UNIVERSIDAD DE SEVILLA

SOBRE EL PROBLEMA INVERSO DE LAGRANGE

Memoria presentada para optar al Grado de Doctor en Ciencias Físicas por el Licenciado Teófilo Zamarreño García.

Sevilla, Febrero 1987

Vº Bº EL CATEDRATICO DIRECTOR

Fdo. Pablo Hervás Burgos

Fdo. Teófilo Zamarreño García

Mi testimonio de reconocimiento y gratitud para el Profesor Dr. D. Pablo Hervás Burgos por su constante estímulo y acertada dirección. También, para el Dr. D. Marcelo Rodríguez Danta por su apoyo y sugerencias.

PABLO HERVAS BURGOS, DOCTOR EN CIENCIAS FISICAS, CATEDRATICO DE FISICA EN LA ESCUELA TECNICA SUPERIOR DE ARQUITECTURA DE LA UNIVERSIDAD DE SEVILLA, COMO DIRECTOR DEL DEPARTAMENTO DE FISICA-MATEMATICAS DE ESTA ESCUELA, CERTIFICA

que el trabajo presentado en esta memoria ha sido desarrollado, bajo mi dirección, en este Departamento y, a mi juicio, reune los criterios de originalidad y coherencia científica exigidos en nuestra Universidad para optar al grado de doctor en Ciencias Físicas.

PARA QUE CONSTE, FIRMO ESTE INFORME EN SEVILLA A TREINTA DE ENERO DE MIL NOVECIENTOS OCHENTA Y SIETE.

Fdo. Pablo Hervás Burgos.

0.- INDICE

CAPITULO 1

INTRODUCCION

1.1.- PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

Desde el punto de vista formal, la Mecánica de Newton es una simbiosis de estructuras mecánicas, definiciones experimentales y elementos de geometría euclidiana. Frente a ella, la formulación de la Mecánica de Hamilton-Jacobi, al margen de representar la gran síntesis del pensamiento mecánico, proporciona el primer esquema fundamental de la Física del siglo XX.

En contrapartida, la segunda ley de Newton permite establecer con gran facilidad las ecuaciones de evolución de los sistemas dinámicos; mientras que la construcción de Lagrangianas y Hamiltonianas de tales sistemas sólo es posible en los casos de fuerzas potenciales o fuerzas del tipo de Lorentz.

El paso de las ecuaciones de evolución a sus Lagrangianas correspondientes constituye el llamado Problema Inverso de Lagrange. Esto es, dado un sistema de ecuaciones diferenciales de segundo orden: $\ddot{q}_i=F_i(q/\dot{q}/t)$, asimilable a las ecuaciones dinámicas de un sistema mecánico con n grados de libertad, determinar una función, $L(q/\dot{q},t)$, tal que

$$\ddot{q}_i = F_i(q/\dot{q}/t) \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0; \quad \forall i \in \{1,2,\ldots,n\}.$$

1.2.- NECESIDAD DEL PROBLEMA

Como es bien sabido, el Problema Inverso de Lagrange no ha sido aparcado del pensamiento físico desde su formulación, en los últimos años del siglo pasado, hasta nuestros días. Su actualidad va asociada a la cuantificación de sistemas no conservativos, tratamiento de las interacciones de contacto en la Mecánica Nuclear, descripción de las interacciones de contacto no-locales de la materia hadrónica, formulación del carácter no hamiltoniano de la irreversibilidad de la Mecánica Estadística y de los sistemas biológicos, problemas de la Mecánica Celeste y de masa variable, estabilidad, bifurcaciones y catástrofes en sistemas no-potenciales y no lineales...

1.3.- DESARROLLO HISTORICO

El primer trabajo con las perspectivas del que aquí presentamos es el de Helmholtz [1], quien en 1887 establece las condiciones necesarias (sin demostrar que también son suficientes) para que un sistema de ecuaciones diferenciales de la forma $G_i(q,\dot{q},\ddot{q},t)=0$, admita una Lagrangiana $L(q,\dot{q},t)$ tal que sea posible la identificación

$$G_i \equiv \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i}.$$

En 1896 Mayer [2] demuestra que las condiciones de Helmholtz son también suficientes para la existencia de tal Lagrangiana. Entre 1897 y 1900 Hirsch [3] y Bohem [4] inician los primeros trabajos para el caso en que aparecen derivadas de orden superior al segundo en las funciones implícitas G_i. En 1901 Königsberger [5] realiza un detallado análisis del problema general y aborda la investigación para los medios continuos. Ya en 1903 Hamel [6] da una solución de un caso particular del Problema Inverso en un espacio tridimensional cuyas extremales son líneas rectas. Kürshak en 1905 [7] generaliza los resultados de Hirsch en el caso de que haya varias variables independientes.

Darboux [8] en 1894 fue quien primero probó la universalidad de la existencia de una representación lagrangiana para sistemas unidimensionales. Estudia el Problema Inverso para estos sistemas escribiendo su ecuación de evolución en la forma newtoniana $\ddot{q}=F(q,\dot{q},t)$ y buscando una solución $L(q,\dot{q},t)$ para la ecuación cuasilineal en derivadas parciales

$$\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^2} F(q,\dot{q},t) + \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}\partial q} \dot{q} + \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}\partial t} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0.$$

Tal solución existe siempre, sea cual sea F, si es analítica, en virtud de los teoremas generales de existencia de la teoría de ecuaciones en derivadas parciales (teorema de Cauchy-Kovalevski) [77].

Alrededor de 1930, Davis [9-11] publica tres artículos, elaborados a partir de su tesis doctoral, que constituyen uno de los primeros trabajos sobre las representaciones indirectas. El primero de ellos (1928) trata el Problema Inverso del Cálculo de Variaciones para un espacio tridimensional considerando los siguientes aspectos:

* Establece que la condición necesaria y suficiente para que el par de ecuaciones:

  $H(x,y,z,y',z',y'',z'')=0, \quad K(x,y,z,y',z',y'',z'')=0$

  sean las ecuaciones de Euler del principio variacional

$$\delta I=\delta\int_{x_1}^{x_2} f(x,y,z,y',z')dx = 0,$$

  es, que las ecuaciones de variación correspondientes sean autoadjuntas.

* Da condiciones necesarias y suficientes para que estas ecuaciones de variación sean autoadjuntas.

* Determina la forma funcional más general del integrando f para que la integral I segregue como ecuaciones de Euler $H=K=0$.

* Aborda el problema de encontrar una integral cuyas extremales son una familia de curvas previamente dada.

* Deriva condiciones necesarias y suficientes para que dos ecuaciones dadas:

  $y'' = F(x,y,z,y',z'), \quad z'' = G(x,y,z,y',z'),$

  tengan soluciones, $y=y(x)$, $z=z(x)$, que representen las extremales para un principio variacional como el enunciado más arriba.

* Discute la posibilidad de determinar combinaciones lineales de dos ecuaciones dadas, $y''=F$, $z''=G$, para que sus ecuaciones de variación sean autoadjuntas. Ello constituye el origen de las llamadas representaciones indirectas.
* Por último, aplica todo lo anterior a algunos ejemplos, analizando la posibilidad de encontrar integrales cuyas extremales son, respectivamente, líneas rectas y semicírculos o catenarias ortogonales al plano x-y.

En el segundo artículo (1929) trata de generalizar lo anterior a espacios de n+1 dimensiones:

* Establece qué condiciones ha de cumplir un sistema de ecuaciones diferenciales de segundo orden para que las ecuaciones de variación a él asociadas, sean autoadjuntas.
* Determina el integrando f para que el sistema $H_i(x,y,y',y'')=0$, cumpliendo las condiciones anteriores, represente las curvas extremales de algún principio variacional,

  $$\delta\int_{x_1}^{x_2} f(x,y,y')dx = 0.$$

En el tercer artículo de la serie (1931) discute la posibilidad de determinar una integral en un espacio de n+1 dimensiones cuando se da una familia de curvas que depende de 2n parámetros como sus arcos extremales. Para ello se buscan representaciones indirectas al exigir que las ecuaciones diferenciales de la familia de curvas

$$y_i'' = F_i(x,y,y'),$$

han de ser soluciones en y_i'' de un sistema

$$H_i(x,y,y',y'') = 0$$

cuyas ecuaciones de variación sean autoadjuntas; ello significa que debe de existir una matriz no singular de multiplicadores P_{ij}, que permitan la identificación $H_i=P_{ij}(y_j'' - F_j)=0$. Para ilustrar el método se discute el caso en que las curvas son lineales en la variable independiente: $y_i=a_ix+b_i$. Es de notar que, en estos trabajos, no hay referencia a los resultados de Helmholtz ni de Mayer.

Bateman [12] en 1931, utilizando técnicas convencionales de la teoría de ecuaciones diferenciales, demuestra que, dado un sistema homogéneo y lineal de n ecuaciones diferenciales de segundo orden, que no admite una representación analítica directa como ecuaciones de Lagrange, siempre existe una prolongación de tal sistema, con su sistema adjunto, hasta otro de 2n ecuaciones con n nuevas variables, para el cual dicha representación existe. Ello va asociado al hecho de que un sistema disipativo es fisicamente incompleto y, por ello, es de esperar que surjan ecuaciones adicionales cuando se intenta derivar sus ecuaciones de evolución de un principio variacional. Tales ecuaciones representarían al sistema físico que absorbe la energía disipada por el primero.

En 1941 Douglas [13] llevó a cabo un exhaustivo análisis del problema bidimensional, resolviéndolo para los casos en que es posible. Para ello plantea el problema en los siguientes términos: dada una familia de ∞^{2n} curvas en un espacio de n+1 dimensiones, representada por un sistema de ecuaciones diferenciales $y_i'' = F_i(x,y,y')$, determinar cuándo estas curvas se pueden identificar con la totalidad de las extremales correspondientes a algún principio variacional, $\int \Phi(x,y,y')dx=\min$, encontrando todas las correspondientes funciones Φ. Para ello estudia el sistema de ecuaciones en derivadas parciales, generalmente sobredeterminado:

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial y_k'\partial y_i'} F_i + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y_k'\partial y_i} y_i' + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y_k'\partial t} - \frac{\partial\Phi}{\partial y_k} = 0$$

en la función incógnita Φ. El análisis se lleva a cabo en el contexto de la teoría convencional de las ecuaciones en derivadas parciales, con particular referencia a la llamada teoría de Riquier, y sin utilizar las condiciones de autoadjuntividad. Reduce el anterior sistema a otro equivalente de primer orden en $\Phi_{ij}=\partial^2\Phi/(\partial y_i'\partial y_j')$. LLegado a este punto particulariza los resultados obtenidos al caso bidimensional y lleva a cabo una exhaustiva clasificación del problema atendiendo a las funciones F_1 y F_2. El análisis de Douglas, en esencia, es una extensión del método de Darboux para el caso de dos dimensiones.

También en 1941, Caldirola [14] publica un trabajo en el que muestra la posibilidad de tratar los sistemas en los que intervienen fuerzas no conservativas, de modo análogo a los sistemas lagrangianos clásicos. Tal posibilidad está basada en el hecho de que las ecuaciones de Lagrange, invariantes a las transformaciones puntuales, no lo son a transformaciones en las cuales también intervenga el tiempo. En particular, si la transformación es puramente temporal, determina la posible estructura funcional de las fuerzas, que resultan ser del tipo

$$Q_i = f(t) \sum_{k=1}^{N} a_{ik}\dot{q}_k,$$

y la de la trasformación:

$$\tau = \frac{1}{A} \int \exp\left(\int f(t)dt\right) dt + B$$

para que las ecuaciones de movimiento del sistema:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = - \frac{\partial V}{\partial q_i} + Q_i(q,\dot{q},t)$$

se puedan escribir en forma lagrangiana. Esto le permite la cuantización de este tipo de sistemas utilizando las técnicas elaboradas para los sistemas lagrangianos. Con este objetivo, vuelve a retomar el método (1982-1983) para discutir y puntualizar diversos aspectos cuánticos [15,16].

Sobre 1950 Dedecker [17,18] publica dos artículos. En el primero de ellos (1949) lleva a cabo un detallado análisis prolongando el método de Bateman en el caso de que aparezcan varias variables independientes. Las ecuaciones dadas:

$$F_a(x^\alpha, y^i, \partial y^i/\partial x^\alpha, \partial^2 y^i/\partial x^\alpha \partial x^\beta, \ldots) = 0$$

definen variedades integrales V_μ, $y^i = y^i(x^\alpha)$, en el espacio $E_{\mu+n}$ de las (x^α, y^i). El método de Bateman, lo que hace es asociarles un problema variacional en un espacio $E^*_{\mu+2n}$ de $\mu+2n$ dimensiones. Dedecker estudia la correspondencia que liga estos dos espacios suponiendo que estas ecuaciones consisten en anular un tensor F de n componentes con respecto a un grupo Γ que opera en E. Existe entonces en E^* otro grupo Γ^*, isomorfo a Γ, que en tanto que grupo de transformaciones, depende de la naturaleza del tensor F. A continuación, propone otra interpretación en la que las n incógnitas auxiliares son consideradas como las componentes de un tensor Z de n componentes definido en cada punto de una variedad V_μ. Las 2n ecuaciones de Bateman definen así en $E_{\mu+n}$ variedades de "elementos", donde "elemento" es el ente constituido por un punto y un tensor Z ligado a ese punto.

En el segundo artículo (1950), el autor se propone demostrar que las formas diferenciales exteriores definidas sobre los espacios $E_{(\nu)}$ (espacios de los elementos de contacto) simplifican considerablemente los cálculos para establecer la condición necesaria y suficiente para que un sistema de n ecuaciones diferenciales de orden cualquiera sean idénticas a las ecuaciones de Euler-Lagrange de algún problema variacional.

En 1957 Havas [19], desarrollando unas notas previamente publicadas [20,21], tras analizar someramente los métodos posibles para extender el rango de aplicación del formalismo lagrangiano, estudia con detalle el caso de las representaciones indirectas. A partir de las condiciones de Helmholtz (de autoadjuntividad) busca factores integrantes de forma que el sistema $h_i[\ddot{q}_i - F_i(q,\dot{q},t)] = 0$, equivalente al $\ddot{q}_i - F_i(q,\dot{q},t)=0$, sea autoadjunto. El análisis lo lleva a cabo para una única ecuación, un conjunto de ecuaciones irreducibles (entendiendo por ello que no puede ser dividido en subconjuntos tales que las variables de uno de ellos no tengan índices en común con las de cualquier otro subconjunto) y un sistema de ecuaciones genérico, como el señalado. Termina el artículo ilustrando el método con algunos ejemplos.

En 1962 Klein [22] lleva a cabo el primer intento de dar una interpretación geométrica a las condiciones de integrabilidad para la existencia de una Lagrangiana tal y como fueron identificadas por Helmholtz. El tratamiento lo lleva a cabo en el contexto de la geometría métrica diferencial, con referencias particulares a ciertas aplicaciones de la teoría de las variedades generalizadas de Finsler a la Mecánica Analítica, haciendo uso del cálculo de formas diferenciales.

Vainberg en 1964 [23], aborda el Problema Inverso en el marco del análisis funcional utilizando operadores no lineales. La naturaleza no-lineal de los operadores considerados se puede abordar con la teoría convencional de los operadores lineales en espacios de funciones mediante la utilización de la derivada de Frechét. Teniendo en cuenta estas consideraciones, el autor establece la condición necesaria y suficiente para que un operador, generalmente no-lineal, admita una funcional como potencial en un espacio de Banach.

La aproximación de Vainberg en el ámbito del análisis funcional era tan abstracta que necesitó algún tiempo para propagarse en los círculos de la Matemática Aplicada y de la Física. Tonti [24] en 1968, reconociendo la importancia de los trabajos anteriores, formula su aproximación al Problema Inverso de forma que se pueda aplicar directamente a problemas prácticos en los que se presentan funcionales constituidas por integrales de línea simples o múltiples. El tratamiento de Tonti pone de manifiesto, además, la equivalencia entre la formulación del Problema Inverso en el contexto del análisis funcional y la aproximación variacional a la autoadjuntividad, ya que:

* La diferencial de Frechét, al calcularla explicitamente, coincide con las ecuaciones de variación.
* El concepto de potencial de Vainberg coincide con el de ecuaciones de variación autoadjuntas.
* Las condiciones de integrabilidad de Tonti coinciden con las de de Helmholtz.

En este mismo marco, podemos reseñar también los trabajos de Atherton y Homsey, en 1975, [25], y, más recientemente, los de Vanderbhauwhede, a finales de los años setenta, [26,27], quien vuelve a retomar el problema bajo estas perspectivas para tratar algunos aspectos que aún permanecían abiertos, tales como los métodos para el cálculo explícito de una Lagrangiana.

En 1969, Edelen [28] trata en una monografía el caso de los sistemas continuos. Aunque no usa explicitamente las condiciones de autoadjuntividad, el autor llega a establecer que siempre existe una Densidad Lagrangiana capaz de representar los sistemas lineales integrodiferenciales de ecuaciones en derivadas parciales de segundo orden. En otra monografía posterior [29], de 1977, el mismo autor proporciona un detallado estudio de sistemas no conservativos y no holónomos en el marco del cálculo de las formas diferenciales.

En 1974 Horndeski [30] inicia el uso de la teoría de cohomología y cocadenas complejas en el Problema Inverso. Es de destacar que, de nuevo, las condiciones de integrabilidad que emergen coinciden con las condiciones de autoadjuntividad deducidas por Helmholtz. En este artículo, construye una familia de operadores diferenciales, $\{D^n\}_{n=0}^{n=\infty}$, tal que D^0 es el operador de Euler-Lagrange y se tiene que $D^{n+1}.D^n=0$ para todo n. Estos operadores dan lugar a varias cocadenas complejas y los correspondientes espacios vectoriales de cohomología. Se hace un detallado estudio para el operador D^1 y se demuestra que, si el conjunto de funciones campo es de configuración estrellada, una condición necesaria y suficiente para que un concomitante de tercer orden (de estas funciones campo), T, sea una expresión de Euler-Lagrange es que $D^1(T)=0$. En este caso, construye explícitamente una Densidad Lagrangiana escalar de tercer orden tal que genera T como su expresión asociada de Euler-Lagrange.

En 1975 el mismo autor [31], en este ámbito, aborda el problema de determinar cuándo un tensor densidad de rango dos, contravariante, simétrico, cuya divergencia es nula (y la de sus derivadas de orden arbitrario) y que es un concomitante de una métrica pseudoriemaniana es, necesariamente, una expresión de Euler-Lagrange. El análisis se lleva a cabo cuando, los concomitantes en cuestión, son a lo sumo de tercer orden en las derivadas de la citada métrica. En particular, deriva condiciones necesarias y suficientes bajo las cuales tal concomitante de tercer orden de un tensor métrico definido positivo o negativo es una expresión de Euler-Lagrange.

Allock [32] en 1975 considera el problema de la existencia de una acción funcional en un contexto algebraico-geométrico, que consiste en la reducción de una forma diferencial lineal de Pfaff en una variedad a una forma localmente hamiltoniana, mediante el uso de ciertas propiedades de los corchetes de Lagrange. Esta aproximación, equivalente a la aproximación variacional a la autoadjuntividad para campos de vectores en variedades, es particularmente significativa para la extensión del Problema Inverso en el caso de que existan ligaduras no integrables.

En 1977 Santilli [33-35] estudia el Problema Inverso en la teoría de campos clásicos relativistas. El análisis se lleva a cabo en el contexto de la aproximación variacional a la autoadjuntividad suplementada con elementos del cálculo de formas diferenciales, especialmente el lema de Poincaré y su inverso. La primera parte del trabajo, [33], se centra en estas cuestiones:

* Clasifica las ecuaciones tensoriales de campo covariantes en no lineales, cuasilineales y formas semilineales, escribiendo sus sistemas de ecuaciones de variación y sus sistemas adjuntos.
* Determina las condiciones necesarias y suficientes para la autoadjuntividad en los diferentes casos.
* Prueba que para Densidades Lagrangianas regulares y de clase C^4 las ecuaciones de La-Lagrange son siempre autoadjuntas.
* Introduce los conceptos de representación analítica directa o indirecta y ordenada o desordenada.
* Considera algunos casos convencionales de campos tensoriales.

* Introduce la noción de transformaciones isotópicas.

En la segunda parte, [34]:

* Establece que una condición necesaria y suficiente para que un sistema de ecuaciones tensoriales de campo de clase C^2, regular y cuasilineal, admita una representación analítica ordenada y directa, es que el sistema sea autoadjunto.
* Deduce que si se suprime el requisito de "ordenada", la condición de autoadjuntividad es sólo suficiente para la existencia de una Densidad Lagrangiana para las ecuaciones de campo.
* Establece una metodología para determinar la Densidad Lagrangiana, si existe, para campos tensoriales cuasilineales, particularizando al caso de campos tensoriales ordinarios semilineales.
* Interpreta los resultados anteriores desde el punto de vista de las interacciones, estableciendo la estructura de las Densidades Lagrangianas de campos que interactúan: n términos multiplicativos de interacción y

uno aditivo que actúan sobre la densidad para campos libres.

Por último, en la tercera parte, [35]:

* Estudia las transformaciones de equivalencia de clase C^2 e identifica entre ellas las que inducen (genotópicas) o preservan (isotópicas) una estructura adjunta de las ecuaciones del campo.
* Da condiciones necesarias y suficientes para que una transformación de equivalencia sea genotópica o isotópica.
* Usando esta metodología, establece condiciones necesarias y suficientes para la existencia de representaciones analíticas ordenadas indirectas en términos de las ecuaciones convencionales de Lagrange e introduce un método para construir la Densidad Lagrangiana en este contexto.
* Lleva a cabo una generalización del principio de acción capaz de inducir, tanto las ecuaciones de Lagrange convencionales, como las que él llama generalizadas.
* Elabora una condición necesaria y suficiente para la existencia de representaciones analíticas ordenadas directas, para sistemas

cuasilineales, en función de las ecuaciones análiticas generalizadas y estudia su relación con las representaciones convencionales.

Este autor publica en 1978 una monografía [36] sobre el Problema Inverso, en el marco de la Mecánica Newtoniana, siguiendo la misma línea metodológica de la aproximación variacional a la autoadjuntividad, descrita anteriormente para la teoría de los campos clásicos relativistas. En ella, analiza la existencia de representaciones analíticas en términos de las ecuaciones de Lagrange y Hamilton para sistemas newtonianos, generalmente no conservativos, contemplando tres aspectos fundamentales:

* El estudio de las condiciones necesarias y suficientes para la existencia de una representación lagrangiana o hamiltoniana de unas ecuaciones de movimiento dadas con fuerzas arbitrarias, no necesariamente derivables de un potencial.
* La identificación de los métodos para construir una Lagrangiana o Hamiltoniana a partir de las ecuaciones de movimiento una vez asegurada su existencia mediante las condiciones de integrabilidad correspondientes.

* La identificación funcional de las fuerzas newtonianas (locales) más generales que admiten estas representaciones indirectas.

Kobussen [37] en 1979 hace un nuevo planteamiento del tratamiento dado por Darboux al caso de una ecuación, condicionando la solución del Problema Inverso al conocimiento de una intregral primera. El uso de integrales primeras diferentes conducirá a Lagrangianas diferentes isotópicamente relacionadas (en la terminología de Santilli) o bien s-equivalentes (en la de Hojman y Heneaux). El intento no es aislado, y, entre otros trabajos, que de alguna forma retoman el problema de Darboux, podemos citar los de Currie y Saletan [38] en 1966 y Sarlet [39] en 1981. En 1973 Gelman y Saletan [40] generalizan el planteamiento de Currie y Saletan para el caso bidimensional, y Hojman y Harleston [41] en 1980 para el caso multidimensional.

Posteriormente, 1978, Marmo y Saletan [42], aplican el esquema de los dos artículos citados de Saletan, para analizar el oscilador cuántico bidimensional. Lo propio hacen Hojman y Montemayor en 1980 [43], analizando la relación entre Lagrangianas s-equivalentes y la cuantización canónica. En

1985, Antonini, Marmo y Rubano [44] analizan la relación entre las Lagrangianas alternativas para la descripción de un sistema y la integrabilidad del mismo. En 1982 Henneaux [45] analiza el Problema Inverso en el marco de la Geometría Simpléctica de la Mecánica Newtoniana y determina las Lagrangianas equivalentes para un sistema de ecuaciones diferenciales de segundo orden en algunos casos de fuerzas simples.

También en 1982 Sarlet [46], trata el problema general de determinar una matriz multiplicativa que pueda conferir la estructura de ecuaciones de Euler-Lagrange a un sistema dado de ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden. La aproximación es una generalización de los métodos desarrollados por el mismo autor para los sistemas lineales, [47]. El resultado principal consiste en una serie de condiciones necesarias y suficientes para la existencia de estos multiplicadores, que contienen un conjunto infinito de ecuaciones algebraicas, cuyos coeficientes pueden usarse para derivar condiciones necesarias que incluyen solamente los segundos miembros de las ecuaciones diferenciales de partida.

Sona [64] en 1966, considera la aplicación del formalismo lagrangiano y hamiltoniano para fuerzas no conservativas mediante las representaciones indirectas de modo bastante superficial. Su objetivo es derivar una ecuación de Schrödinger para un caso sencillo con vistas a implementar un modelo óptico para el scattering anelástico de particulas.

En 1981 Lemos [65] analiza la controversia Lagrangiana Matemática-Lagrangiana Física y su relación con el problema de la cuantización de sistemas disipativos utilizando técnicas tradicionales; establece condiciones para que una Lagrangiana sea física y cuestiona su existencia en relación a la forma funcional de las fuerzas disipativas.

Hojman R., Hojman S. y Sheinbaum [66] en 1983, analizan el problema de construir Lagrangianas para un sistema dinámico como combinacinación lineal de los segundos miembros de sus ecuaciones newtonianas de movimiento.

Hojman y Shepley [67], 1986, generalizan el problema de las Lagrangianas equivalentes a la teoría clásica de campos, extendiendo el teorema de las trazas y discutiendo algunas implicaciones en la teoría cuántica y en los procedimientos para determinar Lagrangianas equivalentes.

Como ya hemos señalado, el Problema Inverso ha merecido especial atención con vistas a la cuantización de sistemas no conservativos (ver Salazar y Spavieri [48] y Fonte [49], 1986). Desde esta perspectiva, el oscilador armónico amortiguado ha sido objeto de una profunda discusión por ser uno de los sistemas más sencillos no lagrangianos de gran significación en muchos aspectos de la Física Moderna (óptica cuántica, física de plasmas, química cuántica...). Los trabajos sobre este tema son numerosos y entre ellos citaremos los de Brittin [50] (1950), Caldirola y Lugiato [14-16] (1941-82-83), Senitzky [51] (1960), Dekker [52,53] (1977,1981), Messer [54] (1979), Ray [55] (1979), Bassetti y colaboradores [56,57] (1982) y Jannussis y Skuras [58] (1986). En las referencias [53] y [54] se hace una profunda revisión del estado de la cuestión y se suministra información bibliográfica adicional sobre el tema. Recientemente se ha retomado el método de Caldirola para la cuantificación de sistemas no conservativos. Entre estos trabajos mencionaremos los de: Jannussis y Papatheou [59] (1985), Colegrave y Kheyrabady [60] (1986), Abdalla, Kolegrave y Khosravi [61] (1986), Abdalla [62] (1986) y

Stuckens y Kobe [63] (1986).

Desde principios de la década de los años setenta se viene prestando atención a otra aproximación al Problema Inverso que suele denominarse "de primer orden". En esta aproximación, el sistema de ecuaciones diferenciales de segundo orden es reemplazado por un sistema equivalente de 2n ecuaciones de primer orden, investigándose la existencia de representación analítica para este nuevo sistema.

En 1973 Havas [68] demostró que las ecuaciones de movimiento con fuerzas dependientes, de forma arbitraria, de la velocidad, son siempre equivalentes a un conjunto de ecuaciones, diferenciales de primer orden, derivables de algún principio variacional como ecuaciones de Euler-Lagrange de múltiples Lagrangianas equivalentes.

Entre otros trabajos llevados a cabo en este contexto, destacaremos los realizados por Sarlet y Cantrijn [69], 1978, que determinan las condiciones que ha de verificar una matriz no singular simétrica, C_{ij}, para que el citado sistema de primer orden se pueda derivar a partir de un principio variacional, y por Sarlet [70], 1979, quien relaciona la existencia de esta matriz C_{ij} con la de otra matriz de multiplicadores, α_{ij}, para el sistema correspondiente de segundo orden.

