene el siguiente resultado

$$S_0(pN^{-1/2}\tilde{\Omega}) \sim \frac{p}{N} \frac{\sinh(\tilde{\Omega}^2/2)}{\cosh(\tilde{\Omega}^2/2) - \cos(N^{1/2}\tilde{\Omega})}. \quad (5.64)$$

Las localizaciones de los máximos y los mínimos locales de esta función de $\tilde{\Omega}$ se pueden calcular aproximadamente mediante un razonamiento muy sencillo. De todas las funciones que aparecen en el segundo miembro de la expresión anterior, la que varía más rápidamente es $\cos(N^{1/2}\tilde{\Omega})$, y además se encuentra en el denominador restando a una función estrictamente positiva. En consecuencia, los máximos locales se alcanzarán aproximadamente cuando este coseno sea máximo, es decir, cuando $\cos(N^{1/2}\tilde{\Omega}) = 1$. Así pues, la localizaciones aproximadas de los máximos locales serán

$$\tilde{\Omega}_n \simeq \frac{2\pi n}{N^{1/2}} \quad \text{con } n = 1, 2, \dots \quad (5.65)$$

Por el contrario, los mínimos tendrán lugar aproximadamente para aquellos valores de $\tilde{\Omega}$ que verifiquen la condición $\cos(N^{1/2}\tilde{\Omega}) = -1$, es decir, para

$$\tilde{\Omega}_n \simeq \frac{(2n-1)\pi}{N^{1/2}} \quad \text{con } n = 1, 2, \dots \quad (5.66)$$

Volviendo de nuevo a la variable original Ω , obtenemos la siguiente expresión para las posiciones aproximada de los máximos

$$\Omega_n \simeq \frac{2\pi n p}{N} \quad \text{con } n = 1, 2, \dots, \quad (5.67)$$

mientras que para los mínimos se llega a

$$\Omega_n \simeq \frac{(2n-1)\pi p}{N} \quad \text{con } n = 1, 2, \dots \quad (5.68)$$

Si queremos deducir estos resultados de forma más rigurosa, tendremos que derivar $S_0(\Omega)$ respecto a Ω e igualar a cero el numerador de la función obtenida. La derivada de $S_0(\Omega)$ expresada en función de $\tilde{\Omega}$ es

$$\frac{\partial S_0(\Omega)}{\partial \Omega} \sim \frac{N^{-1/2}\tilde{\Omega} [1 - \cosh(\tilde{\Omega}^2/2)\cos(N^{1/2}\tilde{\Omega})] - \sinh(\tilde{\Omega}^2/2)\sin(N^{1/2}\tilde{\Omega})}{[\cosh(\tilde{\Omega}^2/2) - \cos(N^{1/2}\tilde{\Omega})]^2}, \quad (5.69)$$

y, por consiguiente, para que un punto sea estacionario se tiene que cumplir la condición

$$N^{-1/2}\tilde{\Omega} [1 - \cosh(\tilde{\Omega}^2/2)\cos(N^{1/2}\tilde{\Omega})] - \sinh(\tilde{\Omega}^2/2)\sin(N^{1/2}\tilde{\Omega}) = 0. \quad (5.70)$$

Como se dijo anteriormente, en la zona de interés de la PSD, la variable $\tilde{\Omega}$ es como mucho del orden de la unidad y, por tanto, para $N \gg 1$, el primer sumando de (5.70) será mucho menor que uno. Así pues, los puntos estacionarios en el orden más bajo se obtendrán igualando a cero el segundo sumando. Las soluciones así obtenidas son de la forma (5.65) y (5.66). Calculando la derivada segunda de $S_0(\Omega)$ en estos puntos se comprueba sin dificultad que las soluciones del primer tipo corresponden a máximos, mientras que las del segundo a mínimos.

El resultado (5.67) se puede interpretar fácilmente teniendo en cuenta que el tiempo medio que transcurre entre emisiones de señales es $\tau_0 = (N+1)/p$

y, en consecuencia, podemos definir una frecuencia característica entre pulsos que, para $N \gg 1$, será de la forma $\Omega_1 = 2\pi/\tau_0 \simeq 2\pi p/N$. Se observa, de este modo, que los máximos de la PSD aparecen cuando Ω es un múltiplo de esta frecuencia característica.

Sustituyendo en la expresión (5.64) los valores (5.65), se obtiene la siguiente estimación de la altura de los máximos

$$S_0(\Omega_n) \simeq \frac{p}{N} \frac{\sinh(2\pi^2 n^2/N)}{\cosh(2\pi^2 n^2/N) - 1}. \quad (5.71)$$

De este resultado se deduce que las alturas disminuyen rápidamente al crecer n , o lo que es lo mismo, a medida que nos alejamos de $\Omega = 0$. Por consiguiente, la PSD presenta un máximo global en $\Omega = \Omega_1$ y una serie de máximos locales más pequeños cuyas alturas decrecen con n . Para n suficientemente grandes los máximos dejan de distinguirse en la escala correspondiente al mayor de todos, y la PSD pasa a tomar un valor constante igual a p/N . Si tenemos en cuenta que para que un máximo pueda apreciarse en dicha escala el argumento $2\pi^2 n^2/N$ debe ser como mucho del orden de la unidad, es fácil concluir que, para $N \gg 1$, el número de máximos observados va a crecer con N , presentando una dependencia respecto a este parámetro del tipo $N^{1/2}$. Por último, del resultado (5.71) también se sigue que la altura de los máximos dependen linealmente de p . En general, la expresión (5.60) junto con la (5.61) (o en su caso, la aproximación (5.62)) nos permite afirmar que para un valor constante de $\tilde{\Omega}$, corresponda a un máximo o no, la PSD siempre presenta una dependencia lineal respecto a p . En las Figs. 5.13 y 5.14 se han representado la PSD exacta, Ec. (5.60), y aproximada, Ec. (5.62), frente a Ω , para $N = 50$ y $N = 100$, respectivamente. En ambas se han considerado dos valores de p , $p = 1$ y $p = 2$, para mostrar su dependencia lineal respecto a este parámetro. Se han utilizado frecuencias reescaladas de la forma $N\Omega/(2\pi p)$ para poner más claramente de manifiesto la localización de los máximos. Como puede observarse la aproximación (5.62) es muy buena incluso para valores de N no muy grandes.

Un análisis muy parecido al que hemos realizado anteriormente se puede efectuar también para estudiar la dependencia de la PSD respecto a p , suponiendo que Ω es constante. De nuevo aparecen máximos que están aproximadamente localizados en aquellos valores de p que satisfacen la ecuación $\cos(N^{1/2}\tilde{\Omega}) = 1$, donde $\tilde{\Omega}$ depende de p de acuerdo con la expresión (5.63).

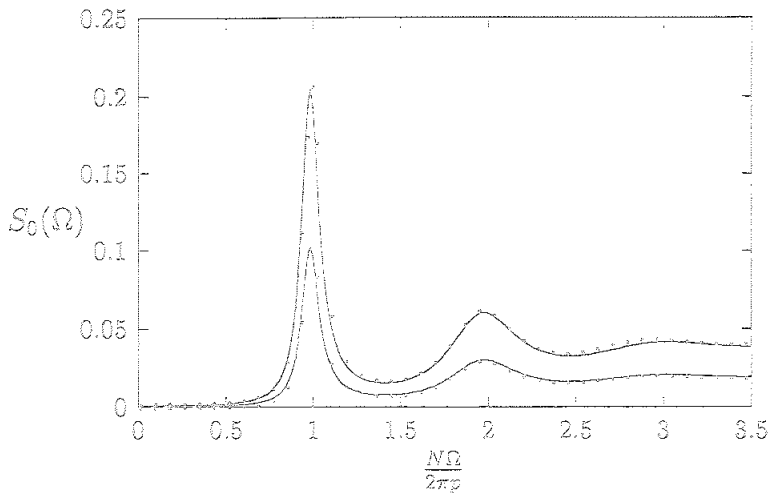


Figura 5.13: PSD exacta (líneas continuas) y aproximación (5.62) (líneas de puntos) frente a la frecuencia reescalada $N\Omega/(2\pi p)$, para $N = 50$, $\epsilon = 0$, $p = 1$ (curvas inferiores) y $p = 2$ (curvas superiores). La delta del origen ha sido suprimida.

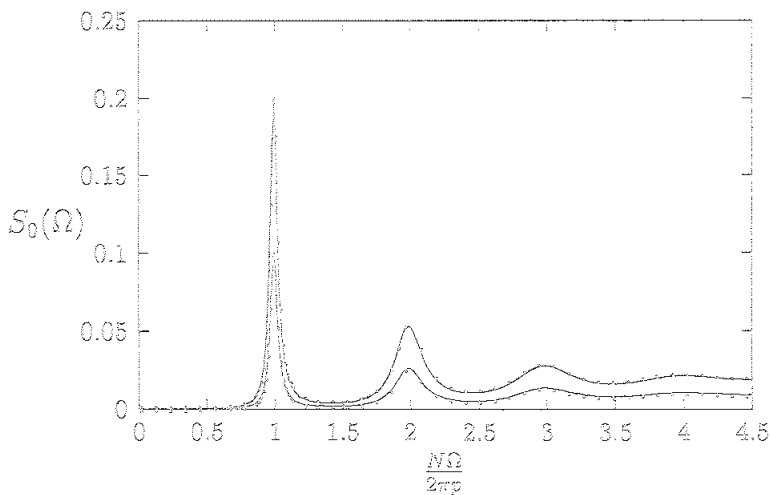


Figura 5.14: Igual que en la Fig. 5.13 pero para $N = 100$.

De esta forma se llega a la conclusión de que la $S_0(p)$ es máxima cuando

$$p_n \simeq \frac{N\Omega}{2\pi n} \quad \text{con } n = 1, 2, \dots \quad (5.72)$$

Las alturas de estos máximos vienen dadas por la expresión

$$S_0(p_n) \simeq \frac{\Omega}{2\pi n} \frac{\sinh(2\pi^2 n^2/N)}{\cosh(2\pi^2 n^2/N) - 1}, \quad (5.73)$$

y, como puede observarse, dependen linealmente de Ω . A medida que aumenta n , los máximos se acercan al origen $p = 0$ y disminuyen rápidamente de altura, observándose, por tanto, un máximo global en p_1 . Al igual que antes el número de máximos observados en la escala del mayor crece al aumentar el valor de N . En la Fig. 5.15 se ha representado la PSD frente a p , para $N = 50$, utilizando tanto la expresión exacta de la PSD como la aproximada. Se han tomado dos valores de Ω , $\Omega = 1$ y $\Omega = 2$, para mostrar la linealidad antes mencionada. La variable p se ha reescalado convenientemente para poner de manifiesto de forma más clara la localización de los máximos.

Hasta este momento hemos analizado únicamente la PSD para $\epsilon = 0$. El caso más general en el que la amplitud del estímulo es distinta de cero es bastante más complicado de estudiar y será tratado en un próximo trabajo. No obstante, vamos a resumir algunas conclusiones obtenidas al calcular numéricamente la transformada de Fourier de la expresión (5.11) y sustituirla en (5.56). En primer lugar, si se representa la PSD frente a Ω y se considera que los demás parámetros del problema son constantes, el resultado que se obtiene depende tanto del valor que toma la frecuencia del estímulo como de la fase del mismo, pudiéndose distinguir tres regiones bien diferenciadas:

1. Cuando ω se encuentra en la zona en la que $S_0(\Omega)$ toma un valor prácticamente constante, aparecen una serie de máximos adicionales alrededor de la frecuencia del estímulo, cuyas localizaciones dependen del valor de la fase. En concreto, para $\phi = \pi/2$, el mayor de estos máximos se encuentra situado aproximadamente en $\Omega = \omega$, mientras que para $\phi = 0$ aparece ligeramente desplazado. Prescindiendo de estos máximos, las funciones $S_0(\Omega)$ y $S(\Omega)$ son bastante parecidas.
2. Cuando ω se encuentra comprendida dentro de la zona en la que aparecen los picos de la función $S_0(\Omega)$, los máximos adicionales que se

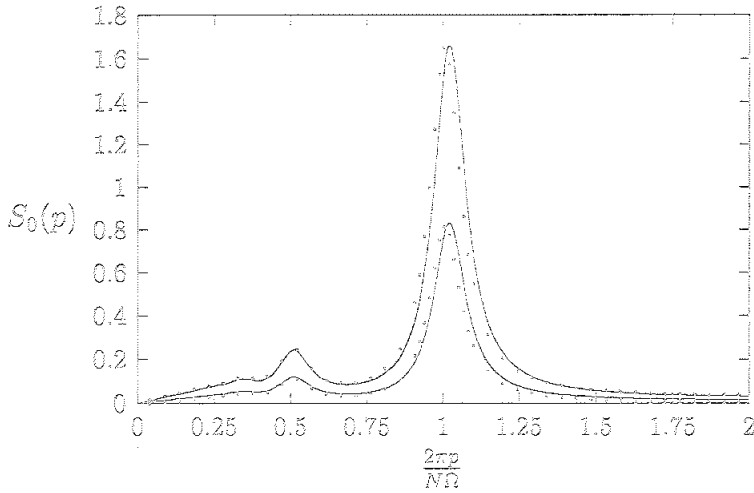


Figura 5.15: PSD exacta (líneas continuas) y aproximación (5.62) (líneas de puntos) frente a la variable p reescalada, $2\pi p/(N\Omega)$, para $N = 50$, $\epsilon = 0$, $\Omega = 1$ (curvas inferiores) y $\Omega = 2$ (curvas superiores).

apreciaban en la región anterior solapan con los correspondientes a $S_0(\Omega)$ y, por lo tanto, dejan de distinguirse con claridad.

