

T  
60 R. 5328



UNIVERSIDAD DE SEVILLA

FACULTAD DE FISICA

FISICA TEORICA

TESIS

ENSAYO TEORICO SOBRE SIMULACION

DE MODELOS DE TRAFICO VIAL

UNIVERSIDAD DE SEVILLA  
SECRETARIA GENERAL

Queda registrada esta Tesis Doctoral  
al folio 69 número 22 del libro  
correspondiente.

Sevilla, 24 de Junio de 1988

El Jefe del Negociado de Tesis

*Aleuca Laffitte*



MEMORIA presentada para aspirar al Grado de  
Doctor por el Ingeniero Industrial, RAFAEL  
FLORENCIO LORA.

Junio, 1.988

DIRECTOR:

JOSE JAVIER BREY ABALO, Catedrático de Física  
Teórica de la Universidad de Sevilla.

A handwritten signature in black ink, appearing to read "Jose Javier Brey Abalo". The signature is written in a cursive style with a large, sweeping flourish at the end.

Deseo expresar mi agradecimiento al director de esta tesis, catedrático D. José Javier Brey Abalo, quien me propuso el tema y después supo mantener la dirección de los trabajos, sin cuyo constante estímulo, rigor científico e investigador, y supervisión no hubiera sido posible la realización de esta memoria.

También quiere expresar mi agradecimiento al Dr. D. José Manuel Casado Vázquez por su constante apoyo, así como a la Dra. Dña. Azucena Alvarez Chillida y a los demás miembros del Dpto. de Física Teórica.

Agradezco también a todas aquellas personas que en algún momento durante la realización de los trabajos, me animaron a continuar o me facilitaron la labor, que fueron muchas, invitándoles a que continúen en el mismo talante con los demás alumnos de doctorado.



A la memoria de mi hermana  
Maria Dolores.

**INDICE**

I	INTRODUCCION.....	7
II	VARIABLES Y ECUACIONES BASICAS.....	20
	II.1 Intensidad de tráfico.....	21
	II.2 Densidad de tráfico.....	21
	II.3 Velocidad .....	22
	II.4 Intervalo .....	23
	II.5 Espaciamiento .....	23
	II.6 Ecuación fundamental.....	24
	II.7 Ecuación de estado .....	24
	II.8 Diagrama fundamenal del tráfico....	26
	II.9 Aceleración .....	28
III	MODELOS DE SEGUIMIENTO.....	31
	III.1 Definición de los modelos de segui miento.....	32
	III.2 Estabilidad.....	35
	III.3 Determinación empírica de $\lambda_0$ y $\Delta$ ..	37
	III.4 Ecuación de estado.....	39
	III.5 Simulación del Modelo de Seguimien to.....	44
	III.6 Una aplicación del modelo de segui miento del líder.....	47
	III.7 Modelo de seguimiento con adelanta miento.....	53
IV	MODELO CINETICO.....	56
	IV.1 Función de distribución de velocida des.....	57
	IV.2 Función de distribución de velocida des deseadas.....	60
	IV.3 Estudio de la influencia de las in teracciones.....	63
	IV.4 Un modelo cinético de simulación de tráfico.....	67

V	APLICACION DEL MODELO CINETICO A POBLACIONES MEZCLADAS DE VEHICULOS LENTOS Y RAPIDOS.....	71
	V.1 Introducci3n	
	V.2 Diagrama de tráfico para el modelo de po blaciones mezcladas.....	75
	V.3 Análisis de la estructura de las colas..	95
	V.4 Estudio de la frecuencia de adelantamien tos.....	105
	V.5 Análisis de las fluctuaciones en el régi men estacionario.....	113
	V.6 Aplicaci3n del Modelo cinético al estu - dio de la influencia de un "convoy".....	126
	V.7 Influencia de los desdoblamientos y es - trechamientos.....	135
	CONCLUSIONES.....	139
	APENDICES.....	143
	BIBLIOGRAFIA.....	158

## **I. INTRODUCCION**

## I. INTRODUCCION

Es evidente que el tráfico vial supone hoy día uno de los problemas sociales más relevantes, dado que es el más significativo de los distintos modos de satisfacer la demanda de transporte. Algunos de los problemas más importantes asociados con él son los referentes a la seguridad de las vías, su capacidad y las demoras o retrasos.<sup>1)</sup>

Es de todos conocido, a través de la estadística de accidentes de tráfico, que el problema de la seguridad vial conlleva unos costes sociales altos, de tal forma que se está tomando conciencia de la necesidad de una educación más formalizada de los conductores, se espera así lograr que los modos de conducir sean más disciplinados, que se conozcan los riesgos asumidos en cada maniobra, y en consecuencia, resulte un tráfico más seguro.

La capacidad de la vía se determina normalmente por criterios empíricos o semi-técnicos, existiendo en este punto una gran separación entre la práctica y los modelos teóricos de tráfico. Evidentemente es de esperar un acercamiento entre ambos, y en esa dirección pretende aportar algo esta memoria.

Las demoras suponen un coste temporal en la dinámica del tráfico. El conocimiento de las leyes del tráfico y de la incidencia de sus variables, nos puede aportar información de cómo obtener una mejor fluidez. Es de esperar que, en el futuro, los modelos teóricos puedan llegar a ser de gran ayuda en esta tarea.

El tráfico en sus diferentes aspectos se manifiesta como un viejo problema de la humanidad. La historia nos informa que ya existieron leyes de regulación del tráfico en la ciudad de Roma en los tiempos del Imperio Romano. Más recientemente, podemos citar los ejemplos de Londres y Nueva York durante el siglo pasado.<sup>2)</sup>

Pero es con la aparición de la motorización del transporte cuando comienza a surgir una problemática real del tráfico rodado que crece exponencialmente con el paso del tiempo. La incidencia es tan grande, que puede afirmarse que no solo condiciona y prácticamente vertebra el actual urbanismo urbano e interurbano, sino que incide de forma significativa en las costumbres, culturas, educación y modos de comportamiento del hombre de hoy. El vehículo motorizado es un elemento diferencial y caracterizador de la civilización actual. Además, el conjunto de la industria de la automoción constituye hoy día, la mayor industria mundial (en montante de cifras de negocios, inversiones, personal, etc...), muy distante aún de las siguientes (petróleo, electricidad, aeroespacial, electrónica, etc.). Por ello, el estudio e investigación del comportamiento del tráfico de vehículos es de gran interés social.

En el análisis del tráfico de vehículos se decantan dos ramas bien diferenciadas: el tráfico urbano y el tráfico vial. Las características de uno y otro son tan diferenciadas, que las formas de abordar su estudio toma modos diferentes.<sup>2)</sup> En el tráfico urbano, los cruces y semáforos, la distinta capacidad de las calles, etc., hace que el tráfico se desarrolle

por oleadas, y su gestión se realiza mediante la canalización de los flujos por determinadas calles (canales). En esta Memoria no consideramos esta clase de tráfico sino que nos centraremos desde el principio en el estudio del tráfico vial.

En términos generales se observa que el tráfico vial unidireccional en una carretera con posibilidad de adelantamientos se produce de la siguiente forma. Cuando la densidad de vehículos es pequeña los vehículos circulan prácticamente a la velocidad que desean sus conductores ("velocidad libre"). Conforme la densidad de tráfico va aumentando, se comienza a notar las interferencias de unos vehículos con otros, lo que se traduce en una especie de rozamiento interno del "fluido" que hace que los vehículos ya no vayan a su velocidad deseada, sino a velocidades, por término medio, inferiores. A densidades mayores, aumentan las interferencias entre vehículos y aparecen las colas o columnas móviles, que son consecuencia de la retención de vehículos por otros más lentos. Cuando la densidad se hace mayor aún estas colas se alargan extremadamente y finalmente, a la llamada densidad de saturación, el tráfico se colapsa.<sup>3)</sup>

El fenómeno del tráfico vial ha sido estudiado de forma empírica al objeto de determinar las capacidades y mejor distribución de las vías.<sup>4)</sup> También se han formulado modelos teóricos, tanto analíticos como de simulación en ordenador, para tratar de entender los mecanismos que intervienen en el fenómeno del tráfico y reproducirlo. Es necesario señalar que todavía no se ha establecido un puente sólido entre la

teoría y la práctica, de manera que para la aplicación práctica se recurre normalmente a modelos de tipo empírico.

Se pueden dividir los modelos existentes en aquellos que hacen un análisis empírico, los que hacen un análisis teórico matemático (sea este determinista o estocástico) y los que se desarrollan en base y para la simulación en ordenador.

Los modelos empíricos, como es sabido, se suelen utilizar cuando hay un desconocimiento de las relaciones causa-efecto de las variables y parámetros que conforman el modelo. Para ello se suele recurrir a ajustes por mínimos cuadrados de determinadas funciones paramétricas que se admite que definen el comportamiento.

Los análisis teóricos parten de la base de que las relaciones entre las variables son conocidas y vienen expresadas, normalmente, mediante ecuaciones diferenciales complicadas, que hay que resolver. Para ello se recurre a hipótesis simplificadoras.

Los modelos de simulación poseen las ventajas asociadas con las grandes posibilidades que ofrecen los ordenadores de alta velocidad. Se pueden simular situaciones, que por su coste, tiempo de realización o carácter ideal, no son realizables experimentalmente. El desarrollo de estos modelos se basa, como toda forma de investigación, en un proceso continuo de realimentación entre los resultados obtenidos y el diseño del modelo, que intenta reflejar la realidad. El objetivo

final es alcanzar un modelo óptimo de representación de la misma.

Existe un conjunto de modelos que están basados en la teoría hidrodinámica<sup>5)</sup>; en ellos se trata el tráfico como un auténtico flujo vehicular, es decir, como un medio continuo. La idea es explotar la similitud de las variables, densidad, flujo y velocidad, que aparecen en el problema de tráfico con las que caracterizan un fluido, y aplicar las técnicas desarrolladas por la mecánica de fluidos. Se considera, pues, el fenómeno en función del comportamiento del flujo como un todo, sin considerar cada vehículo en particular. Este tipo de modelos permite estudiar fenómenos tales como la propagación de perturbaciones en el tráfico, la evolución de ondas de choques, etc.<sup>1)</sup>

Otro conjunto de modelos están constituidos por los denominados modelos de seguimiento del líder o simplemente de seguimiento.<sup>2)</sup> Estos modelos son, en contraposición con los hidrodinámicos, totalmente microscópicos, individualizando los vehículos.<sup>6)</sup> En forma simplificada, la idea en que están basados es que el conductor de cada vehículo percibe la información del vehículo o vehículos que lleva delante; esta información es tratada y produce una acción que se traduce, con un cierto retardo, en una aceleración positiva o negativa de su vehículo.<sup>7)</sup> El comportamiento que acabamos de describir cualitativamente se modela matemáticamente mediante ecuaciones diferenciales de movimiento cuya resolución permite explicar el comportamiento de la línea de tráfico.<sup>8)</sup> Como puede verse, son modelos que encajan perfectamente en la teoría

general de servosistemas, a través de la acción de realimentación de cada conductor.

Los modelos de seguimiento a que nos estamos refiriendo consideran un flujo unidireccional de tráfico, en el que no son posibles los adelantamientos entre vehículos.<sup>9),10),11)</sup> Mediante ellos se pueden analizar tanto situaciones estacionarias como comportamientos típicamente transitorios.<sup>12)</sup> Además, el análisis de los modelos permite deducir para que valores de las distintas variables y parámetros se producen inestabilidades en el sistema, entendiéndose por ellas, el aumento de las perturbaciones al propagarse.<sup>13),14),15)</sup>

Por analogía con la teoría de la cinética de los gases<sup>16)</sup>, y considerando que cada vehículo del tráfico puede asimilarse a una molécula de un gas con movimiento unidireccional<sup>17)</sup>, Prigogine formula un Modelo de ecuación cinética para el tráfico.<sup>18)</sup>

Prigogine supone que la evolución temporal de la función de distribución de velocidades de los vehículos está determinada por la aditividad de tres términos.<sup>19)</sup> El primero es debido a la inhomogeneidad existente. El segundo representa una tendencia exponencial hacia el deseo individual de los conductores, caracterizado por la función de distribución de velocidades deseadas. El último da cuenta de las interacciones entre los vehículos, incluyéndose la posibilidad de adelantamientos entre los mismos. Este modelo ha sido estudiado y resuelto analíticamente<sup>20)</sup>, y su mayor limitación está en la introducción de la distribución de velocidades deseadas para explicar el comportamiento

de los conductores. Esto lleva a una especie de círculo vicioso, como manifiestan los propios autores<sup>20)</sup>:

"Un peligro obvio de una teoría como la nuestra es que puede conducir a un círculo vicioso. El comportamiento de los conductores se "explica" en términos de una función de distribución deseada, que a su vez se introduce para describir el comportamiento de los conductores. Esto es similar a la bien conocida dificultad de la teoría económica, en donde el concepto de "utilidad" puede conducir fácilmente a afirmaciones carentes de sentido."

Para terminar esta somera revisión de algunos modelos teóricos de tráfico vial citaremos los modelos probabilísticos referentes a la formación de colas móviles<sup>21),22)</sup> (FIFO, LIFO, etc.), y otros modelos con fines específicos como los de Tanner<sup>23)</sup>, Miller<sup>24),25)</sup>, Erlander<sup>26),27)</sup>, etc.

El estudio realizado en este trabajo está orientado básicamente al desarrollo y análisis de modelos de simulación de tráfico vial en ordenador. La técnica de simulación utilizada ha sido la denominada "Dinámica molecular"<sup>28)</sup>. Los modelos<sup>29)</sup> presentados y analizados pueden clasificarse en dos grupos, los basados en leyes de seguimiento de vehículos, y los modelos cinéticos.

Como ya se ha indicado anteriormente, los modelos de seguimiento son modelos microscópicos que individualizan cada vehículo. La circulación se analiza siguiendo la evolución de cada vehículo mediante la

integración de las ecuaciones diferenciales de movimiento determinadas por las fuerzas de interacción que actúan entre vehículos consecutivos. Más concretamente estas fuerzas son inducidas por cada vehículo sobre el que le sigue. La aplicabilidad de este modelo está restringida por el hecho de que no se considera en su formulación original la posibilidad de adelantamientos entre los vehículos. Para incorporarla, el modelo se ha modificado introduciendo una probabilidad de adelantar  $P^3$ ). Además, para la descripción del proceso de adelantamiento ha resultado útil definir una distancia de seguridad  $D_s$ , que juega el papel de un intervalo alrededor de cada vehículo donde no existe interacción (zona de campo nulo). En ella el vehículo que está adelantando se mueve con velocidad constante. La decisión de adelantar se toma antes de entrar en esta zona. La influencia de los adelantamientos se pone de manifiesto al comparar la curva de estado del tráfico obtenido con la correspondiente a una línea sin adelantamientos.

La combinación de las ideas anteriores con las contenidas en el modelo de ecuación cinética de Prigogine lleva a la formulación de su Modelo cinético del tráfico.

Este modelo es estudiado utilizando de nuevo la técnica de la "Dinámica molecular". Se estudia así el comportamiento de una línea de tráfico en distintas condiciones de concentración.

El modelo anterior resulta especialmente adecuado para estudiar situaciones de gran interés práctico.

co. Nosotros hemos considerado el caso de dos poblaciones de vehículos, unos lentos y otros rápidos; es decir poblaciones, en una determinada proporción, de pesados/ligeros. Los conceptos de lentos y rápidos van asociados en el modelo a la velocidad deseada por los conductores. Ello puede reflejar, como es usual en los estudios de tráfico, la relación camiones a turismos, o bien la concurrencia de un tráfico nacional con un tráfico de cercanías en las proximidades de núcleos urbanos.

Al estudiar esta situación, aparece de una forma natural la formación de colas, es decir, de columnas móviles. Este hecho creemos que confiere gran valor a nuestro modelo pues, según nuestros conocimientos, es el primer modelo en que las colas surgen como consecuencia de la propia dinámica de los vehículos y no son incorporadas de un modo "ad hoc".

Otras situaciones de interés práctico es cuando se produce un desdoblamiento de las vías. Nosotros las hemos modelado suponiendo que en, por ejemplo, un 10% del circuito existe una probabilidad de adelantar  $P=1$ . Esto permite estudiar la incidencia que, sobre la intensidad de tráfico, puede tener en que en determinados tramos del mismo se facilite enormemente el adelantamiento. Mas aún, un análisis detallado podría permitir determinar las localizaciones más adecuadas de estos tramos de desdoblamiento. Sin embargo, los resultados obtenidos muestran que la incidencia de tales desdoblamientos sobre el flujo de vehículos más allá de los mismos es muy limitada.

Ante este resultado, el modelo se modificó en el sentido de que el tiempo de relajación en el tramo desdoblado se hizo mucho menor que en el resto de la vía. La idea es que al llegar al desdoblamiento los conductores no solo puedan ir más rápidos sino que respondan a la "invitación" de un modo más espontáneo. Es decir, se simula un tráfico muy diluido, con "velocidad libre" para cada conductor, sin interferencias directas ni indirectas de los demás vehículos.

Aún con esta modificación, la influencia de los tramos como veremos, no es significativa, lo que hace pensar que la introducción en las carreteras de tramos pequeños de doble carril, no facilita apreciablemente la intensidad de tráfico. Esto parece debido a que se produce un "cuello de botella" en la salida del desdoblamiento que "compensa" en gran medida los efectos del mismo.

A continuación, abordamos el estudio de la situación inversa, es decir, supusimos que en un 10% del circuito la probabilidad de adelantar P es nula. Se intenta así simular el tráfico en carreteras que contienen un tramo donde es imposible adelantar. Ello puede corresponder a túneles, puentes, etc. Los resultados en este caso son significativos, en el sentido de que aparece una disminución significativa de la velocidad media y de la intensidad del tráfico.

En todos los casos, hemos estudiado la evolución temporal de la distribución de las velocidades, comparándola con la inicial y con la deseada. Se apre-

cia claramente como los vehículos de velocidades deseadas bajas retienen y acumulan a los de velocidades deseadas altas. El efecto es tanto mayor en cuanto mayor es la densidad de tráfico, y va acompañado de la formación de colas móviles.

También hemos estudiado la influencia de la relación pesados/ligeros en la intensidad del tráfico, apreciándose una incidencia muy significativa para densidades intermedias.

Otro aspecto de interés que hemos considerado es la influencia que el estado del tráfico tiene en el número de adelantamientos que se producen, ya que, dada la peligrosidad de esta maniobra, se puede asociar el riesgo de accidente con la frecuencia de los adelantamientos.

Entre los resultados y conclusiones obtenidos puede destacarse que, según nuestro modelo, el estado más peligroso del tráfico se da a densidades ligeramente superiores a la correspondiente a una intensidad máxima de tráfico.

Respecto de las colas móviles, en tamaño medio crecen monótonamente con la densidad. Este crecimiento es suave para densidades bajas e intermedias, volviéndose muy rápido a densidades altas.

El último modelo simulado trata de analizar la influencia que sobre el tráfico tiene un convoy<sup>20)</sup>, entendiéndose por convoy un conjunto de vehículos igualmente espaciados y que circulan a una misma velocidad,

generalmente inferior a la velocidad media del resto de los vehículos. Los vehículos del convoy pueden ser adelantados vehículo a vehículo por el resto de los vehículos de la carretera. Los resultados muestran que el efecto producido sobre el tráfico es mucho más perturbador que el que produce una concentración de vehículos "lentos" del mismo orden. En particular, el tráfico, incluso sobre un circuito cerrado, tarda un tiempo muy largo en alcanzar un estado estacionario. Esta inestabilidad del tráfico permite inferir la peligrosidad de este tipo de transporte. Como es lógico, la influencia de un convoy disminuye con la densidad de tráfico.

## **II. VARIABLES Y ECUACIONES BASICAS**

## II. VARIABLES Y ECUACIONES BASICAS

### II.1. Intensidad de tráfico

La intensidad de tráfico, también denominada flujo, se define como el número de vehículos,  $q$ , que atraviesan una sección transversal de la carretera por unidad de tiempo. En la práctica, suele hablarse de intensidad media horaria o diaria, haciendo referencia al periodo de tiempo a que corresponde.

La intensidad media de tráfico es una variable muy representativa del tráfico. Sin embargo, en algunos casos es necesario utilizar una descripción más fina, considerando, por ejemplo, distribuciones de que los intervalos temporales entre los coches vienen dados por una distribución de Poisson, mientras que para tráfico de mayor volumen o para una mezcla de varias poblaciones suele utilizarse una distribución binomia.

### II.2. Densidad de tráfico

La densidad o concentración de tráfico,  $c$ , es el número de vehículos que existen por unidad de longitud en la carretera en un instante o intervalo dado.

Su medida se puede realizar, por ejemplo, mediante una fotografía de la carretera y contando la cantidad de vehículos por unidad de longitud. En la práctica, sin embargo, se recurre a un procedimiento

indirecto basado en las medidas del flujo y la velocidad.

Los valores posibles de la concentración están comprendidos entre cero y un valor máximo,  $c_s$ ,

$$0 < c < c_s$$

donde  $c_s$  es la llamada densidad de saturación. En los estudios que se realizan en este trabajo se ha supuesto, de acuerdo con la generalidad de los autores,

$$c_s = 0,16 \text{ vehículos/metro}$$

### II.3. Velocidad

La velocidad de un vehículo aislado se define como su velocidad cinemática. Es frecuente la utilización de las distintas velocidades, como la velocidad instantánea, la velocidad de recorrido, la velocidad de trayecto, la velocidad media temporal o local y la velocidad media espacial.

En este estudio se trabaja con la velocidad instantánea de los vehículos y la velocidad media espacial, entendiendo por esta última la velocidad media de todos los vehículos que en un instante determinado están en un tramo de carretera dado.

#### II.4. Intervalo

Se denomina intervalo al tiempo que transcurre entre el paso de dos vehículos consecutivos por una sección transversal de la carretera. Es, pues, una variable microscópica, en el sentido de dar información sobre las posiciones relativas (en el tiempo) de los vehículos.

#### II.5. Espaciamiento

El espaciamiento es la distancia entre dos vehículos consecutivos.

Se puede definir el espaciamiento medio para un conjunto N de vehículos como:

$$\bar{e} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N e_j \quad (\text{II.1})$$

Siendo  $e_j$  el espaciamiento del vehículo j (con respecto al que le precede).

El espaciamiento medio y la densidad están ligadas por:

$$c = \frac{1}{\bar{e}} \quad (\text{II.2})$$

Los estudios de los espaciamientos tuvieron gran auge en los comienzos de la teoría del tráfico, aunque hoy día han decaído bastante. En los distintos

códigos de circulación, se suele hacer referencia a los espaciamentos mínimos en función de la velocidad del vehículo, y normalmente por motivos de seguridad.

## II.6. Ecuación fundamental

La conservación de vehículos exige que se verifique la ecuación de continuidad:

$$q = c \cdot \bar{v} \quad (\text{II.3})$$

donde  $\bar{v}$  es la velocidad media.

## II.7. Ecuación de estado

Se postula en la teoría del tráfico que existe una ecuación de estado en forma de una relación entre la velocidad media y la densidad. Cualitativamente esta relación es de la forma mostrada en la figura II.1. y se denomina "Ecuación de estado del tráfico".

La forma cualitativa mostrada está generalmente admitida, de tal forma que para que un modelo de tráfico se considere admisible debe llevar a un comportamiento de este tipo.

La curva muestra que en estados de tráfico muy diluido la velocidad es independiente de la concentración, ya que no existen interferencias entre los vehículos. Estas van aumentando con la densidad e implican una menor velocidad media.

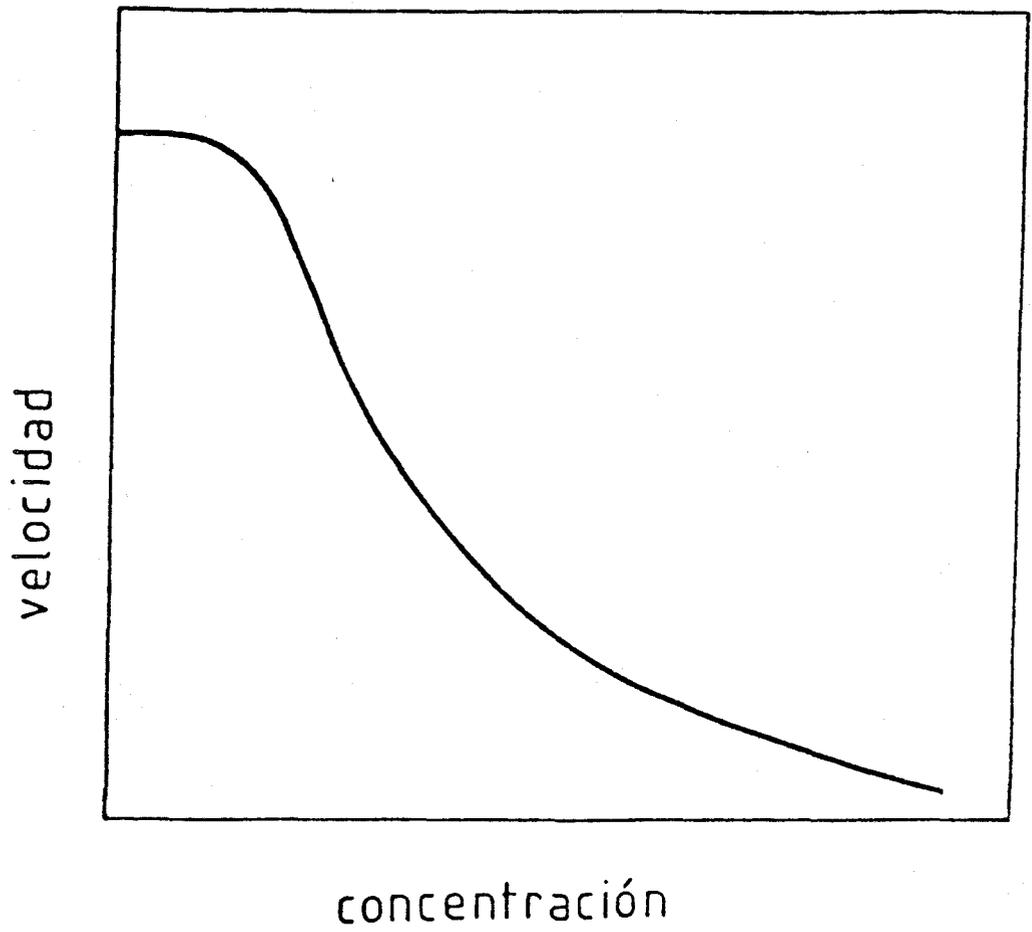


Fig. II.1. Representación esquemática de la velocidad frente a la concentración. (Ecuación de estado del tráfico).

La ecuación de estado:

$$\bar{v} = f(c) \quad (\text{II.4})$$

ha sido modelada empíricamente de varias formas, como la lineal de Greenshields<sup>30)</sup>, la semilogarítmica de Greenberg<sup>31)</sup> y la exponencial de Underwood<sup>32)</sup>.

## II.8. Diagrama fundamental del tráfico

Como consecuencia de las dos relaciones anteriores aparece el llamado diagrama fundamental del tráfico que liga el flujo y la concentración:

$$\left. \begin{array}{l} q = c \bar{v} \\ \bar{v} = f(c) \end{array} \right\} \Rightarrow q = c \cdot f(c) = \psi(c) \quad (\text{II.5})$$

Su forma cualitativa está indicada en la figura II.2.

Los modelos utilizados para la intensidad derivan de ajustes por mínimos cuadrados de resultados empíricos y/o de los modelos utilizados para la ecuación de estado.

Como ya hemos dicho, está admitido de manera generalizada que todo tráfico sigue cualitativamente el diagrama fundamental. Su forma se explica del mismo modo que la ecuación de estado. A concentraciones muy diluidas la velocidad de los vehículos es tan alta

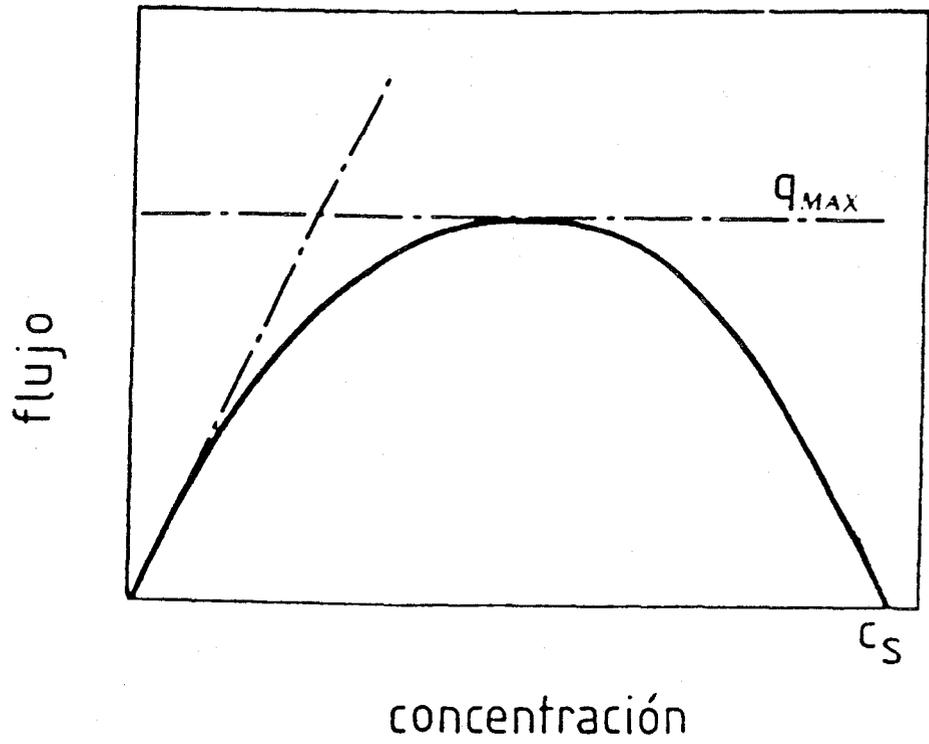


Fig. II.2. Diagrama esquemático del flujo frente a la concentración (Diagrama fundamental del tráfico).

como sea posible por otros factores, dado que no existe interferencias con otros vehículos. Conforme la densidad va aumentando, aunque la interferencia entre vehículos hace caer la velocidad media, esta disminución no es suficiente para contrarrestar el aumento de flujo asociado al aumento de concentración. En consecuencia, el balance final es un aumento de intensidad. Esto sucede hasta un cierto valor máximo del flujo. A partir de él la intensidad va disminuyendo, al aumentar la concentración. Ello es debido a que el efecto de interferencias entre vehículos prevalece ahora sobre el aumento de flujo. Finalmente, para un valor de la concentración  $c_s$  (concentración de saturación), el tráfico se colapsa por la imposibilidad práctica de movimiento, y consecuentemente el flujo se anula.

## II.9. Aceleración

En el caso general podemos decir que son tres las causas que producen cambio en la velocidad de los vehículos y por tanto aceleraciones. En primer lugar está el deseo de los conductores de circular a una velocidad dada, que se suele denominar velocidad deseada. Cada conductor individualmente acelerará y frenará tratando de conseguir dicha velocidad. En segundo lugar existe la interacción entre los vehículos que, normalmente, le impedirá al conductor cumplir exactamente sus deseos. Aparecerá así una competencia entre el deseo interno y el campo externo. La tercera causa es en realidad un conjunto de causas, que se engloban en un término estocástico de aceleración. Admitiendo la aditividad de estos tres efectos escribiremos para la aceleración del vehículo  $j$ :

$$\frac{d v_j(t)}{dt} = \left[ \frac{d v_j(t)}{dt} \right]_{\text{rel.}} + \left[ \frac{d v_j(t)}{dt} \right]_{\text{int.}} + \left[ \frac{d v_j(t)}{dt} \right]_{\text{ruido}} \quad (\text{II.6})$$

donde los tres términos del segundo miembro corresponden respectivamente a los tres efectos discutidos.

El término de ruido acelerativo puede caracterizarse por su dispersión definida por:

$$\sigma^2 = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T dt \left[ \frac{dv}{dt} \right]^2 \quad (\text{II.7})$$

que da una idea de la suavidad o brusquedad de la conducción. Se han realizado numerosas experiencias para medir este ruido acelerativo. Las distribuciones de las aceleraciones medidas aparecen centradas en el origen y son aproximadamente simétricas, con un valor de  $\sigma$  que para carreteras de muchas curvas, mal asfaltadas, mala iluminación, etc., toma valores comprendidos entre 0,46 y 0,61 m/s<sup>2</sup>, mientras que para carreteras en buen estado, tramos rectos, etc., es del orden de 0,22 m/s<sup>2</sup>.

El "ruido acelerativo" es función también de la velocidad, pudiendo llegar a ser, a velocidades del orden de 100 Km/h., el doble que a velocidades de 40 a 50 Km/h.

Naturalmente, todos los términos de aceleración de la ecuación (II.6) están limitados por las características técnicas del vehículo. Esto debe tenerse en cuenta al formular modelos de tráfico y asegurarse

que las ecuaciones introducidas no implican, en ciertas condiciones, aceleraciones, positivas o negativas, mas grandes de lo que es posible en la realidad.

Nosotros hemos realizado una experiencia, que se expone en el Apéndice A, de la medida de la aceleración y frenada máximas en un vehículo típico de convoy. Los resultados llevan a estimar los valores límites:

Frenada máxima	- 0,5 g
Aceleración máxima	0.2 g

donde  $g$  es la aceleración de la gravedad. La razón de considerar un vehículo de este tipo, es que más adelante abordaremos la influencia que tienen los convoyes en el tráfico vial.

### **III. MODELOS DE SEGUIMIENTO**

### III. MODELOS DE SEGUIMIENTO

#### III.1. Definición de los modelos de seguimiento

En este apartado vamos a introducir los modelos de seguimiento en su forma standard, es decir tal como aparecen en la bibliografía normalmente. Más adelante, discutiremos y analizaremos algunas modificaciones que lo hacen más versátil.

Este tipo de modelos modelan una situación de tráfico en un carril único, sin posibilidad de adelantamiento entre los vehículos. Se supone que las acciones de cada conductor son consecuencia de la información recibida y de su decisión de responder a esta información. Las acciones de los conductores se materializan en la aceleración (positiva o negativa) de los vehículos.

Así pues, las ecuaciones que caracterizan estos modelos son del tipo respuesta-estímulo, siendo la respuesta la reacción de los conductores ante el movimiento de los vehículos que le preceden. En general, los conductores responden con un cierto retardo  $T$  a la magnitud del estímulo. Esquemáticamente,

$$\text{Respuesta } (t + T) = \text{Sensitividad} \times \text{Estímulo } (t)$$

Nosotros vamos a suponer que cada vehículo interacciona únicamente con el vehículo que tiene delante, aunque existen generalizaciones en que lo hace con varios de los que le preceden.