En 1981 Hojman y Urrutia [71], proponen un método para construir un conjunto infinito de Lagrangianas para un sistema de 2n ecuaciones diferenciales de primer orden, en función de 2n integrales primeras funcionalmente independientes, utilizando una aproximación geométrica covariante; presentan algunos ejemplos y construyen la teoría Hamiltoniana correspondiente a estas Lagrangianas utilizando el método de Dirac para Lagrangianas singulares.

Hojman y Gómez [72] en 1983 presentan un teorema análogo al de Noether para la teoría lagrangiana de sistemas de primer orden, basado en una definición de simetría diferente a la utilizada por Noether, que asocia varias cantidades conservadas a una simetría dada del problema en consideración. En 1985 Hojman y Zertuche, [73], prueban que para sistemas de ecuaciones diferenciales de primer orden el conjunto de simetrías de las ecuaciones de movimiento y el de las transformaciones de s-equivalencia coinciden.

Hojman, en 1984 [74] lleva a cabo una revisión del Problema Inverso, tanto para sistemas de ecuaciones diferenciales de segundo orden como para los de primer orden discutiendo los teoremas de conservación y las ambigüedades que aparecen en la Mecánica Cuántica como consecuencia de la multiplicidad de Lagrangianas capaces de describirlos.

En este contexto de las aproximaciones de primer orden podemos situar la monografía de Santilli [75] publicada en 1983 que plantea el Problema Inverso en el marco de la Teoría Hamiltoniana. Para ello, retoma las llamadas ecuaciones de Birkhoff [76] (1927), que son una generalización de las ecuaciones de Hamilton convencionales, para:

* Probar la Universalidad Directa del Problema Inverso, bajo esta perspectiva, al establecer la existencia, mediante un principio variacional, de una representación para todos los posibles Sistemas Newtonianos (Universalidad) en las coordenadas y tiempo del observador (Universalidad Directa).
* Estudiar la teoría de transformaciones para las ecuaciones de Birkhoff, comprobando que conservan su estructura bajo transformciones arbitrarias, en general, no canónicas.

* Demostrar la Universalidad Indirecta de las ecuaciones de Hamilton para los sistemas de ecuaciones diferenciales de primer orden.

Hasta aquí hemos intentado exponer con la máxima simplificación posible un resumen histórico-crítico de los principales trabajos que han abordado el Problema Inverso de Lagrange. Nuestra síntesis es la siguiente:

TEORICAMENTE,

1.- La Representación Lagrangiana Directa sólo es posible si los sistemas de ecuaciones de evolución satisfacen a las condiciones de Helmholtz.

2.- La Representación Lagrangiana Indirecta es posible en un gran número de casos en los cuales no se satisfacen las condiciones anteriores pero tal representación no es Universal.

3.- La Representación Hamiltoniana Indirecta es Universal; pero en la cuantificación presenta los inconvenientes asociados a la matriz de los multiplicadores.

4.- Una generalización de la Representación Directa es la Birkhoffiana. Logra la universalidad directa para los sistemas escritos bajo la forma de primer orden e induce al uso de Lagrangianas de segundo orden con vistas a alcanzar dicha universalidad para los correspondientes sistemas escritos bajo la forma de segundo orden.

FORMALMENTE,

Unos investigadores desarrollan su tratamiento dentro del formalismo convencional de la Teoría de Ecuaciones Funcionales; otros, ataviados con ropajes del Algebra de Lie, de la Geometría Simpléctica o de la Teoría de Operadores Adjuntos han logrado, magistralmente, construir la imagen del Problema Inverso de Lagrange en sus respectivos campos. Sin embargo, sus métodos tienen un grado de universalidad equivalente a los métodos de los primeros.

PRACTICAMENTE,

Tanto unos como otros aplican sus tratamientos a un reducido número de casos: los mismos que fueron resueltos por los primeros investigadores mediante el formalismo clásico, con lo cual, la exhaustividad teórica se desvanece ante la aplicación práctica.

1.4.- OBJETO DE LA TESIS

Estando las cosas de este modo, parece lógico intentar buscar métodos capaces de conducirnos, de forma sistemática, de las ecuaciones de evolución de los sistemas dinámicos a su conjunto de Lagrangianas equivalentes. Este intento es el objetivo principal de esta tesis, cuyas etapas fundamentales las podemos esquematizar como sigue:

SISTEMAS CON UN GRADO DE LIBERTAD:

Es bien conocido que, en el caso de sistemas unidimensionales, la ecuación dinámica newtoniana correspondiente, $\ddot{q}=F(q,\dot{q},t)$, siempre admite una representación lagrangiana indirecta si las funciones implícitas son lo suficientemente regulares (teorema de Darboux) [8]. En 1979 Kobussen [37] reformula este resultado acudiendo para su tratamiento al uso de integrales primeras. En este caso, en lugar de intentar hallar representaciones indirectas, busca una solución, $L(q,\dot{q},t)$, para la ecuación cuasi lineal en derivadas parciales de segundo orden

$$\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^2} F + \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}\partial q} \dot{q} + \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}\partial t} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0.$$

La existencia de tal solución está garantizada para cualquier $F(q,\dot{q},t)$ que cumpla con las condiciones de continuidad y regularidad requeridas por la teoría general de existencia de ecuaciones en derivadas parciales (teorema de Cauchy-Cowalesky) [77]. Kobussen presupone para la solución una forma funcional del tipo $L=\dot{q}f(q,\dot{q})$, para el caso de funciones autónomas (que no dependen explícitamente del tiempo). El procedimiento seguido aquí es totalmente distinto. Se estudia, en primer lugar, la ecuación dinámica $\ddot{q}=F(q,\dot{q})$, sin hipótesis alguna acerca de la forma funcional de la Lagrangiana y a través de la PROPOSICION V se establece la relación funcional de la Lagrangiana y una integral primera de la ecuación $\dot{q}d\dot{q}=F(q,\dot{q})dq$; ecuación que, por otra parte, es invariante al grupo de transformaciones infinitesimales asociadas a los factores integrantes, soluciones de la ecuación diferencial de partida

$$\frac{d\lambda}{dt} + \lambda F = 0.$$

El hecho de introducir desde el primer momento las nociones dinámicas de la Mecánica Analítica y seguir un método paralelo al método analítico de los sistemas conservativos, nos conduce de forma natural a los invariantes relativos, al principio variacional equivalente, a un álgebra de Poisson o, lo que es lo mismo, a la métrica simpléctica asociada a este tipo de ecuaciones. Los resultados se generalizan directamente para ecuaciones del tipo $\ddot{q}=F(\dot{q},t)$ y para la teoría de las Lagrangianas de segundo orden.

SISTEMAS CON n GRADOS DE LIBERTAD:

En el caso de que el sistema tenga n grados de libertad ($n \geq 2$), las ecuaciones dinámicas newtonianas que lo describen, $\ddot{q}_i=F_i(q/\dot{q},t)$, $i=1,\ldots,n$, no siempre admiten una representación lagrangiana indirecta. Ello va asociado al hecho de que, en este caso, el Problema Inverso implica la resolución de un sistema de ecuaciones en derivadas parciales, las ecuaciones de Lagrange:

$$\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_k} F_k + \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial t} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0, \qquad i=1,2,\ldots,n$$

con una única incógnita, la Lagrangiana $L(q/\dot{q},t)$. En consecuencia, el sistema es sobredeterminado y, en general, no tendrá solución a pesar de las condiciones de continuidad y regularidad impuestas a las funciones dinámicas F_i.

En 1941 Douglas [13], lleva a cabo un detallado análisis del caso bidimensional haciendo una completa clasificación de los diferentes casos que se pueden presentar en función del rango de una matriz 2x2 cuyos elementos dependen de las funciones dinámicas y de sus derivadas. El resultado, aunque exahustivo, es complejo y difícil de poner en práctica; hasta tal punto que, como afirma Sarlet [46]: "La complejidad de este análisis ha desanimado, probablemente, durante largo tiempo a muchos investigadores para abordar nuevas generalizaciones". Este autor, en el citado trabajo, vuelve a reformular las condiciones de Helmholtz, para n grados de loibertad, de una forma más adecuada, con vistas a su aplicación práctica; al tiempo que esta nueva formulación hace posible la sustitución de algunas restricciones, extendidas a todo el intervalo temporal, por otras análogas para el instante inicial $t=t_0$. A pesar de todo, el propio Sarlet en las conclusiones de este artículo escribe: "En cierto sentido podemos decir que el Problema Inverso es insoluble. Para nosotros, ello significa la imposibilidad de llegar a una fórmula general en las funciones (dinámicas) f^i mediante la cual podamos saber qué fuerzas permitirán la construcción de una matriz de multiplicadores α".

Sin pretender establecer la solución general, nuestro objetivo fundamental es elaborar un método claro, sistemático y capaz de ser puesto en práctica, para determinar una Lagrangiana que describa un sistema dinámico newtoniano dado. Para ello, generalizaremos, en la medida en que sea posible, los resultados alcanzados en el caso de una dimensión. Centraremos nuestra atención en el caso autónomo, cuando las funciones dinámicas que no dependen explícitamente del tiempo, y, mediante la PROPOSICION XXI establecemos una relación funcional entre la pretendida Lagrangiana y una integral primera del sistema $\dot{q}_i d\dot{q}_i = F_i(q/\dot{q})dq_i$, que es invariante al grupo de las transformaciones infinitesimales asociadas a los factores integrantes, soluciones del sistema diferencial

$$\frac{d\lambda_{ij}}{dt} + \frac{1}{2}\frac{\partial F_k}{\partial \dot{q}_j}\lambda_{ik} + \frac{1}{2}\frac{\partial F_k}{\partial \dot{q}_i}\lambda_{jk} = 0, \quad i,j=1,2,\ldots,n.$$

Como en el caso unidimensional, el hecho de introducir desde el principio las nociones dinámicas de la Mecánica Análitica y seguir, en el desarrollo, un método paralelo al de los sistemas conservativos, nos conduce de forma natural a los invariantes relativos y al algebra de Poisson, o lo que es lo mismo, a la métrica simpléctica asociada a este tipo de ecuaciones. Así mismo las ecuaciones diferenciales de los factores integrantes nos facilitarán la elaboración de un teorema de conservación análogo al de las trazas en el Problema de las Lagrangianas s-equivalentes. Los resultados se extienden para Lagrangianas de segundo orden, dejando el problema de las funciones no autónomas abierto para posteriores investigaciones, puesto que la generalización ahora no es inmediata.

CAPITULO 2

SISTEMAS UNIDIMENSIONALES

2.1.- ESTUDIO GENERAL

Puesto que nos vamos a situar en el ámbito de la Mecánica Newtoniana, supondremos que la ecuación dinámica de evolución se puede escribir de la forma $\ddot{q} = F(q,\dot{q})$. Dado que nuestro estudio tendrá carácter local, prescindiremos de antemano de las condiciones iniciales y supondremos que la función F, que determina la evolución del sistema, está definida para un intervalo temporal $(t_1<t<t_2)$ durante el cual la coordenada y velocidad generalizadas varían dentro de los intervalos $[q_1,q_2]$ y $[\dot{q}_1,\dot{q}_2]$, respectivamente, del espacio de las fases, verificándose que $F \in C^2$ en el dominio de definición. Como ya hemos señalado anteriormente, bajo estas condiciones, siempre es posible describir estos sistemas mediante una Lagrangiana $L(q,\dot{q},t)$ (teorema de Darboux). A continuación presentamos los resultados fundamentales de nuestra investigación.

PROPOSICION I

Si la ecuación dinámica $\ddot{q}=F(q,\dot{q},t)$ es equivalente a la de Lagrange correspondiente a la Lagrangiana $L(q,\dot{q},t)$, la derivada del momento conjugado respecto de la velocidad generalizada es solución de la ecuación diferencial,

$$\frac{d\lambda}{dt} + \frac{\partial F}{\partial \dot{q}}\lambda = 0.$$

Demostración

Si derivamos la ecuación de Lagrange correspondiente a $L(q,\dot{q},t)$,

$$\ddot{q}\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^2} + \dot{q}\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}\partial q} + \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}\partial t} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0,$$

respecto de la velocidad generalizada y tenemos en cuenta que es $\ddot{q}=F$ a lo largo de la curva solución, escribiremos

$$\ddot{q}\,\frac{\partial^3 L}{\partial \dot{q}^3} + \frac{\partial F}{\partial \dot{q}}\,\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^2} + \dot{q}\,\frac{\partial^3 L}{\partial \dot{q}^2\partial q} + \frac{\partial^3 L}{\partial \dot{q}^2\partial t} = 0,$$

llamando

$$\lambda = \frac{\partial p}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial}{\partial \dot{q}}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) = \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^2}$$

y sustituyendo en la ecuación anterior, tenemos

$$\ddot{q}\,\frac{\partial\lambda}{\partial \dot{q}} + \dot{q}\,\frac{\partial\lambda}{\partial q} + \frac{\partial\lambda}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial \dot{q}} = 0;$$

finalmente, recordando lo que significa el operador d/dt, podemos escribir

$$\frac{d\lambda}{dt} + \frac{\partial F}{\partial \dot{q}} \lambda = 0$$

que demuestra lo que pretendíamos.

PROPOSICION II

La expresión

$$G(q,\dot{q},t) = \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^2} \exp\left(\int \frac{\partial F}{\partial \dot{q}}\, dt\right)$$

es una constante de evolución para los sistemas descritos mediante la Lagrangiana $L(q,\dot{q},t)$ y cuya ecuación de Euler es $\ddot{q}=F(q,\dot{q},t)$.

Demostración

En efecto, según la proposición anterior:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^2}\right) + \frac{\partial F}{\partial \dot{q}} \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^2} = 0,$$

multiplicándola por el factor $\exp\{\int(\partial F/\partial \dot{q})dt\}$, esa ecuación se puede escribir compactamente como la derivada de un producto de la siguiente forma:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^2} \exp\left(\int \frac{\partial F}{\partial \dot{q}}\, dt\right)\right) = 0$$

y en consecuencia, $G(q,\dot{q},t)$ = cte.

PROPOSICION III

Las soluciones de la ecuación diferencial

$$\frac{d\lambda}{dt} + \frac{\partial F}{\partial \dot{q}} \lambda = 0,$$

son factores integrantes para la ecuación dinámica newtoniana $\ddot{q}=F(q,\dot{q},t)$.

Demostración

Puesto que, por definición $\dot{q} = dq/dt$, la ecuación dinámica newtoniana $\ddot{q}=F(q,\dot{q},t)$ es equivalente al sistema

$$\frac{dt}{1} = \frac{dq}{\dot{q}} = \frac{d\dot{q}}{F(q,\dot{q},t)}$$

que podemos considerar como sistema adjunto correspondiente a la ecuación en derivadas parciales

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\partial \phi}{\partial q} \dot{q} + \frac{\partial \phi}{\partial \dot{q}} F(q,\dot{q},t) = 0$$

donde ϕ es una integral primera de la ecuación dinámica. Ahora bien, la condición necesaria y suficiente para que $\lambda(q,\dot{q},t)$ sea un multiplicador de este sistema es que

$$\frac{\partial \lambda}{\partial t} + \frac{\partial(\lambda \dot{q})}{\partial q} + \frac{\partial(\lambda F)}{\partial \dot{q}} = 0$$

condición que se puede escribir, tras desarrollar las derivadas, de la forma

$$\frac{d\lambda}{dt} + \frac{\partial F}{\partial \dot{q}} \lambda = 0$$

COROLARIO III.1

Si la función F no depende de la velocidad generalizada, los factores integrantes son integrales primeras para la correspondiente ecuación dinámica.

Ello sigue trivialmente de la proposición anterior tras imponer la condicion enunciada en el corolario.

Una vez establecidos estos resultados generales, pasamos a considerar los casos particulares en los que falta alguna de las variables en la función dinámica F. Dedicaremos especial atención al caso en que ésta función dependa únicamente de q y $\dot{q}$, puesto que este tipo de funciones representan las fuerzas más usuales en Física, siendo posible, además, un desarrollo similar a él para los otros casos.

2.2.- ESTUDIO DE LA ECUACION $\ddot{q}=F(q,\dot{q})$

COROLARIO III.2

Si F no depende explícitamente del tiempo los factores integrantes para $\ddot{q}=F(q,\dot{q})$ son las soluciones de la ecuación

$$\frac{\partial\lambda}{\partial\dot{q}}\ddot{q}+\frac{\partial\lambda}{\partial q}\dot{q}+\frac{\partial F}{\partial\dot{q}}\lambda=0.$$

En efecto, dicha ecuación es la de los factores integrantes de la $\dot{q}d\dot{q}=F(q,\dot{q})dq$, ya que se ha de verificar:

$$\frac{\partial(\lambda\dot{q})}{\partial q}=-\frac{\partial(\lambda F)}{\partial\dot{q}}$$

que es precisamente el resultado pretendido una vez desarrolladas las derivadas de los productos.

NOTA 1

Es de reseñar que si $\partial F/\partial\dot{q}=k$, la ecuación anterior se transforma en :

$$\frac{\partial\lambda}{\partial\dot{q}} F + \frac{\partial\lambda}{\partial q}\dot{q} + k\lambda = 0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{d\lambda}{dt} + k\lambda = 0$$

que admite como solución $\lambda=\exp\{-kt\}$, para la cual, evidentemente, $\partial\lambda/\partial t\neq 0$. Sin embargo, este resultado no se contradice con el corolario anterior ya que, bajo estas condiciones, se tiene que $\partial\lambda/\partial t=d\lambda/dt$.

PROPOSICION IV

Si λ es solución de la ecuación diferencial

$$\frac{d\lambda}{dt} + \frac{\partial F(q,\dot{q})}{\partial\dot{q}}\lambda = 0$$

existe una función $I=I(q,\dot{q})$, definida por

$$\partial I/\partial\dot{q} = \lambda\dot{q}; \qquad \partial I/\partial q = -\lambda F(q,\dot{q}) \qquad [IV.1]$$

tal que $dI=0$.

Demostración

Si $\ddot{q}=F(q,\dot{q})$, ya hemos visto que sus factores integrantes satisfacen a la ecuación diferencial:

$$\frac{\partial\lambda}{\partial\dot{q}}\ddot{q} + \frac{\partial\lambda}{\partial q}\dot{q} + \frac{\partial F}{\partial\dot{q}}\lambda = 0$$

es decir

$$\frac{\partial\lambda}{\partial q}\dot{q} = -\frac{\partial\lambda}{\partial\dot{q}}F(q,\dot{q}) - \frac{\partial F}{\partial\dot{q}}\lambda$$

que podemos escribir, teniendo en cuenta las condiciones de definición de $I(q,\dot{q})$, de la forma:

$$\frac{\partial^2 I}{\partial q\partial\dot{q}} = \frac{\partial^2 I}{\partial\dot{q}\partial q}$$

que es precisamente la condición necesaria y suficiente para que sea $dI=0$.

PROPOSICION V

Si la ecuación dinámica $\ddot{q}=F(q,\dot{q})$ admite una integral primera I, existe una Lagrangiana L que verifica la relación:

$$I = \frac{\partial L}{\partial\dot{q}}\dot{q} - L.$$

Demostración

Teniendo en cuenta [IV.1], podemos escribir:

$$\frac{\partial I}{\partial\dot{q}} = \dot{q}\frac{\partial^2 L}{\partial\dot{q}^2}\,; \qquad \frac{\partial I}{\partial q} = -F(q,\dot{q})\frac{\partial^2 L}{\partial\dot{q}^2}$$

por tanto

$$I = -\int F(q,\dot{q})\frac{\partial^2 L}{\partial\dot{q}^2}\,dq + \beta(\dot{q}) \qquad \text{[V.I]}$$

Derivando respecto a $\dot{q}$:

$$\frac{\partial I}{\partial \dot{q}} = -\frac{\partial}{\partial \dot{q}}\int F(q,\dot{q})\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^2}\,dq + \frac{d\beta(\dot{q})}{d\dot{q}} \equiv \dot{q}\,\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^2}$$

Despejando e integrando determinamos la expresión para $\beta(\dot{q})$ y sustituyendo en (V.1) podemos escribir la integral primera I de la forma:

$$I = -\int F(q,\dot{q})\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^2}\,dq + \int \dot{q}\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^2}\,d\dot{q} + \int\left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}}\int F(q,\dot{q})\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^2}\,dq\right)d\dot{q} \qquad [V.II]$$

Ahora bien, desarrollando la correspondiente ecuación de Lagrange, tendremos que:

$$-F\,\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^2} = -\ddot{q}\,\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^2} = \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}\partial q}\,\dot{q} - \frac{\partial L}{\partial q} = \frac{d}{dq}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\,\dot{q} - L\right)$$

y sustituyendo en [V.II]:

$$I = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\,\dot{q} - L + \int \dot{q}\,\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^2}\,d\dot{q} - \int\frac{\partial}{\partial \dot{q}}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\,\dot{q} - L\right)d\dot{q} \Longrightarrow I = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\,\dot{q} - L.$$

PROPOSICION VI

La ecuación dinámica $\ddot{q}=F(q,\dot{q})$ admite como Lagrangiana la expresión

$$L = \dot{q}\int \frac{I(q,\dot{q})}{\dot{q}^2}\,d\dot{q} + \Phi(q)\dot{q}$$

donde Φ es una función arbitraria de su argumento.

Demostración

Basta observar que, teniendo en cuenta la proposición anterior, podemos escribir la siguiente relación:

$$\frac{\partial}{\partial \dot{q}}\left(\frac{L}{\dot{q}}\right) = \frac{\partial L/\partial \dot{q} - L}{\dot{q}^2} = \frac{I}{\dot{q}^2}$$

e integrando, obtendremos

$$L = \dot{q}\int \frac{I}{\dot{q}^2}\, d\dot{q} + \Phi(q)\dot{q}$$

Es evidente que, puesto que no hay dependencia explícita respecto del tiempo, $\Phi(q)\dot{q}$ será la derivada temporal de alguna función $\beta(q)$, es decir, que L se podrá escribir bajo la forma

$$L = \dot{q}\int \frac{I}{\dot{q}^2}\, d\dot{q} + \frac{d\beta(q)}{dt}$$

METODO

El conjunto de proposiciones que acabamos de exponer entrañan un método simple para la construcción de una Lagrangiana capaz de describir la ecuación dinámica $\ddot{q}=F(q,\dot{q})$. En efecto, utilizando la proposición VI, una vez conocida la constante de evolución $I(q,\dot{q})$, queda determinada una de las Lagrangianas equivalentes cuya ecuación de Euler asociada es $\ddot{q}=F(q,\dot{q})$. En general, diferentes integrales primeras conducirán a Larangianas equivalentes diferentes. Para determinar la constante de evolución $I(q,\dot{q})$ hemos utilizado los factores integrantes de la ecuación diferendial $\dot{q}d\dot{q} = F(q,\dot{q})dq$. Una solución geométrica equivalente es la que propuso Sophus Lie: se trata de buscar los grupos de transformaciones infinitesimales que dejan invariante dicha ecuación [78,79].

PROPOSICION VII

El principio variacional

$$\delta\int_1^2 \dot{q}dq = 0 \qquad (\delta q=0 \text{ y } \delta\dot{q}=0 \text{ en los extremos})$$

con la condición adicional $\delta I=0$ en cada punto de la trayectoria del espacio fásico $(q,\dot{q})$, es equivalente a las ecuaciones

$$\partial I/\partial\dot{q} = \lambda\dot{q}; \qquad\qquad \partial I/\partial q = -\lambda F(q,\dot{q}) \qquad\qquad [VII.I]$$

Demostración

Si tomamos δq y $\delta\dot{q}$ como variaciones independientes y llamamos u al parámetro que nos determina la posición a lo largo de la trayectoria

$$\delta\int_1^2 \dot{q}dq = \int_1^2 \{\delta\dot{q}dq + \dot{q}\delta(dq)\} =$$

$$= \int_1^2 \{\delta\dot{q}dq - \delta q d\dot{q}\} + \dot{q}\delta q\Big|_1^2 = \int_1^2 \left(\delta\dot{q}\frac{dq}{du} - \delta q\frac{d\dot{q}}{du}\right)du = 0,$$

donde se ha llevado a cabo una integración por partes y se ha tenido en cuenta que $\delta q(1)=\delta q(2)$ para llegar a ese resultado. La condición adicional $\delta I=0$ se puede expresar de la forma:

$$\frac{\partial I}{\partial \dot q}\,\delta \dot q + \frac{\partial I}{\partial q}\,\delta q = 0,$$

aplicando el método de los multiplicadores de Lagrange, introducimos $\mu(u)$ para poder escribir:

$$\int_{u_1}^{u_2}\left(\left(\frac{dq}{du} - \mu(u)\frac{\partial I}{\partial \dot q}\right)\delta \dot q - \left(\frac{d\dot q}{du} + \mu(u)\frac{\partial I}{\partial q}\right)\delta q\right)du = 0$$

y como $\delta \dot q$ y δq son independientes, tendremos que:

$$\frac{dq}{du} = \mu(u)\frac{\partial I}{\partial \dot q}\ ; \qquad \frac{d\dot q}{du} = -\,\mu(u)\frac{\partial I}{\partial q}$$

siendo estas últimas ecuaciones equivalentes a las del sistema [VII.I] sin más que elegir el multiplicador $\mu(u)$ de forma que se verifique identicamente:

$$\mu(u)du \equiv \left(\exp\left(-\int \frac{\partial F}{\partial \dot q}\, dt\right)\right)dt$$

<u>PROPOSICION VIII</u>

Si F y λ son invariantes a una transformación en el origen de los tiempos, siendo

$$\lambda = \exp\left(-\int \frac{\partial F}{\partial \dot q}\, dt\right),$$

la expresión:

$$J = \int_{D_t} \exp\left(-\int \frac{\partial F}{\partial \dot{q}}\, dt\right) dq\, d\dot{q}$$

es un invariante integral relativo del sistema adjunto de la ecuación $\ddot{q}=F(q,\dot{q})$.

Demostración

La ecuación dinámica newtoniana $\ddot{q} = F(q,\dot{q})$, junto con $dq=\dot{q}dt$ admite como sistema adjunto

$$\frac{d\dot{q}}{\dot{q}} = \frac{dq}{F} = \frac{dt}{1}. \qquad \text{[VIII.I]}$$

Por hipótesis, los denominadores son función de q y $\dot{q}$, pero no de t. Ahora bien, si λ no depende explicitamente del tiempo y verifica

$$\frac{\partial(\lambda\dot{q})}{\partial q} + \frac{\partial(\lambda F)}{\partial \dot{q}} = 0 \implies \frac{\partial\lambda}{\partial q}\dot{q} + \frac{\partial\lambda}{\partial \dot{q}}\ddot{q} + \frac{\partial F}{\partial \dot{q}}\lambda = \frac{d\lambda}{dt} + \frac{\partial F}{\partial \dot{q}}\lambda = 0;$$

esto es, λ es un multiplicador para el sistema adjunto [VIII.I]; en virtud del teorema de Poincaré [89], ello implica que

$$J = \int_{D_t} \exp\left(-\int \frac{\partial F}{\partial \dot{q}}\, dt\right) dq\, d\dot{q}$$

sea un invariante integral relativo a las soluciones del citado sistema. Esto es, que tal expresión es independiente del tiempo. Donde D_t es un recinto del espacio $(q,\dot{q})$, en general, variable con t.

PROPOSICION IX

La derivada temporal de la función dinámica $G = G(q,\dot{q},t)$ puede expresarse, utilizando el paréntesis de Poisson, por

$$\frac{dG}{dt} = \frac{1}{\lambda}\,[G,I] + \frac{\partial G}{\partial t}.$$

Demostración

Efectivamente, podemos escribir:

$$\frac{dG}{dt} = \frac{\partial G}{\partial \dot{q}}\,\ddot{q} + \frac{\partial G}{\partial q}\,\dot{q} + \frac{\partial G}{\partial t}$$

ahora bien, según [VII.1]: $\ddot{q} = -\lambda^{-1}\partial I/\partial q$, $\dot{q} = \lambda^{-1}\partial I/\partial \dot{q}$ y, por tanto, podremos expresar la derivada temporal de G de la forma

$$\frac{dG}{dt} = \frac{1}{\lambda}\left(\frac{\partial G}{\partial q}\frac{\partial I}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial G}{\partial \dot{q}}\frac{\partial I}{\partial q}\right) + \frac{\partial G}{\partial t} = \frac{1}{\lambda}\,[G,I] + \frac{\partial G}{\partial t}$$

COROLARIO IX.1

Si la función dinámica G no depende explicitamente de t y su paréntesis de Poisson con la función $I(q,\dot{q})$ es nulo, $G(q,\dot{q})$ es una constante de evolución.

