UNIVERSIDAD DE SEVILLA

FACULTAD DE MATEMÁTICAS

DEPARTAMENTO DE ESTADÍSTICA E INVESTIGACIÓN OPERATIVA

PROBLEMA VARIACIONAL MÚLTIPLE

TESIS PRESENTADA POR
D. Manuel Arana Jiménez
PARA OPTAR AL GRADO DE DOCTOR
POR LA UNIVERSIDAD DE SEVILLA.
Sevilla, Marzo de 2003

TESIS DIRIGIDA POR:

Prof. Dr. D. Antonio Rufián Lizana

Prof. Dr. D. Gabriel Ruiz Garzón

TESIS DOCTORAL

PROBLEMA VARIACIONAL MÚLTIPLE

Agradezco
la sincera dedicación a este trabajo de Antonio, Gabriel y Rafaela,
el ánimo recibido de mis amigos y, en especial, de mi familia,
y el incondicional apoyo de Gracia.

A Gracia y María

Índice

INTRODUCCIÓN

En nuestra realidad cotidiana es frecuente encontrar situaciones donde necesitemos tomar decisiones. Éstas son, en ocasiones, fáciles de tomar cuando el objetivo que perseguimos es único y se traduce en ser el más barato, el que tarda menos tiempo, el de mayor tonelaje, el de menor consumo de combustible, etc. En este caso, podemos estar ante un problema escalar de programación matemática con la siguiente formulación:

$$\text{(P)} \qquad \begin{array}{l} \text{Minimiza } \theta(x) \\ \text{sujeto a:} \end{array}$$

$$x \in D \subseteq R^n$$

con $\theta : D \subseteq R^n \to R$. Se dice que $\bar{x}$ factible es una solución de (P) si $\theta(\bar{x}) \leq \theta(x)$, para todo $x \in D$.

Cuando la decisión se debe tomar con varios objetivos, no resulta tan evidente hallar soluciones al problema. De hecho, el concepto de "lo mejor" puede no tener sentido. Es aquí donde la programación matemática inicia una nueva línea en el estudio de problemas de optimización con funciones multiobjetivos. El problema a estudiar suele presentarse bajo la siguiente forma:

$$\text{(PM)} \qquad \begin{array}{l} \text{Minimiza } f(x) = (f_1(x), \dots, f_p(x)) \\ \text{sujeto a:} \end{array}$$

$$x \in S \subseteq R^n$$

con $f : S \subseteq R^n \to R^p$.

Diferentes conceptos sobre qué entendemos por solución del Problema de programación multiobjetivo (PM) fueron apareciendo, como es el caso de solución eficiente, solución propiamente eficiente, solución débilmente eficiente, etc. Y del mismo modo, se han ido aportando numerosas condiciones sobre las posibles soluciones; así como diversas estrategias para resolver estos problemas.

También fueron otros los problemas de optimización que fueron apareciendo en la literatura matemática. Algunos de ellos fueron tomando formas específicas, cuyo estudio era demandado para resolver problemas reales, y donde una solución al problema no es un punto de R^n, sino una función. Éste puede ser el caso de los problemas variacionales. Tradicionalmente, 1696 puede considerarse el punto de inicio del cálculo de variaciones, basándose en el problema de 'brachistochrone' [1] que Johann Bernoulli propuso y que él mismo resolvió: Determinar el camino a lo largo del cual un cuerpo M que se mueve desde un punto A bajo la acción de su propia gravedad alcanza un punto B en el tiempo más corto. Éste y otros problemas similares se resolvieron por métodos geométricos. Para buscar métodos analíticos, y así generalizar su estudio, hubo que darles forma. La forma del problema más simple del cálculo de variaciones es la siguiente:

$$
\begin{array}{lc}
\text{(PS)} & \text{Minimiza } \displaystyle\int_a^b \theta(t, x, \dot{x})dt \\
 & \text{sujeto a:} \\
 & x(a) = \alpha, \quad x(b) = \beta \\
 & x \in X
\end{array}
$$

donde $a, b, \alpha, \beta, \in R$; $X = C^1([a, b], R^n)$ es el espacio de las funciones continuamente diferenciables $x(\cdot) = (x_1(\cdot), \ldots, x_n(\cdot))$ y $\dot{x}$ su derivada. Y se suele exigir que $\theta : R \times R^n \times R^n \to R$ sea una función continuamente diferenciable. (PS) es un problema variacional sin más restricciones que las de contorno

$(x(a) = \alpha, \quad x(b) = \beta)$.

Como podemos ver en la literatura reciente [1],[21],[19],[58] los problemas variacionales tienen gran importancia, entre otros, en el desarrollo y aplicaciones científicas y tecnológicas: aeronáutica, electricidad y magnetismo, cinemática, estimación de funciones, teoría de juegos, etc. Es por ello, que los avances que se produzcan en el estudio de los problemas variacionales contribuirán a dotar de más utilidad esta herramienta.

En el presente trabajo vamos a centrarnos fundamentalmente en los problemas variacionales bajo la forma:

$$\text{(PV)} \qquad \text{Minimiza } \int_a^b \theta(t, x, \dot{x})dt$$
$$\text{sujeto a:}$$
$$x(a) = \alpha, \quad x(b) = \beta$$
$$x \in W \subseteq X$$

para el caso de problema variacional escalar, donde W representa un conjunto de restricciones que iremos presentando; y $X = C([a,b], R^n)$ es un espacio de funciones continuas no necesariamente diferenciable en todos sus puntos. $\theta : R \times R^n \times R^n \rightarrow R$ es una función continuamente diferenciable. Se dice que $\bar{x}$ factible es solución de (PV) si $\int_a^b \theta(t, \bar{x}, \dot{\bar{x}})dt \leq \int_a^b \theta(t, x, \dot{x})dt$ para todo $x \in W$.

Y por otro lado, el problema variacional multiobjetivo definido por

$$\text{(PVM)} \qquad \text{Minimiza } \int_a^b f(t, x, \dot{x})dt = \int_a^b (f_1(t, x, \dot{x}), \ldots, f_p(t, x, \dot{x}))dt$$
$$\text{sujeto a:}$$
$$x(a) = \alpha, \quad x(b) = \beta$$
$$x \in W \subseteq X$$

donde, al igual que en (PV), W representa un conjunto de restricciones que presentaremos más adelante; y $X = C([a,b], R^n)$ es un espacio de funciones continuas no necesariamente diferenciable en todos sus puntos. $f = (f_1, \ldots, f_p) : R \times R^n \times R^n \rightarrow R^p$ es una función continuamente diferenciable. Como conceptos de solución al problema (PVM) nos centraremos en el de eficiencia y el de eficiencia débil.

Los problemas variacionales ((PV) y (PVM)) pueden considerarse como una generalización o un paso más en el estudio de los problemas de programación matemática ((P) y (PM), respectivamente). En éstos, ya no estudiamos puntos de R^n como soluciones a un problema, sino que el problema necesita de una función como solución. En el caso estático de los problemas variacionales, comprobamos que efectivamente (P) y (PM) son casos particulares de (PV) y (PVM), respectivamente. Entramos pues en un problema más complejo, en cuanto que va más allá; pasa de buscar puntos a buscar funciones.

En el capítulo 1, vamos a abordar el estudio de las soluciones eficientes y débilmente eficientes para un problema de programación multiobjetivo (PM). Es evidente la importancia del estudio de (PM) por el problema en sí mismo, y además en cuanto a que nos ofrece pistas para el estudio de (PVM). El problema (PM) ha sido largamente abordado en la literatura matemática reciente, en particular para soluciones eficientes y débilmente eficientes. En este capítulo vamos a generalizar al caso multiobjetivo la clase de funciones KT-invex que introdujo Martin [32] para el caso escalar, así como el resultado establecido por Martin y por el que la clase KT-invex queda caracterizada por que todo punto de ensilladura de Kuhn-Tucker es solución óptima, aplicado a un problema escalar con restricciones de la forma (P). Para el caso débilmente eficiente, recientemente Osuna, Rufián y Ruiz [46], y Osuna, Beato y Rufián [45] han introducido nuevas clases de funciones que generalizan la clase KT-invex al caso multiobjetivo, y para las que se cumple que todo punto de ensilladura de Kuhn-Tucker es solución débilmente eficiente para (PM), y que a su vez caracteriza a estas clases de funciones. Avanzamos en el estudio de las soluciones débilmente eficientes desde la condición de optimalidad de punto de ensilladura de Fritz-John, para lo que introducimos una nueva clase de funciones y que probamos que queda caracterizada por que todo punto de ensilladura de Fritz-John es solución débilmente eficiente para el problema de programación matemática multiobjetivo. Para el caso de soluciones eficientes de un problema multiobjetivo con restricciones, generalizamos la clase de funciones KT-invex mediante la introducción de una nueva clase de funciones, y establecemos que queda caracterizada por que todo punto de ensilladura de Kuhn-Tucker es solución eficiente, por lo que generalizamos el resultado establecido por Martin, y que supone una novedad y mejora de los resultados existentes en el estudio de la eficiencia. Similares resultados establecemos en el estudio de las soluciones eficientes desde la condición de optimalidad de Fritz-John, para lo que introducimos una nueva clase de funciones que queda caracterizada por que todo punto de ensilladura de Fritz-John es solución eficiente. Proponemos problemas duales del tipo Mond-Weir, y establecemos resultados de dualidad débil, fuerte e inversa tanto en el estudio de las soluciones débilmete eficientes como en el de soluciones eficientes, empleando en dicho estudio las nuevas clases de funciones, y probamos, por tanto, que son éstas las clases de funciones llamadas en el estudio de la dualidad.

En el capítulo 2 abordamos el problema variacional escalar con restricciones (PV). Extendemos los resultados obtenidos para los problemas escalares de programación matemática, como los aportados por Martin [32], a los problemas variacionales. Y para ello, hemos mejorado los resultados existentes para los problemas variacionales escalares, en cuanto que hemos aportado clases de funciones nuevas que quedan caracterizadas por ser aquellas para las que todo punto crítico es solución al problema variacional (PV). Y ello, desde la condición de optimalidad de punto crítico de Kuhn-Tucker o de Fritz-John. En la sección correspondiente al caso estático probamos que la clase KT-invex introducida por Martin, así como las condiciones de optimalidad de Kuhn-Tuker y Fritz-John utilizadas en los problemas escalares de programación matemática y los resultados de optimalidad obtenidos son en realidad un caso particular de las nuevas clases que hemos introducido, de las condiciones de Kuhn-Tucker y Fritz-John y de los resultados que aportamos para los problemas variacionales escalares. Por otro lado, establecemos resultados de dualidad débil, fuerte e inversa, y probamos que tanto los problemas duales que presentamos, como los resultados obtenidos con éstos, generalizan los ya existentes en programación matemática escalar.

En el capítulo 3 nos centramos en el estudio de la eficiencia débil. Para ello, presentamos nuevas condiciones de optimalidad, y que denominamos de ensilladura débil. Probamos que esta nueva condición es necesaria para que un punto sea solución débilmente eficiente. Ante esta novedad, aportamos un ejemplo para constatar que existen puntos de ensilladura débil que no son puntos débilmente eficientes para nuestro problema. Introducimos una nueva clase de funciones, que relacionamos con las anteriores. Probamos que para que un punto de ensilladura débil sea solución débilmente eficiente es necesario y suficiente que la función del problema pertenezca a esta nueva clase de funciones. Con ello, logramos dar respuesta en términos de caracterización a la búsqueda de condiciones sobre las soluciones débilmente eficientes. En la sección correspondiente al caso estático, mostramos que en realidad la nueva clase de funciones, así como las condiciones de optimalidad, generalizan a clases de funciones y condiciones de optimalidad, respectivamente, ya existentes en la programación matemática multiobjetivo presentadas por Osuna, Rufián y Ruiz [46] y mostradas en el primer capítulo.

En el capítulo 4 estudiamos el problema variacional múltiple (PVM) con restricciones en la búsqueda de soluciones eficientes. Damos respuesta en términos de condiciones necesarias y suficientes para que un punto de ensilladura sea solución eficiente de (PVM). Introducimos dos nuevas clases de funciones, que suponen dar un nuevo paso y mejorar a los resultdos ya existentes, ya que probamos que estas clases quedan caracterizadas por que todo punto de ensilladura de Kuhn-Tucker y todo punto de ensilladura de Fritz-John son soluciones eficientes del problema variacional multiobjetivo con restricciones (PVM), respectivamente. En la sección correspondiente al caso estático, mostramos que el estudio de soluciones eficientes para un problema variacional multiobjetivo generaliza el que realizamos sobre soluciones eficientes para problemas multiobjetivo de programación matemática en el primer capítulo, es decir, que tanto las nuevas clases de funciones que introducimos en este capítulo, como los resultados sobre sus caracterizaciones son una generalización a los problemas variacionales de los que obtuvimos para problemas de programación matemática. Proponemos dos problemas duales a nuestro problema variacional multiobjetivo y establecemos resultados de dualidad débil, fuerte e inversa, con cada respectivo problema dual. Y constatamos que los resultados obtenidos en este estudio de la dualidad, con soluciones eficientes, extienden y generalizan los resultados para los problemas de programación matemática multiobjetivo, aportados en el primer capítulo.

Capítulo 1

PROBLEMA MULTIOBJETIVO. EICIENCIA. EFICIENCIA DÉBIL

1.1 Preliminares

La búsqueda de condiciones sobre las soluciones de problemas de programación no lineal, ha pasado por el estudio de las propiedades de las funciones que intervienen. Consideremos el siguiente problema escalar:

$$
\begin{array}{ll}
(P) & \text{Minimiza } \theta(x) \\
& \text{sujeto a:} \\
& x \in S \subseteq R^n
\end{array}
$$

con $\theta : S \subseteq R^n \to R$ diferenciable. Se dice que $\bar{x} \in S$ es solución de (P) si para cualquier otro punto x factible, es decir, $x \in S$, se verifica

$$\theta(\bar{x}) \leq \theta(x)$$

Como condición necesaria de optimalidad en el caso de diferenciabilidad, se tiene que si $\bar{x}$ es solución, es decir, un mínimo global, entonces $\bar{x}$ es un punto estacionario, es decir,

$$\nabla\theta(\bar{x}) = 0$$

El siguiente paso fue buscar clases de funciones a las que pertenezca θ, de manera que la condición de optimalidad de $\bar{x}$ punto estacionario para θ implique necesariamente que $\bar{x}$ es solución de (P). Numerosas clases de funciones fueron apareciendo en la literatura y que verificaban esta condición, como pudo ser la clase de funciones convexas (Fenchel [20], Valentine [57], Berge-Ghouila Houri [7]) importantísima dentro de la programación matemática. Fueron apareciendo otras clases que extendían a las convexas, como pudo ser las pseudoconvexas (Tuy [55] y Mangasarian [31]).

DEFINICIÓN 1.1 *Sea $S \subseteq R^n$ abierto no vacío, $\theta : S \subseteq R^n \to R$, con θ diferenciable. Diremos que θ es pseudoconvexa si para todo $x, \bar{x} \in S$ se verifica*

$$\nabla\theta(\bar{x})(x - \bar{x}) \geq 0 \Rightarrow \theta(x) \geq \theta(\bar{x})$$

De la definición anterior se deduce fácilmente que si $\bar{x}$ es un punto estacionario de θ, entonces $\bar{x}$ es un mínimo global, es decir, solución óptima de (P). Pero fue la introducción de las funciones invex la que supuso un nuevo gran paso.

DEFINICIÓN 1.2 *Sea $S \subseteq R^n$ abierto no vacío, $\theta : S \subseteq R^n \to R$, con θ diferenciable. Diremos que θ es invex si existe una función $\eta : R^n \times R^n \to R^n$ tal que*

$$\theta(x) - \theta(\bar{x}) \geq \nabla\theta(\bar{x})\eta(x, \bar{x}) \qquad \forall x, \bar{x} \in S \tag{1.1}$$

Con la introducción del concepto de función invex, por Craven [14] y Hanson [25], se probó la equivalencia entre solución de un problema escalar y punto estacionario; y además, esto mismo caracteriza a las funciones invex [6], como queda reflejado en el siguiente resultado:

TEOREMA 1.1 *La función θ es invex si y sólo si todo punto estacionario $\bar{x}$ es solución óptima de (P).*

Por comodidad, vamos a definir y utilizar los siguientes símbolos de igualdad y desigualdad entre puntos de R^n, quedando éstos definidos tal como sigue, y que mantendremos en adelante. Dados dos puntos $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, \ldots, y_n) \in R^n$, diremos:

$$\begin{array}{lll}
x = y & \Leftrightarrow & x_i = y_i, \quad \forall i = 1, \ldots, n. \\
x < y & \Leftrightarrow & x_i < y_i, \quad \forall i = 1, \ldots, n. \\
x \leqq y & \Leftrightarrow & x_i \leq y_i, \quad \forall i = 1, \ldots, n. \\
x \leq y & \Leftrightarrow & x \leqq y, \quad \text{existe } i \text{ tal que } x_i < y_i.
\end{array}$$

Con la introducción de restricciones a (P) pasamos al siguiente problema escalar con restricciones:

$$
\begin{array}{ll}
(PR) & \text{Minimiza } \theta(x) \\
 & \text{sujeto a:} \\
 & g(x) \leqq 0 \\
 & x \in S \subseteq R^n
\end{array}
$$

donde $\theta : S \subseteq R^n \to R$ y $g = (g_1, \ldots, g_m) : S \subseteq R^n \to R^m$ con $\theta, g_1, \ldots, g_m$ diferenciables. Para el estudio de las soluciones óptimas a este problema, se emplean las siguientes condiciones de punto de ensilladura de tipo Fritz-John y de tipo Kuhn-Tucker, y que enunciamos a continuación y que generalizan el concepto de punto crítico o estacionario para (P).

DEFINICIÓN 1.3 *Sea $\bar{x}$ un punto factible para (PR). Diremos que x es un punto de ensilladura de Fritz-John si existe $\tau \in R$, $\mu \in R^m$ tales que*

$$\tau \nabla \theta(\bar{x}) + \mu^T \nabla g(\bar{x}) = 0 \tag{1.2}$$

$$\mu^T g(\bar{x}) = 0 \tag{1.3}$$

$$(\tau, \mu) \geq 0 \tag{1.4}$$

Y por otro lado tenemos:

DEFINICIÓN 1.4 *Sea $\bar{x}$ un punto factible para (PR). Diremos que x es un punto de ensilladura de Kuhn-Tucker, i. e., existe $\mu \in R^m$ tal que*

$$\nabla \theta(\bar{x}) + \mu^T \nabla g(\bar{x}) = 0 \tag{1.5}$$

$$\mu^T g(\bar{x}) = 0 \tag{1.6}$$

$$\mu \geq 0 \tag{1.7}$$

Éstas son condiciones necesarias de optimalidad, que enunciamos a continuación siguiendo Schechter [54]:

TEOREMA 1.2 *Si $\bar{x}$ es solución óptima de (PR) entonces $\bar{x}$ es un punto de ensilladura de Fritz-John.*

Si además exigimos una condición de cualificación de restricciones, es decir, que exista algún $x \in S$ tal que verifique las restricciones de forma estricta, es decir, $g_k(x) < 0$, $\forall k = 1, \dots, m$, siguiendo Schechter tenemos una condición de tipo Kuhn-Tucker.

TEOREMA 1.3 *Si $\bar{x}$ es solución óptima de (PR) y se verifica una condición de cualificación de restricciones entonces $\bar{x}$ es un punto de ensilladura de Kuhn-Tucker.*

Del mismo modo que ocurriese para (P), se plantea la búsqueda de clases de funciones a las que pertenezcan las que integran (PR) y para las que un punto de ensilladura conduzca a una solución óptima de (PR). Para los problemas escalares restringidos (PR), la invexidad es una condición suficiente para que esto ocurra, pero no es necesaria. Martin [32] definió un concepto más débil: KT-invexidad.

DEFINICIÓN 1.5 *Se dice que (PR) es KT-invex si existe una función $\eta : S \times S \to R^n$ tal que $\forall x_1, x_2 \in S$, con $g_i(x_1) \leq 0, g_i(x_2) \leq 0$, $i = 1, \dots, m$,*

$$\theta(x_1) - \theta(x_2) \geq \nabla\theta(x_2)\eta(x_1, x_2),$$

$$-\nabla g_j(x_2)\eta(x_1, x_2) \geq 0, \qquad \forall j \in I(x_2),$$

donde

$$I(x_2) = \{j : j = 1, \dots, m \text{ tal que } g_j(x_2) = 0\}.$$

Martin [32] probó que la KT-invexidad era condición necesaria y suficiente para que un punto de ensilladura de Kuhn-Tucker sea solución óptima, como queda reflejado en el siguiente teorema.

TEOREMA 1.4 *Todo punto de ensilladura de Kuhn-Tucker para (PR) es solución óptima si y sólo si (PR) es KT-invex.*

Siguiendo la línea de los problemas escalares, vamos a caracterizar las clases de funciones que integran los problemas de programación multiobjetivo con restricciones (PMR), donde un punto de ensilladura nos lleve a una solución eficiente o a una solución débilmente eficiente. Se trata pues de extender, entre otras, la clase de funciones KT-invex introducidas por Martin [32], así como los resultados obtenidos por éste. Y para ello, vamos a utilizar como condiciones de optimalidad las de puntos de ensilladura de Fritz-John y de Kuhn-Tucker, que definiremos para problemas multiobjetivo. Introduciremos nuevas clases de funciones basadas en invexidad generalizada para problemas de programación multiobjetivo con restricciones, en los que se integran propiedades conjuntas entre función objetivo y las funciones restrictivas. Y por último, vamos a obtener resultados de dualidad débil, fuerte e inversa.

1.2 Problema Multiobjetivo

En el caso de que un problema de programación matemática tenga varios objetivos, tenemos que retomar el concepto de solución para el que hay, en este caso, varias posibilidades como veremos. Comencemos con la presentación del problema de programación multiobjetivo, en cuyo estudio nos centraremos en este capítulo.

Sea $S \subseteq R^n$ abierto no vacío, $f = (f_1, \dots f_p) : S \subseteq R^n \to R^p$ y $g = (g_1, \dots, g_m) : S \subseteq R^n \to R^m$ funciones diferenciables. Definimos como problema de programación matemática multiobjetivo con restricciones el siguiente:

$$\text{(PMR)} \qquad \begin{array}{l} \text{Minimiza } f(x) \\ \text{sujeto a:} \\ g(x) \leqq 0 \\ x \in S \subseteq R^n \end{array}$$

Pareto [47] introdujo un concepto de solución óptima para problemas multiobjetivos, y que presentamos como eficiencia.

DEFINICIÓN 1.6 *Diremos que un punto factible $\bar{x}$ es solución o punto eficiente para (PMR) si no existe x factible tal que*

$$f(x) \leq f(\bar{x})$$

DEFINICIÓN 1.7 *Diremos que un punto factible $\bar{x}$ es solución o punto débilmente eficiente para (PMR) si no existe x factible tal que*

$$f(x) < f(\bar{x})$$

DEFINICIÓN 1.8 *Diremos que un punto factible $\bar{x}$ es solución o punto propiamente eficiente para (PMR) si existe un escalar $M > 0$ tal que para cualquier x factible que verifica $f_i(x) < f_i(\bar{x})$ para algún $i \in \{1, \ldots, p\}$, entonces existe un $j \in \{1, \ldots, p\}$ con $f_j(x) > f_j(\bar{x})$ de manera que*

$$f_i(\bar{x}) - f_i(x) < M(f_j(x) - f_j(\bar{x}))$$

Como puede deducirse de estas definiciones, toda solución eficiente es débilmente eficiente.

1.3 Problemas Escalares Relacionados

Una de las estrategias más comunes a la hora de abordar un problema multiobjetivo la representan los problemas escalares relacionados. De esta forma, para alcanzar condiciones de optimalidad para problemas multiobjetivo utilizamos los siguientes problemas escalares relacionados al problema multiobjetivo (PMR), y que nos encontramos en Chankong [12].

Sea $\bar{x} \in S$, $k \in \{1, \ldots, p\}$, formulamos el llamado k-ésimo problema restringido como sigue:

$$
\begin{array}{ll}
(P_k(\bar{x})) & \text{Minimiza } f_k(x) \\
& \text{sujeto a:} \\
& g(x) \leqq 0 \\
& f_j(x) \leq f_j(\bar{x}), \quad \forall j \neq k \\
& x \in S \subseteq R^n
\end{array}
$$

Dado $\lambda \geq 0$, formulamos el llamado problema ponderado como sigue:

$$
\begin{array}{ll}
(P_\lambda) & \text{Minimiza } \lambda^T f(x) \\
& \text{sujeto a:} \\
& g(x) \leqq 0 \\
& x \in S \subseteq R^n
\end{array}
$$

Las primeras relaciones establecidas entre las soluciones de (PMR) y las soluciones de problemas escalares fueron a través de Geoffrion [22] y exigiendo convexidad de las funciones objetivo. Estas hipótesis se fueron debilitando, ampliándose el campo de las funciones para las cuales era posible encontrar soluciones eficientes y débilmente eficientes a partir de soluciones de problemas escalares. De esta forma y basándonos en resultados de Chankong [12], disponemos de una serie de relaciones entre las soluciones de los problemas escalares y los puntos eficientes y débilmente eficientes. Para el caso de problemas donde necesitamos estudiar los puntos eficientes, disponemos de la siguiente caracterización.

TEOREMA 1.5 *$\bar{x}$ es punto eficiente para (PMR) si y sólo si $\bar{x}$ es solución óptima de $(P_k(\bar{x}))$, $\forall k$.*

Este resultado representa una importantísima herramienta a la hora de establecer condiciones de optimalidad para las soluciones eficientes de (PMR), como veremos más adelante.

También podemos emplear resultados de problemas escalares en el estudio de la eficiencia débil, como se muestra en el siguiente resultado establecido por Ruiz y Rufián [53], y que caracteriza a las soluciones débilmente eficientes para (PMR) bajo cuasiconvexidad explícita.

TEOREMA 1.6 *Si S es un subconjunto convexo de R^n y f es una función explícitamente cuasiconvexa, entonces $\bar{x}$ resuelve algún $(P_k(\bar{x}))$ si y sólo si $\bar{x}$ es un punto débilmente eficiente para (PMR).*

Como relación entre las dos variedades de problemas escalares presentados tenemos el siguiente resultado.

TEOREMA 1.7 *Si $\bar{x}$ resuelve un problema (P_λ), con $\lambda \geq 0$, entonces existe k tal que $\bar{x}$ resuelve $(P_k(\bar{x}))$, y en consecuencia $\bar{x}$ es punto débilmente eficiente para (PMR).*

1.4 Condiciones de Optimalidad

Vamos a presentar determinadas clases de funciones de la literatura matemática actual, e introduciremos nuevos tipos. Con las nuevas funciones, vamos a llegar a enunciar condiciones necesarias y suficientes para que un punto de ensilladura sea solución (eficiente o débilmente eficiente) para nuestro problema multiobjetivo. En Osuna, Rufián y Ruiz [46] se extienden al caso vectorial las definiciones de invexidad y pseudoinvexidad.

DEFINICIÓN 1.9 *Sea $S \subseteq R^n$ abierto no vacío, $f = (f_1, \ldots, f_p) : S \subseteq R^n \longrightarrow R^p$, con f_i diferenciable para todo i. Diremos que f es invex si existe una función $\eta : R^n \times R^n \longrightarrow R^n$ tal que*

$$f(x) - f(\bar{x}) \geqq \nabla f(\bar{x})\eta(x, \bar{x}) \qquad \forall x, \bar{x} \in S \tag{1.8}$$

DEFINICIÓN 1.10 *Sea $S \subseteq R^n$ abierto no vacío, $f = (f_1, \ldots, f_p) : S \subseteq R^n \longrightarrow R^p$, con f_i diferenciable para todo i. Diremos que f es pseudoinvex si existe una función $\eta : R^n \times R^n \longrightarrow R^n$ tal que*

$$f(x) - f(\bar{x}) < 0 \Rightarrow \nabla f(\bar{x})\eta(x, \bar{x}) < 0 \qquad \forall x, \bar{x} \in S \tag{1.9}$$

Para el caso $p = 1$, estas dos definiciones son equivalentes [6]. Sin embargo, esto ya no ocurre para $p > 1$, donde las funciones pseudoinvex engloban a las invex. El recíproco no es cierto, es decir, existen funciones pseudoinvex que no son invex, de lo cual encontramos un ejemplo en Arana, Rufián y Osuna [3].

La condición de invexidad se ha ido relajando con el objetivo de generalizar en condiciones de optimización. Así bajo diferenciabilidad, aparecieron los conceptos de función F-convexa [17], ρ-invex [27], (F, ρ)-convexa [48], etc.; y bajo no diferenciabilidad, aparecieron funciones convexlike y subconvexlike generalizadas [59].

Al igual que ocurre en el caso escalar, como condiciones de optimalidad vamos a emplear puntos de ensilladura de tipo Kuhn-Tucker y de tipo Fritz-John, usuales en la literatura matemática, como definimos a continuación.

DEFINICIÓN 1.11 *Sea $\bar{x}$ factible para (PMR). Diremos que $\bar{x}$ es un punto de ensilladura de Fritz-John, PEN-FJ, si existe $\lambda \in R^p$, $\mu \in R^m$ tales que*

$$\lambda^T \nabla f(\bar{x}) + \mu^T \nabla g(\bar{x}) = 0 \tag{1.10}$$

$$\mu^T g(\bar{x}) = 0 \tag{1.11}$$

$$(\lambda, \mu) \geqq 0, \quad (\lambda, \mu) \neq 0 \tag{1.12}$$

Esto es equivalente a decir que existe $(\lambda, \mu_I) \geq 0$, tal que

$$\lambda^T \nabla f(\bar{x}) + \mu_I^T \nabla g_I(\bar{x}) = 0, \quad I = I(\bar{x}) = \{j = 1, \ldots, m : g_j(\bar{x}) = 0\} \tag{1.13}$$

Lo mismo ocurrirá con la siguiente definición, pero en este caso con $(\lambda, \mu_I) \geq 0$, $\lambda \neq 0$.