Designando por  $j$  un vehículo cualquiera y por  $j-1$  el vehículo que circula delante, la fórmula general de los modelos de seguimiento es:

$$a_j(t+\Delta) = \frac{d^2 x(t+\Delta)}{dt^2} = \lambda \left[ \frac{d^p x_{j-1}(t)}{dt^p} - \frac{d^p x_j(t)}{dt^p} \right] \quad (\text{III.1})$$

donde:

$$\lambda = \lambda_0 \frac{[dx_j(t)/dt]^m}{[x_{j-1}(t) - x_j(t)]^1} \quad (\text{III.2})$$

La ley de seguimiento más sencilla se obtiene haciendo  $m=1=0$  y  $p = 1$ ; ya que el caso  $p = 0$  queda eliminado por consideraciones de estabilidad, como veremos más adelante. Resulta pues,

$$a_j(t+\Delta) = \lambda_0 [v_{j-1}(t) - v_j(t)] \quad (\text{III.3})$$

Si consideramos  $m = 0$  y  $p=1=1$  se obtiene el modelo no lineal:

$$a_j(t+\Delta) = \lambda_0 \left[ \frac{v_{j-1}(t) - v_j(t)}{x_{j-1}(t) - x_j(t)} \right] ; j = 1, \dots \quad (\text{III.4.})$$

A diferencia de (III.3), este modelo tiene en cuenta que la interacción entre vehículos disminuye al aumentar el espaciamiento entre ellos.

El término de retardo  $\Delta$  tiene su origen en fundamentalmente tres causas,

$$\Delta = \Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3$$

donde,

$\Delta_1$  es el tiempo requerido para que la información de velocidad relativa y separación llegue al conductor.

$\Delta_2$  es el tiempo que lleva la toma de decisión por el conductor.

$\Delta_3$  es el tiempo que tarda en hacer efectiva la respuesta.

### III.2. Estabilidad

El caso  $p = 0$  y  $l=m=0$  lleva a la ecuación:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = \lambda_0 \left[ x_{j-1}(t) - x_j(t) \right] \quad (\text{III.5})$$

y esta ecuación presenta una resonancia para la frecuencia

$$\omega = \sqrt{\lambda_0} \quad (\text{III.6})$$

Esto quiere decir que se produce una amplificación de las perturbaciones hacia la cola, lo que evidentemente hace que la ecuación (III.5) no corresponda a la realidad.

En el caso lineal, ecuación (III.3), su estudio muestra que las perturbaciones pequeñas se propagan hacia la cola con una velocidad

$$\lambda = \frac{\lambda_0}{d} \quad (\text{III.7})$$

siendo  $d$  el espaciamiento medio. La amplitud de la perturbación va decreciendo de acuerdo con

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \quad (\text{III.8})$$

Siendo  $n$  el número de vehículos contados a partir del origen de la perturbación.

Para perturbaciones grandes el estudio analítico muestra que no aparecen inestabilidades locales importantes si se cumple que

$$\lambda_0 \Delta < \frac{1}{e} \quad (\text{III.9})$$

Sin embargo, esta desigualdad no se verifica casi nunca en los experimentos de seguimiento hasta ahora realizados. Por esta razón, este modelo no es tampoco de gran interés práctico.

El caso no lineal, ecuación (III.4), es más difícil de tratar que los anteriores. Más adelante abordaremos su estudio mediante simulación en ordenador.

### III.3. Determinación empírica de $\lambda_0$ y $\Delta$

Los parámetros  $\lambda_0$  y  $\Delta$  pueden determinarse a partir de medidas experimentales. Aquí nos vamos a referir a unas medidas que pueden considerarse como clásicas y que son frecuentemente citadas. Desgraciadamente no tenemos noticias de que se hayan realizado medidas similares en nuestro país.

La experiencia a que nos referimos ha tenido lugar en las pistas de pruebas de la General Motors, así como en los túneles Holland y Lincoln en New York. Los vehículos están equipados con instrumental para la medida de la posición, la velocidad y la aceleración.

Llamando

$$v_r(t) = v_{j-1}(t) - v_j(t) \quad (\text{III.10})$$

$$d(t) = x_{j-1}(t) - x_j(t) \quad (\text{III.11})$$

Se puede escribir la expresión (III.4) en la forma

$$a(t + \Delta) = \lambda_0 \frac{v_r(t)}{d(t)} \quad (\text{III.12})$$

Mediante un ajuste por mínimos cuadrados de los valores medidos a la expresión anterior se obtuvieron los resultados indicados en la tabla III.1.

TABLA III.1

Lugar	Nº de conductores	$\lambda_0$ m/s	$\Delta$ s
Pista de prueba G.M.	8	12,25	1,5
T. Holland	10	8,13	1,4
T. Lincoln	16	9,07	1,2

Los coeficientes de correlación fueron superiores a 0,9 y despreciando algunos casos más desviados se llegó a 0,97.

Puede darse cuenta de la dispersión observada introduciendo un ruido acelerativo  $\beta(t)$  con lo que el modelo quedaría

$$\frac{d^2 x_j(t+\Delta)}{dt^2} = \lambda_0 \left[ \frac{v_{j-1}(t) - v_j(t)}{x_{j-1}(t) - x_j(t)} \right] + \beta(t) \quad (\text{III.13})$$

Nosotros, sin embargo, no vamos a ocuparnos de este modelo en la presente Memoria.

### III.4. Ecuación de estado

La integración de la ecuación (III.4.) nos lleva a:

$$v_j(t + \Delta) - \lambda_0 \ln d_j(t) = \text{cte}; \quad j = 1, \dots, N \quad (\text{III.14})$$

En lo sucesivo vamos a desprestigiar  $\Delta$  en los términos de velocidad, es decir admitiremos que las variaciones de flujo tienen lugar sobre una escala temporal mucho mayor que el tiempo de retardo.

Vamos a introducir la velocidad media de la línea como la media aritmética de las velocidades, es decir,

$$\bar{v}(t) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N v_j(t) \quad (\text{III.15})$$

y un espaciamento medio como la media geométrica de la separación entre los vehículos.

$$d(t) = \left[ \prod_{j=1}^N d_j(t) \right]^{\frac{1}{N}} \quad (\text{III.16})$$

A este espaciamiento asociamos una concentración  $c(t)$  dada por

$$c(t) = \frac{1}{d(t)} \quad (\text{III.17})$$

Sumando entonces (III.14) para todos los vehículos de la línea resulta

$$\bar{v}(t) + \lambda_0 \ln c(t) = \text{cte} \quad (\text{III.18})$$

la constante que aparece en esta expresión puede escribirse en función de la concentración de saturación.

Recordando que para  $c = c_s$  es, por definición,  $v = 0$  resulta

$$\text{cte} = \lambda_0 \ln e_s \quad (\text{III.19})$$

y por lo tanto

$$c(t) = c_s e^{-\frac{v}{\lambda_0}} \quad (\text{III.20})$$

O bien

$$v(t) = \lambda_0 \ln \frac{c_s}{c} \quad (\text{III.21})$$

Teniendo en cuenta que el flujo viene dado por

$$q(t) = v(t) c(t) \quad (\text{III.22})$$

podemos escribir usando (III.21)

$$q(t) = \lambda_0 c(t) \ln \frac{c_s}{c(t)} \quad (\text{III.23})$$

Las expresiones (III.21) y (III.23) definen la ecuación de estado y el diagrama fundamental del tráfico en el modelo de seguimiento que estamos considerando. Su forma cualitativa está de acuerdo con el comportamiento empírico discutido en el capítulo anterior presentando una intensidad máxima para el valor de la concentración

$$c_0 = \frac{c_s}{e} \quad (\text{III.24})$$

Al que le corresponde una velocidad "óptima"

$$v_0 = \lambda_0 \quad (\text{III.25})$$

Un test de este modelo se ha llevado a cabo con una muestra de 20.000 vehículos en el tunel Holland de New York. Los datos ajustan muy bien la ecuación (III.23) mediante elección adecuada de  $\lambda_0$  y  $c_s$ . La

comparación se representa en la figura III.1<sup>7),2)</sup>. Además en la tabla III.2 se dan los valores de  $\lambda_0$  obtenidos por ajuste a partir de varias experiencias así como la velocidad máxima observada experimentalmente en cada caso. Notese que de acuerdo con la ecuación (III.25) ambos valores deberían coincidir.

TABLA III.2

Lugar	$\lambda_0$ (m/s)	$v_{\max}$ (m/s) (exp.)
T. Lincoln	8,9	7,5
T. Holland	8,0	8,6
T. Queens Midtown	9,7	11,1

Como era de esperar en los túneles más modernos, con mejor superficie, alumbrado, etc, se obtienen valores mayores de  $v_{\max}$ .

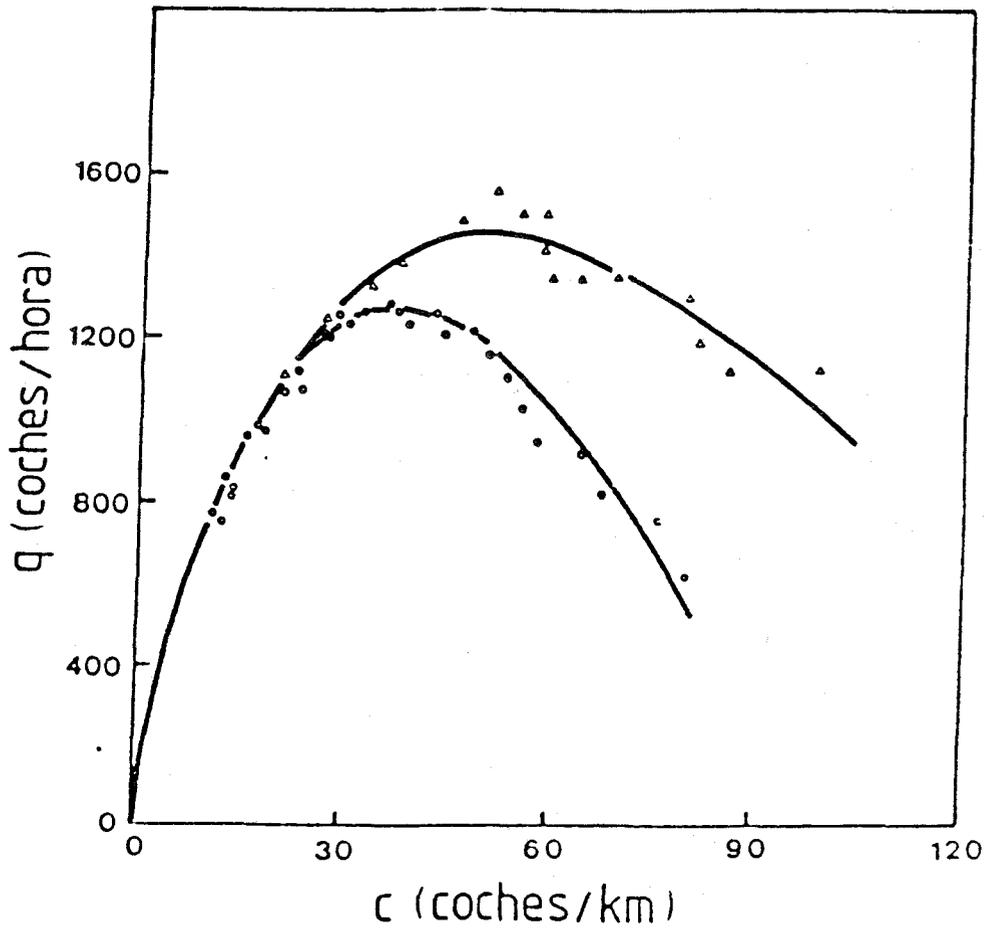


Fig. III.1 Flujo (coches/hora) frente a concentración (coches/Km) para los túneles Lincoln (curva superior) y Holland (curva inferior). Los puntos son medidas experimentales y las curvas continuas ajustes del modelo de seguimiento.

### III.5. Simulación del Modelo de Seguimiento

Consideremos las ecuaciones de movimiento en el modelo de seguimiento no lineal con  $\Delta = 0$ , es decir,

$$\frac{d^2 x_j(t)}{dt^2} = \lambda_0 \begin{bmatrix} v_{j-1}(t) - v_j(t) \\ x_{j-1}(t) - x_j(t) \end{bmatrix}; \quad j = 1, \dots, N \quad (\text{III.26})$$

Nosotros hemos simulado este modelo en el ordenador. La razón principal para ello era realizar un test del método de simulación y también analizar la influencia de las condiciones de contorno asociadas con el carácter finito del sistema.

En la simulación, el primer vehículo tiene la consideración de líder, y no se contabiliza para determinar las variables de tráfico (valores medios) y su movimiento viene determinado por una ley preestablecida.

Para la resolución del sistema de N ecuaciones se ha utilizado un método numérico combinación del método de Runge-Kuta de segundo orden con un método de corrección-predicción.

El diagrama de flujo empleado se anota en el apéndice B. En cada paso de tiempo de integración se calculan la velocidad media, la concentración y la intensidad del tráfico.

Los resultados obtenidos de la simulación concuerdan, como debía ser, con los teóricos. No nos extenderemos más aquí en la discusión de la comparación de ambos ya que ha sido realizada con anterioridad en otro trabajo<sup>3)</sup>.

Notemos que dividiendo los dos términos de la solución analítica del modelo, ecuación (III.23) por  $\lambda_0 c_s$ , resulta

$$\frac{q(t)}{\lambda_0 c_s} = \frac{c(t)}{c_s} = \ln \frac{c_s}{c(t)} \quad (\text{III.27})$$

Es decir, que si se utilizan las variables reducidas

$$y = \frac{q(t)}{\lambda_0 c_s} \quad ; \quad x = \frac{c(t)}{c_s} \quad (\text{III.28})$$

se tiene un diagrama fundamental de tráfico universal, en el sentido de que es independiente de los valores de  $\lambda_0$  y  $c_s$ .

Una de las ventajas que ofrece el modelo simulado es que permite el estudio de la propagación de perturbaciones en la línea de tráfico. En particular, nosotros hemos considerado un estado inicial homogéneo en el que todos los coches se mueven con velocidad

$v_o$ . En un instante dado, que se toma como  $t = 0$ , la velocidad del vehículo líder se perturba de acuerdo con la ley.

$$v_o(t) = \left[ v(0) + t \right] e^{-\beta t} \quad (\text{III.29})$$

que, como se ve, tiende a cero cuando  $t$  tiende a infinito.

### III. 6. Una aplicación del modelo de seguimiento del líder

Es difícil encontrar situaciones reales que correspondan a las condiciones que se ofrecen en los modelos de seguimiento. Una excepción la constituyen los túneles y puentes ya estudiados. Otro caso es el de conducción de columnas de vehículos, por ejemplo las militares y las de protección civil. Nosotros vamos a considerar aquí las primeras.

Sin entrar en consideraciones de tipo táctico, el reglamento de marcha y estacionamiento de nuestro Ejército<sup>33),34)</sup> establece para la formación de columnas los siguientes criterios:

	<u>Velocidad de los vehículos</u>	<u>Distancia mínima entre vehículos</u>
a)	Hasta 25 Km/h .....	25 metros
b)	De 25 a 50 Km/h.....	50 metros
c)	Más de 50 Km/h .....	100 metros

En caso de cumplirse la ecuación de estado analítica y tomando para la densidad de saturación el valor generalmente admitido de

$$c_s = 0,16 \text{ vehiculos/metro,}$$

resulta que la densidad de tráfico a la que se obtiene la máxima intensidad es

$$c = \frac{c_s}{e} \approx 0,059 \text{ veh\u00edculos/metro}$$

A este valor le corresponde un espaciamiento  $d = 17$  metros. Considerando un valor t\u00edpico de  $\lambda_0 = 10$  m/s dicha intensidad m\u00e1xima ser\u00e1

$$q = \frac{\lambda_0 c_s}{e} = \frac{10 \cdot 0,16}{e} = 0,6 \text{ veh\u00edculos/segundo}$$

Es interesante comparar este valor con los que se obtienen a partir de los criterios citados anteriormente. Utilizando la definici\u00f3n de intensidad,  $q = vc$ , se obtiene

- a)  $q = 0,28$  veh\u00edculos/segundo
- b)  $q = 0,28$  veh\u00edculos/segundo
- c)  $q = 0,14$  veh\u00edculos/segundo

Como se ve estos valores son bastantes inferiores al valor m\u00e1ximo. Desde luego esta discusi\u00f3n es meramente cualitativa ya que los valores de  $c_s$  y  $\lambda_0$  que se deber\u00edan utilizar ser\u00edan los determinados emp\u00edricamente y correspondiendo por tanto a la columna objeto del estudio.

En este sentido una experiencia de gran inter\u00e9s y que no tenemos noticias de que se halla realizado ser\u00eda la determinaci\u00f3n de los par\u00e1metros del modelo correspondiente a una situaci\u00f3n de conducci\u00f3n de una

columna militar nocturna<sup>35),36),37)</sup>.

A fin de estudiar la propagación de una perturbación en una columna y la influencia que sobre esta propagación tienen los parámetros que definen la columna, hemos simulado cuatro columnas de tráfico con las siguientes características.

Caso a) corresponde al caso a) de las recomendaciones antes citadas. Hemos tomado

$$v = 6,9 \text{ m/s}$$

$$d = 25 \text{ m}$$

Caso b) corresponde al caso b) de las recomendaciones, con

$$v = 13,8 \text{ m/s}$$

$$d = 50 \text{ m}$$

Caso c) corresponde al caso c) de las recomendaciones, con

$$v = 20 \text{ m/s}$$

$$d = 100 \text{ m}$$

Caso d) intenta simular las condiciones óptimas de intensidad de tráfico. Consecuentemente se toma

$$v = \lambda_0 = 10 \text{ m/s}$$

$$d = 17 \text{ m}$$

Para cada uno de los casos anteriores se han considerado tres valores del parámetro .

1)  $\beta = 0,05$

que puede asociarse a una perturbación suave, normal en la conducción.

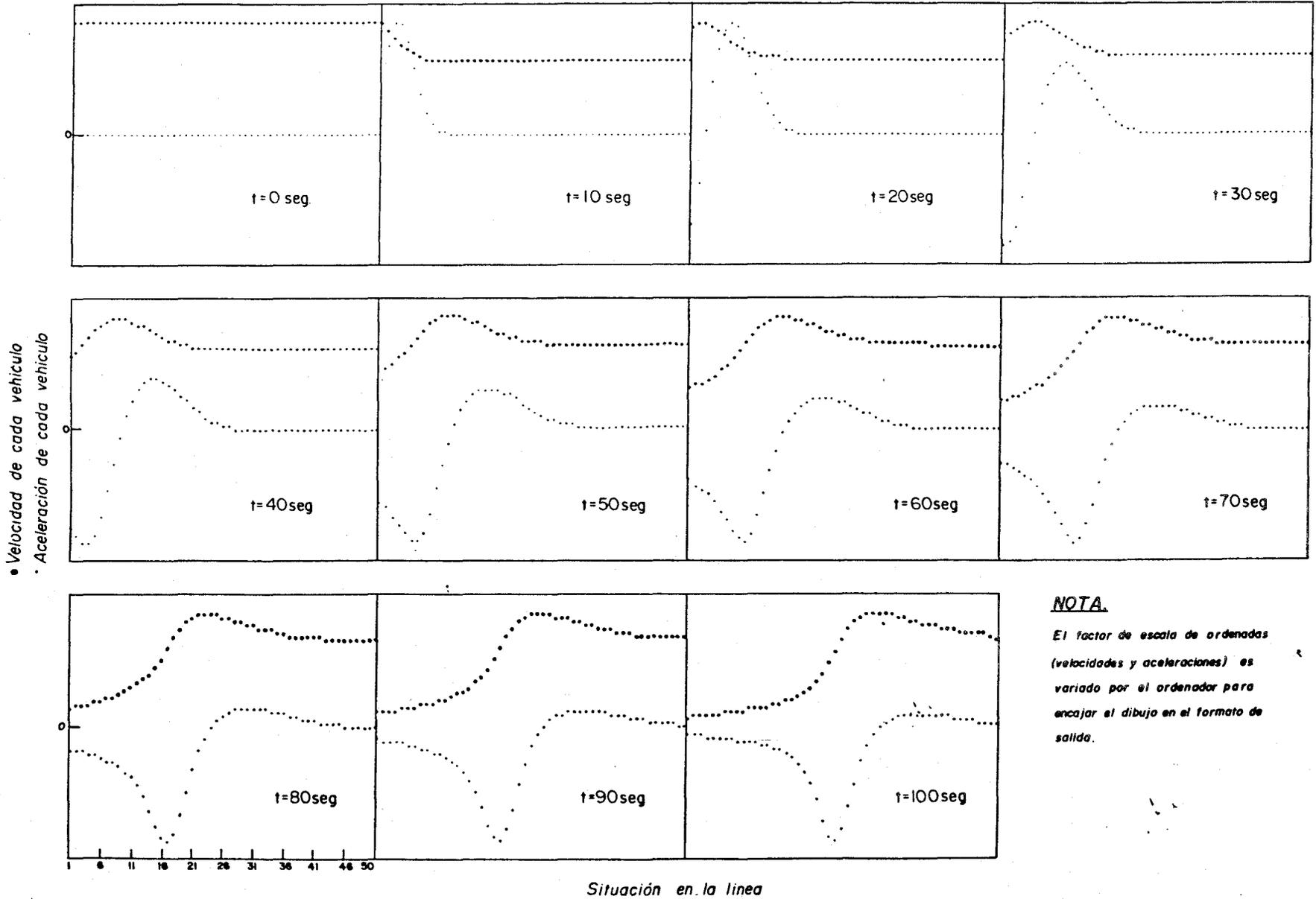
2)  $\beta = 0,5$

que representa una perturbación grande, por ejemplo, sería frenada no muy brusca en la conducción

3)  $\beta = 3$

Que es, esencialmente una frenada brusca. Como ejemplo de los resultados obtenidos en la figura III.2. se representa la distribución espacial de las velocidades y aceleraciones de los coches para distintos instantes, para el caso b con  $\beta = 0,5$  la evolución de la distribución de velocidades de los vehículos permite estimar la velocidad de propagación de la perturbación a lo largo de la línea. Los valores obtenidos se presentan en la tabla III 3.

Fig. III.2. Evolución de la distribución espacial de velocidades en el caso de un vehículo líder con la ley (III.29.).



**TABLA III.3**

---

**Velocidad de propagación de la perturbación (vehículos/segundo)**

---

<b>Perturbación</b>	<b>D</b>	<b>A</b>	<b>B</b>	<b>C</b>
$\beta = 0,05$	0,5	0,3	0,3	0,2
$\beta = 0,5$	0,9	0,6	0,4	0,25
$\beta = 3$	0,9	0,5	0,35	0,24

---

A la vista de estos resultados es difícil establecer una relación entre la velocidad de propagación de una perturbación y su intensidad. Parece, eso sí, que las perturbaciones muy pequeñas se propagan con menor velocidad que las perturbaciones fuertes. Más clara es la relación que existe entre el espaciamiento de la línea y la propagación de una perturbación. Cuanto mayor es la separación de los vehículos más lenta es la propagación de la perturbación, cosa que por otro lado era de esperar. En cualquier caso este es otro de los puntos de esta Memoria que quedan abiertos para un estudio posterior más sistemático.

### III.7. Modelo de seguimiento con adelantamiento

El modelo de seguimiento discutido desprecia cualquier posibilidad de adelantamiento entre los vehículos, lo cual restringe notablemente su campo de aplicación.

Recientemente<sup>3)</sup> se ha propuesto una modificación de los modelos de seguimiento, tratando de incorporar en los mismos unos mecanismos de adelantamiento entre vehículos. Discutiremos aquí someramente las ideas en que se basa dicha modificación.

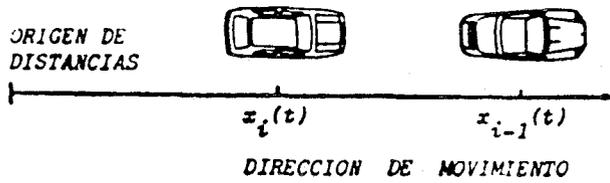
El proceso de adelantamiento viene caracterizado en el modelo por dos parámetros,  $P$  y  $D_s$ , midiendo respectivamente la probabilidad de que se produzca un adelantamiento y una distancia en la que entra en juego el mecanismo de adelantamiento.

Cuando un vehículo circula a una velocidad mayor que la del que le precede, se admite que existe una probabilidad  $P$  de que inicie un proceso de adelantamiento. Si tal proceso se produce, el vehículo comienza entonces a moverse con velocidad constante, y no obedece las ecuaciones de seguimiento. El modelo supone que un proceso de adelantamiento puede abortarse en cualquier instante mientras la distancia entre el vehículo que va a adelantar y el que es adelantado sea mayor que  $D_s$ , pero que una vez que esta distancia es menor que  $D_s$  el proceso ya no se interrumpe. En otras palabras un vehículo que se encuentra a una distancia menor que  $D_s$  del que le precede se mueve siempre con velocidad constante. El mecanismo se representa

esquemáticamente en la fig. III.3.

La principal consecuencia de la introducción de los adelantamientos es una modificación del valor de la constante que aparece en la ecuación (III.18). Más concretamente lo que sucede es lo siguiente. Con la introducción de las condiciones iniciales se especifica un valor de dicha constante. Si no hubiese adelantamientos ese valor sería realmente constante en el tiempo. El efecto de los adelantamientos es producir una evolución de dicho valor hacia valores mayores, reflejando el hecho intuitivo de que cuanto más fácil sea adelantar más fluido debe ser el tráfico en la línea. Pasado un cierto período de tiempo el flujo alcanza un valor estacionario y también lo hace la constante. En estas condiciones, aunque se producen adelantamientos su influencia es pequeña y el sistema obedece una ley de seguimiento efectiva.

No entramos en más detalles acerca de este modelo ya que ha sido extensivamente discutido en la referencia 3.



$$[x_{i-1}(t) - x_i(t)] < D_0 \Rightarrow x_i(t+\Delta t) = x_i(t) + v_i(t) \Delta t$$

$$[x_{i-1}(t) - x_i(t)] \geq D_0 \quad \vee \quad \left\{ \begin{array}{l} [v_{i-1}(t) - v_i(t)] > 0 \Rightarrow \text{El coche } i \text{ se mueve} \\ \text{entre } t \text{ y } t+\Delta t \text{ por} \\ \text{SEGUIMIENTO} \\ \\ [v_{i-1}(t) - v_i(t)] \leq 0 \quad \vee \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Prob.} = 1-P \Rightarrow \\ \text{SEGUIMIENTO} \\ \\ \text{Prob.} = P \Rightarrow \\ x_i(t+\Delta t) = x_i(t) + v_i(t) \Delta t \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Fig. III.3. Mecanismo de interacción en el modelo de Seguimiento con Adelantamiento.

#### **IV. MODELO CINETICO**

## IV. MODELO CINETICO

### IV.1. Función de distribución de velocidades

El tráfico en condiciones de baja densidad se comporta como un flujo de vehículos aislados mientras que a densidades altas se producen los fenómenos de interacción y adelantamientos entre vehículos. Una característica importante de estas interacciones es su carácter fundamentalmente binario, es decir, que los vehículos interaccionan de dos en dos, pudiéndose despreciar las interacciones múltiples por alta que sea la concentración. Este comportamiento sugiere una analogía con el comportamiento de los gases diluidos tal y como se estudian en la teoría cinética de los gases. Esta idea llevó a Prigogine<sup>20)</sup> y sus colaboradores a desarrollar una formulación del tráfico en forma de una ecuación cinética basada en argumento similares a los que se utilizan para derivar la famosa ecuación de Boltzman<sup>16)19)</sup>.

La cantidad esencial de la teoría es la función de distribución  $f(x,v,t)$  que es proporcional a la densidad de probabilidad de encontrar un vehículo con la posición  $x$  con velocidad  $v$  en un cierto instante  $t$ . Esta función está realizada de forma que el número medio de vehículos  $dN$  en un intervalo de posiciones y velocidades dado es

$$dN = f(x,v,t) dx dv \quad (IV.1)$$

A partir de  $f(\vec{r}, \vec{v}, t)$  pueden calcularse,

- la densidad o concentración

$$c(x, t) = \int_0^{\infty} dv f(x, v, t) \quad (\text{IV.2})$$

- la intensidad o flujo local

$$q(x, t) = c(x, t) \bar{v}(x, t) = \int_0^{\infty} dv v f(x, v, t) \quad (\text{IV.3})$$

siendo  $\bar{v}(x, t)$  la velocidad media local.

También se pueden determinar la dispersión de velocidades y en general los momentos de orden  $n$  de la velocidad.

La función  $f$ , en el caso que nos ocupa del tráfico, puede medirse experimentalmente. Sin embargo, no tenemos noticias de que se hayan realizado medidas de este tipo en España. Solo conocemos las medidas, ya clásicas, realizadas en Lansing en un tramo de carretera sin entradas ni salidas de 3,5 millas y en condiciones estacionarias. Los resultados obtenidos se muestran en la figura IV.1. Notemos que cualitativamente las distribuciones son de forma gaussiana.

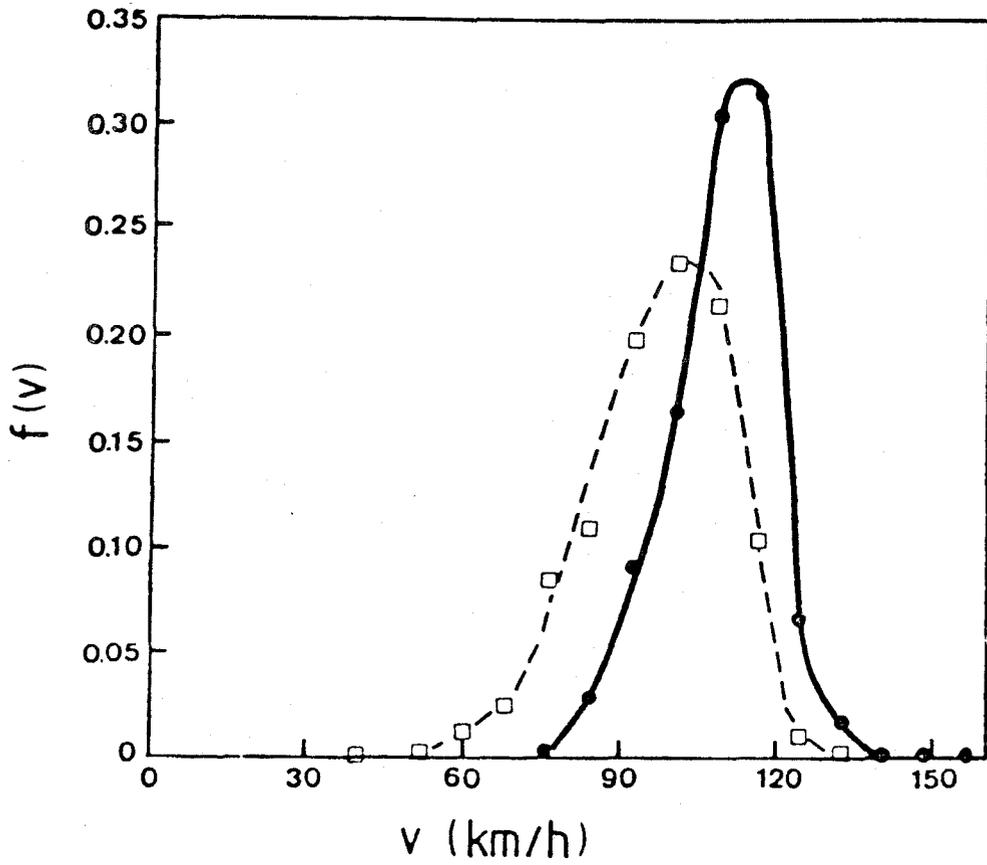


Fig. IV.1. Función de distribución de velocidades estacionaria observada  $f(v)$ . Los datos se obtuvieron sobre un tramo de 3.5 millas en la ciudad de Lansing, carretera I.96, donde no había ni entradas ni salidas. Los puntos negros representan  $f(v)$  para la línea de la izquierda (644 coches) y los cuadrados, línea derecha (782 coches).

## IV.2. Función de distribución de velocidades deseadas

Uno de los puntos más originales de la teoría es la introducción de otra función de distribución representada por  $f_0(x,v,t)$  y denominada "función de distribución deseada", caracterizando los deseos de los conductores de cada vehículo. Más concretamente,

$$dN_0 = f_0(x,v,t) dx dv$$

representa el número de vehículos cuyos conductores desean en el instante  $t$  y en el intervalo de carretera  $dx$ , circular con una velocidad comprendida entre  $v$  y  $v + dv$ .

Si suponemos que la concentración es muy baja y, por tanto, que la interacción entre vehículos es despreciable, podemos esperar que las velocidades de los vehículos relajaran hacia la función de distribución de velocidades deseadas. No es posible determinar de forma precisa que ley de relajación es la que siguen, dado el gran número de factores que intervienen. Sin embargo, siguiendo la analogía cinética de los gases, se usa por simplicidad, una ley exponencial, que en este caso toma la forma:

$$\left( \frac{\partial f}{\partial t} \right)_{\text{sin interacciones}} = - \frac{f - f_0}{T} \quad (\text{IV.5})$$

siendo,  $T$ , un tiempo característico de relajación que se admite que es independiente de la posición y de la velocidad. En consecuencia, este parámetro no está individualizado para cada vehículo, sino que es tratado en el modelo cinético como una variable macroscópica media. Evidentemente esto supone una simplificación de la realidad, donde cada vehículo relajará a su velocidad deseada en una forma que dependerá de su entorno inmediato (concentración local) y de su propia velocidad y de la de los vehículos en su entorno. Además, en el modelo cinético se admite que el tiempo característico de relajación viene dado por:

$$T = \frac{\tau c}{c_s - c} \quad (\text{IV.6})$$

donde  $c$  es la concentración de la línea de tráfico,  $c_s$  es la concentración de saturación y  $\tau$  es un tiempo característico independiente de la concentración.

Notemos que, según (IV.6),  $T$ , tiende a cero cuando lo hace la concentración, mientras que diverge a infinito cuando  $c$  tiende a  $c_s$ . Evidentemente, esta ecuación no tiene en cuenta las limitaciones técnicas debidas a las prestaciones de cada vehículo, sino que se admite la posibilidad, a bajas concentraciones, de alcanzar aceleraciones tan altas como se quiera.