3. Para $\omega \ll 2\pi p/N$, el estímulo externo permanece prácticamente constante e igual a $p + \epsilon \text{sen}(\phi)$ durante el tiempo medio que tarda la partícula en salir del segmento. Por tanto, en este caso la función $S(\Omega)$ presenta una forma bastante parecida a $S_0(\Omega)$, pero con la diferencia de que en lugar de p aparece este parámetro que depende de la fase del estímulo. En concreto, cuando $\phi = \pi/2$, este parámetro es aproximadamente igual a $p + \epsilon$, mientras que para $\phi = 0$ su valor aproximado es p .

En la Fig. 5.16 se ha representado la PSD frente a Ω para $N = 50$ y $p = 1$. La línea de puntos corresponde al caso $\epsilon = 0$ (expresión (5.60)) y las de trazo continuo a $\epsilon = 0.2$ y $\omega = 0.5$, siendo $\phi = \pi/2$ para la línea gruesa y $\phi = 0$ para la delgada. Para la elección de los parámetros que hemos realizado, ω se encuentra en la primera de las regiones antes enumeradas, pudiéndose distinguir claramente los máximos adicionales alrededor de $\Omega = \omega$.

Restrinjámonos a partir de ahora al caso $\phi = \pi/2$, y representemos la PSD correspondiente a la frecuencia del estímulo aplicado, esto es, $S(\Omega = \omega)$, frente a ω . El resultado que se obtiene presenta una forma muy parecida a la de la función $S_0(\Omega = \omega)$, con la única diferencia de que la curva para $\epsilon \neq 0$ está siempre por encima de la correspondiente a amplitud cero. Así pues, al igual que sucedía en el caso $\epsilon = 0$, la función $S(\Omega = \omega)$ presenta una serie de máximos localizados aproximadamente en las frecuencias

$$\omega_n \simeq \frac{2\pi n p}{N} \quad \text{con } n = 1, 2, \dots \quad (5.74)$$

De nuevo, las alturas de estos máximos decrecen rápidamente al aumentar n , apareciendo un máximo global en ω_1 , y otros de menor tamaño en los múltiplos de esta frecuencia. El número de máximos pequeños que se pueden apreciar en la escala del mayor crece al aumentar N . Puesto que $S(\Omega = \omega)$ es siempre mayor que $S_0(\Omega = \omega)$, la expresión (5.71) ya no será una buena aproximación de las alturas de estos máximos, excepto cuando la amplitud del estímulo sea pequeña en comparación con p , es decir, para $\epsilon/p \ll 1$. El comportamiento que acabamos de describir se puede entender fácilmente si recordamos que, para $\phi = \pi/2$, la función $S(\Omega)$ presenta un máximo en $\Omega = \omega$, aunque, como se mencionó anteriormente, éste sólo se distingue con

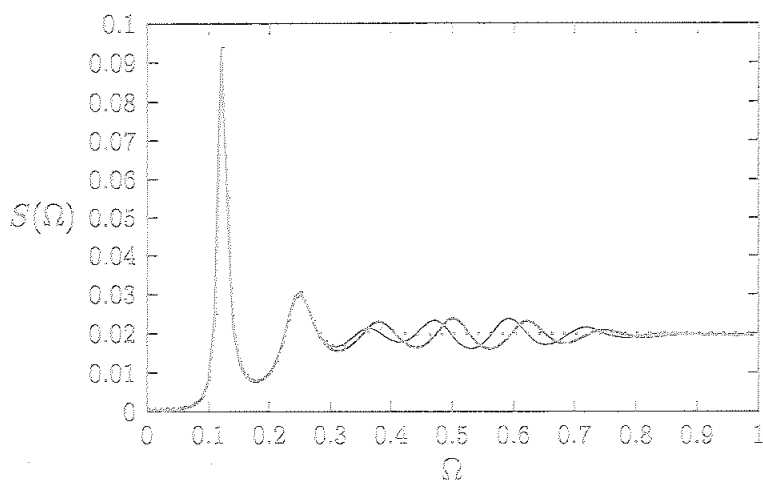


Figura 5.16: PSD frente a Ω para $N = 50$ y $p = 1$. Con puntos se ha representado el caso $\epsilon = 0$ (expresión (5.60)). Las curvas de trazo continuo corresponden a $\epsilon = 0.2$, $\omega = 0.5$, $\phi = \pi/2$ (línea gruesa) y $\phi = 0$ (línea delgada).

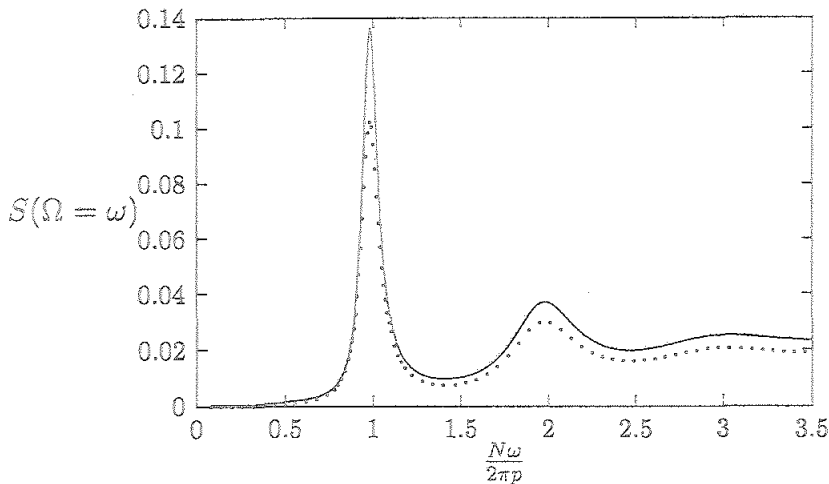


Figura 5.17: $S(\Omega = \omega)$ frente a $N\omega/(2\pi p)$ para $N = 50$ y $p = 1$. Con línea continua se ha representado el caso $\epsilon = 0.2$ y $\phi = \pi/2$. La línea de puntos corresponde al caso $\epsilon = 0$, esto es, a $S_0(\Omega = \omega)$.

claridad cuando ω se encuentra en la región en la que $S_0(\Omega)$ es prácticamente constante. A medida que ω disminuye, este máximo se desplaza hacia la izquierda, y eventualmente se superpone con los de la función $S_0(\Omega)$. De esta forma, los máximos de $S(\Omega = \omega)$ tendrán lugar aproximadamente cuando ocurra alguna de estas superposiciones, o lo que es lo mismo, cuando ω tome alguno de los valores de la expresión (5.74). Además, este mismo razonamiento nos permite entender también por qué siempre se cumple que $S(\Omega = \omega)$ es mayor que $S_0(\Omega = \omega)$. En la Fig. 5.17 se presenta un ejemplo característico de este tipo de comportamiento. En ella se ha representado con línea continua la función $S(\Omega = \omega)$ frente a ω para $N = 50$, $p = 1$, $\epsilon = 0.2$ y $\phi = \pi/2$. También se ha representado con línea de puntos la función $S_0(\Omega = \omega)$ a fin de comparar los resultados. Se ha utilizado la frecuencia reescalada $N\omega/(2\pi p)$ para apreciar más claramente la localización de los máximos.

Por último, vamos a estudiar la dependencia de la función $S(\Omega = \omega, p)$ respecto a p cuando se mantiene constante la frecuencia del estímulo periódico. Como en el caso anterior, el resultado que se obtiene presenta una forma bastante parecida al correspondiente a $\epsilon = 0$, $S_0(\Omega = \omega, p)$. Así pues, la PSD muestra un comportamiento resonante, es decir, una serie de máximos para

determinados valores de p . De nuevo, las localizaciones de estos máximos vienen dadas por la expresión

$$p_n \simeq \frac{N\omega}{2\pi n} \quad \text{con } n = 1, 2, \dots \quad (5.75)$$

Las alturas de estos máximos disminuyen rápidamente al aumentar n , pudiéndose observar en la práctica un máximo absoluto bien definido en $p = p_1$, y otros más pequeños cuyo número en la escala del mayor crece con N . Como sucedía en el caso de p constante y ω variable, el valor de la PSD para amplitud no nula es siempre ligeramente mayor que el correspondiente a $\epsilon = 0$. Tanto esta diferencia de altura como la localización de los máximos se pueden explicar de forma análoga a como lo hicimos en ese caso. También puede observarse que la altura de un máximo dado es una función monótona creciente de ω . En la Fig. 5.18 se muestra un ejemplo del comportamiento antes descrito. En ella se ha representado con línea continua $S(\Omega = \omega, p)$ frente a p para dos valores de ω ($\omega = 0.5$ para la curva inferior y $\omega = 1$ para la superior). Los valores del resto de los parámetros son $N = 50$, $\epsilon = 0.2$ y $\phi = \pi/2$. Las líneas de puntos corresponden al caso $\epsilon = 0$. Se ha reescalado p de forma conveniente para que la localización de los máximos sea más clara. Evidentemente, las curvas continuas sólo tienen sentido para $p \geq \epsilon$. Obsérvese que en la Fig. 5.18 las curvas para $\epsilon = 0$ aproximan mejor a las correspondiente a $\epsilon \neq 0$ que en la Fig. 5.17. Esto se explica fácilmente si tenemos en cuenta que el cociente ϵ/p en la zona relevante de la Fig. 5.18 es menor que el de la Fig. 5.17.

El comportamiento de la PSD que hemos descrito en esta sección es cualitativamente bastante parecido al que se observa en los sistemas bistables con resonancia estocástica. No obstante, como ya mencionamos en la sección 5.3, los mecanismos físicos responsables de ambos tipos de fenómenos son bastante diferentes.

5.6 Discusión

El objetivo de este capítulo ha sido estudiar las propiedades estadísticas del tiempo de permanencia en un segmento de línea de un proceso de Poisson, cuyas probabilidades de transición por unidad de tiempo entre nudos dependen sinusoidalmente del tiempo. La simplicidad del modelo nos ha permitido

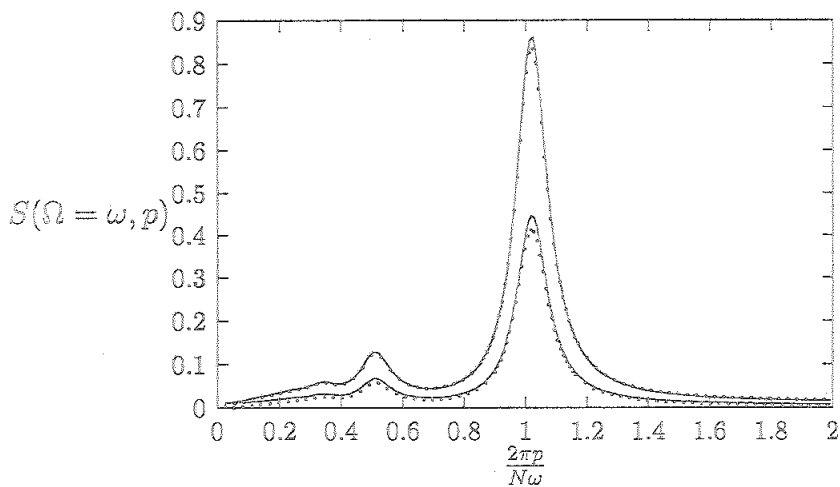


Figura 5.18: $S(\Omega = \omega, p)$ frente a $2\pi p/(N\omega)$ para $N = 50$, $\omega = 0.5$ (curvas inferiores) y $\omega = 1$ (curvas superiores). Con línea continua se ha representado el caso $\epsilon = 0.2$ y $\phi = \pi/2$. La línea de puntos corresponde al caso $\epsilon = 0$, esto es, a $S_0(\Omega = \omega, p)$.

resolver exactamente la ecuación maestra que gobierna su evolución, y obtener una expresión exacta para la función de distribución de tiempos de permanencia. La estructura que presenta esta función muestra muchas de las características que se consideran típicas de un comportamiento resonante y, en particular, del fenómeno de la resonancia estocástica en sistemas biestables. No obstante, las diferencias físicas significativas que existen entre el modelo aquí propuesto y los sistemas biestables impiden que se pueda establecer una relación directa entre ambos fenómenos. En primer lugar, en nuestro modelo no tiene sentido anular el término de ruido p a amplitud ϵ constante, ya que $p \geq \epsilon$, mientras que en los sistemas biestables sí. En segundo lugar, en el proceso de Poisson que hemos estudiado el ruido y el arrastre están controlados por el mismo parámetro y, en consecuencia, no puede haber competencia entre estos dos términos. Esto último constituye también una diferencia esencial entre nuestro modelo y el propuesto por Bulsara, Lowen y Rees [3].