Resultado que sigue inmediatamente de la proposición anterior.

2.2.1- FORMAS FUNCIONALES Y FACTORES INTEGRANTES

Es evidente que no siempre es sencillo establecer algún factor integrante para una determinada ecuación dinámica, ya que encontrar las soluciones de la ecuación diferencial asociada conlleva casi siempre dificultades que no se pueden salvar facilmente. Nuestra intención en este apartado, es establecer las condiciones que han de verificar las funciones dinámicas $F(q,\dot{q})$ para que exista un factor integrante con una dependencia funcional dada, o bien, determinar la forma funcional del factor integrante conocida la de la función dinámica. El análisis, dadas sus características, no puede pretender ser exhaustivo y solo aspira a sugerir la forma en que pueden encontrarse nuevos factores integrantes que, en cada situación concreta, será posible especificar analíticamente.

Al tiempo que analizamos ciertas formas funcionales de interés para los factores integrantes, presentamos algunos ejemplos de ecuaciones dinámicas en los que se aplica directamente lo expuesto para determinar dichos factores; a partir de ellos, se calcula la integral primera $I(q,\dot{q})$ y posteriormente la Lagrangiana correspondiente a esa integral primera, siguiendo el método elaborado en las secciones anteriores.

Hemos tratado de incluir ejemplos cuyo significado físico fuera patente, en la medida de lo posible. También presentamos otros en los que el fenómeno físico no se intuye inmediatamente. Ello está justificado en virtud de que el tratamiento lagrangiano se aplica para el estudio de una gran variedad de sistemas, no necesariamente incluidos dentro del campo de la Física.

A continuación presentamos los resultados correspondientes a los siguientes casos:

CASO 1

Si $\partial F/\partial\dot{q}=k$, la ecuación correspondiente de los factores integrantes:

$$\frac{d\lambda}{dt} + \frac{\partial F}{\partial\dot{q}}\lambda = 0$$

será integrable y tendremos que: $\lambda = \exp\{-kt\}$.

EJEMPLO 1.1

El oscilador armónico amortiguado linealmente, con coeficiente de amortiguamiento constante, está descrito por la ecuación:

$$\ddot{q} + \mu\dot{q} - \beta q = 0, \qquad \mu=\text{cte.}, \quad \beta=\text{cte.},$$

que admite como factor integrante $\lambda=\exp\{-\mu t\}$. Este permite escribir, la ecuación dinámica de la forma:

$$\frac{d}{dt}\{\dot{q}\exp(-\mu t)\} - \beta q\exp\{-\mu t\} = 0;$$

e identificando ésta con la forma de la ecuación de Lagrange, obtenemos para la Lagrangiana

$$L = \exp(-\mu t)(\tfrac{1}{2}\,\dot{q}^2 + \tfrac{1}{2}\,q^2).$$

CASO 2

Si pretendemos encontrar un factor integrante que dependa unicamente de la coordenada generalizada: $\lambda=\lambda(q)$, para que el exponente de la expresión genérica del factor sea integrable ha de ser:

$$\frac{\partial}{\partial q}\left(\frac{1}{\dot q}\frac{\partial F}{\partial \dot q}\right) = 0$$

EJEMPLO 2.1

La ecuación dinámica:

$$\ddot q = -(q + \dot q^{2} q^{-1} + 1)$$

representa un oscilador armónico forzado y sometido a un amortiguamiento no lineal de forma que el coeficiente de amortiguamiento es inversamente proporcional a la coordenada generalizada. El factor integrante será:

$$\lambda = \exp\left(-\int \frac{1}{\dot q}\frac{\partial F}{\partial \dot q}\, dq\right) = q^{2}$$

al que el método asocia la integral $I(q,\dot q)$ dada por

$$I = \tfrac{1}{2} q^{2}\dot q^{2} + \tfrac{1}{4} q^{4} + 1/3 q^{3}$$

y la Lagrangiana:

$$L = \tfrac{1}{2}\dot q^{2} q^{2} - \tfrac{1}{4} q^{4} - 1/3 q^{3} + \Phi(q)\dot q$$

siendo Φ una función arbitraria de su argumento.

CASO 3

Si existiera un factor integrante que dependa solamente de la velocidad generalizada, sería:

$$\lambda = \exp\left(-\int \frac{1}{F}\frac{\partial F}{\partial \dot q}\, d\dot q\right)$$

y para que el exponente sea integrable ha de ser:

$$\frac{\partial}{\partial q}\left(\frac{1}{F}\frac{\partial F}{\partial \dot{q}}\right) = 0.$$

EJEMPLO 3.1

Sea la ecuación dinámica

$$\ddot{q} = (\dot{q} + \dot{q}^3)(q + q^2)^{-1}.$$

Puesto que

$$\frac{\partial}{\partial \dot{q}}\left(\frac{1}{F}\frac{\partial F}{\partial \dot{q}}\right) = 0$$

admite un factor integrante $\lambda(\dot{q})$ dado por $\lambda=(\dot{q}+\dot{q}^3)^{-1}$. La integral primera $I(q,\dot{q})$, definida a partir de él según la PROPOSICION IV, es:

$$I = \operatorname{arctg} \dot{q} + \operatorname{Ln}(1 + q^{-1})$$

a la que nuestro método asocia la Lagrangiana

$$L = -\operatorname{Ln}(1+q^{-1}) - \operatorname{arctg} \dot{q} - \tfrac{1}{2}\dot{q}\operatorname{Ln}(1+\dot{q}^{-2}) + \Phi(q)\dot{q}.$$

donde $\Phi(q)$ es una función arbitraria de q.

EJEMPLO 3.2

Un electrón sometido a un campo mecánico descrito por el potencial V(x) y a otro eléctrico de intensidad E, constante, moviéndose con velocidades relativistas, viene descrito por la ecuación dinámica:

$$x'' = \frac{(c^2 - x'^2)^{3/2}}{m_o c^3}\left(-\frac{\partial V}{\partial x} + eE\right)$$

que admite un factor integrante $\lambda=\lambda(\dot q)$, dado por:

$$\lambda = \exp\left(-\int \frac{\partial F}{\partial \dot q}\frac{1}{F}\, d\dot q\right) = (c^2 - x'^2)^{-3/2}$$

La integral primera $I(q,\dot q)$, es:

$$I = \frac{1}{m_o c^3}(V - eEx) + \frac{1}{(c^2 - x'^2)^{1/2}}$$

y la Lagrangiana asociada:

$$L = \frac{1}{m_o c^3}(-V + eEx) - \frac{(c^2 - x'^2)^{1/2}}{c^2}$$

EJEMPLO 3.3

La ecuación del movimiento de una masa puntual sometida a una fuerza de rozamiento lineal en la velocidad, cuya magnitud depende de la posición, viene dada por:

$$\ddot q + \beta(q)\dot q = 0.$$

Puesto que:

$$\frac{\partial}{\partial q}\left(\frac{1}{F}\frac{\partial F}{\partial \dot q}\right) = 0$$

admite un factor integrante $\lambda=\lambda(\dot q)$, dado por: $\lambda=\dot q^{-1}$; al que nuestro método asocia la integral primera I:

$$I = \dot q + \int \beta(q)\,dq$$

y la Lagrangiana:

$$L = \dot{q}\mathrm{Ln}\,\dot{q} - \int\beta(q)dq + \Phi(q)\dot{q}.$$

Este sistema tuvo su interés en la elaboración de un modelo óptico de scattering anelástico de partículas [64].

CASO 4

Si investigamos la exixtencia de un factor integrante $\lambda=\lambda(u)$, donde $u=q\pm\dot{q}$, éste vendrá dado por la expresión

$$\lambda = \exp\left(-\int\frac{1}{F\pm\dot{q}}\frac{\partial F}{\partial\dot{q}}(dq \pm d\dot{q})\right)$$

y para que el exponente sea integrable ha de ser:

$$\frac{\partial}{\partial\dot{q}}\left(\frac{1}{F\pm\dot{q}}\frac{\partial F}{\partial\dot{q}}\right) = \pm\frac{\partial}{\partial q}\left(\frac{1}{F\pm\dot{q}}\frac{\partial F}{\partial\dot{q}}\right)$$

correspondiendo, donde aparece el doble signo $\pm$, el signo + si es $u=q+\dot{q}$ y el − si $u=q-\dot{q}$.

CASO 5

Si buscamos un factor integrante para la ecuación dinámica cuya dependencia funcional sea de la forma $\lambda=\lambda(u)$, donde $u=q\dot{q}$ (ó bien $u=q/\dot{q}$), el factor integrante se podrá escribir:

$$\lambda = \exp\left(-\int\frac{1}{qF\pm\dot{q}^2}\frac{\partial F}{\partial\dot{q}}(qd\dot{q} \pm \dot{q}dq)\right)$$

que podrá expresarse analiticamente si el exponente es exactamente integrable, es decir, si:

$$\frac{\partial}{\partial q}\left(\frac{q}{qF\pm\dot{q}^2}\frac{\partial F}{\partial\dot{q}}\right) = \pm\frac{\partial}{\partial\dot{q}}\left(\frac{\dot{q}}{qF\pm\dot{q}^2}\frac{\partial F}{\partial\dot{q}}\right) \tag{5.1}$$

teniendo en cuenta que donde aparezca el doble signo $\pm$, pondremos el $+$ si $u=q\dot{q}$ y el $-$ si $u=q/\dot{q}$.

EJEMPLO 5.1

La ecuación dinámica

$$\ddot{q} = (\dot{q}^2 + \dot{q}\mathrm{Ln}\ q)q^{-1}$$

verifica la condición (5.1) y por tanto admitirá un factor integrante de la forma $\lambda=\lambda(u)$, $u=q\dot{q}$, que resulta ser, tras realizar algunos cálculos: $\lambda=(q\dot{q})^{-1}$. La integral primera $I(q,\dot{q})$, a él asociada es:

$$I(q,\dot{q}) = (1 + \dot{q} + \mathrm{Ln}\ q)q^{-1}$$

y la correspondiente Lagrangiana

$$L = -(1 + \mathrm{Ln}\ q + \dot{q}\mathrm{Ln}\ \dot{q})q^{-1} + \Phi(q)\dot{q}$$

CASO 6

Si la función dinámica admite una dependencia funcional de la forma $F(q,\dot{q})=(\dot{q}^2/q)f(u)$, donde $u=q\dot{q}$ (o bien $u=q/\dot{q}$), la ecuación dinámica correspondiente admite como factor integrante $\lambda=(Fq + \dot{q}^2)^{-1}$, si $u=q\dot{q}$, (respectivamente $\lambda=(Fq - \dot{q}^2)^{-1}$ si $u=\dot{q}/q$). En efecto, la ecuación dinámica se podrá escribir de la forma $\dot{q}d\dot{q} - F(q,\dot{q})dq=0$. Multiplicando por dicho factor y sustituyendo la expresión de F, tendremos:

$$\frac{d\dot{q}}{\dot{q}\{1 + f(u)\}} - \frac{dq}{q\{1 + f(u)\}} \equiv M d\dot{q} + N dq = 0$$

que es exacta, puesto que:

$$\frac{\partial M}{\partial q} = -\frac{df/du}{(1 + f)^2} = \frac{\partial N}{\partial \dot{q}}.$$

EJEMPLO 6.1

La ecuación newtoniana

$$\ddot{q} = - q^3(q^2 - q\dot{q} - \dot{q}^2)^{-1}$$

cuya función dinámica puede escribirse de la forma $F=(\dot{q}^2/q)f(u)$ con $u=\dot{q}/q$, admitirá como factor integrante:

$$\lambda = (qF - \dot{q}^2)^{-1} = (q^2 - q\dot{q} - \dot{q}^2)(\dot{q}^4 - q^2\dot{q}^2)^{-1}.$$

La integral primera $I(q,\dot{q})$ será:

$$I = \tfrac{1}{2}\mathrm{Ln}(q + \dot{q}) - \tfrac{1}{2}\mathrm{Ln}(\dot{q} - q) - \mathrm{Ln}\ \dot{q}$$

y la Lagrangiana a ella asociada se podrá escribir:

$$L = \mathrm{Ln}\ \dot{q} + \frac{q + \dot{q}}{2q\dot{q}} \mathrm{Ln} \frac{\dot{q} - q}{q + \dot{q}} + \Phi(q)\dot{q}.$$

CASO 7

Si investigamos la existencia de un factor integrante del tipo: $\lambda=(q/\dot{q})f(\dot{q})$, la función $f(\dot{q})$

estará determinada por la ecuación diferencial

$$\frac{df}{f} = -\frac{\dot q}{qF}\left(\frac{\dot q^2 - qF}{\dot q^2} + \frac{q}{\dot q}\frac{\partial F}{\partial \dot q}\right)d\dot q$$

y para que ésta pueda integrarse, ha de ser

$$\frac{\partial}{\partial q}\left(\frac{\dot q}{qF} - \frac{1}{F}\frac{\partial F}{\partial \dot q}\right) = 0.$$

EJEMPLO 7.1

Sea la ecuación dinámica:

$$\ddot q = \dot q^2 q^{-1}(1 - \dot q\cos q + q\dot q\,\mathrm{sen}\, q)$$

que, al verificar la condición anterior, admitirá un factor integrante de la forma indicada, siendo $f(\dot q)=\dot q^{-2}$, con lo cual, tendremos que: $\lambda=q\dot q^{-3}$. La integral primera $I(q,\dot q)$, asociada a este factor es:

$$I = -q\dot q^{-1} + q\cos q$$

y la correspondiente Lagrangiana será:

$$L = \tfrac{1}{2}\, q\dot q^{-1} - q\cos q.$$

CASO 8

Si pretendemos encontrar un factor cuya forma funcional sea $\lambda=(q/\dot q)f(q)$, la función $f(q)$ estará determinada por la ecuación diferencial

$$\frac{df}{f} = -\left(\frac{\dot q^2 - qF}{q\dot q^2} + \frac{1}{\dot q}\frac{\partial F}{\partial \dot q}\right)dq$$

que será integrable exactamente si

$$\frac{\partial}{\partial \dot q}\left(-\frac{F}{\dot q^{2}}+\frac{1}{\dot q}\frac{\partial F}{\partial \dot q}\right)=0.$$

CASO 9

En el caso de que estemos interesados en la determinación de un factor integrante cuya dependencia funcional sea tal que $\lambda=f(q)\mathrm{tag}\,\dot q$, la función f verificará la ecuación diferencial:

$$\frac{df}{f}=-\left(\frac{2F}{\dot q\,\mathrm{sen}\,2\dot q}-\frac{1}{\dot q}\frac{\partial F}{\partial \dot q}\right)dq$$

y ésta será exactamente integrable si:

$$\frac{\partial}{\partial \dot q}\left(\frac{2F}{\mathrm{sen}\,2\dot q}-\frac{\partial F}{\partial \dot q}\right)=0.$$

CASO 10

Si la dependencia funcional esperada para el factor integrante es: $\lambda=f(\dot q)\mathrm{tag}\,q$, la función f estará definida por:

$$\frac{df}{f}=-\left(\frac{2\dot q}{F\,\mathrm{sen}\,2q}+\frac{1}{F}\frac{\partial F}{\partial \dot q}\right)d\dot q$$

y podrá expresarse analíticamente si la ecuación se puede integrar de forma exacta, es decir si:

$$\frac{\partial}{\partial q}\left(\frac{2\dot q}{F\,\mathrm{sen}\,2q}+\frac{1}{F}\frac{\partial F}{\partial \dot q}\right)=0.$$

CASO 11

Si la función dinámica F es tal que permite escribir $\lambda=f(q)(\text{sen } q+\cos q)$ para el factor integrante, la función $f(q)$ estará determinada por la ecuación:

$$\frac{df}{f} = \left(\frac{\dot{q}}{F} \operatorname{tag} 2q + \frac{1}{F}\frac{\partial F}{\partial \dot{q}}\right)d\dot{q}$$

y podremos calcularla siempre que esta ecuación sea exactamente integrable, es decir, siempre que:

$$\frac{\partial}{\partial q}\left(\frac{\dot{q}}{F} \operatorname{tag} 2q + \frac{1}{F}\frac{\partial F}{\partial \dot{q}}\right) = 0.$$

CASO 12

Si se pretende determinar un factor integrante susceptible de ser escrito bajo la forma funcional $\lambda=f(q)\text{Ln}\dot{q}$, la función f tendrá que verificar la ecuación diferencial:

$$\frac{df}{f} = -\left(\frac{F}{\dot{q}^2\text{Ln }\dot{q}} + \frac{1}{\dot{q}}\frac{\partial F}{\partial \dot{q}}\right)dq$$

y podrá escribirse analíticamente si ésta es exactamente integrable:

$$\frac{\partial}{\partial \dot{q}}\left(\frac{F}{\dot{q}^2\text{Ln }\dot{q}} + \frac{1}{\dot{q}}\frac{\partial F}{\partial \dot{q}}\right) = 0.$$

CASO 13

Si pretendemos escribir el factor integrante bajo la forma funcional $\lambda=\dot{q}\mathrm{Ln}\ f(q)$, la función $f(q)$ estará determinada por la ecuación:

$$\frac{d\{\mathrm{Ln}\ f(q)\}}{\mathrm{Ln}\ f(q)} = -\left(\frac{F}{\dot{q}^2} + \frac{1}{\dot{q}}\frac{\partial F}{\partial \dot{q}}\right)dq$$

y podrá escribirse analíticamente si esta ecuación puede integrarse de forma exacta, o sea, si:

$$\frac{\partial}{\partial q}\left(\frac{F}{\dot{q}^2} + \frac{1}{\dot{q}}\frac{\partial F}{\partial \dot{q}}\right) = 0.$$

NOTA 2

El método puede utilizarse, si no resulta fácil determinar una forma funcional para el factor integrante como se ha hecho en los casos anteriores, escribiendo la ecuación dinámica bajo la forma: $\dot{q}d\dot{q}=F(q,\dot{q})dq$ y determinando para ella un factor integrante. A partir de él es inmediato calcular el correspondiente a la forma newtoniana y, en consecuencia, proseguir con la aplicación del método. A continuación, presentamos unos ejemplos en los que hemos tenido en cuenta estas consideraciones.

EJEMPLO N2.1

Sea la ecuación dinámica

$$\ddot{q} = -\frac{\dot{q}(2q\dot{q}^4e^{\dot{q}} + 2q\dot{q}^3 + \dot{q})}{q^2\dot{q}^4e^{\dot{q}} - q^2\dot{q}^2 - 3q}.$$

Podemos escribirla así:

$$(2q\dot{q}^4e^{\dot{q}} + 2q\dot{q}^3 + \dot{q})dq + (q^2\dot{q}^4e^{\dot{q}} - q^2\dot{q}^2 - 3q)d\dot{q} = 0$$

que admite como factor integrante $\dot{q}^{-4}$ y el correspondiente a la ecuación newtoniana será:

$$\lambda = q^2\dot{q}^{-1}e^{\dot{q}} - q^2\dot{q}^{-3} - 3q\dot{q}^{-5}$$

al que asociamos la integral primera:

$$I = q^2e^{\dot{q}} + q^2\dot{q}^{-1} + q\dot{q}^{-3}$$

y la Lagrangiana:

$$L = -\tfrac{1}{2}q^2\dot{q}^{-1} - \tfrac{1}{4}q\dot{q}^{-3} + q^2\dot{q}\int\dot{q}^{-2}e^{\dot{q}}\,d\dot{q} + d\Phi(q)/dt$$

EJEMPLO N2.2

Sea la ecuación dinámica

$$\ddot{q} = -\frac{2q^3\dot{q}^3 + 4q^2\dot{q}^2 + 2q\dot{q}^3 + q\dot{q}^5 + 2\dot{q}^2}{2(\dot{q}^3 + q^2\dot{q} + q)}$$

para la cual, resulta más sencillo buscar un factor integrante escrita de la forma

$$(2q^3\dot{q}^2 + 4q^2\dot{q} + 2q\dot{q}^2 + q\dot{q}^4 + 2\dot{q})dq + 2(\dot{q}^3 + q^2\dot{q} + q)d\dot{q} = 0,$$

que resulta ser $\beta = \exp(q^2)$ y, en consecuencia, el correspondiente a la ecuación newtoniana será:

$$\lambda = 2\dot{q}^{-1}(\dot{q}^3 + q^2\dot{q} + q)\exp(q^2),$$

al que se asocia la integral primera:

$$I = 2\exp(q^2)(\tfrac{1}{4}\,\dot{q}^4 + \tfrac{1}{2}\,q^2\dot{q}^2 + q\dot{q})$$

y la Lagrangiana:

$$L = \exp(q^2)(2\,q^2\dot{q}^2 + 4\,q\dot{q}\mathrm{Ln}\,\dot{q} + 1/3\,\dot{q}^4) + d\Phi(q)/dt.$$

Como ya señalábamos anteriormente, la relación de los casos analizados no pretende ser exahustiva, sino sugerir las amplias posibilidades que se abren para buscar las formas funcionales de los factores integrantes, facilitando la determinación de estos. Así, una vez conocido un factor integrante, podemos determinar, aplicando el método elaborado, una Lagrangiana para describir la ecuación dinámica en cuestión y con ello disponemos para su tratamiento de los potentes métodos de que se dispone en la Mecánica Analítica.

2.3.- ESTUDIO DE LA ECUACION $\ddot{q} = F(\dot{q},t)$

Procediendo ahora de una forma totalmente análoga al caso anterior, fundamentamos nuestro análisis en el estudio de los factores integrantes de la ecuación $\dot{q}d\dot{q} = F(\dot{q},t)dq$, sometida a la restricción adicional $dq=\dot{q}dt$. Teniendo en cuenta que en este caso el desarrollo es totalmente paralelo y las demostraciones son similares a las realizadas en la sección 2.2, nos limitaremos a presentar los resultados más significativos.

Si la función dinámica F no depende explícitamente de la coordenada generalizada, q, tenemos el siguiente corolario:

COROLARIO III.2

Las soluciones de

$$\frac{\partial\lambda}{\partial\dot{q}} F + \frac{\partial\lambda}{\partial t} + \frac{\partial F}{\lambda\dot{q}} \lambda = 0$$

son factores integrantes para la ecuación dinámica newtoniana $\ddot{q}=F(\dot{q},t)$.

Procediendo como en el caso anterior, es posible determinar aquí una integral primera definida a partir del factor integrante. Mientras que esta integral era antes, formalmente, la Hamiltoniana del sistema, representa ahora el momento conjugado. Este resultado lo enunciamos en la siguiente

PROPOSICION X

Si λ es solución de la ecuación diferencial

$$\frac{d\lambda}{dt} + \frac{\partial F(\dot{q},t)}{\partial\dot{q}} \lambda = 0$$

existe una función $I=I(\dot{q},t)$ definida por

$$\partial I/\partial\dot{q} = \lambda; \qquad \partial I/\partial q = -\lambda F,$$

tal que $dI=0$ y, por tanto, es una integral primera para la ecuación $\ddot{q}=F(\dot{q},t)$.

Una vez conocida esta integral primera, procedemos a construir la Lagrangiana asociada, utilizando la tesis de la siguiente proposición:

PROPOSICION XI

Si $L(\dot{q},t)$ es la Lagrangiana que describe la ecuación dinámica $\ddot{q}=F(\dot{q},t)$, la integral primera I satisface la relación $I=\partial L/\partial \dot{q}$.

En consecuencia podemos enunciar la

PROPOSICION XII

La ecuación diferencial $\ddot{q}=F(\dot{q},t)$ admite como Lagrangiana

$$L = \int I d\dot{q} + \Phi(t)$$

donde $\Phi(t)$ es una función arbitraria de su argumento que es posible escribir como la derivada temporal de alguna función: $\Phi(t)=d\beta(t)/dt$.

Como en el caso anterior, estos resultados entrañan un método simple para construir la Lagrangiana para ecuaciones dinámicas del tipo $\ddot{q}=F(\dot{q},t)$.

2.3.1.- FORMAS FUNCIONALES Y FACTORES INTEGRANTES

A continuación pretendemos establecer qué condiciones han de verificar las funciones dinámicas $F(q,t)$ para que exista un factor integrante con una dependencia funcional dada, o bien determinar la forma funcional del factor integrante a partir de la de la función dinámica. No es necesario repetir aquí las observaciones, en cuanto al alcance del presente análisis, que ya se enunciaron en el parágrafo análogo correspondiente a las funciones dinámicas autónomas.

En lo que sigue estudiamos, presentando algunos ejemplos de interés, los siguientes casos:

CASO 1

Si $\partial F/\partial\dot{q}=f(t)$, la ecuación correspondiente de los factores integrantes admite por solución

$$\lambda = \exp\left(-\int \frac{\partial F}{\partial \dot{q}}\, dt\right).$$

CASO 2

Si se pretende para el factor integrante una dependencia funcional tal que $\lambda=\lambda(\dot{q})$, éste podrá expresarse analíticamente siempre y cuando sea integrable el exponente de la expresión genérica, y esto implica que:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{F}\frac{\partial F}{\partial \dot{q}}\right) = 0.$$

CASO 3

Si pretendemos encontrar un factor integrante tal que $\lambda=\lambda(u)$, siendo $u=t\pm\dot{q}$, será:

$$\lambda = \exp\left(-\int\frac{1}{1\pm F}\frac{\partial F}{\partial \dot{q}}(d\dot{q} \pm dt)\right)$$

Para que podamos expresarlo analíticamente, el exponente tiene que ser integrable y ello implica que

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{1\pm F}\frac{\partial F}{\partial \dot{q}}\right) = \pm\frac{\partial}{\partial \dot{q}}\left(\frac{1}{1\pm F}\frac{\partial F}{\partial \dot{q}}\right)$$

teniendo en cuenta que el signo + corresponde al caso en que $u=t+\dot{q}$ y el $-$ a aquél en que $u=q-\dot{q}$.

CASO 4

Si el factor buscado ha de tener la forma funcional $\lambda=\lambda(u)$, siendo $u=\dot{q}t^{\pm 1}$, para que el exponente correspondiente sea exactamente integrable ha de verificarse:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{t}{Ft\pm\dot{q}}\frac{\partial F}{\partial \dot{q}}\right) = \pm\frac{\partial}{\partial \dot{q}}\left(\frac{\dot{q}}{Ft\pm\dot{q}}\frac{\partial F}{\partial \dot{q}}\right)$$

donde se debe respetar la correspondencia del doble signo con el del exponente de la t en u.

CASO 5

Si la función dinámica de la ecuación newtoniana es de la forma $F=(\dot{q}t^{-1})f(\dot{q}t^{\pm 1})$, entonces la expresión $\lambda=(Ft\pm\dot{q})^{-1}$ es un factor integrante para esa ecuación. En efecto, la ecuación $d\dot{q}=Fdt$ al multiplicarla por dicho factor se transforma en:

$$\frac{d\dot{q}}{tF\pm\dot{q}} - \frac{Fdt}{tF\pm\dot{q}} \equiv Md\dot{q} + Ndt = 0$$

sustituyendo la expresión de $F(\dot{q},t)$, se tiene que $\partial M/\partial t=\partial N/\partial \dot{q}$, que prueba lo que pretendíamos.

EJEMPLO 5.1

Sea la ecuación dinámica:

$$\ddot{q} = - \frac{\dot{q}(2t\dot{q} + 1)}{t(1 + 2t\dot{q} - t^3\dot{q}^3)}$$

Puesto que F es de la forma $\dot{q}t^{-1}f(\dot{q}t)$, admite un factor integrante dado por

$$\lambda = \frac{1}{tF + \dot{q}} = - \frac{1 + 2t\dot{q} - t^3\dot{q}^3}{t^3\dot{q}^4}$$

al que nuestro método asocia la integral primera I que podemos escribir de la forma:

$$I = \mathrm{Ln}\ \dot{q} + (3t^3\dot{q}^3)^{-1} + (t^2\dot{q}^2)^{-1}.$$

La Lagrangiana asociada a ésta es:

$$L = \dot{q}\mathrm{Ln}\ \dot{q} - \dot{q} - (t^2\dot{q})^{-1} - (6t^3\dot{q}^2)^{-1} + d\Phi/dt,$$

siendo Φ una función arbitraria de t.