La integración de la ecuación (IV.5) nos lleva

$$f(v,t) = f_0(v) + \left[ f(v,0) - f_0(v) \right] e^{-\frac{t}{T}} \quad (\text{IV.7})$$

Suponiendo para simplificar que los deseos de los conductores son independientes de la concentración y sólo se expresan subconscientemente en términos de velocidad, se puede escribir que

$$f_0(x,v,t) = c(x,t) \tilde{f}_0(v) \quad (\text{IV.8})$$

donde todo el deseo de los conductores está contenido en la función de distribución de velocidades  $\tilde{f}_0(v)$ .

Así pues, en el caso de concentraciones diluidas, aparecen dos efectos diferenciados: uno de tendencia a la homogeneización espacial y otro debido a la relajación de velocidades. Las escalas de tiempo que gobiernan estos dos procesos son muy diferentes; mientras que la relajación de velocidades es de orden de unos segundos, el tiempo que mide la homogeneización es mucho más largo, de forma que podemos escribir  $t \gg T$ .

### IV.3. Estudio de la influencia de las interacciones

Aumentemos ahora la concentración. Se comenzará a poner de manifiesto la influencia de las interacciones entre los vehículos, provocándose la aparición de adelantamientos y, en último término, la retención por vehículos lentos y la formación de columnas. Incorporando al modelo un término de interacción, y utilizando la hipótesis, ya citada, de aditividad, se puede escribir:

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + v \frac{\partial f}{\partial x} = \left( \frac{df}{dt} \right)_{\text{rel.}} + \left( \frac{df}{dt} \right)_{\text{int.}} \quad (\text{IV. 9})$$

Puede encontrarse una expresión para el término de interacción, razonando del modo siguiente. La variación del número de vehículos en el intervalo  $dx$ ,  $dv$  durante el tiempo  $dt$  debido a las interacciones lo escribimos como

$$\left[ \frac{\partial f}{\partial t} \right]_{\text{int.}} dx dv dt = G - D \quad (\text{IV. 10})$$

Siendo  $G$  el número de vehículos que "entran" y  $D$  el que "salen" del intervalo de posiciones y velocidades considerado.

Si caracterizamos mediante el subíndice  $i$  a los vehículos que estaban inicialmente en  $dx dv$ , y usamos el subíndice  $j$  para los que inicialmente estaban fuera de él, una interacción entre dos vehículos  $i$  y  $j$  sólo contribuirá a  $D$  cuando  $v_i$  sea mayor que  $v_j$ . Sólo en este caso  $v_i$  disminuirá su velocidad acomodándose a la del vehículo  $j$  y saliendo por tanto de nuestro intervalo de velocidades. Estamos despreciando por ahora la posibilidad de que tengan lugar adelantamientos. Así pues, el número de vehículos que inicialmente estaban en el intervalo y que se salen del mismo debido a las interacciones que tienen lugar en  $dt$  se obtiene multiplicando el número de vehículos que hay inicialmente por el flujo de vehículos del tipo  $j$  que entran en  $dx$  con velocidades menores que  $v_i$ . De esta forma el término de pérdida  $D$  será

$$D = dx dv dt f(x_i v_i t) \int_0^{v_i} dv_j f(x v_j t) (v_i - v_j) \quad (\text{IV.11})$$

Procediendo de forma análoga, se encuentra para el término ganancias  $G$ ,

$$G = dx dv dt f(x v_i t) \int_{v_i}^{\infty} dv_j f(x v_j t) (v_j - v_i) \quad (\text{IV.12})$$

Sustituyendo y eliminando subíndices se obtiene finalmente,

$$\left[ \frac{\partial f}{\partial t} \right]_{\text{int.}} = f \bar{v} c - f v c = f c (\bar{v} - v) \quad (\text{IV.13})$$

Hasta aquí se ha supuesto que toda interacción lleva consigo una acomodación de velocidades, sin tener en cuenta la posibilidad de adelantamiento. Si suponemos que existe una probabilidad de adelantar  $P$ , la probabilidad de que se produzca la interacción anteriormente calculada será  $1 - P$ , es decir

$$\left[ \frac{\partial f}{\partial t} \right]_{\text{int.}} = (1 - P) f c (\bar{v} - v) \quad (\text{IV.14})$$

ya que si hay adelantamiento, no hay interacción.

Esta probabilidad de adelantar,  $P$ , Prigogine la supone, al igual que el tiempo característico de relajación  $T$ , independiente de la posición y de la velocidad de los vehículos. Es por tanto también una variable media, que se supone que depende de la concentración de la línea. En un modelo más real parece lógico pensar que la probabilidad de adelantar depende de las condiciones locales del vehículo que se considera y también de su velocidad deseada. En todo caso, en el modelo cinético que estamos discutiendo se supone que

$$P = 1 - \frac{c}{c_s} \quad ; \quad c \leq c_s$$

(IV.15)

$$P = 0 \quad ; \quad c > c_s$$

Sustituyendo las expresiones obtenidas y teniendo en cuenta la hipótesis de aditividad ya anunciada, se llega a la ecuación cinética:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v \frac{\partial f}{\partial x} = - \frac{f - f_0}{T} + (1 - P) fc (\bar{v} - v) \quad (\text{IV.16})$$

que es una ecuación integro-diferencial no lineal. Aquí no nos detenemos en un análisis de las consecuencias a que lleva esta ecuación, ni de sus limitaciones, ya que ambos puntos han sido extensivamente discutidos con anterioridad<sup>3)20)</sup>.

#### IV.4. Un modelo cinético de simulación de tráfico

El modelo cinético que vamos a describir a continuación está basado en el modelo de ecuación cinética discutido en el apartado anterior. Sin embargo, es importante destacar que las dinámicas de ambos modelos son bastantes diferentes.

El modelo se basa en la idea de que en ausencia de interacciones cada vehículo tiende a relajar exponencialmente a su velocidad deseada de acuerdo con la ley

$$\left( \frac{d v_j}{dt} \right)_{\text{sin interacciones}} = - \frac{v_j(t) - v_{0j}}{T} ; \quad j = 1, \dots, N \quad (\text{IV.17})$$

donde  $v_{0j}$  es la velocidad deseada del vehículo  $j$  y  $T$  un tiempo característico de relajación que se admite que viene dado por la expresión (IV.6), en la que recordamos que  $\tau$  es un tiempo característico independiente de la concentración. Desde luego, la expresión de  $T$  se podría implementar adoptando una forma que dependiese de la velocidad del vehículo, así como de las características del entorno en que se encuentra.

Ahora es necesario incorporar las interacciones entre vehículos. En el modelo ello se hace del modo que exponemos a continuación, supongamos que un vehículo  $j$  de la línea de tráfico tiene una velocidad

deseada mayor que el le precede  $j - 1$ . El mecanismo descrito por (IV.17) llevaría a que el segundo vehículo acabaría por adelantar al primero con toda seguridad. En el modelo dicho adelantamiento sólo tiene lugar en una cierta probabilidad  $P$  que especificaremos más adelante.

En la práctica esto se hace del modo siguiente. Si al aplicar la ecuación de relajación para desplazar los vehículos en el intervalo comprendido entre  $t$  y  $t + \Delta t$  resulta que el vehículo  $j$  ha adelantado al vehículo  $j - 1$ , este resultado se dá por válido con una probabilidad  $P$ . Si, al efectuar el correspondiente sorteo, sale que el adelantamiento no se produce, al vehículo  $j$  se le asigna la velocidad del vehículo  $j - 1$  y una posición dada por

$$x_j(t + \Delta t) = \frac{x_{j-1}(t + \Delta t) + x_j(t)}{2}$$

El mecanismo de adelantamiento se muestra esquemáticamente en la figura (IV.2) y el diagrama de flujo de la simulación del modelo en ordenador se dá en el apéndice C.

Para la posibilidad de adelantar,  $P$ , hemos utilizado la misma expresión que en el modelo de ecuación cinética, es decir la ecuación (IV.16). De acuerdo con lo que ya hemos señalado reiteradamente el modelo

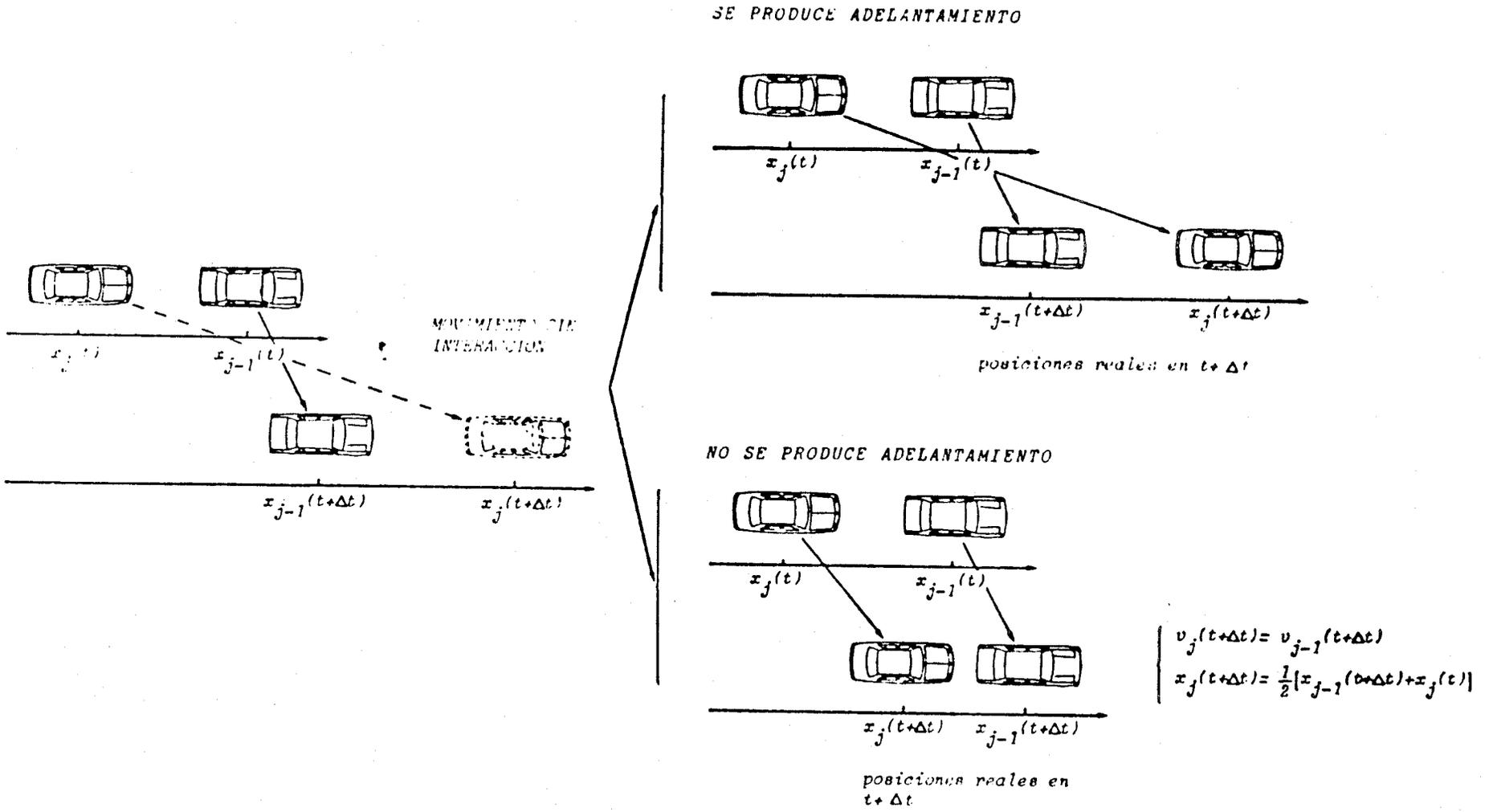


Fig. IV. 2. Mecanismo de interacción en el modelo Cinético con Velocidad Deseada

puede mejorarse en un futuro considerando una expresión de esta probabilidad de carácter más individual.

Para aplicar el modelo es necesario especificar además de las correspondientes constantes, las velocidades deseadas de los vehículos, lo cual se hace admitiendo que viene dada por una cierta ley de distribución.

En los estudios de este modelo que se han presentado hasta la fecha se ha considerado siempre una situación en que los deseos de los conductores eran coincidentes, en el sentido de que la función de distribución de velocidades deseadas era sencilla, por ejemplo una gaussiana. Esto viene a representar que los conductores pretenden ir a una misma velocidad media, naturalmente con la correspondiente dispersión. En esta memoria presentamos resultados para el caso de que la función de distribución es doble en el sentido de que las velocidades deseadas de una parte de los conductores viene dada por una cierta función de distribución y la de los otros por otra distribución distinta. La idea es representar mediante modelos una situación en que por la misma vía circulan dos clases de poblaciones de vehículos; unos rápidos y otros lentos. El objetivo será determinar la influencia mutua que ejercen ambas poblaciones.

**V. APLICACION DEL MODELO CINETICO A POBLACIONES MEZ-  
CLADAS DE VEHICULOS LENTOS Y RAPIDOS**

## V. APLICACION DEL MODELO CINETICO A POBLACIONES MEZCLADAS DE VEHICULOS LENTOS Y RAPIDOS

### V.1. Introducción

En este capítulo, utilizando el modelo cinético ya discutido, vamos a estudiar la simulación del tráfico vehicular formado por dos poblaciones mezcladas, una de vehículos rápidos y otra de vehículos lentos. Esta situación puede corresponder, por ejemplo, al comportamiento del tráfico cuando coincide un flujo de carretera nacional con los flujos locales en las cercanías de un núcleo urbano, cuyas velocidades deseadas son evidentemente diferentes. También puede servir este tipo de simulación para representar el tráfico a que dan lugar dos colectividades muy distintas de vehículos al interferir en la carretera, por ejemplo, turismos y camiones.

En la simulación del modelo se ha considerado un circuito cerrado con condiciones periódicas de contorno, es decir todos los vehículos tienen uno delante. A diferencia del modelo de seguimiento no es posible ahora considerar una línea abierta ya que al cabo de un cierto tiempo los vehículos se ordenarían de acuerdo con su velocidad deseada alejándose entre sí. Evidentemente esto no corresponde a un flujo real estacionario de vehículos entre dos localidades.

Además se ha considerado un valor de la constante del tiempo de relajación  $\tau = 2$  segundos, mientras

que para la densidad de saturación usamos  $c_s = 0,16$  vehículos/metro. Estos valores se han tomado de la bibliografía y son del orden de las medidas experimentalmente.

En el instante inicial los vehículos se colocan equidistantes siendo su posición en la línea de tráfico fijada por sorteo. En cuanto a las velocidades iniciales se les asignó de acuerdo con una distribución de Gauss o normal, con una velocidad media  $\bar{v} = 30$  m/s y una varianza  $\sigma = 5$  m/s.

Como ya hemos indicado, el objetivo era estudiar un sistema compuesto por una mezcla de vehículos lentos y rápidos. En el modelo el concepto de "rapidez" viene ligado a la velocidad deseada. En la realidad puede depender de las características técnicas de los vehículos, de su carga, del estado psíquico de los conductores o simplemente de la prisa que tengan. Nosotros hemos considerado una proporción 70/30 de vehículos rápidos respecto de lentos. A ambos conductores se les han asignado velocidades distribuidas de forma normal o gaussiana con varianza 2 m/s. Sin embargo el 70% de vehículos rápidos tenían una velocidad media de 40 m/s, mientras que la velocidad media del 30% de vehículos lentos era solo 10 m/s.

Digamos también que el paso de tiempo en la simulación fué  $\Delta t = 0,1$  segundo. La asignación de velocidades y posiciones de acuerdo con las distribuciones indicadas se realizó utilizando un procedimiento de Montecarlo standard. Es importante señalar que inicialmente los vehículos lentos y rápidos se mezclaron aleatoriamente.

El número total de vehículos considerados ha sido 500. Esta es una muestra suficientemente grande como para garantizar errores estadísticos relativos pequeños. Además, muestras mayores requerirían unos tiempos de ordenador que están fuera de nuestras posibilidades actuales.

La densidad se controla variando el espaciado inicial entre los vehículos o, en otras palabras, la longitud del circuito cerrado de tráfico.

## V.2. DIAGRAMA DE TRAFICO PARA EL MODELO DE POBLACIONES MEZCLADAS

En las figuras (V.1) a (V.9) se presentan los resultados obtenidos para la evolución de la velocidad media de la línea para distintos valores de la concentración reducida definida como  $\eta = c/c_s$ . Notese las distintas escalas utilizadas en el eje de velocidades.

Se observa en todos los casos que la velocidad media decae hacia un valor estacionario alrededor del cual fluctua. El tiempo característico de la relajación aumenta al aumentar la concentración. Así, mientras que para  $\eta = 0,1$  podemos estimar que la velocidad media alcanza su valor estacionario para un tiempo del orden de la unidad, este tiempo se vuelve del orden de 56 segundos para  $\eta = 0,9$ . En la tabla (V.1) se dan los valores estimados de estos tiempos, así como de los tiempos intrínsecos de relajación asociados con la distribución deseada y calculados mediante la expresión (IV.6), o sea

$$T = \tau \frac{c}{c_s - c} = \tau \frac{1 - P}{P}$$

Recordemos que la densidad influye en el modelo controlando tanto la probabilidad de adelantar como el tiempo intrínseco de relajación.

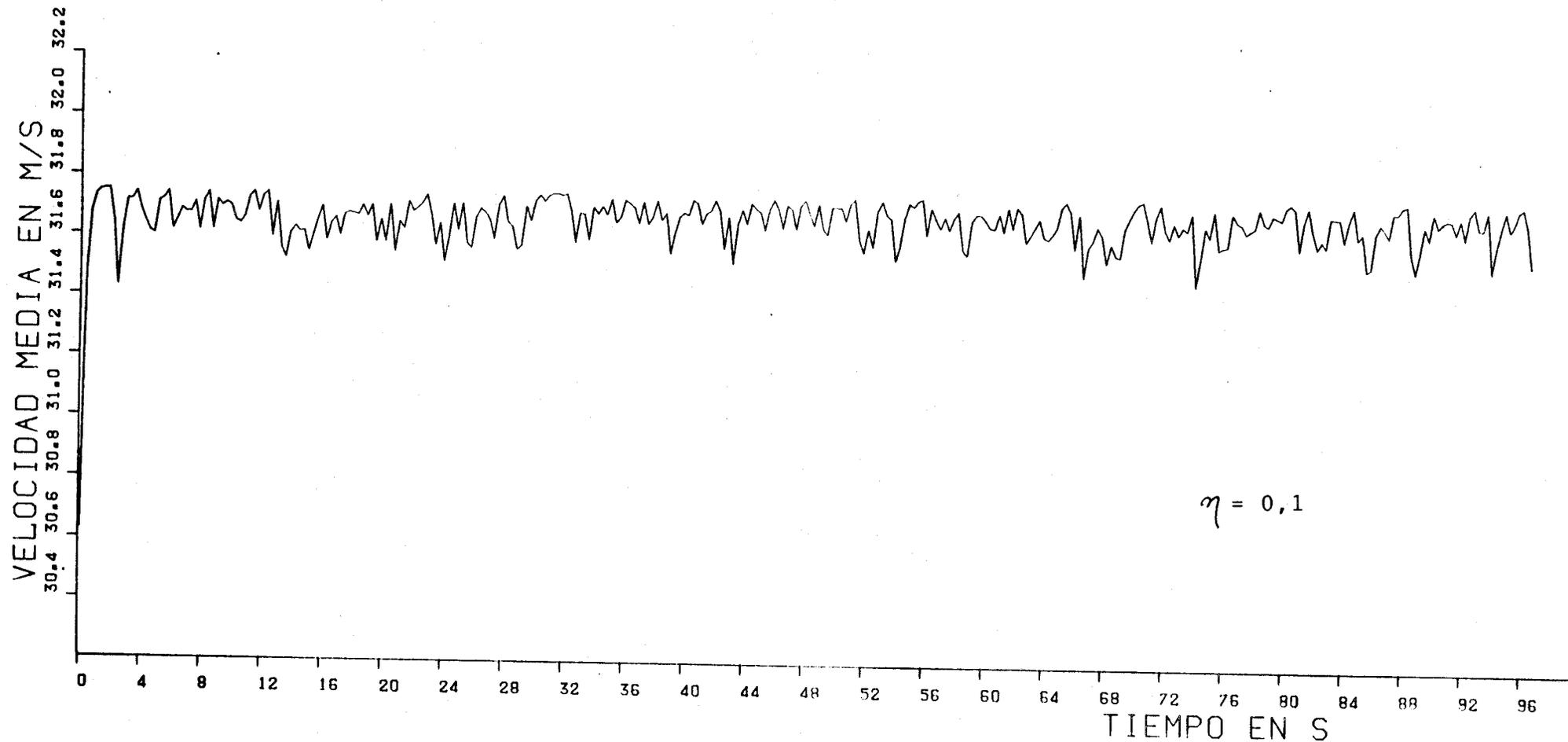


Fig.V.1. Evolución de la velocidad media para una línea de tráfico de densidad reducida  $\eta = 0,1$ , compuesta por 350 vehículos rápidos con velocidad media deseada  $\bar{v}_1 = 40\text{m/s}$  y 150 vehículos lentos con velocidad media deseada  $\bar{v}_2 = 10\text{m/s}$ . Los demás detalles de la simulación se indican en el texto.

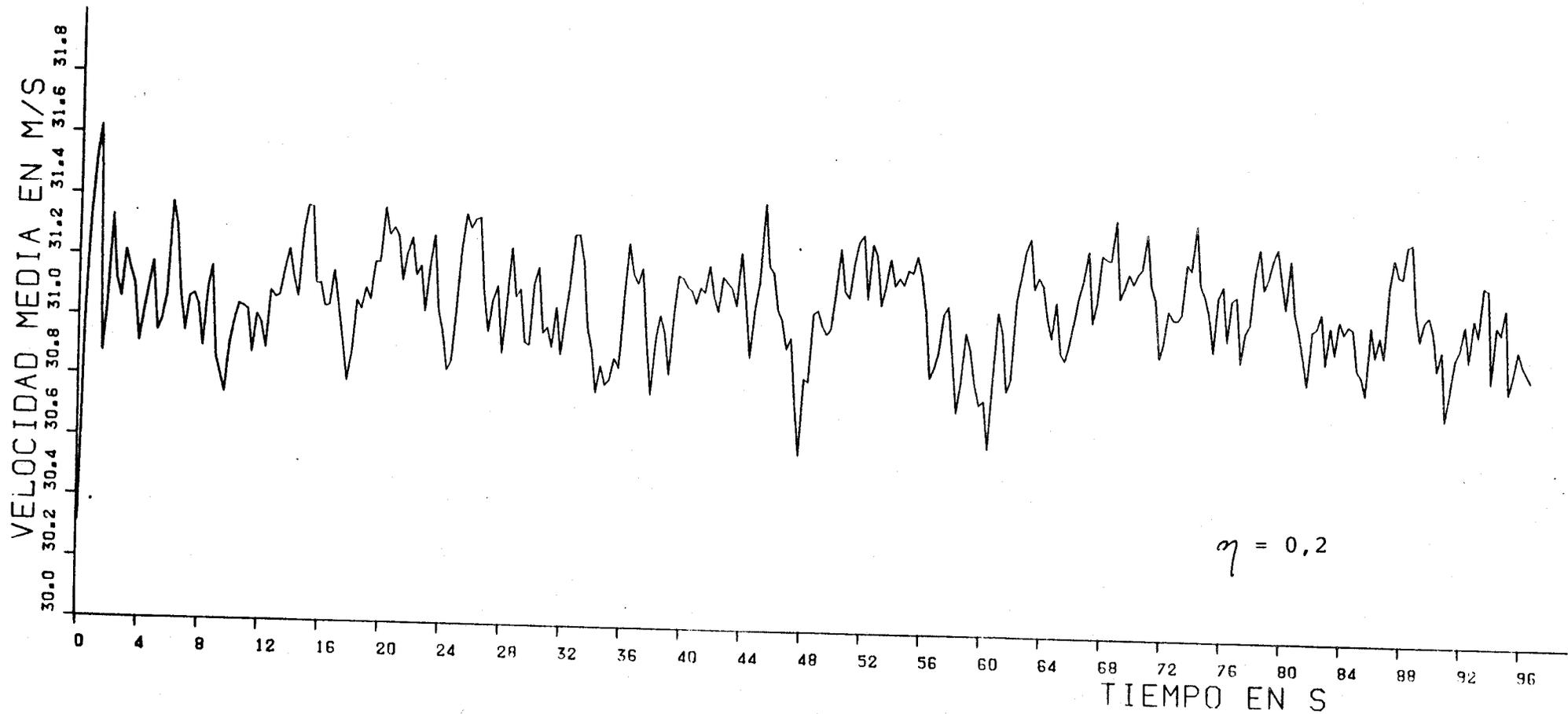


Fig.V.2. Lo mismo que la figura V.1. pero con  $\eta = 0,2$ .

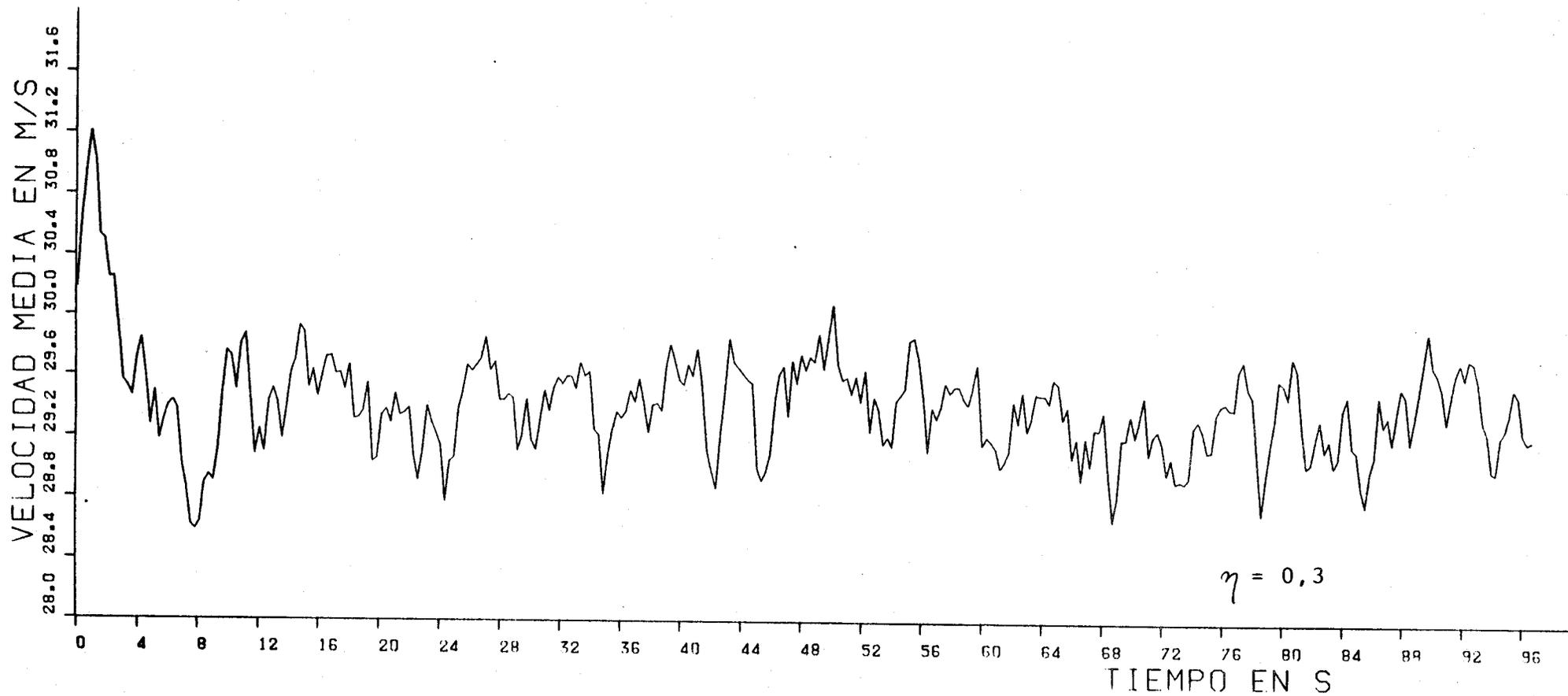


Fig.V.3. Lo mismo que la figura V.1. pero con  $\eta = 0,3$ .

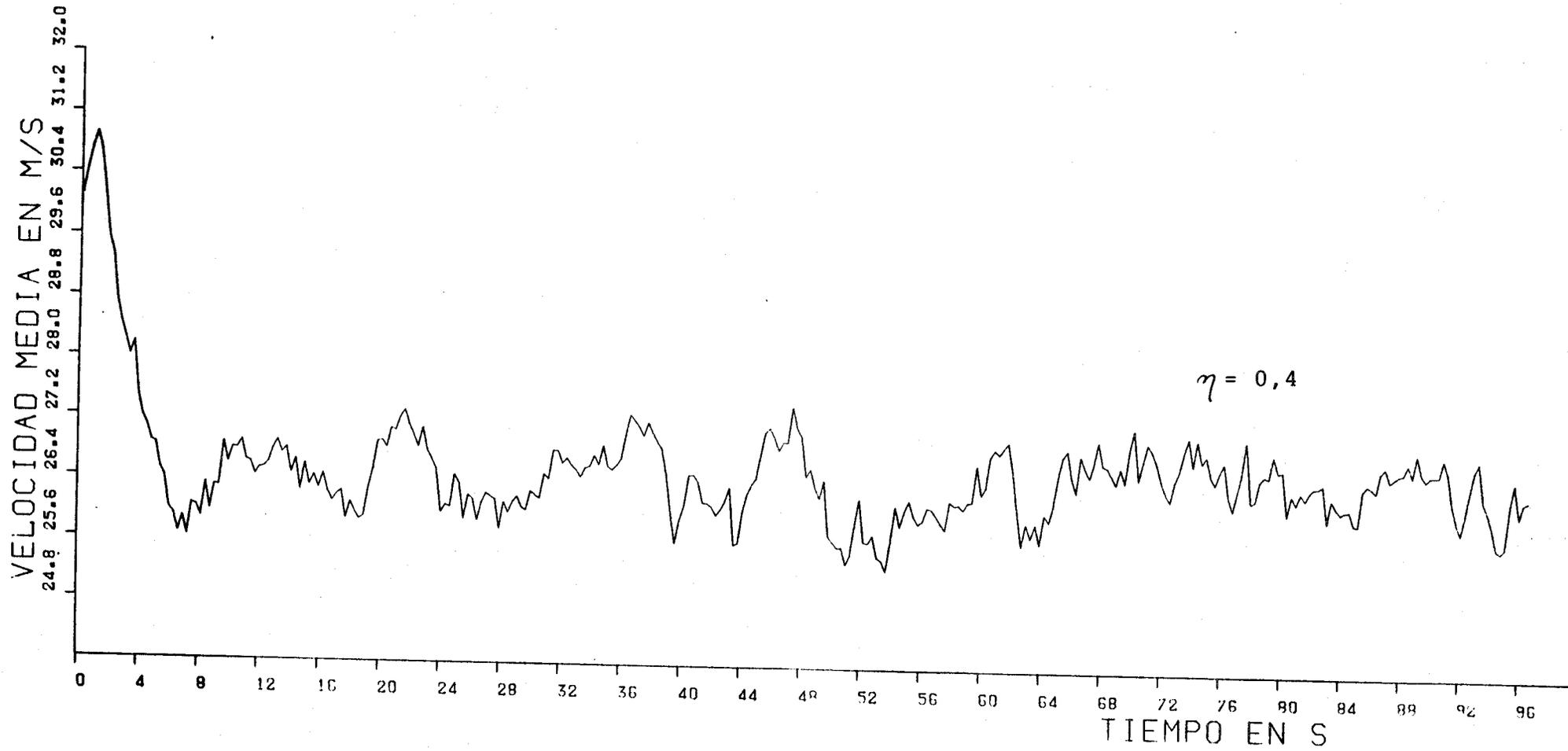


Fig.V.4. Lo mismo que la figura V.1. pero con  $\eta = 0,4$ .

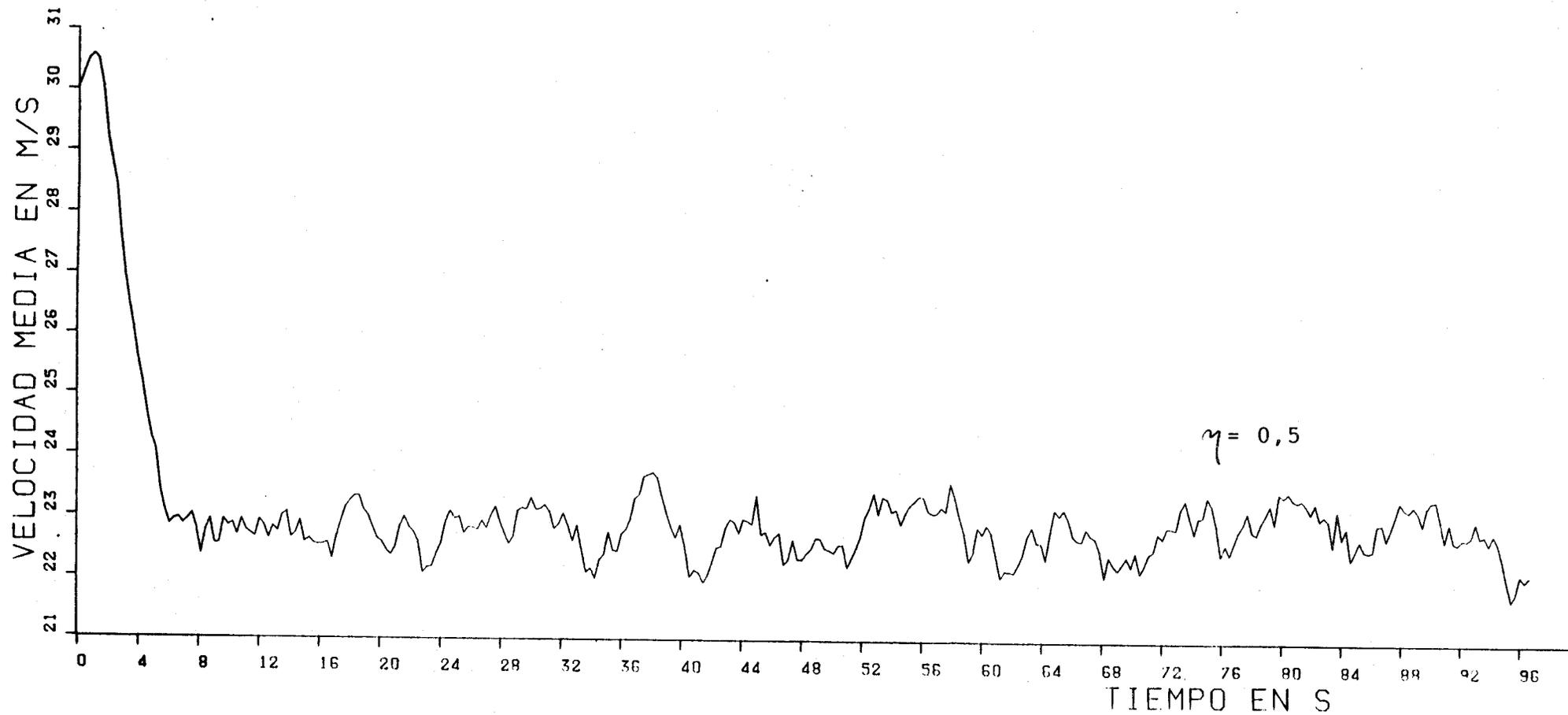


Fig.V.5. Lo mismo que la figura V.1. pero con  $\eta = 0,5$ .