DEFINICIÓN 1.12 *Sea $\bar{x}$ factible para (PMR). Diremos que $\bar{x}$ es un punto de ensilladura de Kuhn-Tucker, PEN-KT, si existe $\lambda \in R^p$, $\mu \in R^m$ tales que*

$$\lambda^T \nabla f(\bar{x}) + \mu^T \nabla g(\bar{x}) = 0 \tag{1.14}$$

$$\mu^T g(\bar{x}) = 0 \tag{1.15}$$

$$\mu \geqq 0 \tag{1.16}$$

$$\lambda \geq 0 \tag{1.17}$$

1.5 Resultados de Eficiencia Débil

En esta sección vamos a centrarnos en la búsqueda de soluciones débilmente eficientes. En este sentido, retomamos la idea de KT-invexidad, concretada en la definición 1.5, introducida por Martin [32] y aplicada a problemas escalares en la forma (PR). Tal como se enuncia en el teorema 1.4, Martin probó que la KT-invexidad de (PR) es condición necesaria y suficiente para que todo punto de ensilladura de Kuhn-Tucker sea solución óptima. El objetivo que perseguimos en esta sección es establecer conclusiones similares para las soluciones débilmente eficientes para el problema de programación multiobjetivo (PMR). Y para ello, emplearemos los conceptos de puntos de ensilladura ya definidos, e incluiremos nuevas clases de funciones multiobjetivos en la línea de generalizar la KT-invexidad. Arana, Rufián y Osuna [3] introducen la siguiente definición.

DEFINICIÓN 1.13 *Diremos que (PMR) es FJ-pseudoinvex de tipo I si existe una función $\eta : S \times S \to R^n$ de manera que $\forall x_1, x_2 \in S$, $g(x_1) \leqq 0$, $g(x_2) \leqq 0$ se verifica:*

$$f(x_1) - f(x_2) < 0 \Rightarrow \begin{cases} \nabla f(x_2)\eta(x_1, x_2) < 0 \\ \nabla g_j(x_2)\eta(x_1, x_2) < 0, \quad \forall j \in I(x_2) \end{cases} \tag{1.18}$$

donde $I(x_2) = \{j = 1, \ldots, m : g_j(x_2) = 0\}$.

Y Osuna, Rufián y Ruiz [46] introducen esta otra definición, la cual si se restringe a problemas escalares es equivalente a la dada para la clase KT-invex por Martin [32].

DEFINICIÓN 1.14 *Diremos que (PMR) es KT-pseudoinvex de tipo I si existe una función $\eta : S \times S \to R^n$ de manera que $\forall x_1, x_2 \in S$, $g(x_1) \leqq 0$, $g(x_2) \leqq 0$ se verifica:*

$$f(x_1) - f(x_2) < 0 \Rightarrow \begin{cases} \nabla f(x_2)\eta(x_1, x_2) < 0 \\ \nabla g_j(x_2)\eta(x_1, x_2) \leq 0, \quad \forall j \in I(x_2) \end{cases} \tag{1.19}$$

donde $I(x_2) = \{j = 1, \ldots, m : g_j(x_2) = 0\}$.

De las definiciones anteriores se desprende la siguiente relación entre la clase de funciones FJ-pseudoinvex de tipo I y la KT-pseudoinvex de tipo I:

PROPOSICIÓN 1.1 *Si (PMR) es FJ-pseudoinvex de tipo I, entonces (PMR) es KT-pseudoinvex de tipo I.*

Tal como ocurriese en los problemas escalares en la búsqueda de soluciones, establecemos condiciones de optimalidad de tipo puntos de ensilladura, y para lo cual enunciamos el siguiente resultado conocido en la literatura matemática, y del que, entre otros, podemos encontrar una demostración en [45].

TEOREMA 1.8 *Si $\bar{x}$ es un punto débilmente eficiente para (PMR), entonces $\bar{x}$ es un PEN-FJ.*

De esta forma, ya tenemos la condición de Fritz-John como necesaria para que un punto sea débilmente eficiente. Si incluimos una condición de cualificación de restricciones, podemos asegurar que λ no es nula, y en consecuencia $\bar{x}$ pasa a ser PEN-KT.

Veamos que la FJ-pseudoinvexidad es condición suficiente para obtener el recíproco del teorema anterior.

TEOREMA 1.9 *Si (PMR) es FJ-pseudoinvex de tipo I entonces todo PEN-FJ es PDE.*

Demostración. Supongamos que (PMR) es FJ-pseudoinvex de tipo I y $\bar{x}$ es PEN-FJ. Veamos que $\bar{x}$ es PDE, y para ello supongamos que no lo es, es decir, existe x factible tal que $f(x) - f(\bar{x}) < 0$, por lo que al ser (PMR) FJ-pseudoinvex de tipo I, existe η tal que:

$$\left.\begin{array}{r}\nabla f(\bar{x})\eta(x,\bar{x}) < 0 \\ \nabla g_I(\bar{x})\eta(x,\bar{x}) < 0\end{array}\right\} \qquad (1.20)$$

con $I = I(\bar{x})$, como anteriormente.
Por ser $\bar{x}$ un PEN-FJ, $\exists(\bar{\lambda}, \bar{\mu}_I) \geq 0$ tal que

$$\bar{\lambda}^T \nabla f(\bar{x}) + \bar{\mu}_I^T \nabla g_I(\bar{x}) = 0$$

y por tanto

$$\bar{\lambda}^T \nabla f(\bar{x}) \eta(x, \bar{x}) + \bar{\mu}_I^T \nabla g_I(\bar{x}) \eta(x, \bar{x}) = 0 \tag{1.21}$$

Por otro lado, si multiplicamos $(\bar{\lambda}, \bar{\mu}_I)$ en (1.20) obtenemos

$$\begin{array}{lcl} \bar{\lambda}^T \nabla f(\bar{x}) \eta(x, \bar{x}) \leq 0 & & \bar{\lambda}^T \nabla f(\bar{x}) \eta(x, \bar{x}) < 0 \\ & \text{ó} & \\ \bar{\mu}_I^T \nabla g_I(\bar{x}) \eta(x, \bar{x}) < 0 & & \bar{\mu}_I^T \nabla g_I(\bar{x}) \eta(x, \bar{x}) \leq 0 \end{array}$$

y en ambos casos, sumando resulta

$$\bar{\lambda}^T \nabla f(\bar{x}) \eta(x, \bar{x}) + \bar{\mu}_I^T \nabla g_I(\bar{x}) \eta(x, \bar{x}) < 0$$

que se contradice con (1.21) y por tanto $\bar{x}$ es un PDE para (PMR). □

Pasemos al resultado recíproco, y para ello vamos a necesitar el Teorema de Alternativa de Gordan que podemos encontrar en Mangasarian [30], que fue más tarde generalizado por Zalmai [60], y que tenemos a continuación.

TEOREMA 1.10 (Alternativa de Gordan) . *Sea $A \in M^{n \times m}$. Entonces se tiene una y sólo una de las siguientes afirmaciones:*

(i) $A^T y < 0$ *tiene solución* $y \in R^n$, *ó*

(ii) $Ax = 0, x \geq 0$ *tiene solución* $x \in R^m$.

Con el recíproco de este resultado, y que presentamos a continuación, vamos a obtener que la FJ-pseudoinvexidad es condición necesaria; y además, la FJ-pseudoinvexidad va a quedar caracterizada.

TEOREMA 1.11 *Si todo PEN-FJ es PDE, entonces (PMR) es FJ- pseudoinvex de tipo I.*

Demostración. Sean $x, \bar{x}$ dos puntos factibles para (PMR) tales que $f(x) - f(\bar{x}) < 0$, ya que en caso contrario se tendría la FJ-pseudoinvexidad en $\bar{x}$. Como $\bar{x}$ no es PDE, luego, por hipótesis, $\bar{x}$ no es PEN-FJ, es decir,

$$\bar{\lambda}^T \nabla f(\bar{x})^T + \bar{\mu}_I^T \nabla g_I(\bar{x})^T = 0,$$

no tiene solución $(\bar{\lambda}, \bar{\mu}_I) \geq 0$, y por tanto, en aplicación del Teorema de Alternativa de Gordan, el sistema

$$\left.\begin{array}{ll} \nabla f_i(\bar{x})^T u < 0 & i = 1, \ldots, p \\ \nabla g_j(\bar{x})^T u < 0 & j \in I(\bar{x}) \end{array}\right\} \qquad (1.22)$$

tiene solución. Sea $\bar{u}$ una solución de (1.22), y definimos $\eta(x, \bar{x}) = \bar{u}$. Tenemos pues, que definida η,

$$f(x) - f(\bar{x}) < 0 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \nabla f(\bar{x})\eta(x, \bar{x}) < 0 \\ \nabla g_I(\bar{x})\eta(x, \bar{x}) < 0 \end{array} \right.$$

es decir, (PMR) es FJ-pseudoinvex de tipo I. $\square$

Como consecuencia de los teoremas anteriores, tenemos el siguiente corolario:

COROLARIO 1.1 *Todo PEN-FJ es PDE para (PMR) si y sólo si (PMR) es FJ-pseudoinvex de tipo I.*

Con este resultado queda establecida la equivalencia entre la condición de punto de ensilladura de Fritz-John y la de solución débilmente eficiente a través de la FJ-pseudoinvexidad de tipo I de (PMR). Y además, hemos conseguido caracterizar la clase de funciones FJ-pseudoinvex de tipo I.

Cuando en la búsqueda de soluciones débilmente eficientes empleamos la condición de optimalidad de PEN-KT, es necesario recurrir a la clase de funciones KT-pseudoinvex de tipo I . Siguiendo pasos similares a los dados para la clase de funciones FJ-pseudoinvex de tipo I, tenemos el siguiente resultado de caracterización establecido por Osuna, Rufián y Ruiz [46]:

COROLARIO 1.2 *Todo PEN-KT es PDE para (PMR) si y sólo si (PMR) es KT-pseudoinvex de tipo I.*

Estos dos corolarios representan un avance en el estudio de las soluciones débilmente eficientes para problemas multiobjetivos. Por un lado, el resultado que proporciona el corolario 1.2 es la extensión natural a los problemas multiobjetivos del teorema 1.4 para problemas escalares dado por Martin [32]. Por tanto, en el caso particular de $p = 1$ para el problema multiobjetivo (PMR) pasamos a tener el problema escalar (PR), y las definiciones de KT-pseudoinvexidad de tipo I y la de KT-invexidad de Martin [32] son equivalentes, es decir:

TEOREMA 1.12 *(PR) es KT-invex si y sólo si (PR) es KT-pseudoinvex de tipo I.*

Por consiguiente, Osuna, Rufián y Ruiz [46] consiguen caracterizar la clase de funciones para las que un punto de ensilladura de Kuhn-Tucker significa un punto débilmente eficiente para un problema de programación matemática multiobjetivo, y una solución óptima para un problema escalar.

Por otro lado, este avance en el estudio de soluciones débilmente eficientes queda manifiesto desde la condición de punto de ensilladura de Fritz-John. En esta línea, con la introducción de la clase de funciones FJ-pseudoinvex de tipo I obtenemos resultados novedosos, en los que esta clase de funciones queda caracterizada por que todo punto de ensilladura de Fritz-John es solución débilmente de (PMR). De esta forma, cualquier clase de funciones que verifique esto último, es equivalente a la clase FJ-pseudoinvex de tipo I.

1.6 Resultados de Eficiencia

Sabemos que toda solución eficiente es débilmente eficiente, y no se verifica el recíproco en general. Por ello, en la búsqueda de soluciones eficientes para un problema de programación multiobjetivo (PMR), partimos con mayores exigencias que en el caso de soluciones débilmente eficientes. Al igual que ocurriese en el anterior estudio de las soluciones débilmente eficientes, las condiciones de optimalidad de punto de ensilladura de tipo Kuhn-Tucker o de tipo Fritz-John son condiciones necesarias para que un punto sea solución eficiente para un problema de la forma (PMR). Sin embargo, en la literatura matemática dentro del estudio de las soluciones eficientes en programación multiobjetivo queda aún pendiente hallar una clase de funciones para la que se verificase no sólo que un punto de ensilladura sea solución eficiente, sino que quedase caracterizada por esto mismo. Esta es la novedad que presentamos en esta sección a través de diversos resultados.

Para el estudio de puntos eficientes de (PMR) desde la condición de optimalidad de punto de ensilladura de Fritz-John, vamos a necesitar una nueva clase de funciones, y que presentamos a continuación.

DEFINICIÓN 1.15 *Diremos que (PMR) es FJ-pseudoinvex de tipo II si existe una función $\eta : S \times S \longrightarrow R^n$ tal que $\forall x_1, x_2$ factibles se verifica*

$$f(x_1) - f(x_2) \leq 0 \Rightarrow \begin{cases} \nabla f(x_2)\eta(x_1, x_2) < 0 \\ \nabla g_j(x_2)\eta(x_1, x_2) < 0, \quad \forall j \in I(x_2) \end{cases} \tag{1.23}$$

donde $I(x_2) = \{j = 1, \ldots, m : g_j(x_2) = 0\}$.

La relación entre esta nueva clase de funciones y la de FJ-pseudoinvex de tipo I, observando las definiciones de ambas, es como sigue.

PROPOSICIÓN 1.2 *Si (PMR) es FJ-pseudoinvex de tipo II entonces es FJ-pseudoinvex de tipo I.*

Del mismo modo que se hiciese en la sección anterior, pasamos a definir una nueva clase de funciones KT-pseudoinvex.

DEFINICIÓN 1.16 *Diremos que (PMR) es KT-pseudoinvex de tipo II si existe una función $\eta : S \times S \longrightarrow R^n$ tal que $\forall x_1, x_2$ factibles se verifica*

$$f(x_1) - f(x_2) \leq 0 \Rightarrow \begin{cases} \nabla f(x_2)\eta(x_1, x_2) < 0 \\ \nabla g_j(x_2)\eta(x_1, x_2) \leq 0, \quad \forall j \in I(x_2) \end{cases} \tag{1.24}$$

donde $I(x_2) = \{j = 1, \ldots, m : g_j(x_2) = 0\}$.

Esta nueva clase de funciones y la de KT-pseudoinvex de tipo I quedan relacionadas, observando las definiciones de ambas, de la siguiente forma:

PROPOSICIÓN 1.3 *Si (PMR) es KT-pseudoinvex de tipo II entonces es KT-pseudoinvex de tipo I.*

Y la relación entre estas dos nuevas clases de funciones la tenemos a continuación:

PROPOSICIÓN 1.4 *Si (PMR) es FJ-pseudoinvex de tipo II entonces es KT-pseudoinvex de tipo II.*

En el caso de que la función objetivo f del problema de programación matemática sea escalar ($p = 1$), la expresión

$$f(x_1) - f(x_2) \leq 0$$

definida para el caso múltiple pasa a corresponderse con

$$f(x_1) - f(x_2) < 0$$

Y ello, porque en la definición de "$\leq$" dada para el caso multiobjetivo se exige que exista algún $i \in \{1, \ldots, p\}$ (i-ésima componente de f) de manera que $f_i(x_1) - f_i(x_2) < 0$.

En consecuencia, si (PMR) es un problema de programación matemática escalar, las definiciones de KT-pseudoinvexidad de tipo I y de tipo II coinciden, y diremos que el problema es **KT-pseudoinvex**. Del mismo modo, las definiciones de FJ-pseudoinvexidad de tipo I y de tipo II coinciden, y diremos que el problema es **FJ-pseudoinvex**.

Si $\bar{x}$ es solución eficiente, por el teorema 1.5 basado en Chankong [12] es solución óptima de $(P_k(\bar{x}))$, $\forall k$. Aplicando a cada $(P_k(\bar{x}))$ el teorema 1.2 basado en Schechter [54], Kanniappan [28] obtiene el siguiente teorema.

TEOREMA 1.13 *Si $\bar{x}$ es un punto eficiente para (PMR) entonces $\bar{x}$ es un PEN-FJ.*

Siguiendo la línea de Kanniappan [28] y de Gulati y Talaat [23], podemos aportar una condición de Kuhn-Tucker.

TEOREMA 1.14 *Si $\bar{x}$ es un punto eficiente para (PMR) y se verifica una condición de cualificación de restricciones en algún $(P_k(\bar{x}))$, entonces $\bar{x}$ es un PEN-KT.*

Demostración. Es inmediata a partir del teorema 1.5, teorema 1.2 y teorema 1.3. □

Hemos probado que la condición de Kuhn-Tucker es necesaria; veamos que, bajo KT-pseudoinvexidad de tipo II es suficiente.

TEOREMA 1.15 *Sea $\bar{x}$ un punto factible para (PMR) y (PMR) KT- pseudoinvex de tipo II en $\bar{x}$. Si $\bar{x}$ es un PEN-KT, entonces $\bar{x}$ es un punto eficiente.*

Demostración. Tenemos que probar que $\bar{x}$ es punto eficiente para (PMR), y para ello supongamos que no lo es. Entonces existe x factible tal que

$$f(x) - f(\bar{x}) \leq 0$$

Por ser (PMR) KT-pseudoinvex de tipo II en $\bar{x}$, tendremos que existe η tal que

$$\left.\begin{array}{ll} \nabla f(\bar{x})\eta(x,\bar{x}) < 0 & \\ \nabla g_I(\bar{x})\eta(x,\bar{x}) \leqq 0, & I = I(\bar{x}) \end{array}\right\} \tag{1.25}$$

Como $\bar{x}$ PEN-KT, entonces $\exists(\bar{\lambda},\bar{\mu}) \geq 0,\ \bar{\lambda} \neq 0$ tal que

$$\bar{\lambda}^T \nabla f(\bar{x}) + \bar{\mu}_I^T \nabla g_I(\bar{x}) = 0, \quad I = I(\bar{x})$$

que multiplicado por $\eta(x,\bar{x})$ resulta:

$$\bar{\lambda}^T \nabla f(\bar{x})\eta(x,\bar{x}) + \bar{\mu}_I^T \nabla g_I(\bar{x})\eta(x,\bar{x}) = 0 \tag{1.26}$$

Como $\bar{\lambda} \geq 0$ y $\bar{\mu}_I \geqq 0$, aplicamos a (1.25) y obtenemos:

$$\bar{\lambda}^T \nabla f(\bar{x})\eta(x,\bar{x}) < 0$$

$$\bar{\mu}_I^T \nabla g_I(\bar{x})\eta(x,\bar{x}) \leqq 0$$

que sumadas resulta

$$\bar{\lambda}^T \nabla f(\bar{x})\eta(x,\bar{x}) + \bar{\mu}_I^T \nabla g_I(\bar{x})\eta(x,\bar{x}) < 0 \tag{1.27}$$

lo cual está en contradicción con (1.26), y por tanto, $\bar{x}$ es punto eficiente para (PMR).

□

Luego hemos demostrado que la KT-pseudoinvexidad de tipo II es una condición suficiente para que un punto de ensilladura de Kuhn-Tucker sea solución eficiente. Pero la KT-pseudoinvexidad de tipo II es además condición necesaria, y para cuya demostración vamos a necesitar el siguiente teorema.

TEOREMA 1.16 (Alternativa de Motzkin) . *Sea $A_1 \in M^{n\times m_1}$ y $A_2 \in M^{n\times m_2}$. Entonces se tiene una y sólo una de las siguientes afirmaciones:*

(i) $A_1^T y < 0, A_2^T y \leqq 0$ *tiene solución* $y \in R^n$, *ó*

(ii) $A_1 x_1 + A_2 x_2 = 0, x_1 \geq 0, x_2 \geqq 0$ *tiene solución* $x_1 \in R^{m_1}, x_2 \in R^{m_2}$.

Pasemos al siguiente resultado, donde probamos que la KT-pseudoinvexidad de tipo II es además condición necesaria.

TEOREMA 1.17 *Si todo PEN-KT es punto eficiente, entonces (PMR) es KT-pseudoinvex de tipo II.*

Demostración. Supongamos que existen dos puntos factibles x y $\bar{x}$ tal que

$$f(x) - f(\bar{x}) \leq 0, \tag{1.28}$$

ya que en caso contrario (PMR) sería KT-pseudoinvex de tipo II, y estaría probado el resultado. Esto significa que $\bar{x}$ no es punto eficiente, y por hipótesis, tenemos que $\bar{x}$ no puede ser PEN-KT, es decir,

$$\bar{\lambda}^T \nabla f(\bar{x}) + \bar{\mu}_I^T \nabla g_I(\bar{x}) = 0$$

no tiene solución $\bar{\lambda} \geq 0, \bar{\mu}_I \geqq 0$. De ahí que, por el Teorema de Alternativa de Motzkin, el sistema

$$\left.\begin{array}{ll} \nabla f(\bar{x}) u < 0 & \\ \nabla g_I(\bar{x}) u \leqq 0 & I = I(\bar{x}) \end{array}\right\}$$

tiene solución. Sea $\bar{u}$ una solución, y definimos $\eta(x, \bar{x}) = \bar{u}$.

Por lo tanto, suponiendo que $f(x) - f(\bar{x}) \leq 0$, tenemos η tal que

$$\left.\begin{array}{ll} \nabla f(\bar{x}) \eta(x, \bar{x}) < 0 & \\ \nabla g_I(\bar{x}) \eta(x, \bar{x}) \leqq 0 & I = I(\bar{x}) \end{array}\right\}$$

es decir, (PMR) es KT-pseudoinvex de tipo II. $\square$

Uniendo los dos resultados anteriores tenemos la siguiente consecuencia.

COROLARIO 1.3 *Todo PEN-KT es punto eficiente si y sólo si (PMR) es KT-pseudoinvex de tipo II.*

Procediendo del mismo modo que en las demostraciones de los resultados anteriores, y en la misma línea, enunciamos los siguientes teoremas para el caso de puntos de ensilladura de tipo Fritz-John, con lo que quedará probado que la FJ-pseudoinvexidad de tipo II es condición necesaria y suficiente para que queden identificados los PEN-FJ con las soluciones eficientes de nuestro problema multiobjetivo.

TEOREMA 1.18 *Sea $\bar{x}$ un punto factible para (PMR) y sea (PMR) FJ-pseudoinvex de tipo II en $\bar{x}$. Si $\bar{x}$ es un PEN-FJ entonces es un punto eficiente.*

TEOREMA 1.19 *Si todo PEN-FJ es punto eficiente, entonces (PMR) es FJ-pseudoinvex de tipo II.*

Estos dos resultados dan lugar a la siguiente consecuencia.

COROLARIO 1.4 *Todo PEN-FJ es punto eficiente si y sólo si (PMR) es FJ-pseudoinvex de tipo II.*

Los corolarios 1.3 y 1.4 muestran la consecución de los objetivos que nos marcamos en esta sección para las soluciones eficientes de problemas multiobjetivos de la forma (PMR). La nueva clase de funciones KT-pseudoinvex de tipo II queda caracterizada por que todo PEN-KT es solución eficiente, como muestra el corolario 1.3, lo cual representa un avance en el estudio de las soluciones eficientes. Cualquier otra clase de funciones que verifique esta condición, sabemos que será equivalente a la clase KT-pseudoinvex de tipo II.

Hemos conseguido aportar otra clase de funciones que queda caracterizada por que todo PEN-FJ es solución eficiente, y que hemos llamado FJ-pseudoinvex de tipo II. Haciendo uso del corolario 1.4, cualquier clase de funciones que verifique esa caracterización, será equivalente a la clase FJ-pseudoinvex de tipo II.

Con ello, la búsqueda de las soluciones eficientes de un problema multiobjetivo de la forma (PMR) puede efectuarse desde las condiciones de optimalidad tanto de punto de ensilladura de Kuhn-Tucker como de Fritz-John.

Tal como hemos mostrado anteriormente, la clase de funciones KT- pseudoinvex de tipo I y de tipo II, en caso de restringirse y aplicarse al problema escalar (PR), coinciden, y la denominamos simplemente KT-pseudoinvex de tipo II. Concluimos que la KT-pseudoinvexidad que hemos introducido aplicada a (PR) es equivalente a la KT-invexidad dada por Martin [32]. Por tanto, y al igual que ocurriese con el estudio de las soluciones débilmente eficientes, los resultados obtenidos para las soluciones eficientes de (PMR) pueden considerarse como una extensión de los obtenidos para un problema escalar (PR).

1.7 Dualidad

Pasemos al estudio de la dualidad. Para ello, comencemos por abordar la dualidad entre el problema multiobjetivo (PMR) y el problema dual (DM1), formulado como sigue, y que puede considerarse un problema dual tipo Mond-Weir [39], definido para el caso multiobjetivo por Egudo y Hanson [18], pero con la variante de que se ha restringido la condición de complementariedad y se ha ampliado la de no negatividad de (λ, μ), ya que no es necesario $\lambda > 0$.

(DM1) Maximiza $f(u)$
sujeto a:

$$\lambda^T \nabla f(u) + \mu^T \nabla g(u) = 0 \tag{1.29}$$

$$\mu_j g_j(u) = 0, \quad j = 1 \ldots, m \tag{1.30}$$

$$\mu \geqq 0 \tag{1.31}$$

$$\lambda \geq 0 \tag{1.32}$$

$$u \in S \subseteq R^n$$

con f y g definidos como hasta ahora.

Necesitamos una nueva clase de funciones pseudoinvex, que difiere ligeramente de las ya definidas, y que presentamos.

DEFINICIÓN 1.17 *Diremos que (f, g) es KT-pseudoinvex de tipo II en $W \subseteq S$ si existe una función η tal que $\forall x_1, x_2 \in W$ se tiene*

$$f(x_1) - f(x_2) \leq 0 \Rightarrow \begin{cases} \nabla f(x_2)\eta(x_1, x_2) < 0 \\ \nabla g_I(x_2)\eta(x_1, x_2) \leqq 0 \end{cases} \tag{1.33}$$

con $I = I(x_2) = \{j = 1, \ldots, m : g_j(x_2) = 0\}$.

La relación entre esta nueva clase de funciones y la de (PMR) KT-pseudoinvex de tipo II es evidente, como se enuncia a continuación.

PROPOSICIÓN 1.5 *Si (f, g) es KT-pseudoinvex de tipo II en S, entonces (PMR) es KT-pseudoinvex de tipo II.*

Pasemos a los resultados de dualidad, y para ello comencemos con la dualidad débil.

TEOREMA 1.20 (Dualidad débil) *Sea x factible para (PMR), (u, λ, μ) factible para (DM1). Si (f, g) es KT-pseudoinvex de tipo II en S entonces no se verifica $f(x) \leq f(u)$.*

Demostración. (f, g) es KT-pseudoinvex de tipo II respecto a una función η. Sea x factible para (PMR), (u, λ, μ) factible para (DM1), tales que $f(x) \leq f(u)$, ya que en caso contrario tendríamos probado el resultado. Existe, pues, $\lambda \in R^p$, $\mu \in R^m$ tal que

$$\lambda^T \nabla f(u) + \mu^T \nabla g(u) = 0$$

$$\mu_j g_j(u) = 0, \quad j = 1 \ldots, m$$

$$\mu \geqq 0$$

$$\lambda \geq 0$$

O sea,

$$\lambda^T \nabla f(u) + \mu_I^T \nabla g_I(u) = 0$$

con $(\lambda, \mu_I) \geq 0$, $\lambda \neq 0$, $I = I(u) = \{j = 1, \ldots, m : g_j(u) = 0\}$. En consecuencia, si multiplicamos la expresión por $\eta(x, u)$,

$$\lambda^T \nabla f(u) \eta(x, u) + \mu_I^T \nabla g_I(u) \eta(x, u) = 0 \tag{1.34}$$

Como $f(x) \leq f(u)$, por la KT-pseudoinvexidad de tipo II de (f, g) se tiene

$$\left.\begin{array}{ll} \nabla f(\bar{x}) \eta(x, u) < 0 & \\ \nabla g_I(\bar{x}) \eta(x, u) \leqq 0 & I = I(\bar{x}) \end{array}\right\}$$

y que multiplicado por (λ, μ_I) resulta

$$\lambda^T \nabla f(u) \eta(x, u) + \mu_I^T \nabla g_I(u) \eta(x, u) < 0,$$

lo cual entra en contradicción con (1.34), y por tanto, se concluye que no se puede verificar $f(x) \leq f(u)$. □

Este resultado de dualidad débil nos permite probar el siguiente resultado de dualidad fuerte.

TEOREMA 1.21 (Dualidad fuerte) *Supongamos que (PMR) es KT- pseudoinvex de tipo II en S. Si $\bar{x}$ es un punto eficiente para (PMR) y se verifica una condición de cualificación de restricciones en algún $(P_k(\bar{x}))$, entonces existe λ, μ, tal que $(\bar{x}, \lambda, \mu)$ es un punto eficiente para (DM1).*

Demostración. Supongamos $\bar{x}$ un punto eficiente para (PMR). Por el teorema 1.14, $\bar{x}$ es PEN-KT, es decir, $\exists(\lambda, \mu) \geq 0$, $\lambda \neq 0$ tal que

$$\lambda^T \nabla f(\bar{x})^T + \mu^T \nabla g(\bar{x})^T = 0$$

$$\mu^T g(\bar{x}) = 0$$

Al ser $g(\bar{x}) \leqq 0$, y $\mu^T g(\bar{x}) = 0$, tenemos

$$\mu_j g_j(\bar{x}) = 0 \quad j = 1, \ldots, m$$

Luego $\bar{x}$ es factible para (DM1), y por el teorema de dualidad débil no se verifica $f(\bar{x}) \leq f(u)$, para cualquier u factible para (DM1). Por tanto $\bar{x}$ es un punto eficiente para (DM1). □

El recíproco del resultado anterior también se verifica, como se demuestra a continuación.

TEOREMA 1.22 (Dualidad inversa) *Supongamos (PMR) KT- pseudoinvex de tipo II en el conjunto factible, y $\bar{x}$ un punto factible para (PMR). Si $(\bar{x}, \lambda, \mu)$ es un punto factible para (DM1) entonces $\bar{x}$ es un punto eficiente para (PMR).*

Demostración. Supongamos $\bar{x}$ factible para (PMR). Si $(\bar{x}, \lambda, \mu)$ es un punto factible para (DM1), entonces

$$\lambda^T \nabla f(\bar{x}) + \mu^T \nabla g(\bar{x}) = 0$$

$$\mu_j g_j(\bar{x}) = 0, \quad j = 1, \ldots, m$$

y por tanto $\bar{x}$ es un PEN-KT. Como (PMR) es KT-pseudoinvex de tipo II, por el teorema 1.15 tenemos que $\bar{x}$ es un punto eficiente para (PMR). $\square$

Del mismo modo que hemos establecido resultados de dualidad débil, fuerte e inversa entre los problemas (PMR) y (DM1), pasamos a establecer resultados de dualidad entre (PMR) y el siguiente problema dual asociado.

(DM2) Maximiza $f(u)$
sujeto a:

$$\lambda^T \nabla f(u) + \mu^T \nabla g(u) = 0 \tag{1.35}$$

$$\mu_j g_j(u) = 0, \quad j = 1 \ldots, m \tag{1.36}$$

$$(\lambda, \mu) \geq 0 \tag{1.37}$$

$$u \in S \subseteq R^n$$

Y para ello introducimos la siguiente definición.

DEFINICIÓN 1.18 *Diremos que (f, g) es FJ-pseudoinvex de tipo II en $W \subseteq S$ si existe una función η tal que $\forall x_1, x_2 \in W$ se tiene*

$$f(x_1) - f(x_2) \leq 0 \Rightarrow \begin{cases} \nabla f(x_2)\eta(x_1, x_2) < 0 \\ \nabla g_I(x_2)\eta(x_1, x_2) < 0 \end{cases} \tag{1.38}$$

con $I = I(x_2) = \{j = 1, \ldots, m : g_j(x_2) = 0\}$.