Al analizar el tiempo medio de permanencia en el segmento de línea, hemos comprobado que presenta un comportamiento resonante, en el sentido de que se induce una cierta coherencia en el movimiento del sistema que reduce el tiempo que tarda la partícula en salir por la frontera. Así pues, cuando se considera el tiempo medio en función de la frecuencia del estímulo, observamos que éste puede presentar un mínimo. Sin embargo, este fenómeno está fuertemente influenciado por el valor de la fase inicial del término sinusoidal. En concreto, y como es de esperar, cuando la fase inicial es igual a $\pi/2$, (lo cual corresponde a suponer que el estímulo es máximo en el instante inicial), el mínimo global aparece a frecuencia cero. Otra propiedad interesante que hemos observado es que el MFPT considerado como función de la amplitud del estímulo presenta una transición en su comportamiento, pasando de ser una función creciente de este parámetro a decrecer con el mismo cuando se modifica la frecuencia.

Finalmente, hemos introducido un mecanismo de reinyección muy sencillo, y hemos supuesto que cada vez que una partícula sale por el extremo del segmento se emite una señal con forma de delta de Dirac. Por simplicidad, se ha tratado en primer lugar el caso en el que la amplitud del estímulo es nula. Estudiando la señal de salida, o más concretamente, su PSD, hemos observado que ésta presenta una serie de máximos cuando se la considera en función de la frecuencia de la transformada de Fourier. Una estructura del mismo tipo aparece también cuando se considera la PSD en función del

parámetro p . En el caso de amplitud no nula, hemos comprobado que la PSD presenta un comportamiento resonante muy parecido a cuando este parámetro es igual a cero. Este comportamiento de la señal de salida es similar, desde un punto de vista cualitativo, al observado en los sistemas biestables con resonancia estocástica. No obstante, las mismas objeciones que mencionamos anteriormente, nos impiden establecer un paralelismo más directo entre estos dos tipos de fenómenos.

Capítulo 6

Conclusiones

A lo largo de esta Memoria hemos profundizado en los mecanismos que pueden llevar a la aparición de comportamiento resonante en los sistemas estocásticos. Para ello, hemos utilizado modelos lo suficientemente sencillos como para permitir un tratamiento analítico exacto. Todos los modelos propuestos tienen en común el hecho de que han sido formulados en términos de una ecuación maestra.

A continuación resumimos algunas de las conclusiones generales más relevantes de nuestro trabajo:

1. La interacción entre dos ruidos o entre un ruido y una señal periódica externa puede llevar a la aparición de comportamientos resonantes, incluso en modelos muy sencillos. En particular, dichos fenómenos se presentan también en sistemas lineales.
2. Una característica de los modelos estudiados es que la relajación de los mismos está gobernada por dificultades configuracionales, en lugar de por la presencia de barreras energéticas. Esto es particularmente claro en los problemas de tiempos de escape de un segmento. En este sentido, podemos decir que son modelos con barreras de tipo "entrópico". Se ha visto que estas barreras entrópicas pueden llevar a comportamientos resonantes análogos a los observados en sistemas con barreras energéticas.
3. Desde un punto de vista conceptual, los fenómenos resonantes que tienen su origen en la presencia de dos ruidos son distintos de los que

proviene de un ruido y de una señal periódica externa. En el primer caso resulta de la *competencia* entre los dos ruidos, mientras que en el segundo es consecuencia del *acoplo* de ambos agentes.

4. No obstante, cuando el efecto resonante se manifiesta, existen algunas semejanzas entre los dos fenómenos. Un ejemplo de esta similitud es el comportamiento asintótico para número de nudos grandes del MFPT en el segmento de línea fluctuante.
5. A un nivel práctico, el formalismo desarrollado por Zwanzig para el estudio de sistemas con ruido dinámico ha resultado ser una herramienta eficaz para el estudio de modelos con dos ruidos de orígenes distintos.
6. Un aspecto tratado en detalle en esta Memoria y al que, en nuestra opinión, no se le había prestado suficiente atención es el decisivo papel jugado por las condiciones iniciales y las de contorno.
7. En el caso de las condiciones iniciales, no sólo determinan la amplitud del efecto resonante, sino también su propia presencia. Para valores dados de todos los parámetros del sistema, la aparición de resonancia puede producirse para ciertas condiciones iniciales y no para otras.
8. El papel jugado por las condiciones de contorno es también esencial. En particular, nuestro trabajo ha puesto de manifiesto que condiciones de contorno que rompen la simetría del sistema son responsables, en ciertos casos, del comportamiento resonante del mismo.
9. También se ha considerado la posibilidad de mecanismos de reinyección en problemas de camino aleatorio en un segmento. De este modo, modelos sencillos de activación producen señales de salida con características cualitativas análogas a las de una partícula en un potencial biestable (con ruido y señal externa periódica).
10. No podemos dejar de señalar que, aunque por la sencillez de los modelos estudiados no se puede pretender establecer una conexión directa de éstos con sistemas reales, algunos de ellos han tenido su origen en propuestas efectuadas para describir distintos fenómenos, observados fundamentalmente en sistemas biológicos.

Apéndice A

Cálculo del MFPT para el modelo simétrico con condiciones iniciales arbitrarias de la posición y del estado de la red

En este apéndice vamos a describir un método, análogo al de las funciones de Green, para resolver el problema del segmento de línea con dos fronteras absorbentes. La ventaja que presenta el método aquí descrito, frente al utilizado en la sección 4.2, es que permite resolver el problema para condiciones iniciales arbitrarias de la posición de la partícula y del estado de la red. Para finalizar, aplicaremos este método a dos condiciones iniciales especialmente interesantes, a saber, una partícula localizada inicialmente en un nudo con condiciones arbitrarias del estado de la red y, por otro lado, una distribución inicial uniforme de la posición de la partícula, con el estado de la red arbitrario.

Para ello, comenzaremos calculando el MFPT del modelo simétrico con dos tipos de condiciones iniciales. La primera es

$$p_n^{(l,1)}(1,0) = \delta_{n,l}, \quad p_n^{(l,1)}(2,0) = 0, \quad (\text{A.1})$$

esto es, la partícula está inicialmente en el nudo l -ésimo, siendo el estado de

la red $\alpha = 1$. La segunda es

$$p_n^{(l,2)}(1,0) = 0, \quad p_n^{(l,2)}(2,0) = \delta_{n,l}, \quad (\text{A.2})$$

es decir, la misma que antes con el estado de la red $\alpha = 2$. El paréntesis superior con dos índices señala la condición inicial que estamos considerando. El primer índice hace referencia a la posición inicial de la partícula y el segundo al estado inicial de la red.

Si integramos respecto al tiempo las Ecs. (4.2)-(4.5) y tenemos en cuenta las condiciones iniciales anteriores, obtendremos en el primer caso

$$(k + \gamma)\alpha_{-N}(l,1) - \gamma\beta_{-N}(l,1) = \delta_{-N,l}, \quad (\text{A.3})$$

$$(k + \gamma)\alpha_n(l,1) - k\alpha_{n-1}(l,1) - \gamma\beta_n(l,1) = \delta_{n,l}, \quad (\text{A.4})$$

para $-N + 1 \leq n \leq N$,

$$(k + \gamma)\beta_n(l,1) - k\beta_{n+1}(l,1) - \gamma\alpha_n(l,1) = 0, \quad (\text{A.5})$$

para $-N \leq n \leq N - 1$, y

$$(k + \gamma)\beta_N(l,1) - \gamma\alpha_N(l,1) = 0. \quad (\text{A.6})$$

Para el segundo tipo de condiciones iniciales el resultado será

$$(k + \gamma)\alpha_{-N}(l,2) - \gamma\beta_{-N}(l,2) = 0, \quad (\text{A.7})$$

$$(k + \gamma)\alpha_n(l,2) - k\alpha_{n-1}(l,2) - \gamma\beta_n(l,2) = 0, \quad (\text{A.8})$$

para $-N + 1 \leq n \leq N$,

$$(k + \gamma)\beta_n(l,2) - k\beta_{n+1}(l,2) - \gamma\alpha_n(l,2) = \delta_{n,l}, \quad (\text{A.9})$$

para $-N \leq n \leq N - 1$, y

$$(k + \gamma)\beta_N(l,2) - \gamma\alpha_N(l,2) = \delta_{N,l}. \quad (\text{A.10})$$

La notación utilizada para escribir estas ecuaciones es la misma que adoptamos en las Ecs. (4.11) y (4.25). Le hemos añadido, como antes, un paréntesis con dos índices para especificar las condiciones iniciales consideradas.

De la simetría que presentan estos dos sistemas de ecuaciones, es fácil concluir que sus soluciones van a estar relacionadas de la forma siguiente:

$$\alpha_n(l, 2) = \beta_{-n}(-l, 1) \quad (\text{A.11})$$

y

$$\beta_n(l, 2) = \alpha_{-n}(-l, 1). \quad (\text{A.12})$$

Por tanto, vamos a resolver únicamente las Ecs. (A.3)-(A.6). Este sistema de ecuaciones puede sustituirse por otro equivalente de más fácil solución. Esto se consigue extendiendo las Ecs. (A.4)-(A.5) a todo n entero, y añadiendo las condiciones

$$\alpha_{-(N+1)}(l, 1) = 0, \quad (\text{A.13})$$

y

$$\beta_{(N+1)}(l, 1) = 0, \quad (\text{A.14})$$

para que se verifiquen las Ecs. (A.3) y (A.6). Evidentemente, para el problema que estamos tratando sólo tendrán sentido los $\alpha_n(l, 1)$ y $\beta_n(l, 1)$ con $-N \leq n \leq N$.

El método que seguiremos para resolver este nuevo sistema de ecuaciones es el mismo que propusimos en la sección 4.3. Supondremos soluciones lineales en n del tipo

$$\alpha_n(l, 1) = \mu_1 + (n - l)\mu_2, \quad (\text{A.15})$$

para $l \leq n$,

$$\alpha_n(l, 1) = \mu'_1 + (n - l)\mu'_2, \quad (\text{A.16})$$

para $n \leq l - 1$,

$$\beta_n(l, 1) = \nu_1 + (n - l)\nu_2, \quad (\text{A.17})$$

para $l + 1 \leq n$,

$$\beta_n(l, 1) = \nu'_1 + (n - l)\nu'_2, \quad (\text{A.18})$$

para $n \leq l$, donde $\mu_1, \mu_2, \mu'_1, \mu'_2, \nu_1, \nu_2, \nu'_1$ y ν'_2 son parámetros independientes de n . Puesto que el sistema original es determinado, si encontramos una solución de este tipo será única.

Sustituyendo las soluciones antes propuestas en las Ecs. (A.4), (A.5), (A.13) y (A.14), se llega al siguiente sistema de ecuaciones lineales

$$(k + \gamma)\mu_1 - k(\mu'_1 - \mu'_2) - \gamma\nu'_1 = 1, \quad (\text{A.19})$$

$$(k + \gamma)\nu'_1 - k(\nu_1 + \nu_2) - \gamma\mu_1 = 0, \quad (\text{A.20})$$

$$\mu_2 - \nu_2 = 0, \quad (\text{A.21})$$

$$\gamma(\mu_1 - \nu_1) + k\mu_2 = 0, \quad (\text{A.22})$$

$$\mu'_2 - \nu'_2 = 0, \quad (\text{A.23})$$

$$\gamma(\mu'_1 - \nu'_1) + k\mu'_2 = 0, \quad (\text{A.24})$$

$$\mu'_1 - (N + 1 + l)\mu'_2 = 0 \quad (\text{A.25})$$

y

$$\nu_1 + (N + 1 - l)\nu_2 = 0. \quad (\text{A.26})$$

Este sistema es compatible determinado, y nos permite calcular los parámetros desconocidos de las Ecs. (A.15)-(A.18). Al resolverlo, el resultado que obtenemos es

$$\nu_1 = \frac{(N + 1 - l)(k + \gamma(N + 1 + l))\gamma}{k(k + \gamma)(k + 2(N + 1)\gamma)}, \quad (\text{A.27})$$

$$\mu_2 = \nu_2 = -\frac{\gamma(k + \gamma(N + 1 + l))}{k(k + \gamma)(k + 2(N + 1)\gamma)}, \quad (\text{A.28})$$

$$\nu'_1 = \frac{(N + 1 - l)(k + \gamma(N + 1 + l))\gamma}{k(k + \gamma)(k + 2(N + 1)\gamma)}, \quad (\text{A.29})$$

$$\mu'_2 = \nu'_2 = \frac{(N + 1 - l)\gamma^2}{k(k + \gamma)(k + 2(N + 1)\gamma)}, \quad (\text{A.30})$$

$$\mu_1 = \frac{(k + \gamma(N + 1 - l))(k + \gamma(N + 1 + l))}{k(k + \gamma)(k + 2(N + 1)\gamma)} \quad (\text{A.31})$$

y

$$\mu'_1 = \frac{((N + 1)^2 - l^2)\gamma^2}{k(k + \gamma)(k + 2(N + 1)\gamma)}. \quad (\text{A.32})$$

Si sustituimos estos parámetros en las Ecs. (A.15)-(A.18) y nos volvemos a restringir a $-N \leq n \leq N$, llegamos a que

$$\alpha_n(l, 1) = \frac{(k + (N + 1 - n)\gamma)(k + (n + 1 + l)\gamma)}{k(k + \gamma)(k + 2(N + 1)\gamma)}, \quad (\text{A.33})$$

para $l \leq n \leq N$,

$$\alpha_n(l, 1) = \frac{(N+1-l)(N+1+n)\gamma^2}{k(k+\gamma)(k+2(N+1)\gamma)}, \quad (\text{A.34})$$

para $-N \leq n < l$,

$$\beta_n(l, 1) = \frac{(N+1-n)(k+(N+1+l)\gamma)\gamma}{k(k+\gamma)(k+2(N+1)\gamma)}, \quad (\text{A.35})$$

para $l < n \leq N$, y

$$\beta_n(l, 1) = \frac{(N+1-l)(k+(N+1+n)\gamma)\gamma}{k(k+\gamma)(k+2(N+1)\gamma)}, \quad (\text{A.36})$$

para $-N \leq n \leq l$.