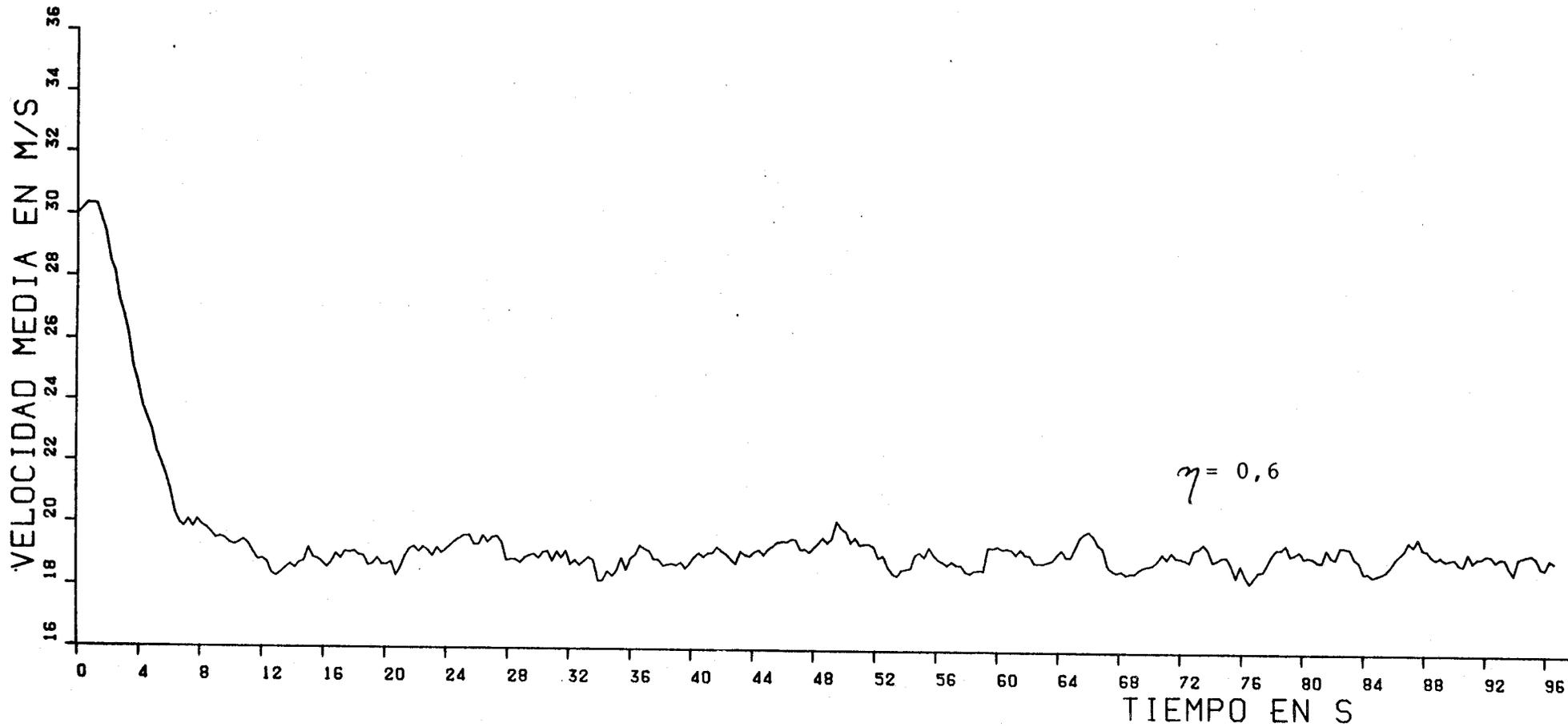


Fig.V.6. Lo mismo que la figura V.1. pero con  $\eta = 0,6$ .

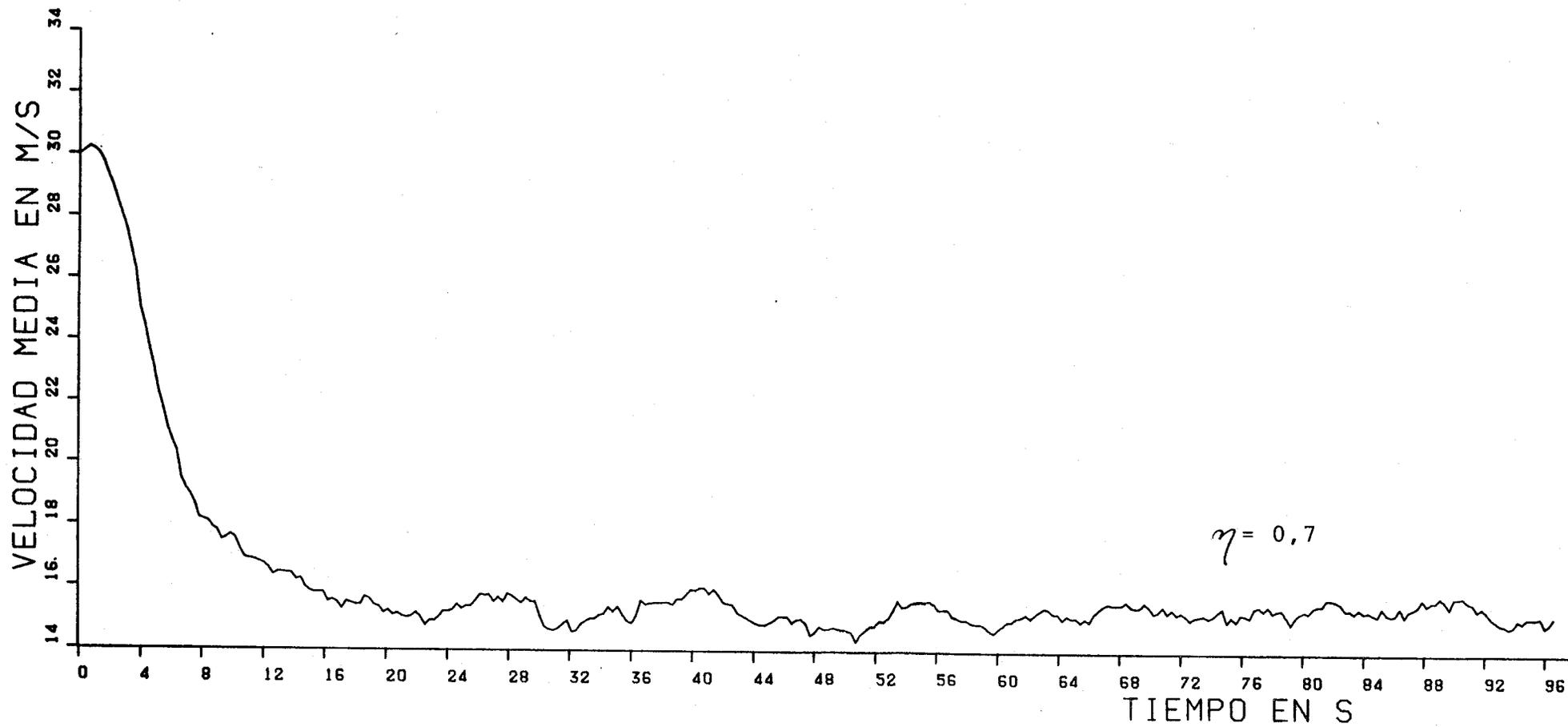


Fig.V.7. Lo mismo que la figura V.1. pero con  $\eta = 0,7$ .

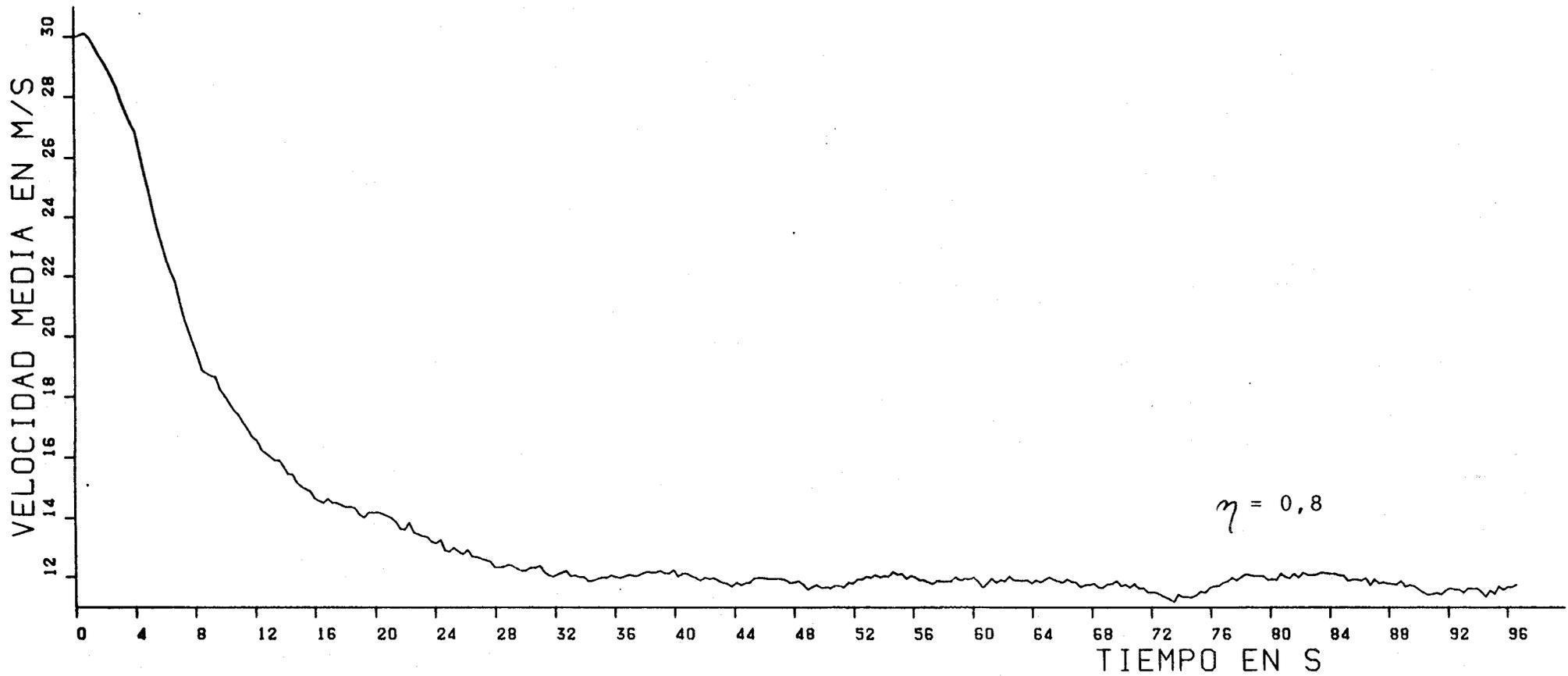


Fig.V.8. Lo mismo que la figura V.1. pero con  $\eta = 0,8$ .

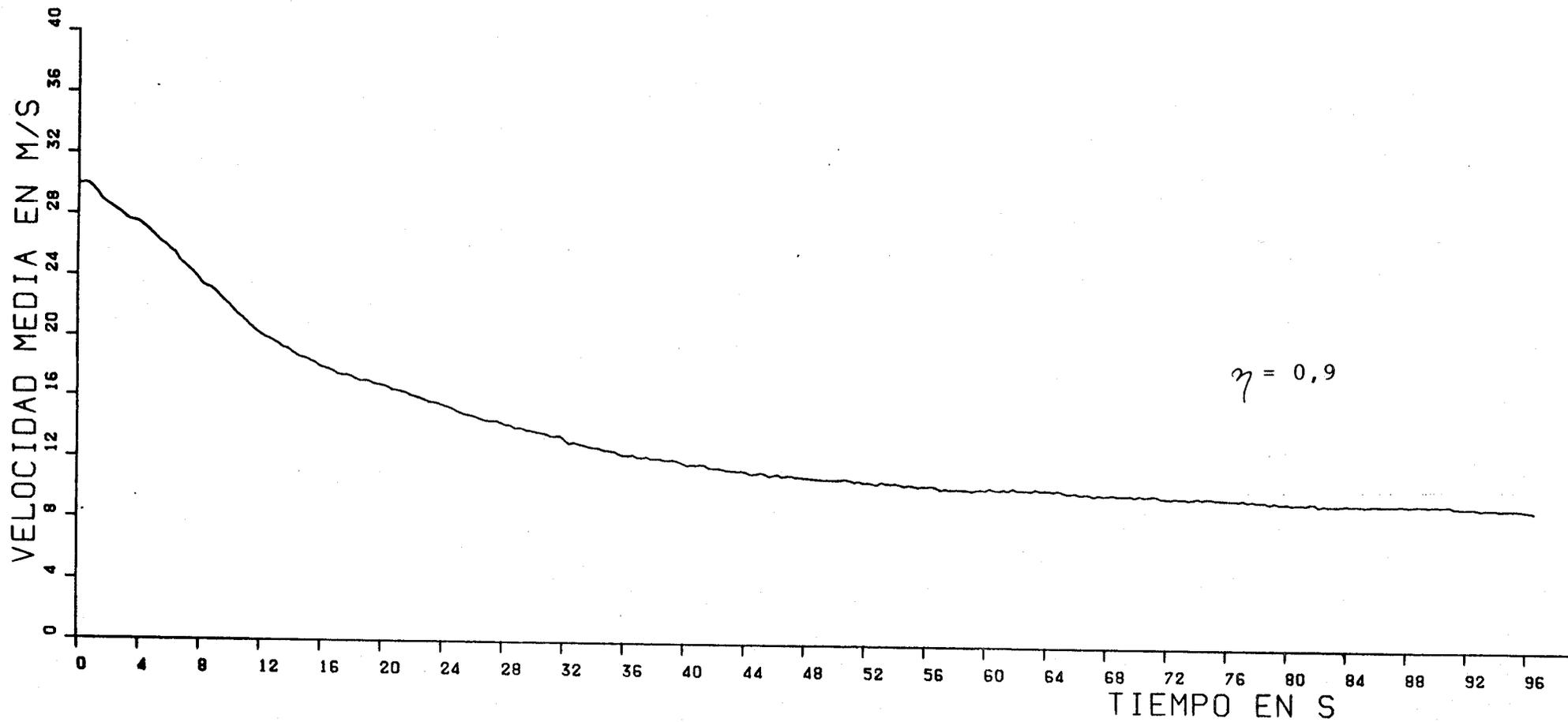


Fig.V.9. Lo mismo que la figura V.1. pero con  $\eta = 0,9$ .

TABLA V.1.

$\eta$	P	T(S)	Tiempo de relajación de $\bar{v}$ (s)
0,1	0,9	0,22	1
0,2	0,8	0,5	2
0,3	0,7	0,86	5
0,4	0,6	1,33	7
0,5	0,5	2	8
0,6	0,4	3	12
0,7	0,3	4,67	20
0,8	0,2	8	36
0,9	0,1	18	56

La amplitud de las fluctuaciones de la velocidad media alrededor del valor estacionario depende también de la densidad, pero no varía de una forma monótona con ella, ya que la amplitud máxima aparece para densidades intermedias. En un apartado posterior analizaremos con más detalle las fluctuaciones.

Los valores de la velocidad media y de la intensidad en el estado estacionario para los distintos valores de la densidad se presentan en la figura (V.10), donde las barras verticales indican las dispersiones calculadas en el estado estacionario.

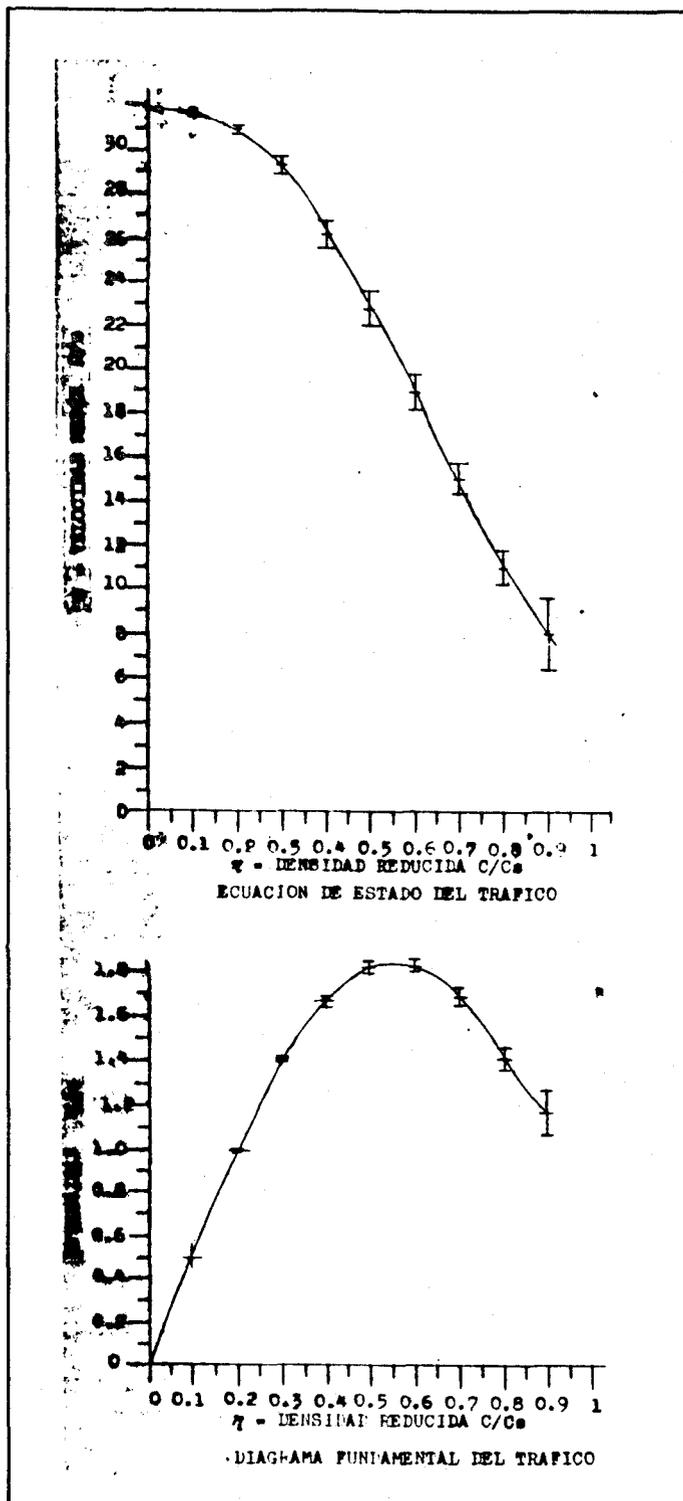


Fig.V.10. Velocidad media e intensidad frente a la concentración reducida para una línea de tráfico en estado estacionario, compuesta por 70% de vehículos rápidos y 30% vehículos lentos.

A la vista de los resultados podemos afirmar que el modelo cumple cualitativamente las leyes del tráfico, en el sentido de que la ecuación de estado y el diagrama fundamental obtenidos concuerdan con los observados experimentalmente. Además, para concentraciones pequeñas, la velocidad estacionaria está muy próxima, como era de esperar, a la velocidad media deseada. Así, por ejemplo, para  $\eta = 0,1$  obtenemos  $\bar{v} = 31,7$  m/s mientras que la velocidad media deseada es 31 m/s. Puede parecer sorprendente que la velocidad alcanzada sea mayor que la deseada, cuando en principio ningún vehículo puede moverse a una velocidad mayor que la deseada según las reglas que definen el modelo. Sin embargo, hay que tener en cuenta que las velocidades deseadas se especifican de acuerdo con distribuciones normales y que en su generación en el ordenador aparecen siempre pequeñas distorsiones. En otras palabras, la velocidad deseada teórica no coincide exactamente con la velocidad media deseada generada en el ordenador.

Evidentemente, al aumentar la concentración aumenta la diferencia entre la velocidad media deseada y la velocidad media real alcanzada por la línea de tráfico, ya que las interacciones asociadas con los adelantamientos producen una disminución de las velocidades de los vehículos.

En un intento de analizar con mayor detalle el movimiento de la línea, en la figura (V.11) representamos una distribución de velocidades instantánea, una vez alcanzado el estado estacionario para  $\eta = 0,25$  y la comparamos con la deseada. Para referencia se indica también la distribución inicial de velocidades.

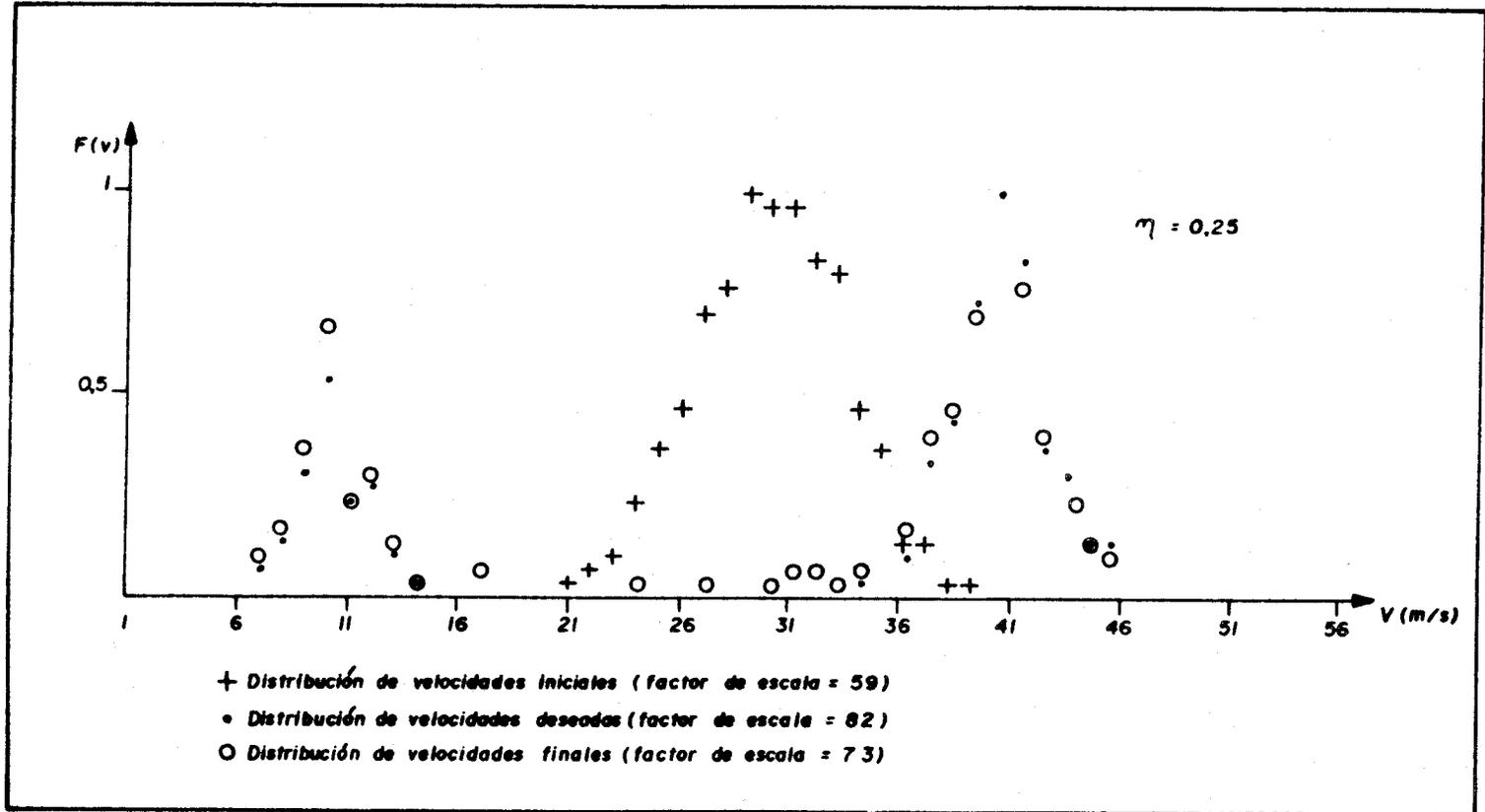


Fig.V.11. Distribución de velocidades instantáneas, una vez alcanzado el estado estacionario, para una línea de tráfico de densidad  $\eta = 0,25$  compuesta por una mezcla de 30% de vehículos lentos y 70% de vehículos rápidos. También se indica la distribución inicial y la deseada. Todas las distribuciones están normalizadas de manera que su máximo sea la unidad. Sobre la figura se indican los factores de escala utilizados.

En la figura todas las distribuciones estan escaladas de forma que su máximo sea la unidad, por lo que para compararlas es necesario multiplicarlas por los factores de escala que se indican, obteniendo así el número de vehículos que poseen la velocidad que se considere.

Hay que señalar que las distribuciones representadas corresponden a las generadas realmente por el ordenador y no a las expresiones teóricas. Es de destacar como la distribución estacionaria trata de ajustarse a la deseada, incluso en sus más mínimos detalles.

En la figura (V.12) se realiza una comparación análoga para una densidad intermedia, concretamente  $\eta = 0,55$ . Se observa ahora que la diferencia entre la distribución deseada y la real es mucho más acusada. En particular se nota que los vehículos rápidos tienen una gran dificultad para acomodarse a su velocidad deseada ya que son continuamente frenados por los vehículos lentos. De hecho, las velocidades reales de los vehículos rápidos se distribuyen de un modo practicamente uniforme entre las velocidades lentas y rápidas. Esto es un reflejo del hecho conocido de que los vehículos lentos circulan en forma más relajada sin estar sometidos a grandes aceleraciones, al contrario de lo que le sucede a los vehículos rápidos.

Otra característica interesante de la línea de tráfico es la separación a que circulan los vehículos. En las figuras (V.13) y (V.14) hemos representado la distribución de espaciamento entre los vehicu-

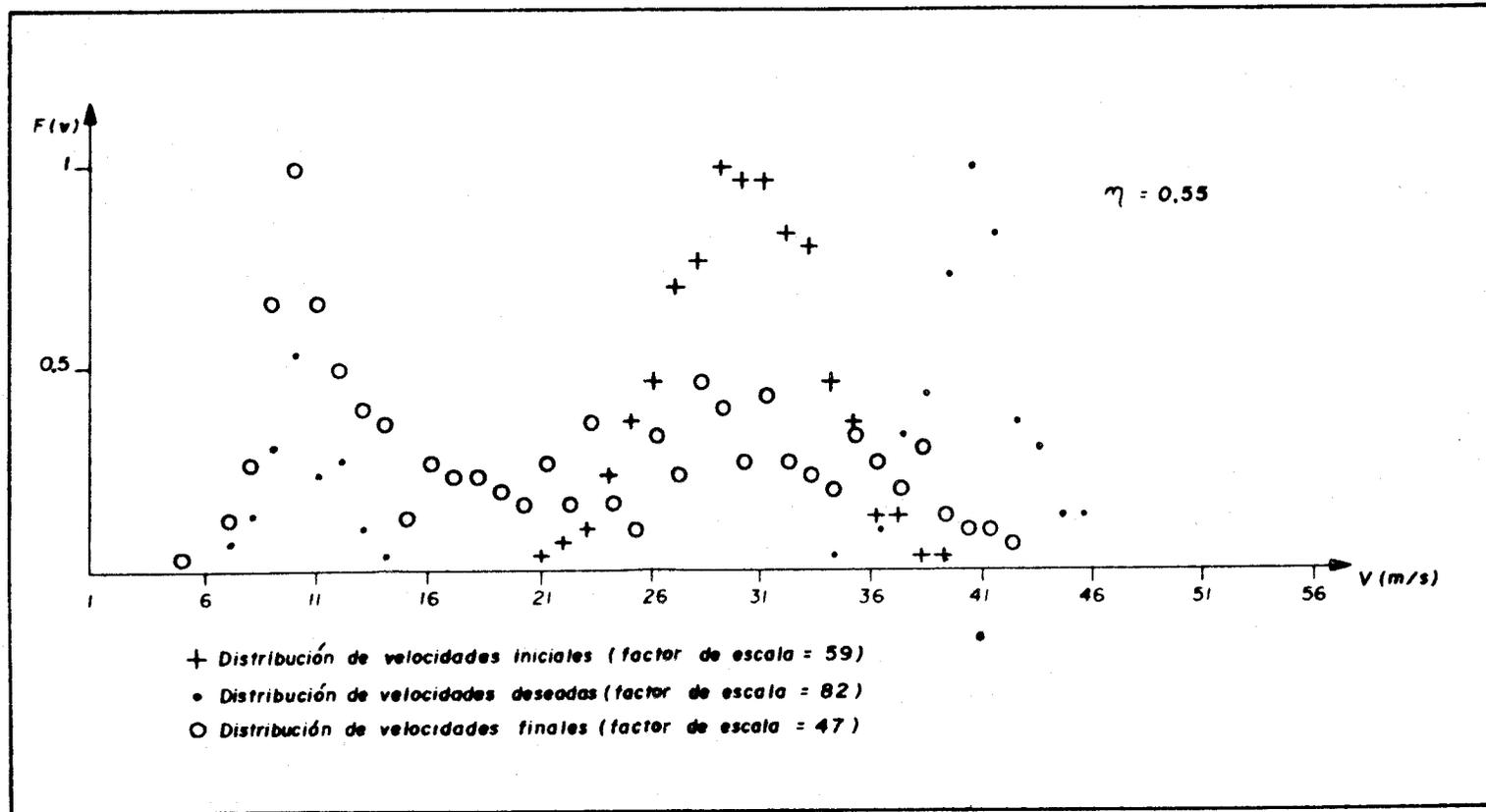


Fig.V.12. Lo mismo que la figura V.11. pero con  $\eta = 0,55$ .

los para los casos  $\eta = 0,25$  y  $\eta = 0,55$  en un instante dado, una vez alcanzada la velocidad media estacionaria. De nuevo las distribuciones están escaladas de forma que su máximo sea la unidad. En ambos casos se observa que la distribución presenta un máximo alrededor de  $d = 1$  m. Naturalmente, este valor corresponde a vehículos que circulan muy próximos, pero su valor exacto no debe considerarse relevante. En efecto, el modelo considera a los vehículos como puntuales, de forma que dos vehículos pueden circular uno detrás de otro a una distancia tan pequeña como queramos. En la práctica es evidente que existe una cota para esta distancia y que viene dada por la propia dimensión física de los vehículos. En resumen, el máximo  $d = 1$  debe interpretarse que corresponde a vehículos que circulan tan próximos como le sea físicamente posible.

La comparación de las dos distribuciones muestra que es mucho más aguda la correspondiente a la mayor densidad,  $\eta = 0,55$ . Esto indica a que a esta densidad la mayor parte de los vehículos están siendo retenidos por los que le preceden, o dicho de otra forma, la línea de tráfico presenta "colas" bastantes bien definidas. Solo aquellos vehículos que están separados del que le precede una distancia suficientemente grande circulan "libremente", tendiendo hacia la velocidad deseada.

Así pues, en cierto modo, al ir aumentando la concentración la línea de tráfico se van estructurando espacialmente, mientras que a densidades bajas los vehículos se distribuyen en una forma más o menos uniforme a lo largo de la misma.

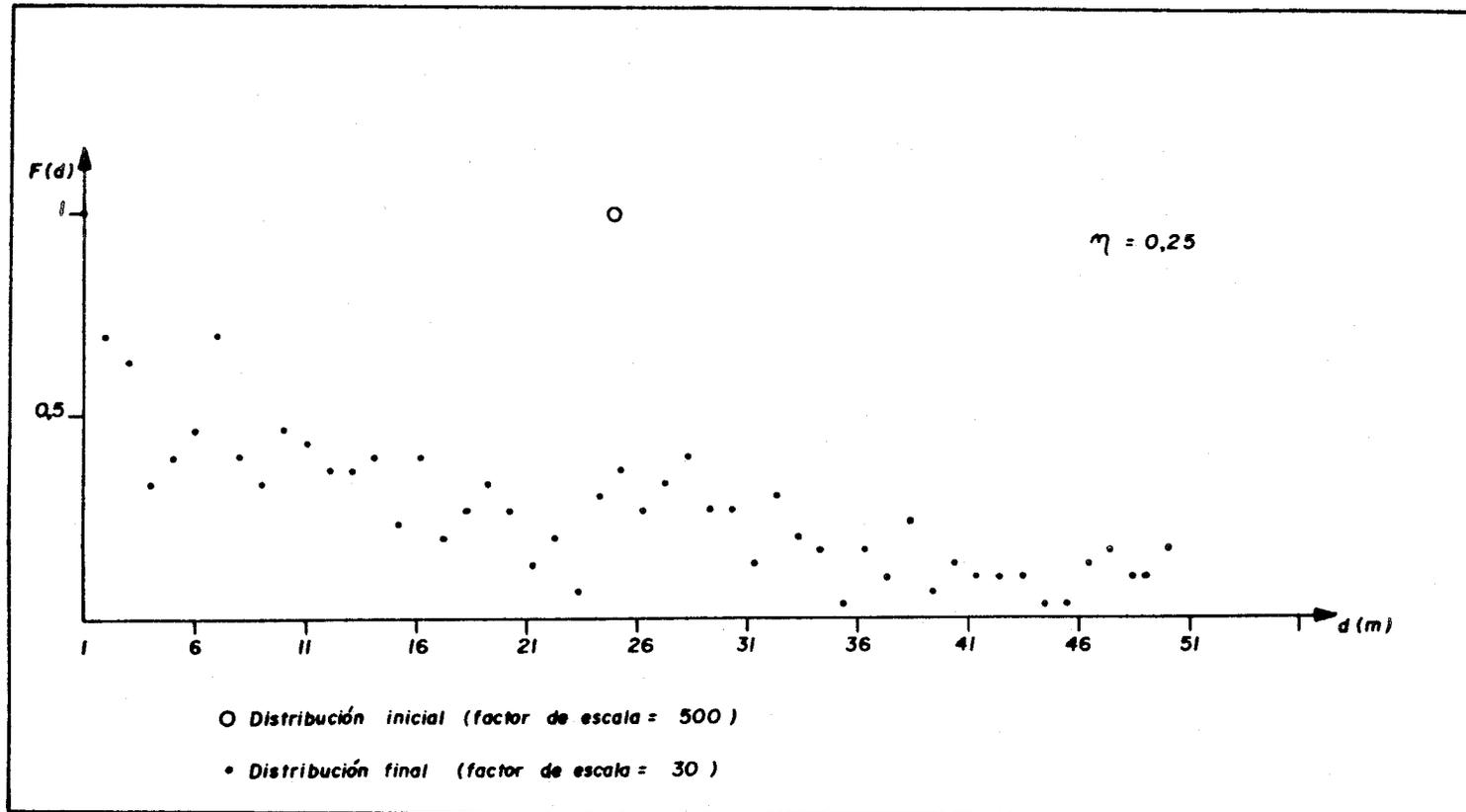


Fig.V.13. Distribución de distancias entre los vehículos, una vez alcanzado el estado estacionario para una línea de tráfico de densidad  $\eta = 0,25$ , compuesta por 30% de vehículos lentos y 70% de vehículos rápidos. También se indica la distribución inicial (todos los vehículos equidistantes). Las distribuciones están normalizadas de manera que su máximo sea la unidad y sobre la figura se indican los factores de escalas correspondientes.