La relación de esta clase de funciones con la de FJ-pseudoinvexidad ya definida es como sigue.

PROPOSICIÓN 1.6 *Si (f, g) es FJ-pseudoinvex de tipo II en S, entonces (PMR) es FJ-pseudoinvex de tipo II.*

Siguiendo la línea de los resultados y demostraciones anteriores, enunciamos los siguientes teoremas de dualidad.

TEOREMA 1.23 (Dualidad débil) *Sea x factible para (PMR), (u, λ, μ) factible para (DM2). Si (f, g) es FJ-pseudoinvex de tipo II en S, entonces no se verifica $f(x) \leq f(u)$.*

TEOREMA 1.24 (Dualidad fuerte) *Supongamos que (PMR) es FJ- pseudoinvex de tipo II en S. Si $\bar{x}$ es un punto eficiente para (PMR), entonces existe λ, μ, tal que $(\bar{x}, \lambda, \mu)$ es un punto eficiente para (DM2).*

TEOREMA 1.25 (Dualidad inversa) *Supongamos (PMR) FJ- pseudoinvex de tipo II en el conjunto factible, y $\bar{x}$ un punto factible para (PMR). Si $(\bar{x}, \lambda, \mu)$ es un punto factible para (DM2) entonces $\bar{x}$ es un punto eficiente para (PMR).*

Para establecer la dualidad en términos de eficiencia débil, consideramos (DM1) y (DM2). Con (DM1) se establece dualidad débil, fuerte e inversa, procediendo tal como se hace en los teoremas 1.20, 1.21 y 1.22. Para ello, se emplea la KT-pseudoinvexidad de tipo I de (PMR) y la de (f, g), que definimos a continuación.

DEFINICIÓN 1.19 *Diremos que (f, g) es KT-pseudoinvex de tipo I en $W \subseteq S$ si existe una función η tal que $\forall x_1, x_2 \in W$ se tiene*

$$f(x_1) - f(x_2) < 0 \Rightarrow \begin{cases} \nabla f(x_2)\eta(x_1, x_2) < 0 \\ \nabla g_I(x_2)\eta(x_1, x_2) \leqq 0 \end{cases} \tag{1.39}$$

con $I = I(x_2) = \{j = 1, \ldots, m : g_j(x_2) = 0\}$.

La relación entre (f, g) KT-pseudoinvex de tipo I y (PMR) KT-pseudoinvex de tipo I viene dada a continuación.

PROPOSICIÓN 1.7 *Si (f, g) es KT-pseudoinvex de tipo I en S, entonces (PMR) es KT-pseudoinvex de tipo I.*

En el caso de establecer dualidad con (DM2) utilizando puntos débilmente eficientes, se procede como en los teoremas 1.23, 1.24 y 1.25, pero con la FJ-pseudoinvexidad de tipo I de (PMR) y de (f, g), que definimos a continuación.

DEFINICIÓN 1.20 *Diremos que (f, g) es FJ-pseudoinvex de tipo I en $W \subseteq S$ si existe una función η tal que $\forall x_1, x_2 \in W$ se tiene*

$$f(x_1) - f(x_2) < 0 \Rightarrow \begin{cases} \nabla f(x_2)\eta(x_1, x_2) < 0 \\ \nabla g_I(x_2)\eta(x_1, x_2) < 0 \end{cases} \tag{1.40}$$

con $I = I(x_2) = \{j = 1, \ldots, m : g_j(x_2) = 0\}$.

La relación entre (f, g) FJ-pseudoinvex de tipo I y (PMR) FJ-pseudoinvex de tipo I viene dada a continuación.

PROPOSICIÓN 1.8 *Si (f, g) es FJ-pseudoinvex de tipo I en S, entonces (PMR) es FJ-pseudoinvex de tipo I.*

En el estudio de la dualidad entre (PMR) y los problemas (DM1) y (DM2) hemos requerido las clases de funciones KT-pseudoinvex de tipo II y FJ-pseudoinvex de tipo II. Como vimos en la sección anterior, estas nuevas clases de funciones suponen una mejora en el estudio de la eficiencia, ya que quedan caracterizadas por que todo punto de ensilladura (de Kuhn-Tucker, en el caso de KT-pseudoinvex de tipo II, y de Fritz-John, en el caso de FJ-pseudoinvex de tipo II) es solución eficiente. Cualquier otra clase de funciones que verifique esto, debe ser equivalente a una de estas clases de funciones. Es por ello que son las clases de funciones llamadas en el estudio de la dualidad para soluciones eficientes.

Las propiedades que, tal como hemos descrito y probado, nos proporcionan la KT-pseudoinvexidad de tipo II y la FJ-pseudoinvexidad de tipo II, aumentan con su aplicación en el estudio de la dualidad. En esta línea, hemos aportado los resultados que se podían esperar con estas clases de funciones: dualidad débil, dualidad fuerte y dualidad inversa, tanto en la dualidad entre (PMR) y (DM1), como en la dualidad entre (PMR) y (DM2).

Capítulo 2

PROBLEMA VARIACIONAL ESCALAR

2.1 Preliminares

En la línea de los contenidos mostrados en el capítulo anterior, en programación matemática es usual un problema consistente en encontrar un punto, dentro de un conjunto llamado conjunto factible, que en algún sentido optimice una función objetivo. En el caso de tratarse de un problema variacional, los puntos del conjunto factible son funciones. La forma del problema más simple del cálculo de variaciones es la siguiente:

$$
\begin{array}{ll}
\text{(PS)} & \text{Minimiza } \displaystyle\int_a^b \theta(t, x, \dot{x})dt \\
 & \text{sujeto a:} \\
 & x(a) = \alpha, \quad x(b) = \beta \\
 & x \in X
\end{array}
$$

donde $a, b, \alpha, \beta, \in R$; $X = C^1([a, b], R^n)$ es el espacio de las funciones continuamente diferenciables $x(\cdot) = (x_1(\cdot), \ldots, x_n(\cdot))$. Y se suele exigir que $\theta : R \times R^n \times R^n \to R$ sea una función continuamente diferenciable. (PS) es un problema variacional sin más restricciones que las de contorno ($x(a) = \alpha,\ x(b) = \beta$).

La aplicación de los problemas variacionales pasa por la aeronáutica, electricidad y magnetismo, cinemática, estimación de funciones, teoría de juegos, etc.

La concreción de estas aplicaciones en problemas variacionales, hace que sea necesario debilitar algunas de las hipótesis exigidas en (PS) e incluir condiciones restrictivas al problema. En particular, debilitaremos las exigencias de derivabilidad de las soluciones al problema. Pasemos, pues, a definir algunas condiciones para así pasar a la formulación del problema variacional en el que vamos a centrar el estudio.

DEFINICIÓN 2.1 *Se dice que una función $z : [a, b] \to R^n$ es continua a trozos en $[a, b]$ si:*

(i) z *es acotada en* $[a, b]$.

(ii) *Existen los límites por la derecha de* z *en* $[a, b)$, *y por la izquierda en* $(a, b]$.

(iii) z *es continua en* $[a, b]$, *excepto posiblemente en un número finito de puntos.*

Apoyándonos en esta definición pasamos a la siguiente.

DEFINICIÓN 2.2 *Se dice que una función* $z : [a, b] \longrightarrow R^n$ *es diferenciable a trozos en* $[a, b]$ *si existe una función* v *continua a trozos en* $[a, b]$ *de manera que*

$$z(t) = v(a) + \int_a^t v(s)\, ds, \qquad \forall t \in [a, b]$$

Es decir, z es diferenciable a trozos si es continua en todo $[a, b]$ y su derivada es continua a trozos en $[a, b]$.

Para la formulación del problema variacional objeto de estudio, pasemos a presentar las hipótesis que deben verificar las funciones que integrarán dicho problema variacional, así como el espacio de funciones sujeto a estudio. Además, veremos más adelante que los problemas variacionales escalares generalizan a los problemas escalares de programación matemática, por lo que mantendremos en la medida de lo posible la notación utilizada con anterioridad para los problemas escalares de programación matemática.

Sea $I = [a, b]$ un intervalo real y $\theta : I \times R^n \times R^n \longrightarrow R$ y $g : I \times R^n \times R^n \longrightarrow R^m$. θ y g funciones continuamente diferenciables. Consideremos $\theta(t, x(t), \dot{x}(t))$, que denotaremos por comodidad $\theta(t, x, \dot{x})$, donde $x : I \longrightarrow R^n$, con derivada $\dot{x}$, y denotaremos las derivadas parciales de θ respecto a t, x, $\dot{x}$, mediante θ_t, θ_x, $\theta_{\dot{x}}$ respectivamente, de manera que

$$\theta_x = \left(\frac{\partial\theta}{\partial x_1}, \frac{\partial\theta}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial\theta}{\partial x_n}\right), \qquad \theta_{\dot{x}} = \left(\frac{\partial\theta}{\partial \dot{x}_1}, \frac{\partial\theta}{\partial \dot{x}_2}, \ldots, \frac{\partial\theta}{\partial \dot{x}_n}\right)$$

Del mismo modo consideramos y denotamos g_t, g_x, $g_{\dot{x}}$, usando en el caso de g_x y $g_{\dot{x}}$ matrices de m filas en lugar de una.

Sea $X = C(I, R^n)$ el espacio de las funciones $x : I \to R^n$ diferenciables a trozos con la norma

$$\|x\| = \|x\|_\infty + \|Dx\|_\infty$$

donde el operador D viene dado por

$$u = Dx \Leftrightarrow x(t) = \alpha + \int_a^t u(s)ds,$$

donde α es un valor acotado. Por tanto, $D = d/dt$ excepto en las discontinuidades.

2.2 Problema Variacional Escalar

La formulación del problema variacional escalar objeto de estudio, donde la función objetivo va a ser $\Theta(x) = \int_a^b \theta(t, x, \dot{x})dt$, es como sigue.

$$(PVR) \qquad \begin{array}{l} \text{Minimiza } \Theta(x) = \int_a^b \theta(t, x, \dot{x})dt \\ \text{sujeto a:} \end{array}$$

$$x(a) = \alpha, \quad x(b) = \beta$$

$$g_j(t, x(t), \dot{x}(t)) \leq 0, \quad j = 1, \ldots, m$$

$$t \in I$$

Sea K el conjunto de las soluciones factibles de (PVR), o sea,

$$K = \{x \in X = C(I, R^n) : x(a) = \alpha,\ x(b) = \beta,$$

$$g_j(t, x(t), \dot{x}(t)) \leq 0, \quad j = 1, \ldots, m, \quad t \in I\}$$

En el caso de que las restricciones fuesen sólo de contorno, el problema quedaría de la forma siguiente.

$$(PV) \qquad \begin{array}{l} \text{Minimiza } \displaystyle\int_a^b \theta(t, x, \dot{x})dt \\ \text{sujeto a:} \\ \quad x(a) = \alpha, \quad x(b) = \beta \end{array}$$

Observemos que la formulación de (PV) y de (PS) son semejantes. Sin embargo, las diferencia radica en el espacio donde buscamos las soluciones al problema. Mientras en (PS) una solución x debe ser diferenciable, en (PV) basta con que sea diferenciable a trozos. Por consiguiente, la formulación de (PV) responde a un conjunto de problemas más amplio que (PS). Y ello aumenta con la formulación de (PVR).

Pasemos a definir el concepto de solución para el problema variacional con restricciones (PVR).

DEFINICIÓN 2.3 *Diremos que un punto $\bar{x}$ factible para (PVR), i.e., $\bar{x} \in K$ es solución óptima o mínimo global si para todo $x \in K$,*

$$\Theta(\bar{x}) \leq \Theta(x),$$

con $\Theta(x) = \int_a^b \theta(t, x, \dot{x})dt.$

Esta definición es equivalente a decir que $\Theta(x) < \Theta(\bar{x})$ no tiene solución en $x \in K$.

2.3 Condiciones de Optimalidad

La definición anterior mantiene la forma correspondiente a problemas de programación matemática con conjunto factible perteneciente a un espacio finito dimensional. Y del mismo modo, una vía de localizar soluciones óptimas para nuestro problema variacional será a través de puntos críticos, tal como se hiciese en los problemas de programación matemática, y que presentan Chandra, Craven y Husain [11] manteniendo la forma de la condición que presentó Valentine [56], y es tal como sigue.

DEFINICIÓN 2.4 *Diremos que $x \in K$ es un punto crítico de tipo Fritz-John para (PVR) si existe multiplicadores de Lagrange $\tau \in R$, $y = (y_1, \ldots, y_m) : I \longrightarrow R^m$ derivable a trozos, tal que*

$$\tau\theta_x(t,x,\dot{x}) + y(t)^T g_x(t,x,\dot{x}) = \frac{d}{dt}\left\{\tau\theta_{\dot{x}}(t,x,\dot{x}) + y(t)^T g_{\dot{x}}(t,x,\dot{x})\right\} \tag{2.1}$$

$$y(t)^T g(t,x,\dot{x}) = 0 \tag{2.2}$$

$$(\tau, y(t)) \neq 0, \quad \tau \geq 0, \quad y_j(t) \geq 0, \quad j = 1, \ldots, m \tag{2.3}$$

$\forall t \in I$*, excepto en las discontinuidades,*

Esta condición de punto crítico se dice, para el caso de $\tau > 0$, que es de tipo Kuhn-Tucker, y en el que podemos tomar $\tau = 1$, quedando la condición de la forma siguiente:

DEFINICIÓN 2.5 *Diremos que $x \in K$ es un punto crítico de tipo Kuhn-Tucker para (PVR) si existe $y : I \longrightarrow R^m$ derivable a trozos, tal que*

$$\theta_x(t, x, \dot{x}) + y(t)^T g_x(t, x, \dot{x}) = \frac{d}{dt}\left\{\theta_{\dot{x}}(t, x, \dot{x}) + y(t)^T g_{\dot{x}}(t, x, \dot{x})\right\} \tag{2.4}$$

$$y(t)^T g(t, x, \dot{x}) = 0 \tag{2.5}$$

$$y_j(t) \geq 0, \quad j = 1, \ldots, m, \tag{2.6}$$

$\forall t \in I$, excepto en las discontinuidades.

Diremos que una solución óptima $\bar{x}$ de (PVR) es *normal* ([36],[4]) si $\tau \neq 0$ en (2.1). Y en ese caso, podemos tomar $\tau = 1$.

En nuestro problema (PVR), la condición de punto crítico es necesaria para que un punto o función $\bar{x}$ sea solución óptima global o local, lo que queda reflejado en el siguiente presentado por Chandra, Craven y Husain [11] apoyado en los resultados de Craven [15] y Craven y Mond [16], y por Mond [35], a partir de resultados de Valentine [56].

TEOREMA 2.1 *Sea $\bar{x}$ solución óptima de (PVR), entonces $\bar{x}$ es punto crítico de Fritz-John, i.e., existe $\tau \in R$, $y : I \longrightarrow R^m$ derivable a trozos, tal que se verifican (2.1), (2.2), (2.3), $\forall t \in I$, excepto en las discontinuidades.*

Si en este resultado exigimos a $\bar{x}$ que sea una solución óptima normal ([36],[4]), entonces tendremos como condición necesaria que $\bar{x}$ es punto crítico de Kuhn-Tucker.

Este resultado también es aplicable a otros problemas similares a (PVR). En el caso de (PV), y como consecuencia del teorema anterior tendremos que si $\bar{x}$ es mínimo o solución óptima, estonces

$$\theta_x(t, x, \dot{x}) = \frac{d}{dt}\left\{\theta_{\dot{x}}(t, x, \dot{x})\right\} \tag{2.7}$$

2.4 L-(KT/FJ)-pseudoinvexidad en Problemas Variacionales Escalares

En la literatura matemática correspondiente a problemas variacionales, y al igual que ocurriese en el capítulo anterior, se constata la búsqueda de clases de funciones para las que un punto que verifique una determinada condición de optimalidad sea solución óptima al problema. En ese sentido, y de forma similar que en Chandra, Craven y Husain [11], se prueba que bajo convexidad todo punto crítico es solución óptima.

TEOREMA 2.2 *Sea $\bar{x} \in K$ un y $\theta(\cdot, \bar{x}(\cdot), \dot{\bar{x}}(\cdot))$ y $g(\cdot, \bar{x}(\cdot), \dot{\bar{x}}(\cdot))$ convexas en I. Si $\bar{x}$ es un punto crítico de Fritz-John, entonces $\bar{x}$ es solución óptima.*

Al igual que ha ocurrido en Programación Matemática en espacio finito dimensional, la convexidad se ha ido generalizando. Es decir, se han ido relajando las condiciones exigidas a las funciones de nuestro problema variacional para pasar de punto crítico a mínimo, como condición suficiente, llegándose incluso a la caracterización. En este sentido, un importante concepto introducido en Programación Matemática fue el de función invex aplicada a un punto finito dimensional, por Hanson [24]. Este concepto fue extendido a función aplicada a punto infinito dimensional, por Mond, Chandra y Husain [35], y que definimos a continuación, aplicada a una función θ como hasta ahora.

DEFINICIÓN 2.6 *Diremos que θ es invex en $\bar{x} \in X$ respecto a una función η si existe una función $\eta(t, x, \dot{x})$, con $\eta(t, x, x) = 0$, tal que para todo $x \in X$*

$$\theta(t, x, \dot{x}) - \theta(t, \bar{x}, \dot{\bar{x}}) \geq \theta_x(t, \bar{x}, \dot{\bar{x}})\eta(t, \bar{x}, x) + \theta_{\dot{x}}(t, \bar{x}, \dot{\bar{x}})\frac{d}{dt}\eta(t, \bar{x}, x)$$

Obsérvese, como queda recogido en [36], que si todas las funciones de un problema variacional son independientes de t, éstos se reducen a problemas de programación no lineales. Y en este caso, la definición anterior coincidirá con la de función invex en puntos de conjuntos finitodimensionales (R^n). Lo mismo ocurre con el concepto de pseudoinvexidad empleado por Nahak y Nanda [42], y que más tarde extendieron [44] a $\Theta(x,u) = \int \theta(t,x,\dot{x},u,\dot{u})$.

A su vez, esta definición fue extendida para funcional en vez de función, como el caso de funcional objetivo de un Problema de Control, tal como apareció en un trabajo de Mond y Smart [38], y que escribiremos como posteriormente propusieron Mond y Husain [37].

DEFINICIÓN 2.7 *Diremos que Θ es invex en $\bar{x} \in X$ respecto a una función η, con $\Theta(x) = \int_a^b \theta(t,x,\dot{x})dt$, si existe una función $\eta(t,x,\dot{x})$, con $\eta(t,x,x) = 0$, tal que para todo $x \in X$*

$$\Theta(x) - \Theta(\bar{x}) \geq \int_a^b \left\{ \theta_x(t,\bar{x},\dot{\bar{x}})\eta(t,\bar{x},x) + \theta_{\dot{x}}(t,\bar{x},\dot{\bar{x}})\frac{d}{dt}\eta(t,\bar{x},x) \right\} dt$$

Puede observarse que si independizamos de t esta definición de invexidad de Θ se reduce a la definición de invexidad para funciones reales de variable real aportada en el capítulo 1, al igual que le ocurriese a la definición anterior de invexidad de θ.

De las dos definiciones anteriores se deduce la siguiente relación.

PROPOSICIÓN 2.1 *Si θ es invex entonces $\Theta(x) = \int_a^b \theta(t,x,\dot{x})dt$ es invex.*

En Mond y Smart [38], esta nueva clase de funciones invex queda caracterizada por ser aquellas donde todo punto crítico es un mínimo global para un problema de control sin restricciones. Aplicando este resultado a problemas variacionales sin restricciones, tenemos el siguiente resultado.

TEOREMA 2.3 *Sea K el conjunto factible de (PV). $\Theta(x) = \int_a^b \theta(t,x,\dot{x})dt$ es invex en K si y sólo si todo punto crítico de K es solución óptima.*

El resultado anterior nos proporciona una condición necesaria y suficiente para que un punto crítico nos lleve a una solución óptima en un problema sin restricciones (PV). Para problemas restringidos, como (PVR), disponemos ya de punto crítico como condición necesaria para que un punto factible sea solución óptima; y habrá que exigir alguna hipótesis a las funciones integrantes del problema para que esta condición sea, a su vez, suficiente. Y para ello, si la invexidad generaliza la convexidad, Mond y Husain [37] recurrieron a generalizaciones de pseudoconvexidad.

Sea $\Theta(x) = \int_a^b \theta(t, x, \dot{x})dt$, como hasta ahora.

DEFINICIÓN 2.8 *Diremos que Θ es pseudoinvex en $\bar{x} \in X$ respecto a una función $\eta(t, x, \bar{x})$, si existe una función $\eta(t, x, \dot{x})$, con $\eta(t, x, x) = 0$, tal que para todo $x \in X$*

$$\Theta(x) - \Theta(\bar{x}) < 0 \Rightarrow \int_a^b \left\{ \theta_x(t, \bar{x}, \dot{\bar{x}})\eta(t, \bar{x}, x) + \theta_{\dot{x}}(t, \bar{x}, \dot{\bar{x}})\frac{d}{dt}\eta(t, \bar{x}, x) \right\} dt < 0$$

Una condición suficiente de tipo Kuhn-Tucker nos la proporciona el siguiente resultado de Mond y Husain [37].

TEOREMA 2.4 *Sea $\bar{x} \in K$. Si existe una función diferenciable a trozos $\bar{y} : I \longrightarrow R^n$ tal que $(\bar{x}, \bar{y})$ verifica (2.4), (2.5) y (2.6), y si la función Lagrangiano $\phi(x, \bar{y}) : I \longrightarrow R$, definida por*

$$\phi(x, \bar{y}) = \int_a^b \{\theta(t, x, \dot{x}) + \bar{y}(t)^T g(t, x, \dot{x})\}dt$$

es pseudoinvex en $\bar{x}$ con respecto η, entonces $\bar{x}$ es solución óptima de (PVR).

Otros resultados semejantes [37], aplicando invexidad generalizada a las funciones de (PVR) o a combinaciones de éstas, presentan la condición de

Kuhn-Tucker como condición suficiente para la optimalidad.

Los resultados de [37] continúan siendo ciertos si en las definiciones anteriores sustituimos la condición de $\eta(t, x, x) = 0$ por

$$\eta(a, x, \bar{x}) = 0 = \eta(b, x, \bar{x}),$$

y que asumimos en adelante.

Hasta ahora, los resultados de optimalidad para problemas variacionales están apoyados en condiciones necesarias unos, y otros en condiciones suficientes. Vamos a proponer un nuevo tipo de funciones, que nos proporcionarán condiciones necesarias y suficientes, es decir, caracterizarán el que un punto crítico nos lleve a una solución óptima del problema (PVR).

Consideremos el problema (PVR), con las funciones θ y g definidas como hasta ahora, $\Theta(x) = \int_a^b \theta(t, x, \dot{x})dt$ y $G(x) = \int_a^b g(t, x, \dot{x})dt$.

DEFINICIÓN 2.9 *Diremos que el par (Θ, G) es L-KT- pseudoinvex en $\bar{x} \in X$, si dados $x \in X$, $\bar{y} : I \to R^m$ diferenciable a trozos, con $(\bar{x}, \bar{y})$ que verifica (2.5) y (2.6), existe una función $\eta : I \times R^n \times R^n \times R^n \to R^n$, $\eta(t, x, \bar{x}, \bar{y})$ diferenciable, con $\eta(a, x, \bar{x}, \bar{y}) = 0 = \eta(b, x, \bar{x}, \bar{y})$, tal que*

$$\begin{aligned}
&\Theta(x) - \Theta(\bar{x}) < 0 \Rightarrow \\
&\int_a^b \Big\{(\theta_x(t, \bar{x}, \dot{\bar{x}}) + \bar{y}(t)^T g_x(t, \bar{x}, \dot{\bar{x}}))\eta(t, x, \bar{x}, \bar{y}) \\
&\quad + (\theta_{\dot{x}}(t, \bar{x}, \dot{\bar{x}}) + \bar{y}(t)^T g_{\dot{x}}(t, \bar{x}, \dot{\bar{x}}))\frac{d}{dt}\eta(t, \bar{x}, \dot{\bar{x}}, \bar{y})\Big\} dt < 0
\end{aligned}$$

o equivalentemente,

$$\begin{aligned}
&\int_a^b \{ (\theta_x(t, \bar{x}, \dot{\bar{x}}) + \bar{y}(t)^T g_x(t, \bar{x}, \dot{\bar{x}}))\eta(t, x, \bar{x}, \bar{y}) \\
&\quad +(\theta_{\dot{x}}(t, \bar{x}, \dot{\bar{x}}) + \bar{y}(t)^T g_{\dot{x}}(t, \bar{x}, \dot{\bar{x}}))\frac{d}{dt}\eta(t, x, \bar{x}, \bar{y}) \} dt \geq 0
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \Theta(x) - \Theta(\bar{x}) \geq 0$$

Obsérvese que dados $\bar{x}, x \in X$, existe $\bar{y}$ que verifica (2.5) y (2.6) en la definición anterior; y para ello, basta con tomar $\bar{y}(t) = 0$, $t \in I$.

DEFINICIÓN 2.10 *Diremos que el par (Θ, G) es L-FJ- pseudoinvex en $\bar{x} \in X$, si dados $x \in X$, $\bar{\tau} \in R$, $\bar{y} : I \longrightarrow R^m$ diferenciable a trozos, con $(\bar{x}, \bar{\tau}, \bar{y})$ que verifica (2.2) y (2.3), existe una función $\eta : I \times R^n \times R^n \times R \times R^n \longrightarrow R^n$, $\eta(t, x, \bar{x}, \bar{\tau}, \bar{y})$ diferenciable, con $\eta(a, x, \bar{x}, \bar{\tau}, \bar{y}) = 0 = \eta(b, x, \bar{x}, \bar{\tau}, \bar{y})$, tal que*

$$\Theta(x) - \Theta(\bar{x}) < 0 \Rightarrow$$

$$\int_a^b \Big\{(\bar{\tau}\theta_x(t, \bar{x}, \dot{\bar{x}}) + \bar{y}(t)^T g_x(t, \bar{x}, \dot{\bar{x}}))\eta(t, x, \bar{x}, \bar{\tau}, \bar{y})$$

$$+ (\bar{\tau}\theta_{\dot{x}}(t, \bar{x}, \dot{\bar{x}}) + \bar{y}(t)^T g_{\dot{x}}(t, \bar{x}, \dot{\bar{x}}))\frac{d}{dt}\eta(t, \bar{x}, \dot{\bar{x}}, \bar{\tau}, \bar{y})\Big\}\, dt < 0$$

o equivalentemente,

$$\int_a^b \{\ (\bar{\tau}\theta_x(t, \bar{x}, \dot{\bar{x}}) + \bar{y}(t)^T g_x(t, \bar{x}, \dot{\bar{x}}))\eta(t, x, \bar{x}, \bar{\tau}, \bar{y})$$

$$+(\bar{\tau}\theta_{\dot{x}}(t, \bar{x}, \dot{\bar{x}}) + \bar{y}(t)^T g_{\dot{x}}(t, \bar{x}, \dot{\bar{x}}))\frac{d}{dt}\eta(t, x, \bar{x}, \bar{\tau}, \bar{y})\ \}\, dt \geq 0$$

$$\Rightarrow \Theta(x) - \Theta(\bar{x}) \geq 0$$

Obsérvese que dados $\bar{x}, x \in X$, existe $\bar{\tau}, \bar{y}$ que verifica (2.2) y (2.3) en la definición anterior; y para ello, basta con tomar $\bar{\tau} = 1$, $\bar{y}(t) = 0$, $t \in I$.

La relación entre la L-KT-pseudoinvexidad y la L-FJ-pseudoinvexidad, a partir de sus definiciones, es como sigue.

PROPOSICIÓN 2.2 *Si (Θ, G) es L-KT-pseudoinvex entonces (Θ, G) es L-FJ-pseudoinvex.*

Y la relación de la L-KT-pseudoinvexidad con la pseudoinvexidad es la siguiente.

PROPOSICIÓN 2.3 *Si (Θ, G) es L-KT-pseudoinvex en $\bar{x} \in X$, entonces Θ es pseudoinvex en $\bar{x}$.*

Demostración. Basta tomar $\bar{y}(t) = 0 \quad t \in I$ en la definición 2.9. □

Observemos que en la definición de (Θ, G) L-KT-pseudoinvex consideramos el espacio X para su aplicación. Pero a veces, necesitamos restringir el espacio de aplicación X al conjunto factible K de nuestro problema (PVR). Igualmente ocurre con (Θ, G) L-FJ-pseudoinvex. Por ello, necesitamos de las siguientes definiciones.

DEFINICIÓN 2.11 *Diremos que el problema (PVR) es L-KT-pseudoinvex si se verifica la definición 2.9 considerando como espacio el conjunto factible K, i.e., $x, \bar{x} \in K$.*

DEFINICIÓN 2.12 *Diremos que el problema (PVR) es L-FJ-pseudoinvex si se verifica la definición 2.10 considerando como espacio el conjunto factible K, i.e., $x, \bar{x} \in K$.*

La relación existente entre L-FJ-pseudoinvexidad y L-KT-pseudoinvexidad de (PVR) es la siguiente.

PROPOSICIÓN 2.4 *Si (PVR) es L-FJ-pseudoinvex, entonces (PVR) es L-KT-pseudoinvex.*

Y en relación al concepto de pseudoinvexidad empleado en [37] proponemos el siguiente resultado.