Haciendo uso de la Ec. (4.33) y de las expresiones anteriores, podemos calcular fácilmente el MFPT correspondiente a esta condición inicial. El resultado es

$$\tau(l, 1) = \sum_{n=-N}^N \alpha_n(l, 1) + \sum_{n=-N}^N \beta_n(l, 1) = \frac{(N+1-l)(k+\gamma(N+1+l))}{k(k+\gamma)}. \quad (\text{A.37})$$

A su vez, las Ecs. (A.11) y (A.12) nos permiten encontrar el MFPT correspondiente a las condiciones iniciales de la Ec. (A.2), resultando

$$\begin{aligned} \tau(l, 2) &= \sum_{n=-N}^N \alpha_n(l, 2) + \sum_{n=-N}^N \beta_n(l, 2) \\ &= \sum_{n=-N}^N \beta_{-n}(-l, 1) + \sum_{n=-N}^N \alpha_{-n}(-l, 1) \\ &= \sum_{m=-N}^N \beta_m(-l, 1) + \sum_{m=-N}^N \alpha_m(-l, 1) \\ &= \tau(-l, 1) = \frac{(N+1+l)(k+\gamma(N+1-l))}{k(k+\gamma)}. \end{aligned} \quad (\text{A.38})$$

Las Ecs. (A.37) y (A.38) pueden expresarse de manera más condensada de la forma siguiente:

$$\tau(l, \alpha) = \frac{(N+1+(-1)^\alpha l)(k+\gamma(N+1-(-1)^\alpha l))}{k(k+\gamma)}, \quad (\text{A.39})$$

con $\alpha = 1, 2$, obteniéndose así la Ec. (4.40).

Volvamos ahora al caso general de condiciones iniciales arbitrarias. Para ello, supongamos que a es la probabilidad de que la red se encuentre inicialmente en el estado $\alpha = 1$, siendo, por tanto, $1 - a$ la probabilidad de que esté en $\alpha = 2$. Evidentemente, $0 \leq a \leq 1$. A la probabilidad de que la partícula ocupe inicialmente el nudo n -ésimo con independencia del estado de la red la vamos a denotar por p_n . Por tanto, las condiciones iniciales para las probabilidades compuestas serán

$$p_n(1, 0) = ap_n, \quad p_n(2, 0) = (1 - a)p_n. \quad (\text{A.40})$$

Estas condiciones iniciales se pueden escribir también como combinación lineal de las expresadas en las Ecs. (A.1) y (A.2),

$$p_n(1, 0) = \sum_{l=-N}^N \left(ap^{(l,1)}(1, 0) + (1 - a)p^{(l,2)}(1, 0) \right) p_l \quad (\text{A.41})$$

y

$$p_n(2, 0) = \sum_{l=-N}^N \left(ap^{(l,1)}(2, 0) + (1 - a)p^{(l,2)}(2, 0) \right) p_l. \quad (\text{A.42})$$

Puesto que las Ecs. (A.3)-(A.6) y (A.7)-(A.10) son lineales respecto a las condiciones iniciales, la solución al problema general será también una combinación lineal del tipo anterior, es decir,

$$\alpha_n = \sum_{l=-N}^N \left(a\alpha_n(l, 1) + (1 - a)\alpha_n(l, 2) \right) p_l \quad (\text{A.43})$$

y

$$\beta_n = \sum_{l=-N}^N \left(a\beta_n(l, 1) + (1 - a)\beta_n(l, 2) \right) p_l. \quad (\text{A.44})$$

Por tanto, de acuerdo con la Ec. (4.33), el MFPT vendrá dado por la expresión

$$\tau = \sum_{l=-N}^N \left(a\tau(l, 1) + (1 - a)\tau(l, 2) \right) p_l, \quad (\text{A.45})$$

donde $\tau(l, 1)$ y $\tau(l, 2)$ son los tiempos medios definidos en las Ecs. (A.37) y (A.38), respectivamente. Obsérvese que este resultado coincide con la Ec. (4.39).

Apliquemos este resultado general a los dos casos que mencionamos al comienzo de este apéndice. En el primero la partícula se encuentra inicialmente en el nudo n -ésimo, por tanto

$$p_l = \delta_{n,l}. \quad (\text{A.46})$$

Haciendo uso de la Ec. (A.45) obtenemos

$$\tau = a\tau(n, 1) + (1 - a)\tau(n, 2) = \frac{k(N + 1 + (1 - 2a)n) + \gamma((N + 1)^2 - n^2)}{k(k + \gamma)}, \quad (\text{A.47})$$

que no es más que la Ec. (4.42) (para n igual a l). En el segundo la partícula se encuentra al principio distribuida con igual probabilidad entre todos los nudos de la red, y, en consecuencia,

$$p_l = \frac{1}{2N + 1}. \quad (\text{A.48})$$

El MFPT vendrá dado por

$$\begin{aligned} \tau &= \frac{1}{2N + 1} \sum_{l=-N}^N (a\tau(l, 1) + (1 - a)\tau(l, 2)) \\ &= \frac{1}{2N + 1} \sum_{l=-N}^N \tau(l, 1) = \frac{N + 1}{k} + \frac{2N(N + 1)\gamma}{3k(k + \gamma)}, \end{aligned} \quad (\text{A.49})$$

que coincide con la Ec. (4.43).

Apéndice B

Cálculo de la expresión (4.59)

En este apéndice vamos a calcular el MFPT dado por la Ec. (4.59). Nuestro punto de partida, como vimos en la sección 4.3, es el sistema de ecuaciones (4.49)-(4.53), esto es,

$$(k + \gamma)\alpha_{-N} - \gamma\beta_{-N} = 0, \quad (\text{B.1})$$

$$\gamma\beta_{-N} - k\beta_{-N+1} - \gamma\alpha_{-N} = 0, \quad (\text{B.2})$$

$$(k + \gamma)\alpha_n - k\alpha_{n-1} - \gamma\beta_n = a\delta_{n,0}, \quad (\text{B.3})$$

para $-N + 1 \leq n \leq N$,

$$(k + \gamma)\beta_n - k\beta_{n+1} - \gamma\alpha_n = (1 - a)\delta_{n,0}, \quad (\text{B.4})$$

para $-N + 1 \leq n \leq N - 1$, y

$$(k + \gamma)\beta_N - \gamma\alpha_N = 0. \quad (\text{B.5})$$

Buscamos soluciones de este sistema que sean lineales en n . La forma elegida, Ecs. (4.54)-(4.58), es

$$\alpha_n = \mu_1 + n\mu_2, \quad (\text{B.6})$$

para $0 \leq n \leq N$,

$$\alpha_n = \mu'_1 + n\mu'_2, \quad (\text{B.7})$$

para $-N \leq n \leq -1$,

$$\beta_n = \nu_1 + n\nu_2, \quad (\text{B.8})$$

para $1 \leq n \leq N$,

$$\beta_n = \nu'_1 + n\nu'_2, \quad (\text{B.9})$$

para $-N + 1 \leq n \leq 0$, y

$$\beta_{-N} = \nu_0, \quad (\text{B.10})$$

Para calcular μ_1 , μ_2 , μ'_1 , μ'_2 , ν_1 , ν_2 , ν'_1 , ν'_2 , y ν_0 , vamos a exigir que las expresiones (B.6)-(B.10) satisfagan el sistema de ecuaciones (B.1)-(B.5). Las condiciones que deben cumplirse para que esto sea posible son

$$\mu_2 = \nu_2, \quad (\text{B.11})$$

$$\gamma(\mu_1 - \nu_1) + k\mu_2 = 0, \quad (\text{B.12})$$

$$-(k + \gamma)\nu_1 - kN\mu_2 + \gamma\mu_1 = 0, \quad (\text{B.13})$$

$$\mu'_2 = \nu'_2, \quad (\text{B.14})$$

$$\gamma(\mu'_1 - \nu'_1) + k\mu'_2 = 0, \quad (\text{B.15})$$

$$-(k + \gamma)\mu_1 + k\mu'_1 - k\mu'_2 + \gamma\nu'_1 = -a, \quad (\text{B.16})$$

$$-(k + \gamma)\nu'_1 + k\nu_1 + k\mu_2 + \gamma\mu_1 = -1 + a, \quad (\text{B.17})$$

$$-(k + \gamma)\mu'_1 + N(k + \gamma)\mu'_2 + \gamma\nu_0 = 0 \quad (\text{B.18})$$

y

$$-\gamma\nu_0 + k\nu'_1 + \gamma\mu'_1 + (k - N(k + \gamma))\mu'_2 = 0. \quad (\text{B.19})$$

Esto constituye un sistema de ecuaciones lineales que nos permite determinar unívocamente los parámetros que buscamos. El resultado que obtenemos al resolverlo es

$$\nu_0 = \frac{1 - a}{\gamma} + \frac{N + 1}{k}, \quad (\text{B.20})$$

$$\mu'_1 = \nu'_1 = \frac{1 - a}{k + \gamma} + \frac{(N + 1)\gamma}{k(k + \gamma)}, \quad (\text{B.21})$$

$$\mu'_2 = \nu'_2 = 0, \quad (\text{B.22})$$

$$\mu_1 = \frac{1}{k} + \frac{N\gamma}{k(k + \gamma)}, \quad (\text{B.23})$$

$$\mu_2 = \nu_2 = -\frac{\gamma}{k(k + \gamma)} \quad (\text{B.24})$$

y

$$\nu_1 = \frac{(N+1)\gamma}{k(k+\gamma)}. \quad (\text{B.25})$$

Sustituyendo estos parámetros en las expresiones (B.6)-(B.10), resulta

$$\alpha_n = \frac{1}{k} + \frac{(N-n)\gamma}{k(k+\gamma)}, \quad (\text{B.26})$$

para $0 \leq n \leq N$,

$$\alpha_n = \frac{1-a}{k+\gamma} + \frac{(N+1)\gamma}{k(k+\gamma)}, \quad (\text{B.27})$$

para $-N \leq n \leq -1$,

$$\beta_n = \frac{(N+1-n)\gamma}{k(k+\gamma)}, \quad (\text{B.28})$$

para $1 \leq n \leq N$,

$$\beta_n = \frac{1-a}{k+\gamma} + \frac{(N+1)\gamma}{k(k+\gamma)}, \quad (\text{B.29})$$

para $-N+1 \leq n \leq 0$, y

$$\beta_{-N} = \frac{1-a}{\gamma} + \frac{N+1}{k}. \quad (\text{B.30})$$

Si hacemos ahora uso de la Ec. (4.33), podemos calcular fácilmente el MFPT. De esta manera se obtiene

$$\tau = \frac{1-a}{\gamma} + \frac{2(1-a)N}{k+\gamma} + \frac{2(N+1)}{k} + \frac{3N(N+1)\gamma}{k(k+\gamma)}, \quad (\text{B.31})$$

que es la Ec. (4.59).

Apéndice C

Resolución de la Ec. (5.1)

En este apéndice vamos a resolver la ecuación maestra

$$\frac{\partial}{\partial t} p_n(t) = \alpha(t) (p_{n-1}(t) - p_n(t)) \quad (\text{C.1})$$

bajo la condición inicial

$$p_n(0) = \delta_{n,l}, \quad (\text{C.2})$$

es decir, vamos a obtener la probabilidad condicionada de que una partícula se encuentre en el nudo n -ésimo en el instante t , suponiendo que inicialmente se encontraba en el l -ésimo.

Puesto que la partícula sólo puede moverse hacia delante, se tendrá que

$$p_n(t) = 0 \text{ para } n < l. \quad (\text{C.3})$$

Haciendo el cambio

$$p_n(t) = a_n(t) \exp[-I(t)], \quad (\text{C.4})$$

con

$$I(t) = \int_0^t dt' \alpha(t'), \quad (\text{C.5})$$

la Ec. (C.1) se transforma en

$$\frac{\partial a_n(t)}{\partial t} = \alpha(t) a_{n-1}(t), \quad (\text{C.6})$$

cuya solución es de la forma

$$a_n(t) = a_n(0) + \int_0^t dt' \alpha(t') a_{n-1}(t'). \quad (\text{C.7})$$

Si tenemos en cuenta las Ecs. (C.2) y (C.3), así como las definiciones (C.4) y (C.5), es fácil ver que $a_n(t)$ verifica también las propiedades

$$a_n(0) = \delta_{n,l}, \quad (\text{C.8})$$

y

$$a_n(t) = 0 \text{ para } n < l. \quad (\text{C.9})$$

De esta forma llegamos a que

$$a_n(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } n < l \\ 1 & \text{si } n = l \\ \int_0^t dt_1 \dots \int_0^{t_{n-l-1}} dt_{n-l} \alpha(t_1) \dots \alpha(t_{n-l}) & \text{si } n > l. \end{cases} \quad (\text{C.10})$$

Las integrales de la expresión anterior pueden escribirse fácilmente en función de $I(t)$, obteniéndose el siguiente resultado

$$\int_0^t dt_1 \dots \int_0^{t_{n-l-1}} dt_{n-l} \alpha(t_1) \dots \alpha(t_{n-l}) = \frac{1}{(n-l)!} [I(t)]^{n-l}. \quad (\text{C.11})$$

Si sustituimos (C.11) en (C.10) y tenemos en cuenta la Ec.(C.4), llegamos a que la solución buscada es

$$p_n(t) = \begin{cases} \frac{\exp[-I(t)]}{(n-l)!} [I(t)]^{n-l} & \text{si } n \geq l \\ 0 & \text{si } n < l, \end{cases} \quad (\text{C.12})$$

que coincide precisamente con la Ec.(5.3).