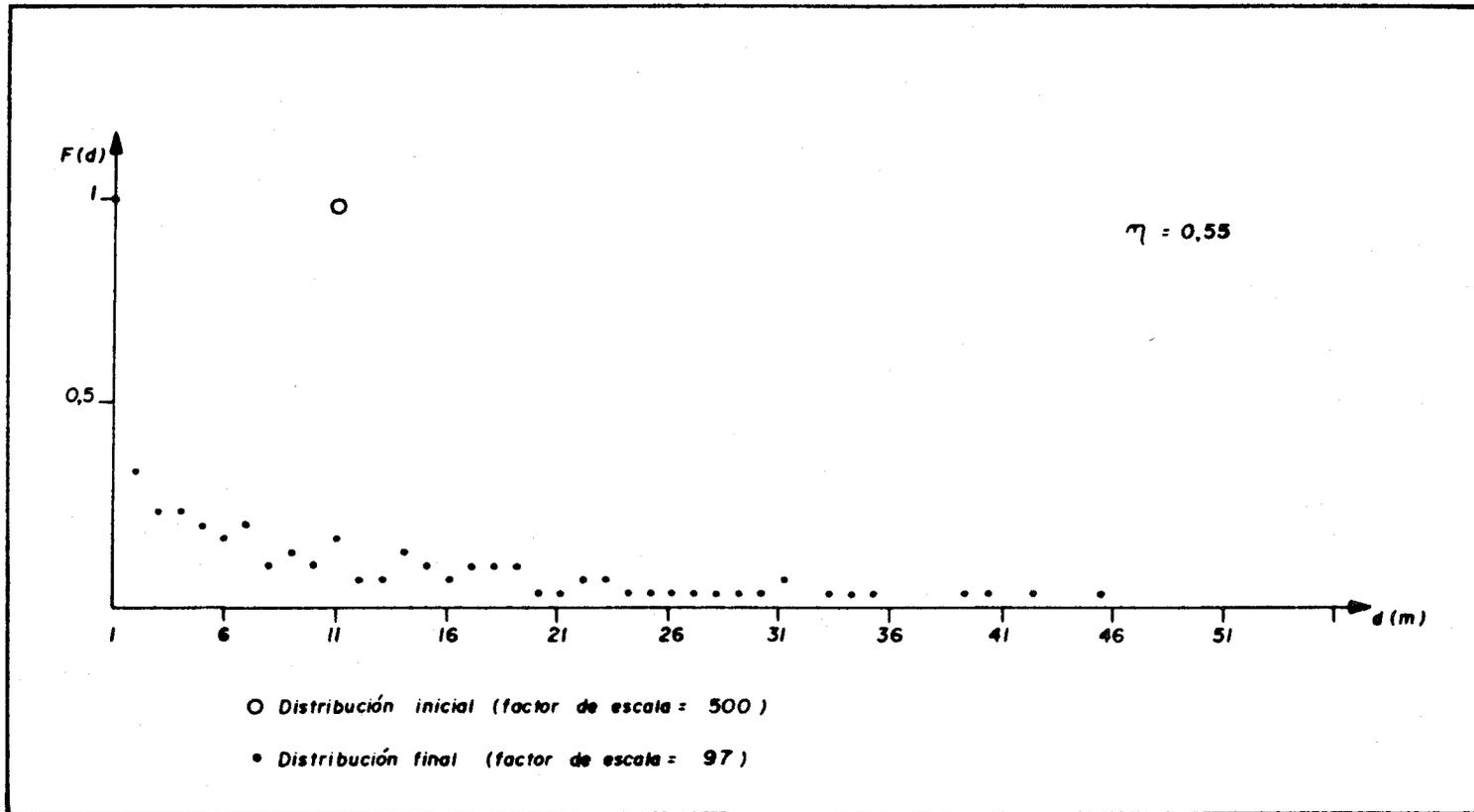


Fig.V.14. Lo mismo que la fig.V.13. pero para  $\eta = 0,55$ .

La posibilidad de que aparezcan, generadas por la propia dinámica del sistema, colas en la línea de tráfico, es una característica importante de nuestro modelo. El estudio de la formación y dinámica de colas móviles es un problema de la máxima importancia científica y tecnológica. En la mayor parte de los modelos<sup>21),22)</sup> la existencias de colas se introduce de un modo más o menos artificial y también sus interacciones. En nuestro caso, las colas se forman a partir de la dinámica individual de los vehículos y sus interacciones.

En el apartado siguiente profundizaremos en el detalle del análisis de las colas según nuestro modelo.

### V.3. Análisis de la estructura de las colas.

En la figura V.15. se representa el estado dinámico de una porción de la línea de tráfico en un cierto instante, una vez alcanzado el régimen estacionario. La figura corresponde a  $\eta = 0,75$ . Por limitaciones de espacio unicamente se representa una "ventana" de 400 metros y para una mayor claridad se han eliminado los vehiculos que en ese instante estaban saltando de una cola a otra. Los detalles y características de la simulación son los mismos discutidos en el apartado anterior.

Se observa claramente en la figura la presencia de tres colas moviles, es decir, de tres grupos de vehiculos que circulan en forma compacta y que estan señalados en la figura como Ia, IIa y IIIa, respectivamente. La gráfica representa en ordenadas la velocidad de los vehiculos y en abscisas su distancia a un origen arbitrario (principio de la ventana), hacia el cual se mueven. Como es lógico las colas se mueven a una velocidad practicamente uniforme y muy proxima a 10m/s, que es la velocidad deseada media de los vehiculos lentos.

La cola Ia. se muestra ampliada en la figura V.16., donde además se ha utilizado distinta representación para los vehiculos rápidos y los lentos (triangulos para los primeros y circunferencias para los segundos). Como era de prever la cola va encabezada por vehiculos lentos, dos en este caso, a los que siguen una serie de vehiculos rápidos, diez, que son frenados por ellos. Insistimos en que las distancias

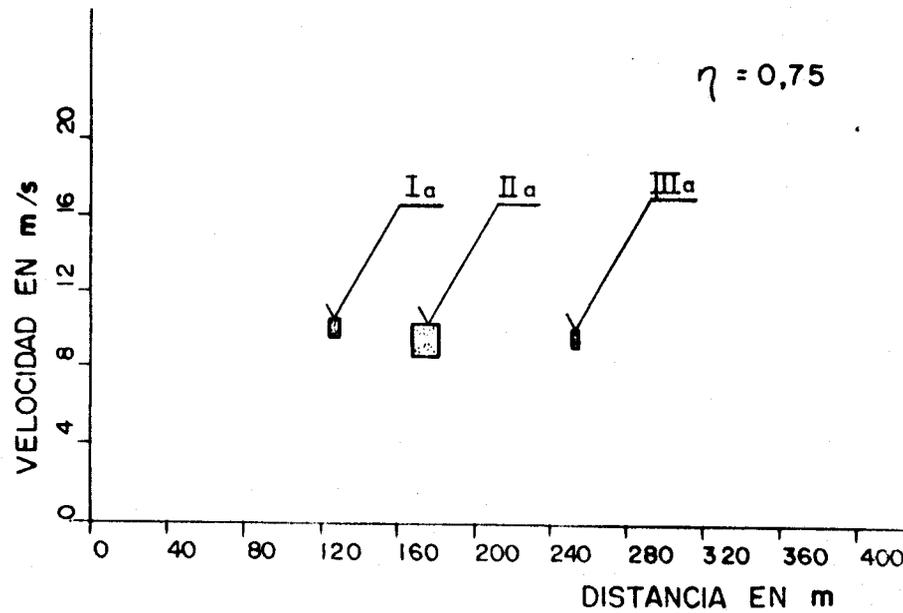


Fig.V.15. Velocidades y posiciones relativas de una parte de la línea de tráfico en un cierto instante, una vez alcanzado el estado estacionario. La densidad reducida es  $\eta = 0,75$ . Se han identificado tres colas móviles representadas por Ia, IIa y IIIa.

entre vehiculos pueden ser en nuestro modelo tan pequeñas como se quieran, no implicando ello ninguna restricción a la hora de sacar conclusiones. En la figura V.17. se representa la cola II.a., que está encabezada por un vehiculo lento, existiendo además otros dos de la misma clase en el centro de la cola. Tanto en esta figura como en la anterior se observa que los vehiculos rápidos, aún cuando circulan detrás de vehiculos lentos poseen mayor velocidad instantanea que estos, concretamente la diferencia de velocidad es del orden de 1 m/s. Esto es una manifestación del intento continuo que realizan los vehiculos rápidos para adelantar a los lentos. Recordemos que el hecho de que circulen a mayor velocidad no simplifica que necesariamente se vaya a producir el adelantamiento. Es posible, que debido a la probabilidad de adelantar el primer coche rápido falle en un intento y sea obligado a ponerse a la misma velocidad que el vehiculo lento que le precede.

Desde luego la identificación de una cola es en cierta medida subjetiva, dado que siempre existen vehiculos saltando de unas colas a otras y que es difícil asignar en un modo preciso. Teniendo en cuenta que nuestro modelo desprecia la dimensión física de los vehiculos, nosotros hemos adoptado como criterio de identificación de colas por el ordenador que dos vehiculos consecutivos pertenecen a la misma cola cuando estan separados una distancia menor que diez metro. En relación con el punto anterior hemos constatado que la concentración interna de las colas no está directamente relacionada con la concentración media de la linea, sino que parece ser independiente

COLA I a

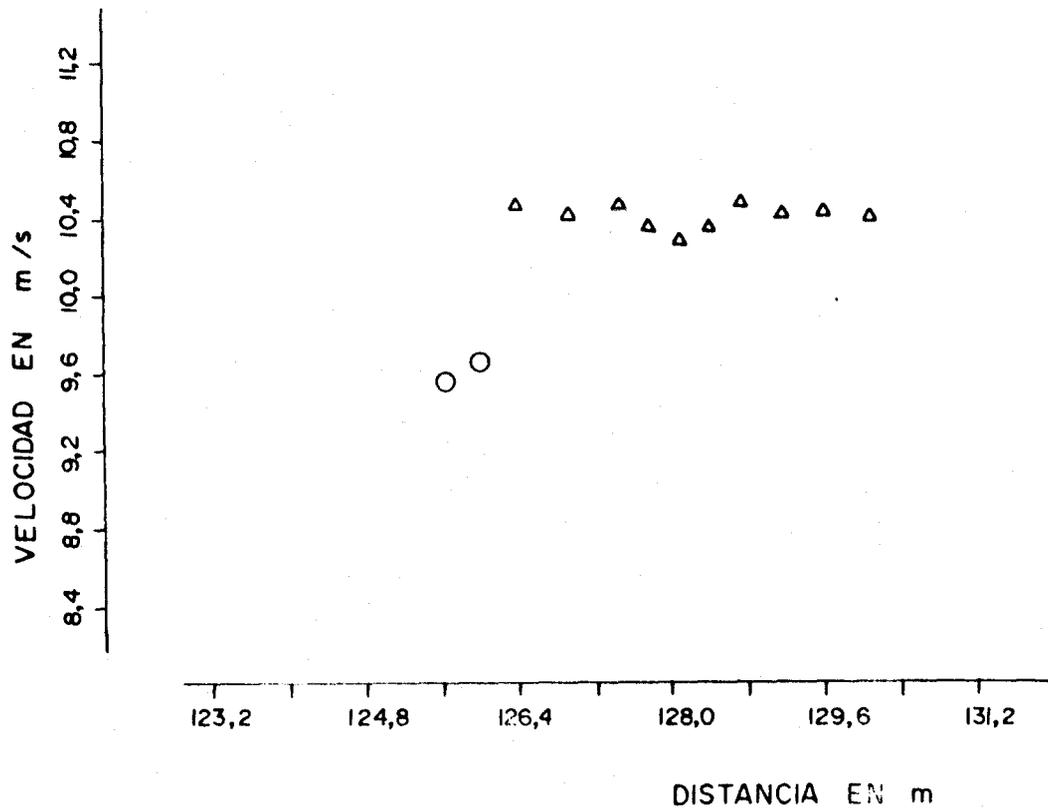


Fig.V.16. Representación ampliada de la cola Ia. de la figura V.15.



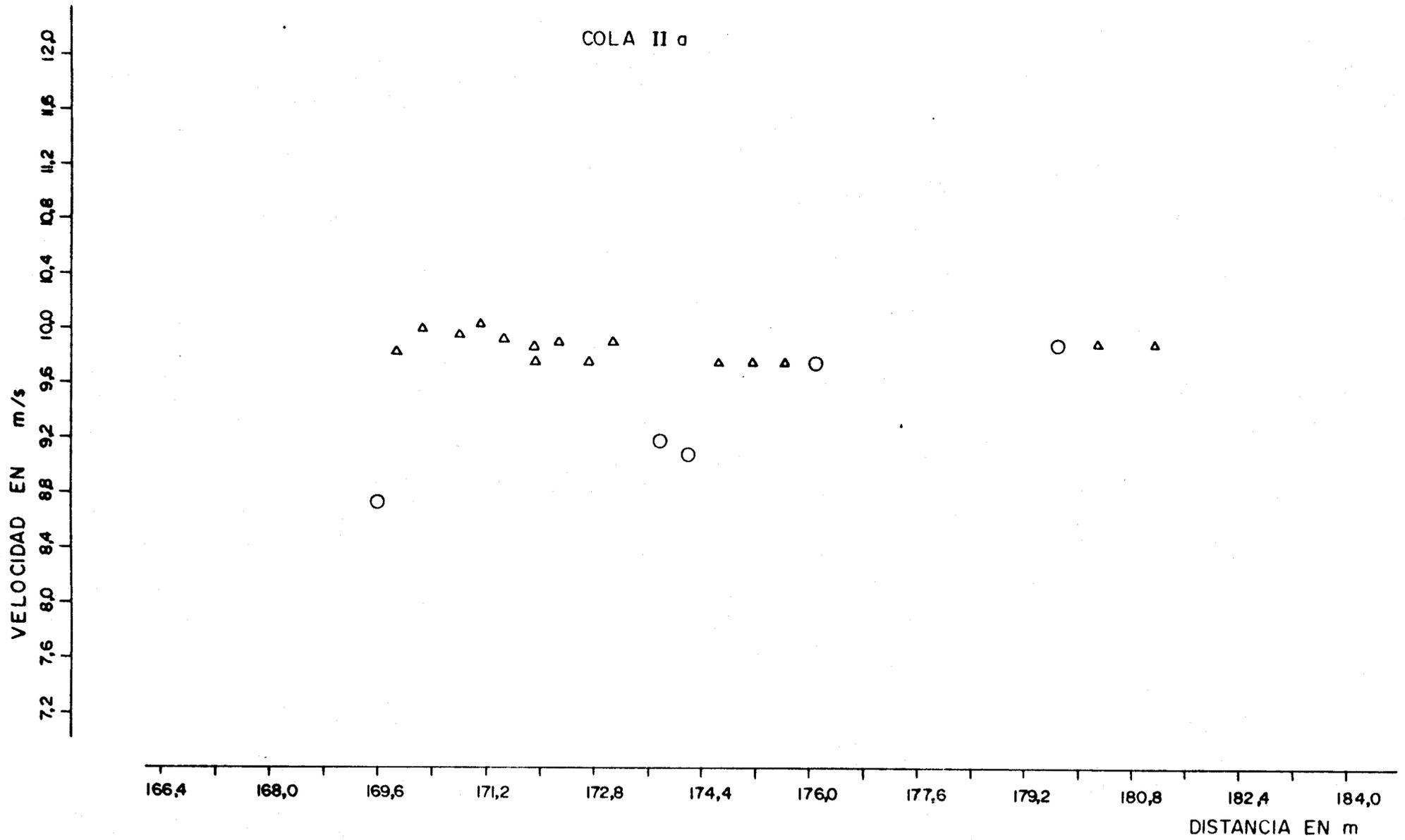


Fig.V.17. Representación ampliada de la cola IIa. de la figura V.15.

de ellas. En otras palabras, la distancia media entre vehiculos en una cola movil no depende, al menos en forma importante, de la densidad media de vehiculos de la linea de tráfico. Esta independencia creemos que se presenta también en situaciones de tráfico real.

Hemos realizado un estudio de la dependencia del número de colas y su tamaño respecto de la densidad de la linea y también respecto de la relación entre el de vehiculos pesados (lentos) y el número de vehiculos ligeros (rápidos). Los resultados vienen dado en la tabla V.2., y en las figuras V.18. y V.19.. Como se vé el número medio de vehiculos que componen una cola aumenta con la concentración, siendo este aumento muy pequeño a bajas densidades, pero muy rápido a partir de  $\eta \approx 0.7$ . A estas concentraciones los vehiculos circulan prácticamente en grupos compactos. Por el contrario, la relación pesados/ligeros parece no influir prácticamente en el tamaño de las colas. Esta es una conclusión que puede parecer en cierta medida sorprendente, y creemos que sería interesante verificar mediante medidas experimentales realizadas en situaciones de tráfico real.

En lo que se refiere al número de colas resulta independiente también de la relación pesados/ligeros, mientras que depende fuertemente de la concentración, presentando un máximo a concentraciones intermedias. Para concentraciones muy bajas los vehiculos circulan de modo casi libre y sin ser frenados, por lo que, como ya hemos discutido reiteradamente, no se forman colas. Al ir aumentando la concentración aparecen

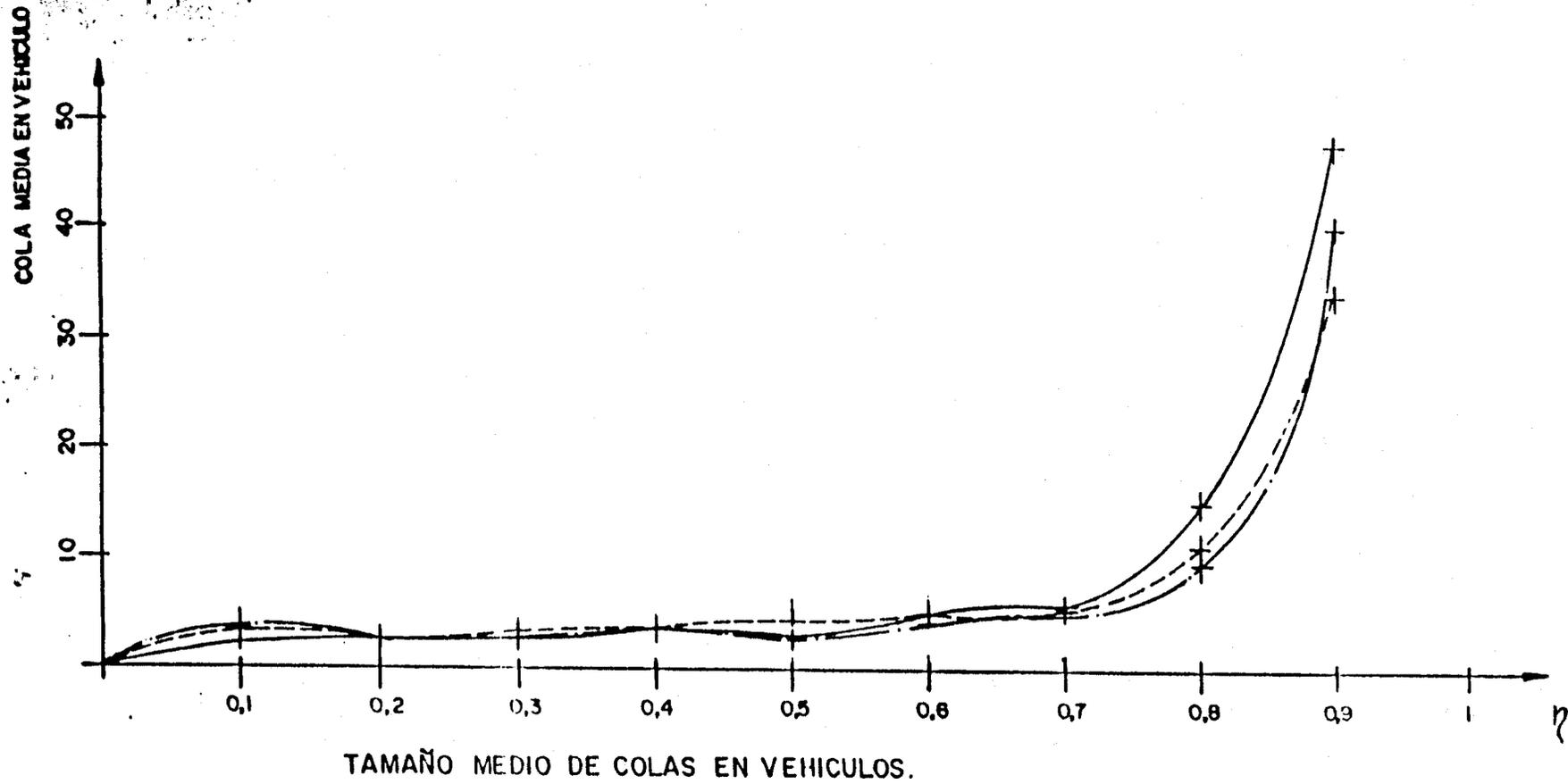
TABLA V.2.

Tamaño medio de cola

Nº de colas

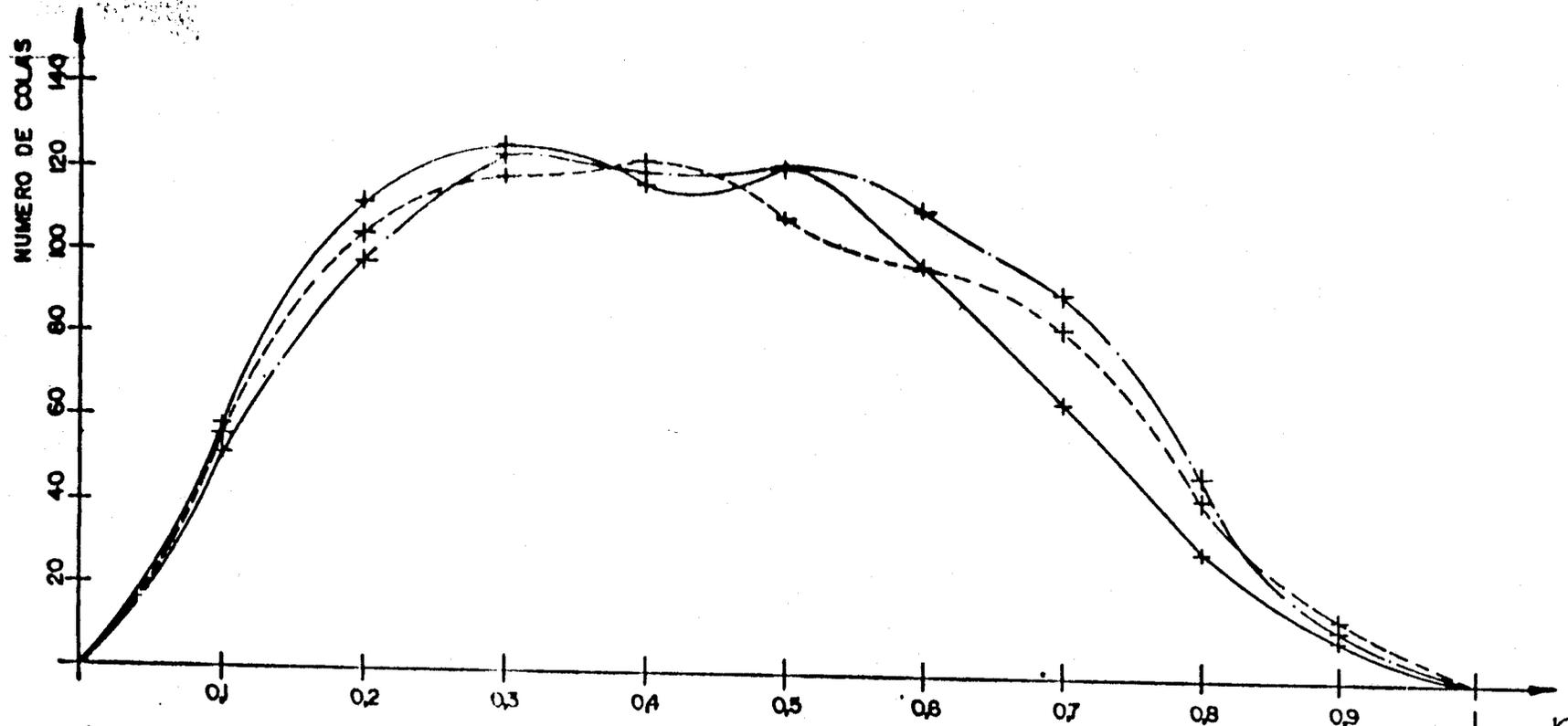
Relación Pesados/ligeros

$\eta$	5/95	30/70	40/60
0,1	2,3621 58	2,8182 55	3,1961 51
0,2	2,5000 112	2,4231 104	2,4639 97
0,3	2,5317 126	2,8151 119	2,6774 124
0,4	3,2393 117	3,1230 122	3,1667 120
0,5	3,5537 121	3,9450 109	3,4672 122
0,6	4,3980 98	4,4433 97	4,0180 111
0,7	6,9231 65	5,4337 83	5,0110 91
0,8	15,2333 30	11,1190 42	9,5625 48
0,9	48,5000 10	34,4286 14	40,3333 12



- Relación pesados/ligeros 5/95
- - - Relación pesados/ligeros 30/70
- · - Relación pesados/ligeros 40/60

Fig.V.18. Tamaño medio de la cola en el estado estacionario en función de la densidad reducida para distintas relaciones de pesados/ligeros.



NUMERO DE COLAS.

- Relación pesados/ligeros 5/95
- - - Relación pesados/ligeros 30/70
- · - Relación pesados/ligeros 40/60

Fig.V.19. Número medio de colas en el estado estacionario en función de la densidad reducida para distintas relaciones de pesados/ligeros.

las colas, siendo cada vez mas numerosas. Al mismo tiempo, las colas intercecionan entre sí dando lugar a un mecanismo que las hace aumentar de tamaño y disminuir en número. Este es el mecanismo dominante a muy altas concentraciones.

Desde un punto de vista práctico, es sabido que la mayor causa de peligrosidad en las carreteras viene dada por los adelantamientos, y que el mayor número de estos se dán bajo concentraciones en que existan numerosas colas de pequeños tamaños. Vemos entonces que, a un nivel puramente cualitativo, nuestro modelo parece indicar que las condiciones de tráfico mas peligrosas corresponden a densidades intermedias, mas adelante analizaremos con mas detalle este punto.

#### V.4. Estudio de la frecuencia de adelantamientos.

El algoritmo de simulación utilizado proporciona también el número de adelantamientos efectuados por los vehículos. Dada la importancia práctica de dicho número, discutimos en este apartado la influencia que las distintas condiciones de tráfico tienen sobre el mismo. En la tabla V.3. se muestra el número total de adelantamientos para los valores de densidad reducida y de la relación pesados/ligeros que hemos venido considerando. Los mismos resultados se muestran esquemáticamente en la gráfica de la figura V.20.. Todos los resultados corresponden a un tiempo total de simulación de 1000 segundos.

Se observa que, a una relación baja de pesados/ligeros, el número de adelantamientos crece con la densidad hasta un valor aproximado de  $\eta = 0,7$  para luego decrecer rápidamente. Hay que recordar que el propio modelo lleva a la imposibilidad de adelantar cuando  $\eta$  tiende a la unidad. La influencia de la densidad es mucho menos acusada para valores mayores de la relación pesados/ligeros, presentando su comportamiento practicamente constante entre  $\eta=0,1$  y  $\eta=0,8$ .

Al igual que sucede en la realidad, hay que recordar que en nuestro modelo las interacciones, representadas por los adelantamientos, son los responsables de que se produzca un reajustamiento del tráfico y favorecen la consecución de una velocidad media mas alta.

TABLA V.3.

(Nº de Adelantamiento)

Relación Pesados/ligeros

$\eta$	5/95	30/70	40/60
0,1	32.235	109.453	150.438
0,2	44.329	103.782	116.659
0,3	67.982	147.875	160.552
0,4	92.307	174.944	181.585
0,5	115.003	182.316	180.505
0,6	162.828	180.592	169.416
0,7	306.645	193.735	160.932
0,8	238.889	217.937	175.829
0,9	91.817	109.665	97.221

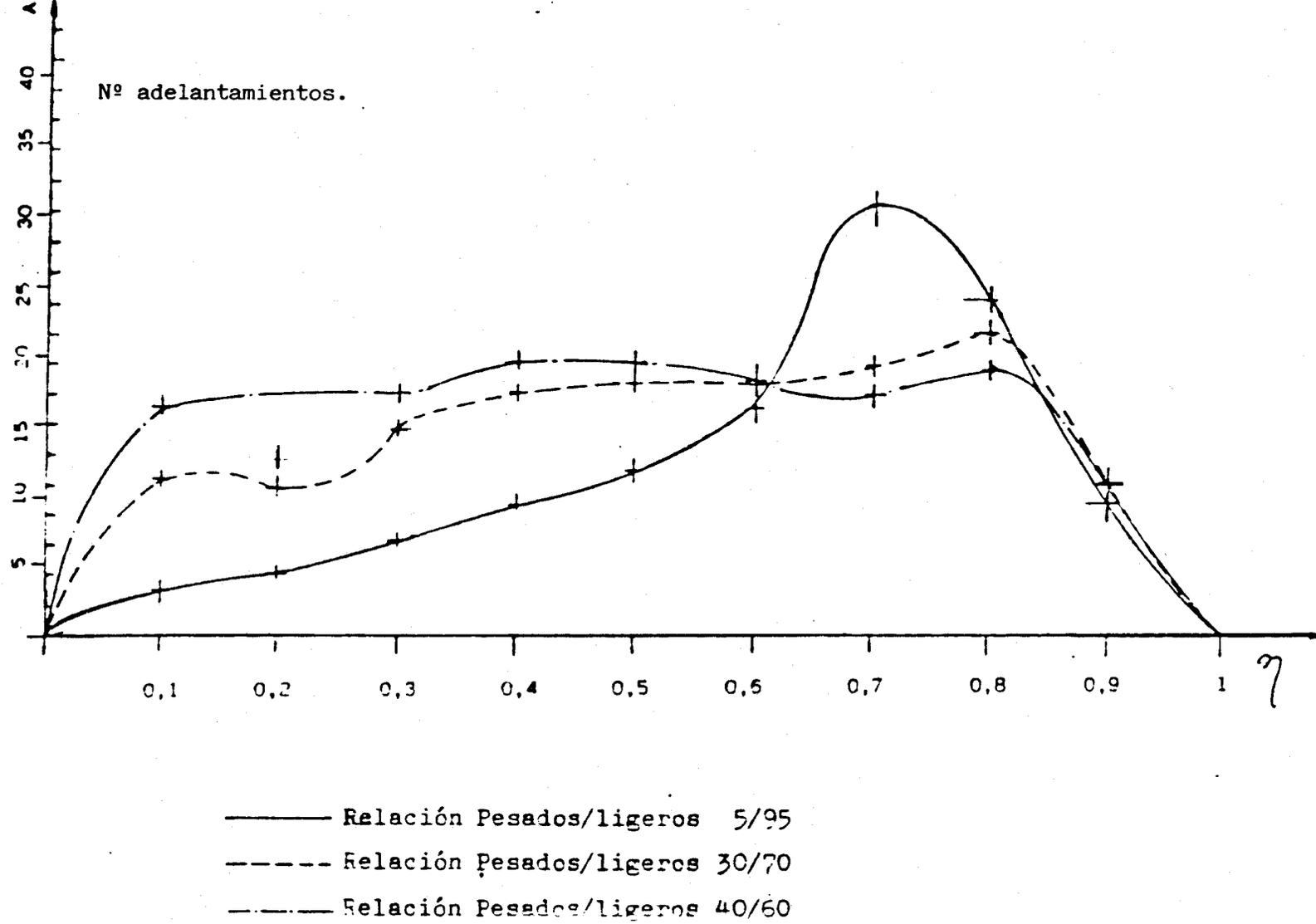


Fig.V.20. Número total de adelantamientos en función de la densidad reducida  $\eta$  para distintos valores de la relación pesados/ligeros.

Otro punto importante a señalar es que nuestra simulación no permite diferenciar entre adelantamientos dobles, triples, etc, por lo que a todos ellos se les ha considerado conjuntamente. Desde luego, en la interpretación del modelo, siempre podría considerarse un adelantamiento doble como dos adelantamientos sencillos consecutivos, y análogamente, los triples, etc.

Quizás mas relevante que el número total de adelantamientos en un intervalo de tiempo dado es el número de adelantamientos en una longitud dada, o número de adelantamientos por unidad de longitud. En la práctica lo que suele ser relevante para un conductor es el número de adelantamientos, que bajo condiciones de tráfico dadas, tiene que realizar para desplazarse de un punto a otro.