PROPOSICIÓN 2.5 *Consideremos (PVR) y como espacio el conjunto factible K. Sea $\bar{x} \in K$. Si para todo $\bar{y} : I \rightarrow R^m$ diferenciable a trozos que verifica (2.5) y (2.6), la función Lagrangiano $\phi(x, \bar{y}) = \int_a^b \{\theta(t, x, \dot{x}) + \bar{y}(t)^T g(t, x, \dot{x})\}dt$, con $x \in K$ es pseudoinvex en $\bar{x}$, entonces (PVR) es L-KT-pseudoinvex.*

Demostración. Para ello, sea $\bar{y}$ que verifica (2.5) y (2.6), y partimos de la situación $x \in K$ tal que $\Theta(x) - \Theta(\bar{x}) < 0$, i.e.,

$$\int_a^b \theta(t, x, \dot{x})dt < \int_a^b \theta(t, \bar{x}, \dot{\bar{x}})dt,$$

que junto a $\bar{y}(t)^T g(t, x, \dot{x}) \leq 0$, $t \in I$, por (2.6) y la factibilidad de x, y a $\bar{y}(t)^T g(t, \bar{x}, \dot{\bar{x}}) = 0$, $t \in I$, por (2.5), nos lleva a que

$$\int_a^b (\theta(t, x, \dot{x}) + \bar{y}^T g(t, x, \dot{x}))dt < \int_a^b (\theta(t, \bar{x}, \dot{\bar{x}}) + \bar{y}(t)^T g(t, \bar{x}, \dot{\bar{x}}))dt$$

Por ser $\phi(\cdot, \bar{y})$ pseudoinvex en $\bar{x}$, existe una función diferenciable $\eta(t, x, \bar{x})$ de forma que

$$\int_a^b \Big\{(\theta_x(t, \bar{x}, \dot{\bar{x}}) + \bar{y}(t)^T g_x(t, \bar{x}, \dot{\bar{x}}))\eta(t, x, \bar{x}, \bar{y})$$
$$+(\theta_{\dot{x}}(t, \bar{x}, \dot{\bar{x}}) + \bar{y}(t)^T g_{\dot{x}}(t, \bar{x}, \dot{\bar{x}}))\frac{d}{dt}\eta(t, x, \bar{x}, \bar{y}) \Big\}\, dt < 0,$$

y por tanto, (PVR) es L-KT-pseudoinvex en $\bar{x}$ respecto $\eta(t, x, \bar{x}, \bar{y}) = \eta(t, x, \bar{x})$.

$\square$

2.5 Condiciones Necesarias y Suficientes. Caracterizaciones

En esta sección, el objetivo va a ser extender los resultados de los problemas escalares de programación matemática, como los aportados por Martin [32], a los problemas variacionales escalares. Antes de enunciar y probar los resultados de optimalidad, necesitamos unos resultados previos. Y comencemos siguiendo [13], lo que nos aporta el siguiente lema.

LEMA 2.1 *Sean z_1, $z_2 : I \to R$ funciones continuas tal que $\int_a^b (z_1(t)\varphi(t) + z_2(t)\dot{\varphi}(t))dt = 0$, $\forall \varphi$ diferenciable con $\varphi(a) = 0 = \varphi(b)$, entonces z_2 es diferenciable y $\dot{z}_2 = z_1$ en I.*

Este resultado sigue siendo cierto para funciones continuas a trozos y diferenciables a trozos en I.

Una consecuencia de este lema es la extensión del mismo para el caso de que z_1 y z_2 sean funciones vectoriales, como vemos a continuación.

PROPOSICIÓN 2.6 *Sean w_1, $w_2 : I \to R^n$ funciones continuas tal que $\int_a^b (w_1^T(t)\psi(t) + w_2^T(t)\dot{\psi}(t))dt = 0$, $\forall \psi$ diferenciable con $\psi(a) = 0 = \psi(b)$, entonces w_2 diferenciable y $\dot{w}_2 = w_1$ en I.*

Demostración. Sea $i \in \{1, \dots, n\}$. Sea $\psi = (\psi_1, \dots, \psi_n)$, con ψ_i diferenciable, $\psi_i(a) = 0 = \psi_i(b)$, y $\psi_j = 0 \quad \forall j \neq i$. Luego ψ diferenciable con $\psi(a) = 0 = \psi(b)$, y en consecuencia

$$0 = \int_a^b (w_1^T(t)\psi(t) + w_2^T(t)\dot{\psi}(t))dt = \int_a^b (w_{1,i}(t)\psi_i(t) + w_{2,i}(t)\dot{\psi}_i(t))dt = 0,$$

$\forall \psi_i$ diferenciable con $\psi_i(a) = 0 = \psi_i(b)$. Aplicando el lema 2.1, tenemos que $w_{2,i}$ es diferenciable y $\dot{w}_{2,i} = w_{1,i}$ en I, y esto para $i = 1, \dots, n$. Por tanto, w_2 diferenciable y $\dot{w}_2 = w_1$ en I. □

Este resultado continúa siendo cierto para funciones continuas a trozos y diferenciables a trozos en I.

En el capítulo 1, aportamos una nueva clase de funciones KT-pseudoinvex que queda caracterizada por el hecho de que todo punto de Kuhn-Tucker es solución óptima. Veamos que esta caracterización se extiende de los problemas escalares de programación a los problemas variacionales. Comencemos con enunciar el siguiente resultado de condición necesaria.

TEOREMA 2.5 *Si todo punto crítico de Kuhn-Tucker es solución óptima para (PVR), entonces (PVR) es L-KT-pseudoinvex.*

Demostración. Sean $x, \bar{x} \in K$, $\bar{y}$ que verifica (2.5)y (2.6), tales que $\Theta(x) - \Theta(\bar{x}) < 0$, ya que de no darse esta situación estaría probado el resultado. Necesitamos encontrar una función $\eta(t, x, \bar{x}, \bar{y})$ diferenciable, $\eta(a, x, \bar{x}, \bar{y}) = 0 = \eta(b, x, \bar{x}, \bar{y})$, de forma que

$$P(\eta(\cdot, x, \bar{x}, \bar{y})) = \int_a^b \{ (\theta_x(t, \bar{x}, \dot{\bar{x}}) + \bar{y}(t)^T g_x(t, \bar{x}, \dot{\bar{x}}))\eta(t, x, \bar{x}, \bar{y})$$
$$+(\theta_{\dot{x}}(t, \bar{x}, \dot{\bar{x}}) + \bar{y}(t)^T g_{\dot{x}}(t, \bar{x}, \dot{\bar{x}}))\frac{d}{dt}\eta(t, x, \bar{x}, \bar{y}) \} dt < 0$$

Y para ello supongamos que con $\eta(t, x, \bar{x}, \bar{y})$ como la definida, $P(\eta(\cdot, x, \bar{x}, \bar{y})) < 0$ no tiene solución. Tampoco existirá $P(\eta(\cdot, x, \bar{x}, \bar{y})) > 0$, ya que bastaría tomar como función $-\eta(t, x, \bar{x}, \bar{y})$. En consecuencia, tenemos que

$$P(\eta(\cdot, x, \bar{x}, \bar{y})) = \int_a^b \{ (\theta_x(t, \bar{x}, \dot{\bar{x}}) + \bar{y}(t)^T g_x(t, \bar{x}, \dot{\bar{x}}))\eta(t, x, \bar{x}, \bar{y})$$
$$+(\theta_{\dot{x}}(t, \bar{x}, \dot{\bar{x}}) + \bar{y}(t)^T g_{\dot{x}}(t, \bar{x}, \dot{\bar{x}}))\frac{d}{dt}\eta(t, x, \bar{x}, \bar{y}) \} dt = 0$$

$\forall \eta(t, x, \bar{x}, \bar{y})$ diferenciable, $\eta(a, x, \bar{x}, \bar{y}) = 0 = \eta(b, x, \bar{x}, \bar{y})$. Por la proposición 2.6,

$$\theta_x(t, x, \dot{x}) + \bar{y}(t)^T g_x(t, x, \dot{x}) = \frac{d}{dt}\left\{\theta_{\dot{x}}(t, x, \dot{x}) + \bar{y}(t)^T g_{\dot{x}}(t, x, \dot{x})\right\}, t \in I,$$

y por tanto, $\bar{x}$ verifica (2.4), (2.5), (2.6), es decir, $\bar{x}$ es punto crítico, y por hipótesis, $\bar{x}$ es solución óptima de (PVR), lo que se contradice con $\Theta(x) - \Theta(\bar{x}) < 0$. Luego existe $\eta(t, x, \bar{x}, \bar{y})$ diferenciable, $\eta(a, x, \bar{x}, \bar{y}) = 0 = \eta(b, x, \bar{x}, \bar{y})$, tal que $P(\eta(\cdot, x, \bar{x}, \bar{y})) < 0$, y en consecuencia, (PVR) es L-KT-pseudoinvex. □

Hemos probado que la L-KT-pseudoinvexidad es condición necesaria, y a continuación vamos a probar que además es condición suficiente.

TEOREMA 2.6 *Si (PVR) es L-KT-pseudoinvex, entonces todo punto crítico de Kuhn-Tucker es solución óptima.*

Demostración. Sea $\bar{x}$ punto crítico, $\bar{x} \in K$, i. e., existe $\bar{y}$ diferenciable a trozos tal que $(\bar{x}, \bar{y})$ verifica (2.4), (2.5), (2.6). Sea $x \in K$. Por ser (PVR) L-KT-pseudoinvex, existe $\eta(t, x, \bar{x}, \bar{y})$ diferenciable, $\eta(a, x, \bar{x}, \bar{y}) = 0 = \eta(b, x, \bar{x}, \bar{y})$ que verifica la definición.

$$\begin{aligned}
&\int_a^b \{(\theta_x(t, \bar{x}, \dot{\bar{x}}) + \bar{y}(t)^T g_x(t, \bar{x}, \dot{\bar{x}}))\eta(t, x, \bar{x}, \bar{y}) \\
&\qquad + (\theta_{\dot{x}}(t, \bar{x}, \dot{\bar{x}}) + \bar{y}(t)^T g_{\dot{x}}(t, \bar{x}, \dot{\bar{x}}))\frac{d}{dt}\eta(t, x, \bar{x}, \bar{y})\}dt \\
&= \int_a^b \Big\{(\theta_x(t, \bar{x}, \dot{\bar{x}}) + \bar{y}(t)^T g_x(t, \bar{x}, \dot{\bar{x}}))\eta(t, x, \bar{x}, \bar{y}) \\
&\qquad - \frac{d}{dt}\left(\theta_{\dot{x}}(t, \bar{x}, \dot{\bar{x}}) + \bar{y}(t)^T g_{\dot{x}}(t, \bar{x}, \dot{\bar{x}})\right)\eta(t, x, \bar{x}, \bar{y})\Big\}\, dt \\
&\qquad + (\theta_{\dot{x}}(t, \bar{x}, \dot{\bar{x}}) + \bar{y}(t)^T g_{\dot{x}}(t, \bar{x}, \dot{\bar{x}}))\eta(t, x, \bar{x}, \bar{y})|_{t=a}^{t=b} \\
&\qquad \text{(integrando por partes)} \\
&= \int_a^b \Big\{\theta_x(t, \bar{x}, \dot{\bar{x}}) + \bar{y}(t)^T g_x(t, \bar{x}, \dot{\bar{x}}) \\
&\qquad - \frac{d}{dt}\left(\theta_{\dot{x}}(t, \bar{x}, \dot{\bar{x}}) + \bar{y}(t)^T g_{\dot{x}}(t, \bar{x}, \dot{\bar{x}})\right)\Big\}\, \eta(t, x, \bar{x}, \bar{y})dt = 0 \\
&\qquad \text{(por (2.4))}
\end{aligned}$$

Por ser (PVR) L-KT-pseudoinvex tenemos $\Theta(x) - \Theta(\bar{x}) \geq 0$, i. e., $\Theta(x) \geq \Theta(\bar{x})$, y que se verifica $\forall x \in K$. Por tanto, $\bar{x}$ es solución óptima de (PVR). $\square$

Y fundiendo los dos resultados anteriores obtenemos la siguiente condición necesaria y suficiente.

COROLARIO 2.1 *Todo punto crítico de Kuhn-Tucker es solución óptima de (PVR) si y sólo si (PVR) es L-KT-pseudoinvex.*

Tal como comenzamos este capítulo, los problemas variacionales escalares pueden entenderse como una generalización de los problemas escalares de programación matemática. En esa generalización, cabe esperarse resultados análogos en los problemas variacionales. Con este corolario, aportamos ese nuevo resultado que extiende y generaliza la KT-invexidad introducida por Martin [32]. En este caso, la clase de funciones llamada a suceder a las KT-invex en problemas escalares es la correspondiente a la L-KT-pseudoinvexidad, obteniéndose un resultado de caracterización semejante al que aportó Martin, pero para problemas variacionales de la forma (PVR).

Como sabemos, la KT-invexidad extiende la invexidad, y ésta coincide con la pseudoinvexidad, en problemas escalares de programación matemática. Si restringimos el problema variacional con restricciones (PVR) al problema variacional (PV), tenemos que la definición de L-KT-pseudoinvex para (PV) y la de F pseudoinvex coinciden. Uniendo esto al teorema 2.3 y al corolario 2.1 llegamos al siguiente resultado.

TEOREMA 2.7 *Θ es invex si y sólo si Θ es pseudoinvex.*

En problemas escalares de programación matemática la clase de funciones invex y la pseudoinvex son equivalentes. Hemos probado que eso mismo ocurre con las clases de funciones invex y pseudoinvex en problemas variacionales (PV).

Continuando con la búsqueda de soluciones para el problema variacional (PVR), pasamos a realizarlo con las condiciones de optimalidad de Fritz-John y la L-FJ-pseudoinvexidad, para los que obtendremos resultados y demostraciones paralelos a los obtenidos con la L-KT-pseudoinvexidad. Tenemos, pues, la siguiente condición necesaria.

TEOREMA 2.8 *Si todo punto crítico de Fritz-John es solución óptima para (PVR), entonces (PVR) es L-FJ-pseudoinvex.*

Además, la L-FJ-pseudoinvexidad es condición suficiente.

TEOREMA 2.9 *Si (PVR) es L-FJ-pseudoinvex, entonces todo punto crítico de Fritz-John es solución óptima para (PVR).*

Del mismo modo que ocurriese con la L-KT-pseudoinvexidad, la L-FJ-pseudoinvexidad es condición necesaria y suficiente, como sigue.

COROLARIO 2.2 *Todo punto crítico de Fritz-John es solución óptima para (PVR) si y sólo si (PVR) es L-FJ-pseudoinvex.*

Como era de esperar, existe una clara simetría entre este resultado y el aportado en el corolario 2.1. De esta manera, hemos extendido los resultados de los problemas escalares de programación matemática, como los aportados por Martin [32], a los problemas variacionales. Y para ello, hemos mejorado los resultados existentes en cuanto que hemos aportado clases de funciones nuevas que quedan caracterizadas por ser aquellas para las que todo punto crítico es solución al problema. Y ello, desde la condición de punto crítico de Kuhn-Tucker o de Fritz-John.

Además, hemos probado que las clases de funciones invex y pseudoinvex utilizadas en la literatura matemática por diversos autores, son la misma clase de funciones.

2.6 Dualidad

Vamos a establecer dualidad entre el problema (PVR) y el siguiente, que procede del problema dual de tipo Mond-Weir, formulado por Bector, Chandra y Husain [4].

$$(DVR1) \quad \text{Maximiza} \int_a^b \theta(t,u,\dot{u})dt$$

$$\text{sujeto a:}$$

$$u(a)=\alpha, \quad u(b)=\beta \tag{2.8}$$

$$\theta_x(t,u,\dot{u})+y(t)^T g_x(t,u,\dot{u}) = \frac{d}{dt}\left\{\theta_{\dot{x}}(t,u,\dot{u})+y(t)^T g_{\dot{x}}(t,u,\dot{u})\right\} \tag{2.9}$$

$$y(t)^T g(t,u,\dot{u})=0 \tag{2.10}$$

$$y_j(t)\geq 0, \quad j=1,\ldots,m, \quad t\in I \tag{2.11}$$

Sea H el conjunto factible de (DVR1). Y comencemos con un resultado de dualidad débil, y de ahí obtendremos otros de dualidad fuerte e inversa.

TEOREMA 2.10 (Dualidad débil) *Sea $x\in K$, $(u,y)\in H$.Si (Θ,G) es L-KT-pseudoinvex en u, entonces $\int_a^b \theta(t,x,\dot{x})dt \geq \int_a^b \theta(t,u,\dot{u})dt$.*

Demostración. Por reducción al absurdo, supongamos que no se verifica $\int_a^b \theta(t,x,\dot{x})dt \geq \int_a^b \theta(t,u,\dot{u})dt$, es decir, $\Theta(x)-\Theta(u)<0$. Como (u,y) verifica (2.10) y (2.11), y por ser (F,G) L-KT-pseudoinvex, existe una función $\eta(t,x,u,y)$ diferenciable, con $\eta(a,x,u,y)=0=\eta(b,x,u,y)$ tal que

$$\int_a^b \Bigg\{ (\theta_x(t,u,\dot{u}) + y(t)^T g_x(t,u,\dot{u}))\eta(t,x,u,y)$$
$$+ (\theta_{\dot{x}}(t,u,\dot{u}) + y(t)^T g_{\dot{x}}(t,u,\dot{u}))\frac{d}{dt}\eta(t,x,u,y) \Bigg\} dt < 0 \tag{2.12}$$

Por otro lado,

$$\int_a^b \Bigg\{ (\theta_x(t,u,\dot{u}) + y(t)^T g_x(t,u,\dot{u}))\eta(t,x,u,y)$$
$$+ (\theta_{\dot{u}}(t,u,\dot{u}) + y(t)^T g_{\dot{u}}(t,u,\dot{u}))\frac{d}{dt}\eta(t,x,u,y) \Bigg\} dt$$
$$= \int_a^b \Bigg\{ (\theta_x(t,u,\dot{u}) + y(t)^T g_x(t,u,\dot{u}))\eta(t,x,u,y)$$
$$- \left(\frac{d}{dt}(\theta_{\dot{x}}(t,u,\dot{u}) + y(t)^T g_{\dot{x}}(t,u,\dot{u}))\right)\eta(t,x,u,y) \Bigg\} dt$$
$$+(\theta_{\dot{x}}(t,u,\dot{u}) + y(t)^T g_{\dot{x}}(t,u,\dot{u}))^T \eta(t,x,u,y)|_{t=a}^{t=b}$$

(integrando por partes)

$$= \int_a^b \Bigg\{ \theta_x(t,u,\dot{u}) + y(t)^T g_x(t,u,\dot{u})$$
$$- \left(\frac{d}{dt}(\theta_{\dot{x}}(t,u,\dot{u}) + y(t)^T g_{\dot{x}}(t,u,\dot{u}))\right) \Bigg\} \eta(t,x,u,y)dt = 0,$$

por (2.9),

lo que contradice a (2.12). Por tanto

$$\int_a^b \theta(t,x,\dot{x})dt \geq \int_a^b \theta(t,u,\dot{u})dt$$

$\square$

Una consecuencia de este teorema es que si (Θ, G) es L-KT-pseudoinvex, entonces

$$\int_a^b \theta(t,x,\dot{x})dt \geq \int_a^b \theta(t,u,\dot{u})dt, \qquad \forall x \in K, \quad \forall (u,y) \in H.$$

Este resultado de dualidad débil nos permite probar el siguiente de dualidad fuerte.

TEOREMA 2.11 (Dualidad fuerte) *Sea $\bar{x}$ es una solución óptima normal ([36] ,[4]) de (PVR). Si (Θ, G) es L-KT-pseudoinvex, entonces existe $\bar{y} : I \longrightarrow R^m$ diferenciable a trozos tal que $(\bar{x}, \bar{y})$ es solución óptima de (DVR1), y los correspondiente valores objetivos son iguales.*

Demostración. Como $\bar{x}$ solución óptima normal de (PVR), por el teorema 2.1 y la normalidad de $\bar{x}$ $(\tau = 1)$ existe $\bar{y} : I \longrightarrow R^m$ diferenciable a trozos tal que $(\bar{x}, \bar{y})$ satisface

$$\theta_x(t,\bar{x},\dot{\bar{x}}) + \bar{y}(t)^T g_x(t,\bar{x},\dot{\bar{x}}) = \frac{d}{dt}\left\{\theta_{\dot{x}}(t,\bar{x},\dot{\bar{x}}) + \bar{y}(t)^T g_{\dot{x}}(t,\bar{x},\dot{\bar{x}})\right\}$$

$$\bar{y}(t)^T g(t,\bar{x},\dot{\bar{x}}) = 0$$

$$\bar{y}_j(t) \geq 0, \quad j = 1,\ldots,m$$

$$t \in I$$

Por tanto, $(\bar{x}, \bar{y}) \in H$. Por el teorema de dualidad débil, $(\bar{x}, \bar{y})$ es solución óptima de (DVR1), y evidentemente, los valores objetivo de (DVR1) y (PVR) son iguales. □

La nueva clase L-KT-pseudoinvex nos permite aportar un resultado de dualidad inversa, como mostramos a continuación.

TEOREMA 2.12 (Dualidad inversa) *Sea $(\bar{u}, \bar{y})$ solución óptima de (DVR1). Si $\bar{u} \in K$ y (Θ, G) es L-KT-pseudoinvex, entonces $\bar{u}$ es solución óptima de (PVR) y los valores objetivo de los problemas son iguales.*

Demostración. Como (Θ, G) es L-KT-pseudoinvex, y aplicando el teorema de dualidad débil, tenemos que

$$\int_a^b \theta(t, x, \dot{x})dt \geq \int_a^b \theta(t, \bar{u}, \dot{\bar{u}})dt,$$

$\forall x \in K$. Y por ser $\bar{u} \in K$, llegamos a $\bar{u}$ solución óptima de (PVR), y los valores objetivo de los problemas son iguales. □

En este estudio de la dualidad hemos empleado como problema dual (DVR1), donde sus restricciones tienden a las condiciones de Kuhn-Tucker. De la misma forma, si sus restricciones tendiensen a las condiciones de Fritz-John, sería necesario otro problema dual. Para ello, formulamos el problema dual (DVR2):

$$(DVR2) \quad \text{Maximiza} \int_a^b \theta(t, u, \dot{u})dt$$
$$\text{sujeto a:}$$

$$u(a) = \alpha, \quad u(b) = \beta \tag{2.13}$$

$$\tau\theta_x(t, u, \dot{u}) + y(t)^T g_x(t, u, \dot{u}) = \frac{d}{dt}\left\{\tau\theta_{\dot{x}}(t, u, \dot{u}) + y(t)^T g_{\dot{x}}(t, u, \dot{u})\right\} \tag{2.14}$$

$$y(t)^T g(t, u, \dot{u}) = 0 \tag{2.15}$$

$$(\tau, y(t)) \neq 0, \quad \tau \geq 0, \quad y_j(t) \geq 0, \quad j = 1, \dots, m, \quad t \in I \tag{2.16}$$

En el estudio de la dualidad de (PVR) con (DVR2), nuevamente sea H el conjunto factible de (DVR2). Procediendo del mismo modo que en las demostraciones de los teoremas 2.10, 2.11 y 2.12, pero bajo L-FJ-pseudoinvexidad, enunciamos los siguientes resultados de dualidad entre (PVR) y (DVR2).

TEOREMA 2.13 (Dualidad débil) *Sea $x \in K$, $(u, \tau, y) \in H$.Si (Θ, G) es L-FJ-pseudoinvex en u, entonces $\int_a^b \theta(t, x, \dot{x})dt \geq \int_a^b \theta(t, u, \dot{u})dt$.*

Consecuencia de este teorema es que si (Θ, G) es L-FJ-pseudoinvex entonces

$$\int_a^b \theta(t, x, \dot{x})dt \geq \int_a^b \theta(t, u, \dot{u})dt, \qquad \forall x \in K, \quad \forall (u, \tau, y) \in H.$$

TEOREMA 2.14 (Dualidad fuerte) *Sea $\bar{x}$ una solución óptima de (PVR). Si (Θ, G) es L-FJ-pseudoinvex, entonces existe $\bar{\tau} \in R$, $\bar{y} : I \longrightarrow R^m$ diferenciable a trozos tal que $(\bar{x}, \bar{\tau}, \bar{y})$ es solución óptima de (DVR2), y los correspondiente valores objetivos son iguales.*

TEOREMA 2.15 (Dualidad inversa) *Sea $(\bar{u}, \bar{\tau}, \bar{y})$ una solución óptima de (DVR2). Si $\bar{u} \in K$ y (Θ, G) es L-FJ-pseudoinvex, entonces $\bar{u}$ es solución óptima de (PVR) y los valores objetivo de los problemas son iguales.*

Las aportaciones conseguidas anteriormente con las clases de funciones L-KT-pseudoinvex y L-FJ-pseudoinvex han continuado en el estudio de la dualidad. Hemos conseguido probar los tres resultados clásicos de dualidad, como era de esperar. Con ello, además, volvemos a incidir en la generalización que suponen los problemas variacionales respecto a los problemas escalares de programación matemática, también en el estudio de la dualidad.

2.7 Valores de Contorno Naturales

En nuestro problema variacional primal, los puntos x necesitan ser fijados en los extremos del intervalo I (condiciones de contorno), es decir, $x(a)$ y $x(b)$ fijos. Cuando esto no es necesario, pasamos a un problema variacional con valores de contorno naturales, y cuya formulación es la siguiente.

$$(PN) \qquad \text{Minimiza} \int_a^b \theta(t,x,\dot{x})dt$$

$$\text{sujeto a:}$$

$$g_j(t,x(t),\dot{x}(t)) \leq 0, \quad j=1,\ldots,m, \quad t \in I$$

Lo mismo ocurre con los problemas duales asociados, y cuyas formulaciones son como sigue.

$$(DN1) \qquad \text{Maximiza} \int_a^b \theta(t,u,\dot{u})dt$$

$$\text{sujeto a:}$$

$$\theta_x(t,u,\dot{u}) + y(t)^T g_x(t,u,\dot{u}) = \frac{d}{dt}\left\{\theta_{\dot{x}}(t,u,\dot{u}) + y(t)^T g_{\dot{x}}(t,u,\dot{u})\right\}$$

$$y(t)^T g(t,u,\dot{u}) = 0$$

$$y_j(t) \geq 0, \quad j=1,\ldots,m, \quad t \in I$$

$$[\theta_{\dot{x}}(t,u,\dot{u}) + y(t)^T g_{\dot{x}}(t,u,\dot{u})]_{t=a} = 0 \tag{2.17}$$

$$[\theta_{\dot{x}}(t,u,\dot{u}) + y(t)^T g_{\dot{x}}(t,u,\dot{u})]_{t=b} = 0 \tag{2.18}$$

$$(DN2) \qquad \text{Maximiza} \int_a^b \theta(t,u,\dot{u})dt$$

$$\text{sujeto a:}$$

$$\tau\theta_x(t,u,\dot{u}) + y(t)^T g_x(t,u,\dot{u}) = \frac{d}{dt}\left\{\tau\theta_{\dot{x}}(t,u,\dot{u}) + y(t)^T g_{\dot{x}}(t,u,\dot{u})\right\}$$

$$y(t)^T g(t,u,\dot{u}) = 0$$

$$(\tau, y(t)) \neq 0, \quad \tau \geq 0, \quad y_j(t) \geq 0, \quad j = 1, \ldots, m, \quad t \in I$$

$$[\tau\theta_{\dot{x}}(t, u, \dot{u}) + y(t)^T g_{\dot{x}}(t, u, \dot{u})]_{t=a} = 0 \tag{2.19}$$

$$[\tau\theta_{\dot{x}}(t, u, \dot{u}) + y(t)^T g_{\dot{x}}(t, u, \dot{u})]_{t=b} = 0 \tag{2.20}$$

La expresión $[\theta_{\dot{x}} - y^T g_{\dot{x}}]_{t=d}$ es el valor que toma $\theta_{\dot{x}} - y^T g_{\dot{x}}$ en $t = d$, con $d = a, b$. Lo mismo ocurre con la expresión $[\tau\theta_{\dot{x}} - y^T g_{\dot{x}}]_{t=d}$.

En el caso de (PN), el conjunto factible lo denotamos por $K = \{x \in X : g(t, x(t), \dot{x}(t)) \leq 0, \quad t \in I\}$; y para (DN1) y (DN2) los denotaremos por H_1 y H_2, respectivamente.

Para establecer las resultados de condiciones tanto necesarias como suficientes para (PN), basta enunciar los teoremas correspondientes a (PVR) con las modificaciones de contorno referentes a K y a las definiciones de pseudoinvexidad empleadas.

En el establecimiento de la dualidad entre (PVR) y (DVR1) es necesario, para la demostración de la dualidad débil,

$$(\theta_{\dot{x}}(t, u, \dot{u}) + y(t)^T g_{\dot{x}}(t, u, \dot{u}))\eta(t, x, u, y)|_{t=a}^{t=b} = 0;$$

y para ello utilizábamos que $\eta(a, x, u, y) = 0 = \eta(b, x, u, y)$. Evidentemente, esto continúa siendo cierto con valores naturales de contorno y con (2.17) y (2.18). Luego si hacemos las modificaciones en los argumentos propuestas anteriormente para (PVR) y reemplazamos H_1 por H, queda establecida la dualidad entre (PN) y (DN1): débil, fuerte e inversa (las demostraciones de estos resultados son análogas a las anteriores). Del mismo modo, (2.19) y (2.20) vienen a reemplazar la condición de $\eta(a, x, u, \tau, y) = 0 = \eta(b, x, u, \tau, y)$ y

$$(\tau\theta_{\dot{x}}(t, u, \dot{u}) + y(t)^T g_{\dot{x}}(t, u, \dot{u}))\eta(t, x, u, \tau, y)|_{t=a}^{t=b} = 0,$$

luego, con H_2 en lugar de H_1, tenemos la dualidad entre (PN) y (DN2).

En el caso en que se fije $x(a)$ ó $x(b)$, entonces la correspondiente condición es omitida ((2.17) ó (2.19) en el primer caso, y (2.18) ó (2.20) en el segundo).

2.8 Caso Estático

En esta sección vamos a estudiar el problema variacional (PVR) en el caso en el que las funciones no dependan de t, lo que llamamos caso estático. Si independizamos de t las funciones del problema (PVR) y, por tanto, eliminamos la condición $x(a) = \alpha, x(b) = \beta$, pasamos a tener un problema de programación matemática escalar de la forma

$$\begin{array}{ll} \text{(PR)} & \text{Minimiza } \theta(x) \\ & \text{sujeto a:} \\ & g(x) \leqq 0 \\ & x \in R^n \end{array}$$

donde $\theta : R^n \to R$ y $g = (g_1, \ldots, g_m) : R^n \to R^m$ funciones diferenciables.

De esta forma, constatamos lo que hemos venido avanzando a lo largo del capítulo. Es decir, afirmar el problema variacional (PVR) es una extensión del problema de programación (PR). En esa línea, vamos a probar que, igualmente, la L-KT/FJ-pseudoinvexidad es una extensión de la KT/FJ-pseudoinvexidad.

Si aplicamos la definición 2.9 de problema L-KT-pseudoinvex a (PR), ésta pasa a quedar de la forma siguiente:

DEFINICIÓN 2.13 *Diremos que (PR) es L-KT-pseudoinvex si dados $x, \bar{x}$ factibles, y dados $\lambda \in R, \mu \in R^m$, $(\lambda, \mu) \geq 0$, $\lambda \neq 0$, existe $\eta(x, \bar{x}, \lambda, \mu) \in R^n$ de manera que se verifica*

$$\theta(x) - \theta(\bar{x}) < 0 \Rightarrow \lambda^T \nabla\theta(\bar{x})\eta(x, \bar{x}, \lambda, \mu) + \mu_I^T \nabla g_I(\bar{x})\eta(x, \bar{x}, \lambda, \mu) < 0,$$

donde $I = I(\bar{x}) = \{i = 1, \ldots, m : g_i(\bar{x}) = 0\}$.