Apéndice D

Análisis asintótico de la FPTDF de la sección 5.3

En este apéndice vamos a estudiar el comportamiento asintótico para $N \gg 1$ de la FPTDF dada por la expresión (5.11). Con este fin, introduzcamos la variable y la función

$$s = \omega t \quad (\text{D.1})$$

y

$$\bar{\Phi}(s) = \frac{\omega}{p} I \left(t = \frac{s}{\omega} \right) = s - \frac{\epsilon}{p} (\cos(s + \phi) - \cos \phi), \quad (\text{D.2})$$

ambas adimensionales. Teniendo en cuenta la Ec. (5.11) y el factor proveniente del cambio de variables efectuado, el resultado que se obtiene para la función de distribución de probabilidades de la nueva variable s es

$$g(s) = \frac{1}{N!} \left(\frac{p}{\omega} \right)^{N+1} \bar{\Phi}'(s) [\bar{\Phi}(s)]^N \exp \left(-\frac{p}{\omega} \bar{\Phi}(s) \right). \quad (\text{D.3})$$

Para valores de ϵ pertenecientes al intervalo $[0, p)$, $\bar{\Phi}(s)$ es una función monótona creciente de s , mientras que $\bar{\Phi}'(s)$ es periódica de periodo 2π . Si se calcula la derivada respecto a s de la función

$$h(s) = [\bar{\Phi}(s)]^N \exp \left(-\frac{p}{\omega} \bar{\Phi}(s) \right), \quad (\text{D.4})$$

se comprueba sin dificultad que ésta presenta un máximo cuya localización, s_m , viene dada por la ecuación

$$\bar{\Phi}(s_m) = \frac{\omega N}{p}. \quad (\text{D.5})$$

Derivando, a su vez, la expresión anterior respecto a ω se obtiene que

$$\frac{\partial s_m}{\partial \omega} = \frac{N}{p\Phi'(s_m)} > 0, \quad (\text{D.6})$$

y, por tanto, s_m es una función monótona creciente de ω . De la misma manera, pero derivando respecto a p , se deduce el carácter decreciente de $s_m(p)$.

Definamos la nueva función

$$\Psi(s) = \frac{\Phi(s)}{\Phi(s_m)} = \frac{p}{\omega N} \Phi(s), \quad (\text{D.7})$$

de forma que para el valor de s que hace máxima a $h(s)$ se verifique que $\Psi(s_m) = 1$. Podemos entonces reescribir $g(s)$ del modo siguiente:

$$g(s) = \frac{p}{N! \omega} N^N \Phi'(s) \exp[-N(\Psi(s) - \ln \Psi(s))]. \quad (\text{D.8})$$

Por el momento no se ha introducido ningún tipo de aproximación. Supongamos ahora que $N \gg 1$. Si desarrollamos $\Psi(s) - \ln \Psi(s)$ como función de Ψ alrededor de $\Psi(s_m) = 1$, y nos quedamos únicamente con el orden más bajo del desarrollo, tendremos que

$$g(s) \simeq \frac{N^{1/2}}{\sqrt{2\pi}} \Psi'(s) \exp\left[-\frac{N}{2}(\Psi(s) - 1)^2\right], \quad (\text{D.9})$$

para lo cual se ha utilizado la aproximación de Stirling de $N!$, es decir,

$$N! \sim \sqrt{2\pi} N^{N+\frac{1}{2}} \exp(-N) \text{ si } N \gg 1. \quad (\text{D.10})$$

La expresión (D.9) es una buena aproximación de la Ec.(D.8) en la zona relevante de esta función, ya que deja de ser válida solamente cuando s toma valores para los que $g(s)$ es exponencialmente pequeña. Asimismo, haciendo el cambio de variables $\Psi(s) = x$ se comprueba fácilmente que también está convenientemente normalizada.

Para simplificar aún más esta expresión aproximada de $g(s)$, consideremos el siguiente desarrollo de Taylor de $\Psi(s)$ en torno a s_m

$$\Psi(s) = 1 + \Psi'(s_m)(s - s_m) + \frac{\Psi''(c)}{2}(s - s_m)^2, \quad (\text{D.11})$$

donde el último sumando es el resto del desarrollo, y c es un número comprendido dentro del intervalo que une a s con s_m . Sustituyendo en la Ec. (D.9) se obtiene que

$$g(s) \simeq \frac{N^{1/2}}{\sqrt{2\pi}} \Psi'(s) \exp \left[-\frac{(s - s_m)^2}{2D^2(s)} \right], \quad (\text{D.12})$$

siendo

$$D^2(s) = \frac{1}{N [\Psi'(s_m) + \Psi''(c)(s - s_m)/2]^2}. \quad (\text{D.13})$$

Consideremos el intervalo $(s_m - \Delta, s_m + \Delta)$, donde Δ es cierto parámetro positivo que más tarde fijaremos. Para que el término exponencial de la Ec.(D.12) presente una forma gaussiana en el interior de esta región, la función $D^2(s)$ ha de ser aproximadamente independiente de s . Esto ocurre cuando el segundo sumando del denominador de la expresión (D.13), al evaluarlo para cualquier valor de s perteneciente al intervalo, resulta ser muy pequeño en comparación con el primero, o lo que es lo mismo, cuando se verifica la condición

$$\Delta \ll \frac{2\Psi'(s_m)}{|\Psi''(c)|} = \frac{2p}{\epsilon} \frac{1 + \frac{\epsilon}{p} \text{sen}(s_m + \phi)}{|\cos(c + \phi)|}. \quad (\text{D.14})$$

Esta expresión aún no se puede aplicar directamente, ya que desconocemos el valor exacto de c . Una condición más útil se deduce al sustituir el denominador $|\cos(c + \phi)|$ por 1, que es el valor más grande que esta función puede alcanzar. De esta forma estaremos ante el caso más desfavorable posible de la expresión (D.14) y, por consiguiente, la condición suficiente así obtenida será más restrictiva que la anterior. El resultado es

$$\Delta \ll \frac{2p}{\epsilon} \left[1 + \frac{\epsilon}{p} \text{sen}(s_m + \phi) \right]. \quad (\text{D.15})$$

Si se cumple este último requisito, en el interior del intervalo antes definido se podrá sustituir la función $D^2(s)$ por el siguiente valor aproximado

$$\sigma_s^2 = \frac{1}{N [\Psi'(s_m)]^2} = \frac{\omega^2 N}{[p + \epsilon \text{sen}(s_m + \phi)]^2}, \quad (\text{D.16})$$

que ya es independiente de s . De este modo, la exponencial del segundo miembro de la Ec. (D.12) tendrá una forma gaussiana con una anchura estimada igual a σ_s . Por consistencia, si se desea aproximar toda la parte relevante de la exponencial por la gaussiana, tendremos que escoger $\Delta \sim \mathcal{O}(\sigma_s)$,

de forma que el intervalo incluya toda la zona en la que la campana no es exponencialmente pequeña. Así se llega a la condición

$$\sigma_s \ll \frac{p}{\epsilon} \left[1 + \frac{\epsilon}{p} \operatorname{sen}(s_m + \phi) \right], \quad (\text{D.17})$$

donde hemos eliminado el factor 2 del segundo miembro de la expresión por ser del orden de la unidad. Obsérvese que, en general, no se puede aplicar el mismo razonamiento para eliminar el factor $1 + (\epsilon/p)\operatorname{sen}(s_m + \phi)$, ya que para valores de ϵ muy próximos a p y determinados argumentos de la función seno, esta expresión puede llegar a ser muy pequeña.

Veamos ahora que, en caso de cumplirse la condición (D.17), también es posible sustituir la función $\Psi'(s)$ de la Ec.(D.12) por la constante $\Psi'(s_m)$. Para que esta sustitución esté justificada, se tiene que probar previamente que el error relativo que se comete al efectuarla es mucho menor que la unidad en la zona relevante de la gaussiana, es decir, que

$$\frac{|\Psi'(s) - \Psi'(s_m)|}{\Psi'(s_m)} \ll 1, \quad (\text{D.18})$$

cuando $|s - s_m|$ es como mucho del mismo orden que σ_s . Si sustituimos la definición de $\Psi'(s)$ en el primer miembro de la expresión anterior, y utilizamos una relación trigonométrica bien conocida, se llega a la conclusión de que

$$\begin{aligned} \frac{|\Psi'(s) - \Psi'(s_m)|}{\Psi'(s_m)} &= \frac{|\operatorname{sen}(s + \phi) - \operatorname{sen}(s_m + \phi)|}{\frac{p}{\epsilon} \left[1 + \frac{\epsilon}{p} \operatorname{sen}(s_m + \phi) \right]} \\ &= \frac{2 \left| \cos \left(\frac{s + s_m}{2} + \phi \right) \right| \left| \operatorname{sen} \left(\frac{s - s_m}{2} \right) \right|}{\frac{p}{\epsilon} \left[1 + \frac{\epsilon}{p} \operatorname{sen}(s_m + \phi) \right]}. \end{aligned} \quad (\text{D.19})$$

Esta expresión, junto con las desigualdades $|\cos x| \leq 1$ y $|\operatorname{sen} x| \leq |x|$, nos permite acotar el error relativo de la forma siguiente:

$$\frac{|\Psi'(s) - \Psi'(s_m)|}{\Psi'(s_m)} \leq \frac{|s - s_m|}{\frac{p}{\epsilon} \left[1 + \frac{\epsilon}{p} \operatorname{sen}(s_m + \phi) \right]}. \quad (\text{D.20})$$

Puesto que, como se dijo anteriormente, $|s - s_m|$ es a lo sumo del mismo orden que σ_s , al unir la desigualdad anterior con la expresión (D.17), obtendremos una prueba de la validez de la Ec. (D.18).

En resumen, de todo lo anterior se deduce que, suponiendo válida la condición (D.17), la función $g(s)$ se puede aproximar en la región en la que no es exponencialmente pequeña por la gaussiana

$$g(s) \simeq \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_s} \exp \left[-\frac{(s - s_m)^2}{2\sigma_s^2} \right], \quad (\text{D.21})$$

para lo cual se ha hecho uso de la primera igualdad de la Ec. (D.16).

Los parámetros s_m y σ_s de la expresión (D.21) se pueden simplificar aún más realizando otro tipo de aproximación. Así, para $s \ll 1$, la función $\Phi(s)$ se puede sustituir por su recta tangente en el origen

$$\Phi(s) \simeq \left(1 + \frac{\epsilon}{p} \text{sen}\phi\right)s. \quad (\text{D.22})$$

Si buscamos una solución de la Ec. (D.5) en la región en la que la aproximación anterior es válida, ésta tendrá que ser necesariamente de la forma

$$s_m \simeq \frac{\omega N}{p \left(1 + \frac{\epsilon}{p} \text{sen}\phi\right)}. \quad (\text{D.23})$$

La condición que se tiene que verificar para que el resultado anterior sea consistente con la hipótesis realizada es

$$s_m \simeq \frac{\omega N}{p \left(1 + \frac{\epsilon}{p} \text{sen}\phi\right)} \ll 1, \quad (\text{D.24})$$

ya que así se asegura que la solución encontrada está dentro de la región de validez de la aproximación que nos ha permitido obtenerla. Este último requisito también nos proporciona la siguiente expresión simplificada para σ_s

$$\sigma_s \simeq \frac{\omega N^{1/2}}{p \left(1 + \frac{\epsilon}{p} \text{sen}\phi\right)}. \quad (\text{D.25})$$

Teniendo en cuenta el resultado anterior, se llega a la conclusión de que la condición (D.24) se puede escribir alternativamente en términos de σ_s , del modo siguiente:

$$N^{1/2}\sigma_s \ll 1. \quad (\text{D.26})$$

Las condiciones obtenidas anteriormente, Ecs. (D.17) y (D.24), son válidas incluso en el caso de que los parámetros ϵ y p tomen valores muy próximos. Si esto no es así, es decir, si $\epsilon/p \neq 1$, el coeficiente $1 + (\epsilon/p)\text{sen}(s_m + \phi)$ será siempre del orden de la unidad, con independencia del valor que tome el argumento de la función seno, y, por tanto, en las expresiones (D.17) y (D.24) se podrá reemplazar por 1. Por otra parte, también es posible sustituir el término p/ϵ de la Ec. (D.17) por la unidad, aunque, por ser siempre $p/\epsilon > 1$, el requisito así obtenido será más restrictivo que el original. De este modo, la condición suficiente para la validez de la aproximación gaussiana, Ec. (D.17), adquiere la forma más sencilla

$$\frac{\omega N^{1/2}}{p} \ll 1, \quad (\text{D.27})$$

y la expresión (D.24) se transforma en

$$\frac{\omega N}{p} \ll 1. \quad (\text{D.28})$$

Por simplicidad, estas dos últimas condiciones son las que se consideran en la sección 5.3. A su vez, al deshacer el cambio de variables (D.1), las Ecs. (D.16), (D.21), (D.23) y (D.25) se convierten, respectivamente, en las expresiones (5.18), (5.17), (5.21) y (5.22).