En la tabla V.4. y la figura V.21. se presentan los números de adelantamientos por unidad de longitud en las distintas condiciones. Ahora si que se manifiesta la influencia de la relación pesados/ligeros. A bajas concentraciones el número de adelantamientos por unidad de longitud de recorrido aumenta cuando mayor es dicha relación. Sin embargo, mas allá de  $\eta \approx 0.65$ , la dependencia se invierte hasta que las curvas alcanzan su máximo. A continuación, y como era de esperar, el número de adelantamientos decae rápidamente.

Podría esperarse que el máximo número de adelantamientos ocurriera para el valor de la densidad que produjera el máximo valor del flujo de vehiculos,

**TABLA V.4.**

**(Nº de Adelantamientos/metros)**

**Relación Pesados/ligeros**

$\eta$	5/95	30/70	40/60
0,1	0,8462	3,4652	5,2855
0,2	1,1699	3,3499	4,2020
0,3	1,8249	5,0478	6,1894
0,4	2,5837	6,9277	7,8838
0,5	3,5000	8,0518	9,1295
0,6	5,8106	9,5425	10,1351
0,7	15,8827	12,8313	11,6361
0,8	17,7002	19,7559	16,7736
0,9	8,9316	11,2501	12,3623

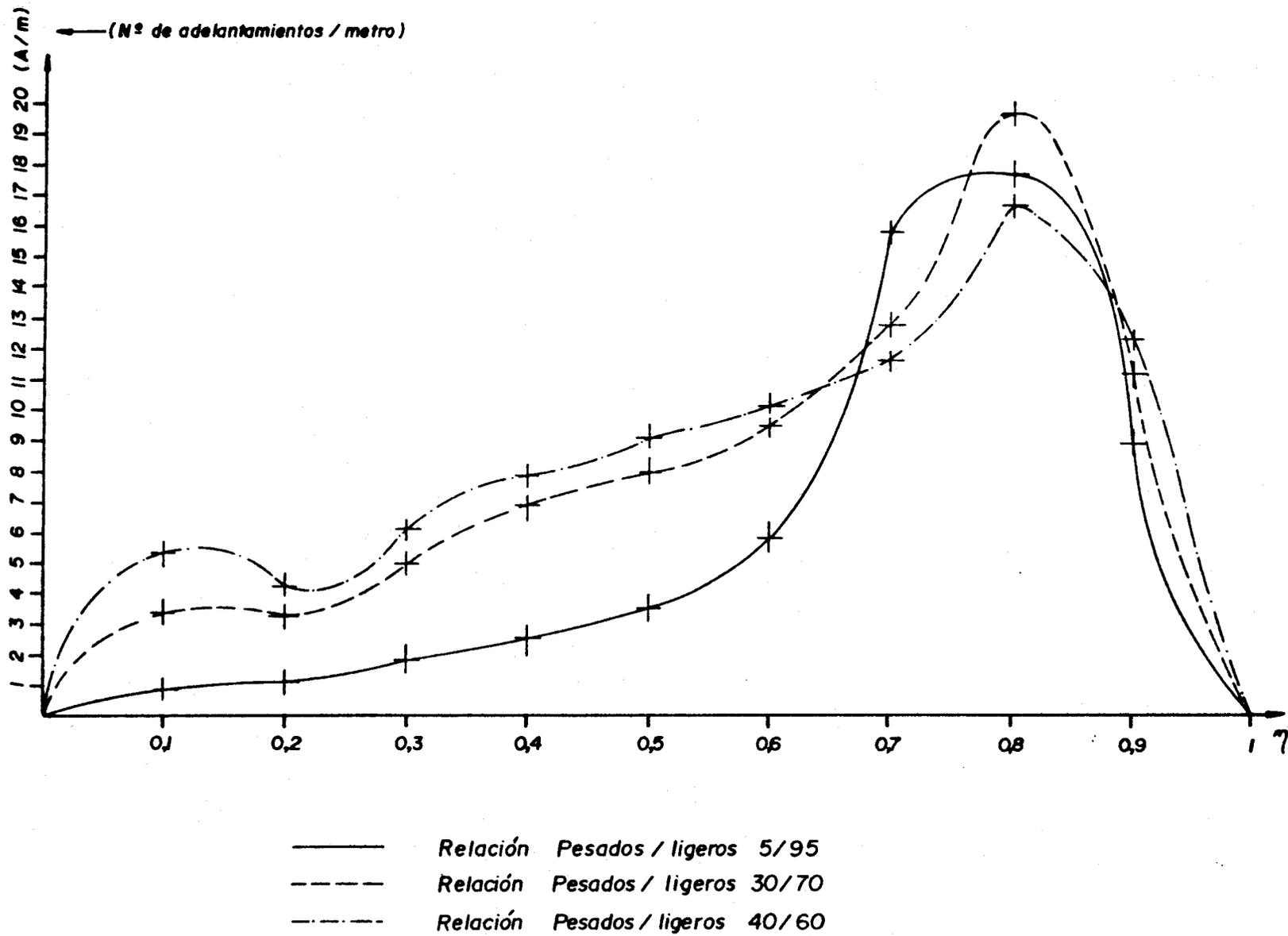


Fig.V.21. Números de adelantamientos por unidad de longitud de recorrido en función de la densidad reducida  $\eta$  para distintos valores de la relación pesados/ligeros.

sin embargo, una comparación de las figuras V.10. y V.21. pone de manifiesto, que en el caso de pesados/ligeros = 30/70, el flujo máximo corresponde a una densidad de  $\eta = 0,55$  mientras que el número máximo de adelantamientos por metro recorrido está aproximadamente en  $\eta \approx 0.8$ . Para otros valores de la relación pesados/ligeros se obtienen unas conclusiones similares.

Otra característica importante que muestran los resultados es el hecho de que la densidad reducida para la que se presenta el número máximo de adelantamientos disminuye al disminuir la relación pesados/ligeros.

De nuevo no nos es posible realizar comparaciones con resultados experimentales ya que no tenemos conocimiento de que se hayan realizado medidas de este tipo en nuestro país, medidas que consideramos que serían muy interesantes. Por otro lado hay que tener presente que la peligrosidad de un adelantamiento está relacionada con la densidad de tráfico y la velocidad a que se realiza, por lo que desde un punto de vista de seguridad vial no puede considerarse a todos los adelantamientos como equivalentes. Sería necesario asignarle a cada uno de ellos un índice de peligrosidad, lo cual está fuera de los objetivos y alcance del modelo del que nos estamos ocupando. Sin embargo, no parece difícil realizar una estimación empírica basandose en la propia estadística de los accidentes de tráfico. Tampoco tenemos noticias de que se haya realizado un estudio fiable en este sentido. En resumen creemos que el modelo desarrollado

presenta grandes potencialidades para el análisis de la seguridad vial, que no pueden ser completamente explotados por falta de información experimental. A analoga conclusión llegamos en los apartados siguientes.

## V.5. Análisis de las fluctuaciones en el régimen estacionario.

En el estado estacionario la velocidad media no es rigurosamente constante sino que efectúa oscilaciones en el transcurso del tiempo. Hasta ahora al referirnos a la velocidad media hemos despreciado estas fluctuaciones y utilizado el valor medio calculado sobre un cierto intervalo temporal. Sin embargo, las fluctuaciones son de gran importancia tanto a un nivel teórico como a un nivel práctico. Su forma caracteriza el comportamiento dinámico de la línea es decir, el modo de conducción. Pequeñas fluctuaciones indican un comportamiento "suave", sin grandes aceleraciones. Por el contrario, grandes fluctuaciones son el reflejo de fuertes cambios en las velocidades de los vehículos que, en caso extremo, pueden llegar a producir la inestabilidad del sistema. A un nivel práctico, es evidente que el riesgo, definido en la forma que sea, está directamente relacionado con lo abrupto que sea la conducción. También podría establecerse una clara relación entre las fluctuaciones y requerimiento de tipo económico, tales como un mínimo consumo de energía y desgaste del vehículo.

Por estas razones hemos considerado con mejor detalle las fluctuaciones que presenta nuestro modelo en el estado estacionario y la influencia que sobre ellas tienen los distintos parámetros.

En las figuras V.22., V.23. y V.24., se representan los resultados obtenidos para  $\eta = 0,4$  y poblaciones relativas 5/95, 30/70 y 40/60, respectivamente.

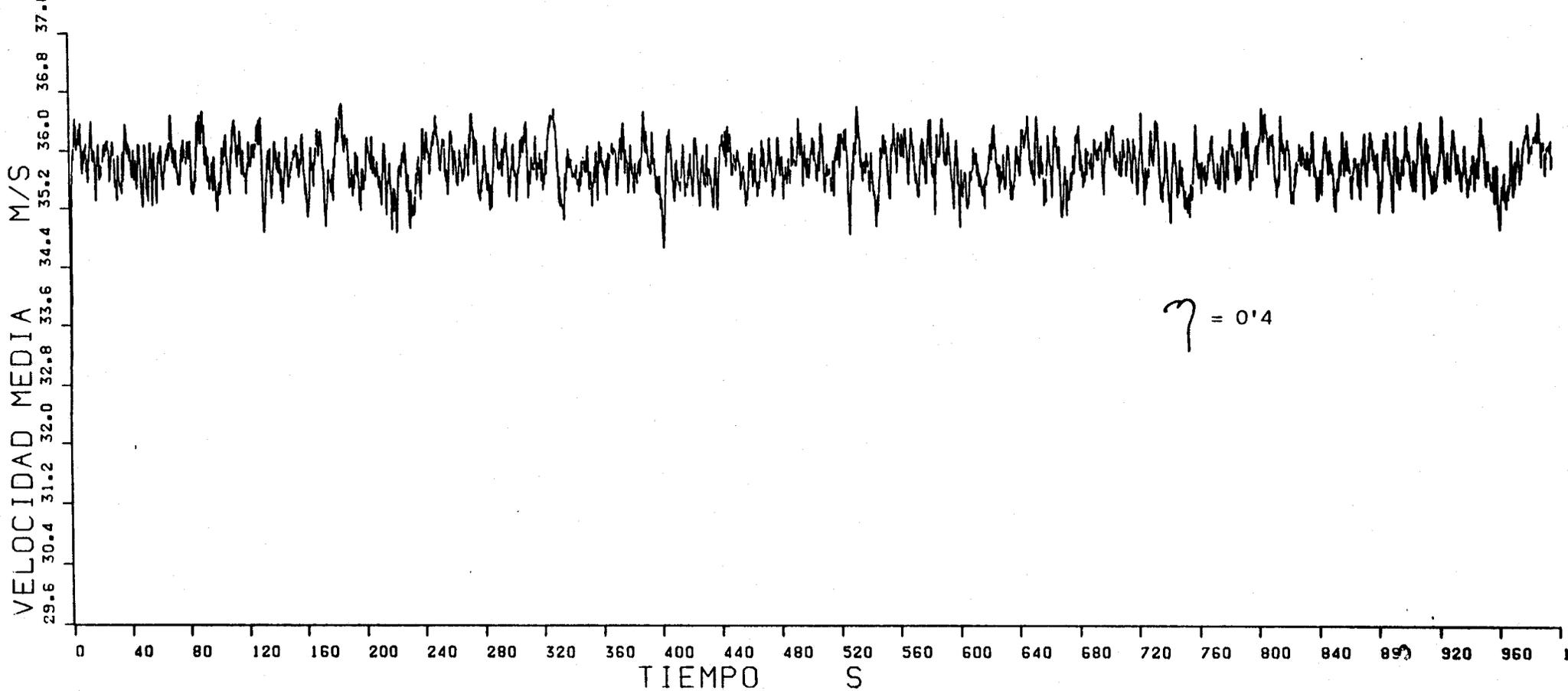


Fig.V.22. Evolución de la velocidad media para una línea de tráfico de densidad reducida  $\eta = 0,4$ , compuesta por 475 vehículos rápidos con velocidad media deseada  $\bar{v}_1 = 40$  m/s y 25 vehículos lentos con velocidad media deseada  $\bar{v}_2 = 10$  m/s. Los demás detalles de la simulación se indican en el texto.

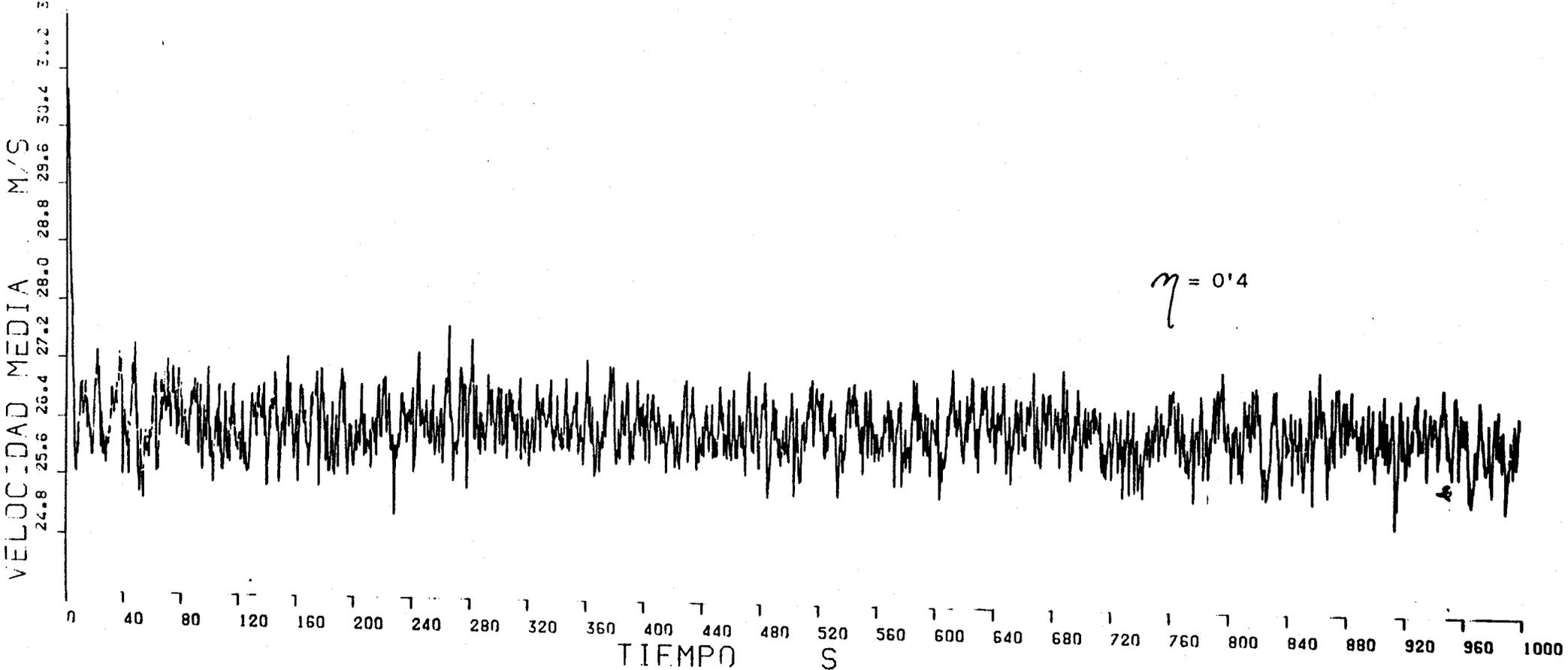


Fig.V.23. Lo mismo que la figura V.22. pero con 350 vehículos rápidos y 150 vehículos lentos.

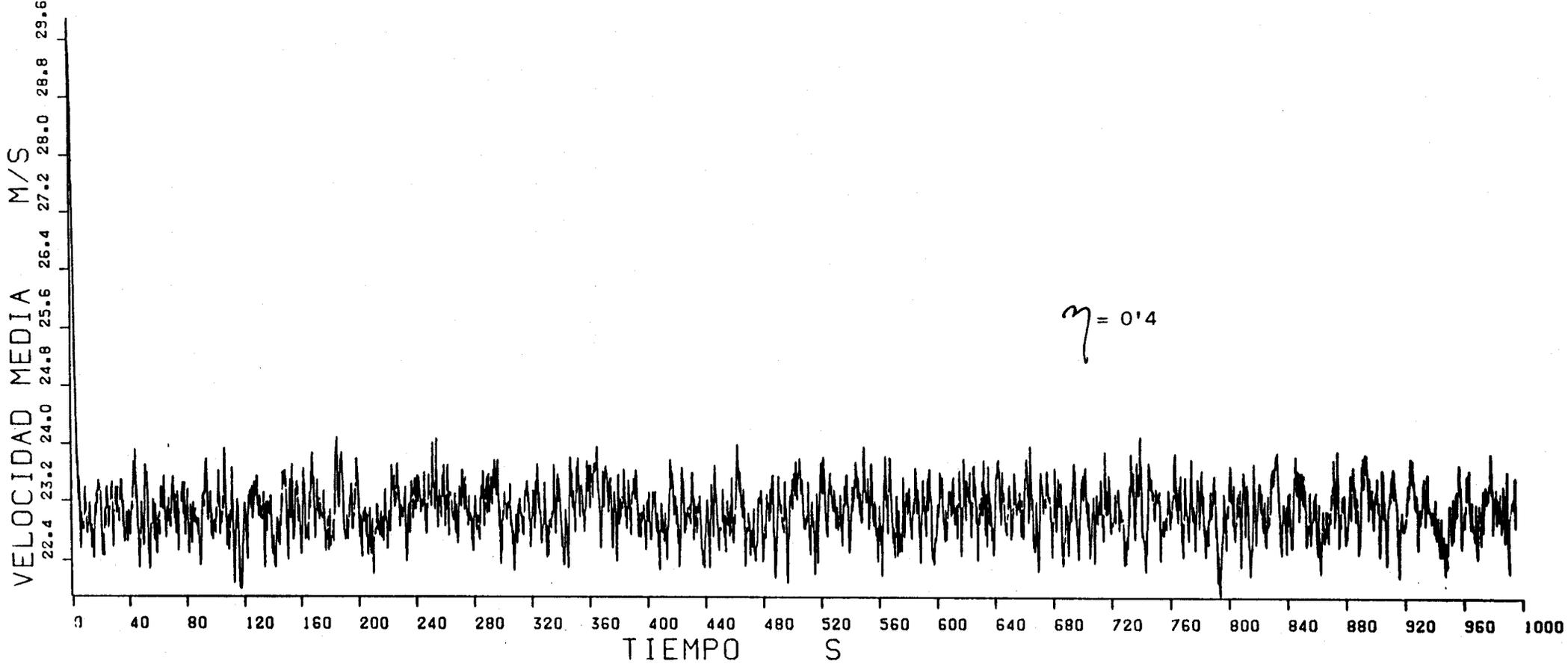


Fig.V.24. Lo mismo que la figura V.22. pero con 300 vehículos rápidos y 200 vehículos lentos.

Se observa que el ruido (amplitud de las fluctuaciones) no es afectado significativamente por el valor de la relación pesados/ligeros, aunque desde luego si que lo es la media temporal. Una conclusión similar se alcanza para  $\eta = 0,7$  tal como se ve en la figura V.25., V.26. y V.27.. Sin embargo, teniendo en cuenta la diferencia en la escala vertical con las figuras anteriores correspondientes a  $\eta = 0,4$ , se observa que las fluctuaciones han aumentado sensiblemente con la densidad reducida, poniendo de manifiesto una mayor inestabilidad de la línea de tráfico.

Nosotros hemos caracterizado las fluctuaciones por la desviación cuadrática media definida como

$$\sigma = \left( \overline{(v - \bar{v})^2} \right)^{\frac{1}{2}}$$

Donde las barras indican valores medios temporales y  $v$  es la velocidad media instantánea de los vehículos. Los valores obtenidos para  $\sigma$  se dan en las tablas V.5., V.6. y V.7..

Se observa que aunque el valor de  $\sigma$  no crece monotonamente con la concentración, si que lo hace el cociente  $\sigma/v$  que es la magnitud físicamente relevante y que mida la dimensión de las fluctuaciones comparadas con la propia velocidad media.

En cuanto a la dependencia respecto de la relación pesados/ligeros se observa que el cociente  $\sigma/v$  aumenta cuando se disminuye dicha relación, excepto quizás a altas concentraciones. Recordemos que los

TABLA V.5.

Relación Pesados/ligeros = 5/95

$\eta$	$\bar{v}$ (m/s)	$\sigma$ (m/s)	$\sigma/\bar{v}$
0,1	38,208	0,0295	$7,721 \cdot 10^{-4}$
0,2	38,006	0,0862	$2,268 \cdot 10^{-3}$
0,3	37,364	0,1746	$4,636 \cdot 10^{-3}$
0,4	35,834	0,2959	$8,257 \cdot 10^{-3}$
0,5	32,957	0,4298	$1,304 \cdot 10^{-2}$
0,6	28,107	0,6389	$2,273 \cdot 10^{-2}$
0,7	19,365	0,6259	$3,232 \cdot 10^{-2}$
0,8	13,537	0,4646	$3,432 \cdot 10^{-2}$
0,9	10,311	0,4135	$4,010 \cdot 10^{-2}$

**TABLA V.6.**

**Relación Pesados/ligeros = 30/70**

$\eta$	$\bar{v}$ (m/s)	$\sigma$ (m/s)	$\sigma/\bar{v}$
0,1	31,681	0,0523	$1,651 \cdot 10^{-3}$
0,2	31,074	0,1455	$4,682 \cdot 10^{-3}$
0,3	29,383	0,2601	$8,852 \cdot 10^{-3}$
0,4	26,396	0,3519	$1,333 \cdot 10^{-2}$
0,5	22,711	0,3906	$1,720 \cdot 10^{-2}$
0,6	18,982	0,3924	$2,067 \cdot 10^{-2}$
0,7	15,144	0,3723	$2,458 \cdot 10^{-2}$
0,8	11,063	0,4318	$3,903 \cdot 10^{-2}$
0,9	8,186	0,8069	$9,857 \cdot 10^{-2}$

**TABLA V.7.**

**Relación Pesados/ligeros = 40/60**

$\eta$	$\bar{v}$ (m/s)	$\sigma$ (m/s)	$\sigma/\bar{v}$
0,1	28,548	0,0584	$2,046 \cdot 10^{-3}$
0,2	27,846	0,1565	$5,620 \cdot 10^{-3}$
0,3	26,018	0,2700	$1,038 \cdot 10^{-2}$
0,4	23,102	0,3381	$1,463 \cdot 10^{-2}$
0,5	19,831	0,3619	$1,867 \cdot 10^{-2}$
0,6	16,766	0,3099	$1,848 \cdot 10^{-2}$
0,7	13,872	0,2827	$2,038 \cdot 10^{-2}$
0,8	10,514	0,3521	$3,349 \cdot 10^{-2}$
0,9	7,888	0,6142	$7,786 \cdot 10^{-2}$

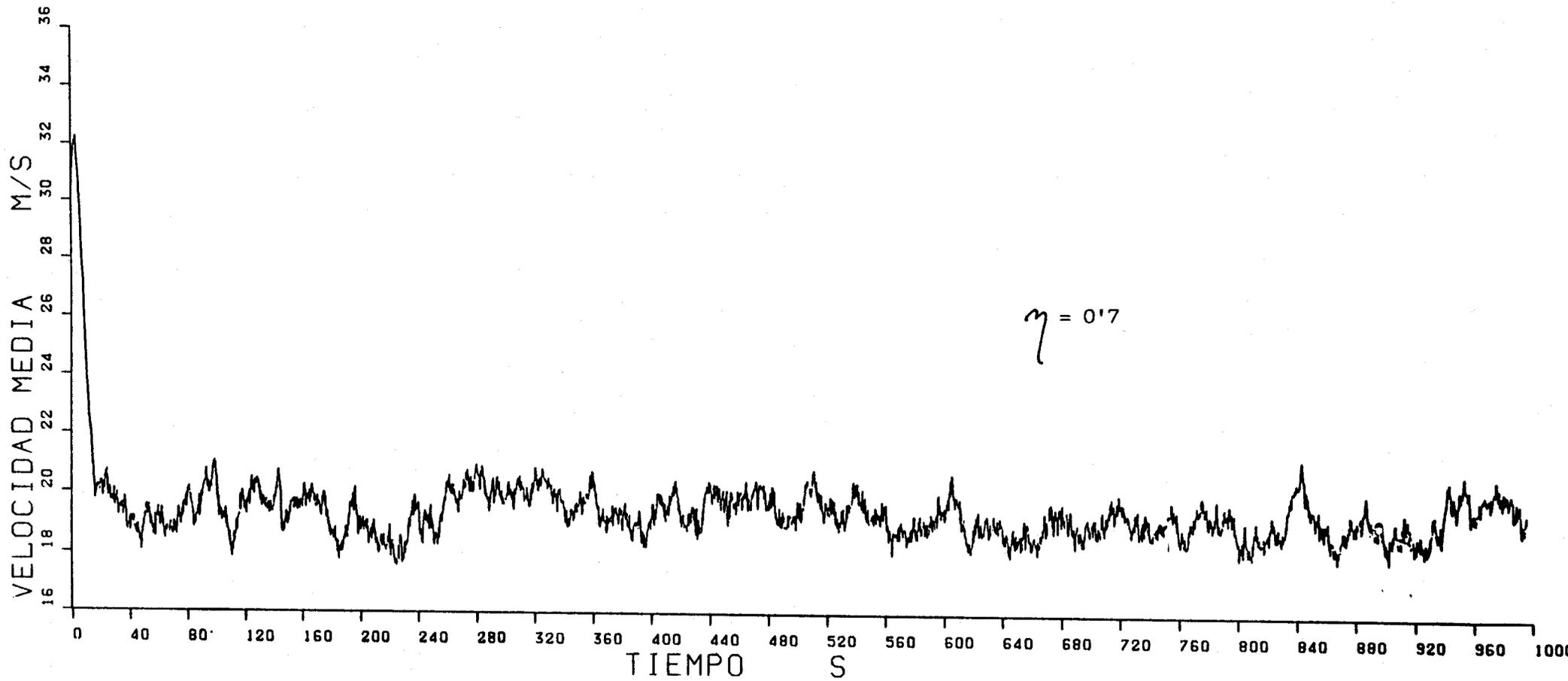


Fig.V.25. Evolución de la velocidad media para una línea de tráfico de densidad reducida  $\eta = 0,7$ , compuesta por 475 vehículos rápidos con velocidad media deseada  $\bar{v}_1 = 40\text{m/s}$  y 25 vehículos lentos en con velocidad media deseada  $\bar{v}_2 = 10\text{m/s}$ . Los demás detalles de la simulación se indican en el texto.

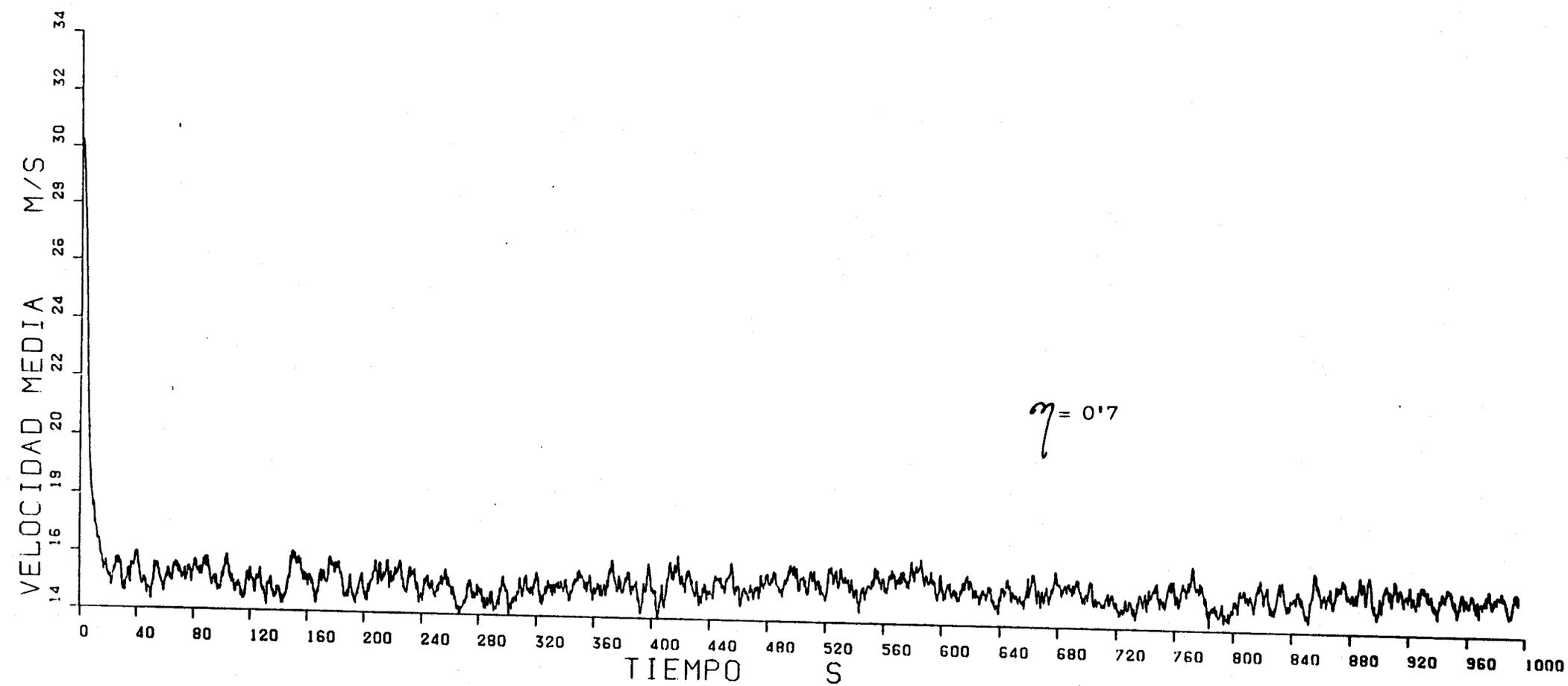


Fig.V.26. Lo mismo que en la figura V.25. pero con 350 vehículos rápidos y 150 vehículos lentos.

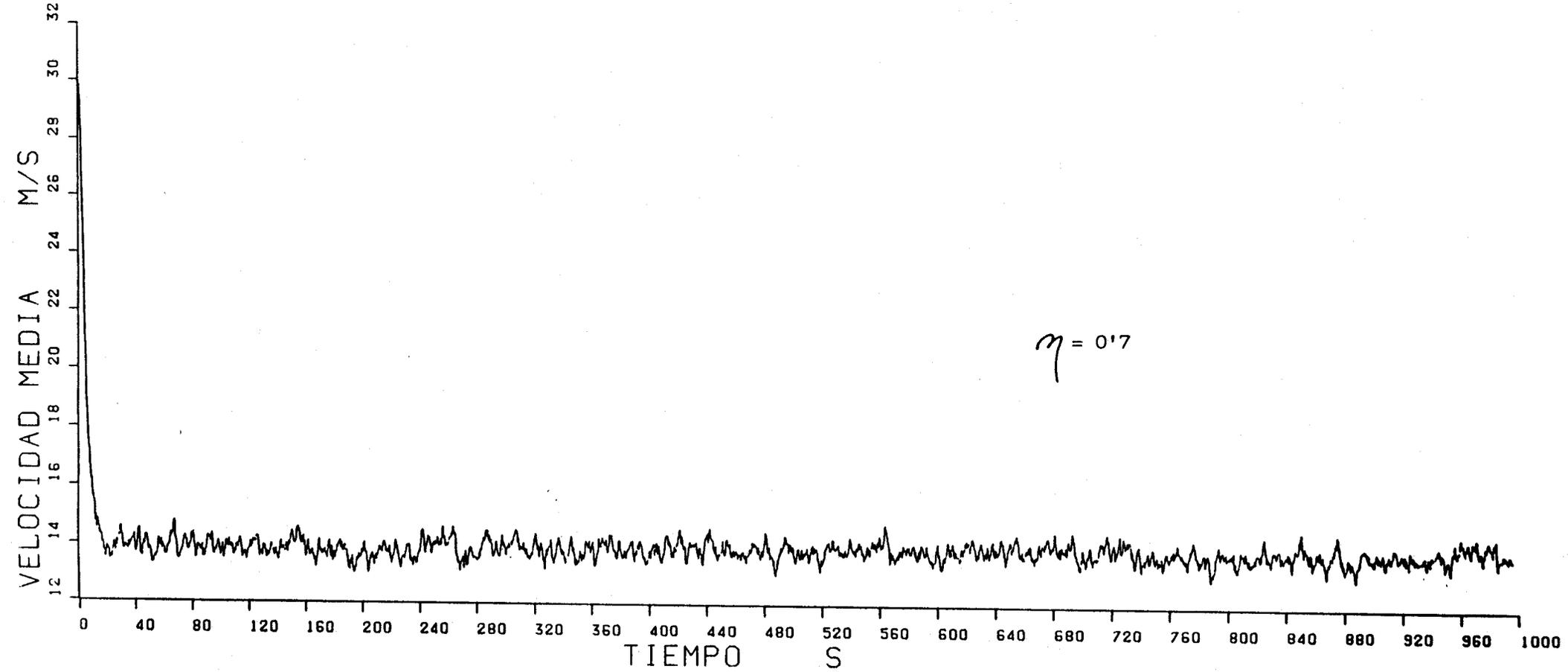


Fig.V.27. Lo mismo que en la figura V.25. pero con 300 vehículos rápidos y 200 vehículos lentos.

valores correspondientes a concentraciones reducidas proximas a la unidad son las menos fiables dado el gran tiempo requerido por el sistema para alcanzar una verdadero estado estacionario.

Puede sorprender a primera vista que  $\sigma/v$  sea mayor cuando el cociente pesados/ligeros sea menor. Sin embargo, es facil de entender a partir de la dinámica que define nuestro modelo. cuando hay pocos vehiculos lentos, los rápidos alcanzan por termino medio una velocidad del orden de su velocidad deseada entre cada dos interacciones con los primeros. La consecuencia es que esta interacción implica, en el caso de no producirse adelantamiento, una rápida disminucion de la velocidad del vehiculo rápido, es decir cambios abruptos de velocidad. Por el contrario si la concentración de vehiculos lentos es elevada, los vehiculos rápidos tienen menos oportunidades de acercarse a su velocidad deseada antes de encontrarse con otro lento. En consecuencia el cambio de velocidad en el caso de no producirse adelantamiento es más suave.

Los resultados presentados en este apartado deben de entenderse como prelinimares, en el sentido de que es claramente necesario realizar un estudio mas exahustivo de los orígenes y características del ruido en una via de tráfico.