Como $\lambda \neq 0$, podemos dividir previamente la expresión anterior por λ, y en definitiva nos queda de la forma: dados $x, \bar{x}$ factibles, y dado $\mu \in R^m$, $\mu \geq 0$, existe $\eta(x, \bar{x}, \mu) \in R^n$ de manera que se verifica

$$\theta(x) - \theta(\bar{x}) < 0 \Rightarrow \nabla\theta(\bar{x})\eta(x, \bar{x}, \mu) + \mu_I^T \nabla g_I(\bar{x})\eta(x, \bar{x}, \mu) < 0 \tag{2.21}$$

Por mantener la notación, al conjunto factible de (PR) lo denotaremos por $K = \{x \in R^n : g(x) \leqq 0\}$.

Vamos a probar que la definición de L-KT-pseudoinvexidad aplicada a (PR), es decir, (2.21), coincide con la de KT-pseudoinvexidad explicada en el capítulo anterior.

TEOREMA 2.16 *(PR) es L-KT-pseudoinvex, es decir, dados $x, \bar{x} \in K$, y dado $\mu \in R^m$, $\mu \geq 0$, existe $\eta(x, \bar{x}, \mu) \in R^n$ de manera que se verifica*

$$\theta(x) - \theta(\bar{x}) < 0 \Rightarrow \nabla\theta(\bar{x})\eta(x, \bar{x}, \mu) + \mu_I^T \nabla g_I(\bar{x})\eta(x, \bar{x}, \mu) < 0, \tag{2.22}$$

si y sólo si (PR) es KT-pseudoinvex, es decir, dados $x, \bar{x} \in K$, existe $\eta(x, \bar{x})$ de manera que se verifica

$$\theta(x) - \theta(\bar{x}) < 0 \Rightarrow \begin{cases} \nabla\theta(\bar{x})\eta(x, \bar{x}) < 0 \\ \nabla g_I(\bar{x})\eta(x, \bar{x}) \leqq 0, \quad I = I(\bar{x}) \end{cases} \tag{2.23}$$

Demostración.

(i) Supongamos que (PR) es L-KT-pseudoinvex. Para probar que es KT-pseudoinvex, supongamos que no lo sea. Entonces existe $x, \bar{x}$ dos puntos factibles tales que $\theta(x) - \theta(\bar{x}) < 0$ y el sistema

$$\left.\begin{array}{l} \nabla\theta(\bar{x})u < 0 \\ \nabla g_I(\bar{x})u \leqq 0, \quad I = I(\bar{x}) \end{array}\right\}$$

no tiene solución u. En consecuencia, y por el Teorema de Alternativa de Motzkin, existe $(\bar{\lambda}, \bar{\mu'}_I) \geq 0$, $\bar{\lambda} \neq 0$, tal que

$$\bar{\lambda}\nabla\theta(\bar{x}) + \bar{\mu'}_I^T \nabla g_I(\bar{x}) = 0$$

Dividiendo por $\bar{\lambda}$, la expresión queda como sigue

$$\nabla\theta(\bar{x}) + \bar{\mu}_I^T \nabla g_I(\bar{x}) = 0,$$

de donde resulta

$$\nabla\theta(\bar{x})u + \bar{\mu}_I \nabla g_I(\bar{x})u = 0, \qquad \forall u \in R^n \tag{2.24}$$

Por otro lado, como (PR) es L-KT-pseudoinvex, y $\theta(x) - \theta(\bar{x}) < 0$, se tiene que existe $\eta(x, \bar{x}, \bar{\mu})$, donde $\bar{\mu}_j = 0$, para $j \notin I(\bar{x})$, de manera que

$$\nabla\theta(\bar{x})\eta(x, \bar{x}, \bar{\mu}) + \bar{\mu}_I^T \nabla g_I(\bar{x})\eta(x, \bar{x}, \bar{\mu}) < 0,$$

lo cual, si definimos $u = \eta(x, \bar{x}, \bar{\mu})$, está en contradicción con (2.24). Por tanto, (PR) es KT-pseudoinvex.

(ii) Supongamos que (PR) es KT-pseudoinvex. Entonces existe η que verifica (2.23). Sean $x, \bar{x}$ dos puntos factibles tales que $\theta(x) - \theta(\bar{x}) < 0$, ya que en caso contrario estaría probado el teorema. Para probar que (PR) es L-KT-pseudoinvex, sea $\mu \in R^m$, $\mu \geq 0$. Operando en (2.23), obtenemos

$$\nabla\theta(\bar{x})\eta(x, \bar{x}) + \mu_I^T \nabla g_I(\bar{x})\eta(x, \bar{x}) < 0$$

Definimos $\eta(x, \bar{x}, \mu) = \eta(x, \bar{x})$, y en consecuencia se verifica (2.22), es decir, (PR) es L-KT-pseudoinvex. □

Sabemos, por los resultados aportados en el capítulo 1, que la KT- pseudoinvexidad restringida a problemas escalares coincide con el concepto de KT-invexidad introducido por Martin [32]. En el resultado que hemos aportado, queda reflejado que la KT-invexidad no es más que la consecuencia de aplicar el concepto de L-KT-pseudoinvexidad a un caso concreto de problema variacional: un problema escalar de programación matemática.

Procediendo del mismo modo, tenemos que al aplicar la definición 2.10 de L-FJ-pseudoinvexidad al caso estático, en concreto a (PR), resulta:

DEFINICIÓN 2.14 *Diremos que (PR) es L-FJ-pseudoinvex si dados $x, \bar{x} \in K$, y dados $\tau \in R, \mu \in R^m$, $(\tau, \mu) \geq 0$, existe $\eta(x, \bar{x}, \tau, \mu) \in R^n$ de manera que se verifica*

$$\theta(x) - \theta(\bar{x}) < 0 \Rightarrow \tau \nabla \theta(\bar{x}) \eta(x, \bar{x}, \tau, \mu) + \mu_I^T \nabla g_I(\bar{x}) \eta(x, \bar{x}, \tau, \mu) < 0, \qquad (2.25)$$

donde $I = I(\bar{x})$.

Probemos que esta definición es equivalente, en (PR), a la de FJ-pseudoinvex.

TEOREMA 2.17 *(PR) es L-FJ-pseudoinvex, es decir, dados $x, \bar{x} \in K$, y dados $\tau \in R, \mu \in R^m$, $(\tau, \mu) \geq 0$, existe $\eta(x, \bar{x}, \tau, \mu) \in R^n$ de manera que se verifica*

$$\theta(x) - \theta(\bar{x}) < 0 \Rightarrow \tau \nabla \theta(\bar{x}) \eta(x, \bar{x}, \tau, \mu) + \mu_I^T \nabla g_I(\bar{x}) \eta(x, \bar{x}, \tau, \mu) < 0, \qquad (2.26)$$

si y sólo si (PR) es FJ-pseudoinvex, es decir, dados $x, \bar{x} \in K$, existe $\eta(x, \bar{x})$ de manera que se verifica

$$\theta(x) - \theta(\bar{x}) < 0 \Rightarrow \begin{cases} \nabla \theta(\bar{x}) \eta(x, \bar{x}) < 0 \\ \nabla g_I(\bar{x}) \eta(x, \bar{x}) < 0, \quad I = I(\bar{x}) \end{cases} \qquad (2.27)$$

Demostración.

(i) Supongamos que (PR) es FJ-pseudoinvex. Entonces existe η que verifica (2.27). Sean $x, \bar{x}$ dos puntos factibles tales que $\theta(x) - \theta(\bar{x}) < 0$, ya que en caso contrario estaría probado el teorema. Para probar que (PR) es L-FJ-pseudoinvex, consideremos $\tau \in R, \mu \in R^m$, $(\tau, \mu) \geq 0$. Si operamos en (2.27), obtenemos

$$\tau \nabla \theta(\bar{x}) \eta(x, \bar{x}) + \mu_I^T \nabla g_I(\bar{x}) \eta(x, \bar{x}) < 0$$

Definimos $\eta(x, \bar{x}, \tau, \mu) = \eta(x, \bar{x})$, y por tanto se verifica (2.26), es decir, (PR) es L-FJ-pseudoinvex.

(ii) Supongamos que (PR) es L-FJ-pseudoinvex. Para probar que es FJ-pseudoinvex, supongamos que no lo sea. Entonces existe $x, \bar{x}$ dos puntos factibles tales que $\theta(x) - \theta(\bar{x}) < 0$ y el sistema

$$\left.\begin{array}{l} \nabla \theta(\bar{x}) u < 0 \\ \nabla g_I(\bar{x}) u < 0, \quad I = I(\bar{x}) \end{array}\right\}$$

no tiene solución u. En consecuencia, y por el Teorema de Alternativa de Gordan, existe $(\bar{\tau}, \bar{\mu}_I) \geq 0$, tal que

$$\bar{\tau} \nabla \theta(\bar{x}) + \bar{\mu}_I \nabla g_I(\bar{x}) = 0,$$

por lo que

$$\bar{\tau} \nabla \theta(\bar{x}) u + \bar{\mu}_I \nabla g_I(\bar{x}) u = 0, \qquad \forall u \in R^n \tag{2.28}$$

Por otro lado, por ser (PR) L-FJ-pseudoinvex, y $\theta(x) - \theta(\bar{x}) < 0$, se tiene que existe $\eta(x, \bar{x}, \bar{\tau}, \bar{\mu})$, donde $\bar{\mu}_j = 0$, para $j \notin I(\bar{x})$, de manera que

$$\bar{\tau} \nabla \theta(\bar{x}) \eta(x, \bar{x}, \bar{\tau}, \bar{\mu}) + \bar{\mu}_I^T \nabla g_I(\bar{x}) \eta(x, \bar{x}, \bar{\tau}, \bar{\mu}) < 0,$$

lo cual, si definimos $u = \eta(x, \bar{x}, \bar{\tau}, \bar{\mu})$, está en contradicción con (2.28). Por tanto, (PR) es FJ-pseudoinvex. □

Al independizar de la variable t, un punto x que verifica la condición de punto crítico de Fritz-John para (PVR), es decir, (2.1), (2.2) y (2.3), pasa a verificar: existe $\tau \in R$, $\mu \in R^m$, de manera que

$$\tau \nabla \theta(x) + \mu^T \nabla g(x) = 0$$

$$\mu^T g(x) = 0$$

$$(\tau, \mu) \geq 0$$

Esta condición viene a ser la de punto de Fritz-John para problemas de programación bajo la formulación de (PR).

De igual forma, la condición de Kuhn-Tucker formulada en (2.4), (2.5) y (2.6) para (PVR), queda bajo la forma de punto crítico de Kuhn-Tuker para (PR), es decir, existe $\mu \in R^m$, de manera que

$$\nabla\theta(x) + \mu^T \nabla g(x) = 0$$

$$\mu^T g(x) = 0$$

$$\mu \geq 0$$

Por lo tanto, las condiciones necesarias y suficientes para que un punto de un problema variacional sea mínimo, en términos de punto crítico y pseudoinvexidad (en las nuevas clases introducidas), son una extensión de las condiciones dadas para un problema de programación matemática escalar (PR).

Como resultado de independizar de t en los problemas (DVR1) y (DVR2) tenemos las formulaciones

$$(DR1) \qquad \text{Maximiza} \quad \theta(u)$$

sujeto a:

$$\nabla\theta(x) + \mu^T \nabla g(x) = 0$$

$$\mu^T g(x) = 0$$

$$\mu \geq 0$$

y

$$
\begin{array}{rl}
(DR2) & \text{Maximiza} \quad \theta(u) \\
& \text{sujeto a:} \\
& \tau\nabla\theta(x) + \mu^T\nabla g(x) = 0 \\
& \mu^T g(x) = 0 \\
& (\tau, \mu) \geq 0
\end{array}
$$

respectivamente.

Los problemas (DR1) y (DR2) son problemas duales asociados a (PR). Por lo tanto, y como consecuencia de lo anterior, la dualidad establecida entre (PVR) y los problemas (DVR1) y (DVR2) generaliza a la establecida entre (PR) y los problemas (DR1) y (DR2). Es decir, los resultados de dualidad probados en este capítulo para los problemas variacionales, extienden los resultados para los problemas de programación matemática escalar.

Capítulo 3

PROBLEMA VARIACIONAL MÚLTIPLE. EFICIENCIA DÉBIL

3.1 Preliminares

Al igual que ocurriese en los problemas de programación matemática multiobjetivo, necesitamos definir qué entendemos por soluciones de problemas variacionales multiobjetivo. Ya, en el capítulo 1, planteamos, entre otros, las soluciones débilmente eficientes, que conforman un conjunto que contiene al de las soluciones eficientes, y que constituyen un conjunto interesante de puntos, desde el punto de vista de soluciones.

Al igual que ocurriese con los problemas variacionales escalares, los problemas variacionales multiobjetivo podemos entenderlos como una extensión de los problemas de programación matemática. En ese sentido, en el capítulo anterior, mostramos esta circustancia en la sección correspondiente al caso estático. De hecho, probamos que las nuevas clases de funciones que hemos introducido en este trabajo también pueden entenderse como extensiones de las ya existentes. Y lo mismo ocurre con los puntos de ensilladura. De ahí, concluimos que los resultados de caracterización en problemas variacionales son, pues, una generalización de los resultados existentes y de los aportados en este trabajo para problemas de programación matemática, extendiendo a su vez los resultados a problemas variacionales escalares.

Siguiendo con esta línea, vamos a introducir nuestro problema variacional múltiple con el objetivo de aportar resultados sobre las soluciones débilmente eficientes. Nos vamos a centrar en problemas variacionales múltiples no restringidos. Y ello, enfocado desde condiciones de optimalidad basado en puntos de ensilladura, como en el capítulo anterior, así como en nuevas clases de funciones en la línea de la pseudoinvexidad.

En este capítulo vamos a introducir y aplicar nuevas técnicas en las demostraciones de algunos resultados.

Seguimos con la notación empleada hasta el momento, y adecuada a los nuevos conceptos. Y por ello, sea $I = [a, b]$ un intervalo real. Sea $f : I \times R^n \times R^n \longrightarrow R^p$ y $g : I \times R^n \times R^n \longrightarrow R^m$ funciones continuamente diferenciables. Y como antes, $f(t, x(t), \dot{x}(t))$ lo denotaremos por comodidad como $f(t, x, \dot{x})$, donde $x : I \longrightarrow R^n$, con derivada $\dot{x}$, y denotaremos las derivadas parciales de f respecto a t, x, $\dot{x}$, mediante f_t, f_x, $f_{\dot{x}}$ respectivamente, de manera que f_x y $f_{\dot{x}}$ son matrices $p \times n$, cuyos vectores correspondientes a la fila i son $f_{i,x}$ y $f_{i,\dot{x}}$, respectivamente, donde

$$f_{i,x} = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_1}, \frac{\partial f_i}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial f_i}{\partial x_n} \right), \qquad f_{i,\dot{x}} = \left(\frac{\partial f_i}{\partial \dot{x}_1}, \frac{\partial f_i}{\partial \dot{x}_2}, \ldots, \frac{\partial f_i}{\partial \dot{x}_n} \right)$$

Del mismo modo consideramos y denotamos g_t, g_x, $g_{\dot{x}}$, usando en el caso de g_x y $g_{\dot{x}}$ matrices de m filas.

Sea $X = C(I, R^n)$ el espacio de las funciones $x : I \longrightarrow R^n$ diferenciables a trozos con la norma

$$\|x\| = \|x\|_\infty + \|Dx\|_\infty$$

donde el operador D viene dado por

$$u = Dx \Leftrightarrow x(t) = \alpha + \int_a^t u(s) ds,$$

donde α es un valor acotado. Por tanto, $D = d/dt$ excepto en las discontinuidades.

3.2 Problema Variacional Múltiple

Nuestro problema variacional multiobjetivo va a estar sujeto a las condiciones de contorno, es decir, los valores en los extremos del intervalo I, que son $x(a)$ y $x(b)$, van a permanecer fijos. Y la formulación de nuestro problema primal es la que sigue.

$$\text{(PVM)} \quad \text{Minimiza} \quad F(x) = \int_a^b f(t, x, \dot{x})dt = $$
$$= \left(\int_a^b f_1(t, x, \dot{x})dt, \ldots, \int_a^b f_p(t, x, \dot{x})dt \right)$$

sujeto a:

$$x(a) = \alpha, \quad x(b) = \beta$$

Continuando con la notación empleada hasta el momento, sea K el conjunto factible del problema (PVM), i. e.,

$$K = \{x \in C(I, R^n) : x(a) = \alpha, \; x(b) = \beta\}.$$

Al igual que ocurriese en los problemas de programación matemática multiobjetivo, los conceptos usuales en la literatura matemática de solución para un problema variacional multiobjetivo son los siguientes.

DEFINICIÓN 3.1 *Diremos que $\bar{x} \in K$ es solución eficiente para (PVM) si no existe $x \in K$ tal que*

$$\int_a^b f(t, x, \dot{x})dt \leq \int_a^b f(t, \bar{x}, \dot{\bar{x}})dt$$

o, de forma equivalente, si para todo $x \in K$,

$$\int_a^b f_i(t, x, \dot{x})dt \leqq \int_a^b f_i(t, \bar{x}, \dot{\bar{x}})dt, \quad \forall i \in \{1, \ldots, p\}$$
$$\Rightarrow \int_a^b f(t, x, \dot{x})dt = \int_a^b f(t, \bar{x}, \dot{\bar{x}})dt$$

Siguiendo la línea de Borwein [10] y de Geoffrion [22] tenemos las definiciones de solución débilmente eficiente y solución propiamente eficiente, respectivamente.

DEFINICIÓN 3.2 *Diremos que $\bar{x} \in K$ es solución débilmente eficiente o mínimo débil para (PVM) si no existe $x \in K$ tal que*

$$\int_a^b f(t, x, \dot{x})dt < \int_a^b f(t, \bar{x}, \dot{\bar{x}})dt$$

De ello sigue que si $\bar{x} \in K$ es solución eficiente para (PVM), entonces también es solución débilmente eficiente.

3.3 Condición de Optimalidad: Punto de Ensilladura Débil

Como ya vimos anteriormente, las condiciones de optimalidad a través de puntos críticos, para problemas variacionales escalares han sido estudiado por numerosos autores [11],[37],[35], y han sido extendidas a los problemas multiobjetivo [5],[33],[9]. Una de estas condiciones de optimalidad, para el problema que abordamos en cuestión (PVM), es la de punto de ensilladura, PEN, y cuya definición es como sigue a continuación.

DEFINICIÓN 3.3 *Diremos que $x \in K$ es un Punto de Ensilladura, PEN, para (PVM) si existe $\lambda \in R^p$ tal que*

$$\lambda^T f_x(t, x, \dot{x}) = \frac{d}{dt}\{\lambda^T f_{\dot{x}}(t, x, \dot{x})\} \tag{3.1}$$

$$\lambda \geq 0 \tag{3.2}$$

Sin embargo, vamos a necesitar una condición de optimalidad más débil que la de PEN para la búsqueda de PDE, como probaremos más adelante, y que a continuación presentamos.

DEFINICIÓN 3.4 *Diremos que $x \in K$ es un Punto de Ensilladura Débil, D-PEN, para (PVM) si existe $\lambda : I = [a,b] \to R^p$, tal que*

$$\lambda(t)^T f_x(t,x,\dot{x}) = \lambda(t)^T \frac{d}{dt} f_{\dot{x}}(t,x,\dot{x}), \qquad t \in I \tag{3.3}$$

$$\lambda(t) \geq 0, \qquad t \in I \tag{3.4}$$

excepto en las discontinuidades.

Pasemos a enunciar la relación existente entre PEN y D-PEN.

PROPOSICIÓN 3.1 *Si $x \in K$ es un PEN, entonces x es un D-PEN.*

Demostración. Si x es un PEN, sea $\lambda \in R^p$ que verifica (3.1) y (3.2). Basta con definir $\bar{\lambda} : I \to R^p$, con $\bar{\lambda}(t) = \lambda$, $t \in I$. Luego, $\bar{\lambda}(t) \geq 0$ y, por (3.1),

$$\bar{\lambda}(t)^T f_x(t,x,\dot{x}) = \lambda^T f_x(t,x,\dot{x}) =$$

$$\frac{d}{dt}\left\{\lambda^T f_{\dot{x}}(t,x,\dot{x})\right\} = \lambda^T \frac{d}{dt} f_{\dot{x}}(t,x,\dot{x}) = \bar{\lambda}(t)^T \frac{d}{dt} f_{\dot{x}}(t,x,\dot{x})$$

En consecuencia, $(x, \bar{\lambda})$ verifica (3.3) y (3.4), luego x es un D-PEN. □

Veamos, en primer lugar, que puede darse en un problema variacional que haya puntos que verifican la condición de punto de ensilladura débil y sin embargo no son puntos débilmente eficientes. Para ello, pasemos al siguiente ejemplo.

EJEMPLO 1

Consideremos el problema variacional (PVM), con $p = 1$ y K el conjunto factible. En este caso, recordemos que el concepto de PDE coincide con el de solución óptima para problemas escalares. El concepto de D-PEN aplicado a $x \in K$ queda bajo la condición

$$f_x(t,x,\dot{x}) = \frac{d}{dt} f_{\dot{x}}(t,x,\dot{x})$$

Sea $I = [0, \frac{3\pi}{2}]$. Como función f de (PVM) tenemos

$$f(t,x,\dot{x}) = -\frac{x(t)^2}{2} + \frac{\dot{x}(t)^2}{2},$$

que como puede observarse $f : I \times R \times R \to R$, función continuamente diferenciable. Los valores de contorno son $(\alpha = 0, \beta = 0)$. El problema variacional queda, por tanto, de la forma

$$\text{Minimiza} \quad F(x) = \int_0^{3\pi/2} \left(-\frac{x(t)^2}{2} + \frac{\dot{x}(t)^2}{2} \right) dt = 0$$

sujeto a:

$$x(0) = 0, x(\frac{3\pi}{2}) = 0$$

Consideremos

$$x(t) = 0, \, t \in I$$

Luego $x \in K$ y $F(x) = 0$. Es fácil ver que se verifica $f_x(t,x,\dot{x}) = 0 = \frac{d}{dt} f_{\dot{x}}(t,x,\dot{x})$, es decir, x es un D-PEN. Veamos que x no es un PDE. Y para ello, sea

$$\bar{x}(t) = \frac{1}{10} \sin(\frac{2}{3}t),$$

$\bar{x}(0) = 0 = \bar{x}(\frac{3\pi}{2})$, $\bar{x} \in K$. Se verifica que

$$F(\bar{x}) = -\frac{5\pi}{24 \cdot 10^2} < 0 = F(x)$$

Por tanto, x es un D-PEN y no es un PDE.

Antes de pasar a probar que la condición de punto de ensilladura débil es necesaria para que un punto factible sea débilmente eficiente, necesitamos enunciar y probar una serie de resultados previos.

Sea $h = (h_1, \ldots, h_n) : I = [a, b] \to R^n$. Notaremos $intI$ el interior de I; $sop(h_i)$, el soporte h_i, es decir, la clausura del conjunto $\{t \in I : h_i(t) \neq 0\}$; y $sop(h) = \cap_{i=1,\ldots,n} sop(h_i)$. Notaremos por $C_0^\infty(intI, R^n)$ el espacio de funciones infinitamente diferenciables con soporte compacto.

En adelante, al referirnos a una función diferenciable en $I = [a, b]$, queremos decir que lo es en $intI$ y que existe la derivada a la derecha de a y la derivada a la izquierda de b.

PROPOSICIÓN 3.2 *Sea $G_i : I \to R^n$, con $G_i^T \eta \in L^1(I; R)$, $\forall \eta : I \to R^n$ diferenciable con $\eta(a) = 0 = \eta(b)$, $i = 1, \ldots, p$. Considérese el siguiente sistema.*

$$\left.\begin{array}{c} \int_a^b G_1(t)^T \eta(t) dt < 0 \\ \vdots \\ \int_a^b G_p(t)^T \eta(t) dt < 0 \end{array}\right\} \quad (3.5)$$

donde $\eta : I \to R^n$ diferenciable, $\eta(a) = 0 = \eta(b)$. Y para todo $t \in int(I)$, el sistema

$$\left.\begin{array}{c} G_1(t)^T \xi(t) < 0 \\ \vdots \\ G_p(t)^T \xi(t) < 0 \end{array}\right\} \quad (S(t))$$

donde $\xi(t)$ es un vector de R^n.

Sea $t_0 \in int(I)$ y G continua en t_0. Si $(S(t_0))$ tiene solución $\xi(t_0)$ entonces (3.5) tiene solución η.

Demostración. Por reducción al absurdo, supongamos que $(S(t_0))$ tiene solución $\xi(t_0)$, $t_0 \in intI$, G continua en t_0. Por la continuidad en t_0, existe $\delta > 0$ tal que $G(t)^T \xi(t_0) < 0$ y acotado en $[t_0 - \delta, t_0 + \delta] \subset I$. Sea $\phi : I =$

$[a, b] \longrightarrow [0, +\infty]$ diferenciable, con $\phi \neq 0$. Por ejemplo, podemos tomar ϕ como

$$\phi(t) = \begin{cases} sen\left(\left(\dfrac{t-t_0+\delta}{\delta}\right)\pi - \dfrac{\pi}{2}\right) + 1 & t \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta] \\ 0 & t \in I \backslash [t_0 - \delta, t_0 + \delta] \end{cases}$$

Es fácil ver que $\phi \geq 0$, $\phi \neq 0$, y $\phi \in C_0^\infty(intI, R)$, y en particular diferenciable. Definimos

$$\eta(\cdot) = \phi(\cdot)\xi(t_0) = (\phi(\cdot)\xi_1(t_0), \ldots, \phi(\cdot)\xi_n(t_0)),$$

luego $\eta(\cdot) \in C_0^\infty(intI, R^n)$, y por tanto diferenciable, con $\eta(a) = 0 = \eta(b)$. Se verifica para $i = 1, \ldots p$ que

$$G_i(t)^T\eta(t) < 0, \qquad \forall t \in sop(\eta). \tag{3.6}$$

Por lo tanto,

$$\int_a^b G_i(t)^T\eta(t)dt = \int_{t_0-\delta}^{t_0+\delta} G_i(t)^T\phi(t)\xi(t_0)dt < 0,$$

y entonces $\eta = \phi\xi(t_0)$ es solución de (3.5). □

NOTA 3.1 *Sea $\varepsilon > 0$. Si se necesita que la medida de $sop(\eta)$ sea menor que ε entonces bastará elegir δ suficientemente pequeño.*

También necesitamos como resultado previo el siguiente.

PROPOSICIÓN 3.3 *Si $\bar{x}$ es un PDE para (PVM), entonces no existe $h : I \longrightarrow R^n$ diferenciable, con $h(a) = 0 = h(b)$ tal que*

$$\left.\begin{array}{c} F'_1(\bar{x};\, h) < 0 \\ \vdots \\ F'_p(\bar{x};\, h) < 0 \end{array}\right\} \tag{3.7}$$

con $F(\bar{x}) = \int_a^b f_x(t, \bar{x}, \dot{\bar{x}})dt$, y donde $F'(\bar{x}; h) = \int_a^b (f_x(t, \bar{x}, \dot{\bar{x}})h(t) + f_{\dot{x}}(t, \bar{x}, \dot{\bar{x}})\dot{h}(t))dt$ es la derivada direccional de F en $\bar{x}$ aplicada en la dirección h.

Demostración. Supongamos que $\bar{x}$ es PDE para (PVM) y que (3.7) tiene solución $\bar{h}$, i.e.,

$$F'_i(\bar{x};\bar{h}) = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{F_i(\bar{x}+\varepsilon\bar{h}) - F_i(\bar{x})}{\varepsilon} < 0, \qquad i = 1,\dots,p$$

Entonces, $\exists\varepsilon_0 > 0$ tal que $\forall 0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$

$$F_i(\bar{x}+\varepsilon\bar{h}) - F_i(\bar{x}) < 0, \qquad i = 1,\dots,p$$

Sea $\varepsilon \leq \varepsilon_0$, $x^* = \bar{x}+\varepsilon\bar{h}$. Tenemos que $F(x^*) < F(\bar{x})$, lo cual está en contradicción con que $\bar{x}$ es un PDE para (PVM). □

Para problemas variacionales escalares, Chandra, Craven y Husain [11] probaron que si $\bar{x}$ es una solución óptima, entonces existe $d/dt\, f_{\dot{x}}(t,\bar{x},\dot{\bar{x}})$. Es decir, la derivabilidad de $f_{\dot{x}}(\cdot,\bar{x},\dot{\bar{x}})$ era una condición necesaria. Para el caso de puntos débilmente eficientes, vamos a exigir que $f_{\dot{x}}(\cdot,\bar{x},\dot{\bar{x}})$ sea diferenciable a trozos.

NOTA 3.2 *En adelante y cuando $f_{\dot{x}}(\cdot,\bar{x},\dot{\bar{x}})$ sea diferenciable a trozos, definimos el conjunto*

$$K(\bar{x}) = \{t \in I : Q_i \textit{ continua en } t, \quad \forall i = 1,\dots,p\}$$

con $Q_i(t) = f_{i,x}(t,\bar{x},\dot{\bar{x}}) - \frac{d}{dt} f_{i,\dot{x}}(t,\bar{x},\dot{\bar{x}})$, $i = 1,\dots,p$. Se verifica, pues, que $K(\bar{x}) = [a,b]$, excepto en las discontinuidades (número finito de puntos).

Ya estamos en condiciones de probar que la condición de D-PEN es una condición de optimalidad necesaria para que un punto $\bar{x}$ sea débilmente eficiente para el problema variacional multiobjetivo (PVM).

TEOREMA 3.1 *Sea $f_{\dot{x}}(\cdot,\bar{x},\dot{\bar{x}})$ diferenciable a trozos. Si $\bar{x}$ es un PDE para (PVM), entonces $\bar{x}$ es un D-PEN.*

Demostración. Supongamos que $\bar{x}$ es un PDE para (PVM). Y consideremos el sistema

$$\left.\begin{array}{c} \int_a^b \left\{ f_{1,x}(t,\bar{x},\dot{\bar{x}}) - \frac{d}{dt} f_{1,\dot{x}}(t,\bar{x},\dot{\bar{x}}) \right\} h(t)dt < 0 \\ \vdots \\ \int_a^b \left\{ f_{p,x}(t,\bar{x},\dot{\bar{x}}) - \frac{d}{dt} f_{p,\dot{x}}(t,\bar{x},\dot{\bar{x}}) \right\} h(t)dt < 0 \end{array}\right\} \tag{3.8}$$

donde $h : I \longrightarrow R^n$ diferenciable, $h(a) = 0 = h(b)$, $sop(h)\backslash K(\bar{x}) = \emptyset$. Bajo estas condiciones tenemos que

$$\begin{aligned} F_i'(\bar{x};\, h) &= \int_a^b (f_{i,x}(t,\bar{x},\dot{\bar{x}})h(t) + f_{i,\dot{x}}(t,\bar{x},\dot{\bar{x}})\dot{h}(t))dt \\ &= f_{i,\dot{x}}(t,\bar{x},\dot{\bar{x}})h(t)|_{t=a}^{t=b} + \int_a^b \left\{ f_{i,x}(t,\bar{x},\dot{\bar{x}}) - \frac{d}{dt} f_{i,\dot{x}}(t,\bar{x},\dot{\bar{x}}) \right\} h(t)dt \\ &= \int_a^b \left\{ f_{i,x}(t,\bar{x},\dot{\bar{x}}) - \frac{d}{dt} f_{i,\dot{x}}(t,\bar{x},\dot{\bar{x}}) \right\} h(t)dt, \quad i = 1,\ldots,p \end{aligned} \tag{3.9}$$

integrando por partes.