CASO 6

Si el factor integrante se puede escribir bajo la forma funcional $\lambda = f(t)\mathrm{tag}\ \dot{q}$, f(t) estará determinada por la ecuación diferencial

$$\frac{df}{f} = - \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{q}} + \frac{2F}{\mathrm{sen}\ 2\dot{q}}\right) dt$$

que resultará exactamente integrable si:

$$\frac{\partial}{\partial \dot{q}} \left(\frac{2F}{\mathrm{sen}\ 2\dot{q}} + \frac{\partial F}{\partial \dot{q}}\right) = 0.$$

CASO 7

Si el factor integrante pretendido se ha de escribir bajo la forma funcional $\lambda=f(\dot{q})\text{tag } t$, la función f se expresará analíticamente si la ecuación diferencial que la define:

$$\frac{df}{f} = -\left(\frac{2}{F\text{sen } 2t} + \frac{1}{F}\frac{\partial F}{\partial \dot{q}}\right)d\dot{q}$$

es exactamente integrable; es decir, verifica:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{2}{F\text{sen } 2t} + \frac{1}{F}\frac{\partial F}{\partial \dot{q}}\right) = 0.$$

CASO 8

Si la dependencia funcional para el factor integrante pretendido es tal que se puede escribir $\lambda=f(\dot{q})(\text{sen } t+\cos t)$, la función f tiene que verificar la ecuación diferencial:

$$\frac{df}{f} = -\left(\frac{1}{F}\frac{\partial F}{\partial \dot{q}} + \frac{1}{F}\text{cotg } 2t\right)d\dot{q}$$

y podrá expresarse analíticamente cuando ésta sea exactamente integrable. Ello implica que:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{F}\frac{\partial F}{\partial \dot{q}} + \frac{1}{F}\text{cotg } 2t\right) = 0.$$

CASO 9

Si un factor integrante se puede expresar bajo la forma $\lambda=f(t)(\text{sen } \dot{q}+\cos \dot{q})$, f quedará determinada por la ecuación:

$$\frac{df}{f} = -\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{q}} + F\text{cotg } 2\dot{q}\right)dt$$

que resultará exactamente integrable cuando:

$$\frac{\partial}{\partial \dot{q}}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{q}} + F\text{cotg } 2\dot{q}\right) = 0.$$

CASO 10

Si $\lambda=t\dot{q}^{-1}f(\dot{q})$, f ha de ser solución de:

$$\frac{df}{f} = -\left(\frac{1}{tF} - \frac{1}{\dot{q}} + \frac{1}{F}\frac{\partial F}{\partial \dot{q}}\right)d\dot{q}$$

que resultará exactamente integrable si:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{tF} + \frac{1}{F}\frac{\partial F}{\partial \dot{q}}\right) = 0.$$

CASO 11

Si $\lambda=\dot{q}t^{-1}f(t)$,la ecuación diferencial que debe verificar f, en este caso, es:

$$\frac{df}{f} = -\left(\frac{tF - \dot{q}}{\dot{q}t} + \frac{\partial F}{\partial \dot{q}}\right)dt$$

que será exactamente integrable cuando:

$$\frac{\partial}{\partial \dot{q}}\left(\frac{tF - \dot{q}}{\dot{q}t} + \frac{\partial F}{\partial \dot{q}}\right) = 0.$$

CASO 12

Si la dependencia funcional del factor integrante respecto de las variables $\dot{q}$ y t puede expresarse de la forma $\lambda=\dot{q}^{-2}f(t\dot{q}^{-1})$, f ha de ser solución de la ecuación diferencial:

$$\frac{df}{f} = \left(\frac{2F}{\dot{q}} - \frac{\partial F}{\partial \dot{q}}\right)\frac{1}{\dot{q}-tF}(\dot{q}dt-td\dot{q})$$

ecuación que resultará exactamente integrable si se verifica que:

$$\frac{\partial}{\partial \dot{q}}\left(\frac{\dot{q}}{\dot{q} - tF}\left(\frac{2F}{\dot{q}} - \frac{\partial F}{\partial \dot{q}}\right)\right) = - \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{t}{\dot{q} - tF}\left(\frac{2F}{\dot{q}} - \frac{\partial F}{\partial \dot{q}}\right)\right)$$

NOTA 3

El método puede utilizarse, como en el caso autónomo, determinando un factor integrante para la ecuacuación dinámica de evolución escrita bajo la forma $d\dot{q}=F(\dot{q},t)dt$ y, teniendo en cuenta que a partir de él resulta inmediato expresar el que le corresponde escrita como ecuación newtoniana, $\ddot{q}=F$, para calcular a partir de él, la integral primera I y posteriormente la Lagrangiana. Procedemos de este modo en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO N3.1

Sea la ecuación dinámica

$$\ddot{q} = - \frac{2t\dot{q}^4 e^{\dot{q}} + 2t\dot{q}^3 + \dot{q}}{t^2\dot{q}^4 e^{\dot{q}} - t^2\dot{q}^2 - 3t}$$

que podemos escribir en la forma:

$$(2t\dot{q}^4 e^{\dot{q}} + 2t\dot{q}^3 + \dot{q})dt + (t^2\dot{q}^4 e^{\dot{q}} - t^2\dot{q}^2 - 3t)d\dot{q} = 0$$

para la cual $\beta=\dot{q}^{-4}$ es un factor integrante; así el que corresponde a la ecuación newtoniana es:

$$\lambda = (t^2\dot{q}^4 e^{\dot{q}} - t^2\dot{q}^2 - 3t)\dot{q}^{-4} = t^2 e^{\dot{q}} - t^2\dot{q}^{-2} - 3t\dot{q}^{-4}.$$

La integral primera a él asociada se escribe:

$$I = t^2 e^{\dot{q}} + t^2\dot{q}^{-1} + t\dot{q}^{-3}$$

y la correspondiente Lagrangiana:

$$L = t^2 e^{\dot{q}} - t^2\dot{q}^{-2} - 3t\dot{q}^{-4} + d\Phi/dt.$$

NOTA 4

Aunque la aplicación del método de los factores integrantes a la ecuación newtoniana más general $\ddot{q}=F(q,\dot{q},t)$ se complica considerablemente, cabe analizar algún caso particular en que el método nos permite determinar una integral primera con bastante facilidad, dejando el camino abierto para posteriores generalizaciones. Concretamente si la ecuación tiene la estructura general:

$$\ddot{q} = P(q,t)\dot{q}^{n} + Q(q,t)\dot{q}^{n+1} \qquad [4.1]$$

se podrá escribir:

$$\frac{d\dot{q}}{\dot{q}^{n}} - P(q,t)dt - Q(q,t)dq = 0$$

y teniendo en cuenta la condición de integrabilidad de las diferenciales exactas de tres variables, si

$$\frac{1}{\dot{q}^{n}}\left(\frac{\partial P}{\partial q} - \frac{\partial Q}{\partial t}\right) = 0 \qquad ===> \qquad \frac{\partial P}{\partial q} - \frac{\partial Q}{\partial t} = 0,$$

la forma diferencial, o bien es exacta, y entonces la ecuación [4.1] admite como integral primera:

$$I = \mathrm{Ln}\,\dot{q} + \int_{q=cte.} P(q,t)dt + \int_{t=cte.} Q(q,t)dq \qquad \text{si } n=1$$

$$I = -\frac{1}{(n+1)\dot{q}^{n+1}} + \int_{q=cte} P(q,t)dt + \int_{t=cte} Q(q,t)dq \qquad \text{si } n\neq 1$$

ó bien admite un factor integrante $\lambda(q,\dot{q},t)$, en cuyo caso la integral primera será:

$$I = \int_{\substack{q=cte\\ t=cte}} \lambda\dot{q}^{-1}\, d\dot{q} + \int_{\substack{\dot{q}=cte\\ q=cte}} \lambda P(q,t)\, dt + \int_{\substack{\dot{q}=cte\\ t=cte.}} \lambda Q(q,t)\, dq.$$

De este tipo es la ecuación de Liouville:

$$\ddot{q} + \dot{q}f(t) + \dot{q}^{2}g(q) = 0.$$

Puesto que:

$$\partial f(t)/\partial q = 0 = \partial g(q)/\partial t$$

la ecuación es integrable y la integral primera es:

$$I = \mathrm{Ln}\ \dot{q} + \int f(t)dt + \int g(q)dq.$$

NOTA 5

Si la ecuación newtoniana $\ddot{q}=F(q,\dot{q},t)$ se puede escribir funcionalmente:

$$\ddot{q} = f(q,\dot{q},t)g(\dot{q})$$

de forma que sea:

$$f(q,\dot{q},t)g(\dot{q}) = \frac{d\Phi(q,t)}{dt}$$

es inmediato encontrar una integral primera, ya que

$$\frac{d}{dt}\{\dot{q} - \Phi(q,\dot{q},t)\} = 0 \implies I = \dot{q} - \Phi(q,\dot{q},t) = cte.$$

2.4.- APENDICE: LAGRANGIANAS DE SEGUNDO ORDEN

Los estudios del Problema Inverso para sistemas de primer orden sugieren que la Universalidad del Problema Lagrangiano Inverso podría alcanzarse si se utilizaran Lagrangianas de segundo orden degeneradas, $L^*(q,\dot{q},\ddot{q},t)$, tales que su dependencia funcional induzca ecuaciones de Lagrange:

$$-\frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{\partial L^*}{\partial \ddot{q}_i}\right)+\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L^*}{\partial \dot{q}_i}\right)-\frac{\partial L^*}{\partial q_i}=0$$

de segundo orden, [63]. Para ello $L^*(q,\dot{q},\ddot{q},t)$ ha de ser de la forma

$$L^* = V_i(q,t)\ddot{q}_i + W(q,\dot{q},t).$$

Es evidente que bajo estas perspectivas se pierde su carácter de verdadero Problema Inverso, puesto que presuponemos un cierto conocimiento de la función Lagrangiana. A pesar de ello, queremos dejar constancia de que, en este caso, se verifica una proposición análoga a la primera de este trabajo.

Recientemente han aparecido algunos trabajos que abordan la Mecánica Generalizada con perspectivas próximas a las del Problema Inverso. Tapia [80] 1985, desarrolla el formalismo de Dirac para sistemas vinculados descritos mediante Lagrangianas que dependen de las aceleraciones generalizadas. Negri y da Silva [81], 1986, discuten el problema de las Lagrangianas s-equivalentes en la Mecánica Generalizada. Jaén, Llosa y Molina [82], 1986, parten de una Lagrangiana que depende de las derivadas temporales de cualquier orden de las coordenadas generalizadas y, suponiendo que se verifican ciertas condiciones, obtienen un sistema diferencial de segundo orden, tal que sus soluciones satisfacen a las ecuaciones de Euler derivadas de la Lagrangiana de partida. También en 1986, Hojman R. y Zanelli [83], dan una demostración alternativa del teorema de conservación de las trazas para Lagrangianas dependientes de las aceleraciones.

La teoría general correspondiente a Lagrangianas de orden superior está suficientemente desarrollada, [84-88], y utilizaremos, sin más, aquellos elementos de la misma que necesitemos. Recordaremos que cada coordenada generalizada, q_k, da lugar a tantos momentos generalizados como el máximo orden de la derivación temporal con que q_k aparezca afectada en L^* y que dichos momentos se definen de la siguiente forma:

$$p_{k,h} = \sum_{j=0}^{s-h} (-1)^j \frac{d^j}{dt^j} \left(\frac{\partial L^*}{\partial q_k^{(j+h)}} \right); \qquad h = 1,2,\dots,s$$

donde $q_k^{(j+h)}$ es la derivada temporal de orden $j+h$ de la coordenada generalizada q_k.

PROPOSICION XIII

Si la ecuación dinámica $\ddot{q}=F(q,\dot{q},t)$ es equivalente a la ecuación de Lagrange-Poisson correspondiente a una Lagrangiana de segundo orden cuya estructura funcional sea del tipo

$$L^*(q,\dot{q},\ddot{q},t) = V(q,t)\ddot{q} + W(q,\dot{q},t)$$

la expresión

$$\frac{\partial p_1}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial p_2}{\partial q}$$

es solución de la ecuación diferencial

$$\frac{d\lambda}{dt} + \frac{\partial F}{\partial \dot{q}} \lambda = 0$$

siendo p_1 y p_2 los momentos generalizados correspondientes a la coordenada q.

Demostración

Teniendo en cuenta la dependencia funcional que hemos supuesto para L^*, la ecuación correspondiente de Lagrange–Poisson se podrá escribir, tras desarrollar las derivadas:

$$\left(\frac{\partial^2 W}{\partial \dot{q}^2} - 2\frac{\partial V}{\partial q}\right)\ddot{q} - \frac{\partial^2 V}{\partial q^2}\,\dot{q}^2 + \left(\frac{\partial^2 W}{\partial \dot{q}\partial q} - 2\frac{\partial^2 V}{\partial t\partial q}\right)\dot{q} + \frac{\partial^2 W}{\partial \dot{q}\partial t} - \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} - \frac{\partial W}{\partial q}=0.$$

Derivando ahora parcialmente respecto de la velocidad generalizada y teniendo en cuenta que a lo largo de la curva solución $\ddot{q}=F$, tendremos:

$$\frac{\partial}{\partial \dot{q}}\left(\frac{\partial^2 W}{\partial \dot{q}^2} - 2\frac{\partial V}{\partial q}\right)\ddot{q} + \frac{\partial}{\partial q}\left(\frac{\partial^2 W}{\partial \dot{q}^2} - 2\frac{\partial V}{\partial q}\right)\dot{q} + \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial^2 W}{\partial \dot{q}^2} - 2\frac{\partial V}{\partial q}\right) +$$

$$+ \left(\frac{\partial^2 W}{\partial \dot{q}^2} - 2\frac{\partial V}{\partial q}\right)\frac{\partial F}{\partial \dot{q}} = 0,$$

ecuación que podemos escribir

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial^2 W}{\partial \dot{q}^2} - 2\frac{\partial V}{\partial q}\right) + \left(\frac{\partial^2 W}{\partial \dot{q}^2} - 2\frac{\partial V}{\partial q}\right)\frac{\partial F}{\partial \dot{q}} = 0. \qquad [XIII.I]$$

Ahora bien, si expresamos los momentos conjugados en función de V y W, obtenemos:

$$p_1 = \frac{\partial L^*}{\partial \dot{q}} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L^*}{\partial \ddot{q}}\right) = \frac{\partial W}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial V}{\partial q}\,\dot{q} - \frac{\partial V}{\partial t}; \qquad p_2 = \frac{\partial L^*}{\partial \ddot{q}} = V$$

y por tanto

$$\frac{\partial p_1}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial p_2}{\partial q} = \frac{\partial^2 W}{\partial \dot{q}^2} - 2\frac{\partial V}{\partial q}. \qquad [XIII.II]$$

Comparando las ecuaciones [XIII.I] y [XIII.II] se sigue inmediatamente la tesis de la proposición.

2.5.- CONCLUSIONES DEL PROBLEMA UNIDIMENSIONAL

Enunciamos a continuación los resultados más importantes obtenidos y que, a nuestro juicio, son originales:

1.- Utilizando las técnicas y conceptos tradicionales de la la Mecánica Analítica desde el principio de nuestro análisis del Problema Inverso, hemos deducido una ecuación diferencial que han de verificar los factores integrantes para permitir una descripción lagrangiana indirecta de una determinada ecuación dinámica.

2.- Si la función dinámica no depende explicitamente del tiempo, sistemas autónomos, entre los que se cuentan los más significativos en Física, construimos, a partir de los factores integrantes, una función, $I(q,\dot{q})$, que es una integral primera para la ecuación dinámica que describe la evolución del sistema.

3.- Mediante la PROPOSICION V establecemos la relación funcional entre la integral primera $I(q,\dot{q})$ y la Lagrangiana que ha de describir la ecuación de evolución del sistema. Posteriormente, PROPOSICION VI, calculamos explicitamente L a partir de I.

4.- Se ha elaborado un método sistemático,claro y eficaz para construir una descripción lagrangiana, para un determinado sistema, a partir de la ecuación dinámica newtoniana de evolución. Ello constituye, a nuestro juicio, el resultado fundamental de este capítulo, ya que nos ha permitido sistematizar y dar consistencia al análisis del Problema Inverso llevado a cabo, ante la, al menos aparente, anarquía de tratamientos y puntos de vista existentes, intentando poner al nivel de los sistemas conservativos los no hamiltonianos.

6.- Utilizando el teorema de Poincaré, mediante la PROPOSICION VIII, establecemos que la expresión

$$J = \int_{D_t} \exp\left(-\int \frac{\partial F}{\partial \dot{q}}\, dt\right) dq\, d\dot{q}$$

siendo D_t un recinto del espacio $(q,\dot{q})$, en general, variable con el tiempo, es un invariante integral relativo para el sistema adjunto de la ecuación dinámica newtoniana $\ddot{q}=F(q,\dot{q})$.

7.- A través de la PROPOSICION IX escribimos la derivada temporal de cualquier función dinámica utilizando los corchetes de Poisson, introduciendo así el álgebra a ellos asociada.

8.- En la sección 2.3 se generalizan los resultados fundamentales obtenidos para los sistemas autónomos, al caso en que las funciones dinámicas dependen de la velocidad generalizada, $\dot{q}$, y del tiempo, t, pero no de la coordenada.

9.- Dado que la Universalidad del Problema Inverso de Lagrange puede alcanzarse utilizando Lagrangianas de segundo orden, como ya hemos señalado en otra parte de la memoria; en la sección 2.4 hemos generalizado el teorema fundamental para el caso de Lagrangianas de segundo orden degeneradas del tipo: $L^{*}=V(q,t)\ddot{q}+W(q,\dot{q},t)$, estableciendo que la expresión $\partial p_1/\partial\dot{q}-\partial p_2/\partial q$ ha de ser solución de la ecuación diferencial que verifican los factores integrantes para Lagrangianas de primer orden.

10.- En las secciones 2.2.1 y 2.3.1, hemos utilizado los resultados teóricos obtenidos para analizar la relación entre las formas funcionales de las funciones dinámicas y la correspondiente a los factores integrantes, en los casos más significativos. Ello nos ha permitido ampliar notablemente las posibilidades de aplicación práctica de nuestro tratamiento, utilizando el método elaborado para la construcción de la Lagrangiana asociada a un gran número de ecuaciones newtonianas que describen sistemas físicos de interés.

CAPITULO 3

SISTEMAS MULTIDIMENSIONALES

3.1.- ESTUDIO GENERAL

En el presente capítulo trataremos el Problema Inverso de Lagrange para sistemas con n grados de libertad cuyas ecuaciones de evolución supondremos escritas bajo la forma newtoniana:

$$\ddot{q}_i = F_i(q_1,\ldots,q_n;\dot{q}_1,\ldots,\dot{q}_n;t); \qquad i=1,\ldots,n.$$

Como en el caso unidimensional, nuestro estudio tendrá carácter local y, por tanto, prescindiremos, de las condiciones iniciales. Admitiremos, así mismo, para todas las funciones dinámicas F_i, las condiciones de continuidad que ya enunciamos entonces.

Ahora, el conjunto de ecuaciones de Lagrange para describir el sistema dinámico, constituyen un sistema de ecuaciones en derivadas parciales sobredeterminado (n ecuaciones cuya única incógnita, con la perspectiva del Problema Inverso, es la función Lagrangiana $L(q/\dot{q},t)$); en general, pues, no admitirá solución, en contraposición a lo que establece el teorema de Darboux para el caso de un solo grado de libertad. El análisis transcurrirá de forma paralela, en los términos en que ello sea posible, al realizado para el caso de una dimensión en el capítulo precedente.

Exponemos a continuación los resultados fundamentales de nuestra investigación enunciando las siguientes PROPOSICIONES:

PROPOSICION XIV

Si el sistema de ecuaciones dinámicas,

$$\ddot{q}_i = F_i(q/\dot{q},t); \qquad i = 1,2,\ldots,n,$$

es equivalente a las de Euler-Lagrange correspondientes a un principio variacional cuya Lagrangiana es $L(q/\dot{q},t)$, las derivadas de los momentos conjugados respecto de las velocidades generalizadas,

$$\lambda_{ij} = \frac{\partial p_i}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j} = \frac{\partial p_j}{\partial \dot{q}_i} = \lambda_{ji}$$

son soluciones del conjunto de ecuaciones:

$$\frac{d\lambda_{ij}}{dt} + \frac{1}{2}\frac{\partial F_k}{\partial \dot{q}_j}\lambda_{ik} + \frac{1}{2}\frac{\partial F_k}{\partial \dot{q}_i}\lambda_{jk} = 0.$$

Demostración

Las ecuaciones de Lagrange correspondiente a la función Lagrangiana $L(q/\dot{q},t)$ son:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0.$$

Desarrollando la derivada temporal, escribiremos las ecuaciones anteriores,

$$\ddot{q}_k \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_k} + \dot{q}_k \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial q_k} + \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial t} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0.$$

NOTA: mientras no se advierta lo contrario, adoptamos el convenio de suma de Einstein para índices repetidos.

Derivando parcialmente respecto a la velocidad generalizada y, puesto que, a lo largo de la curva solución, se verifica que $\ddot{q}_i = F_i(q/\dot{q},t)$, tendremos:

$$\ddot{q}_k \frac{\partial^3 L}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_k \partial \dot{q}_j} + \frac{\partial F_k}{\partial \dot{q}_j} \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_k} + \dot{q}_k \frac{\partial^3 L}{\partial \dot{q}_i \partial q_k \partial \dot{q}_j} + \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial q_j} +$$

$$+ \frac{\partial^3 L}{\partial \dot{q}_i \partial t \partial \dot{q}_j} - \frac{\partial^2 L}{\partial q_i \partial \dot{q}_j} = 0.$$

Si recordamos la definición de momento conjugado y adoptamos la notación:

$$\lambda_{ij} = \frac{\partial p_i}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j} = \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_j \partial \dot{q}_i} = \frac{\partial p_j}{\partial \dot{q}_i} = \lambda_{ji},$$

la última ecuación se expresará:

$$\ddot{q}_k \frac{\partial \lambda_{ij}}{\partial \dot{q}_k} + \dot{q}_k \frac{\partial \lambda_{ij}}{\partial q_k} + \frac{\partial \lambda_{ij}}{\partial t} + \frac{\partial F_k}{\partial \dot{q}_j} \lambda_{ik} + \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial q_j} - \frac{\partial^2 L}{\partial q_i \partial \dot{q}_j} = 0$$

y, puesto que

$$\frac{d}{dt} \equiv \left(\ddot{q}_k \frac{\partial}{\partial \dot{q}_k} + \dot{q}_k \frac{\partial}{\partial q_k} + \frac{\partial}{\partial t}\right),$$

podemos escribir:

$$\frac{d\lambda_{ij}}{dt} + \frac{\partial F_k}{\partial \dot{q}_j} \lambda_{ik} + \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial q_j} - \frac{\partial^2 L}{\partial q_i \partial \dot{q}_j} = 0. \qquad [XIV.1]$$

Intercambiando los índices i y j obtenemos:

$$\frac{d\lambda_{ij}}{dt} + \frac{\partial F_k}{\partial \dot{q}_i} \lambda_{jk} + \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_j \partial q_i} - \frac{\partial^2 L}{\partial q_j \partial \dot{q}_i} = 0, \qquad [XIV.2]$$

y si tenemos en cuenta que $\lambda_{ij}=\lambda_{ji}$, podemos despejar los términos en que aparece L para sustituirlos en [XIV.1] y obtener el resultado propuesto:

$$\frac{d\lambda_{ij}}{dt} + \frac{1}{2} \frac{\partial F_k}{\partial \dot{q}_j} \lambda_{ik} + \frac{1}{2} \frac{\partial F_k}{\partial \dot{q}_i} \lambda_{jk} = 0. \qquad [XIV.3]$$

PROPOSICION XV

Si un sistema dinámico está regido por las ecuaciones newtonianas

$$\ddot{q}_i = F_i(q/\dot{q},t), \qquad i = 1,2,\dots,n$$

y satisface las condiciones de la PROPOSICION anterior, admite como constante de evolución la función

$$G(q/\dot{q},t) = \Delta \exp\left(\int \Sigma_i \frac{\partial F_i}{\partial \dot{q}_i} dt\right)$$

donde Δ es el determinante de la matriz (λ_{ij}).