Apéndice E

Localización de los picos de la FPTDF de la sección 5.3

Nuestro punto de partida será la Ec. (D.8), es decir,

$$g(s) = \frac{p}{N! \omega} N^N \Phi'(s) \Xi(s), \quad (\text{E.1})$$

donde hemos introducido la definición

$$\Xi(s) = \exp[-N(\Psi(s) - \ln \Psi(s))]. \quad (\text{E.2})$$

Derivando el logaritmo neperiano de la Ec. (E.1) respecto a s obtenemos

$$\frac{\partial \ln g(s)}{\partial s} = \frac{\Phi''(s)}{\Phi'(s)} + \frac{\partial \ln \Xi(s)}{\partial s}. \quad (\text{E.3})$$

Para ϵ perteneciente al intervalo $[0, p)$, la función $\Phi'(s)$ nunca se anula y, por consiguiente, las raíces del segundo miembro de la igualdad (E.3) no se modifican al multiplicar esta expresión por $\Phi'(s)$. Así pues, los puntos estacionarios de $g(s)$, que coinciden con los de $\ln g(s)$, serán las soluciones de la ecuación

$$\Phi''(s) + \Phi'(s) \frac{\partial \ln \Xi(s)}{\partial s} = 0, \quad (\text{E.4})$$

la cual, al hacer uso de la expresión (D.2), se puede escribir también de la forma siguiente

$$\cos(s + \phi) + \frac{p}{\epsilon} \left(1 + \frac{\epsilon}{p} \sin(s + \phi) \right) \frac{\partial \ln \Xi(s)}{\partial s} = 0. \quad (\text{E.5})$$

Supongamos ahora que estamos interesados en una región de s donde se cumple que

$$\left| \Phi'(s) \frac{\partial \ln \Xi(s)}{\partial s} \right| \leq \gamma, \quad (\text{E.6})$$

siendo γ cierto parámetro positivo. Si definimos la función

$$\Pi(s) = \frac{\Phi'(s) \partial \ln \Xi(s)}{\gamma \partial s}, \quad (\text{E.7})$$

es evidente que dentro de la región antes mencionada se verifica la desigualdad $|\Pi(s)| \leq 1$. En términos de esta nueva función, la Ec. (E.5) es equivalente a

$$\cos(s + \phi) + \frac{p\gamma}{\epsilon} \Pi(s) = 0, \quad (\text{E.8})$$

y sus soluciones admiten el siguiente desarrollo en serie de potencias del parámetro $x = p\gamma/\epsilon$

$$s = s^{(0)} + x s^{(1)} + \mathcal{O}(x^2). \quad (\text{E.9})$$

Introduciendo este desarrollo en la Ec. (E.8), se llega a la conclusión de que los coeficientes $s^{(0)}$ y $s^{(1)}$ satisfacen, respectivamente, las ecuaciones

$$\cos(s^{(0)} + \phi) = 0 \quad (\text{E.10})$$

y

$$s^{(1)} \text{sen}(s^{(0)} + \phi) = \Pi(s^{(0)}). \quad (\text{E.11})$$

Puesto que estamos interesados en los picos de la FPTDF, a partir de ahora nos restringiremos a los máximos de la función seno. Así pues, sólo consideraremos las soluciones de la Ec. (E.10) del tipo

$$s_l^{(0)} = 2\pi l + \frac{\pi}{2} - \phi, \quad (\text{E.12})$$

donde l es un número entero que puede tomar cualquier valor que haga a $s_l^{(0)}$ positiva¹. De esta expresión y de la Ec. (E.11) se sigue inmediatamente que las correcciones, $s_l^{(1)}$, vienen dadas por

$$s_l^{(1)} = \Pi(s_l^{(0)}), \quad (\text{E.13})$$

¹Recuérdese que s es una variable temporal adimensional que toma valores positivos.

verificándose, por tanto, que $|s_l^{(1)}| \leq 1$.

Para que el desarrollo (E.9) converja rápidamente y, por lo tanto, $s_l^{(0)}$ sea una aproximación aceptable de la solución exacta s_l , es necesario que el parámetro x sea mucho más pequeño que la unidad, es decir,

$$x = \frac{p\gamma}{\epsilon} \ll 1. \quad (\text{E.14})$$

Esta condición también nos permite asegurar que los términos correctivos son mucho más pequeños que las distancias entre dos picos consecutivos, como se pone claramente de manifiesto en la expresión

$$|s_l - s_l^{(0)}| \simeq x |s_l^{(1)}| \leq x \ll 1 < 2\pi = |s_{l\pm 1}^{(0)} - s_l^{(0)}|. \quad (\text{E.15})$$

En consecuencia, podemos afirmar que las localizaciones de los picos están bien definidas.

A fin de aclarar el significado de la condición (E.14), hemos de encontrar, en primer lugar, una estimación de la cota γ . Si se sustituye la definición de $\Xi(s)$, Ec. (E.2), en la expresión de la función que queremos acotar, el resultado obtenido es el siguiente:

$$\Phi'(s) \frac{\partial \ln \Xi(s)}{\partial s} = - \frac{[\Phi'(s)]^2}{\Phi(s)} \frac{p}{\omega} \left[\Phi(s) - \frac{\omega N}{p} \right]. \quad (\text{E.16})$$

Nuestro propósito ahora será calcular cotas para cada uno de los términos del segundo miembro de la igualdad anterior, ya que de esta manera tendremos también una estimación de γ .

De la Ec. (D.2) se obtiene fácilmente la siguiente desigualdad

$$1 - \frac{\epsilon}{p} \leq |\Phi'(s)| = \Phi'(s) \leq 1 + \frac{\epsilon}{p}. \quad (\text{E.17})$$

Por tanto, las rectas que pasan por $\Phi(s_m) = \omega N/p$ y que tienen la máxima y la mínima pendiente posible son, respectivamente,

$$R(s) = \frac{\omega N}{p} + \left(1 + \frac{\epsilon}{p}\right)(s - s_m) \quad (\text{E.18})$$

y

$$r(s) = \frac{\omega N}{p} + \left(1 - \frac{\epsilon}{p}\right)(s - s_m). \quad (\text{E.19})$$

Puesto que la función $\Phi(s)$ está contenida entre estas dos rectas, se tienen que verificar las siguientes desigualdades:

$$r(s) \leq \Phi(s) \leq R(s) \quad \text{para } s \geq s_m, \quad (\text{E.20})$$

y

$$R(s) \leq \Phi(s) \leq r(s) \quad \text{para } s \leq s_m. \quad (\text{E.21})$$

Sustituyendo las expresiones (E.18) y (E.19) en (E.20) y (E.21), se obtiene la relación

$$\left(1 - \frac{\epsilon}{p}\right) |s - s_m| \leq \left| \Phi(s) - \frac{\omega N}{p} \right| \leq \left(1 + \frac{\epsilon}{p}\right) |s - s_m|, \quad (\text{E.22})$$

que es válida para cualquier valor de s .

Las desigualdades (E.17) y (E.22), junto con la Ec. (D.7), nos proporcionan la siguiente cota superior de la función (E.16)

$$\left| \Phi'(s) \frac{\partial \ln \Xi(s)}{\partial s} \right| \leq \left(1 + \frac{\epsilon}{p}\right)^3 \frac{p^2 |s - s_m|}{\omega^2 N \Psi(s)}. \quad (\text{E.23})$$

Si tenemos en cuenta el carácter monótono creciente de $\Psi(s)$, así como la Ec. (D.5), la expresión (E.23) nos conduce directamente a la siguiente estimación de γ en el intervalo $[s_m, s_m + \Delta]$

$$\gamma_d = \left(1 + \frac{\epsilon}{p}\right)^3 \frac{p^2 \Delta}{\omega^2 N}. \quad (\text{E.24})$$

Por el mismo razonamiento, en el intervalo $[s_m - \Delta, s_m]$ el resultado será

$$\gamma_i = \left(1 + \frac{\epsilon}{p}\right)^3 \frac{p^2 \Delta}{\omega^2 N \Psi(s_m - \Delta)}. \quad (\text{E.25})$$

Los subíndices d e i señalan, respectivamente, que las cotas anteriores son válidas a la derecha y a la izquierda de s_m .

Para que la expresión (E.12) sea una aproximación aceptable de la posición del pico l -ésimo de la distribución, es suficiente que en el intervalo que une a s_m con s_l se cumpla la condición (E.14). Si sustituimos en dicha condición las estimaciones de γ obtenidas anteriormente y hacemos $\Delta = |s_l - s_m|$, (E.14) adopta la forma

$$\left(1 + \frac{\epsilon}{p}\right)^3 \frac{p^3 (s_l - s_m)}{\omega^2 N \epsilon} \ll 1, \quad (\text{E.26})$$

para $s_l \geq s_m$, y

$$\left(1 + \frac{\epsilon}{p}\right)^3 \frac{p^3 (s_m - s_l)}{\omega^2 N \epsilon \Psi(s_l)} \ll 1, \quad (\text{E.27})$$

para $s_l \leq s_m$. Estas condiciones son correctas con independencia de que el pico considerado se encuentre o no en la zona relevante de la distribución (aquella en la que $g(s)$ no es exponencialmente pequeña). Al final de este apéndice se probará que, si suponemos que el pico l -ésimo está situado en esta región y a la izquierda de s_m , entonces el error relativo cometido al sustituir $\Psi(s_l)$ por 1 es como mucho del mismo orden que $N^{-1/2}$. Cuando $N \gg 1$, este resultado se deduce directamente de la Ec. (D.9), pero, como veremos más adelante, se puede demostrar de manera más general sin necesidad de tomar este límite. Así pues, si nos restringimos a los picos de la zona relevante de la distribución y a valores de N no excesivamente pequeños, como los utilizados en el capítulo 5, el término $\Psi(s_m)$ de la Ec. (E.27) será del orden de la unidad y, por tanto, las dos condiciones anteriores podrán escribirse conjuntamente de la forma siguiente:

$$\left(1 + \frac{\epsilon}{p}\right)^3 \frac{p^3 |s_l - s_m|}{\omega^2 N \epsilon} \ll 1. \quad (\text{E.28})$$

Esta condición se puede simplificar aún más si se tiene en cuenta que, para los valores permitidos de ϵ , el término $(1 + \epsilon/p)^3$ es siempre del orden de la unidad y, en consecuencia, la expresión anterior es equivalente a

$$\frac{p^3 |s_l - s_m|}{\omega^2 N \epsilon} \ll 1. \quad (\text{E.29})$$

Deshaciendo el cambio de variables (D.1), la condición (E.29) se transforma en la Ec. (5.24).

Para finalizar este apéndice, vamos a probar el resultado que se utilizó anteriormente sin demostración. Para ello, obsérvese que el término que gobierna el decaimiento de la función $g(s)$ en la expresión exacta (D.8) es $\exp[-N(\Psi(s) - \ln \Psi(s))]$. Si se consigue demostrar que, para $s < s_m$, se cumple la desigualdad

$$\exp[-N(\Psi(s) - \ln \Psi(s))] < \exp(-N) \exp\left[\frac{-N}{2}(\Psi(s) - 1)^2\right], \quad (\text{E.30})$$

de ella se deducirá directamente que la anchura de la distribución de $\Psi(s)$ a la izquierda de s_m es a lo sumo del orden de $N^{-1/2}$ y, por tanto, el resultado quedará probado. Comencemos definiendo la función

$$M(x) = 1 + \frac{1}{2}(x-1)^2 - x + \ln x, \quad (\text{E.31})$$

cuya derivada es

$$M'(x) = \frac{(x-1)^2}{x}. \quad (\text{E.32})$$

Puesto que, para $x > 0$, se verifica que $M'(x) \geq 0$, y además $M(1) = 0$, la función $M(x)$ es negativa en el intervalo $(0, 1)$ y positiva para $x > 1$, es decir,

$$x - \ln x > 1 + \frac{1}{2}(x-1)^2 \quad \text{para } 0 < x < 1, \quad (\text{E.33})$$

y

$$x - \ln x < 1 + \frac{1}{2}(x-1)^2 \quad \text{para } x > 1. \quad (\text{E.34})$$

Si hacemos el cambio de variables² $x = \Psi(s)$ y tenemos en cuenta que $\Psi(s_m) = 1$, las dos desigualdades anteriores se transforman en

$$\Psi(s) - \ln \Psi(s) > 1 + \frac{1}{2}(\Psi(s) - 1)^2 \quad \text{para } 0 < s < s_m, \quad (\text{E.35})$$

y

$$\Psi(s) - \ln \Psi(s) < 1 + \frac{1}{2}(\Psi(s) - 1)^2 \quad \text{para } s > s_m. \quad (\text{E.36})$$

Multiplicando por $-N$ y tomando exponenciales, de la Ec.(E.35) se sigue fácilmente la expresión (E.30), que era lo que queríamos demostrar. Por otro lado, la Ec.(E.36) nos permite concluir también que

$$\exp[-N(\Psi(s) - \ln \Psi(s))] > \exp(-N) \exp\left[\frac{-N}{2}(\Psi(s) - 1)^2\right], \quad (\text{E.37})$$

para $s > s_m$.