Como $\bar{x}$ es un PDE, entonces por la proposición 3.3 se tiene que (3.7) no tiene solución h; y por tanto, por (3.9) y por (3.7), el sistema (3.8) no tiene solución h.

Sea $t \in K(\bar{x})$; y sea $E(t) \subset [a,b]$ un entorno abierto de t, es decir, $E(t) = intE(t)$, $t \in E(t)$, de manera que $Q_i(t) = f_{i,x}(t,\bar{x},\dot{\bar{x}}) - \frac{d}{dt} f_{i,\dot{x}}(t,\bar{x},\dot{\bar{x}})$, $i = 1,\ldots,p$ sea continua en $E(t)$ (este entorno existe, por la nota 3.2). Entonces, el sistema

$$\left.\begin{array}{c} \left\{ f_{1,x}(t,\bar{x},\dot{\bar{x}}) - \frac{d}{dt} f_{1,\dot{x}}(t,\bar{x},\dot{\bar{x}}) \right\} \xi(t) < 0 \\ \vdots \\ \left\{ f_{p,x}(t,\bar{x},\dot{\bar{x}}) - \frac{d}{dt} f_{p,\dot{x}}(t,\bar{x},\dot{\bar{x}}) \right\} \xi(t) < 0 \end{array}\right\} \tag{3.10}$$

no tiene solución $\xi(t) \in R^n$, ya que si tuviera solución, por la proposición 3.2 y la nota 3.1 seguiría que (3.8) tendría solución $h : I \longrightarrow R^n$ diferenciable,

$h(a) = 0 = h(b)$, $sop(h) \subset E(t)$, y hemos probado que esto no es posible. Luego, $\forall t \in K(\bar{x})$, (3.10) no tiene solución.

Entonces, dado $t \in K(\bar{x})$, por el Teorema de Alternativa de Gordan, existe $\lambda : [a, b] \longrightarrow R^p$, $\lambda(t) \geq 0$ tal que

$$\lambda(t)^T \left\{ f_x(t, \bar{x}, \dot{\bar{x}}) - \frac{d}{dt} f_{\dot{x}}(t, \bar{x}, \dot{\bar{x}}) \right\} = 0, \qquad \forall t \in I \tag{3.11}$$

excepto en las discontinuidades, y por tanto

$$\lambda(t)^T f_x(t, \bar{x}, \dot{\bar{x}}) = \lambda(t)^T \frac{d}{dt} f_{\dot{x}}(t, \bar{x}, \dot{\bar{x}}), \qquad \forall t \in I \tag{3.12}$$

por lo que $\bar{x}$ es un D-PEN. □

Como consecuencia directa del teorema anterior tenemos el siguiente resultado.

COROLARIO 3.1 *Sea $\bar{x}$ factible y $f_{\dot{x}}(\cdot, \bar{x}, \dot{\bar{x}})$ una función diferenciable a trozos. Si $\bar{x}$ es un punto eficiente para (PVM), entonces $\bar{x}$ es un D-PEN.*

Luego hemos probado que la condición de optimalidad de D-PEN es una condición necesaria para que $\bar{x}$ sea solución eficiente o débilmente eficiente.

3.4 S-pseudoinvexidad

Nuestro objetivo es encontrar una clase de funciones que quede caracterizada por que todo D-PEN sea PDE. En Mond y Husain [37] aparece el concepto de pseudoinvexidad. Aquel concepto, extendido a una función (funcional) objetivo múltiple F de (PVM), y bajo la denominación de función pseudoinvex, como aparece en el capítulo 2, que es como sigue:

DEFINICIÓN 3.5 *Sea $\bar{x} \in X$. Diremos que F es pseudoinvex de tipo I en $\bar{x}$, con $F(x) = \int_a^b (f_1(t,x,\dot{x}),\ldots,f_p(t,x,\dot{x}))dt$, respecto a una función $\eta : I \times R^n \times R^n \longrightarrow R^n$, $\eta(t,x,\bar{x})$ diferenciable, con $\eta(t,x,x) = 0$, si para todo $x \in X$*

$$F(x) - F(\bar{x}) < 0 \Rightarrow \int_a^b \left\{ f_x(t,\bar{x},\dot{\bar{x}})\eta(t,x,\bar{x}) + f_{\dot{x}}(t,\bar{x},\dot{\bar{x}})\frac{d}{dt}\eta(t,x,\bar{x}) \right\} dt < 0 \tag{3.13}$$

Si $f_{\dot{x}}(t,\bar{x},\dot{\bar{x}})$ es diferenciable a trozos, entonces integrando por partes, como en (3.9), sigue la igualdad

$$\int_a^b \left\{ f_x(t,\bar{x},\dot{\bar{x}})\eta(t,x,\bar{x}) + f_{\dot{x}}(t,\bar{x},\dot{\bar{x}})\frac{d}{dt}\eta(t,x,\bar{x}) \right\} dt$$
$$= \int_a^b \left\{ f_x(t,\bar{x},\dot{\bar{x}}) - \frac{d}{dt} f_{\dot{x}}(t,\bar{x},\dot{\bar{x}}) \right\} \eta(t,x,\bar{x})dt \tag{3.14}$$

Y la definición de F pseudoinvex es equivalente a

$$F(x) < F(\bar{x}) \Rightarrow \int_a^b \left\{ f_x(t,\bar{x},\dot{\bar{x}}) - \frac{d}{dt} f_{\dot{x}}(t,\bar{x},\dot{\bar{x}}) \right\} \eta(t,x,\bar{x})dt < 0 \tag{3.15}$$

Esta clase de funciones fue extendida por Mukherjee and Rao [41]: ρ-pseudoinvexidad.

Pero para nuestro estudio de los PDE en (PVM), vamos a necesitar de una nueva clase de funciones, que será más restrictiva que la de las pseudoinvex, y que bautizaremos con el nombre de S-pseudoinvex. Probaremos que esta es la clase de funciones que estamos buscando, es decir, que es necesario y suficiente que F sea S-pseudoinvex para que un D-PEN sea PDE para (PVM).

DEFINICIÓN 3.6 *Diremos que F es una función S-pseudoinvex si para todo x, $\bar{x} \in K$ se verifica*

$$F(x) - F(\bar{x}) < 0 \Rightarrow \begin{cases} f_{\dot{x}}(t, \bar{x}, \dot{\bar{x}}) \text{ diferenciable a trozos,} \\ \exists t_0 \in K(\bar{x}), \quad \exists \xi(t_0) \in R^n \text{ tal que} \\ \left\{ f_x(t_0, \bar{x}, \dot{\bar{x}}) - \dfrac{d}{dt} f_{\dot{x}}(t_0, \bar{x}, \dot{\bar{x}}) \right\} \xi(t_0) < 0 \end{cases} \tag{3.16}$$

Si para todo $\bar{x} \in K$, $f_{\dot{x}}(\cdot, \bar{x}, \dot{\bar{x}})$ es diferenciable a trozos, la definición de función S-pseudoinvex puede ser escrita de la siguiente forma.

DEFINICIÓN 3.7 *Sea $f_{\dot{x}}(\cdot, \bar{x}, \dot{\bar{x}})$ una función diferenciable a trozos, $\forall \bar{x} \in K$. Diremos que F es S-pseudoinvex si dados x, $\bar{x} \in K$, $F(x) - F(\bar{x}) < 0$, entonces existe $t_0 \in K(\bar{x})$ de manera que el sistema*

$$\left. \begin{array}{c} \left\{ f_{1,x}(t_0, \bar{x}, \dot{\bar{x}}) - \dfrac{d}{dt} f_{1,\dot{x}}(t_0, \bar{x}, \dot{\bar{x}}) \right\} \xi(t_0) < 0 \\ \vdots \\ \left\{ f_{p,x}(t_0, \bar{x}, \dot{\bar{x}}) - \dfrac{d}{dt} f_{p,\dot{x}}(t_0, \bar{x}, \dot{\bar{x}}) \right\} \xi(t_0) < 0 \end{array} \right\} \tag{3.17}$$

tiene solución $\xi(t_0) \in R^n$.

Veamos que la clase de funciones S-pseudoinvex es no vacía. Y para ello consideremos el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 2

Sea $I = [0, 1]$, $f = (f_1, f_2) : I \times R \times R \to R^2$ con

$$f_1(t, x(t), \dot{x}(t)) = t^2 + x(t)^2 + \dot{x}(t)^2,$$

$$f_2(t, x(t), \dot{x}(t)) = -t^2 - x(t)^2 - \dot{x}(t)^2,$$

donde $x \in K$. f es continuamente diferenciable y $f_2 = -f_1$. Probemos que $F(x) - F(\bar{x}) < 0$ no tiene solución $(x, \bar{x}) \in K \times K$. Si $F(x) = (F_1(x), F_2(x))$, entonces

$$F(x) - F(\bar{x}) < 0$$

es equivalente a

$$\left.\begin{array}{ll} F_1(x) - F_1(\bar{x}) & < 0 \\ F_2(x) - F_2(\bar{x}) & < 0 \end{array}\right\}$$

Como $f_2 = -f_1$, sigue que $F_2(x) = -F_1(x)$, y el sistema anterior es equivalente a

$$\left.\begin{array}{ll} F_1(x) - F_1(\bar{x}) & < 0 \\ -F_1(x) + F_1(\bar{x}) & < 0 \end{array}\right\}$$

el cual no tiene solución $(x, \bar{x}) \in K \times K$. Por consiguiente, $F(x) - F(\bar{x}) < 0$ no se verifica, $\forall x, \bar{x} \in K$. Luego F es S-pseudoinvex.

Veamos que la S-pseudoinvexidad está contenida en la pseudoinvexidad, como anunciamos anteriormente.

PROPOSICIÓN 3.4 *Si F es S-pseudoinvex entonces F es pseudoinvex.*

Demostración. Sea F una función S-pseudoinvex. Para probar que F es pseudoinvex, supongamos que existe x, $\bar{x} \in K$ tal que

$$F(x) - F(\bar{x}) < 0$$

Como F es S-pseudoinvex, entonces, por la definición 3.7, $f_{\dot{x}}(t, \bar{x}, \dot{\bar{x}})$ es una función diferenciable a trozos y existe $t_0 \in K(\bar{x})$ tal que el sistema (3.17) tiene solución $\bar{\xi}(t_0) \in R^n$. Desde la proposición 3.2, se sigue que el sistema

$$\left.\begin{array}{c} \displaystyle\int_a^b \left\{ f_{1,x}(t, \bar{x}, \dot{\bar{x}}) - \frac{d}{dt} f_{1,\dot{x}}(t, \bar{x}, \dot{\bar{x}}) \right\} h(t) dt < 0 \\ \vdots \\ \displaystyle\int_a^b \left\{ f_{p,x}(t, \bar{x}, \dot{\bar{x}}) - \frac{d}{dt} f_{p,\dot{x}}(t, \bar{x}, \dot{\bar{x}}) \right\} h(t) dt < 0 \end{array}\right\}$$

tiene solución $\bar{h}: I \longrightarrow R^n$ diferenciable, $\bar{h}(a) = 0 = \bar{h}(b)$. Como x y $\bar{x}$ están fijados, $\bar{h}$ depende de ellos. Definimos $\eta(t,x,\bar{x}) = \bar{h}(t)$, $\forall t \in I$. Por tanto,

$$\int_a^b \left\{ f_{p,x}(t,\bar{x},\dot{\bar{x}}) - \frac{d}{dt} f_{p,\dot{x}}(t,\bar{x},\dot{\bar{x}}) \right\} \eta(t,x,\bar{x}) dt < 0$$

y por la igualdad (3.14),

$$\int_a^b \left\{ f_x(t,\bar{x},\dot{\bar{x}})\eta(t,x,\bar{x}) + f_{\dot{x}}(t,\bar{x},\dot{\bar{x}}) \frac{d}{dt}\eta(t,x,\bar{x}) \right\} dt < 0$$

En consecuencia,

$$F(x) - F(\bar{x}) < 0 \Rightarrow \int_a^b \left\{ f_x(t,\bar{x},\dot{\bar{x}})\eta(t,x,\bar{x}) + f_{\dot{x}}(t,\bar{x},\dot{\bar{x}}) \frac{d}{dt}\eta(t,x,\bar{x}) \right\} dt < 0$$

es decir, F es pseudoinvex. □

3.5 Condición Necesaria y Suficiente. Caracterización

Si consideramos nuestro problema variacional (PVM), vamos a probar que la S-pseudoinvexidad es la clase de funciones que queda caracterizada por que todos los D-PEN nos llevan a PDE, resultado que hemos perseguido a lo largo de este capítulo. Veamos en primer lugar que la S-pseudoinvexidad es condición suficiente para que un D-PEN sea PDE.

TEOREMA 3.2 *Si F es S-pseudoinvex entonces todo D-PEN es PDE para (PVM).*

Demostración. Supongamos que la afirmación no es cierta, i.e., F es S-pseudoinvex, y existe $\bar{x}$ factible que es D-PEN tal que $\bar{x}$ no es PDE.

Como $\bar{x}$ no es PDE, entonces existe $x \in K$, $F(x) - F(\bar{x}) < 0$. Usando que F es una función S-pseudoinvex, tenemos que $f_{\dot{x}}(t, \bar{x}, \dot{\bar{x}})$ es diferenciable a trozos y existe $t_0 \in K(\bar{x})$ tal que el sistema

$$\left.\begin{array}{c} \left\{f_{1,x}(t_0, \bar{x}, \dot{\bar{x}}) - \dfrac{d}{dt} f_{1,\dot{x}}(t_0, \bar{x}, \dot{\bar{x}})\right\}\xi(t_0) < 0 \\ \vdots \\ \left\{f_{p,x}(t_0, \bar{x}, \dot{\bar{x}}) - \dfrac{d}{dt} f_{p,\dot{x}}(t_0, \bar{x}, \dot{\bar{x}})\right\}\xi(t_0) < 0 \end{array}\right\}$$

tiene solución $\xi(t_0) \in R^n$. Debido a la continuidad de $f_x(t_0, \bar{x}, \dot{\bar{x}}) - \frac{d}{dt} f_{\dot{x}}(t_0, \bar{x}, \dot{\bar{x}})$ en $t = t_0$, existe $\delta > 0$ tal que $E(t_0) = [t_0 - \delta, t_0 + \delta] \subset [a, b]$ y $\forall t \in E(t_0)$ el sistema (3.10) tiene solución $\xi(t) = \xi(t_0)$, i.e., se cumple

$$\left.\begin{array}{c} \left\{f_{1,x}(t, \bar{x}, \dot{\bar{x}}) - \dfrac{d}{dt} f_{1,\dot{x}}(t, \bar{x}, \dot{\bar{x}})\right\}\xi(t_0) < 0 \\ \vdots \\ \left\{f_{p,x}(t, \bar{x}, \dot{\bar{x}}) - \dfrac{d}{dt} f_{p,\dot{x}}(t, \bar{x}, \dot{\bar{x}})\right\}\xi(t_0) < 0 \end{array}\right\}$$

$\forall t \in E(t_0)$. Por el Teorema de Alternativa de Gordan, sigue que dado $t \in E(t_0)$, $\forall \nu \in R^p$, $\nu \geq 0$, entonces

$$\nu^T \left\{f_x(t, \bar{x}, \dot{\bar{x}}) - \frac{d}{dt} f_{\dot{x}}(t, \bar{x}, \dot{\bar{x}})\right\} \neq 0,$$

y teniendo en cuenta que la medida de $E(t_0)$ no es cero, concluimos que no existe $\lambda : [a, b] \longrightarrow R^p$, $\lambda(t) \geq 0$, de forma que

$$\lambda(t)^T \left\{f_x(t, \bar{x}, \dot{\bar{x}}) - \frac{d}{dt} f_{\dot{x}}(t, \bar{x}, \dot{\bar{x}})\right\} = 0,$$

$\forall t \in K(\bar{x})$. Luego $\bar{x}$ no es D-PEN, lo cual está en contradicción con las hipótesis de partida. □

Ya tenemos que la S-pseudoinvexidad es condición suficiente. Veamos que es, además, condición necesaria para que un D-PEN sea PDE.

TEOREMA 3.3 *Consideremos que para todo $\bar{x} \in K$ $f_{\dot{x}}(t, \bar{x}, \dot{\bar{x}})$ es una función diferenciable a trozos. Si todo D-PEN es PDE para (PVM) entonces F es S-pseudoinvex.*

Demostración. Supongamos que la afirmación no es cierta, i.e., todo D-PEN es PDE y F no es S-pseudoinvex. Entonces, por la definición 3.6, existen x, $\bar{x}$ puntos factibles para (PVM) tales que

$$F(x) - F(\bar{x}) < 0 \tag{3.18}$$

y para todo $t \in K(\bar{x})$, el sistema

$$\left.\begin{array}{c} \left\{f_{1,x}(t, \bar{x}, \dot{\bar{x}}) - \dfrac{d}{dt} f_{1,\dot{x}}(t, \bar{x}, \dot{\bar{x}})\right\}\xi(t) < 0 \\ \vdots \\ \left\{f_{p,x}(t, \bar{x}, \dot{\bar{x}}) - \dfrac{d}{dt} f_{p,\dot{x}}(t, \bar{x}, \dot{\bar{x}})\right\}\xi(t) < 0 \end{array}\right\}$$

no tiene solución $\xi(t) \in R^n$. Aplicando el Teorema de Alternativa de Gordan, existe $\lambda : I \to R^n$, $\lambda(t) \geq 0$, tal que (3.11), así que

$$\lambda(t)^T f_x(t, \bar{x}, \dot{\bar{x}}) = \lambda(t)^T \frac{d}{dt} f_{\dot{x}}(t, \bar{x}, \dot{\bar{x}}), \qquad \forall t \in I$$

excepto en las discontinuidades, y entonces $\bar{x}$ es un D-PEN y por tanto $\bar{x}$ es un PDE, lo cual contradice a (4.18). □

Desde la proposición 3.4 y el teorema 3.3, se deriva el siguiente resultado.

COROLARIO 3.2 *Para todo $\bar{x} \in K$, sea $f_{\dot{x}}(t, \bar{x}, \dot{\bar{x}})$ una función diferenciable a trozos. Si todo D-PEN es PDE entonces F es pseudoinvex.*

Uniendo el teorema 3.2 y teorema 3.3, obtenemos como consecuencia el resultado de caracterización buscado, y que continúa en la línea de las caracterizaciones de capítulos anteriores.

COROLARIO 3.3 *Si para todo $\bar{x} \in K$, $f_{\dot{x}}(t, \bar{x}, \dot{\bar{x}})$ es una función diferenciable a trozos, entonces todo D-PEN es PDE para (PVM) si y sólo si F es S-pseudoinvex.*

Con este corolario, hemos aportado un resultado que relaciona los nuevos conceptos introducidos en este capítulo. El concepto de D-PEN resulta ser una condición necesaria muy útil a la hora de buscar soluciones débilmente eficientes, ya que es una condición de optimalidad necesaria, como hemos probado.

Por otro lado, la clase de funciones S-pseudoinvex es una buena clase de funciones en el sentido de que se verifica que todo D-PEN, para una función perteneciente a esta clase, nos lleva a un PDE. Lo novedoso en esta clase de funciones S-pseudoinvex es que, además, para que se verifique en una función esto último, necesariamente la función debe pertenecer a una clase de funciones equivalente a la S-pseudoinvex. Por tanto, y tal como queda reflejado en el corolario 3.3, la S-pseudoinvexidad es la clase de funciones buscada en el estudio de PDE a través de condiciones de optimalidad, como es en nuestro caso la de D-PEN. Es decir, la clase S-pseudoinvex queda caracterizada por que todo D-PEN es PDE.

3.6 Caso Estático

Hemos ido mostrando que los problemas variacionales pueden considerarse como una generalización de los problemas de programación matemática, para problemas escalares, como ya mostramos, y ahora vemos que para los problemas multiobjetivos también. Y esta generalización también es cierta para las nuevas clases de funciones que han ido apareciendo en el contexto de nuestros problemas variacionales. Incluso en el estudio de condiciones de optimalidad escalar, hemos probado que generalizan a las correspondientes a los problemas de programación matemática. Veamos que esto mismo sigue ocurriendo en problemas multiobjetivo en el estudio de la eficiencia débil.

En el caso de que en el problema multiobjetivo variacional (PVM) independicemos las funciones de t, y como ya hemos visto con anterioridad, éste pasa a ser un problema de programación matemática multiobjetivo de la forma

$$\text{(PM)} \qquad \begin{array}{l} \text{Minimiza } f(x) \\ x \in R^n \end{array}$$

Por continuar con la misma notación, llamamos K al conjunto factible del problema.

Si el concepto de S-pseudoinvexidad lo aplicamos a nuestro problema variacional (PVM) a cuyas funciones hemos independizado de t, nos queda de la siguiente forma: dados $x, \bar{x} \in K$, y dado $\lambda \in R^p$, $\lambda \geq 0$, existe $\eta(x, \bar{x}, \lambda) \in R^n$ de manera que se verifica

$$f(x) - f(\bar{x}) < 0 \Rightarrow \lambda^T \nabla f(\bar{x}) \eta(x, \bar{x}, \lambda) < 0 \tag{3.19}$$

Con la ayuda del Teorema de Alternativa de Gordan, vamos a probar que la S-peudoinvexidad aplicada a (PM) nos lleva a una clase de funciones ya definida.

TEOREMA 3.4 *F es S-pseudoinvex, es decir, dados $x, \bar{x} \in K$, y dado $\lambda \in R^p$, $\lambda \geq 0$, existe $\eta(x, \bar{x}, \lambda) \in R^n$ de manera que se verifica*

$$f(x) - f(\bar{x}) < 0 \Rightarrow \lambda^T \nabla f(\bar{x}) \eta(x, \bar{x}, \lambda) < 0, \tag{3.20}$$

si y sólo si F es pseudoinvex en K, es decir, dados $x, \bar{x} \in K$, existe $\eta(x, \bar{x})$ de manera que se verifica

$$f(x) - f(\bar{x}) < 0 \Rightarrow \nabla f(\bar{x}) \eta(x, \bar{x}) < 0 \tag{3.21}$$

Demostración.

(i) Supongamos que F es pseudoinvex. Entonces existe η que verifica (3.21). Sean $x, \bar{x}$ dos puntos factibles tales que $f(x) - f(\bar{x}) < 0$, ya que en caso contrario estaría probado el teorema. Para probar que F es S-pseudoinvex, consideremos $\lambda \in R^p$, $\lambda \geq 0$. Si multiplicamos este vector en (3.21), obtenemos

$$\lambda^T \nabla f(\bar{x}) \eta(x, \bar{x}) < 0$$

Definimos $\eta(x, \bar{x}, \lambda) = \eta(x, \bar{x})$, y por tanto se verifica (3.20), es decir, F es S-pseudoinvex.

(ii) Supongamos que F es S-pseudoinvex. Para probar que es pseudoinvex, supongamos que no lo sea. Entonces existe $x, \bar{x}$ dos puntos factibles tales que $f(x) - f(\bar{x}) < 0$ y el sistema

$$\nabla f(\bar{x}) u < 0$$

no tiene solución u. En consecuencia, y por el Teorema de Alternativa de Gordan, existe $\bar{\lambda} \geq 0$, tal que

$$\bar{\lambda}^T \nabla f(\bar{x}) = 0,$$

por lo que

$$\bar{\lambda}^T \nabla f(\bar{x}) u = 0, \qquad \forall u \in R^n \tag{3.22}$$

Por otro lado, por ser F S-pseudoinvex, y $f(x) - f(\bar{x}) < 0$, se tiene que existe $\eta(x, \bar{x}, \bar{\lambda})$, de manera que

$$\bar{\lambda}^T \nabla f(\bar{x}) \eta(x, \bar{x}, \bar{\lambda}) < 0,$$

lo cual, si definimos $u = \eta(x, \bar{x}, \bar{\lambda})$, está en contradicción con (3.22). Por tanto, F es pseudoinvex en K. $\square$

Al independizar de la variable t, un punto x que verifica la condición de punto de ensilladura débil para (PVM), es decir, (3.3) y (3.4), pasa a verificar la condición de punto de ensilladura, PEN, estudiado en el capítulo 1 para problemas de programación matemática multiobjetivo, en el caso de no haber restricciones:

$\exists\lambda \in R^p$, de manera que

$$\lambda^T \nabla f(x) = 0$$

$$\lambda \geq 0,$$

Por consiguiente, el corolario 3.3, aplicado al caso estático, en unión con el teorema 3.4 establece que la clase de funciones pseudoinvex queda caracterizada por que todo PEN es PDE, como establecen Osuna, Rufián y Ruiz [46].

Por tanto, las relaciones existentes entre soluciones débilmente eficientes y condiciones de optimalidad, estando o no bajo condiciones de S-pseudoinvexidad, para (PVM), podemos decir que generalizan las ya estudiadas para problemas de programación matemática multiobjetivo bajo la formulación de (PM). Y seguimos, pues, mostrando que los resultados obtenidos en problemas variacionales multiobjetivo continuan en la línea de los aportados para problemas de programación matemática multiobjetivo y son una generalización de éstos.

Capítulo 4

PROBLEMA VARIACIONAL MÚLTIPLE. EFICIENCIA

4.1 Preliminares

Hasta ahora, y recordando en primer lugar el contenido del capítulo 2, hemos tratado los problemas variacionales escalares en la búsqueda de las soluciones óptimas al problema, y ello desde diversas condiciones de optimalidad. Aportamos nuevas clases de funciones, las L-(KT/FJ)-pseudoinvex, que juegan un papel muy importante en esta búsqueda: quedan caracterizadas por que todo punto de ensilladura (Kuhn-Tucker o Fritz-John) es solución óptima. Probamos en la sección correspondiente al caso estático, que en realidad las nuevas condiciones de optimalidad y las nuevas clases de funciones generalizan las ya existentes en los problemas de programación matemática.

En segundo lugar, en el capítulo 3, pasamos al estudio de las soluciones débilmente eficientes para problemas variacionales multiobjetivo. Al igual que en el caso escalar, hemos introducido nuevas condiciones de optimalidad y nuevas clases de funciones. La nueva clase, la S-pseudoinvex, quedaba igualmente caracterizada por que todo punto de ensilladura es solución débilmente eficiente. Y nuevamente, probamos que todo ello supone una generalización de los problemas de programación matemática multiobjetivo en el estudio de la eficiencia débil.

En este capítulo, vamos a centrarnos en el estudio de la eficiencia en problemas variacionales multiobjetivo. Siguiendo la línea de capítulos anteriores, pasaremos a la búsqueda de condiciones de optimalidad, así como de las clases de funciones para las que los puntos que verifiquen estas condiciones de optimalidad sean soluciones eficientes para el problema. Probaremos que estas nuevas clases quedan caracterizadas por esto último, tratándose además de una extensión de las clases de funciones introducidas en el capítulo 2 para problemas escalares de la forma (PVR). Además, probaremos que los resultados obtenidos generalizan los obtenidos en el capítulo 1, en el estudio de la eficiencia para problemas de programación matemática de la forma (PMR).

Las relaciones entre la programación matemática y el cálculo de variaciones clásico fue explorado y extendido por Hanson [24]. Ruiz, Osuna y Rufián [51], [52] relacionaron recientemente los problemas de programación matemática con los problemas de desigualdad variacional, bajo invexidad. También aquellas clases de funciones introducidas en programación matemática han sido extendidas y generalizadas a los problemas variacionales. En estos tipos de funciones están apoyados gran parte de los resultados de optimalidad en problemas escalares, que a su vez están siendo extendidos a problemas múltiples. Así, Mishra y Mukherjee [33] generalizó la (F, ρ)-convexidad introducida por Preda [48]. Motivados por Bector y Husain [5], Nahak y Nanda [43], bajo invexidad, extendieron los resultados de Mond, Chandra y Husain [35] al caso multiobjetivo.

Análogos resultados fueron desarrollados por Bhatia y Mehra [9] bajo $B-$invexidad generalizada, introducida por Hanson y Mond [26], generalizada por Rueda y Hanson [50], y extendida a la programación multiobjetivo por Kaul, Suneja y Srivastava [29]. En problemas de control multiobjetivo, Mishra y Mukherjee [34] extendieron el trabajo de Bhatia y Kumar [8], bajo V-invexidad.

Al igual que se hiciera en el capítulo anterior, presentamos el problema, definiendo previamente las funciones que lo integran. En este sentido, las condiciones son las mismas que en el problema denominado (PVR). La diferencia va a estar en la aparición de una función objetivo vectorial, y que describimos a continuación.

Sea $I = [a, b]$ un intervalo real y $f : I \times R^n \times R^n \longrightarrow R^p$ y $g : I \times R^n \times R^n \longrightarrow R^m$ funciones continuamente diferenciables. Y como antes, $f(t, x(t), \dot{x}(t))$ lo denotaremos por comodidad como $f(t, x, \dot{x})$, donde $x : I \longrightarrow R^n$, con derivada $\dot{x}$, y denotaremos las derivadas parciales de f respecto a t, x, $\dot{x}$, mediante

f_t, f_x, $f_{\dot{x}}$ respectivamente, de manera que f_x y $f_{\dot{x}}$ son matrices $p \times n$, cuyos vectores correspondientes a la fila i son $f_{i,x}$ y $f_{i,\dot{x}}$, respectivamente, donde

$$f_{i,x} = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_1}, \frac{\partial f_i}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial f_i}{\partial x_n}\right), \qquad f_{i,\dot{x}} = \left(\frac{\partial f_i}{\partial \dot{x}_1}, \frac{\partial f_i}{\partial \dot{x}_2}, \ldots, \frac{\partial f_i}{\partial \dot{x}_n}\right)$$

Del mismo modo consideramos y denotamos g_t, g_x, $g_{\dot{x}}$, usando en el caso de g_x y $g_{\dot{x}}$ matrices de m filas.