Demostración

En efecto, denotemos por Δ_{ij} el adjunto del elemento λ_{ij} en el determinante Δ. Multipliquemos cada una de las ecuaciones del sistema [XIV.3] por el adjunto del elemento que aparece afectado por el operador d/dt en cada una de ellas, Δ_{ij}, y sumemos para todas las ecuaciones; tendremos que:

$$\frac{d\lambda_{ij}}{dt}\Delta_{ij} + \frac{1}{2}\frac{\partial F_k}{\partial \dot{q}_j}\lambda_{ik}\Delta_{ij} + \frac{1}{2}\frac{\partial F_k}{\partial \dot{q}_i}\lambda_{jk}\Delta_{ij} = 0. \qquad [XV.1]$$

Recordando que la derivada del determinante Δ es:

$$\frac{d\Delta}{dt} = \begin{vmatrix} \frac{d\lambda_{11}}{dt} & \cdots & \frac{d\lambda_{1n}}{dt} \\ \lambda_{21} & \cdots & \lambda_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda_{n1} & \cdots & \lambda_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \lambda_{11} & \cdots & \lambda_{1n} \\ \frac{d\lambda_{21}}{dt} & \cdots & \frac{d\lambda_{2n}}{dt} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda_{n1} & \cdots & \lambda_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \lambda_{11} & \cdots & \lambda_{1n} \\ \lambda_{21} & \cdots & \lambda_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{d\lambda_{n1}}{dt} & \cdots & \frac{d\lambda_{nn}}{dt} \end{vmatrix} = \frac{d\lambda_{ij}}{dt}\Delta_{ij}.$$

Con ello [XV.1] se escribe:

$$\frac{d\Delta}{dt} + \frac{1}{2}\frac{\partial F_k}{\partial \dot{q}_j}\lambda_{ik}\Delta_{ij} + \frac{1}{2}\frac{\partial F_k}{\partial \dot{q}_i}\lambda_{jk}\Delta_{ij} = 0,$$

que se puede poner, reagrupando términos:

$$\frac{d\Delta}{dt} + \frac{1}{2}\frac{\partial F_j}{\partial \dot{q}_j}\lambda_{ij}\Delta_{ij} + \frac{1}{2}\frac{\partial F_i}{\partial \dot{q}_i}\lambda_{ji}\Delta_{ij} + \frac{1}{2}\frac{\partial F_h}{\partial \dot{q}_j}\lambda_{ih}\Delta_{ij} +$$

$$+ \frac{1}{2}\frac{\partial F_m}{\partial \dot{q}_i}\lambda_{jm}\Delta_{ij} = 0; \qquad h\neq j,\ m\neq i.$$

Sacando factor común $\partial F_i/\partial \dot{q}_i$ y teniendo en cuenta que la matriz (λ_{ij}) es simétrica: $\lambda_{ij}=\lambda_{ji} \Longrightarrow \Delta_{ij}=\Delta_{ji}$, obtenemos:

$$\frac{d\Delta}{dt} + \frac{\partial F_i}{\partial \dot{q}_i} \lambda_{ij}\Delta_{ij} + \frac{1}{2}\frac{\partial F_h}{\partial \dot{q}_j} \lambda_{ih}\Delta_{ij} + \frac{1}{2}\frac{\partial F_m}{\partial \dot{q}_i} \lambda_{jm}\Delta_{ij} = 0; \; h\neq j, \; m\neq i,$$

pero $\lambda_{ij}\Delta_{ij}=\Delta$ y, como hay que sumar además en el índice "i" y los "h" y "m" son mudos, queda

$$\frac{d\Delta}{dt} + \Delta\, \Sigma_i \left(\frac{\partial F_i}{\partial \dot{q}_i}\right) + \frac{\partial F_k}{\partial \dot{q}_j} \lambda_{ik}\Delta_{ij} = 0; \qquad i\neq k\neq j$$

pero $\Sigma_i \lambda_{ik}\Delta_{ij}=0$, ya que se trata de la suma de los productos de los elementos de una columna por los adjuntos correspondientes de otra paralela (teorema de Cramer [95]). Por tanto, finalmente,

$$\frac{d\Delta}{dt} + \Delta\Sigma_i \left(\frac{\partial F_i}{\partial \dot{q}_i}\right) = 0.$$

Multiplicando por $\exp\left(\int \Sigma_i \frac{\partial F_i}{\partial \dot{q}_i}\, dt\right)$:

$$\frac{d}{dt}\left(\Delta \exp\left(\int \Sigma_i \frac{\partial F_i}{\partial \dot{q}_i}\, dt\right)\right) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \Delta \exp\left(\int \Sigma_i \frac{\partial F_i}{\partial \dot{q}_i}\, dt\right) = \text{cte.}$$

PROPOSICION XVI

Las soluciones, λ_{ij}, del sistema de ecuaciones diferenciales [XIV.3] constituyen una matriz de factores integrantes para el sistema dinámico

$$\ddot{q}_i = F_i(q_1,\ldots,q_n;\dot{q}_1,\ldots,\dot{q}_n;t), \qquad i=1,2,\ldots,n.$$

Demostración

Dado que, por definición, $\dot{q}_i = dq_i/dt$, el sistema de ecuaciones dinámicas $\ddot{q}_i = F_i(q/\dot{q},t)$ es equivalente al sistema

$$\frac{dt}{1} = \frac{dq_1}{\dot{q}_1} = \frac{dq_2}{\dot{q}_2} = \ldots = \frac{dq_n}{\dot{q}_n} = \frac{d\dot{q}_1}{F_1} = \frac{d\dot{q}_2}{F_2} = \ldots = \frac{d\dot{q}_n}{F_n} \qquad [XVI.1]$$

que podemos considerar como sistema adjunto correspondiente a la ecuación en derivadas parciales

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{\partial\phi}{\partial q_1}\dot{q}_1 + \ldots + \frac{\partial\phi}{\partial q_n}\dot{q}_n + \frac{\partial\phi}{\partial \dot{q}_1}F_1 + \ldots + \frac{\partial\phi}{\partial \dot{q}_n}F_n = 0$$

donde ϕ es una integral primera del sistema dinámico. Pero, multiplicando por la matriz de factores integrantes, el sistema $(\lambda_{ij})(\ddot{q}_j)=(\lambda_{ij})(F_j)$, con $|\lambda_{ij}|\neq 0$, equivalente al $\ddot{q}_i = F_i$, se puede escribir:

$$(\lambda_{ij})(d\dot{q}_j) - (\lambda_{ij})(F_j)dt = 0$$

$$\dot{q}_i dt - dq_i = 0$$

que, matricialmente, por bloques, es:

$$\begin{vmatrix} -\lambda_{ij}F_j & 0 & \lambda_{ij} \\ & & \\ \dot{q}_i & -U_n & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} dt \\ dq_i \\ d\dot{q}_i \end{vmatrix} = 0 \qquad [XVI.2]$$

siendo U_n la matriz unitaria de orden "n". Si resolvemos respecto de los diferenciales, lo podemos expresar bajo la forma continua del [XVI.1]:

$$\frac{dt}{X_o} = \frac{dq_h}{X_h} = \frac{d\dot{q}_h}{Y_h}; \qquad h = 1,\ldots,n; \qquad [XVI.3]$$

donde X_o, X_h, Y_h son los determinantes:

$$X_o = \begin{vmatrix} 0 & \lambda_{ij} \\ -U_n & 0 \end{vmatrix}; \quad X_h = (-1)^h \begin{vmatrix} -\lambda_{ij}F_j & 0 & \lambda_{ij} \\ \dot{q}_i & -W_h & 0 \end{vmatrix};$$

$$Y_h = (-1)^{n+h} \begin{vmatrix} -\lambda_{ij}F_j & 0 & \lambda_{ik} \\ \dot{q}_i & -U_n & 0 \end{vmatrix}; \quad k \neq h,$$

siendo W_h la matriz obtenida de la matriz unitaria de orden "n" tras suprimir en ella la columna "h".

El sistema [XVI.3] es integrable, [93], si:

$$\frac{\partial X_o}{\partial t} + \sum_{h=1}^{n} \frac{\partial X_h}{\partial q_h} + \sum_{h=1}^{n} \frac{\partial Y_h}{\partial \dot{q}_h} = 0.$$

Desarrollando los determinantes obtenemos:

$$X_o = \{(-1)^{n+3}\} \overset{n}{\ldots} \{(-1)^{n+3}\} |\lambda_{ij}| = (-1)^{n^2+3n} \Delta = (-1)^{4n} \Delta = \Delta;$$

$$X_h = \dot{q}_h (-1)^{n+2h+1} \begin{vmatrix} 0 & \lambda_{ij} \\ -U_{n-1} & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)^{n+2h+1} \dot{q}_h \{(-1)^{n+3}\} \overset{n-1}{\ldots} \{(-1)^{n+3}\} |\lambda_{ij}| = \dot{q}_h \Delta$$

$$Y_h = (-1)^{n+h} \begin{vmatrix} -\lambda_{ij}F_j & 0 & \lambda_{ik} \\ \dot{q}_i & -U_n & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)^{n+h} \{(-1)^{n+4}\} \overset{n}{\ldots} \{(-1)^{n+4}\} |-\lambda_{ij}F_j \ \lambda_{ik}| = (-1)^{h+1} |\lambda_{ij}F_j \ \lambda_{ik}|,$$
$$k \neq h;$$

En el desarrollo de Y_h hemos escrito un determinante en el que la primera columna es la suma del vector $\lambda_{ih}F_h$ (la repetición de la h en este monomio no significa suma) con las k columnas restantes, λ_{ik} ($k=1,\ldots,n;\ k\neq h$), multiplicadas, cada una de ellas, por F_k. En consecuencia, el determinante no varía si suprimimos de la primera columna los sumandos que son combinación lineal de las demás, es decir que tendremos:

$$Y_h = (-1)^{h+1}|\lambda_{ih}F_h\ \lambda_{ik}| = (-1)^{h+1}F_h|\lambda_{ih}\ \lambda_{ik}|, \qquad k\neq h.$$

Pero $|\lambda_{ih}\ \lambda_{ik}|$, $k\neq h$, se obtiene del $|\lambda_{ij}|$ permutando columnas, concretamente realizando $(h-1)$ permutaciones de columnas, y por tanto:

$$Y_h = (-1)^{h+1}F_h(-1)^{h-1}|\lambda_{ij}| = F_h\Delta.$$

En consecuencia, la condición de integrabilidad se escribirá:

$$\frac{\partial X_o}{\partial t} + \sum_{h=1}^{n}\left(\frac{\partial X_h}{\partial q_h} + \frac{\partial Y_h}{\partial \dot q_h}\right) = \frac{\partial\Delta}{\partial t} + \sum_{h=1}^{n}\left(\dot q_h\frac{\partial\Delta}{\partial q_h} + F_h\frac{\partial\Delta}{\partial \dot q_h} + \Delta\frac{\partial F_h}{\partial \dot q_h}\right) =$$

$$= \frac{d\Delta}{dt} + \Delta\sum_{h=1}^{n}\frac{\partial F_h}{\partial \dot q_h},$$

pero si los λ_{ij} son soluciones del sistema [XIV.1] y tenemos en cuenta el resultado de la proposición anterior, finalmente podremos escribir que:

$$\frac{\partial X_o}{\partial t} + \sum_{h=1}^{n}\left(\frac{\partial X_h}{\partial q_h} + \frac{\partial Y_h}{\partial \dot q_h}\right) \equiv 0,$$

y en consecuencia queda establecida la tesis enunciada en la PROPOSICION.

COROLARIO XVI.1

Si (λ_{ij}) y (λ'_{ij}) son dos matrices de factores integrantes para un determinado sistema de ecuaciones newtonianas, el determinante

$\Delta^* = |(\lambda_{ij})(\lambda'_{ij})^{-1}|$

es una constante de evolución para dicho sistema.

En efecto,

$$\Delta^* = |\lambda_{ij}||\lambda'_{ij}|^{-1} = \frac{|\lambda_{ij}|\exp\{\int\Sigma_i(\partial F_h/\partial \dot{q}_h)dt\}}{|\lambda'_{ij}|\exp\{\int\Sigma_i(\partial F_h/\partial \dot{q}_h)dt\}},$$

y teniendo en cuenta la PROPOSICION XV, numerador y denominador son constantes de evolución y por tanto lo será su cociente.

PROPOSICION XVII

Si el sistema dinámico newtoniano regido por las ecuaciones $\ddot{q}_i=F_i(q/\dot{q},t)$ admite la matriz de factores integrantes (λ_{ij}), y es tal que la matriz formada por los elementos $\partial F_i/\partial \dot{q}_j$ es antisimétrica, las trazas de las sucesivas potencias de (λ_{ij}), son constantes de evolución para tal sistema; es decir:

$$\frac{d\{tr(\lambda_{ij})^k\}}{dt} = 0.$$

Demostración

Teniendo presente que:

a) $tr(A+B)=tr(A)+tr(B)$;

b) $tr(AB)=tr(BA)$;

podemos escribir, llamando λ a la matriz (λ_{ij}) y recordando la ecuación [XIV.3]:

$$\frac{d\{tr(\lambda^k)\}}{dt} = tr\left(\frac{d\lambda^k}{dt}\right) = ktr\left(\lambda^{k-1}\frac{d\lambda}{dt}\right) = -½ktr\{\lambda^{k-1}(\lambda F + F^t\lambda)\} =$$

$$= -½ktr\{\lambda^k F\} - ½ktr\{\lambda^{k-1}F^t\lambda\} = -½ktr\{\lambda^k(F + F^t)\} = 0;$$

si F es antisimétrica $F+F^t\equiv 0$ y sigue el resultado.

Por supuesto, no todas estas constantes serán funcionalmente independientes, ya que para cualquier matriz A, $n\times n$, $tr(A)^k$ se puede escribir algebraicamente en términos de $tr(A)^h$, $h=1,\dots,n$, para todo $k \geq n+1$, [94].

3.1.1.- SOBRE LA INTEGRACION DEL SISTEMA DIFERENCIAL DE LOS FACTORES INTEGRANTES

Ya demostramos en la sección anterior que las soluciones del sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\frac{d\lambda_{ij}}{dt} + \frac{1}{2}\frac{\partial F_k}{\partial \dot{q}_j}\lambda_{ik} + \frac{1}{2}\frac{\partial F_k}{\partial \dot{q}_i}\lambda_{jk} = 0 \qquad \text{[XIV.3]}$$

constituyen un conjunto de factores integrantes para el sistema de ecuaciones dinámicas

$$\ddot{q}_i = F_i(q/\dot{q},t); \qquad i = 1,2,\ldots,n.$$

A continuación, aplicando el método de variación de constantes, procedemos a la integración del primero. Ello nos permitirá condicionar su solución a la del sistema diferencial que han de verificar los factores auxiliares introducidos, que, formalmente, es más simple que el sistema original.

NOTA: En esta sección, la repetición de los índices i y j no implica suma respecto de los mismos.

El sistema homogéneo asociado a [XIV.3] es:

$$\frac{d\lambda_{ij}}{dt} + \frac{1}{2}\frac{\partial F_j}{\partial \dot{q}_j}\lambda_{ij} + \frac{1}{2}\frac{\partial F_i}{\partial \dot{q}_i}\lambda_{ji} = 0$$

cuyas soluciones se pueden escribir formalmente:

$$\lambda^*_{ij} = \exp\left(-\frac{1}{2}\int\left(\frac{\partial F_i}{\partial \dot{q}_i} + \frac{\partial F_j}{\partial \dot{q}j}\right)dt\right).$$

Las soluciones del sistema no homogéneo, utilizando el método de variación de constantes, se pueden poner de la forma:

$$\lambda_{ij} = \mu_{ij}\lambda^*_{ij}.$$

Sustituyendo en el sistema completo esas expresiones, obtenemos:

$$\frac{d\lambda^*_{ij}}{dt}\mu_{ij} + \lambda^*_{ij}\frac{d\mu_{ij}}{dt} + \frac{1}{2}\frac{\partial F_k}{\partial \dot{q}_j}\lambda^*_{ik}\mu_{ik} + \frac{1}{2}\frac{\partial F_k}{\partial \dot{q}_i}\lambda^*_{jk}\mu_{jk} = 0.$$

Teniendo en cuenta que $\mu_{ij}=\mu_{ji}$, puesto que $\lambda_{ij}=\lambda_{ji}$ y $\lambda^*_{ij}=\lambda^*_{ji}$, la expresión anterior se puede escribir, asociando términos:

$$\mu_{ij}\left(\frac{d\lambda^*_{ij}}{dt} + \frac{1}{2}\frac{\partial F_j}{\partial \dot{q}_j}\lambda^*_{ij} + \frac{1}{2}\frac{\partial F_i}{\partial \dot{q}_i}\lambda^*_{ji}\right) + \lambda^*_{ij}\frac{d\mu_{ij}}{dt} +$$

$$+ \frac{1}{2}\frac{\partial F_k}{\partial \dot{q}_j}\lambda^*_{ik}\mu_{ik} + \frac{1}{2}\frac{\partial F_h}{\partial \dot{q}_i}\lambda^*_{jh}\mu_{jh} = 0, \qquad k\neq j,\ h\neq i;$$

los términos encerrados entre paréntesis se anulan, puesto que, por hipóteisis, λ^*_{ij} son soluciones del sistema homogéneo; por tanto:

$$\lambda^*_{ij}\frac{d\mu_{ij}}{dt} + \frac{1}{2}\frac{\partial F_k}{\partial \dot{q}_j}\lambda^*_{ik}\mu_{ik} + \frac{1}{2}\frac{\partial F_h}{\partial \dot{q}_i}\lambda^*_{jh}\mu_{jh} = 0, \qquad k\neq j,\ h\neq i.$$

Sustituyendo la expresion de los λ^*_{ij} y multiplicando la ecuación por la expresión

$$\exp\left(\frac{1}{2}\int\left(\frac{\partial F_i}{\partial \dot{q}_i} + \frac{\partial F_j}{\partial \dot{q}_j}\right)dt\right)$$

nos queda:

$$\frac{d\mu_{ij}}{dt} + \frac{1}{2}\mu_{ik}\frac{\partial F_k}{\partial \dot{q}_j}\exp\left(\frac{1}{2}\int\left(\frac{\partial F_j}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial F_k}{\partial \dot{q}}\right)dt\right) +$$

$$+ \frac{1}{2}\mu_{jh}\frac{\partial F_h}{\partial \dot{q}_i}\exp\left(\frac{1}{2}\int\left(\frac{\partial F_i}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial F_h}{\partial \dot{q}_h}\right)dt\right) = 0, \qquad j\neq k,\ i\neq h;$$

y llamando

$$a_{ij} = \frac{\partial F_i}{\partial \dot{q}_j}\exp\left(\frac{1}{2}\int\left(\frac{\partial F_j}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial F_i}{\partial \dot{q}_i}\right)dt\right),$$

el sistema anterior se puede escribir:

$$\frac{d\mu_{ij}}{dt} + ½\,\mu_{ik}a_{kj} + ½\,\mu_{jh}a_{hi} = 0; \quad k\neq j,\ h\neq i. \qquad [XVIII.1]$$

PROPOSICION XVIII

Si llamamos Δ^* al determinante cuyos elementos son los μ_{ij}, se verifica que Δ^* es una constante de evolución para el sistema [XVIII.1].

Demostración

El resultado es evidente si en la constante de la PROPOSICION XV sustituimos los λ_{ij} por las expresiones:

$$\lambda_{ij} = \lambda^*_{ij}\mu_{ij} = \mu_{ij}\exp\left(-\frac{1}{2}\int\left(\frac{\partial F_i}{\partial \dot{q}_i} + \frac{\partial F_j}{\partial \dot{q}_j}\right)dt\right).$$

En la fila "i" del determinante $\Delta=|\lambda_{ij}|$ aparece el factor $\exp\{-½\int(\partial F_i/\partial \dot{q}_i)dt\}$; del mismo modo, cada columna "j" de Δ aparece multiplicada por el factor $\exp\{-½\int(\partial F_j/\partial \dot{q}_j)dt\}$; en consecuencia, sacando factor común y asociando términos, se puede escribir:

$$\Delta = |\mu_{ij}|\exp\left(-\int\Sigma_i\left(\frac{\partial F_i}{\partial \dot{q}_i}\right)\, dt\right) = \Delta^*\exp\left(-\int\Sigma_i\left(\frac{\partial F_i}{\partial \dot{q}_i}\right)\, dt\right)$$

y sustituyendo en

$$\Delta\exp\left(\int\Sigma_i\left(\frac{\partial F_i}{\partial \dot{q}_i}\right)\, dt\right) = cte$$

obtenemos: $\Delta^* = cte.$

NOTA: Es posible una demostración directa de este resultado siguiendo un método análogo al de la proposicion XV.

PROPOSICION XIX

Una condición suficiente para que el sistema dinámico $\ddot{q}_i=F_i(q/\dot{q};t)$ admita una matriz diagonal de factores integrantes es que:

1) $a_{ij}^{-1}a_{ij}$ = cte, $(i \neq j)$

2) ∄ solución en C para la ecuación matricial $CA+A^tC=0$; donde C ha de ser una matriz diagonal y A es la matriz cuyos elementos diagonales son nulos y los no diagonales los a_{ij}.

Demostración

Si la matriz de factores integrantes para el sistema dinámico ha de ser diagonal, es suficiente que $\mu_{ij}=0$ para $i \neq j$; ya que $\lambda_{ij}=\mu_{ij}\lambda^*_{ij}$. Impongamos esta condición al sistema diferencial de los μ_{ij}, [XVIII.1]; con ello, queda reducido a un sistema de ecuaciones diferenciales y otro de ecuaciones algebraicas en los elementos μ_{ii}:

$$\frac{d\mu_{ii}}{dt} = 0$$

$$\mu_{ik}a_{kj} + \mu_{jh}a_{hi} = 0; \qquad k \neq j,\ h \neq i. \qquad \text{[XIX.1]}$$

El primer conjunto de ecuaciones implica que:

$$\mu_{ii} = \text{cte.} = c_i, \qquad \forall i=1,2,\dots,n$$

con ello el segundo conjunto se puede escribir:

$$c_i a_{ij} + c_j a_{ji} = 0, \qquad \forall i \neq j \qquad \text{[XIX.2]}$$

donde la repetición de los indices "i" y "j" no implica suma respecto de los mismos. Cada ecuación de

[XIX.2] exige que:

$$a_{ij}a_{ji}^{-1} = c_j c_i^{-1} = cte,$$

que es precisamente la primera parte de la condición impuesta. Hemos de exigir ahora la existencia de solución para los c_i en el sistema [XIX.2], que, matricialmente, se puede representar de la forma:

$$\begin{vmatrix} c_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & c_2 & \ldots & 0 \\ . & . & & . \\ . & . & & . \\ . & . & & . \\ 0 & 0 & \ldots & c_n \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & 0 & \ldots & a_{2n} \\ . & . & & . \\ . & . & & . \\ . & . & & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & a_{21} & \ldots & a_{n1} \\ a_{12} & 0 & \ldots & a_{n2} \\ . & . & & . \\ . & . & & . \\ . & . & & . \\ a_{1n} & a_{2n} & \ldots & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} c_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & c_2 & \ldots & 0 \\ . & . & & . \\ . & . & & . \\ . & . & & . \\ 0 & 0 & \ldots & c_n \end{vmatrix} = 0 \qquad \text{[XIX.3]}$$

puesto que operando resulta:

$$\begin{vmatrix} 0 & c_1a_{12}+c_2a_{21} & \ldots & c_1a_{1n}+c_na_{n1} \\ c_2a_{21}+c_1a_{12} & 0 & \ldots & c_2a_{2n}+c_na_{n2} \\ . & . & & . \\ . & . & & . \\ . & . & & . \\ c_na_{n1}+c_1a_{1n} & c_na_{n2}+c_2a_{2n} & \ldots & 0 \end{vmatrix} = 0$$

es decir, si existe solución en C para la ecuación matricial [XIX.3]: $CA+A^tC=0$, existe solución para los c_i en el sistema [XIX.2].

3.2.- ESTUDIO PARA SISTEMAS AUTONOMOS

PROPOSICION XX

Si los multiplicadores λ_{ij} son soluciones del sistema de ecuaciones diferenciales [XIV.1], y suponemos que el sistema dinámico es autónomo (no hay dependencia explícita respecto del tiempo), existe una función $I(q,\dot{q})$, definida por el conjunto de ecuaciones en derivadas parciales:

$$\begin{aligned} \lambda_{ik}\dot{q}_k &= \frac{\partial I}{\partial \dot{q}_i} \\ \lambda_{ik}F_k + \left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial q_k} - \frac{\partial^2 L}{\partial q_i \partial \dot{q}_k}\right)\dot{q}_k &= -\frac{\partial I}{\partial q_i} \end{aligned} \qquad [XX.1]$$

tal que $dI=0$.

Demostración

En efecto, para que exista una solución en I de este sistema se han de verificar las condiciones de integrabilidad para [XX.1], concretamente:

a) $$\frac{\partial^2 I}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j} \equiv \frac{\partial^2 I}{\partial \dot{q}_j \partial \dot{q}_i}$$

Relación que se verifica idénticamente, ya que:

$$\frac{\partial(\lambda_{jk}\dot{q}_k)}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial \lambda_{jk}}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_k + \lambda_{ji} = \frac{\partial^3 L}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j \partial \dot{q}_k}\dot{q}_k + \lambda_{ji}$$

$$\frac{\partial(\lambda_{ik}\dot{q}_k)}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial \lambda_{ik}}{\partial \dot{q}_j}\dot{q}_k + \lambda_{ij} = \frac{\partial^3 L}{\partial \dot{q}_j \partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_k}\dot{q}_k + \lambda_{ij}$$

b) $$\frac{\partial^2 I}{\partial q_i \partial q_j} \equiv \frac{\partial^2 I}{\partial q_j \partial q_i}.$$

Desarrollando ambos miembros de la identidad:

$$\frac{\partial}{\partial q_i}\left(\frac{\partial I}{\partial q_j}\right) = \frac{\partial}{\partial q_i}\left(-\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_j \partial \dot{q}_k}F_k - \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_j \partial q_k}\dot{q}_k + \frac{\partial^2 L}{\partial q_j \partial \dot{q}_k}\dot{q}_k\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial q_j}\left(\frac{\partial I}{\partial q_i}\right) = \frac{\partial}{\partial q_j}\left(-\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_k}F_k - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i \partial q_k}\dot{q}_k + \frac{\partial L}{\partial q_i \partial \dot{q}_k}\dot{q}_k\right)$$

y teniendo en cuenta las ecuaciones de Lagrange correspondientes al caso autónomo ($\partial L/\partial t=0$):

$$\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_k}F_k + \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial q_k}\dot{q}_k - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0;$$

sustituimos en las anteriores y tenemos:

$$\frac{\partial}{\partial q_i}\left(\frac{\partial I}{\partial q_j}\right) = \frac{\partial^2 L}{\partial q_i \partial q_j} + \frac{\partial^3 L}{\partial q_i \partial q_j \partial \dot{q}_k}\dot{q}_k$$

$$\frac{\partial}{\partial q_j}\left(\frac{\partial I}{d q_i}\right) = \frac{\partial^2 L}{\partial q_j \partial q_i} + \frac{\partial^3 L}{\partial q_j \partial q_i \partial \dot{q}_k}\dot{q}_k$$

lo que significa que se verifica la identidad:

$$\frac{\partial^2 I}{\partial q_i \partial q_j} \equiv \frac{\partial^2 I}{\partial q_j \partial q_i}.$$

c) $$\frac{\partial^2 I}{\partial \dot{q}_i \partial q_j} = \frac{\partial^2 I}{\partial q_j \partial \dot{q}_i}.$$

Ello implica que ha de ser:

$$\frac{\partial(\lambda_{ik}\dot{q}_k)}{\partial q_j} = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i}\left(-\lambda_{jk}F_k - \left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_j \partial q_k} - \frac{\partial^2 L}{\partial q_j \partial \dot{q}_k}\right)\dot{q}_k\right);$$

desarrollando las derivadas:

$$\frac{\partial \lambda_{ik}}{\partial q_j}\dot{q}_k = -\frac{\partial \lambda_{ij}}{\partial \dot{q}_k}F_k - \frac{\partial F_k}{\partial \dot{q}_i}\lambda_{jk} - \left(\frac{\partial \lambda_{ij}}{\partial q_k} - \frac{\partial \lambda_{ik}}{\partial q_j}\right)\dot{q}_k - \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_j \partial q_i} + \frac{\partial^2 L}{\partial q_j \partial \dot{q}_i}.$$

Teniendo en cuenta que en el caso autónomo

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_k}F_k + \frac{\partial}{\partial q_k}\dot{q}_k,$$

podremos escribir la condición de integrabilidad:

$$\frac{d\lambda_{ij}}{dt} + \frac{\partial F_k}{\partial \dot{q}_i}\lambda_{jk} + \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_j \partial q_i} - \frac{\partial^2 L}{\partial q_j \partial \dot{q}_i} = 0$$

y recordando la PROPOSICION XIV, ecuación [XIV.1],

$$\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_j \partial q_i} - \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial q_j} = \frac{d\lambda_{ij}}{dt} + \frac{\partial F_k}{\partial \dot{q}_j}\lambda_{ik},$$

sustituyendo, finalmente, la condición de integrabilidad implica que ha de verificarse:

$$\frac{d\lambda_{ij}}{dt} + \frac{1}{2}\frac{\partial F_k}{\partial \dot{q}_j}\lambda_{ik} + \frac{1}{2}\frac{\partial F_k}{\partial \dot{q}_i}\lambda_{jk} = 0,$$

que es precisamente el conjunto de ecuaciones que verifican los factores integrantes.

En el sistema [XX.1], que define la integral primera $I(q/\dot{q})$, aparecen las expresiones, desconocidas a priori

$$\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial q_k} - \frac{\partial^2 L}{\partial q_i \partial \dot{q}_k}$$

que podemos sustituir, según hemos señalado antes, PROPOSICION XIV, en función de los factores integrantes, λ_{ij}, y de las derivadas parciales de las funciones dinámicas respecto de las velocidades generalizadas, $\partial F_i/\partial \dot{q}_j$, cantidades ya conocidas, para escribir el sistema que define la citada integral:

$$\begin{aligned} &\lambda_{ik}\dot{q}_k = \frac{\partial I}{\partial \dot{q}_i} \\ &\lambda_{ik}F_k + \frac{\dot{q}_k}{2}\left(\frac{\partial F_h}{\partial \dot{q}_k}\lambda_{ih} - \frac{\partial F_h}{\partial \dot{q}_i}\lambda_{kh}\right) = -\frac{\partial I}{\partial q_i}. \end{aligned} \qquad [XX.2]$$

PROPOSICION XXI

Si $I(q/\dot{q})$ es una integral del sistema [XX.1], las funciones lagrangianas correspondientes al sistema de ecuaciones dinámicas

$$\ddot{q}_i = F_i(q/\dot{q}), \quad i = 1,2,\dots,n;$$

satisfacen a la ecuación en derivadas parciales:

$$I = (\partial L/\partial \dot{q}_i)\dot{q}_i - L \qquad [XXI.1]$$

Demostración

Demostremos que si L satisface la ecuación en derivadas parciales propuesta, entonces se verifican las ecuaciones del sistema [XX.1] que definen la integral primera $I(q/\dot{q})$. Sustituyendo en [XX.1] I por $(\partial L/\partial \dot{q}_i)\dot{q}_i - L$, escribiremos:

$$\lambda_{ik}\dot{q}_k = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_h}\dot{q}_h - L\right)$$

$$\lambda_{ik}F_k + \left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial q_k} - \frac{\partial^2 L}{\partial q_i \partial \dot{q}_k}\right)\dot{q}_k = -\frac{\partial}{\partial q_i}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_h}\dot{q}_h - L\right). \qquad [XXI.2]$$

Teniendo en cuenta que es $\lambda_{ij}=(\partial^2 L/\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j)$ y que $\ddot{q}_i=F_i$, el primer conjunto de ecuaciones del sistema anterior se verifica identicamente y para el segundo conjunto se cumple:

$$\lambda_{ik}F_k + \left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial q_k} - \frac{\partial^2 L}{\partial q_i \partial \dot{q}_k}\right)\dot{q}_h = -\frac{\partial^2 L}{\partial q_i \partial \dot{q}_h}\dot{q}_h + \frac{\partial L}{\partial q_i};$$

simplificando, podemos escribir:

$$\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_k}\ddot{q}_k + \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial q_k}\dot{q}_k - \frac{\partial L}{\partial q_i} \equiv 0,$$

que es una identidad en virtud de las ecuaciones de Lagrange para el caso autónomo.