²Puesto que $\Psi(s)$ es una función monótona creciente, este cambio de variables está justificado.

Apéndice F

Obtención de la expresión (5.56)

Nuestro punto de partida será el proceso estocástico $y_M(t)$ definido por la Ec. (5.52), esto es,

$$y_M(t) = \sum_{j=1}^M \delta(t - t_j), \quad (\text{F.1})$$

donde los parámetros t_j vienen dados, de acuerdo con la expresión (5.53), por la relación

$$t_j = \sum_{l=1}^j \xi_l. \quad (\text{F.2})$$

Para el tipo de mecanismo de reinyección considerado en la sección 5.5, los intervalos de tiempo ξ_j son variables aleatorias independientes con la misma función de distribución de probabilidades $f(\xi)$. Por tanto, la función de distribución compuesta será

$$\mathcal{F}_M(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_M) = f(\xi_1)f(\xi_2) \dots f(\xi_M). \quad (\text{F.3})$$

Estamos interesados en calcular la PSD dada por la Ec. (5.54), es decir,

$$S(\Omega) = \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{\langle |\hat{y}_M(\Omega)|^2 \rangle}{M\tau}. \quad (\text{F.4})$$

donde los corchetes angulares $\langle \dots \rangle$ indican promedios sobre las variables aleatorias ξ_j , τ es el valor medio de estas variables, e $\hat{y}_M(\Omega)$ es la transformada

de Fourier

$$\hat{y}_M(\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{i\Omega t} y_M(t). \quad (\text{F.5})$$

Utilizando la Ec. (F.1), la expresión anterior toma la forma

$$\hat{y}_M(\Omega) = \sum_{j=1}^M e^{i\Omega t_j}, \quad (\text{F.6})$$

y, por tanto, su módulo al cuadrado se podrá escribir del modo siguiente:

$$\begin{aligned} |\hat{y}_M(\Omega)|^2 &= \sum_{j=1}^M \sum_{k=1}^M e^{i\Omega(t_j - t_k)} = M + \sum_{j=2}^M \sum_{k=1}^{j-1} e^{i\Omega(t_j - t_k)} + \sum_{j=1}^{M-1} \sum_{k=j+1}^M e^{i\Omega(t_j - t_k)} \\ &= M + \sum_{j=2}^M \sum_{k=1}^{j-1} \left[e^{i\Omega(t_j - t_k)} + e^{-i\Omega(t_j - t_k)} \right], \end{aligned} \quad (\text{F.7})$$

donde la última igualdad se ha obtenido cambiando el orden del tercer sumatorio y renombrando los índices j y k . De aquí se sigue inmediatamente que

$$\langle |\hat{y}_M(\Omega)|^2 \rangle = M + \sum_{j=2}^M \sum_{k=1}^{j-1} \left[\langle e^{i\Omega(t_j - t_k)} \rangle + \langle e^{-i\Omega(t_j - t_k)} \rangle \right]. \quad (\text{F.8})$$

Los promedios del segundo miembro de la expresión anterior se pueden calcular fácilmente a partir de las Ecs. (F.2) y (F.3), resultando

$$\begin{aligned} \langle e^{i\Omega(t_j - t_k)} \rangle &= \langle \exp \left[i\Omega \sum_{l=k+1}^j \xi_l \right] \rangle \\ &= \int_0^\infty \cdots \int_0^\infty \prod_{l=1}^M d\xi_l f(\xi_l) \prod_{s=k+1}^j e^{i\Omega \xi_s} = [\hat{f}(\Omega)]^{j-k}, \end{aligned} \quad (\text{F.9})$$

donde

$$\hat{f}(\Omega) = \int_0^\infty d\xi e^{i\Omega \xi} f(\xi). \quad (\text{F.10})$$

Así pues, si hacemos $l = j - k$, intercambiamos el orden de los sumatorios, y calculamos una de las sumas resultantes, la expresión (F.8) se reducirá a

$$\begin{aligned}
\langle |\hat{\mathcal{Y}}_M|^2 \rangle &= M + \sum_{j=2}^M \sum_{l=1}^{j-1} \left[[\hat{f}(\Omega)]^l + [\hat{f}^*(\Omega)]^l \right] \\
&= M + \sum_{l=1}^{M-1} \sum_{j=l+1}^M \left[[\hat{f}(\Omega)]^l + [\hat{f}^*(\Omega)]^l \right] \\
&= M + \sum_{l=1}^{M-1} (M-l) \left[[\hat{f}(\Omega)]^l + [\hat{f}^*(\Omega)]^l \right]. \quad (\text{F.11})
\end{aligned}$$

Como se probará al final de este apéndice, la función $\hat{f}(\Omega)$ solamente es igual a 1 para $\Omega = 0$. Más concretamente demostraremos que

$$\begin{cases} |\hat{f}(\Omega)| < 1 & \text{para } \Omega \neq 0 \\ \hat{f}(\Omega) = 1 & \text{para } \Omega = 0. \end{cases} \quad (\text{F.12})$$

Por tanto, para $\Omega \neq 0$, la última suma de (F.11) se puede efectuar, obteniendo como resultado

$$\begin{aligned}
\langle |\hat{\mathcal{Y}}_M(\Omega)|^2 \rangle &= M \left[1 + \frac{\hat{f}(\Omega)}{1 - \hat{f}(\Omega)} + \frac{\hat{f}^*(\Omega)}{1 - \hat{f}^*(\Omega)} \right] \\
&+ \frac{\hat{f}(\Omega) \left[[\hat{f}(\Omega)]^M - 1 \right]}{[1 - \hat{f}(\Omega)]^2} + \frac{\hat{f}^*(\Omega) \left[[\hat{f}^*(\Omega)]^M - 1 \right]}{[1 - \hat{f}^*(\Omega)]^2}. \quad (\text{F.13})
\end{aligned}$$

Para frecuencia cero la expresión anterior carece de sentido, ya que $\hat{f}(0) = 1$. No obstante, el valor que toma esta función para $\Omega = 0$ se puede calcular a partir de las Ecs. (F.11) y (F.12), resultando

$$\langle |\hat{\mathcal{Y}}_M(0)|^2 \rangle = M^2. \quad (\text{F.14})$$

También es fácil comprobar que

$$\lim_{\Omega \rightarrow 0} \langle |\hat{\mathcal{Y}}_M(\Omega)|^2 \rangle = M^2, \quad (\text{F.15})$$

de donde se deduce que, a pesar de su apariencia, la función $\langle |\hat{\mathcal{Y}}_M(\Omega)|^2 \rangle$ es continua en $\Omega = 0$.

Para expresar de forma más compacta los cálculos posteriores, vamos a introducir las funciones

$$A(\Omega) = \begin{cases} \operatorname{Re} \left[\frac{1 + \hat{f}(\Omega)}{1 - \hat{f}(\Omega)} \right] & \text{para } \Omega \neq 0 \\ q^2/\tau^2 - 1 & \text{para } \Omega = 0 \end{cases} \quad (\text{F.16})$$

y

$$B_M(\Omega) = \begin{cases} 2\operatorname{Re} \frac{\hat{f}(\Omega) \left[[\hat{f}(\Omega)]^M - 1 \right]}{[1 - \hat{f}(\Omega)]^2} & \text{para } \Omega \neq 0 \\ M^2 - M(q^2/\tau^2 - 1) & \text{para } \Omega = 0, \end{cases} \quad (\text{F.17})$$

donde

$$q^2 = \int_0^\infty d\xi \xi^2 f(\xi). \quad (\text{F.18})$$

Los valores $A(0)$ y $B_M(0)$ se han elegido de forma que coincidan con el valor del límite, para $\Omega \rightarrow 0$, de las expresiones correspondientes a $\Omega \neq 0$, y, en consecuencia, ambas funciones son continuas en $\Omega = 0$. Evidentemente, se cumple que

$$\langle |\hat{y}_M(\Omega)|^2 \rangle = M A(\Omega) + B_M(\Omega), \quad (\text{F.19})$$

y, por tanto, la Ec. (F.4) nos lleva al siguiente resultado para la PSD:

$$S(\Omega) = \frac{1}{\tau} A(\Omega) + \frac{1}{\tau} \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{B_M(\Omega)}{M}. \quad (\text{F.20})$$

El límite de la expresión anterior se puede calcular teniendo en cuenta las Ecs. (F.17) y (F.12), obteniéndose

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \frac{B_M(\Omega)}{M} = \begin{cases} 0 & \text{para } \Omega \neq 0 \\ \infty & \text{para } \Omega = 0. \end{cases} \quad (\text{F.21})$$

Probemos que, de hecho, se cumple que

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \frac{B_M(\Omega)}{M} = \frac{2\pi}{\tau} \delta(\Omega). \quad (\text{F.22})$$

Para ello, basta demostrar que

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} d\Omega \frac{B_M(\Omega)}{M} = \frac{2\pi}{\tau}. \quad (\text{F.23})$$

El comportamiento asintótico de $[\hat{f}(\Omega)]^M$ se puede deducir fácilmente si consideramos la función de distribución de la variable aleatoria $T_M = \sum_{i=1}^M \xi_i$ que, por definición, viene dada por

$$F_M(T_M) = \int_0^{\infty} \cdots \int_0^{\infty} \prod_{j=1}^M d\xi_j f(\xi_j) \delta \left(T_M - \sum_{i=1}^M \xi_i \right). \quad (\text{F.24})$$

Por tanto, su transformada de Fourier coincide con $[\hat{f}(\Omega)]^M$, ya que

$$\hat{F}_M(\Omega) = \int_0^{\infty} dT_M e^{i\Omega T_M} F(T_M) = \int_0^{\infty} \cdots \int_0^{\infty} \prod_{j=1}^M d\xi_j f(\xi_j) e^{i\Omega \xi_j} = [\hat{f}(\Omega)]^M. \quad (\text{F.25})$$

Ahora bien, de acuerdo con el teorema del límite central, el comportamiento asintótico para $M \gg 1$ de $F_M(T_M)$ es

$$F_M(T_M) \sim \frac{1}{(2\pi M\sigma^2)^{1/2}} \exp \left[-\frac{(T_M - M\tau)^2}{2M\sigma^2} \right], \quad (\text{F.26})$$

donde $\sigma^2 = q^2 - \tau^2$. Luego, para $M \gg 1$, tendremos que

$$[\hat{f}(\Omega)]^M = \hat{F}_M(\Omega) \sim \exp \left(iM\tau\Omega - \frac{M\sigma^2\Omega^2}{2} \right). \quad (\text{F.27})$$

Si introducimos este comportamiento asintótico en la expresión (F.17), integramos respecto a Ω y tomamos el límite para $M \rightarrow \infty$, llegamos a

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} d\Omega \frac{B_M(\Omega)}{M} = 2 \lim_{M \rightarrow \infty} \text{Re} \int_{-\infty}^{\infty} d\Omega \frac{\hat{f}(\Omega) \left[\exp \left(iM\tau\Omega - \frac{M\sigma^2\Omega^2}{2} \right) - 1 \right]}{M \left[1 - \hat{f}(\Omega) \right]^2}, \quad (\text{F.28})$$

que cuando se realiza el cambio de variables $\Omega M\tau = x$ toma la forma

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} d\Omega \frac{B_M(\Omega)}{M} = \frac{2}{\tau} \lim_{M \rightarrow \infty} \text{Re} \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{\hat{f} \left(\frac{x}{M\tau} \right) \left[\exp \left(ix - \frac{x^2\sigma^2}{2M\tau^2} \right) - 1 \right]}{M^2 \left[1 - \hat{f} \left(\frac{x}{M\tau} \right) \right]^2}. \quad (\text{F.29})$$

Teniendo en cuenta que

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \hat{f}\left(\frac{x}{M\tau}\right) = 1, \quad (\text{F.30})$$

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \exp\left(ix - \frac{x^2\sigma^2}{2M\tau^2}\right) = e^{ix} \quad (\text{F.31})$$

y

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \left[\left[1 - \hat{f}\left(\frac{x}{M\tau}\right) \right]^2 M^2 \right] = -x^2, \quad (\text{F.32})$$

se puede calcular el límite del segundo miembro de la expresión (F.29), obteniéndose

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} d\Omega \frac{B_M(\Omega)}{M} = \frac{2}{\tau} \text{Re} \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{1 - e^{ix}}{x^2} = \frac{2}{\tau} \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{2\pi}{\tau}, \quad (\text{F.33})$$

con lo que queda demostrada la Ec. (F.23).