Sea $X = C(I, R^n)$ el espacio de las funciones $x : I \longrightarrow R^n$ diferenciables a trozos con la norma

$$\|x\| = \|x\|_\infty + \|Dx\|_\infty$$

donde el operador D viene dado por

$$u = Dx \Leftrightarrow x(t) = \alpha + \int_a^t u(s)ds,$$

donde α es un valor acotado. Por tanto, $D = d/dt$ excepto en las discontinuidades.

4.2 Problema Variacional Múltiple

En nuestro problema variacional multiobjetivo restringido, donde la función objetivo va a ser

$$F(x) = \int_a^b f(t, x, \dot{x})dt = \int_a^b (f_1(t, x, \dot{x}), f_2(t, x, \dot{x}), \ldots, f_p(t, x, \dot{x}))dt,$$

tiene por formulación la siguiente:

$$(PVMR) \quad \text{Minimiza} \int_a^b f(t, x, \dot{x})dt$$
$$\text{sujeto a:}$$

$$x(a) = \alpha, \quad x(b) = \beta$$

$$g(t, x(t), \dot{x}(t)) \leq 0, \quad t \in I$$

Sea K el conjunto de las soluciones factibles, o sea,

$$K = \{x \in X = C(I, R^n) : x(a) = \alpha,\ x(b) = \beta,\ g(t, x(t), \dot{x}(t)) \leq 0, \quad t \in I\}$$

Obsérvese que la forma de K se corresponde con las hasta ahora empleadas, y en particular con la de (PVR), introducida en el capítulo 2.

4.3 Problemas Escalares Relacionados

Al igual que ocurriese el capítulos anteriores, una de las estrategias más comunes a la hora de abordar un problema multiobjetivo la representan los problemas escalares relacionados. De esta forma, para alcanzar condiciones de optimalidad para problemas multiobjetivo podemos utilizar los siguientes problemas escalares relacionados al problema multiobjetivo (PVMR).

En relación con el problema $(PVMR)$, tenemos $(PVR(\bar{x})_k)$, para cada $k = 1, \dots, p$, dado $\bar{x} \in X$, llamado k-ésimo problema variacional restringido.

$$(PVR(\bar{x})_k) \quad \text{Minimiza} \int_a^b f_k(t, x, \dot{x})dt$$

sujeto a:

$$x(a) = \alpha, \quad x(b) = \beta,$$

$$\int_a^b f_i(t, x, \dot{x})dt \leq \int_a^b f_k(t, \bar{x}, \dot{\bar{x}})dt, \qquad i = 1, \dots, p, \quad i \neq k,$$

$$g(t, x(t), \dot{x}(t)) \leqq 0, \quad t \in I$$

Consideremos, también, el siguiente problema variacional paramétrico o ponderado de tipo Geoffrion, donde dado $\lambda \in R^p, \lambda \geq 0$, se define

$$
\begin{aligned}
(PVR_\lambda) \quad & \text{Minimiza} \int_a^b \lambda^T f(t,x,\dot{x})dt \\
& \text{sujeto a:} \\
& x(a) = \alpha, \quad x(b) = \beta, \\
& g(t,x(t),\dot{x}(t)) \leqq 0, \quad t \in I
\end{aligned}
$$

Estos problemas escalares también pueden relacionarse y formularse para (PVM). Para ello, basta eliminar las restricciones correspondientes a g, es decir, $g(t,x(t),\dot{(x)}(t)) \leqq 0$.

En la línea de Chankong y Haimes [12], y como hiciesen Mishra y Mukherjee [33], y Bhatia y Mehra [9], tenemos el siguiente resultado.

TEOREMA 4.1 *$\bar{x}$ es una solución eficiente de (PVMR) si y sólo si $\bar{x}$ es solución óptima de $(PVR(\bar{x})_k)$, para todo $k = 1,\ldots,p$.*

Y con ello, las soluciones eficientes quedan caracterizadas como soluciones de problemas escalares relacionados.

En la línea establecida en Chankong y Haimes [12], tenemos las siguientes relaciones.

TEOREMA 4.2 *Si $\bar{x}$ es solución óptima para (PVR_λ) para algún $\lambda \geq 0$, entonces $\bar{x}$ es solución débilmente eficiente para (PVMR).*

TEOREMA 4.3 *Si $\bar{x}$ es solución óptima de $(PVR(\bar{x})_k)$, para algún k, entonces $\bar{x}$ es solución débilmente eficiente para (PVMR).*

El recíproco se estos resultados es cierto si las funciones f y g son convexas en $(x,\dot{x})$.

4.4 Condiciones de Optimalidad. Puntos de Ensilladura

Al igual que ocurriese en el capítulo 2, las condiciones necesarias para que una solución factible del problema variacional sea una solución eficiente, pueden ser de tipo puntos de ensilladura. Pasemos pues a definir estas condiciones y a establecer relaciones.

DEFINICIÓN 4.1 *Sea $x \in K$. Diremos que $x \in K$ es un Punto de Ensilladura de tipo Kuhn-Tucker, PEN-KT, para (PVMR) si existe $\lambda \in R^p$, $y: I \longrightarrow R^m$ derivable a trozos, tal que*

$$\lambda^T f_x(t,x,\dot{x}) + y(t)^T g_x(t,x,\dot{x}) = \frac{d}{dt}\left\{\lambda^T f_{\dot{x}}(t,x,\dot{x}) + y(t)^T g_{\dot{x}}(t,x,\dot{x})\right\} \tag{4.1}$$

$$y(t)^T g(t,x,\dot{x}) = 0 \tag{4.2}$$

$$y(t) \geqq 0 \tag{4.3}$$

$$\lambda \geq 0, \quad \sum_{i=1}^{p} \lambda_i = 1, \tag{4.4}$$

$\forall t \in I$, excepto en las discontinuidades.

Siguiendo la línea de Valentine [56], esta condición de optimalidad fue extendida del caso escalar al caso múltiple, bajo esta forma o similares [5],[9],[33],...

DEFINICIÓN 4.2 *Diremos que $x \in K$ es un Punto de Ensilladura de tipo Fritz-John, PEN-FJ, para (PVMR) si existe $\lambda \in R^p$, $y: I \longrightarrow R^m$ derivable a trozos, tal que*

$$\lambda^T f_x(t,x,\dot{x}) + y(t)^T g_x(t,x,\dot{x}) = \frac{d}{dt}\left\{\lambda^T f_{\dot{x}}(t,x,\dot{x}) + y(t)^T g_{\dot{x}}(t,x,\dot{x})\right\} \tag{4.5}$$

$$y(t)^T g(t,x,\dot{x}) = 0 \tag{4.6}$$

$$(\lambda, y(t)) \geq 0 \tag{4.7}$$

$\forall t \in I$, excepto en las discontinuidades.

En [9], encontramos la siguiente condición necesaria de tipo Kuhn-Tucker.

TEOREMA 4.4 *Si $\bar{x}$ es una solución óptima normal de $(PVR(\bar{x})_k)$, para algún k, entonces existe $\lambda^k = (\lambda_{1k}, \dots, \lambda_{pk}) \in R^p$ con $\lambda_{kk} = 1$, y una función diferenciable a trozos $y_k : I \to R^m$, tal que*

$$f_{k,x}(t,x,\dot{x}) + \sum_{\substack{i=1 \\ i\neq k}}^{p} \lambda_{ik} f_{i,x}(t,x,\dot{x}) + y_k(t)^T g_x(t,x,\dot{x})$$

$$= \frac{d}{dt}\left\{ f_{k,\dot{x}}(t,x,\dot{x}) + \sum_{\substack{i=1 \\ i\neq k}}^{p} \lambda_{ik} f_{i,\dot{x}}(t,x,\dot{x}) + y_k(t)^T g_{\dot{x}}(t,x,\dot{x}) \right\} \tag{4.8}$$

$$y_k(t)^T g(t,x,\dot{x}) = 0 \tag{4.9}$$

$$y_k(t) \geqq 0 \tag{4.10}$$

$$\lambda_{ik} \geq 0, \quad \forall i \neq k, \tag{4.11}$$

Tal como ocurriese para el problema escalar (PVR) en el teorema 2.1, en el caso del problema variacional multiobjetivo (PVMR) se verifica la siguiente condición necesaria para que un punto sea solución eficiente.

TEOREMA 4.5 *Si $\bar{x}$ es una solución eficiente para (PVMR) entonces $\bar{x}$ es un PEN-FJ.*

Demostración. Sea $\bar{x}$ solución eficiente para (PVMR). Entonces por el teorema 4.1, $\bar{x}$ resuelve $(PVR(\bar{x})_k)$, $\forall k = 1, \dots, m$. Aplicando la condición de Fritz-John dada por Chandra, Craven y Husain para problemas variacionales escalares [11], a cualquier $(PVR(\bar{x})_k)$, resulta que existe $\lambda \in R^p$ y una función diferenciable a trozos $y : I \to R^m$, de manera que se verifica (4.5), (4.6) y (4.7) . □

Pasemos al resultado correspondiente a la condición de optimalidad de tipo punto de ensilladura de Kuhn-Tucker.

TEOREMA 4.6 *Sea $\bar{x}$ solución eficiente para (PVMR). Si $\bar{x}$ es normal para algún $(PVR(\bar{x})_i)$, con $i \in \{1, \dots, p\}$, entonces $\bar{x}$ es PEN-KT.*

Demostración. Tenemos que hallar $\lambda \in R^p$ y una función diferenciable a trozos $y : I \longrightarrow R^m$, tal que

$$\lambda^T f_x(t, \bar{x}, \dot{\bar{x}}) + y(t)^T g_x(t, \bar{x}, \dot{\bar{x}}) = \frac{d}{dt} \left\{ \lambda^T f_{\dot{x}}(t, \bar{x}, \dot{\bar{x}}) + y(t)^T g_{\dot{x}}(t, \bar{x}, \dot{\bar{x}}) \right\}, \quad (4.12)$$

$$y(t)^T g(t, \bar{x}, \dot{\bar{x}}) = 0, \quad t \in I, \quad (4.13)$$

$$y(t) \geqq 0, \quad t \in I, \quad (4.14)$$

$$\lambda \geq 0, \quad \sum_{i=1}^{p} \lambda_i = 1, \quad (4.15)$$

Como $\bar{x}$ es solución eficiente de (PVMR), por el teorema 4.1 se tiene que $\bar{x}$ es solución óptima de $(PVR(\bar{x})_k)$, para todo $k = 1, \dots, p$, luego en especial para $k = i$. $\bar{x}$ es solución óptima normal de $(PVR(\bar{x})_k)$, $k = i$, por hipótesis, y en consecuencia, por el teorema 4.4, existe $\lambda^k = (\lambda_{1k}, \dots, \lambda_{pk}) \in R^p$ con $\lambda_{kk} = 1$, y una función diferenciable a trozos $y^k : I \longrightarrow R^m$, tal que se verifica (4.8)-(4.11).

Dividimos (4.8) entre $\left(1 + \sum_{\substack{r=1 \\ r \neq k}}^{p} \lambda_{rk} \right)$. Definimos $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_p)$, con

$$\lambda_j = \frac{\lambda_{jk}}{(1 + \sum_{\substack{r=1 \\ r \neq k}}^{p} \lambda_{rk})}, \quad j = 1, \dots, p,$$

y definimos $y(t) = (y_1(t), \dots, y_m(t))$, de manera que

$$y_j(t) = \frac{y_j^k(t)}{(1 + \sum_{\substack{r=1 \\ r \neq k}}^{p} \lambda_{rk})}, \quad j = 1, \dots, m.$$

Se tiene pues, que $(\bar{x}, \lambda, y)$ verifica

$$\lambda^T f_x(t,\bar{x},\dot{\bar{x}}) + y(t)^T g_x(t,\bar{x},\dot{\bar{x}}) = \frac{d}{dt}\left\{\lambda^T f_{\dot{x}}(t,\bar{x},\dot{\bar{x}}) + y(t)^T g_{\dot{x}}(t,\bar{x},\dot{\bar{x}})\right\}, \quad (4.16)$$

$$y(t)^T g(t,\bar{x},\dot{\bar{x}}) = 0, \quad t \in I, \quad (4.17)$$

$$y(t) \geqq 0, \quad t \in I, \quad (4.18)$$

$$\lambda \geq 0, \quad \lambda^T e = 1, \quad (4.19)$$

con $e = (1, 1, \ldots, 1) \in R^p$.
Por tanto, $\bar{x}$ es punto de ensilladura de Kuhn-Tucker. □

Si exigimos a una solución eficiente una cualificación (normalidad) para todos los problemas escalares relacionados, la condición de Kuhn-Tucker aparecerá con el escalar $\lambda > 0$. Veámoslo.

TEOREMA 4.7 *Sea $\bar{x}$ solución eficiente para (PVMR). Si $\bar{x}$ es normal para todo $(PVR(\bar{x})_k)$, $k = 1, \ldots, p$, entonces existe $\lambda \in R^p$, y una función diferenciable a trozos $y : I \longrightarrow R^m$, tal que $(\bar{x}, \lambda, y)$ satisface*

$$\lambda^T f_x(t,\bar{x},\dot{\bar{x}}) + y(t)^T g_x(t,\bar{x},\dot{\bar{x}}) = \frac{d}{dt}\left\{\lambda^T f_{\dot{x}}(t,\bar{x},\dot{\bar{x}}) + y(t)^T g_{\dot{x}}(t,\bar{x},\dot{\bar{x}})\right\}, \quad (4.20)$$

$$y(t)^T g(t,\bar{x},\dot{\bar{x}}) = 0, \quad t \in I, \quad (4.21)$$

$$y(t) \geqq 0, \quad t \in I, \quad (4.22)$$

$$\lambda > 0, \quad \sum_{i=1}^{p} \lambda_i = 1, \quad (4.23)$$

Demostración. Por el teorema 4.1, $\bar{x}$ es solución óptima de $(PVR(\bar{x})_k)$, y además es normal, $\forall k = 1, \ldots, p$. Dado pues k, por el teorema 4.4, existe $\lambda^k = (\lambda_{1k}, \ldots, \lambda_{pk}) \in R^p$ con $\lambda_{kk} = 1$, y una función diferenciable a trozos $y^k : I \longrightarrow R^m$, tal que se verifica (4.8)-(4.11). Sumamos las p ecuaciones (4.8) y obtenemos

$$\lambda'^T f_x(t,\bar{x},\dot{\bar{x}}) + y'(t)^T g_x(t,\bar{x},\dot{\bar{x}}) = \frac{d}{dt}\left\{\lambda'^T f_{\dot{x}}(t,\bar{x},\dot{\bar{x}}) + y'(t)^T g_{\dot{x}}(t,\bar{x},\dot{\bar{x}})\right\},$$

con $\lambda'_i = \sum_{j=1}^{p} \lambda_{ij}$, $i = 1, \dots, p$, siendo $\lambda'_i \geq 1$ ya que $\lambda_{ii} = 1$, y con $y'(t) = \sum_{i=1}^{p} y^i(t)$. Dividimos esta ecuación entre $\sum_{j=1}^{p} \lambda'_j$. y tomamos

$$\lambda_i = \frac{\lambda'_i}{\sum_{j=1}^{p} \lambda'_j}, \qquad i = 1, \dots, p$$

$$y_i(t) = \frac{y'_i(t)}{\sum_{j=1}^{p} \lambda'_j}, \qquad i = 1, \dots, m$$

por lo que tenemos

$$\lambda > 0, \quad \lambda^T e = 1,$$

$$y(t) \geqq 0, \qquad t \in I,$$

$$y(t)^T g(t, \bar{x}, \dot{\bar{x}}) = 0, \qquad t \in I,$$

$$\lambda^T f_x(t, \bar{x}, \dot{\bar{x}}) + y(t)^T g_x(t, \bar{x}, \dot{\bar{x}}) = \frac{d}{dt} \left\{ \lambda^T f_{\dot{x}}(t, \bar{x}, \dot{\bar{x}}) + y(t)^T g_{\dot{x}}(t, \bar{x}, \dot{\bar{x}}) \right\},$$

como queríamos demostrar. □

En esta demostración y en las anteriores podemos notar que si (x, λ, y) verifica las condiciones (4.1)-(4.4), a excepción de $\sum \lambda_i = 1$, basta considerar $\bar{\lambda} = \frac{1}{\sum \lambda_i}$ para que $(x, \bar{\lambda}, y)$ sí verifique (4.1)-(4.4), incluyendo $\sum \bar{\lambda}_i = 1$.

4.5 L-KT/FJ-pseudoinvexidad en Problemas Variacionales Múltiples

En este capítulo, vamos a introducir un nuevo tipo de funciones basado en una generalización de la invexidad. Con esta clase de funciones pretendemos dar respuesta a mucho más que a la búsqueda de una condición suficiente; prentendemos que sea la clase de funciones caracterizada por que todo punto que cumpla la condición de Kuhn-Tucker/Fritz-John sea una solución eficiente.

Consideremos el problema (PVMR), con las funciones f y g definidas como hasta ahora, $F(x) = \int_a^b f(t,x,\dot{x})dt = \int_a^b (f_1(t,x,\dot{x}),\ldots,f_p(t,x,\dot{x}))dt$ y $G(x) = \int_a^b g(t,x,\dot{x})dt = \int_a^b (g_1(t,x,\dot{x}),\ldots,g_m(t,x,\dot{x}))dt.$

Las siguientes clases de funciones que presentamos a continuación, extienden al caso múltiple las ya definidas en el capítulo 2.

DEFINICIÓN 4.3 *Diremos que el par (F,G) es L-FJ-pseudoinvex en $\bar{x} \in X$, si dados $x \in X$, $\lambda \in R^p$, $y : I \longrightarrow R^m$ diferenciable a trozos, con $(\bar{x},\lambda,y)$ que verifica (4.6) y (4.7), existe una función $\eta(t,x,\bar{x},\lambda,y)$ diferenciable, con $\eta(a,x,\bar{x},\lambda,y) = 0 = \eta(b,x,\bar{x},\lambda,y)$, tal que*

$$\begin{aligned}
&F(x) - F(\bar{x}) \leq 0 \Rightarrow \\
&\quad \int_a^b \Big\{(\lambda^T f_x(t,\bar{x},\dot{\bar{x}}) + y(t)^T g_x(t,\bar{x},\dot{\bar{x}}))\eta(t,x,\bar{x},\lambda,y) \\
&\quad + (\lambda^T f_{\dot{x}}(t,\bar{x},\dot{\bar{x}}) + y(t)^T g_{\dot{x}}(t,\bar{x},\dot{\bar{x}}))\frac{d}{dt}\eta(t,\bar{x},\dot{\bar{x}},\lambda,y)\Big\} dt < 0
\end{aligned}$$

Dados $\bar{x}, x$, obsérvese que existe λ, y que verifica (4.6) y (4.7) en la definición anterior; y para ello, basta tomar $\lambda = (1,0,\ldots,0)$, $y(t) = 0$, $t \in I$.

DEFINICIÓN 4.4 *Diremos que el par (F,G) es L-KT-pseudoinvex en $\bar{x} \in X$, si dados $x \in X$, $\lambda \in R^p$, $y : I \to R^m$ diferenciable a trozos, con $(\bar{x},\lambda,y)$ que verifica (4.2), (4.3) y (4.4), existe una función $\eta(t,x,\bar{x},\lambda,y)$ diferenciable, con $\eta(a,x,\bar{x},\lambda,y) = 0 = \eta(b,x,\bar{x},\lambda,y)$, tal que*

$$F(x) - F(\bar{x}) \leq 0 \Rightarrow$$
$$\int_a^b \Big\{(\lambda^T f_x(t,\bar{x},\dot{\bar{x}}) + y(t)^T g_x(t,\bar{x},\dot{\bar{x}}))\eta(t,x,\bar{x},\lambda,y)$$
$$+ (\lambda^T f_{\dot{x}}(t,\bar{x},\dot{\bar{x}}) + y(t)^T g_{\dot{x}}(t,\bar{x},\dot{\bar{x}}))\frac{d}{dt}\eta(t,\bar{x},\dot{\bar{x}},\lambda,y)\Big\} dt < 0$$

Obsérvese que dados $\bar{x}, x$, existe λ, y que verifica (4.2), (4.3) y (4.4) en la definición anterior; y para ello, basta tomar $\lambda = (1,0,\ldots,0)$, $y(t) = 0$, $t \in I$.

DEFINICIÓN 4.5 *Diremos que (PVMR) es L-FJ-pseudoinvex en $\bar{x} \in K$ si se verifica la definición 4.3, con la variable $x \in K$.*

DEFINICIÓN 4.6 *Diremos que (PVMR) es L-KT-pseudoinvex en $\bar{x} \in K$ si se verifica la definición 4.4, con la variable $x \in K$.*

Si en (PVMR) eliminamos las restricciones dadas por g, o sea, la función g es nula, entonces las formas de los problemas (PVMR) y (PVM) coinciden. Además, los conceptos de L-KT-pseudoinvexidad y L-FJ-pseudoinvexidad se identifican.

4.6 Condiciones Necesarias y Suficientes. Caracterizaciones

Mukherjee y Mishra [40] introducen una clase de funciones denominadas V-invex para problemas variacionales multiobjetivos, y que más tarde extienden a un funcional en problemas de control multiobjetivo [34]. Para esta nueva clase de funcionales, prueban que la V-invexidad es condición necesaria y suficiente para que un punto de ensilladura sea un mínimo global. Pero la condición de mínimo global que utilizan es la de aquel punto que minimice cada F_i. Evidentemente, si un punto es mínimo global es solución eficiente, pero no a la inversa, con lo cual la eficiencia desde puntos de ensilladura no queda caracterizada.

Hemos aportado nuevas clases de funciones, y que hemos denominado L-KT-pseudoinvex y L-FJ-pseudoinvex. Probaremos que éstas sí van a ser condiciones necesarias y suficientes para que un punto de ensilladura nos lleve a una solución eficiente para el problema variacional (PVMR). La forma de demostración de estos teoremas será similar al caso escalar. Veamos, en primer lugar, que la L-KT-pseudoinvexidad es condición suficiente.

TEOREMA 4.8 *Si $\bar{x} \in K$ es punto de ensilladura de Kuhn-Tucker y (PVMR) es L-KT-pseudoinvex en $\bar{x}$, entonces $\bar{x}$ es solución eficiente de (PVMR).*

Demostración. Sea $\bar{x} \in K$ punto de ensilladura de Kuhn-Tucker, es decir, existe $\lambda \in R^p$, y diferenciable a trozos tal que $(\bar{x}, \lambda, y)$ verifica (4.1)-(4.4). Como (PVMR) es L-KT-pseudoinvex en $\bar{x}$, existe $\eta(t, x, \bar{x}, \lambda, y)$ diferenciable, $\eta(a, x, \bar{x}, \lambda, y) = 0 = \eta(b, x, \bar{x}, \lambda, y)$, que verifica la definición.

Operando, resulta

$$\int_a^b \{\lambda^T(f_x(t, \bar{x}, \dot{\bar{x}}) + y(t)^T g_x(t, \bar{x}, \dot{\bar{x}}))\eta(t, x, \bar{x}, \lambda, y)$$

$$+(\lambda^T f_{\dot{x}}(t,\bar{x},\dot{\bar{x}}) + y(t)^T g_{\dot{x}}(t,\bar{x},\dot{\bar{x}}))\frac{d}{dt}\eta(t,x,\bar{x},\lambda,y)\}dt$$

$$= \int_a^b \Big\{(\lambda^T f_x(t,\bar{x},\dot{\bar{x}}) + y(t)^T g_x(t,\bar{x},\dot{\bar{x}}))\eta(t,x,\bar{x},\lambda,y)$$

$$-\frac{d}{dt}\,(\lambda^T f_{\dot{x}}(t,\bar{x},\dot{\bar{x}}) + y(t)^T g_{\dot{x}}(t,\bar{x},\dot{\bar{x}}))\eta(t,x,\bar{x},\lambda,y)\Big\}\,dt$$

$$+(\lambda^T f_{\dot{x}}(t,\bar{x},\dot{\bar{x}}) + y(t)^T g_x(t,\bar{x},\dot{\bar{x}}))\eta(t,x,\bar{x},\lambda,y)|_{t=a}^{t=b}$$

(integrando por partes)

$$= \int_a^b \Big\{\lambda^T f_x(t,\bar{x},\dot{\bar{x}}) + y(t)^T g_x(t,\bar{x},\dot{\bar{x}})$$

$$-\frac{d}{dt}\,(\lambda^T f_{\dot{x}}(t,\bar{x},\dot{\bar{x}}) + y(t)^T g_{\dot{x}}(t,\bar{x},\dot{\bar{x}}))\Big\}\,\eta(t,x,\bar{x},\lambda,y)dt = 0$$

(por (4.1))

Por tanto, como (PVMR) es L-KT-pseudoinvex en $\bar{x}$, no se puede verificar $F(x) \leq F(\bar{x})$, y esto para todo $x \in K$. Y en consecuencia, $\bar{x}$ es solución eficiente para (PVMR). □

Ya tenemos que la L-KT-pseudoinvexidad es suficiente para obtener una solución eficiente a partir de un PEN-KT. Veamos el recíproco, es decir, que la L-KT-pseudoinvexidad es además condición necesaria.

TEOREMA 4.9 *Si todo punto de ensilladura de Kuhn-Tucker es solución eficiente para (PVMR), entonces (PVMR) es L-KT-pseudoinvex.*

Demostración. Sean $x, \bar{x} \in K$ tales que $F(x) - F(\bar{x}) \leq 0$, ya que de no darse esta situación estaría probado el resultado. Sean $\lambda \in R^p$, $y : I \longrightarrow R^m$ diferenciable a trozos, de manera que $(\bar{x}, \lambda, y)$ verifican (4.1)-(4.4).

Necesitamos encontrar una función $\eta(t,x,\bar{x},\lambda,y)$ diferenciable, $\eta(a,x,\bar{x},\lambda,y) = 0 = \eta(b,x,\bar{x},\lambda,y)$, de forma que

$$P(\eta(\cdot,x,\bar{x},\lambda,y)) = \int_a^b \{\ \lambda^T(f_x(t,\bar{x},\dot{\bar{x}}) + y(t)^T g_x(t,\bar{x},\dot{\bar{x}}))\eta(t,x,\bar{x},\lambda,y)$$

$$+(\lambda^T f_{\dot{x}}(t,\bar{x},\dot{\bar{x}}) + y(t)^T g_{\dot{x}}(t,\bar{x},\dot{\bar{x}}))\frac{d}{dt}\eta(t,x,\bar{x},\lambda,y) \,\} \, dt < 0,$$

para probar la L-KT-pseudoinvexidad de (PVMR). Y para ello supongamos que $P(\eta(\cdot,x,\bar{x},\lambda,y)) < 0$ no tiene solución. Por tanto, tampoco existirá $P(\eta(\cdot,x,\bar{x},\lambda,y)) > 0$, ya que bastaría tomar como función $-\eta(t,x,\bar{x},\lambda,y)$. En consecuencia, tenemos que

$$P(\eta(\cdot,x,\bar{x},\lambda,y)) = \int_a^b \{\, \lambda^T(f_x(t,\bar{x},\dot{\bar{x}}) + y(t)^T g_x(t,\bar{x},\dot{\bar{x}}))\eta(t,x,\bar{x},\lambda,y)$$
$$+\lambda^T(f_{\dot{x}}(t,\bar{x},\dot{\bar{x}}) + y(t)^T g_{\dot{x}}(t,\bar{x},\dot{\bar{x}}))\frac{d}{dt}\eta(t,x,\bar{x},\lambda,y) \,\} \, dt = 0$$

$\forall\eta(t,x,\bar{x},\lambda,y)$ diferenciable, $\eta(a,x,\bar{x},\lambda,y) = 0 = \eta(b,x,\bar{x},\lambda,y)$. Y por la proposición 2.6 tenemos

$$\lambda^T f_x(t,x,\dot{x}) + y(t)^T g_x(t,x,\dot{x}) = \frac{d}{dt}\left\{\lambda^T f_{\dot{x}}(t,x,\dot{x}) + y(t)^T g_{\dot{x}}(t,x,\dot{x})\right\}, t \in I,$$

y por tanto, $\bar{x}$ verifica (4.1)-(4.4), es decir, $\bar{x}$ es punto de ensilladura de Kuhn-Tucker, y por hipótesis, $\bar{x}$ es solución eficiente de (PVMR), y ello se contradice con $F(x) - F(\bar{x}) \leq 0$. En consecuencia, existe $\eta(t,x,\bar{x},\bar{y})$ diferenciable, $\eta(a,x,\bar{x},\bar{y}) = 0 = \eta(b,x,\bar{x},\bar{y})$, tal que

$$\int_a^b \{\, \lambda^T(f_x(t,\bar{x},\dot{\bar{x}}) + y(t)^T g_x(t,\bar{x},\dot{\bar{x}}))\eta(t,x,\bar{x},\lambda,y)$$
$$+(\lambda^T f_{\dot{x}}(t,\bar{x},\dot{\bar{x}}) + y(t)^T g_{\dot{x}}(t,\bar{x},\dot{\bar{x}}))\frac{d}{dt}\eta(t,x,\bar{x},\lambda,y) \,\} \, dt < 0,$$

y por tanto, (PVMR) es L-KT-pseudoinvex en $\bar{x}$, $\forall\bar{x} \in K$. □

Con los dos resultados anteriores podemos enunciar, como corolario, la condición necesaria y suficiente en términos de función que buscábamos.

COROLARIO 4.1 *Todo punto de ensilladura de Kuhn-Tucker es solución eficiente para (PVMR) si y sólo si (PVMR) es L-KT-pseudoinvex.*

Con este resultado resaltamos la importancia que manifiesta la L-KT-pseudoinvexidad de un problema variacional multiobjetivo (PVMR) para la búsqueda de soluciones eficientes para dicho problema. Como hemos comentado a lo largo de este capítulo, numerosos autores han propuesto obtener soluciones eficientes a partir de condiciones de optimalidad (puntos de ensilladura de Kuhn-Tucker). Y para ello, fueron aportando nuevas clases de funciones para las que unas veces era necesario y otras suficiente que las funciones que intervienen en el problema variacional perteneciesen.

Como novedad, hemos definido la clase L-KT-pseudoinvex. Al igual que para otras clases de funciones, hemos probado que en ella todo punto de ensilladura de tipo Kuhn-Tucker es solución eficiente, lo cual representa una aportación al estudio de las soluciones eficientes en un problema variacional multiobjetivo (PVMR). Pero es más, hemos probado que para que todo punto de ensilladura de Kuhn-Tucker sea solución eficiente debe verificarse la L-KT-pseudoinvexidad en el problema. Con ello, avanzamos en este estudio y probamos que cualquier clase de funciones, para la cual pertenezcan aquellas que integran el problema (PVMR), que quede caracterizada por que todo punto de ensilladura de tipo Kuhn-Tucker es solución eficiente, es equivalente a la clase de funciones L-KT-pseudoinvex.