En particular, sería interesante realizar un análisis armónico de los mismos para, entre otras cosas, detectar posibles influencias asociadas con el caracter finito del circuito. Una inspección ocular de las figuras muestra un comportamiento bastante

regular que hace esperar que sea posible una interpretación en terminos de unos pocos armónicos fundamentales. En cualquier caso, queremos hacer constar que este es el primer estudio del comportamiento del ruido en líneas de tráfico del que tenemos conocimiento.

## V.6. Aplicación del Modelo cinético al estudio de la influencia de un "convoy".

El modelo cinético que hemos venido utilizando puede modificarse fácilmente para adecuarlo a situaciones específicas del tráfico. Por ejemplo, nosotros hemos considerado la circulación de un convoy de vehículos, coexistiendo con un tráfico normal. Por convoy entendemos un conjunto de vehículos que circulan a la misma velocidad todos ellos y que están, además, separados entre sí una distancia constante. Parece evidente que, debido a la rigidez del comportamiento del convoy asociada con las ligaduras entre los vehículos que lo componen, su presencia debe afectar sensiblemente al comportamiento de la línea de tráfico.

Este modelo puede ser de interés para estudiar situaciones que se presentan frecuentemente en el tráfico real, obteniendo conclusiones referentes tanto a la eficacia como a la seguridad.

Al igual que en las simulaciones anteriores hemos considerado un número total de vehículos igual a 500 y que la circulación se desarrolla en una línea cerrada de tráfico. El convoy está compuesto por 25 vehículos que circulan a una distancia de 50 metros uno de otro y a una velocidad constante de 10 m/s. Estos valores están inspirados en las Recomendaciones Oficiales para circulación de convoy militares.<sup>33)</sup>  
34)

Inicialmente los vehículos que componen el convoy se sitúan correlativamente uno a continuación

de otro. A los 475 vehiculos restantes se les asigna una distribución inicial de velocidades normal, de valor medio 30 m/s y varianza 5 m/s. Además se les asigna una distribución de velocidades deseadas también normal con media 40 m/s y varianza 2 m/s. Por último digamos que estos vehiculos se sitúan inicialmente equidistantes.

Para la densidad de saturación  $c_s$  se ha tomado el valor 0,16 vehiculos/metro y para la constante de tiempo,  $\tau = 2.s$ . Al resto de los parámetros se les asignaron los mismos valores que en las simulaciones anteriores. El tiempo total de simulación en cada caso fué de 1000 segundos.

Los resultados obtenidos para la velocidad media y la intensidad de tráfico en el estado estacionario se representa en la figura V.27., donde se ve que cualitativamente se ajusta a la forma general de la ecuación de estado del tráfico. Desde luego, los valores medios se han obtenido incluyendo todos los vehiculos de la linea, es decir tanto los que forman el convoy como los que no pertenecen al mismo.

La forma característica de la evolución de la velocidad media puede verse en la figura V.28. que corresponde al caso  $\eta = 0,4$ . Debido a que la velocidad media inicial de los vehiculos libres es menor que la deseada, se produce un rápido aumento inicial. Este aumento está facilitado por el hecho de que inicialmente los vehiculos están igualmente separados y consecuentemente pueden tender de un modo libre, sin interacciones, a su velocidad deseada. A continua-

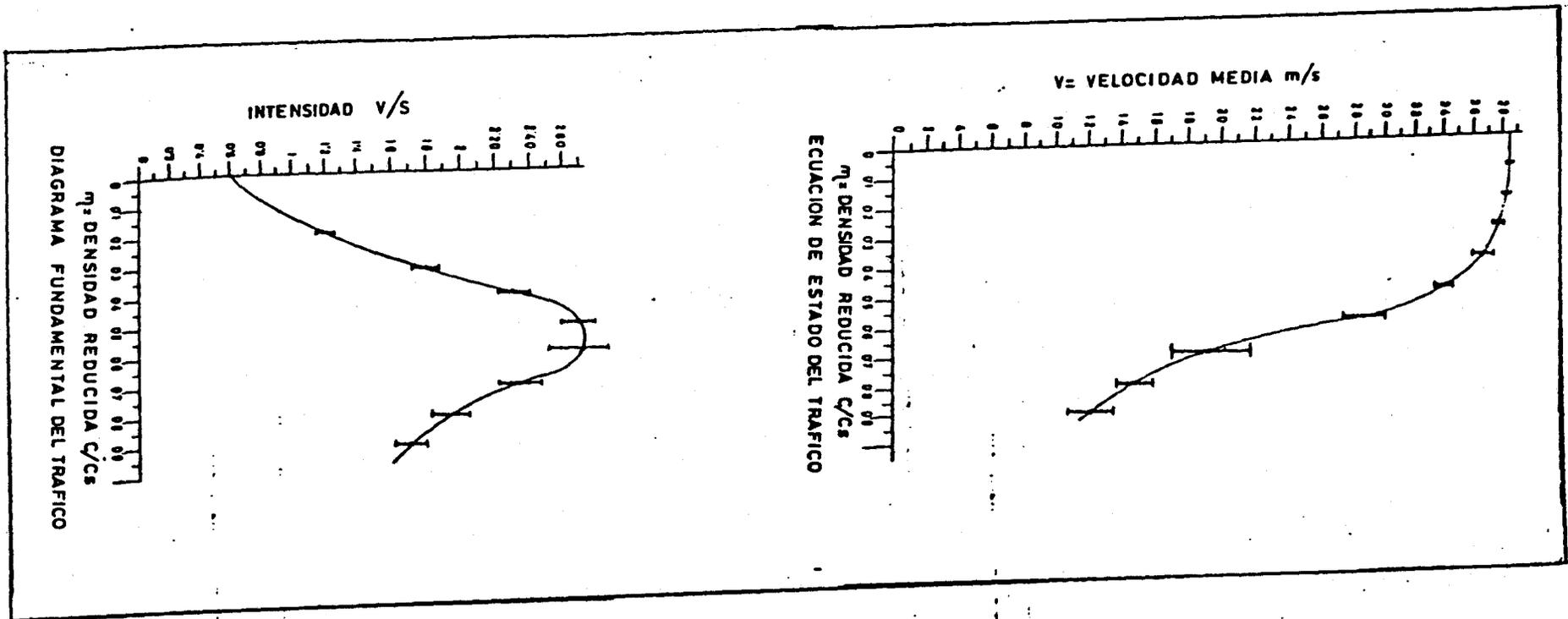


Fig.V.28. Velocidad media e intensidad frente a la concentración reducida para una línea de tráfico en estado estacionario, compuesta por 475 vehículos rápidos y 25 vehículos lentos formando un convoy. Los demás detalles de la simulación se indican en el texto.

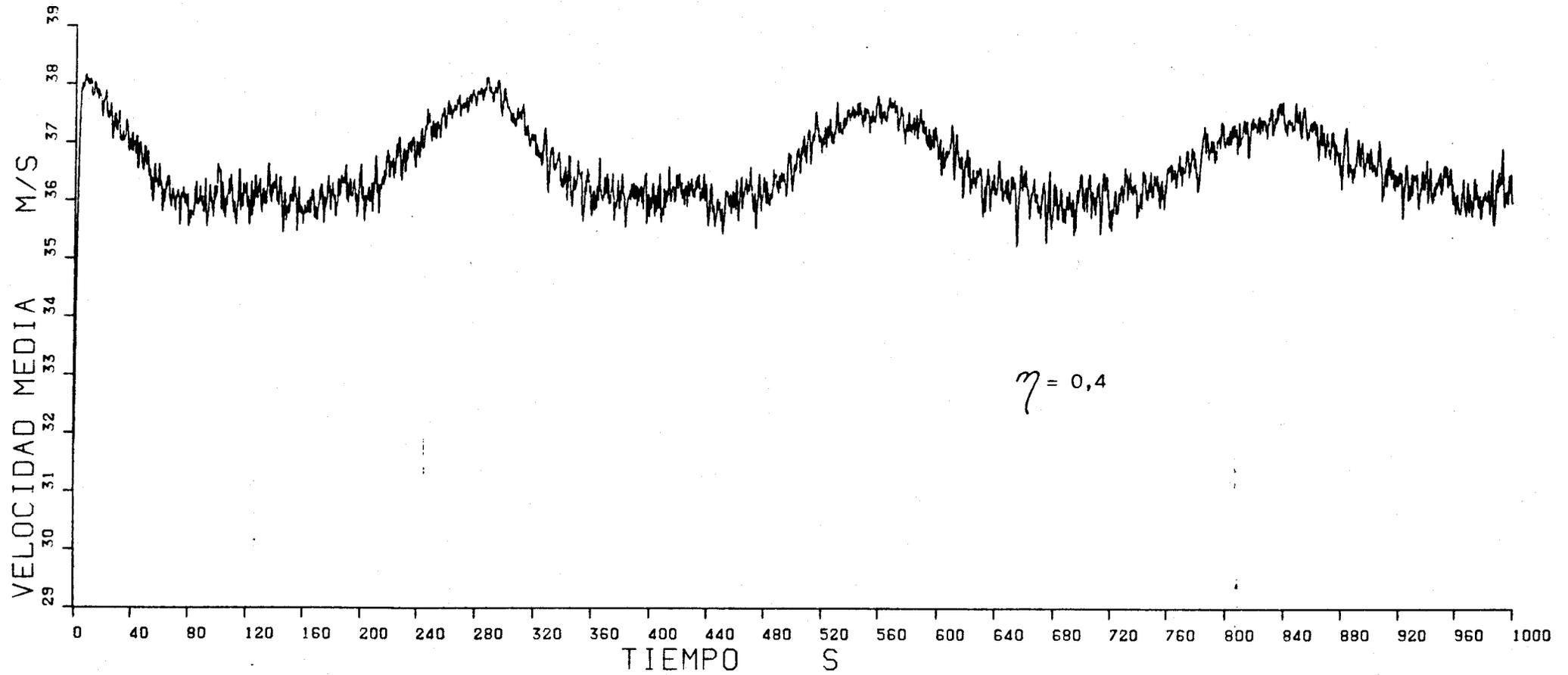


Fig.V.29. Evolución de la velocidad media para una línea de tráfico de densidad reducida  $\eta = 0,4$ , compuesta por 475 vehículos rápidos con velocidad media deseada  $\bar{v}_1 = 40\text{m/s}$  y 25 vehículos lentos formando convoy de velocidad  $v_2 = 10\text{m/s}$ . Los demás detalles de la simulación se indican en el texto.

ción, entran en juego los procesos de adelantamientos que producen una disminución de la velocidad real de los vehículos y también las fluctuaciones de los mismos. Además pasado un cierto periodo inicial, la evolución muestra claramente un caracter oscilatorio cuya naturaleza es facil de entender. En efecto, debido al modo de circular el convoy, este ocupa sólo una parte limitada del circuito, de manera que las interacciones entre un vehículo dado y el convoy se producen solo cada vez que el vehículo completa una vuelta relativa al convoy. Evidentemente si la distribución de los vehículos que no forman parte del convoy fuese estacionaria este efecto de periodicidad no se notaria. Esta es la razón por la que la amplitud de las oscilaciones va disminuyendo en el tiempo, mientras que su frecuencia se mantiene del orden de la correspondiente a la velocidad relativa de los vehículos respecto a los del convoy.

La máxima interacción entre el convoy y los vehículos libres corresponde a los tiempos en que la velocidad media es mínima y en tales tiempos se produce un mayor número de adelantamientos y consecuentemente la amplitud de las fluctuaciones es mayor, como puede observarse en la figura.

El tiempo requerido para que la línea alcance su comportamiento estacionario depende de la concentración. Así la figura V.29. muestra como para el caso  $\eta = 0,3$  la velocidad media alcanza rápidamente un valor practicamente estacionario, siendo muy pequeña, practicamente imperceptible, la amplitud de las oscilaciones debidas al caracter finito de la línea de tráfi-

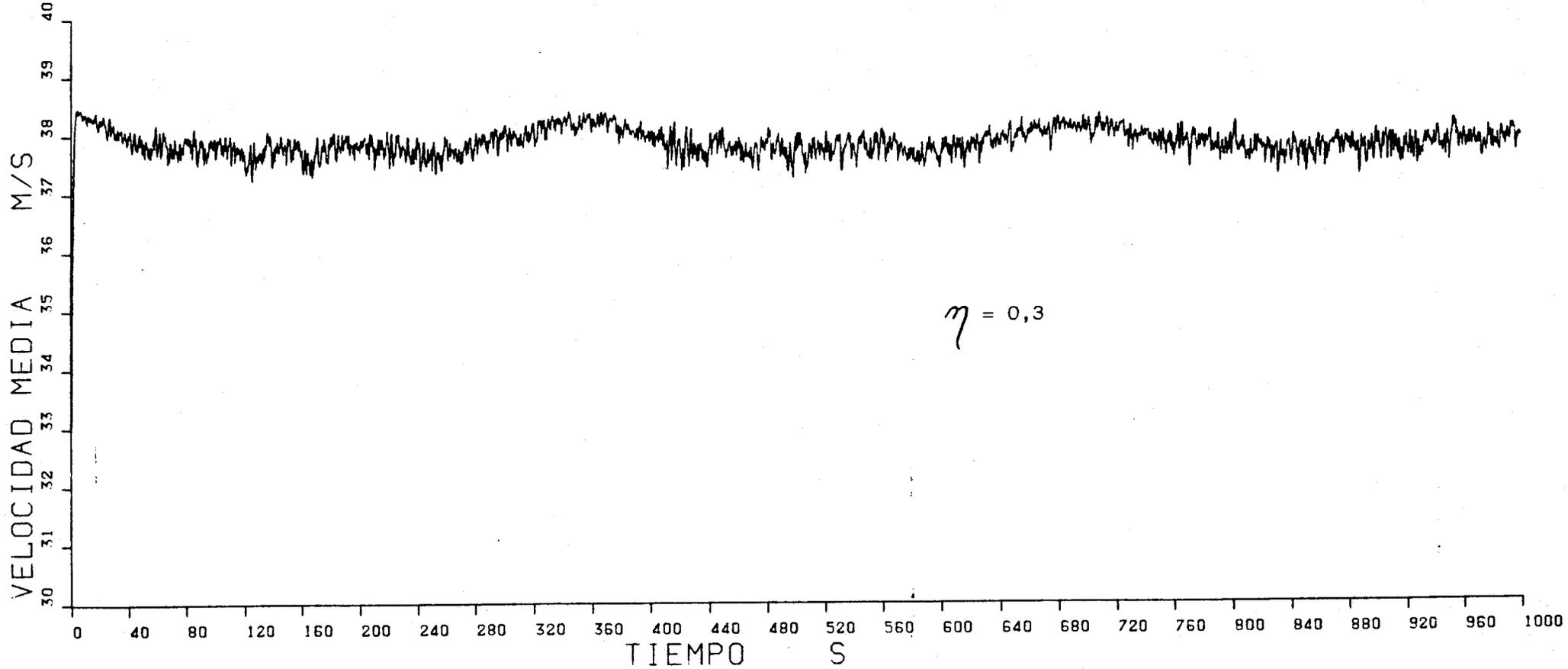


Fig.V.30. Lo mismo que la figura V.28. pero con una densidad reducida  $\eta = 0,3$ .

co. Aún así se aprecian claramente como la amplitud del ruido disminuye en los máximos de la velocidad media.

Para estudiar la influencia que el modo rígido de conducir característico de un convoy tiene sobre el estado estacionario de una línea de tráfico, en la figura V.30. comparamos la curva de estado y el diagrama fundamental obtenidos en el caso de que los vehículos lentos circulen libremente y en el caso de que lo hagan constituyendo un convoy. La relación pesados/ligeros es 5/95 y a todos los demás parámetros de la simulación se les dió los mismos valores que en los otros casos discutidos en este apartado.

En la figura se observa que el hecho de que los vehículos lentos circulen constituyendo un convoy no altera de forma significativa la ecuación fundamental de tráfico. Este resultado nos parece en cierta medida inesperado pues podría pensarse que el convoy constituye una barrera que los vehículos rápidos no son capaces de pasar sin verse frenados.

En cualquier caso, recordemos que sí que existen diferencias en los regímenes transitorios, tal como discutimos al analizar las figuras V.28. y V.29.

También hemos analizado el número de adelantamientos realizados durante un cierto intervalo de tiempo, y tampoco en este caso aparece una diferencia significativa entre vehículos lentos que circulan libremente y los que lo hacen formando un convoy, en la forma definida con anterioridad.

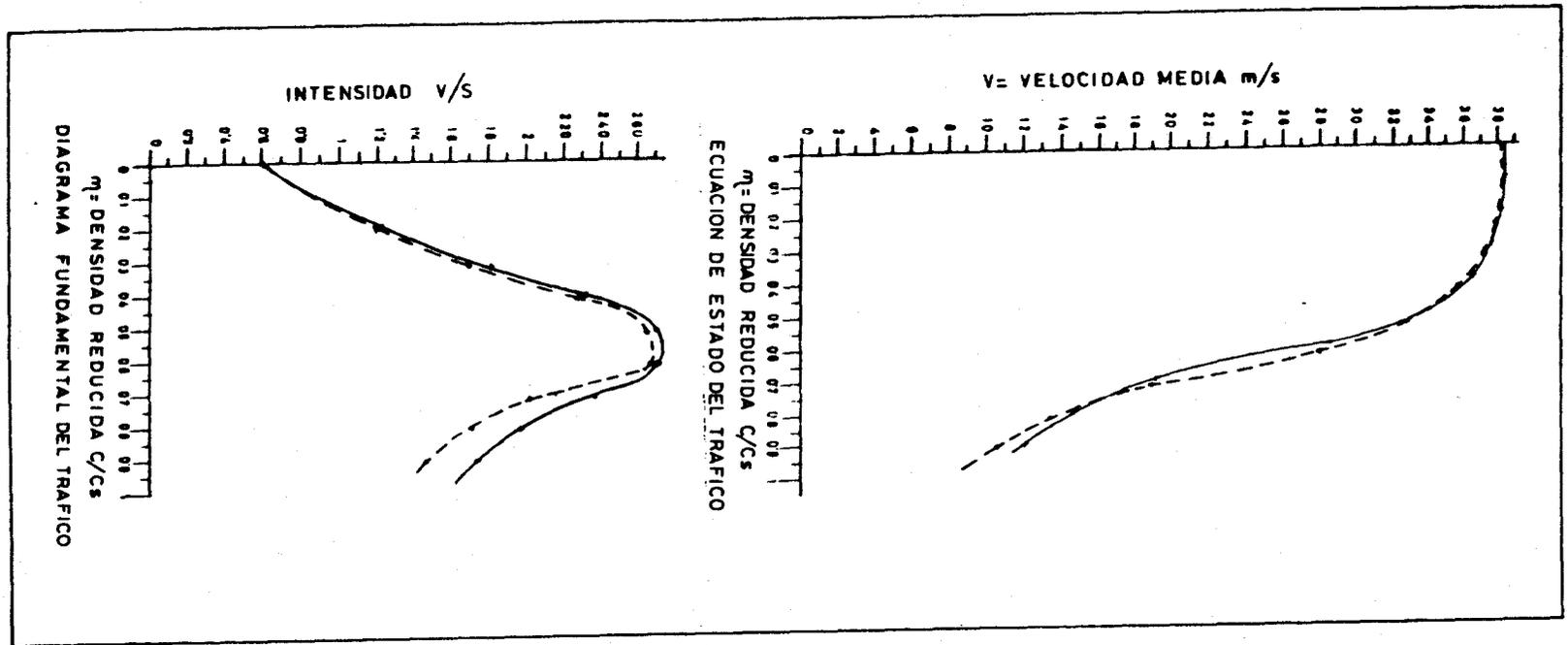


Fig.V.31. Comparación de la velocidad media e intensidad frente a la concentración reducida para dos líneas de tráfico en estado estacionario, compuestas ambas por 475 vehículos rápidos y 25 vehículos lentos. Los vehículos lentos en una forman un convoy (línea continua) y en otra circulan libremente (línea a trazos). Los demás detalles de la simulación se indican en el texto.

La conclusión general de nuestro estudio es que un convoy no perturba en modo significativo una línea de tráfico siempre y cuando la separación entre los vehículos que constituyen el convoy sea suficientemente grande, y el valor de 50m que nosotros hemos considerado lo es. Desde luego sería interesante realizar un análisis sistemático de la influencia del convoy en función de la separación entre los vehículos que lo componen. Es claro que esta influencia debe aumentar significativamente al disminuir dicha distancia.

## V.7. Influencia de los desdoblamientos y estrechamientos.

Otra situación frecuente en el tráfico real es la existencia de tramos de la vía en que las condiciones externas de circulación son distintos. Nos referimos por ejemplo a desdoblamientos, estrechamientos, travesías de ciudades, etc. Nuestro modelo puede utilizarse para estudiar la influencia de dichos tramos.

Hemos considerado en primer lugar un caso en que existe un tramo, equivalente al 10 % del circuito, en el que la probabilidad de los adelantamientos es igual a la unidad. La idea es representar una situación en que la carretera está lo suficientemente desdoblada como para que los vehículos puedan circular libremente, sin interacciones con los otros vehículos.

Los resultados obtenidos para la ecuación de estado y el diagrama de tráfico se representan en la figura V.31. Como siempre las curvas presentan su forma característica. La simulación corresponde a una muestra de 500 vehículos con distribución de velocidades deseadas normales, 70% de ellos con velocidad media  $\bar{v}_0 = 40$  m/s y el otro 30% con  $\bar{v}_0 = 10$  m/s. La varianza de ambas distribuciones es de 2 m/s. El tiempo de relajación viene dado en todo el circuito por la ley general (IV.6.). En la misma figura se representan los resultados obtenidos sin desdoblamientos. Como se vé el efecto del desdoblamiento es despreciable, en lo que se refiere a la intensidad del tráfico, a baja densidades, y muy pequeño a altas. En otras

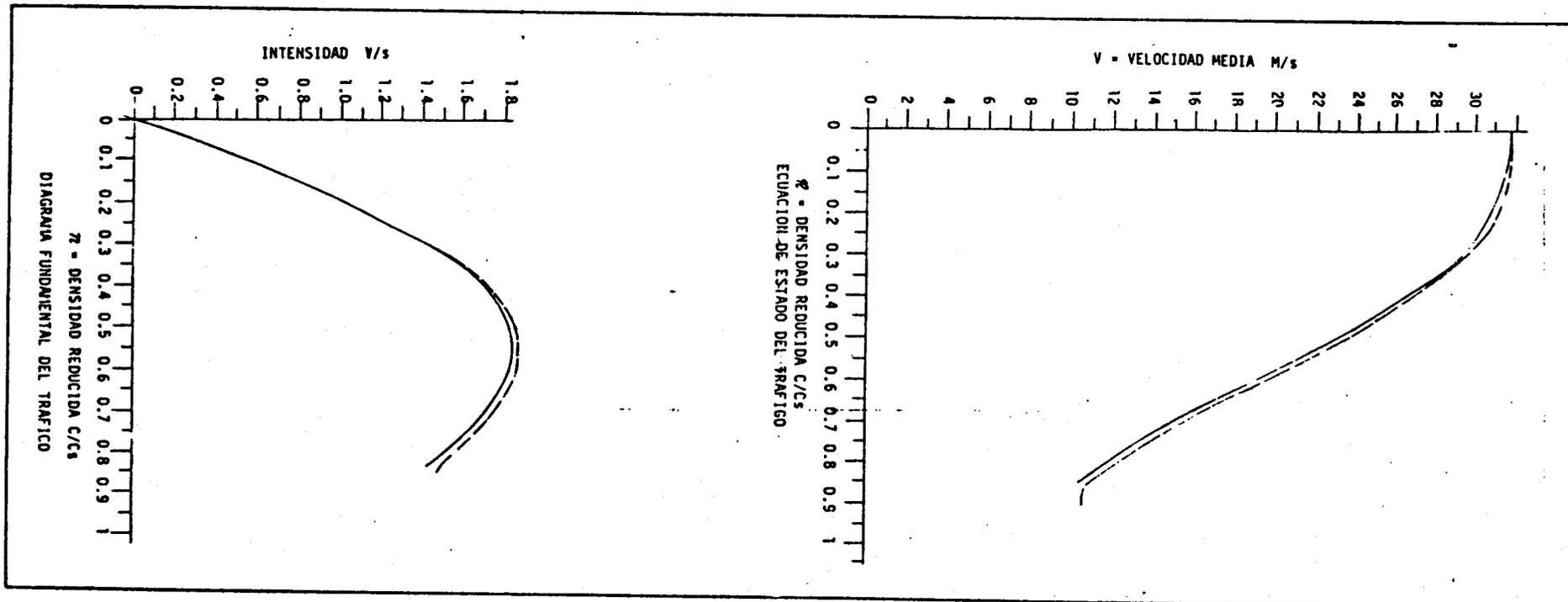


Fig.V.32. Ecuación de estado y diagrama fundamental del tráfico para una población mezclada de vehículos rápidos (70%) con velocidad media deseada  $\bar{v}_0 = 40\text{m/s}$  y vehículos lentos (30%) con velocidad media deseada  $\bar{v}_0 = 10\text{m/s}$ . Ambas distribuciones deseadas son normales, con varianza de  $2\text{m/s}$ . La línea continua corresponde a un circuito uniforme, mientras que la discontinua representa el caso de un desdoblamiento equivalente al 10% del circuito.

palabras, solo en el caso de un tráfico muy congestionado resulta eficaz un desdoblamiento parcial de la carretera, y ello en muy poca medida.

También hemos estudiado la situación inversa, concretamente cuando la probabilidad de adelantar es nula en un 10% del circuito. Los resultados mostrados en la figura V.32. muestran que ahora la influencia del tramo es muy relevante incluso a concentraciones pequeñas.

Las conclusiones obtenidas son fáciles de entender a un nivel cualitativo. En efecto, el comportamiento general de la línea de tráfico está influido principalmente por el tramo que corresponde a las condiciones más desfavorables. Dicho tramo, sea grande o pequeño actúa como un cuello de botella, limitando el flujo de vehículos que circula a lo largo del circuito. Sin embargo, sería muy interesante realizar medidas experimentales para analizar cuantitativamente las predicciones de nuestro modelo.

Otro aspecto interesante de este modelo es la posibilidad que ofrece de estudiar la influencia que las inhomogeneidades de la carretera tienen sobre las fluctuaciones, la formación de colas e incluso la estabilidad del sistema. Los desdoblamientos o estrechamientos actúan en algún modo sobre las colas, aumentando o disminuyendo su tamaño, y también producen efecto relevante sobre el número de adelantamientos que tiene lugar a la salida de ellos.

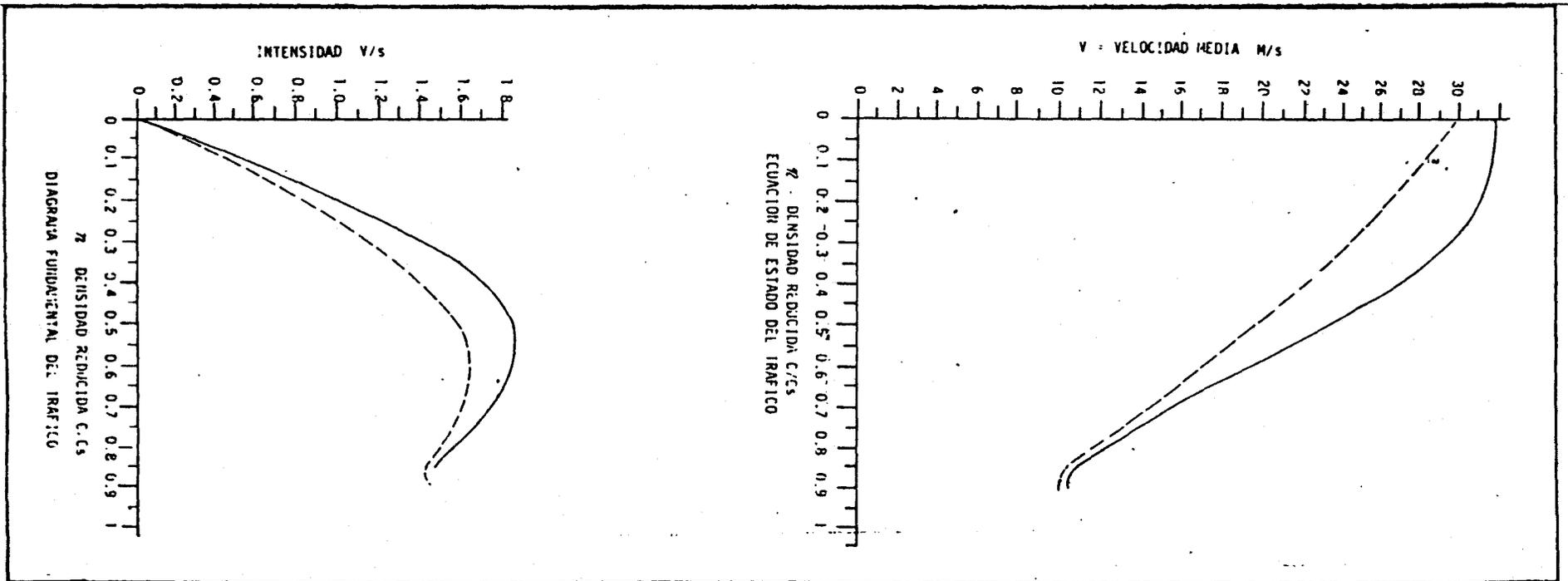


Fig.V.33. Lo mismo que la figura V.31., pero la linea discontinua representa el caso de un estrechamiento equivalente al 10% del circuito.

## **CONCLUSIONES**

1. Se ha realizado una revisión de algunos modelos de tráfico vial, centrándose en los que se basan en la idea de seguimiento del líder y en los denominados modelos cinéticos.
2. Se ha profundizado en el análisis y estudio del modelo cinético con velocidad deseada propuesto recientemente por nuestro grupo. Este modelo, de carácter dinámico, contiene un mecanismo de adelantamiento y tiene también en cuenta los deseos de los conductores.
3. La versatilidad del modelo permite aplicarlo a situaciones muy distintas. Nosotros hemos considerado en primer lugar una población mezclada de vehículos lentos y rápidos. Se ha visto que la forma cualitativa del diagrama fundamental del tráfico sigue siendo válida. Además, las fluctuaciones de la velocidad media en el estado estacionario dependen de la concentración, aumentando con la misma.
4. Debido a las interacciones entre los vehículos, se produce un fenómeno cooperativo, de manera que la función de distribución de velocidades estacionarias no coincide con la deseada. Se ha llevado a cabo una comparación sistemática de ambas para distintos valores de la concentración.
5. Nuestro modelo lleva de un modo natural a la formación de colas móviles a altas concentraciones. Se ha analizado la estructura de dichas colas, y su dependencia respecto de la concentración y de la relación vehículos pesados/vehículos ligeros.

6. También se ha estudiado la frecuencia con que tienen lugar los adelantamientos en distintas situaciones. Evidentemente ésta es una magnitud de gran interés práctico. Se ha visto así que la mayor frecuencia de adelantamientos se presenta a valores de la concentración mayores que el que corresponde a un flujo máximo de vehículos. También se ha observado que dichos valores disminuyen al disminuir la relación pesados/ligeros.
7. Como otra aplicación del modelo, se considera la circulación de un convoy dentro de una línea normal de tráfico. La principal conclusión es que el modo rígido de circular que tiene un convoy no afecta significativamente al diagrama fundamental del tráfico estacionario, aunque sí a los estados transitorios. Naturalmente estas conclusiones se refieren a convoyes que guarden una distancia prudencial entre vehículos.
8. Otras situaciones que hemos considerado son el desdoblamiento y el estrechamiento de una zona de la línea de tráfico. Los resultados muestran cómo el efecto negativo de un estrechamiento es mucho más acusado que el positivo producido por un desdoblamiento.
9. Desgraciadamente, no hemos dispuesto de datos experimentales correspondientes a una situación real para compararlos con los predichos por nuestro modelo. A lo largo de la memoria se sugieren distintas experiencias que creemos que serían de interés para comprender mejor el comportamiento de una línea de tráfico.

10. El tráfico presenta una problemática de gran belleza teórica al aunar, en cada vehículo, una componente sociológica y otra mecánica. Además, es necesario pasar del comportamiento individual al comportamiento colectivo.

**APENDICE A**

## APENDICE A

### Medida experimental de la aceleración y frenada máximas de un vehículo

Es evidente que en la aplicación práctica de un modelo de tráfico dado hay que asegurarse que no lleva a valores de la velocidad y la aceleración que caigan fuera de las posibilidades técnicas de las prestaciones de los vehículos. En ánimo de cuantificar esta limitación y centrándonos en el caso de un convoy se realizó la siguiente experiencia:

Se tomó un vehículo tipo en los convoyes, probablemente el más frecuente, y de él se consideraron tres versiones. La primera a la que denominaremos A, estaba constituida por una versión blindada más la tara, con un peso total de 3.500 Kg, aproximadamente. La segunda versión, que denominamos B, era el vehículo blindado sin tara, con un peso de 2.700 Kg. Por último, una tercera versión, denominada C, estaba constituida por un vehículo normal de este modelo (sin blindar) que tiene un peso total de 2.100 Kg.

En una pista horizontal que podía representar el piso correspondiente a una carretera normal en cuanto a textura, rugosidad y adherencia se refiere, se lanzó el vehículo A a una velocidad de 40 Km/h. En un instante y lugar determinado se produjo un frenazo brusco y mantenido del vehículo hasta su parada total. Esto mismo se repitió para la versión B y C.

Los vehículos llevaban incorporados un instrumental constituido básicamente por un acelerómetro capaz de medir y registrar aceleraciones. La intensidad de la frenada se medía mediante un sensor de presión de frenada. Se registraron las aceleraciones y el tiempo en que se producían, midiéndose también la distancia de frenada del vehículo.

Una salida típica se muestra en la figura: A.1, y los resultados medios se recogen en la tabla A1.

**TABLA A1. Velocidad inicial 40 Km/h**

<u>Versión</u>	<u>Distancia de frenada mts</u>	<u>Aceleración media <math>m/s^2</math></u>	<u>Tiempo seg.</u>
A	6	- 7	2
B	6,2	- 7,5	2
C	6,2	- 7,5	2

la experiencia se repitió para una velocidad inicial de 60 Km/h, obteniéndose los resultados de la tabla A2 (para un ejemplo de salida ver la figura A2).

**TABLA A2. Velocidad inicial 60 Km/h**

<u>Versión</u>	<u>Distancia de frenada mts</u>	<u>Aceleración media m/s<sup>2</sup></u>	<u>Tiempo seg.</u>
A	19	- 7	3
B	15	- 7,5	2,5
C	14	- 7,5	2,9

Por último se procedió a medir la máxima aceleración. Los resultados para el vehículo C se muestran en la figura A.3.