Así pues, de acuerdo con la Ec. (F.20), la PSD se puede escribir como sigue:

$$S(\Omega) = \frac{1}{\tau} A(\Omega) + \frac{2\pi}{\tau^2} \delta(\Omega), \quad (\text{F.34})$$

que, al sustituir la definición de la función $A(\Omega)$, coincide con la expresión (5.56).

Para finalizar este apéndice, vamos a probar el resultado (F.12). Para ello, partamos de la siguiente desigualdad típica del cálculo integral

$$|\hat{f}(\Omega)| \leq \int_0^{\infty} d\xi |e^{i\Omega\xi} f(\xi)| = \int_0^{\infty} d\xi f(\xi) = 1. \quad (\text{F.35})$$

Puesto que $e^{i\Omega\xi} f(\xi)$ es una función compleja de variable real, a cada valor de la misma se le puede asociar un vector del plano complejo. La condición que ha de cumplirse para que la primera desigualdad de la expresión anterior se convierta en una igualdad es que todos estos vectores tengan la misma dirección y el mismo sentido, ya que, de esta forma, el módulo de la integral coincidirá con la integral del módulo. Para ello, la fase $\Omega\xi$ deberá ser independiente de ξ , lo cual sólo es posible si $\Omega = 0$. De todo esto, junto con la igualdad $\hat{f}(0) = 1$, se sigue la expresión (F.12). Este resultado es válido cuando la variable aleatoria es continua, como sucede en nuestro caso. Si la variable aleatoria es discreta y toma valores de la forma $a n$ con $n = \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots$ y $a > 0$, también se verificará que $\hat{f}(\Omega) = 1$ para frecuencias que sean múltiplos de $2\pi/a$, como se pone de manifiesto en [42].

Apéndice G

Análisis asintótico de la expresión (5.60) para $N \gg 1$

Nuestro punto de partida será la expresión (5.60) para la PSD a amplitud nula, es decir,

$$S_0(\Omega) = \left(\frac{p}{N+1}\right)^2 \delta\left(\frac{\Omega}{2\pi}\right) + \frac{p}{N+1} \frac{1 - x^{2(N+1)}}{1 + x^{2(N+1)} - 2x^{N+1} \cos[(N+1) \arccos x]}, \quad (\text{G.1})$$

donde se ha utilizado la notación

$$x = \frac{1}{(1 - (\Omega/p)^2)^{1/2}}. \quad (\text{G.2})$$

Estamos interesados en estudiar el comportamiento asintótico para $N \gg 1$ de esta PSD. En primer lugar, obsérvese que puesto que x está contenido en el intervalo $(0, 1]$, cuando $N \gg 1$ se cumple que $x^{N+1} \ll 1$, excepto en el caso de que x se encuentre en el interior de una capa estrecha en torno a 1. Para estudiar esta capa, vamos a introducir la siguiente variable adimensional:

$$\tilde{\Omega} = N^{1/2} \frac{\Omega}{p}, \quad (\text{G.3})$$

de manera que x^{N+1} toma la forma

$$x^{N+1} = \left(1 + \tilde{\Omega}^2/N\right)^{-(N+1)/2} = \left(1 + \tilde{\Omega}^2/N\right)^{-1/2} \left[\left(1 + \tilde{\Omega}^2/N\right)^{N/\tilde{\Omega}^2}\right]^{-\tilde{\Omega}^2/2}. \quad (\text{G.4})$$

Tanto para $\tilde{\Omega}^2/N \sim \mathcal{O}(1)$ como para $\tilde{\Omega}^2/N \gg 1$, la primera igualdad de la expresión anterior nos garantiza que $x^{N+1} \ll 1$ cuando $N \gg 1$. Por el contrario, si $\tilde{\Omega}^2/N \ll 1$, se verifica que

$$(1 + \tilde{\Omega}^2/N)^{N/\tilde{\Omega}^2} \sim e, \quad (\text{G.5})$$

y, por tanto, en este caso el comportamiento asintótico dominante de x^{N+1} será

$$x^{N+1} \sim e^{-\tilde{\Omega}^2/2}. \quad (\text{G.6})$$

Este resultado nos permite definir de forma más clara la capa a la que antes hicimos referencia. De acuerdo con la expresión anterior, para que se cumpla que $x^{N+1} \ll 1$ y, en consecuencia, nos encontremos en el interior de esta capa, la variable $\tilde{\Omega}$ debe ser como mucho del orden de la unidad. A su vez, el exterior de la capa estará caracterizado por la condición $\tilde{\Omega} \gg 1$.

Igualmente, es fácil comprobar que en el interior de la capa los dos primeros términos del comportamiento asintótico de x son

$$x \sim 1 - \frac{\tilde{\Omega}^2}{2N}, \quad (\text{G.7})$$

y, por tanto, el comportamiento dominante de $\arccos x$ será

$$\arccos x \sim \frac{\tilde{\Omega}}{N^{1/2}}. \quad (\text{G.8})$$

De todo esto, se sigue que

$$\cos [(N+1) \arccos x] \sim \cos [N^{1/2} \tilde{\Omega}]. \quad (\text{G.9})$$

Sustituyendo estos resultados en uno de los sumandos del segundo miembro de la expresión (G.1), y utilizando las definiciones del seno y del coseno hiperbólico, obtenemos

$$\frac{1 - x^{2(N+1)}}{1 + x^{2(N+1)} - 2x^{N+1} \cos [(N+1) \arccos x]} \sim \frac{\sinh(\tilde{\Omega}^2/2)}{\cosh(\tilde{\Omega}^2/2) - \cos(N^{1/2}\tilde{\Omega})}, \quad (\text{G.10})$$

que es el comportamiento asintótico dominante en el interior de la capa. En el exterior de la misma, este comportamiento se calcularía haciendo $x = 0$, obteniéndose, por tanto,

$$\frac{1 - x^{2(N+1)}}{1 + x^{2(N+1)} - 2x^{N+1} \cos [(N-1) \arccos x]} \sim 1. \quad (\text{G.11})$$

Obsérvese que en la zona de empalme entre ambas regiones los dos comportamientos coinciden, ya que

$$\lim_{\tilde{\Omega} \rightarrow \infty} \frac{\sinh(\tilde{\Omega}^2/2)}{\cosh(\tilde{\Omega}^2/2) - \cos(N^{1/2}\tilde{\Omega})} = 1. \quad (\text{G.12})$$

Por consiguiente, la expresión (G.10) es uniformemente válida en todo el rango de valores de $\tilde{\Omega}$.

Introduciendo la Ec. (G.10) en (G.1) y deshaciendo el cambio de variables efectuado, llegamos a

$$S_0(\Omega) \sim \left(\frac{p}{N}\right)^2 \delta\left(\frac{\Omega}{2\pi}\right) + \frac{p}{N} \frac{\sinh\left[\frac{N}{2}(\Omega/p)^2\right]}{\cosh\left[\frac{N}{2}(\Omega/p)^2\right] - \cos[N\Omega/p]}, \quad (\text{G.13})$$

que es precisamente la expresión (5.62).

Bibliografía

- [1] F. Moss en "Some Contemporary Problems in Statistical Physics", editado por G. Weiss (SIAM, Philadelphia), 205 (1994).
- [2] K. Wiesenfeld y F. Moss, *Nature* **373**, 33 (1995).
- [3] A. R. Bulsara, S. B. Lowen y C. D. Rees, *Phys. Rev. E* **49**, 4989 (1994).
- [4] J. E. Fletcher, S. Havlin y G. H. Weiss, *J. Stat. Phys.* **51**, 215 (1988).
- [5] M. Gitterman y G. H. Weiss, *J. Stat. Phys.* **74**, 941 (1994).
- [6] C. R. Doering y J. C. Gadoua, *Phys. Rev. Lett.* **69**, 2318 (1992).
- [7] U. Zürcher y C. R. Doering, *Phys. Rev. E* **47**, 3862 (1993).
- [8] M. Bier y R. D. Astumian, *Phys. Rev. Lett.* **71**, 1649 (1993).
- [9] C. Van den Broeck, *Phys. Rev. E* **47**, 4579 (1993).
- [10] R. Benzi, G. Parisi, A. Suter y A. Vulpiani, *Tellus* **34**, 10 (1982).
- [11] C. Nicolis, *Tellus* **34**, 1 (1982).
- [12] R. Benzi, G. Parisi, A. Suter y A. Vulpiani, *SIAM, J. Appl. Math.* **43**, 565 (1983).
- [13] S. Fauve y F. Heslot, *Phys. Lett.* **97A**, 5 (1983).
- [14] B. McNamara, K. Wiesenfeld y R. Roy, *Phys. Rev. Lett.* **60**, 2626 (1988).
- [15] J. Douglass, L. Wilkens, E. Pantazelou y F. Moss, *Nature* **365**, 337 (1993).

- [16] B. McNamara y K. Wiesenfeld, *Phys. Rev. A* 39, 4854 (1989).
- [17] P. Jung y P. Hänggi, *Phys. Rev. A* 41, 2977 (1990).
- [18] P. Jung y P. Hänggi, *Phys. Rev. A* 44, 8032 (1991).
- [19] L. Gammaitoni, F. Marchesoni, E. Menichella-Saetta y S. Santucci, *Phys. Rev. Lett.* 62 349 (1989).
- [20] C. Presilla, F. Marchesoni y L. Gammaitoni, *Phys. Rev. A* 40, 2105 (1989).
- [21] L. Gammaitoni, E. Menichella-Saetta, S. Santucci, F. Marchesoni y C. Presilla, *Phys. Rev. A* 40, 2114 (1989).
- [22] G. Debnath, T. Zhou y F. Moss, *Phys. Rev. A* 39, 4323 (1989).
- [23] T. Zhou y F. Moss, *Phys. Rev. A* 41, 4255 (1990).
- [24] H. Gang, G. Nicolis y C. Nicolis, *Phys. Rev. A* 42, 2030 (1990).
- [25] M. I. Dykman, H. Haken, H. Gang, D. G. Luchinsky, R. Mannella, P. V. E. McClintock, C. Z. Ning, N. D. Stein y N. G. Stocks, *Phys. Lett. A* 180, 332 (1993).
- [26] P. Jung, *Phys. Rep.* 234, 175 (1993).
- [27] K. Wiesenfeld, D. Pierson, E. Pantazelou, C. Dames y F. Moss, *Phys. Rev. Lett.* 72, 2125 (1994).
- [28] J. Lindner, B. Meadows, W. Ditto, M. Inchiosa y A. Bulsara, *Phys. Rev. Lett.* 75, 3 (1995).
- [29] M. E. Inchiosa y A. R. Bulsara, *Phys. Rev. E* 52, 327 (1995).
- [30] M. E. Inchiosa y A. R. Bulsara, *Phys. Lett. A* 200, 283 (1995).
- [31] J. F. Lindner, B. k. Meadows, W. L. Ditto, M. E. Inchiosa y A. R. Bulsara, *Phys. Rev. E* 53, 2081 (1996).
- [32] M. Gitterman y G. H. Weiss, *Phys. Rev. E* 52, 5704 (1995).

- [33] A. R. Bulsara, S. B. Lowen y C. D. Rees, *Phys. Rev. E* **52**, 5712 (1995).
- [34] D. C. Schwartz y C. R. Cantor, *Cell* **37**, 67 (1984).
- [35] G. F. Carle, M. Frank y M. V. Olson, *Science* **232**, 65 (1986).
- [36] S. Fesjian, H. L. Frisch y T. Jamil, *Biopolymers* **25**, 1179 (1986).
- [37] G. W. Slater y J. Noolandi, *Electrophoresis* **10**, 413 (1990).
- [38] J. L. Viovy, *Electrophoresis* **10**, 429 (1990).
- [39] R. Zwanzig, *Acc. Chem. Res.* **23**, 148 (1990).
- [40] C. W. Gardiner, *Handbook of Stochastic Methods* (Springer, Berlin, 1985), 2^a ed.
- [41] J. J. Brey y J. Casado-Pascual, *Phys. Rev. E* **50**, 116 (1994).
- [42] N. G. van Kampen, *Stochastic Processes in Physics and Chemistry* (North-Holland, Amsterdam, 1992).
- [43] Véase, por ejemplo, *Stochastic Processes in Physics and Chemistry* (ref. [42]), sección XI.2.
- [44] J. J. Brey y J. Casado-Pascual, *Physica A* **212**, 123 (1994).
- [45] J. J. Brey, J. Casado-Pascual y B. Sánchez, *Phys. Rev. E* **52**, 6071 (1995).
- [46] H. Tuckwell, *Stochastic Processes in the Neurosciences* (SIAM, Philadelphia, 1979).
- [47] *Handbook of Mathematical Functions*, editado por M. Abramowitz y I. Stegun (Dover, New York, 1972).
- [48] T. Lukes, *Proc. Phys. Soc. London* **78**, 153 (1961).

UNIVERSIDAD DE SEVILLA

Resolvido el Tribunal (integrado por los abajo firmantes en el día de la fecha, para juzgar la Tesis Doctoral de

D. JESÚS CASADO PASCUAL

titulada ESTUDIO DE FENÓMENOS RESONANTES EN ALGUNOS MODELOS ESTOCÁSTICOS SENCILLOS

señaló con la calificación de APTO CON LAUDE POR UNANIMIDAD (5 votos)

Fecha, 20 de diciembre de 1996

El Vocal,

El Vocal,

El Vocal,



El Secretario,



El Declarado,