Reciprocamente, multiplicando las ecuaciones del sistema [XXI.2] por $d\dot{q}_i$ y dq_i, respectivamente, y sumando para el índice "i", resulta:

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\lambda_{ik}(\dot q_k d\dot q_i - F_k dq_i) - \left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot q_i \partial q_k} - \frac{\partial^2 L}{\partial q_i \partial \dot q_k}\right)\dot q_k dq_i\right) = d\left(\frac{\partial L}{\partial \dot q_h}\dot q_h - L\right).$$

En el primer término, como estamos sumando en los índices i y k, pueden asociarse los términos para escribir:

$$\sum_{i,k} \lambda_{ik}(\dot q_k d\dot q_i - F_i dq_k)$$

y teniendo en cuenta que en virtud de las ecuaciones dinámicas se verifica que:

$$\ddot q_i = F_i \quad ===> \quad d\dot q_i = F_i dt \quad ===> \quad \dot q_k d\dot q_i = F_i dq_k$$

en consecuencia todos los paréntesis de la suma anterior se anulan. En cuanto al otro término, asociando sumandos, se puede escribir:

$$\sum_{i,k} \frac{\partial^2 L}{\partial \dot q_i \partial q_k}(\dot q_k dq_i - \dot q_i dq_k)$$

y puesto que

$$\frac{dq_i}{\dot q_i} = dt = \frac{dq_k}{\dot q_k} \quad ==> \quad \dot q_k dq_i - \dot q_i dq_k \equiv 0,$$

se anulan también todos los paréntesis de la suma; en definitiva:

$$d\left(\frac{\partial L}{\partial \dot q_h}\dot q_h - L\right) = dI = 0 \quad ==> \quad \frac{\partial L}{\partial \dot q_h}\dot q_h - L = I = \text{cte}.$$

METODO

Las proposiciones que terminamos de enunciar y demostrar entrañan un método para construir una Lagrangiana capaz de describir un determinado sistema dinámico, multidimensional, definido mediante el conjunto de ecuaciones newtonianas $\ddot{q}_i = F_i(q/\dot{q})$. Conocida la integral primera $I(q/\dot{q})$, que nosotros hemos definido a partir de la matriz de factores integrantes del anterior sistema, PROPOSICION XX; podemos obtener la Lagrangiana asociada como solución de una ecuación en derivadas parciales en la incógnita L, PROPOSICION XXI.

PROPOSICION XXII

Si las funciones $F_i(q/\dot{q})$ no dependen explicitamente del tiempo, la expresión

$$J(t) = \int_{D_t} M(q/\dot{q})\, dq_1 \dots dq_n d\dot{q}_1 \dots d\dot{q}_n$$

es un invariante integral relativo a las soluciones del sistema adjunto de las ecuaciones dinámicas

$$\ddot{q}_i = F_i(q/\dot{q}); \qquad i = 1,2,\dots,n;$$

donde

$$M(q/\dot{q}) = \exp\left(-\int\left(\Sigma_i \frac{\partial F_i}{\partial \dot{q}_i}\right) dt\right)$$

Demostración

En efecto, las ecuaciones dinámicas, junto con las definiciones de velocidades generalizadas: $\dot{q}_i dt = dq_i$, admiten como sistema adjunto, según hemos visto ya:

$$\frac{dt}{1} = \frac{dq_1}{\dot{q}_1} = \ldots = \frac{dq_n}{\dot{q}_n} = \frac{d\dot{q}_1}{F_1} = \ldots = \frac{d\dot{q}_n}{F_n}. \qquad \text{[XXII.1]}$$

Por hipótesis los denominadores son función de q_i y $\dot{q}_i$ pero no de t, en consecuencia M tampoco depende explicitamente de t y por tanto es un multiplicador de Jacobi para el sistema [XXII.1], ya que, teniendo en cuenta la expresión de M y la de su derivada temporal, se verifica que:

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial (M\dot{q}_i)}{\partial q_i} + \frac{\partial (MF_i)}{\partial \dot{q}_i} \right) = \frac{dM}{dt} + M \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F_i}{\partial \dot{q}_i} \equiv 0,$$

que es precisamente la condición necesaria y suficiente para que M sea un multiplicador de Jacobi para el sistema [XXII.1]. Ahora bien, en virtud del teorema de Poincaré, [89], la expresión

$$J(t) = \int_{D_t} M(q/\dot{q})\, dq_1 \ldots dq_n \ldots d\dot{q}_1 d\dot{q}_n$$

es un invariante integral relativo a las soluciones del sistema [XXII.1], donde D_t es un recinto del espacio $(q_1,\ldots,q_n;\dot{q}_1,\ldots,\dot{q}_n)$, en general, variable con el tiempo.

PROPOSICION XXIII

La derivada temporal de la función dinámica $G(q/\dot{q},t)$ puede expresarse de la forma:

$$\frac{dG}{dt} = \Delta^{-1}\left(\Delta_{ik}[G,I]_{ik} + \tfrac{1}{2}\Delta_{hs}\langle G,I\rangle_{sr}\frac{\partial F_r}{\partial \dot{q}_h}\right) + \frac{\partial G}{\partial t}$$

donde Δ_{ij} es el adjunto del elemento λ_{ij} en la matriz (λ_{ij}); los $[G,I]_{ik}$ tienen la forma de los corchetes de Poisson:

$$[G,I]_{ik} = \left(\frac{\partial G}{\partial q_i}\frac{\partial I}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial G}{\partial \dot{q}_k}\frac{\partial I}{\partial q_i}\right)$$

y los $\langle G,I\rangle_{ik}$ son:

$$\langle G,I\rangle_{ik} = \left(\frac{\partial G}{\partial \dot{q}_i}\frac{\partial I}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial G}{\partial \dot{q}_k}\frac{\partial I}{\partial \dot{q}_i}\right).$$

Demostracion

La derivada temporal de la función G es:

$$\frac{dG}{dt} = \frac{\partial G}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial G}{\partial \dot{q}_i}F_i + \frac{\partial G}{\partial t}. \qquad [XXIII.1]$$

La integral primera $I(q/\dot{q})$ viene definida por el sistema de ecuaciones [XX.2], que se escribe:

$$\lambda_{ik}\dot{q}_k = \frac{\partial I}{\partial \dot{q}_i}; \qquad - \lambda_{ik}F_k + f_{ik}\dot{q}_k = \frac{\partial I}{\partial q_i}$$

donde f_{ik} es:

$$f_{ik} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial F_h}{\partial \dot{q}_i}\lambda_{kh} - \frac{\partial F_h}{\partial \dot{q}_k}\lambda_{ih}\right)$$

Este sistema se puede escribir matricialmente por cajas:

$$\begin{vmatrix} \lambda & 0 \\ f & -\lambda \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \dot{q} \\ F \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \partial I/\partial \dot{q} \\ \partial I/\partial q \end{vmatrix} \qquad [XXIII.2]$$

donde λ es la matriz simétrica cuyos elementos son los λ_{ij}; f la matriz antisimétrica formada por los elementos f_{ij}; $\dot{q}$, F, $\partial I/\partial q$ y $\partial I/\partial \dot{q}$ vectores columna cuyas componentes son $\dot{q}_i$, F_i, $\partial I/\partial q_i$ y $\partial I/\partial \dot{q}_i$, respectivamente.

Para despejar el vector $(\dot{q}\ F)^t$ es necesario invertir la matriz cuadrada de la expresión anterior. Esta matriz inversa, escrita por cajas, resulta ser:

$$\begin{vmatrix} \lambda & 0 \\ f & -\lambda \end{vmatrix}^{-1} = \begin{vmatrix} \lambda^{-1} & 0 \\ \lambda^{-1} f \lambda^{-1} & -\lambda^{-1} \end{vmatrix}$$

y, puesto que estamos considerando sistemas regulares $(\partial^2 L/\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j \neq 0)$, la matriz λ^{-1} existe y, en consecuencia, la inversión matricial propuesta es posible. Llamando λ^{ij} a los elementos de λ^{-1}, α_{ij} a los de la matriz $\lambda^{-1} f \lambda^{-1}$ y Δ_{ij} al adjunto del λ_{ij} en λ, podemos expresar los elementos de dicha matriz inversa de la forma:

$$\lambda^{ij} = \Delta^{-1}\Delta_{ji} = \Delta^{-1}\Delta_{ij}; \qquad \alpha_{ij} = \Delta^{-2}\Delta_{hi} f_{hk} \Delta_{jk}.$$

Recordamos que la submatriz λ es simétrica y, en consecuencia, resulta evidente que la submatriz de los α_{ij} es antisimétrica. Los elementos α_{ij}, tras sustituir las expresiones de los f_{hk}, se pueden escribir:

$$\alpha_{ij} = \tfrac{1}{2}\Delta^{-2}\left(\frac{\partial F_m}{\partial \dot{q}_h}\lambda_{km} - \frac{\partial F_m}{\partial \dot{q}_k}\lambda_{hm}\right)\Delta_{hi}\Delta_{jk};$$

asociando términos,

$$\alpha_{ij} = \tfrac{1}{2}\Delta^{-2}\left(\frac{\partial F_m}{\partial \dot{q}_h}(\lambda_{km}\Delta_{jk})\Delta_{hi} - \frac{\partial F_m}{\partial \dot{q}_k}(\lambda_{hm}\Delta_{hi})\Delta_{jk}\right);$$

y recordando el teorema de Cramer, [95]: $\lambda_{ij}\Delta_{kj}=\delta_{ik}\Delta$:

$$\alpha_{ij} = \tfrac{1}{2}\Delta^{-1}\left(\frac{\partial F_j}{\partial \dot{q}_h}\Delta_{hi} - \frac{\partial F_i}{\partial \dot{q}_k}\Delta_{jk}\right).$$

Teniendo esto en cuenta, podemos despejar $\dot{q}_i$ y F_i de [XXIII.2] para escribir:

$$\dot{q}_i = \Delta^{-1}\Delta_{ik}\frac{\partial I}{\partial \dot{q}_k}; \qquad F_i = \alpha_{ik}\frac{\partial I}{\partial \dot{q}_k} - \Delta^{-1}\Delta_{ik}\frac{\partial I}{\partial q_k}$$

y sustituyendo en la expresión [XXIII.1], tenemos para la derivada temporal de $G(q/\dot{q},t)$:

$$\frac{dG}{dt} = \Delta^{-1}\frac{\partial G}{\partial q_i}\Delta_{ik}\frac{\partial I}{\partial \dot{q}_k} - \Delta^{-1}\frac{\partial G}{\partial \dot{q}_i}\Delta_{ik}\frac{\partial I}{\partial q_k} + \alpha_{ik}\frac{\partial G}{\partial \dot{q}_i}\frac{\partial I}{\partial \dot{q}_k} + \frac{\partial G}{\partial t} =$$

$$= \Delta^{-1}\left(\frac{\partial G}{\partial q_i}\Delta_{ik}\frac{\partial I}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial G}{\partial \dot{q}_i}\Delta_{ki}\frac{\partial I}{\partial q_k}\right) +$$

$$+ \tfrac{1}{2}\Delta^{-1}\left(\frac{\partial F_k}{\partial \dot{q}_h}\Delta_{hi}\frac{\partial G}{\partial \dot{q}_i}\frac{\partial I}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial F_i}{\partial \dot{q}_h}\Delta_{kh}\frac{\partial G}{\partial \dot{q}_i}\frac{\partial I}{\partial \dot{q}_k}\right) + \frac{\partial G}{\partial t}.$$

Puesto que $\Delta_{ik}=\Delta_{ki}$, sacando factor tenemos que:

$$\frac{dG}{dt} = \Delta_{ik}\Delta^{-1}\left(\frac{\partial G}{\partial q_i}\frac{\partial I}{\partial \dot q_k} - \frac{\partial G}{\partial \dot q_k}\frac{\partial I}{\partial q_i}\right) + \tfrac{1}{2}\Delta^{-1}\frac{\partial F_r}{\partial \dot q_h}\left(\Delta_{hi}\frac{\partial G}{\partial \dot q_i}\frac{\partial I}{\partial \dot q_r} - \right.$$

$$\left. - \Delta_{kh}\frac{\partial G}{\partial \dot q_r}\frac{\partial I}{\partial \dot q_k}\right) + \frac{\partial G}{\partial t}$$

y como en los sumandos del segundo paréntesis los índices i y k son mudos, puedo escribir, asociando términos convenientemente,

$$\frac{dG}{dt} = \Delta_{ik}\Delta^{-1}[G,I]_{ik} + \tfrac{1}{2}\Delta^{-1}\frac{\partial F_r}{\partial \dot q_h}\left(\Delta_{hs}\frac{\partial G}{\partial \dot q_s}\frac{\partial I}{\partial \dot q_r} - \Delta_{sh}\frac{\partial G}{\partial \dot q_r}\frac{\partial I}{\partial \dot q_s}\right) + \frac{\partial G}{\partial t} =$$

$$= \Delta_{ik}\Delta^{-1}[G,I]_{ik} + \tfrac{1}{2}\Delta_{hs}\Delta^{-1}\frac{\partial F_r}{\partial \dot q_h}\left(\frac{\partial G}{\partial \dot q_s}\frac{\partial I}{\partial \dot q_r} - \frac{\partial G}{\partial \dot q_r}\frac{\partial I}{\partial \dot q_s}\right) + \frac{\partial G}{\partial t}.$$

En definitiva:

$$\frac{dG}{dt} = \Delta_{ik}\Delta^{-1}[G,I]_{ik} + \tfrac{1}{2}\Delta_{hs}\Delta^{-1}\langle G,I\rangle_{sr}\frac{\partial F_r}{\partial \dot q_h} + \frac{\partial G}{\partial t}.$$

como queríamos demostrar.

COROLARIO XXIII.1

Si las funciones F_i no dependen de la velocidades generalizadas la derivada temporal es:

$$dG/dt = \Delta^{-1}\Delta_{ik}[G,I]_{ik} + \partial G/\partial t,$$

recuperándose la estructura correspondiente a los sistemas lagrangianos.

3.2.1.- EJEMPLOS DE APLICACION

A continuación presentamos algunos ejemplos de interés a los que aplicamos el método elaborado en la sección precedente. Unos aparecen sistemáticamente repetidos en la bibliografía del Problema Inverso y otros, que representan problemas de interés, los hemos incorporado a partir de obras y trabajos técnicos recientes, donde se tratan utilizando otras técnicas, y para los que aquí construimos una descripción lagrangiana.

La presentación de los ejemplos seguirá aproximadamente la misma estructura para todos ellos, en primer lugar escribiremos el sistema dinámico newtoniano, a continuación el sistema diferencial asociado a los factores integrantes y la solución del sistema homogéneo correspondiente; calcularemos los coeficientes a_{ij} para escribir el sistema auxiliar en los μ_{ij}. Determinaremos una solución para éste y a continuación la correspondiente al sistema completo de los factores integrantes. Con esta solución escribimos el sistema diferencial que define la integral primera $I(q/\dot{q})$, que, una vez integrado, nos permitirá expresar explicitamente la ecuación en derivadas parciales cuya solución nos proporcionará la Lagrangiana asociada al sistema dinámico de partida.

EJEMPLO 1 (Santilli R. M., T. II, [79])

Sea el sistema dinámico newtoniano:

$$m\ddot{q}_1 = -\gamma(q_1\dot{q}_1^2 + 2q_2\dot{q}_1\dot{q}_2 - q_1\dot{q}_2^2)$$

$$m\ddot{q}_2 = -\gamma(q_2\dot{q}_2^2 + 2q_1\dot{q}_1\dot{q}_2 - q_2\dot{q}_1^2)$$

Los factores integrantes han de verificar el sistema diferencial:

$$\frac{d\lambda_{11}}{dt} - 2\beta(q_1\dot{q}_1 + q_2\dot{q}_2)\lambda_{11} + 2\beta(q_2\dot{q}_1 - q_1\dot{q}_2)\lambda_{12} = 0$$

$$\frac{d\lambda_{22}}{dt} - 2\beta(q_2\dot{q}_2 + q_1\dot{q}_1)\lambda_{22} + 2\beta(q_1\dot{q}_2 - q_2\dot{q}_1)\lambda_{12} = 0$$

$$\frac{d\lambda_{12}}{dt} - 2\beta(q_1\dot{q}_1 + q_2\dot{q}_2)\lambda_{12} + \beta(q_1\dot{q}_2 - q_2\dot{q}_1)(\lambda_{11} - \lambda_{22}) = 0$$

donde hemos llamado $\beta=\gamma/m$. Las soluciones del sistema homogéneo asociado son:

$$\lambda_{11}^* = \lambda_{22}^* = \exp\{\beta(q_1^2 + q_2^2)\}; \qquad \lambda_{12}^* = \exp\{2\beta(q_1^2 + q_2^2)\}.$$

El sistema auxiliar de los μ_{ij} es:

$$\frac{d\mu_{11}}{dt} + 2\beta(q_2\dot{q}_1 - q_1\dot{q}_2)\mu_{12} = 0$$

$$\frac{d\mu_{22}}{dt} - 2\beta(q_2\dot{q}_1 - q_1\dot{q}_2)\mu_{12} = 0$$

$$\frac{d\mu_{12}}{dt} + \beta(q_1\dot{q}_2 - q_2\dot{q}_1)(\mu_{11} - \mu_{22}) = 0$$

que se verifica idénticamente si: $\mu_{12}= 0$, $\mu_{11}= \mu_{22}= c$.

La solución del sistema completo será:

$$\lambda_{11} = \lambda_{22} = \exp\{\beta(q_1^2 + q_2^2)\}; \qquad \lambda_{12} = 0.$$

La integral primera I queda definida por el sistema de ecuaciones en derivadas parciales:

$$c\dot{q}_1\exp\{\beta(q_1^2+q_2^2)\} = \frac{\partial I}{\partial \dot{q}_1}$$

$$c\dot{q}_2\exp\{\beta(q_1^2+q_2^2)\} = \frac{\partial I}{\partial \dot{q}_2}$$

$$c\beta(q_1\dot{q}_1^2+q_1\dot{q}_2^2)\exp\{\beta(q_1^2+q_2^2)\} = \frac{\partial I}{\partial q_1}$$

$$c\beta(q_2\dot{q}_1^2+q_2\dot{q}_2^2)\exp\{\beta(q_1^2+q_2^2)\} = \frac{\partial I}{\partial q_2},$$

integrando, obtenemos:

$$I = \tfrac{1}{2}c(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2)\exp\{\beta(q_1^2 + q_2^2)\}.$$

La Lagrangiana será solución de la ecuación:

$$\tfrac{1}{2}c(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2)\exp\{\beta(q_1^2 + q_2^2)\} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1}\dot{q}_1 + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2}\dot{q}_2 - L$$

que se verifica para:

$$L = \tfrac{1}{2}c(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2)\exp\{\beta(q_1^2 + q_2^2)\}.$$

EJEMPLO 2 (Havas P., [20])

Para el sistema dinámico descrito por el conjunto de ecuaciones newtonianas:

$$\ddot{q}_i = -\left(\frac{\partial \Phi(q)}{\partial q_i}\right)\left(\frac{d^2\Psi_i(\dot{q}_i)}{d\dot{q}_i^2}\right)^{-1}, \qquad i = 1,2,\ldots,n$$

el sistema diferencial de los factores integrantes toma la forma:

$$\frac{d\lambda_{ij}}{dt} - \frac{\partial \Phi(q)}{\partial q_i}\,\frac{d^3\Psi_i(\dot{q}_i)}{d\dot{q}_i^3}\left(\frac{d^2\Psi_i(\dot{q}_i)}{d\dot{q}_i^2}\right)^{-2}\lambda_{ij} = 0$$

que es homogéneo y de variables separadas (puesto que la repetición del índice "i" no implica suma); por lo que su integración es inmediata y se tiene:

$$\lambda_{ij} = \frac{d^2\Psi_i(\dot{q}_i)}{d\dot{q}_i^2}, \qquad \text{para } i=j; \qquad \lambda_{ij} = 0, \quad \forall\, i\neq j.$$

La integral primera I estará definida por:

$$\frac{d^2\Psi_i(\dot{q}_i)}{d\dot{q}_i^2}\,\dot{q}_i = \frac{\partial I}{d\dot{q}_i}; \qquad \frac{\partial \Phi(q)}{\partial q_i} = \frac{\partial I}{\partial q_i};$$

de nuevo el sistema resulta ser de variables separadas y al integrar, la expresión para $I(q,\dot{q})$ resulta ser:

$$I = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{d\Psi_i(\dot{q}_i)}{d\dot{q}_i}\,\dot{q}_i - \Psi_i\right) + \Phi(q).$$

La Lagrangiana ha de ser solución de la ecuación:

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{d\Psi_i(\dot{q}_i)}{d\dot{q}_i}\,\dot{q}_i - \Psi_i\right) + \Phi(q) = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\,\dot{q}_i\right) - L$$

que se verifica para

$$L = \sum_{i=1}^{n} \Psi_i(\dot{q}_i) - \Phi(q).$$

EJEMPLO 3 (Havas P., [19]; Santilli R. M., [75])

Sea el sistema dinámico:

$$\ddot{q}_1 + \tfrac{1}{2}\gamma(\dot{q}_1^2 + 2\dot{q}_1\dot{q}_3) = 0$$

$$\ddot{q}_2 + \tfrac{1}{2}\gamma(\dot{q}_2^2 + 2\dot{q}_2\dot{q}_3) = 0$$

$$\ddot{q}_3 + \tfrac{1}{2}\gamma\{\dot{q}_3^2 - \dot{q}_1^2\exp(kq_1) - \dot{q}_2^2\exp(kq_2)\} = 0.$$

Los factores integrantes han de verificar:

$$\frac{d\lambda_{11}}{dt} - \gamma(\dot{q}_1 + \dot{q}_3)\lambda_{11} + \gamma\dot{q}_1\exp(\gamma q_1)\lambda_{13} = 0$$

$$\frac{d\lambda_{22}}{dt} - \gamma(\dot{q}_2 + \dot{q}_3)\lambda_{22} + \gamma\dot{q}_2\exp(\gamma q_2)\lambda_{23} = 0$$

$$\frac{d\lambda_{33}}{dt} - \gamma\dot{q}_3\lambda_{33} - \gamma\dot{q}_1\lambda_{13} - \gamma\dot{q}_2\lambda_{23} = 0$$

$$2\frac{d\lambda_{12}}{dt} - \gamma(\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + 2\dot{q}_3)\lambda_{12} + \gamma\dot{q}_2\exp(\gamma q_2)\lambda_{13} + \gamma\dot{q}_1\exp(\gamma q_1)\lambda_{23} = 0$$

$$2\frac{d\lambda_{13}}{dt} - \gamma(\dot{q}_1 + 2\dot{q}_3)\lambda_{13} - \gamma\dot{q}_1\lambda_{11} + \gamma\dot{q}_1\exp(\gamma q_1)\lambda_{33} - \gamma\dot{q}_2\lambda_{12} = 0$$

$$2\frac{d\lambda_{23}}{dt} - \gamma(\dot{q}_2 + 2\dot{q}_3)\lambda_{23} - \gamma\dot{q}_2\lambda_{22} + \gamma\dot{q}_2\exp(\gamma q_2)\lambda_{33} - \gamma\dot{q}_1\lambda_{12} = 0.$$

Las soluciones del sistema homogéneo asociado son:

$$\lambda_{11}^{*} = \exp\{\gamma(q_1 + q_3)\}; \qquad \lambda_{12}^{*} = \exp\{\tfrac{1}{2}(q_1 + q_2 + 2q_3)\}$$

$$\lambda_{22}^{*} = \exp\{\gamma(q_2 + q_3)\}; \qquad \lambda_{13}^{*} = \exp\{\tfrac{1}{2}(q_1 + 2q_3)\}$$

$$\lambda_{33}^{*} = \exp\{\gamma q_3\}; \qquad \lambda_{23}^{*} = \exp\{\tfrac{1}{2}(q_2 + 2q_3)\}.$$

Los factores μ_{ij} han de ser soluciones de:

$$\frac{d\mu_{11}}{dt} + \gamma\dot{q}_1\exp(\tfrac{1}{2}\gamma q_1)\mu_{13} = 0$$
$$\frac{d\mu_{22}}{dt} + \gamma\dot{q}_2\exp(\tfrac{1}{2}\gamma q_2)\mu_{23} = 0$$
$$\frac{d\mu_{33}}{dt} - \gamma\dot{q}_1\exp(\tfrac{1}{2}\gamma q_1)\mu_{13} - \gamma\dot{q}_2\exp(\tfrac{1}{2}\gamma q_2)\mu_{23} = 0$$
$$2\frac{d\mu_{12}}{dt} + \gamma\dot{q}_2\exp(\tfrac{1}{2}\gamma q_2)\mu_{13} + \gamma\dot{q}_1\exp(\tfrac{1}{2}\gamma q_1)\mu_{23} = 0$$
$$2\frac{d\mu_{13}}{dt} - \gamma\dot{q}_1\exp(\tfrac{1}{2}\gamma q_1)\mu_{11} + \gamma\dot{q}_1\exp(\tfrac{1}{2}\gamma q_1)\mu_{33} - \gamma\dot{q}_2\exp(\tfrac{1}{2}\gamma q_2)\mu_{12} = 0$$
$$2\frac{d\mu_{23}}{dt} - \gamma\dot{q}_2\exp(\tfrac{1}{2}\gamma q_2)\mu_{22} + \gamma\dot{q}_2\exp(\tfrac{1}{2}\gamma q_2)\mu_{33} - \gamma\dot{q}_1\exp(\tfrac{1}{2}\gamma q_1)\mu_{12} = 0.$$

Una solución para éste es: $\mu_{11}=\mu_{22}=\mu_{33}=c$; $\mu_{12}=\mu_{13}=\mu_{23}=0$;

y la del sistema completo de los λ_{ij} será:

$$\lambda_{11} = c\exp\{\gamma(q_1+ q_3)\}; \quad \lambda_{22} = c\exp\{\gamma(q_2+ q_3)\}; \quad \lambda_{33} = c\exp\{\gamma q_3\}$$

$$\lambda_{12} = \lambda_{13} = \lambda_{23} = 0.$$

La integral primera I queda determinada por:

$$c\dot{q}_1\exp\{\gamma(q_1+ q_3) = \frac{\partial I}{\partial\dot{q}_1}$$
$$c\dot{q}_2\exp\{\gamma(q_2+ q_3) = \frac{\partial I}{\partial\dot{q}_2}$$
$$c\dot{q}_3\exp\{\gamma q_3\} = \frac{\partial I}{\partial\dot{q}_3}$$
$$c\gamma\exp\{\gamma(q_1+q_3)\}(\tfrac{1}{2}\dot{q}_1^2 + 2\dot{q}_1\dot{q}_3) = \frac{\partial I}{\partial q_1}$$
$$c\gamma\exp\{\gamma(q_2+q_3)\}(\tfrac{1}{2}\dot{q}_2^2 + 2\dot{q}_2\dot{q}_3) = \frac{\partial I}{\partial q_2}$$
$$c\gamma\dot{q}_3^2\exp\{\gamma q_3\} - 3c\gamma\dot{q}_1^2\exp\{\gamma(q_1+q_3)\} - 3c\gamma\dot{q}_2^2\exp\{\gamma(q_2+q_3)\} = 2\frac{\partial I}{\partial q_3}$$

cuya solución es:

$$I.= \tfrac{1}{2}c\dot{q}_3^2\exp\{\gamma q_3\} + \tfrac{1}{2}c\dot{q}_1^2\exp\{\gamma(q_1+q_3)\} + \tfrac{1}{2}c\dot{q}_2^2\exp\{\gamma(q_2+q_3)\}.$$

La Lagrangiana quedará definida mediante la ecuación en derivadas parciales lineal:

$$\tfrac{1}{2}c\dot{q}_3^2\exp\{\gamma q_3\} + \tfrac{1}{2}c\dot{q}_1^2\exp\{\gamma(q_1+q_3)\} + \tfrac{1}{2}c\dot{q}_2^2\exp\{\gamma(q_2+q_3)\} =$$

$$= \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1}\dot{q}_1 + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2}\dot{q}_2 + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_3}\dot{q}_3 - L,$$

que admite como solución:

$$L = \tfrac{1}{2}c\dot{q}_1^2\exp\{\gamma(q_1+q_3)\} + \tfrac{1}{2}c\dot{q}_2^2\exp\{\gamma(q_2+q_3)\} + \tfrac{1}{2}c\dot{q}_3^2\exp\{\gamma q_3\}.$$

<u>EJEMPLO 4</u> (Hendricks S. L., [90])

Al analizar la dinámica de un rotor simple montado sobre una barra viscoelástica se encuentra que las ecuaciones de movimiento del rotor se pueden escribir, en función de los parámetros que describen el sistema físico, de la forma:

$$m\ddot{q}_1 + c\dot{q}_1 - 2mW\dot{q}_2 + (k-mW^2)q_1 - cWq_2 = mW^2\delta\cos\theta$$

$$m\ddot{q}_2 + c\dot{q}_2 + 2mW\dot{q}_1 + (k-mW^2)q_2 + cWq_1 = mW^2\delta\,\mathrm{sen}\,\theta.$$

Renombrando los parámetros, se puede escribir:

$$\ddot{q}_1 + \alpha\dot{q}_1 - \beta\dot{q}_2 + \gamma q_1 - \nu q_2 - f = 0$$

$$\ddot{q}_2 + \alpha\dot{q}_2 + \beta\dot{q}_1 + \gamma q_2 + \nu q_1 - g = 0$$

donde, $\alpha=c/m$; $\beta=2W$; $\gamma=k/m-W^2$; $\nu=cW/m$; $f=W^2\delta\cos\theta$; $g=W^2\delta\,\mathrm{sen}\,\theta$.