MOTOMETER BREMSVERZÖGERUNGS- und PEDALKRAFT - SCHREIBER MOTOMETER

Reg Blatt ges. gesch.

amtl Kennz. 40 km/h  
 km-Stand 2.775 km  
 Bremsmessung aus km/h

Ansprechdauer  $t_0 =$  s  
 + Schwelldauer  $t_s =$  s  
 + Vollbremsdauer  $t_v =$  s  
 = Bremsdauer  $t_{ges} =$  s  
 Verlustzeit  $= t_0 + \frac{t_s}{2} = t_0 =$  s

Bremsverzögerung

$a_{max,mit} =$  m/s<sup>2</sup>

mittl. Bremsverzögerung:

$$a_{mit} = a_{max,mit} \times \frac{t_{ges} - t_v}{t_{ges} + t_v} \text{ m/s}^2$$

$a_{mit} =$  m/s<sup>2</sup>

aufgebrachte maximale

Bremskraft (F) = N

Datum:

Unterschrift:

Best. Nr. 5 1341 103 00

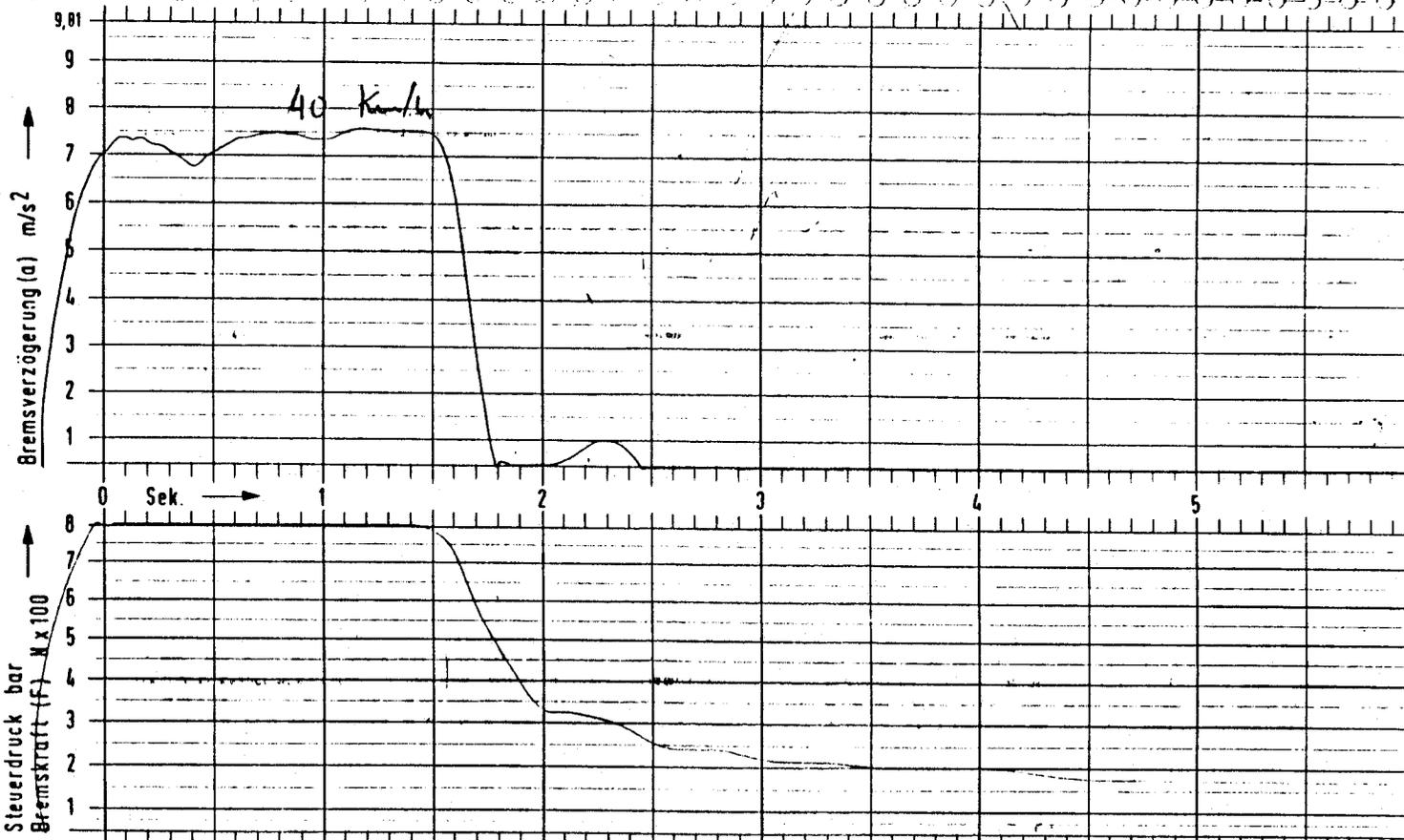


Fig. A.1

MOTOMETER BREMSVERZÖGERUNGS- und PEDALKRAFT - SCHREIBER MOTOMETER

Reg Blatt ges gesch

amtl. Kennz. 60 km/h  
 km - Ständ 2.775 kg  
 Bremsmessung aus km/h

Ansprechdauer  $t_a =$  s  
 + Schwelldauer  $t_s =$  s  
 + Vollbremsdauer  $t_v =$  s  
 = Bremsdauer  $t_{ges} =$  s  
 Verlustzeit  $= t_a + \frac{t_s}{2} = t_u =$  s

Bremsverzögerung

$a_{max,mit} =$  m/s<sup>2</sup>

mittl. Bremsverzögerung:

$a_{mit} = a_{max,mit} \times \frac{t_{ges} - t_u}{t_{ges} + t_u}$  m/s<sup>2</sup>

=

$a_{mit} =$  m/s<sup>2</sup>

aufgebrachte maximale

Bremskraft (F) = N

Datum:

Unterschrift:

Best. Nr. 5 1341 103 00

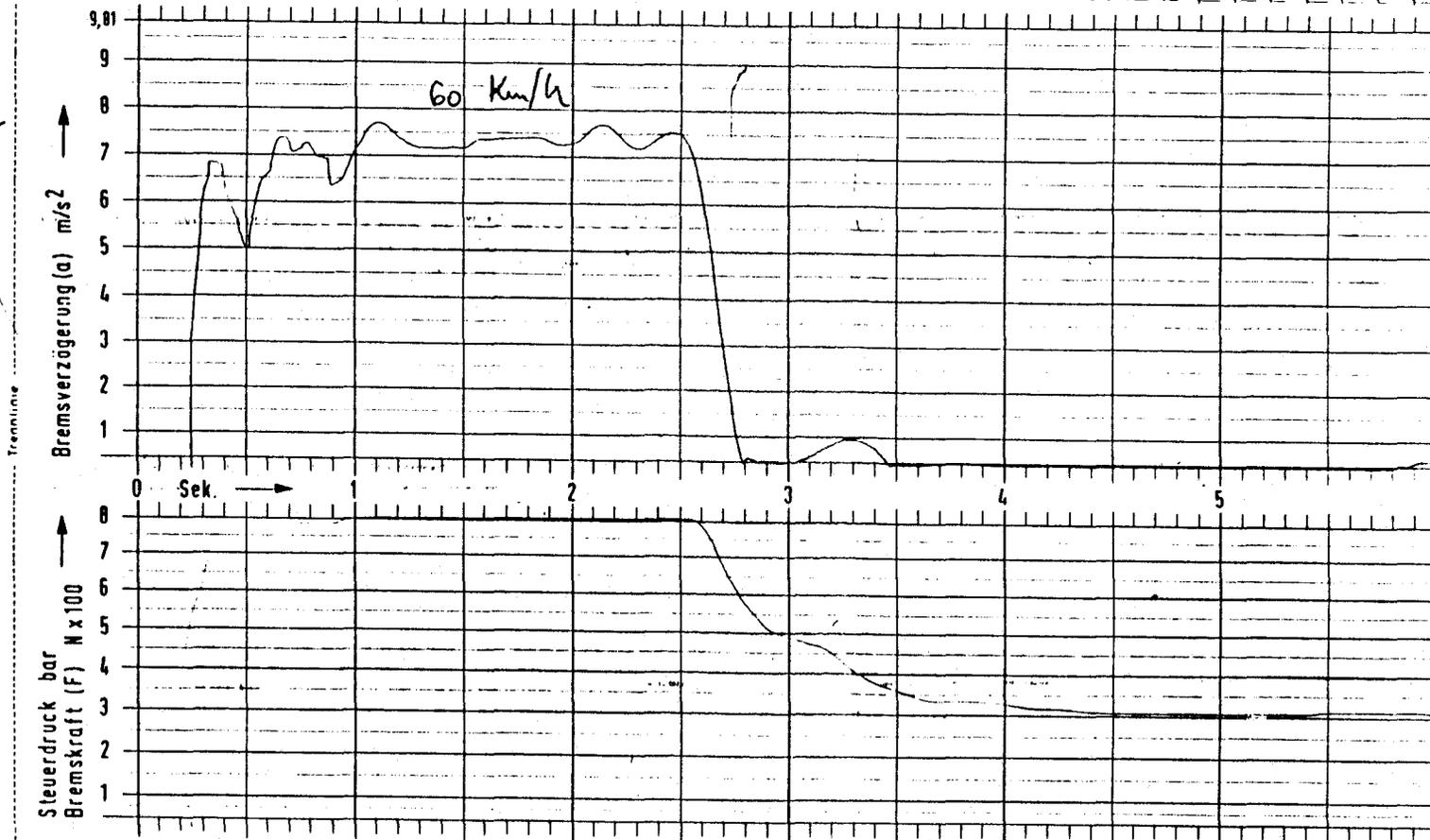


FIG. A. 2

MOTOMETER BREMSVERZÖGERUNGS- und PEDALKRAFT-SCHREIBER MOTOMETER

Reg. Blatt ges. gesch.

amtl. Kennz. ....  
 km-Stand .....  
 Bremsmessung aus km/h .....

Ansprechdauer  $t_0 =$  ..... s  
 + Schwelldauer  $t_s =$  ..... s  
 + Vollbremsdauer  $t_v =$  ..... s  
 = Bremsdauer  $t_{ges} =$  ..... s  
 Verlustzeit  $-t_0 + \frac{t_s}{2} + t_v =$  ..... s

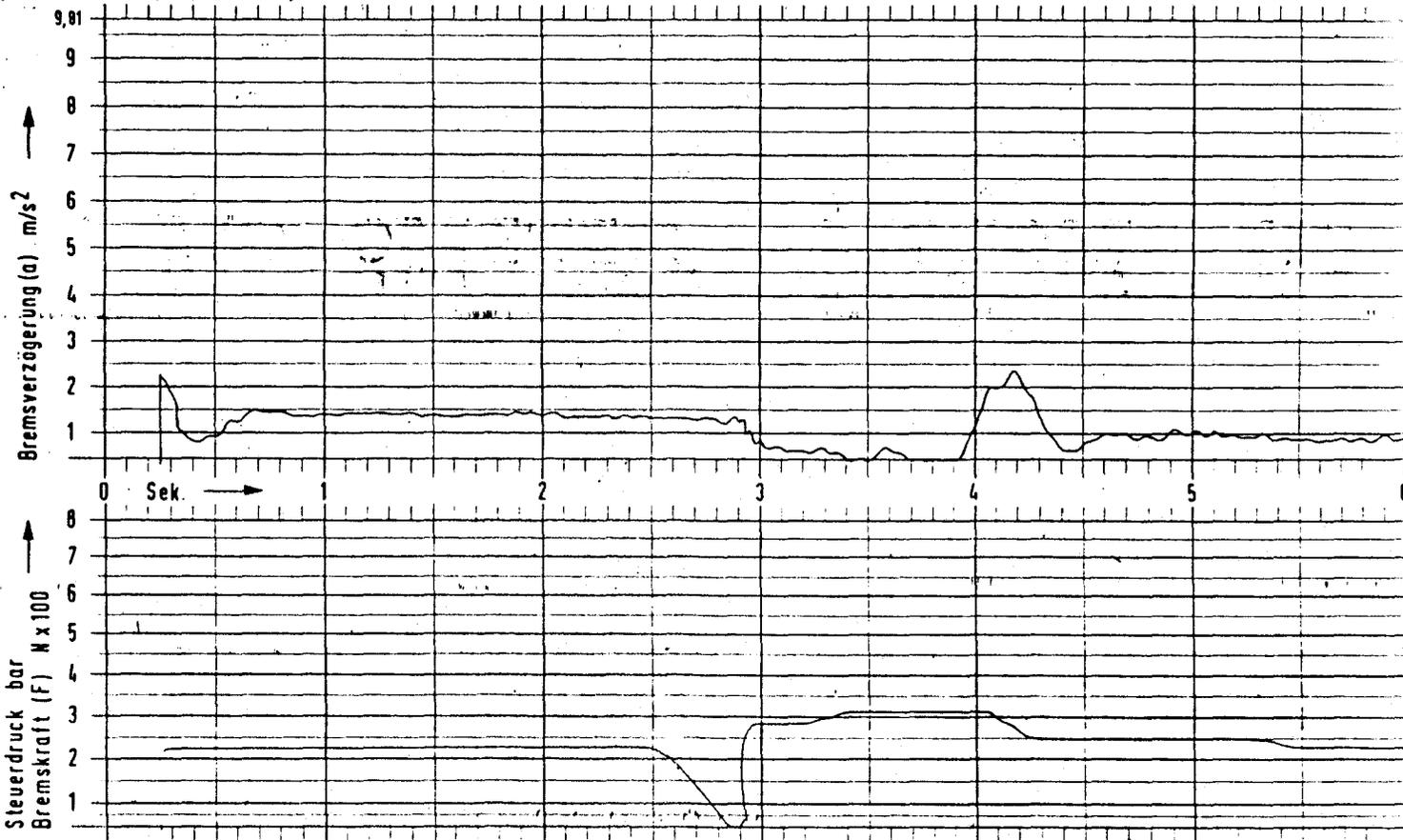
Bremsverzögerung  
 $a_{max, mit} =$  .....  $m/s^2$   
 mittl. Bremsverzögerung:  
 $a_{mit} = a_{max, mit} \cdot \frac{t_{ges} - t_0}{t_{ges} + t_0}$   $m/s^2$

= .....  $m/s^2$   
 $a_{mit} =$  .....  $m/s^2$   
 aufgebrauchte maximale  
 Bremskraft (F) = ..... N

Datum: .....  
 Unterschrift: .....

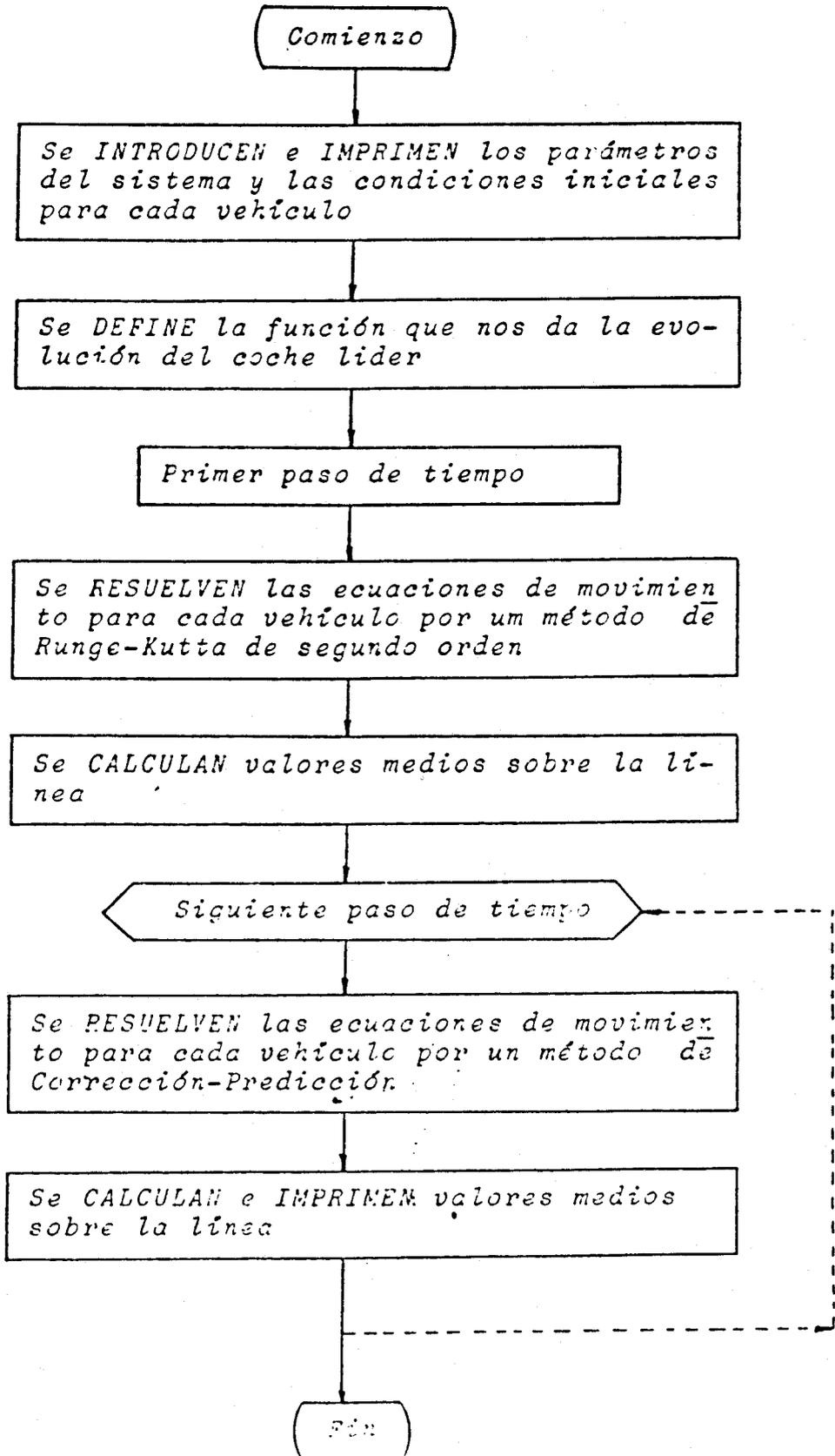
Best. Nr. 5 1341 103 00

Trennlinie



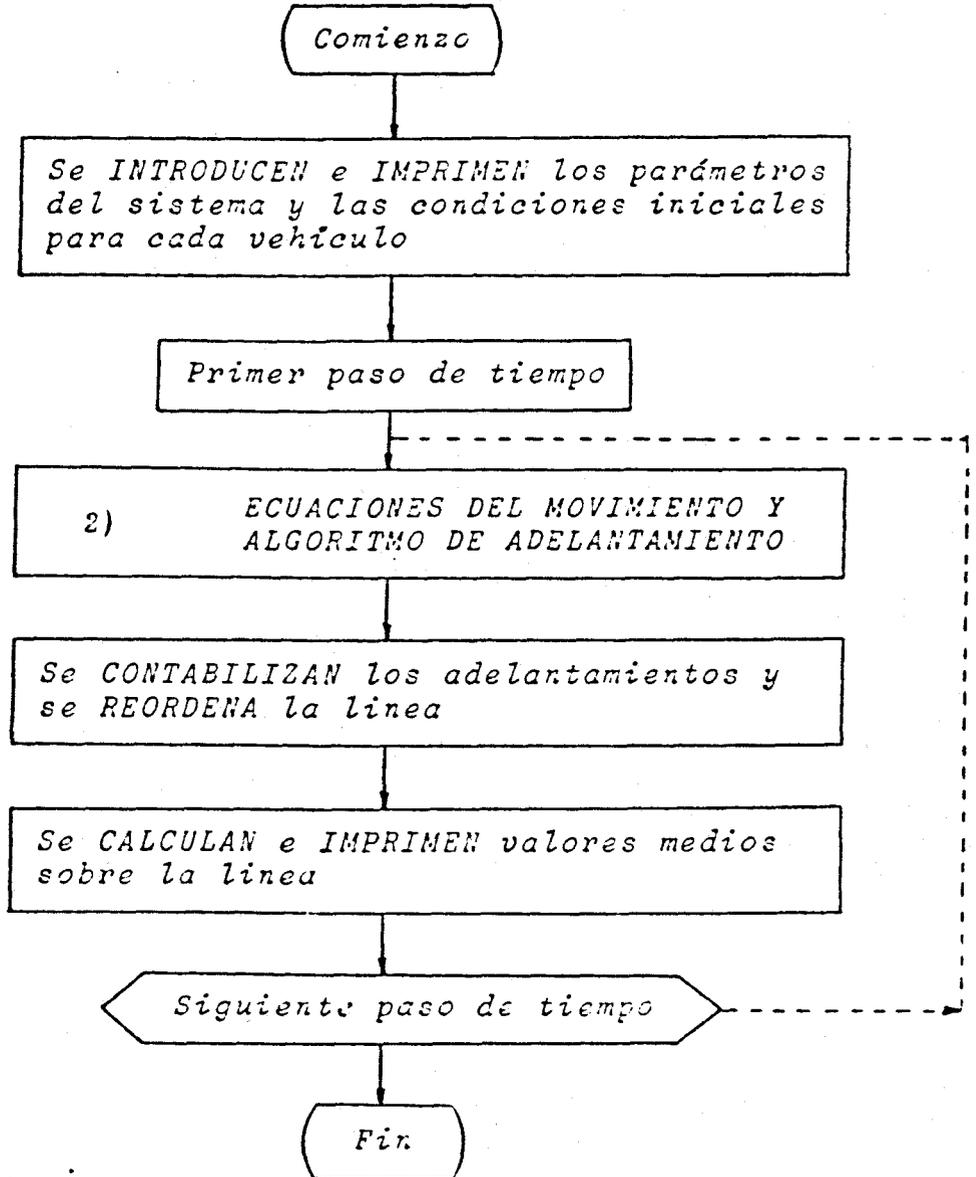
**APENDICE B**

Fig. B.1. Diagrama de flujo para la simulación del modelo de seguimiento.

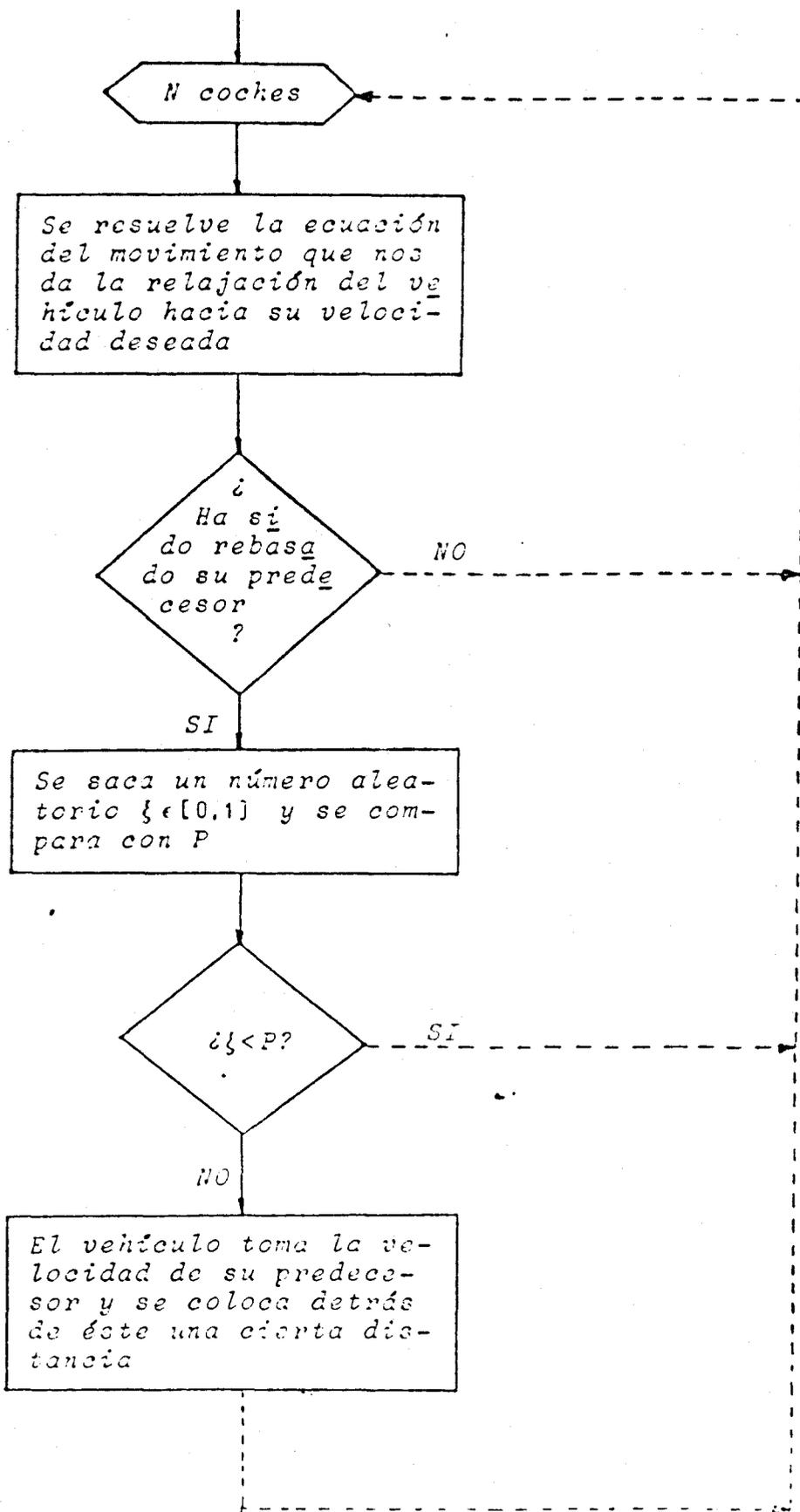


**APENDICE C**

Modelo cinético



2) Detalle del algoritmo de adelantamiento:



**APENDICE D**

## APENDICE D

### Directorio de modelos.

En la generación de los modelos implementados en ordenador hemos seguido una lógica secuencial, de tal forma que cada programa referente a un modelo, servía de base a la obtención del correspondiente modelo mas avanzado; esta secuencia con las correspondientes bifurcaciones da lugar a una arborescencia de programas. De otra forma, la "información" del modelo base es retenida, "enmascarada" y/o modificada para la obtención de modelos sucesivos. Siguiendo el similitud de la evolución biológica, podemos decir que cualquier modelo contiene toda la información (aunque parte no se utilice) de los modelos que genealógicamente le corresponden.

Por otra parte, en el diseño de los programas se ha intentado ser lo mas modular posible, para facilitar su propia evolución desde el punto vista de sistema de bloques.

El número de programas que se han realizado en el desarrollo de este trabajo siguiendo la metodología descrita es del orden de 90, archivados todos ellos informáticamente en soporte magnético. De ellos destacamos como hitos más importantes los siguientes programas:

VS. Modelo de seguimiento del lider.

VSA. Modelo de seguimiento del lider con distancia de seguridad  $D_s$  y probabilidad de adelantar P.  
En "línea cerrada".

- VPSA. Modelo anterior con la modificación de posicionar los vehículos por coordenadas polares.
- VC. Modelos cinéticos con distribuciones de velocidades gaussianas y/o exponenciales. En "línea cerrada".
- VPC. Introduce la modificación en el modelo anterior de posicionar los vehículos por coordenadas polares.
- VT. Modelo de Tanner sin aceleración lógica.
- VT1. Modelo de Tanner con aceleración lógica.
- C1. Modelo que dibuja la evolución temporal de la velocidad media de la línea de tráfico.
- DI. Modelo que dibuja la formación de colas móviles en un instante de tiempo dado.
- VM11. Modelo para el estudio de poblaciones mezcladas de vehículos lentos y rápidos.
- VM12. Modelo para el estudio de la incidencia en el tráfico de la introducción de doble carril en tramos del circuito.
- VM15. Modelo para el estudio de la incidencia en el tráfico de la introducción de tramos de circuitos con imposibilidad de adelantar (puentes, túneles, etc.).
- VM17. Modelo para el estudio de la sensibilidad del tráfico a relación pesados/ligeros.
- VM18. Modelo para el análisis de la estructura de la formación de colas móviles; número y distribución de colas. Estudio del número de adelantamientos.
- VM20. Analiza la interferencia del tráfico con un "convoy".

## VII BIBLIOGRAFIA

## VII. BIBLIOGRAFIA

- 1) J.G. Gardeta Oliveros. *Modelos de Tráfico Vial*. Centro de Estudios y Experimentación de Obras Públicas Madrid (1984).
- 2) E.W. Montroll and W. Badger. *Quantitative Aspects of Social Phenomena*, Gordon and Breach, New York (1974).
- 3) A. Alvarez Chillida. *Contribución al Estudio de Modelos de Tráfico Vial*. Tesis Doctoral. Departamento Física Teórica. Universidad de Sevilla 1987.
- 4) Highway Research Board. *Highway Capacity Manual*. Special Report 87. Washington, D.C. (1965).
- 5) M.J. Lighthill, F.R.S. and G.B. Whitham. On Kinematic waves I. Flood movement in long rivers II. A theory of traffic flow on long crowded roads. Department of Mathematics, University of Manchester. (Received 15 November 1954-Read 17 March 1955).
- 6) E.W. Montroll and R.B. Potts. *An Introduction to Traffic Flow Theory*, N.R.C. Highway Research board Publication nº 1121 (1964).
- 7) D.C. Gazis, R. Herman and R.B. Potts. Car Following Theory of Steady-State Flow, *Oper. Res* 7, 499 (1959)
- 8) L.C. Edie, R.S. Foote, R. Herman and Rothery. Analysis of single-Lane Traffic Flow, *Traff. Engng.* 33, 21 (1963)

- 9) A. Renscher. Fahrzeugbewegungen in der Kolonne bei Gleichförmig Beschleunigten oder Verzögertem Leitfahrzeug, Z. Osterr. Ingr - Arch. Vereins 95, 59, (1950).
- 10) L.A. Pipes. An Operational Analysis of Traffic Dynamics, J. Appl. Phys. 24, 274 (1953).
- 11) R.E. Chandler, r. Herman, and E.W. Montroll. Traffic Dynamics: Study in car Following, Oper. Res. 6, 165-184, (1958).
- 12) H. Greenberg And Analysis of Traffic Flow, Oper. Res. 7, 79 (1959).
- 13) D.C. Gazis, R. Herman, and R.W. Rothery. Non-Linear Follow-the-leader. Models of Traffic Flow, Oper. Res. 9, 545 (1961).
- 14) R. Herman, E.W. Montroll, R.B. Potts and R.W. Rothery. Traffic Dynamics: Analysis of Stability in Car-Following, Oper. Res. 7, 86 (1959).
- 15) R.L. Bierley. Investigation of an intervehicle Spacing Display, Res. Board Record 25, 58 (1963).
- 16) J.R. Dorfman and H. van Beijeren. The Kinetic Theory of Gases, in *Statistical Mechanics*, Part B: Time-Dependent Processes, p. 65, B.J. Berne, ed., Plenum, New York (1977).
- 17) K. Huang, *Statistical Mechanics*, Wiley (1963).

- 18) I. Prigogine *in Theory of Traffic Flow*, p. 158, R. Herman, ed., Elsevier (1961).
- 19) I. Prigogine and F.C. Andrews. A Boltzmann-Line Approach for Traffic Flow, *Oper. Res.* 8, 789 (1960).
- 20) I. Prigogine, R. Herman. *Kinetic Theory of Vehicular Traffic*, American Elsevier Publishing co. (1971).
- 21) J.G. Gardeta Oliveros. El Tráfico en Condiciones de Saturación. *Boletín del Laboratorio del Transporte y Mecánica del Suelo*, 136, 59-63. Madrid (1979).
- 22) O.C.D.E. Traffic Control in Saturations. *Road Research*, París (1981).
- 23) J.C. Tanner. Delays on a Two-Lane Road. *Journal of the Royal Statistical Society*, B23 (1961), pp. 38-63.
- 24) A.J. Miller. Analysis of Bunching in Rural Two-Lane Traffic. *Operations Research*, 11 (1963), pp. 236-247.
- 25) A.J. Miller. Queneing in Rural Traffic. *Vehicular Traffic Science*. Edited by L.C. Edie, et al, New York: American Elsevier, 1967, pp. 127-137.
- 26) S. Erlander. A Mathematical Model for Traffic on a Two-Lane Road with some empirical Results I. Theoretical Model and Estimation Problems. *Transportation Research*. 5 (1971), pp. 135-147.

- 27) S. Erlander. A Mathematical Model for Traffic on a Two-Lane Road with some Empirical Results. II Empirical Results. *Transportation Research* 5 (1971), pp. 149-175.
- 28) B.J. Ader and T.E. Wainwright, *J. Chem. Phys.* 33, 1439 (1960).
- 29) John McLeod, *Simulation Today-from Fuzz to Fact, Simulation*, 20, (1973).
- 30) B.D. Greenshields. A Study of Traffic Capacity. *Proceedings Highway Research Board*, 14, pp. 448-447 (1934).
- 31) H. Greenberg. An Analysis of Traffic Flow. *Operations Research*, 7 (1), pp. 79-85 (1959).
- 32) R.T. Underwood. Study and density relationships. pp. 141-187. De: *In Quality and Theory of Traffic Flow. Bureau of Highway Traffic, Yale University, New Haven, Conn.* (1961).
- 33) Estado Mayor del Ejército. Reglamento. Marchas y Estacionamiento. R-O-O-23. Enero-1973.
- 34) Estado Mayor del Ejército. Reglamento. Marchas y Estacionamiento (O.C. 31-1-79. D.O. nº 5) R-0-1-1. 3ª Edición 1979.
- 35) Estado Mayor del Ejército. Reglamento. Instrucción de Conductores de Vehículos Automóviles Militares. (O.C. 31-1-79 D.O. nº 5). 1ª Edición, 1979.



- 36) Normas NATO. Señalización e Indicadores de Vehículos Militares. (STANGS).
- 37) Military Standard. Camps, Relectors and associated signaliry equipment for military vehicles. MIL-STD-1179D. 14 April 1986.

# UNIVERSIDAD DE SEVILLA

Reunido el Tribunal integrado por los abajo firmantes en el día de la fecha, para juzgar la Tesis Doctoral de D. Rafael Florencio Lore titulada Ensayo Temático sobre simulación de trabajos vial

acordó otorgarle la calificación de APTO CUM LAUDE

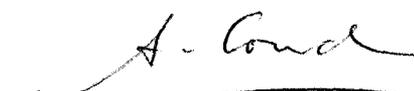
Sevilla, 24 de febrero 1989

El Vocal,

El Vocal,

El Vocal,

  
El Presidente

  
El Secretario,

  
El Doctorado,