Los factores integrantes han de verificar:

$$\frac{d\lambda_{11}}{dt} - \alpha\lambda_{11} - \beta\lambda_{12} = 0$$

$$\frac{d\lambda_{22}}{dt} - \alpha\lambda_{22} + \beta\lambda_{12} = 0$$

$$\frac{d\lambda_{12}}{dt} - \alpha\lambda_{12} + ½\beta\lambda_{11} - ½\beta\lambda_{22} = 0.$$

Las soluciones del sistema homogéneo asociado son:

$$\lambda^*_{11} = \lambda^*_{22} = \lambda^*_{12} = \exp(\alpha t).$$

Los factores auxiliares μ_{ij} han de verificar:

$$\frac{d\mu_{11}}{dt} - \beta\mu_{12} = 0; \qquad \frac{d\mu_{22}}{dt} - \beta\mu_{12} = 0; \qquad \frac{d\mu_{12}}{dt} + ½\beta\mu_{11} - ½\beta\mu_{22} = 0$$

que admite como solución: $\mu_{11} = -\mu_{22} = \text{sen } \beta t$; $\mu_{12} = \cos \beta t$;

con lo cual, los factores integrantes se escriben:

$$\lambda_{11} = - \lambda_{22} = \exp(\alpha t)\text{sen } \beta t; \qquad \lambda_{12} = \exp(\alpha t)\cos \beta t.$$

Puesto que éstos dependen explicitamente del tiempo, no podemos proseguir con el método, elaborado para los sistemas autónomos. Sin embargo, si multiplicamos el sistema dinámico por la matriz de factores integrantes hallada, lo podemos escribir:

$$\frac{d}{dt}\Big(\exp\{\alpha t\}\{\dot q_1 \text{sen } \beta t + \dot q_2 \cos \beta t\}\Big) =$$

$$= \exp\{\alpha t\}\{(f - \gamma q_1 + \nu q_2)\text{sen } \beta t + (g - \gamma q_2 - \nu q_1)\cos \beta t\}$$

$$\frac{d}{dt}\Big(\exp\{\alpha t\}\{\dot q_1 \cos \beta t - \dot q_2 \text{sen } \beta t\}\Big) =$$

$$= \exp\{\alpha t\}\{(f - \gamma q_1 + \nu q_2)\cos \beta t + (g - \gamma q_2 - \nu q_1)\text{sen } \beta t\}$$

donde las ecuaciones tienen la estructura de las de Lagrange y es posible llevar a cabo las identificaciones:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot q_1} \equiv \exp(\alpha t)\{\dot q_1 \operatorname{sen}\beta t + \dot q_2 \cos\beta t\}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot q_2} \equiv \exp(\alpha t)\{\dot q_1 \cos\beta t - \dot q_2 \operatorname{sen}\beta t\}$$

$$\frac{\partial L}{\partial q_1} \equiv \exp(\alpha t)\{(f - \gamma q_1 + \nu q_2)\operatorname{sen}\beta t + (g - \gamma q_2 - \nu q_1)\cos\beta t\}$$

$$\frac{\partial L}{\partial q_2} \equiv \exp(\alpha t)\{(f - \gamma q_1 + \nu q_2)\cos\beta t - (g - \gamma q_2 - \nu q_1)\operatorname{sen}\beta t\}$$

e integrando, obtendremos para la Lagrangiana la expresión:

$$L = \exp(\alpha t)\operatorname{sen}\beta t\{\tfrac{1}{2}\dot q_1^2 - \tfrac{1}{2}\dot q_2^2 + \tfrac{1}{2}\gamma(q_2^2 - q_1^2) + \nu q_1 q_2 + f q_1 - g q_2\} +$$

$$+ \exp(\alpha t)\cos\beta t\{\dot q_1 \dot q_2 + \tfrac{1}{2}\nu(q_2^2 - q_1^2) - \gamma q_1 q_2 + g q_1 + f q_2\} + \Psi(t).$$

Cuando un sistema físico se encuentra sometido a vínculos externos, su descripción newtoniana se facilitará eligiendo adecuadamente las coordenadas generalizadas, y ello puede originar, como en los ejemplos que siguen, la aparición de las velocidades generalizadas en las funciones dinámicas $F_i(q/\dot q)$ de evolución.

EJEMPLO 5 (Nayfeh A. H. y Mook D. T., [96])

Una masa puntual m_1 se encuentra rigidamente unida a un extremo de una varilla ligera y lisa de longitud l, capaz de girar en un plano vertical alrededor de un eje fijo que pasa por el otro extremo. Otra, de masa m_2, puede deslizar a lo largo de la varilla bajo la acción de un resorte de constante elástica k. Las ecuaciones dinámicas son:

$$\ddot{q}_1 + w_1^2 q_1 - q_1\dot{q}_2^2 + w_2^2(1 - \cos q_2) = w_2^2 q_1^e$$

$$(1 + mq_1^2)\ddot{q}_2 + (1 + mq_1)w_2^2 \operatorname{sen} q_2 + 2mq_1\dot{q}_1\dot{q}_2 = 0$$

siendo $q_1=x/l$, donde x es la distancia de m_2 al eje de giro, q_2 el ángulo que la varilla forma con la vertical, q_1^e el valor de q_1 en la posición de equilibrio, $w_1^2=k/m_2$ y $w_2^2=g/l$.

Los factores integrantes han de verificar:

$$\frac{d\lambda_{11}}{dt} - \frac{2mq_1\dot{q}_2}{1+mq_1^2}\lambda_{12} = 0$$

$$\frac{d\lambda_{22}}{dt} - \frac{2mq_1\dot{q}_1}{1+mq_1^2}\lambda_{22} + 2q_1\dot{q}_2\lambda_{12} = 0$$

$$\frac{d\lambda_{12}}{dt} - \frac{mq_1\dot{q}_1}{1+mq_1^2}\lambda_{22} - \frac{mq_1\dot{q}_2}{1+mq_1^2}\lambda_{22} + q_1\dot{q}_2\lambda_{11} = = 0.$$

Las soluciones del sistema homogéneo asociado son:

$$\lambda_{11}^* = K', \qquad \lambda_{22}^* = 1 + mq_1^2, \qquad \lambda_{12}^* = (1 + mq_1^2)^{½}.$$

Los factores auxiliares μ_{ij} han de ser soluciones del conjunto de ecuaciones siguiente:

$$\frac{d\mu_{11}}{dt} - \frac{2mq_1\dot{q}_2}{(1+mq_1^2)^{½}}\mu_{12} = 0$$

$$\frac{d\mu_{22}}{dt} + \frac{2mq_1\dot{q}_2}{(1+mq_1^2)^{½}}\mu_{12} = 0$$

$$\frac{d\mu_{12}}{dt} + \frac{mq_1\dot{q}_2}{(1+mq_1^2)^{½}}(\mu_{11} - \mu_{22}) = 0$$

que se verifica si: $\mu_{12}=0$, $\mu_{11}=c_1$, $\mu_{22}=c_2$, siendo $c_1=mc_2$. Con ello, la solución del sistema completo de los λ_{ij} se expresará:

$$\lambda_{11} = c_1 = c, \qquad \lambda_{22} = (c/m)(1 + mq_1^2), \qquad \lambda_{12} = 0.$$

La integral primera $I(q/\dot{q})$ quedará determinada por:

$$c\dot{q}_1 = \frac{\partial I}{\partial \dot{q}_1}$$

$$(c/m)(1 + mq_1^2)\dot{q}_2 = \frac{\partial I}{\partial \dot{q}_2}$$

$$cq_1\dot{q}_2^2 + cw_1^2q_1 + cw_2^2(1 - \cos q_2) - cw_2^2q_1^e = \frac{\partial I}{\partial q_1}$$

$$(c/m)w_2^2(1 + mq_1)\operatorname{sen} q_2 = \frac{\partial I}{\partial \dot{q}_2}$$

e integrando, obtenemos:

$$I = ½c(\dot{q}_1^2+q_1^2\dot{q}_2^2+m^{-1}\dot{q}_2^2) + ½cw_1^2q_1^2 + cw_2^2q_1(1-\cos q_2) - cw_2^2q_1^eq_1 -$$
$$- (c/m)w_2^2\cos q_2.$$

La Lagrangiana ha de verificar la ecuación en derivadas parciales:

$$I = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1}\dot{q}_1 + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2}\dot{q}_2 - L,$$

lo que implica que podemos escribir para L:

$$L = \tfrac{1}{2}c(\dot{q}_1^2+q_1^2\dot{q}_2^2+m^{-1}\dot{q}_2^2) - \tfrac{1}{2}cw_1^2q_1^2 - cw_2^2q_1(1-\cos q_2) + cw_2^2q_1^eq_1 +$$

$$+ (c/m)w_2^2\cos q_2.$$

<u>EJEMPLO 6</u> (Nayfeh A. H. y Mook D. T., [96])

El movimiento, dentro del campo gravitatorio, de una partícula de masa m unida a uno de los extremos de una varilla ligera, inextensible, de longitud l y vinculada al exterior mediante una articulación esférica fija, queda descrito en coordenadas esféricas, con polo en la rótula, por las ecuaciones dinámicas:

$$\ddot{q}_1 + \alpha\,\mathrm{sen}\, q_1 - \tfrac{1}{2}\dot{q}_2^2\,\mathrm{sen}\, 2q_1 = 0$$

$$\ddot{q}_2\,\mathrm{sen}\, q_1 + 2\dot{q}_1\dot{q}_2\cos q_1 = 0$$

donde $\alpha=g/l$. El sistema que han de verificar los factores integrantes λ_{ij} se escribirá:

$$\frac{d\lambda_{11}}{dt} - 2\dot{q}_2\,\mathrm{cotg}\, q_1\, \lambda_{12} = 0$$

$$\frac{d\lambda_{22}}{dt} - 2\dot{q}_1\,\mathrm{cotg}\, q_1\, \lambda_{22} + \dot{q}_2\,\mathrm{sen}\, 2q_1\, \lambda_{12} = 0$$

$$2\frac{d\lambda_{12}}{dt} - 2\dot{q}_1\,\mathrm{cotg}\, q_1\, \lambda_{12} + \dot{q}_2\,\mathrm{sen}\, 2q_1\, \lambda_{11} - 2\dot{q}_2\,\mathrm{cotg}\, q_1\, \lambda_{22} = 0.$$

Las soluciones del correspondiente sistema homogéneo asociado se pueden escribir:

$$\lambda_{11}^* = K', \qquad \lambda_{22}^* = \mathrm{sen}^2\, q_1, \qquad \lambda_{12}^* = \mathrm{sen}\, q_1.$$

Los factores μ_{ij} han de ser solución de:

$$\frac{d\mu_{11}}{dt} - 2\dot{q}_2 \cos q_1 \, \mu_{12} = 0$$

$$\frac{d\mu_{22}}{dt} + 2\dot{q}_2 \cos q_1 \, \mu_{12} = 0$$

$$\frac{d\mu_{12}}{dt} + \dot{q}_2 \cos q_1 (\mu_{11} - \mu_{22}) = 0,$$

que se verifican idénticamente si:

$$\mu_{12} = 0, \qquad \mu_{11} = \mu_{22} = c.$$

La solución del sistema completo en los λ_{ij} será:

$$\lambda_{11} = c, \qquad \lambda_{22} = c\,\mathrm{sen}^2\, q_1, \qquad \lambda_{12} = 0.$$

La integral primera $I(q/\dot{q})$ quedará determinada por:

$$c\dot{q}_1 = \frac{\partial I}{\partial \dot{q}_1}$$

$$c\dot{q}_2 \mathrm{sen}^2\, q_1 = \frac{\partial I}{\partial \dot{q}_2}$$

$$c\alpha\, \mathrm{sen}\, q_1 + \tfrac{1}{2} c\dot{q}_2^2 \mathrm{sen}\, 2q_1 = \frac{\partial I}{\partial q_1}$$

$$0 = \frac{\partial I}{\partial q_2},$$

e integrando, podremos expresarla:

$$I = \tfrac{1}{2} c(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 \mathrm{sen}^2\, q_1) - c\alpha \cos q_1.$$

La lagrangiana ha de verificar la ecuación en derivadas parciales:

$$\tfrac{1}{2} c(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 \mathrm{sen}^2\, q_1) - c\alpha \cos q_1 = \frac{\partial I}{\partial \dot{q}_1} \dot{q}_1 + \frac{\partial I}{\partial \dot{q}_2} \dot{q}_2 - L;$$

lo cual sucede si:

$$L = \tfrac{1}{2} c(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 \mathrm{sen}^2\, q_1) + c\alpha \cos q_1.$$

EJEMPLO 7 (Nayfeh A. H. y Mook D. T., [96])

El movimiento de una masa m unida a un resorte, de constante elástica k, que oscila en un plano vertical queda descrito por las ecuaciones dinámicas newtonianas:

$$\ddot{q}_1 + w^2 q_1 - (l+q_1)\dot{q}_2^2 - g\cos q_2 = 0$$

$$\ddot{q}_2(l+q_1) + g\,\mathrm{sen}\, q_2 + 2\dot{q}_1\dot{q}_2 = 0$$

donde $w^2=k/m$, l es la longitud natural del resorte, q_1 la elongación del mismo y q_2 el ángulo que forma con la vertical. Los factores integrantes han de verificar el conjunto de ecuaciones:

$$\frac{d\lambda_{11}}{dt} - \frac{2\dot{q}_2}{l+q_1}\lambda_{12} = 0$$

$$\frac{d\lambda_{22}}{dt} - \frac{2\dot{q}_1}{l+q_1}\lambda_{22} + 2(l+q_1)\dot{q}_2\lambda_{12} = 0$$

$$\frac{d\lambda_{12}}{dt} - \frac{\dot{q}_1}{l+q_1}\lambda_{12} + \dot{q}_2(l+q_1)\lambda_{11} - \frac{\dot{q}_2}{l+q_1}\lambda_{22} = 0,$$

cuyo sistema homogéneo asociado se verifica para

$$\lambda^*_{11} = K', \qquad \lambda^*_{22} = (l+q_1)^2, \qquad \lambda^*_{12} = (l+q_1).$$

Los factores μ_{ij} verificarán las ecuaciones:

$$\frac{d\mu_{11}}{dt} - 2\dot{q}_2\mu_{12} = 0$$

$$\frac{d\mu_{22}}{dt} + 2\dot{q}_2\mu_{12} = 0$$

$$\frac{d\mu_{12}}{dt} - \dot{q}_2(\mu_{11} - \mu_{22}) = 0$$

que admiten como solución: $\mu_{12}= 0$, $\mu_{11}= \mu_{22}= c$.

Con ello, la del sistema completo de los factores integrantes es:

$$\lambda_{11} = c, \qquad \lambda_{22} = c(1+q_1)^2, \qquad \lambda_{12} = 0.$$

La integral primera $I(q/\dot{q})$, quedará definida por:

$$c\dot{q}_1 = \frac{\partial I}{\partial \dot{q}_1}$$

$$c\dot{q}_2(1+q_1)^2 = \frac{\partial I}{\partial \dot{q}_2}$$

$$c\dot{q}_2^2(1+q_1) + cw^2 q_1 - cg\cos q_2 = \frac{\partial I}{\partial q_1}$$

$$cg(1+q_1)\operatorname{sen} q_2 = \frac{\partial I}{\partial q_2}.$$

Integrando, podremos expresarla:

$$I = \tfrac{1}{2}c\dot{q}_1^2 + \tfrac{1}{2}c\dot{q}_2^2(1+q_1)^2 + \tfrac{1}{2}cw^2q_1^2 - cg(1+q_1)\cos q_2.$$

La Lagrangiana ha de verificar la ecuación en derivadas parciales:

$$\tfrac{1}{2}c\dot{q}_1^2 + \tfrac{1}{2}c\dot{q}_2^2(1+q_1)^2 + \tfrac{1}{2}cw^2q_1^2 - cg(1+q_1)\cos q_2 = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1}\dot{q}_1 + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2}\dot{q}_2 - L$$

lo cual sucede si:

$$L = \tfrac{1}{2}c\dot{q}_1^2 + \tfrac{1}{2}c(1+q_1)^2\dot{q}_2^2 - \tfrac{1}{2}cw^2q_1^2 + cg(1+q_1)\cos q_2.$$

EJEMPLO 8 (Nayfeh A. H. y Mook D. T., [96])

Las ecuaciones dinámicas que describen el movimiento plano de una varilla uniforme, de longitud l y masa m, que cuelga por uno de sus extremos de un resorte, de constante elástica k, obligado a moverse verticalmente; son:

$$\ddot{q}_1 + w_1^2 q_1 = ½\ddot{q}_2 \text{sen } q_2 + ½\dot{q}_2^2 \cos q_2$$

$$\ddot{q}_2 + w_2^2 q_2 = 3/2\ddot{q}_1 \text{sen } q_2$$

donde $q_1=(x-x_e)/l$, siendo $(x-x_e)$ la elongación del resorte; $w_1^2=k/m$, $w_2^2=3g/2l$ y q_2 el ángulo que la varilla forma con la vertical.

Tras despejar $\ddot{q}_1$ y $\ddot{q}_2$ para expresar las ecuaciones anteriores en la forma acostumbrada, se encuentra que los factores integrantes han de verificar las ecuaciones diferenciales:

$$\frac{d\lambda_{11}}{dt} = 0$$

$$\frac{d\lambda_{22}}{dt} + \frac{6\dot{q}_2 \text{sen } q_2 \cos q_2}{4-3\text{sen}^2 q_2}\lambda_{22} + \frac{4\dot{q}_2 \cos q_2}{4-3\text{sen}^2 q_2}\lambda_{12} = 0$$

$$\frac{d\lambda_{12}}{dt} + \frac{3\dot{q}_2 \text{sen } q_2 \cos q_2}{4-3\text{sen}^2 q_2}\lambda_{12} + \frac{4\dot{q}_2 \cos q_2}{4-3\text{sen}^2 q_2}\lambda_{11} = 0$$

que admiten como solución:

$$\lambda_{11}= 0, \quad \lambda_{22}= - \text{sen } q_2(4-3\text{sen}^2 q_2)^{½}, \quad \lambda_{12}= (4-3\text{sen}^2 q_2)^{½},$$

lo cual significa que la integral primera $I(q/\dot{q})$

quedará determinada por:

$$\dot{q}_2(4-3\text{sen}^2 q_2)^{½} = \frac{\partial I}{\partial \dot{q}_1}$$

$$(4-3\text{sen}^2 q_2)^{½}(\dot{q}_1-\dot{q}_2\text{sen } q_2) = \frac{\partial I}{\partial \dot{q}_2}$$

$$\frac{6w_1^2 q_1 \text{sen } q_2 + 4w_2^2 q_2}{(4-3\text{sen}^2 q_2)^{½}} = \frac{\partial I}{\partial q_1}$$

$$\frac{2\dot{q}_2^2\cos q_2 - 3/2\dot{q}_2(\dot{q}_1-\dot{q}_2\text{sen}q_2)\text{sen}2q_2 - 2(w_2^2q_2-3w_1^2q_1)\text{sen}q_2}{(4-3\text{sen}^2 q_2)^{½}} = \frac{\partial I}{\partial q_2}.$$

La integración del sistema anterior se facilita comenzando por la última ecuación y llamando:

$$A(q_2)=\int g(q_2)q_2\cos q_2\, dq_2, \qquad B(q\ )=\int g(q_2)\text{sen } q_2\text{sen } 2q_2\, dq_2$$

$$C(q_2)=\int g(q_2)\text{sen } 2q_2\, dq_2, \qquad D(q_2)=\int g(q_2)\cos q_2\, dq_2$$

$$E(q_2)=\int g(q_2)\text{sen}^2q_2\, dq_2, \qquad \text{donde: } g(q_2)=(4-3\text{sen}^2 q_2)^{½};$$

con ello se obtiene facilmente que:

$$I = (-½\dot{q}_2^2\text{senq}\ _2+ \dot{q}_1\dot{q}_2)(4-3\text{sen}^2q_2)^{½}+ (3w_1^2q_1^2\text{sen } q_2+ 4w_2^2q_1q_2).$$

$$.(4-3\text{sen}^2 q_2)^{½} - 2w_2^2\int g(q_2)q_2\text{sen } q_2\, dq_2.$$

La Lagrangiana tendrá que verificar la ecuación:

$$I = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1}\dot{q}_1 + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2}\dot{q}_2 - L$$

lo que sucede si:

$$L = (-½\dot{q}_2^2\text{sen } q_2+ \dot{q}_1\dot{q}_2)(4-3\text{sen}^2 q_2)^{½}+ (3w_1^2q_1^2\text{sen } q_2+ 4w_2^2q_1q_2).$$

$$.(4-3\text{sen}^2 q_2)^{½} + 2w_2^2\int g(q_2)q_2\text{sen } q_2\, dq_2.$$

3.3.- APENDICE: LAGRANGIANAS DE SEGUNDO ORDEN

En el apéndice correspondiente al capítulo anterior, dábamos las razones que nos habian llevado a abordar este tema en relación con la Universalidad del Problema Lagrangiano Inverso. En este apartado generalizaremos el teorema fundamental de los factores integrantes para n grados de libertad, al caso de Lagrangianas de segundo orden.

Entonces presentamos los elementos esenciales de la teoría para Lagrangianas de orden superior, que necesitábamos: las ecuaciones de Lagrange-Poisson asociadas a la Lagrangiana $L^*(q/\dot{q}/\ddot{q}/.../q^{(n};t)$ y la generalización del concepto y definiciones de momentos conjugados. En este apéndice nos remitiremos a lo dicho y seguiremos presuponiendo para L^* la dependencia funcional ya señalada. Teniendo esto en cuenta enunciamos la siguiente PROPOSICION:

PROPOSICION XXIV

Si las ecuaciones dinámicas $\ddot{q}_i=F_i(q/\dot{q},t)$ son equivalentes a las ecuaciones de Lagrange-Poisson correspondientes a una Lagrangiana de segundo orden cuya forma funcional sea del tipo:

$$L^*(q/\dot{q}/\ddot{q},t) = V_i(q,t)\ddot{q}_i + W(q/\dot{q},t)$$

las magnitudes

$$\lambda'_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial p_{i,1}}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial p_{i,2}}{\partial q_j} + \frac{\partial p_{j,1}}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial p_{j,2}}{\partial q_i}\right)$$

son soluciones del siguiente sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\frac{d\lambda_{ij}}{dt} + \frac{1}{2}\frac{\partial F_k}{\partial \dot{q}_j}\lambda_{ik} + \frac{1}{2}\frac{\partial F_k}{\partial \dot{q}_i}\lambda_{jk} = 0$$

Demostración

Recordemos que, en el caso general de Lagrangianas de segundo orden, las ecuaciones de Lagrange-Poisson asociadas a la Lagrangiana L^* se escriben de la forma:

$$-\frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{\partial L^*}{\partial \ddot{q}_i}\right) + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L^*}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L^*}{\partial q_i} = 0.$$

Teniendo en cuenta la dependencia funcional señalada para la Lagrangiana, las ecuaciones anteriores se podrán expresar:

$$-\frac{d^2V_i}{dt^2}+\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial W}{\partial \dot q_i}\right)-\frac{\partial V_k}{\partial q_i}\ddot q_k-\frac{\partial W}{\partial q_i}=0.$$

Desarrollando las derivadas y asociando convenientemente términos:

$$\left(\frac{\partial^2 W}{\partial \dot q_i\partial \dot q_k}-\frac{\partial V_i}{\partial q_k}-\frac{\partial V_k}{\partial q_i}\right)\ddot q_k-\frac{\partial^2 V_i}{\partial q_k\partial q_m}\dot q_k\dot q_m+\left(\frac{\partial^2 W}{\partial \dot q_i\partial q_k}-2\frac{\partial^2 Vi}{\partial q_k\partial t}\right)\dot q_k+$$

$$+\frac{\partial^2 W}{\partial \dot q_i\partial t}-\frac{\partial W}{\partial q_i}-\frac{\partial^2 V_i}{\partial t^2}=0.$$

Derivando parcialmente respecto de la velocidad generalizada $\dot q_j$ y, dado que a lo largo de la curva solución $\ddot q_i=F_i(q/\dot q,t)$,

$$\frac{\partial^3 W}{\partial \dot q_i\partial \dot q_j\partial \dot q_k}\ddot q_k+\frac{\partial}{\partial q_k}\left(\frac{\partial^2 W}{\partial \dot q_i\partial \dot q_j}-2\frac{\partial Vi}{\partial q_j}\right)\dot q_k+\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial^2 W}{\partial \dot q_i\partial \dot q_j}-2\frac{\partial V_i}{\partial q_j}\right)+$$

$$+\left(\frac{\partial^2 W}{\partial \dot q_i\partial \dot q_k}-\frac{\partial V_i}{\partial q_k}-\frac{\partial V_k}{\partial q_i}\right)\frac{\partial F_k}{\partial \dot q_j}+\frac{\partial^2 W}{\partial \dot q_i\partial q_j}-2\frac{\partial^2 W}{\partial \dot q_j\partial q_i}=0$$

que podemos escribir:

$$\frac{\partial}{\partial \dot q_k}\left(\frac{\partial^2 W}{\partial \dot q_i\partial \dot q_j}-\frac{\partial V_i}{\partial q_j}-\frac{\partial V_j}{\partial q_i}\right)\ddot q_k+\frac{\partial}{\partial q_k}\left(\frac{\partial^2 W}{\partial \dot q_i\partial \dot q_j}-\frac{\partial V_i}{\partial q_j}-\frac{\partial V_j}{\partial q_i}\right)\dot q_k+$$

$$+\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial^2 W}{\partial \dot q_i\partial \dot q_j}-\frac{\partial V_i}{\partial q_j}-\frac{\partial V_j}{\partial q_i}\right)+\left(\frac{\partial^2 W}{\partial \dot q_i\partial \dot q_k}-\frac{\partial V_i}{\partial q_k}-\frac{\partial V_k}{\partial q_i}\right)\frac{\partial F_k}{\partial \dot q_j}+$$

$$+\frac{\partial^2 V_j}{\partial q_i\partial q_k}\dot q_k-\frac{\partial^2 V_i}{\partial q_j\partial q_k}\dot q_k+\frac{\partial^2 V_j}{\partial q_i\partial t}-\frac{\partial^2 V_i}{\partial q_j\partial t}+\frac{\partial^2 W}{\partial \dot q_i\partial q_j}-\frac{\partial^2 W}{\partial q_i\partial \dot q_j}=0$$

y teniendo en cuenta lo que significa d/dt:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial^2 W}{\partial \dot q_i \partial \dot q_j} - \frac{\partial V_i}{\partial q_j} - \frac{\partial V_j}{\partial q_i}\right) + \left(\frac{\partial^2 W}{\partial \dot q_i \partial \dot q_k} - \frac{\partial V_i}{\partial q_k} - \frac{\partial V_k}{\partial q_i}\right)\frac{\partial F_k}{\partial \dot q_j} +$$

$$+ \frac{\partial^2 V_j}{\partial q_i \partial q_k}\dot q_k - \frac{\partial^2 V_i}{\partial q_j \partial q_k}\dot q_k + \frac{\partial^2 V_j}{\partial q_i \partial t} - \frac{\partial^2 V_i}{\partial q_j \partial t} + \frac{\partial^2 W}{\partial \dot q_i \partial q_j} - \frac{\partial^2 W}{\partial q_i \partial \dot q_j} = 0. \tag{XXIV.1}$$

Ahora bien, recordando las definiciones de los momentos conjugados generalizados, dadas en el apéndice del capítulo anterior, para cada grado de libertad, en este caso, tendremos:

$$p_{i,1} = \frac{\partial W}{\partial \dot q_i} - \frac{\partial V_i}{\partial q_k}\dot q_k - \frac{\partial V_i}{\partial t}; \qquad p_{i,2} = V_i$$

con lo cual las expresiones que hemos denominado en esta sección λ'_{ij}, se escribirán:

$$\lambda'_{ij} = \frac{\partial^2 W}{\partial \dot q_i \partial \dot q_j} - \frac{\partial V_i}{\partial q_j} - \frac{\partial V_j}{\partial q_i};$$

y en consecuencia, la ecuación [XXIV.1], se podrá expresar de la forma:

$$\frac{d\lambda'_{ij}}{dt} + \frac{\partial F_k}{\partial \dot q_j}\lambda'_{ik} + \frac{\partial^2 V_j}{\partial q_i \partial q_k}\dot q_k - \frac{\partial^2 V_i}{\partial q_j \partial q_k}\dot q_k + \frac{\partial^2 V_j}{\partial q_i \partial t} - \frac{\partial^2 V_i}{\partial q_j \partial t} +$$

$$+ \frac{\partial^2 W}{\partial \dot q_i \partial q_j} - \frac{\partial^2 W}{\partial q_i \partial \dot q_j} = 0.$$

Observando que $\lambda'_{ij}=\lambda'_{ji}$, la ecuación anterior, para el elemento λ'_{ji}, tomará la forma:

$$\frac{d\lambda'_{ji}}{dt} + \frac{\partial F_k}{\partial \dot q_i}\lambda'_{jk} + \frac{\partial^2 V_i}{\partial q_j \partial q_k}\dot q_k - \frac{\partial^2 V_j}{\partial q_i \partial q_k}\dot q_k + \frac{\partial^2 V_i}{\partial q_j \partial t} - \frac{\partial^2 V_j}{\partial q_i \partial t} +$$

$$+ \frac{\partial^2 W}{\partial \dot q_j \partial q_i} - \frac{\partial^2 W}{\partial q_j \partial \dot q_i} = 0.$$

Sumando las dos últimas ecuaciones, finalmente, podremos escribir:

$$\frac{d\lambda'_{ij}}{dt} + \frac{1}{2}\frac{\partial F_k}{\partial \dot q_j}\lambda'_{ik} + \frac{1}{2}\frac{\partial F_k}{\partial \dot q_i}\lambda'_{jk} = 0$$

que prueba la tesis enunciada en la PROPOSICION.

3.4.- CONCLUSIONES DEL PROBLEMA MULTIDIMENSIONAL

Ya hemos señalado en otra parte de esta memoria que, mientras que la teoría general de existencia de las ecuaciones en derivadas parciales, permite establecer la Universaloidad del Problema Inverso unidimensional (teorema de Darboux), en el caso multidimensional esto no es posible, al ser sobredeterminado el sistema de ecuaciones en derivadas parciales para la incógnita L. Por tanto, ya desde su planteamiento, nacen las dificultades para la generalización, tanto del método como de los resultados, correspondientes al problema unidimensional. Teniendo en cuenta esto y la experiencia histórica de los trabajos de Douglas y los que le siguieron, para intentar esta generalización orientanuestro pasos hacia los sistemas de dos y tres grados de libertad, donde ya se presentan todos los problemas inherentes al caso multidimensional pero las dificultades operativas aún se pueden abordar con perspectivas favorables. No hemos incorporado a la memoria el análisis correspondiente a estos casos particulares, puesto que, a pesar de ser la clave para la generalización, consideramos que, una vez realizada ésta, los resultados logrados permiten la particularización inmediata.

Antes de sintetizar los resultados fundamentales alcanzados, deseamos señalar que el sistema diferencial que han de obedecer los factores integrantes coincide con el de Douglas [13]; aunque el método que nosotros hemos empleado para deducirlo, a nuestro juicio, es más sencillo y natural, ya que hemos tenido en cuenta desde el principio los conceptos tradicionales de la Mecánica Analítica. Por lo demás, el resto del tratamiento del Problema, consideramos que es original y lo resumimos en los siguientes puntos:

1.- Utilizando los conceptos y técnicas tradicionales de la Mecánica Analítica desde el principio, hemos deducido un sistema de ecuaciones diferenciales que han de verificar los factores integrantes, λ_{ij}, para permitir una descripción lagrangiana indirecta de un determinado sistema de ecuaciones de evolución newtonianas. El sistema coincide con el obtenido, de forma diferente, por otros investigadores, Douglas [13].

2.- Hemos establecido que la función:

$$G(q/\dot{q},t) = \Delta \exp\left(\int \Sigma_i \frac{\partial F_i}{\partial \dot{q}_i} dt\right)$$

es una constante de evolución para el sistema físico descrito por las ecuaciones newtonianas $\ddot{q}_i = F_i(q/\dot{q},t)$, siendo Δ el determinante de la matriz de factores que permiten la descripción lagrangiana del mismo.

3.- Bajo ciertas condiciones, y, teniendo en cuenta las ecuaciones diferenciales que han de verificar los factores integrantes, hemos establecido que las trazas de las sucesivas potencias de la matriz formada por éstos son constantes de evolución para las ecuaciones dinámicas newtonianas $\ddot{q}_i = F_i(q/\dot{q},t)$. Este resultado es análogo al teorema de las trazas que aparece en el problema de las Lagrangianas equivalentes y que últimamente ha suscitado bastante interés, [80-83].

4.- En la sección 3.1.1, utilizando el método de variación de constantes, condicionamos la existencia de solución del sistema diferencial de los factores integrantes, a la de otro sistema (ec. [XVIII.1]) en los factores auxiliares μ_{ij}, formalmente más sencillo; estableciendo que el determinante formado por dichos factores es una integral primera para el sistema [XVIII.1].

5.- Los resultados citados en el punto anterior nos permiten deducir condiciones suficientes para que la matriz de los λ_{ij} para un sistema newtoniano dado sea diagonal.

6.- Para los sistemas autónomos, que, por otra parte, son los más significativos en Física, construimos, a partir de los factores integrantes y de las derivadas de las funciones F_i respecto de las velocidades generalizadas, una función, $I(q/\dot{q})$, que es una integral primera para las ecuaciones dinámicas que describen la evolución del sistema, PROPOSICION XX.

7.- A través de la PROPOSICION XXI, también en el caso autónomo, establecemos la relación funcional entre la integral $I(q/\dot{q})$ y la Lagrangiana, que ha de describir el sistema, mediante una ecuación en derivadas parciales en la incógnita $L(q/\dot{q})$.

8.- Hemos elaborado un método sistemático, claro y eficaz para construir una descripción lagrangiana para un determinado sistema a partir de las ecuaciones newtonianas de evolución. En esencia, podríamos decir que reducimos el problema sobredeterminado original a otro, determinado, en el que la Lagrangiana viene definida por una única ecuación diferencial, una vez conocida la integral primera $I(q/\dot{q})$. Este método constituye, a nuestro juicio, el resultado fundamental de este capítulo, ya que ha sido lo que nos ha permitido sintetizar y dar consistencia al tratamiento, intentando poner al nivel de los sistemas conservativos los no hamiltonianos.

9.- Utilizando el teorema de Poincaré, encontramos que la expresión

$$J(t)=\int_{D_t} M(q/\dot{q})\,dq_1\ldots dq_n\,d\dot{q}_1\ldots d\dot{q}_n, \text{ con } M(q/\dot{q})=\exp\left(-\int\left(\Sigma_i \frac{\partial F_i}{\partial \dot{q}_i}\right)dt\right),$$

es un invariante integral relativo para el sistema adjunto asociado a las ecuaciones newtonianas de evolución $\ddot{q}_i=F_i(q/\ddot{q})$, siendo D_t un recinto del espacio $(q_1 \ldots q_n ; \dot{q}_1 \ldots \dot{q}_n)$, en general, variable con el tiempo.

10.- Las ecuaciones que definen la integral $I(q/\dot{q})$ nos han permitido expresar la derivada temporal de cualquier función dinámica, $G(q/\dot{q},t)$, mediante la estructura de los corchetes de Poisson, introduciendo así el álgebra a ellos asociada. En el caso de que las funciones F_i no dependan de las velocidades generalizadas se recupera la estructura correspondiente a los sistemas conservativos.

11.- En la sección 3.3 generalizamos el teorema fundamental al caso de Lagrangianas de segundo orden, encontrando que, como en el caso de un grado de libertad, si la Lagrangiana tuviera la estructura funcional $L^{*}=V_i(q,t)\ddot{q}_i+W(q/\dot{q},t)$, las expresiones:

$$\lambda'_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial p_{i,1}}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial p_{i,2}}{\partial q_j} + \frac{\partial p_{j,1}}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial p_{j,2}}{\partial q_i}\right)$$

han de ser soluciones del mismo sistema diferencial para Lagrangianas de primer orden.

12.- Con el fin de comprobar la eficacia del método, en la sección 3.4, hemos construido una descripción lagrangiana para algunos ejemplos de interés. Aunque unos aparecen sistemáticamente repetidos en la bibliografía del Problema Inverso, hay otros que hemos incorporado a partir de trabajos técnicos recientes donde se tratan utilizando otras técnicas.

REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS

4.- REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS

[1] HELMHOLTZ H. Journal für die reine und angewandte Mathematik Berlin, Vol. 100, pág. 137. 1887.

[2] MAYER A. Ber. d. k. Ges. d. Wiss. Leipzig, Math.-Phys. Cl., pág. 519. 1896.

[3] HIRSCH A. Über eine charakteristische Eigenschaft der Differentialgleichungen der Variationsrechnung. Mathematische Annalen, Vol. 49, pág. 49. 1897.

[4] BOHEM K. Journal für die reine und angewandte Mathematik Berlin, Vol. 121, pág. 124. 1900.

[5] KöNISBERGER L. Die Principien der Mechanik, Ed. Teubner, Leipzig. 1901.

[6] HAMEL G. Über die Geometrien in denen die Geraden die Kürzesten sind. Mathematische Annalen, Vol. 57, pág. 231. 1903.

[7] KURSHAK J. Über eine charakteristische Eigenschaft der Differentialgleichungen der Variationsrechnung. Mathematische Annalen, Vol. 60, pág. 157. 1905.

[8] DARBOUX G. Leçons sur la Teorie General des Surfaces, III Partie, Gautier-Villars, París. 1894.

[9] DAVIS D. R. The Inverse Problem of the calculus of variations in higher space. Transactions of the American Mathematical Society, Vol. 30, pág. 710. 1928.

[10] DAVIS D. R. The Inverse Problem of the calculus of variations in a space of (n+1) dimensions. Bulletin of the American Mathematical Society, Vol. 35, pág. 371. 1929.

[11] DAVIS D. R. Integrals whose extremals are a given 2n-parameter family of curves. Transactions of the American Mathematical Society, Vol. 33, pág. 244. 1931.

[12] BATEMAN H. On the dissipative systems and related variational principles. Physical Review, Vol. 38, pág. 815. 1931.

[13] DOUGLAS J. Solution of the Inverse Problem of the calculus of variations. Transactions of the American Mathematical Society, Vol. 50, pág. 71. 1941.

[14] CALDIROLA P. Force non conservative nella mecanica cuantistica. Il Nuovo Cimento, V. 18, pág. 393. 1941.

[15] CALDIROLA P. y LUGIATO L. A. Connection between the Shrödinger equation for dissipative systems and the master equation. Physica, Vol. 116A, pág. 248. 1982.

[16] CALDIROLA P. Quantum theory of nonconservative systems. Il Nuovo Cimento, Vol. 77B, pág. 241. 1983.

[17] DEDECKER P. Sur une méthode de Bateman dans le Problème Inverse du calcul des variations. Bulletin du Acad. Royal Belg., Clas. Sc., Vol. 35, pág. 774. 1949.

[18] DEDECKER P. Sur un Problème Inverse du calcul des variations. Bulletin du Acad. Royal Belg., Clas. Sc., Vol. 36, pág. 63. 1950.

[19] HAVAS P. The range of application of the Lagrange formalism-I. Suppl. Nuovo Cimento, Vol. 5, pág. 363. 1957.

[20] HAVAS P. On the range of application of the Lagrange and Hamilton formalism. Physical Review, Vol. 83, pág. 224. 1951.

[21] HAVAS P. Generalized Lagrange formalism and cuantization rules. Bulletin of the American Physical Society, Vol. 1, pág. 337. 1956.

[22] KLEIN J. Espaces Variationnels et Mécanique, Annales du Institut Fourier, Grenoble, 12. 1962.

[23] VAINBERG M. M. Variational Methods for the Study of Nonlinear Operators, Holden&Day, San Francisco. 1964.

[24] TONTI E. Variational Principles, Tamburini, Milán. 1968

[25] ATHERTON R. W. y HOMSEY G. W. Stud. Applied Mathematics, Vol. 54, pág. 31 1975.

[26] VANDERBHAUWHEDE A.L. Hadronic Journal, Vol. 1, pág. 1177. 1978.

[27] VANDERBHAUWHEDE A.L. Hadronic Journal, Vol. 2, pág. 620. 1979.

[28] EDELEN D. G. B. Nonlocal Variations and Local Invariance of Fields, American Elsevier, New York. 1979.

[29] EDELEN D. G. B. Lagrangian Mechanics of Nonconservative Non Holonomic Systems, Noordoff, Leden. 1977.

[30] HORNDESKI G. W. Differential operators associated with the Euler-Lagrange operator. Tensor, New Ser., Vol. 28, pág. 303. 1974.

[31] HORNDESKI G. W. Divergence-free third order tensorial concomitants of a pseudo-riemannian metric. Tensor, New Ser., Vol. 29, pág. 21. 1975.

[32] ALLOCK G. R. The intrinsic properties of rank and nullity of the Lagrange braquet in the one dimensional calculus of variations. Philos. Trans. Roy. Soc. London, A. Math. Phys. Sc. Vol 279, pág. 487. 1975.

[33] SANTILLI R. M. Necesary and sufficient conditions for the existence of a Lagrangian in field theory-I Variational approach to selfadjointness for tensorial field equations. Annals of Physics, Vol. 103, pág. 354. 1977.

[34] SANTILLI R. M. Necesary and sufficient conditions for the existence of a Lagrangian in field theory-II. Direct analytic representations of tensorial field equations. Annals of Physics, Vol. 103, pág. 409. 1977.

[35] SANTILLI R. M. Necesary and sufficient conditions for the existence of a Lagrangian in field theory-III. Generalized analytic representations of tensorial field equations. Annals of Physics, Vol. 105, pág. 227. 1977.

[36] SANTILLI R. M. Foundations of Theoretical Mechanics I. The Inverse Problem in Newtonian Mechanics, Springer-Verlag, New York 1978.

[37] KOBUSSEN J. A. Hadronic Journal, Vol. 2, pág. 321. 1979.

[38] CURRIE D. G. y SALETAN E. J. q-Equivalent particle Hamiltonians.-I. The classical one-dimensional case. Journal of Mathematical Physics, Vol. 7, p. 967. 1966.

[39] SARLET W. Journal Physics A: Mat. Gen. Vol. 14, pág. 2227. 1981

[40] GELMAN Y. y SALETAN E. J. q-Equivalent particle Hamiltonians.-II. The two-dimensional clasical oscillator. Il Nuovo Cimento, Vol. 18B, pág. 53. 1973.

[41] HOJMAN S. y HARLESTON H. Equivalent Lagrangians:multidimensional case. Journal of Mathematical Physics, Vol.22 pág. 1414. 1981.

[42] MARMO G. y SALETAN E. J. q-Equivalent particle Hamiltonians.- III. The two-dimensional quantum oscillator. Hadronic Journal, Vol. 1, pág. 955. 1978.

[43] HOJMAN S. y MONTEMAYOR R. s-Equivalent Lagrangians for free particles and canonical cuantization. Hadronic Journal, Vol. 3, pág. 1644. 1980.

[44] ANTONINI P., MARMO G. y RUBANO C. Alternative Lagrangians and complete integrability: some remarks. Il Nuovo Cimento, Vol. 86B, pág. 17. 1985.

[45] HENNEAUX M. Equations of motion, commutation relations and ambiguities in the lagrangian formalism Annals of Physics, Vol. 140, pág. 45. 1982.

[46] SARLET W. The Helmholtz conditions revisited. A new approach to the Inverse Problem of lagrangian dinamics. Journal Physics A: Mat. Gen. Vol. 15, pág. 1503. 1982

[47] SARLET W., ENGELS E. y BAHAR L. Y. International Journal Engenering Sciences, Vol. 20, pág. 55. 1982.

[48] SALAZAR J. J. y SPAVIERI G. — Classical derivation of the commutation relations, Heisemberg's principle and canonical quantization rules in stochastic mechanics. Il Nuovo Cimen., V. 92B, p. 157. 1986

[49] FONTE G. — On the theory of variational principles in quantum mechanics. Il Nuovo Cimento, Vol. 94B, pág. 149. 1986.

[50] BRITTIN E. W. — A note on the quantization of dissipative systems. Phys. Rev.,Vol. 77, pág. 396.1950.

[51] SENITZKY I. R. — Dissipation in quantum mechanics. The harmonic oscillator. Physical Review, Vol. 119 pág. 670. 1960.

[52] DEKKER H. — Quantization of the linearly damped harmonic oscillator. Physical Review A, Vol. 16, pág. 2126. 1977.

[53] DEKKER H. — Classical and quantum mechanics of the damped harmonic oscillator. Physics Reports (Review Section of Physics Letters), Vol 80 N° 1. 1981.

[54] MESSER J. — Friction in quantum mechanics. Acta Physica Austriaca, Vol. 50, pág. 75. 1979.

[55] RAY J. R. — Lagrangians and systems they describe-how not to treat dissipation in quantum mechanics. American Journal Physics, Vol. 47, pág. 626. 1979

[56] BASSETTI B., MONTALDI E., y RACITI M. — Propagators for time-dependent linear and quadratic potencials and inverse Weierstrass transform. Physics Letters, Vol. 90A, pág. 333. 1982.

[57] BASSETTI B., MONTALDI E., y RACITI M. — Some remarks on the time-dependent harmonic oscillator. Lettere al Nuovo Cimento, Vol. 33, pág. 469. 1982.

[58] JANNUSSIS A. y SKURAS E. — Harmonic oscillator with complex frecuency. Il Nuovo Cimento, Vol. 94B, pág. 29. 1986.

[59] JANNUSSIS A. y PAPATHEOU V. — Extensión of de Caldirola procedure in the space. Il Nuovo Cimento, Vol. 85B, pág. 17. 1985.

[60] KOLEGRAVE R. K. KHEYRABADY E. — Dissipation of energy in the damped harmonic oscillator. Physical Review D, Vol. 34, pág. 3634. 1986.

[61] ABDALLA S., KOLEGRAVE R.K., KHOSRAVI A. — The pulsating harmonic oscillator. Il Nuovo Cimento, Vol. 93B, pág. 195. 1986.

[62] ABDALLA S. — Time-dependent harmonic oscillator with variable mass under the action of a driving force. Physical Review A, Vol. 34, p. 4598. 1986.

[63] STUCKENS C. y KOBE D. H. — Quantization of a particle with a force cuadratic in the velocity. Physical Review A, Vol. 34, pág. 3565. 1986.

[64] SONA P. G. — On the lagrangian and hamiltonian formalism for non conservative forces. Energia Nucleare, Vol. 13, pág. 318. 1966.

[65] LEMOS N. A. — Note on the lagrangian description of dissipative systems. American Journal Physics, Vol. 49, pág. 1181. 1981

[66] HOJMAN R., HOJMAN S. y SHEINBAUM J. — Shortcut for for constructing any Lagrangian from its equations of motion. Physical Review D, Vol. 28, pág. 1333. 1983.

[67] HOJMAN S. y SHEPLEY L. C. — Equivalent Lagrangians in classical field theory. Found. Phys., Vol. 16, p. 465. 1986

[68] HAVAS P. — The connection between conservation laws and invariance groups: folklore, fiction, and fact. Acta Physica Austriaca, Vol. 38, pág. 145. 1973.

[69] SARLET W.-CANTRIJN F. Hadronic Journal, Vol. 1, pág. 101. 1978.

[70] SARLET W. — Hadronic Journal, Vol. 2, pág. 407. 1979.

[71] HOJMAN S. y URRUTIA L. F. — On the Inverse Problem of the calculus of variations. Journal of Mathematical Physics Vol. 22, pág. 1896. 1981.

[72] HOJMAN S. y GOMEZ J. — First-order equivalent Lagrangians and conservation laws. Journal of Mathemat. Phys., Vol. 25, pág. 1776. 1984.

[73] HOJMAN S. y ZERTUCHE F. — s-Equivalence and symmetries of first-order differential systems. Il Nuovo Cimento, Vol. 88B, pág. 1. 1985.

[74] HOJMAN S. — The Inverse Problem of the calculus of variations. A SIRLAG Simposium on Gravity, Gauge Theories and Supergravity. Caracas, Venezuela. 1984.

[75] SANTILLI R. M. — Foundations of Theoretical Mechanics II. Birkhoffian Generalization of Hamilton Me chanics, Springer-Verlag. New York. 1983.

[76] BIRKHOFF G. D. — Dinamical Systems. American Mathematics Society College Publishers, Providence, RI, Vol. IX. 1927

[77] GARABEDIAN P. R. — Partial Differential Equations, Wiley&Sons, New York. 1969.

[78] LIE S. — Volesungen uber Differentialgleichungen, Teubner. Leipzig. 1891.

[79] LIE S. — Theorie der Transformationsgruppen, Teubner Leipzig. 1893.

[80] TAPIA V. — Constrained generalized mechanics. The second order case. Il Nuovo Cimento, Vol. 90B pág. 15. 1985.

[81] NEGRI L. J. y DA SILVA E. G. — s-Equivalence Lagrangians in generalized mechanics. Physical Review D, Vol. 33, pág. 2227. 1986.

[82] JAEN X., LLOSA J. y MOLINA A. — A reduction for order two for infinite-order Lagrangians. Physical Review D, Vol. 34 pág. 2302. 1986

[83] HOJMAN R. y ZANELLI J. — An acceleration-dependent Lagrangian proof of the conserved traces' theorem. Il Nuovo Cimento, Vol. 94B, pág. 87. 1986.

[84] OSTROGRADSKY M. — Mem. Acad. St. Petersburg. Vol. 6, pág. 385 1850.

[85] WHITTAKER E. T. — Treatise on the Analytical Dinamics of Particles and Rigid Bodies, Cambridge. 1959.

[86] CONSTANTELOS G. C. Integral of motion for Lagrangians including higher-order derivatives. Il Nuovo Cimento, Vol. 21B, pág. 279. 1974.

[87] CONSTANTELOS G. C. On the Hamilton-Hacobi theory with derivatives of higher order. Il Nuovo Cimento, Vol. 84B, pág. 91. 1984.

[88] VELAZQUEZ A. C. Formas reciprocas del principio de Hamilon. Tesis doctoral. Facultad de Ciencias Físicas, Universidad de Sevilla. 1982.

[89] DENIS-PAPIN M. y KAUFMANN A. Curso de Cálculo Matricial Aplicado. Urmo, S.A. de ediciones. Bilbao. 1975.

[90] BELLMAN R. Introducción al análisis matricial, Reverté. Barcelona. 1965.

[91] RODRIGUEZ VIDAL R. Ecuaciones Diferenciales y Temas Afines. Ed. Vicens Vives, I ed. Barcelona. 1972.

[92] HENDRICKS S. L. The effect of viscoelasticity on the vibration of a rotor. Transactions of the ASME, Journal of Applied Mechanics. Vol. 53, pág. 235. 1986.

[93] PISOT C.-ZAMANSKY M. Matemáticas Generales. Algebra. Análisis. Montaner y Simón. Barcelona. 1966.

[94] MORRIS M. y BROWN O. E. Ecuaciones Diferenciales. II edición. Ed. Aguilar. Madrid. 1964.

[95] CARTAN ÉLIE Leçons sur les Invariants Integraux. Ed. Hermann. III ed. París. 1971.

[96] NAYFEH A. H. y MOOK D. T. Nonlinear Oscillations. John Wiley & Sons, New York. 1979.

[97] HUREWICZ W. Sobre Ecuaciones Diferenciales Ordinarias. Ed. Rialp. Madrid. 1966.

[98] PUIG ADAM P. Curso Teórico Práctico de Ecuaciones Diferenciales Aplicado a la Física y Técnica. X ed. Biblioteca Matemática. Madrid. 1967.

[99] DOU A. Ecuaciones en Derivadas Parciales. Ed. Dossat. 1970.

[100] LELONG-FERRAND J. Gemetrie Différentielle. Masson et Cie., éditeurs, París. 1963.

[101] SOMMERELD A. Partial Differential Equations. Academic Press, New York. 1967.

[102] LAGRANGE J. L. Mécanique Analitique. Tomos I y II. Librairie Scientifique et Technique Albert Blanchard, París. 1965.

[103] LEECH J. W. éLéments de Mécanique analytique. Dunod, París. 1961.

[104] GANTMACHER F. Lectures in Analitical Mechanics. Ed. Mir, Moscú. 1975.

[105] GOLDSTEIN H. Mecánica Clásica. Ed. Aguilar, Madrid. 1963

[106] IÑIGUEZ J. y CID R. Mecánica teórica. Tomos I y II. Ed. Dossat, Madrid. 1965.

[107] FINLAYSON B. A. The Method of Weighted Residuals and Variational Principles, with Aplication in Fluid Mechanics, Heat and Mass Transfer. Academic Press, New York. 1972.

[108] COURANT R. y HILBERT D. Methods of Mathematical Physics, T. I y II. Interscience Publishers, New York. 1953.

[109] MERCIER A. Variational Principles in Phisics. Dover Publications, New York. 1963.

[110] CARTAN H. Calcul Différentiel. Hermann, París. 1967.

[111] CARTAN H. Formes Différentielles. Hermann, París. 1967.

[112] ARNOLD V. Méthodes Mathématiques de la Mécanique Classique. Ed. Mir, Moscou. 1974.

[113] GOBILLON C. Géométrie différentielle et Mécanique Analytique. Hermann, París. 1969.

[114] SOMMERFELD A. Mechanics. Academic Press, New York. 1952.

[115] MOISEIWITSCH B. L. Variational Principles. Interscience Publishers, London. 1966.

[116] PARS. L. A. A treatise on Analytical Dynamics. Heinemann, London. 1964

[117] ABRAHAM R. y MARSDEN J. A. Foundations of Mechanics. Benjamin, Reading Massachusset. 1978.

[118] ARTHURS A. M. Complementary Variational Principles. Clarendon Press. 1980.

[119] EKELAND I. TEMAM R. Convex Analysis and Variational Problems. North-Holland, Amsterdam. 1976.

[120] LANCZOS C. The Variational Principles of Mechanics. University of Toronto Press. 1970.

[121] MORSE-FESHBACH Methods of Theoretical Physics. Mc Graw Hill, New York. 1962.

[122] MORREY C. H. B. Multiple Integrals in the Calculus of Variations. Springer Verlag, Berlín. 1966.

[123] KRASNOV M., MAKARENKO G. y KISELIOV A. Cálculo Variacional (ejemplos y problemas). Ed. Mir. Moscú. 1976.