Este resultado extiende el aportado en el corolario 2.1, para el caso escalar (PVR). Y al igual que ocurriese en el caso escalar, para el caso múltiple la L-KT-pseudoinvexidad es una generalización de la KT-pseudoinvexidad de tipo II. Por ello, queda manifiesto que con el corolario 4.1 generalizamos y extendemos el resultado correspondiente a un problema de programación matemática multiobjetivo (PMR), expresado en el corolario 1.3, y por el que la KT-pseudoinvexidad de tipo II es necesaria y suficiente para que un punto de ensilladura de Kuhn-Tucker sea solución eficiente para (PMR). Además, este resultado extendía a su vez la KT-invexidad introducida por Martin [32], para problemas escalares (PR).

Siguiendo la línea de las demostraciones de los teoremas anteriores, para el caso de condiciones de tipo Fritz-John tenemos los siguientes resultados en términos semejantes a los obtenidos para el caso de condiciones de optimalidad de tipo Kuhn-Tucker.

TEOREMA 4.10 *Si $\bar{x} \in K$ es un punto de ensilladura de Frizt-John y (PVMR) es L-FJ-pseudoinvex en $\bar{x}$, entonces $\bar{x}$ es solución eficiente.*

TEOREMA 4.11 *Si todo punto de ensilladura de Fritz-John es solución eficiente para (PVMR), entonces (PVMR) es L-FJ-pseudoinvex.*

Y como consecuencia de los dos resultados anteriores, tenemos la siguiente caracterización.

COROLARIO 4.2 *Todo punto de ensilladura de Fritz-John es solución eficiente para (PVMR) si y sólo si (PVMR) es L-FJ-pseudoinvex.*

Así pues, se mantiene la simetría, en cuanto a los resultados, entre el corolario 4.1 y el corolario 4.2; es decir, entre el estudio de la eficiencia a partir de condiciones de optimalidad de tipo Kuhn-Tucker y de tipo Fritz-John. En el primer caso, la clase de funciones es la L-KT-pseudoinvex, y en el segundo caso, la L-FJ-pseudoinvex. Del mismo modo, tenemos que las conclusiones la generalización de los problemas variacionales escalares (PVR) y los de programación matemática multiobjetivo (PVMR) son semejantes.

4.7 Dualidad

Pasemos al estudio de la dualidad entre el problema (PVR) y el siguiente problema, procedente del problema dual de tipo Mond-Weir, formulado por Bector, Chandra y Husain [4], pero para el caso de objetivo múltiple.

$$(DVMR1) \quad \text{Maximiza} \int_a^b f(t,u,\dot{u})dt$$
$$\text{sujeto a:}$$

$$u(a) = \alpha, \quad u(b) = \beta \tag{4.24}$$

$$\lambda^T f_x(t,u,\dot{u}) + y(t)^T g_x(t,u,\dot{u}) = \frac{d}{dt}\left\{\lambda^T f_{\dot{x}}(t,u,\dot{u}) + y(t)^T g_{\dot{x}}(t,u,\dot{u})\right\}, \tag{4.25}$$

$$y(t)^T g(t,u,\dot{u}) = 0 \tag{4.26}$$

$$y(t) \geqq 0, \quad t \in I \tag{4.27}$$

$$\lambda \geq 0, \quad \sum_{i=1}^{p} \lambda_i = 1, \tag{4.28}$$

con $y : I \longrightarrow R^m$ diferenciable a trozos.

Por continuar con la notación, sea H el conjunto factible de (DVMR1). Comencemos con la dualidad débil, y desde ahí pasaremos a la dualidad fuerte e inversa.

TEOREMA 4.12 (Dualidad débil) *Sea $x \in K$, $(u, \lambda, y) \in H$. Si (F, G) es L-KT-pseudoinvex en u, entonces*

$$\int_a^b f(t,x,\dot{x})dt \not\leq \int_a^b f(t,u,\dot{u})dt$$

.

Demostración. Por reducción al absurdo, supongamos que no se verifica $\int_a^b f(t,x,\dot{x})dt \geq \int_a^b f(t,u,\dot{u})dt$, en algún punto, es decir, existe $x \in K$, $u \in H$ tales que $F(x) - F(u) < 0$. Como (u, y) verifica (4.26) a (4.28), y por ser

(F,G) L-KT-pseudoinvex, existe una función $\eta(t,x,u,\lambda,y)$ diferenciable, con $\eta(a,x,u,\lambda,y) = 0 = \eta(b,x,u,\lambda,y)$ tal que

$$\int_a^b \Bigg\{ \lambda^T(f_x(t,u,\dot{u}) + y(t)^T g_x(t,u,\dot{u}))\eta(t,x,u,\lambda,y) \\ + (\lambda^T f_{\dot{x}}(t,u,\dot{u}) + y(t)^T g_{\dot{x}}(t,u,\dot{u}))\frac{d}{dt}\eta(t,x,u,\lambda,y) \Bigg\} dt < 0 \tag{4.29}$$

Y por otro lado tenemos que

$$\int_a^b \Bigg\{ \lambda^T(f_x(t,u,\dot{u}) + y(t)^T g_x(t,u,\dot{u}))\eta(t,x,u,\lambda,y) \\ + (\lambda^T f_{\dot{x}}(t,u,\dot{u}) + y(t)^T g_{\dot{x}}(t,u,\dot{u}))\frac{d}{dt}\eta(t,x,u,\lambda,y) \Bigg\} dt$$

$$= \int_a^b \Bigg\{ \lambda^T(f_x(t,u,\dot{u}) + y(t)^T g_x(t,u,\dot{u}))\eta(t,x,u,\lambda,y) \\ - \left(\frac{d}{dt}(\lambda^T f_{\dot{x}}(t,u,\dot{u}) + y(t)^T g_{\dot{x}}(t,u,\dot{u})) \right) \eta(t,x,u,\lambda,y) \Bigg\} dt \\ + \lambda^T(f_{\dot{x}}(t,u,\dot{u}) + y(t)^T g_{\dot{x}}(t,u,\dot{u}))^T \eta(t,x,u,\lambda,y)|_{t=a}^{t=b}$$

(integrando por partes)

$$= \int_a^b \Bigg\{ \lambda^T f_x(t,u,\dot{u}) + y(t)^T g_x(t,u,\dot{u}) \\ - \left(\frac{d}{dt}(\lambda^T f_{\dot{x}}(t,u,\dot{u}) + y(t)^T g_{\dot{x}}(t,u,\dot{u})) \right) \Bigg\} \eta(t,x,u,\lambda,y) dt = 0,$$

por (4.25),

lo que contradice a (4.29). Por tanto

$$\int_a^b f(t,x,\dot{x})dt \nleq \int_a^b f(t,u,\dot{u})dt.$$ □

Una consecuencia inmediata de la dualidad débil la tenemos expresada en el siguiente resultado.

COROLARIO 4.3 *Si (F,G) es L-KT-pseudoinvex, entonces*

$$\int_a^b f(t,x,\dot{x})dt \nleq \int_a^b f(t,u,\dot{u})dt,$$

$\forall x \in K, \quad \forall (u,\lambda,y) \in H.$

El resultado de dualidad débil nos permite avanzar y probar el siguiente correspondiente a la dualidad fuerte.

TEOREMA 4.13 (Dualidad fuerte) *Sea $\bar{x}$ solución eficiente para (PVMR) y normal [4] para algún $(PVR(\bar{x})_i)$, con $i \in \{1,\dots p\}$. Si (F,G) es L-KT-pseudoinvex, entonces existe $\bar{y} : I \longrightarrow R^m$ diferenciable a trozos y $\lambda \in R^p$ tal que $(\bar{x},\lambda,\bar{y})$ es solución eficiente para (DVMR1).*

Demostración. Como $\bar{x}$ es una solución eficiente para (PVMR) y normal [4] para algún $(PVR(\bar{x})_i)$, con $i \in \{1,\dots p\}$, aplicando el teorema 4.6 resulta que existe $\bar{y} : I \longrightarrow R^m$ diferenciable a trozos y $\lambda \in R^p$ tal que $(\bar{x},\lambda,\bar{y})$ satisface

$$\lambda^T f_x(t,u,\dot{u}) + y(t)^T g_x(t,u,\dot{u}) = \frac{d}{dt}\left\{\lambda^T f_{\dot{x}}(t,u,\dot{u}) + y(t)^T g_{\dot{x}}(t,u,\dot{u})\right\},$$

$$y(t)^T g(t,u,\dot{u}) = 0$$

$$y(t)\geqq 0, \quad t \in I$$

$$\lambda \geq 0, \quad \sum_{i=1}^{p} \lambda_i = 1$$

Por tanto, $(\bar{x},\lambda,\bar{y}) \in H$. Por el teorema de dualidad débil, $(\bar{x},\lambda,\bar{y})$ es eficiente para (DVMR1).

□

Gracias a la nueva clase L-KT-pseudoinvex podemos aportar el siguiente resultado correspondiente a la dualidad inversa.

TEOREMA 4.14 (Dualidad inversa) *Sea $(\bar{u}, \lambda, \bar{y})$ solución eficiente para (DVMR1). Si $\bar{u} \in K$ y (F,G) es L-KT-pseudoinvex, entonces $\bar{u}$ es una solución eficiente para (PVMR).*

Demostración. Como (F, G) es L-KT-pseudoinvex, y aplicando el teorema de dualidad débil, tenemos que

$$\int_a^b f(t, x, \dot{x})dt \not\leq \int_a^b f(t, \bar{u}, \dot{\bar{u}})dt,$$

$\forall x \in K$. Y por ser $\bar{u} \in K$, tenemos que $\bar{u}$ es una solución eficiente para (PVMR). □

Pasemos al estudio de dualidad entre (PVMR), como problema primal, y el siguiente problema dual

$$(DVMR2) \quad \text{Maximiza} \int_a^b f(t, u, \dot{u})dt$$
$$\text{sujeto a:}$$

$$u(a) = \alpha, \quad u(b) = \beta \tag{4.30}$$

$$\lambda^T f_x(t, u, \dot{u}) + y(t)^T g_x(t, u, \dot{u}) = \frac{d}{dt}\left\{\lambda^T f_{\dot{x}}(t, u, \dot{u}) + y(t)^T g_{\dot{x}}(t, u, \dot{u})\right\} \tag{4.31}$$

$$y(t)^T g(t, u, \dot{u}) = 0 \tag{4.32}$$

$$(\lambda, y(t)) \geq 0, \quad t \in I \tag{4.33}$$

Sea H el conjunto factible de (DVMR2). Procediendo del mismo modo que en las demostraciones de los teoremas 4.12, 4.13 y 4.14, pero bajo L-FJ-pseudoinvexidad, enunciamos los siguientes resultados de dualidad entre (PVMR) y (DVMR2).

TEOREMA 4.15 (Dualidad débil) *Sea $x \in K$, $(u, \lambda, y) \in H$. Si (F, G) es L-FJ-pseudoinvex en u, entonces*

$$\int_a^b f(t, x, \dot{x})dt \not\leq \int_a^b f(t, u, \dot{u})dt.$$

Como consecuencia de este teorema tenemos lo siguiente.

COROLARIO 4.4 *Si (F, G) es L-FJ-pseudoinvex entonces*

$$\int_a^b f(t, x, \dot{x})dt \not\leq \int_a^b f(t, u, \dot{u})dt,$$

$\forall x \in K, \quad \forall (u, \tau, y) \in H.$

TEOREMA 4.16 (Dualidad fuerte) *Sea $\bar{x}$ solución eficiente para (PVMR). Si (F,G) es L-FJ-pseudoinvex, entonces existe $\bar{\tau} \in R$, $\bar{y} : I \to R^m$ diferenciable a trozos y $\bar{\lambda} \in R^p$ tal que $(\bar{x}, \bar{\lambda}, \bar{y})$ es una solución eficiente para (DVMR2).*

TEOREMA 4.17 (Dualidad inversa) *Sea $(\bar{u}, \bar{\lambda}, \bar{y})$ una solución eficiente para (DVMR2). Si $\bar{u} \in K$ y (F,G) es L-FJ-pseudoinvex, entonces $\bar{u}$ es solución eficiente para (PVMR).*

4.8 Valores de Contorno Naturales

En el mismo sentido en el que se comentó en el capítulo segundo, en nuestro problema variacional multiobjetivo primal los puntos x necesitan ser fijados en los extremos del intervalo I (condiciones de contorno), es decir, $x(a)$ y $x(b)$ fijos. Cuando esto no es necesario, pasamos a un problema variacional con valores de contorno naturales, y cuya formulación es la siguiente.

$$(PNM) \qquad \text{Minimiza} \int_a^b f(t, x, \dot{x})dt$$

sujeto a:

$$g(t, x(t), \dot{x}(t)) \leq 0, \quad t \in I$$

El conjunto factible de (PNM) lo denotamos por $K = \{x \in X : g(t, x(t), \dot{x}(t)) \leq 0, \quad t \in I\}$, siguiendo con la notación usual.

Lo mismo ocurre con los problemas duales asociados.

$$(DNM1) \qquad \text{Maximiza} \int_a^b f(t, u, \dot{u})dt$$

sujeto a:

$$\lambda^T f_x(t, u, \dot{u}) + y(t)^T g_x(t, u, \dot{u}) = \frac{d}{dt}\left\{\lambda^T f_{\dot{x}}(t, u, \dot{u}) + y(t)^T g_{\dot{x}}(t, u, \dot{u})\right\}$$

$$y(t)^T g(t, u, \dot{u}) = 0$$

$$y(t) \geqq 0, \quad t \in I$$

$$\lambda \geq 0$$

$$[\lambda^T f_{\dot{x}}(t, u, \dot{u}) + y(t)^T g_{\dot{x}}(t, u, \dot{u})]_{t=a} = 0 \tag{4.34}$$

$$[\lambda^T f_{\dot{x}}(t, u, \dot{u}) + y(t)^T g_{\dot{x}}(t, u, \dot{u})]_{t=b} = 0 \tag{4.35}$$

La expresión $[\lambda^T f_{\dot{x}} - y^T g_{\dot{x}}]_{t=d}$ es el valor que toma $\lambda^T f_{\dot{x}} - y^T g_{\dot{x}}$ en $t = d$, con $d = a, b$.

$$(DNM2) \qquad \text{Maximiza} \int_a^b f(t, u, \dot{u})dt$$

sujeto a:

$$\lambda^T f_x(t, u, \dot{u}) + y(t)^T g_x(t, u, \dot{u}) = \frac{d}{dt}\left\{\lambda^T f_{\dot{x}}(t, u, \dot{u}) + y(t)^T g_{\dot{x}}(t, u, \dot{u})\right\}$$

$$y(t)^T g(t, u, \dot{u}) = 0$$

$$(\lambda^T, y(t)) \geq 0, \quad t \in I$$

$$[\lambda^T f_{\dot{x}}(t, u, \dot{u}) + y(t)^T g_{\dot{x}}(t, u, \dot{u})]_{t=a} = 0 \tag{4.36}$$

$$[\lambda^T f_{\dot{x}}(t,u,\dot{u}) + y(t)^T g_{\dot{x}}(t,u,\dot{u})]_{t=b} = 0 \tag{4.37}$$

Siguiendo con la notación usual, para (DNM1) y (DNM2) denotaremos los conjuntos factibles por H_1 y H_2, respectivamente.

Basta enunciar los teoremas correspondientes a (PVMR), con las modificaciones de contorno referentes a K y a las definiciones de pseudoinvexidad empleadas, para establecer las resultados de condiciones tanto necesarias como suficientes para (PNM).

Es necesaria la condición

$$(f_{\dot{x}}(t,u,\dot{u}) + y(t)^T g_{\dot{x}}(t,u,\dot{u}))\eta(t,x,u,\lambda,y)|_{t=a}^{t=b} = 0;$$

para la demostración de la dualidad débil, entre (PVMR) y (DVMR1). Y para ello utilizábamos que $\eta(a,x,u,\lambda,y) = 0 = \eta(b,x,u,\lambda,y)$. Evidentemente, esto continua siendo cierto con valores naturales de contorno y con (4.34) y (4.35). Luego si hacemos las modificaciones en los argumentos propuestas anteriormente para (PVMR) y reemplazamos H_1 por H, queda establecida la dualidad entre (PNM) y (DNM1): débil, fuerte e inversa (las demostraciones de estos resultados son análogas a las anteriores).

Del mismo modo, (4.36) y (4.37) vienen a reemplazar la condición de $\eta(a,x,u,\lambda,y) = 0 = \eta(b,x,u,\lambda,y)$ y

$$(\lambda^T f_{\dot{x}}(t,u,\dot{u}) + y(t)^T g_{\dot{x}}(t,u,\dot{u}))\eta(t,x,u,\lambda,y)|_{t=a}^{t=b} = 0,$$

luego, con H_2 en lugar de H_1, tenemos la dualidad entre (PNM) y (DNM2).

En el caso en que se fije $x(a)$ ó $x(b)$, entonces la correspondiente condición es omitida ((4.34) ó (4.36) en el primer caso, y (4.35) ó (4.37) en el segundo).

4.9 Caso Estático

Si independizamos de t a las funciones del problema (PVMR) y, por tanto, eliminamos la condición $x(a) = \alpha, x(b) = \beta$, pasamos a tener un problema de programación matemática multiobjetivo de la forma

$$\begin{array}{ll} \text{(PMR)} & \text{Minimiza } f(x) \\ & \text{sujeto a:} \\ & g(x) \leqq 0 \\ & x \in R^n \end{array}$$

donde $f = (f_1, \dots f_p) : R^n \to R^p$ y $g = (g_1, \dots, g_m) : R^n \to R^m$ funciones diferenciables.

Es por tanto que podemos entender que un problema variacional múltiple (PVMR) extiende a un problema de programación matemática múltiple (PMR). Vamos a probar que esto mismo ocurre con las clases de funciones que hemos introducido para problemas variacionales, así como con las condiciones de optimalidad.

Comencemos probando que los conceptos de L-KT-pseudoinvexidad y L-FJ-pseudoinvexidad realmente generalizan los de KT-pseudoinvexidad de tipo II y FJ-pseudoinvexidad de tipo II, respectivamente.

El concepto de problema L-KT-pseudoinvex, aplicado a (PMR) pasa a quedar de la forma siguiente.

DEFINICIÓN 4.7 *Diremos que (PMR) es L-KT-pseudoinvex si dados $x, \bar{x} \in K$, y dados $\lambda \in R^p, \mu \in R^m$, $(\lambda, \mu) \geq 0$, $\lambda \neq 0$, existe $\eta(x, \bar{x}, \lambda, \mu) \in R^n$ de manera que se verifica*

$$f(x) - f(\bar{x}) \leq 0 \Rightarrow \lambda^T \nabla f(\bar{x}) \eta(x, \bar{x}, \lambda, \mu) + \mu_I^T \nabla g_I(\bar{x}) \eta(x, \bar{x}, \lambda, \mu) < 0, \quad (4.38)$$

donde $I = I(\bar{x}) = \{i = 1, \dots, m : g_i(\bar{x}) = 0\}$.

Vamos a probar que la L-KT-pseudoinvexidad aplicada a (PMR) coincide con la KT-pseudoinvexidad de tipo II .

TEOREMA 4.18 *(PMR) es L-KT-pseudoinvex, es decir, dados $x, \bar{x} \in K$, y dados $\lambda \in R^p, \mu \in R^m$, $(\lambda, \mu) \geq 0$, $\lambda \neq 0$, existe $\eta(x, \bar{x}, \lambda, \mu) \in R^n$ de manera que se verifica*

$$f(x) - f(\bar{x}) \leq 0 \Rightarrow \lambda^T \nabla f(\bar{x}) \eta(x, \bar{x}, \lambda, \mu) + \mu_I^T \nabla g_I(\bar{x}) \eta(x, \bar{x}, \lambda, \mu) < 0, \quad (4.39)$$

si y sólo si (PMR) es KT-pseudoinvex de tipo II, es decir, dados $x, \bar{x} \in K$, existe $\eta(x, \bar{x})$ de manera que se verifica

$$f(x) - f(\bar{x}) \leq 0 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{ll} \nabla f(\bar{x}) \eta(x, \bar{x}) < 0 & \\ \nabla g_I(\bar{x}) \eta(x, \bar{x}) \leqq 0, & I = I(\bar{x}) \end{array} \right. \quad (4.40)$$

Demostración.

(i) Supongamos que (PMR) es KT-pseudoinvex de tipo II. Entonces existe η que verifica (4.40). Sean $x, \bar{x}$ dos puntos factibles tales que $f(x) - f(\bar{x}) \leq 0$, ya que en caso contrario estaría probado el teorema. Para probar que (PMR) es L-KT-pseudoinvex, sea $\lambda \in R^p, \mu \in R^m$, $(\lambda, \mu) \geq 0$, $\lambda \neq 0$. Si multiplicamos estos vectores en (4.40), obtenemos

$$\lambda^T \nabla f(\bar{x}) \eta(x, \bar{x}) + \mu_I^T \nabla g_I(\bar{x}) \eta(x, \bar{x}) < 0$$

Definimos $\eta(x, \bar{x}, \lambda, \mu) = \eta(x, \bar{x})$, y en consecuencia se verifica (4.39), es decir, (PMR) es L-KT-pseudoinvex.

(ii) Supongamos que (PMR) es L-KT-pseudoinvex. Para probar que es KT-pseudoinvex de tipo II, supongamos que no lo sea. Entonces existen $x, \bar{x}$ dos puntos factibles tales que $f(x) - f(\bar{x}) \leq 0$ y el sistema

$$\left. \begin{array}{ll} \nabla f(\bar{x}) u < 0 & \\ \nabla g_I(\bar{x}) u \leqq 0, & I = I(\bar{x}) \end{array} \right\}$$

no tiene solución u. En consecuencia, y por el Teorema de Alternativa de Motzkin, exite $(\bar{\lambda}, \bar{\mu}_I) \geq 0$, $\bar{\lambda} \neq 0$, tal que

$$\bar{\lambda}^T \nabla f(\bar{x}) + \bar{\mu}_I \nabla g_I(\bar{x}) = 0,$$

de donde resulta

$$\bar{\lambda}^T \nabla f(\bar{x}) u + \bar{\mu}_I^T \nabla g_I(\bar{x}) u = 0, \qquad \forall u \in R^n \tag{4.41}$$

Por otro lado, como (PMR) es L-KT-pseudoinvex, y $f(x) - f(\bar{x}) \leq 0$, se tiene que existe $\eta(x, \bar{x}, \bar{\lambda}, \bar{\mu})$, donde $\bar{\mu}_j = 0$, para $j \notin I(\bar{x})$, de manera que

$$\lambda^T \nabla f(\bar{x}) \eta(x, \bar{x}, \bar{\lambda}, \bar{\mu}) + \mu_I^T \nabla g_I(\bar{x}) \eta(x, \bar{x}, \bar{\lambda}, \bar{\mu}) < 0,$$

lo cual, si definimos $u = \eta(x, \bar{x}, \bar{\lambda}, \bar{\mu})$, está en contradicción con (4.41). Por tanto, (PMR) es KT-pseudoinvex de tipo II. □

De esta forma, probamos que la nueva clase L-KT-pseudoinvex junto al problema variacional multiobjetivo (PVMR), en realidad es una generalización de la clase KT-pseudoinvex de tipo II para problemas de programación matemática multiobjetivo (PMR). Lo mismo ocurre con la clase L-FJ-pseudoinvex y la FJ-pseudoinvex de tipo II.

Procediendo del mismo modo, tenemos que la definición de L-FJ- pseudoinvexidad aplicado al caso estático, en concreto a (PMR), queda de la siguiente forma.

DEFINICIÓN 4.8 *Diremos que (PMR) es L-FJ-pseudoinvex si dados $x, \bar{x} \in K$, y dados $\lambda \in R^p, \mu \in R^m$, $(\lambda, \mu) \geq 0$, existe $\eta(x, \bar{x}, \lambda, \mu) \in R^n$ de manera que se verifica*

$$f(x) - f(\bar{x}) \leq 0 \Rightarrow \lambda^T \nabla f(\bar{x}) \eta(x, \bar{x}, \lambda, \mu) + \mu_I^T \nabla g_I(\bar{x}) \eta(x, \bar{x}, \lambda, \mu) < 0, \tag{4.42}$$

donde $I = I(\bar{x})$.

Esta definición es equivalente a (PMR) es FJ-pseudoinvex de tipo II, como se enuncia en el siguiente teorema, y en cuya demostración hacemos uso del Teorema de Alternativa de Gordan.

TEOREMA 4.19 *(PMR) es L-FJ-pseudoinvex, es decir, dados $x, \bar{x} \in K$, y dados $\lambda \in R^p, \mu \in R^m$, $(\lambda, \mu) \geq 0$, existe $\eta(x, \bar{x}, \lambda, \mu) \in R^n$ de manera que se verifica*

$$f(x) - f(\bar{x}) \leq 0 \Rightarrow \lambda^T \nabla f(\bar{x}) \eta(x, \bar{x}, \lambda, \mu) + \mu_I^T \nabla g_I(\bar{x}) \eta(x, \bar{x}, \lambda, \mu) < 0, \quad (4.43)$$

si y sólo si (PMR) es FJ-pseudoinvex de tipo II, es decir, dados $x, \bar{x} \in K$, existe $\eta(x, \bar{x})$ de manera que se verifica

$$f(x) - f(\bar{x}) \leq 0 \Rightarrow \begin{cases} \nabla f(\bar{x}) \eta(x, \bar{x}) < 0 \\ \nabla g_I(\bar{x}) \eta(x, \bar{x}) < 0, \quad I = I(\bar{x}) \end{cases} \quad (4.44)$$

Demostración.

(i) Supongamos que (PMR) es FJ-pseudoinvex de tipo II. Entonces existe η que verifica (4.44). Sean $x, \bar{x}$ dos puntos factibles tales que $f(x) - f(\bar{x}) \leq 0$, ya que en caso contrario estaría probado el teorema. Para probar que (PMR) es L-FJ-pseudoinvex, consideremos $\lambda \in R^p, \mu \in R^m$, $(\lambda, \mu) \geq 0$. Si multiplicamos estos vectores en (4.44), obtenemos

$$\lambda^T \nabla f(\bar{x}) \eta(x, \bar{x}) + \mu_I^T \nabla g_I(\bar{x}) \eta(x, \bar{x}) < 0$$

Definimos $\eta(x, \bar{x}, \lambda, \mu) = \eta(x, \bar{x})$, y por tanto se verifica (4.43), es decir, (PMR) es L-FJ-pseudoinvex.

(ii) Supongamos que (PMR) es L-FJ-pseudoinvex. Para probar que es FJ-pseudoinvex de tipo II, supongamos que no lo sea. Entonces existen $x, \bar{x}$ dos puntos factibles tales que $f(x) - f(\bar{x}) \leq 0$ y el sistema

$$\left.\begin{array}{l} \nabla f(\bar{x}) u < 0 \\ \nabla g_I(\bar{x}) u < 0, \quad I = I(\bar{x}) \end{array}\right\}$$

no tiene solución u. En consecuencia, y por el Teorema de Alternativa de Gordan, existe $(\bar{\lambda}, \bar{\mu}_I) \geq 0$, tal que

$$\bar{\lambda}^T \nabla f(\bar{x}) + \bar{\mu}_I \nabla g_I(\bar{x}) = 0,$$

por lo que

$$\bar{\lambda}^T \nabla f(\bar{x})u + \bar{\mu}_I \nabla g_I(\bar{x})u = 0, \qquad \forall u \in R^n \tag{4.45}$$

Por otro lado, por ser (PMR) es L-FJ-pseudoinvex, y $f(x) - f(\bar{x}) \leq 0$, se tiene que existe $\eta(x, \bar{x}, \bar{\lambda}, \bar{\mu})$, donde $\bar{\mu}_j = 0$, para $j \notin I(\bar{x})$, de manera que

$$\lambda^T \nabla f(\bar{x})\eta(x, \bar{x}, \bar{\lambda}, \bar{\mu}) + \mu_I^T \nabla g_I(\bar{x})\eta(x, \bar{x}, \bar{\lambda}, \bar{\mu}) < 0,$$

lo cual, si definimos $u = \eta(x, \bar{x}, \bar{\lambda}, \bar{\mu})$, está en contradicción con (4.45). Por tanto, (PMR) es FJ-pseudoinvex de tipo II. □

Al independizar de la variable t, un punto x que verifica la condición de punto de ensilladura de Fritz-John para (PVMR) pasa a verificar:

$\exists \lambda \in R^p$, $\mu \in R^m$, de manera que

$$\lambda^T \nabla f(x) + \mu^T \nabla g(x) = 0$$

$$\mu^T g(x) = 0$$

$$(\lambda, \mu) \geq 0,$$

que se corresponde con la condición de punto de ensilladura de Fritz-John para problemas de programación matemática multiobjetivo bajo la formulación de (PMR), estudiada en el capítulo 1.

De igual forma, la condición de punto de ensilladura de Kuhn-Tucker para (PVMR) queda bajo la forma de punto de Kuhn-Tuker para (PMR), es decir, existe $\lambda \in R^p$, $\mu \in R^m$, de manera que

$$\lambda^T \nabla f(x) + \mu^T \nabla g(x) = 0$$

$$\mu^T g(x) = 0$$

$$\mu \geqq 0$$

$$\lambda \geq 0$$

Por lo tanto, las condiciones necesarias y suficientes para que un punto de un problema variacional múltiple (PVMR) sea eficiente, en términos de punto de ensilladura y pseudoinvexidad (en las nuevas clases introducidas), son una extensión de las condiciones dadas para un problema de programación matemática múltiple (PMR).

Si independizamos de t los problemas duales (DVMR1) y (DVMR2) tenemos las formulaciones de los problemas

$$(DMR1) \qquad \text{Maximiza} \quad f(u)$$
$$\text{sujeto a:}$$

$$\lambda^T \nabla f(x) + \mu^T \nabla g(x) = 0$$

$$\mu^T g(x) = 0$$

$$\mu \geqq 0$$

$$\lambda \geq 0$$

y

$$(DMR2) \qquad \text{Maximiza} \quad f(u)$$
$$\text{sujeto a:}$$

$$\lambda^T \nabla f(x) + \mu^T \nabla g(x) = 0$$

$$\mu^T g(x) = 0$$

$$(\lambda, \mu) \geq 0$$

respectivamente.

Los problemas (DMR1) y (DMR2) son problemas duales asociados a (PMR), en las formas descritas en el capítulo 1.

Como consecuencia de lo anterior, la dualidad establecida entre (PVMR) y los problemas (DVMR1) y (DVMR2) generaliza a la establecida entre (PMR) y los problemas (DMR1) y (DMR2). Es decir, los resultados de dualidad probados en este capítulo para problemas variacionales múltiples, extienden los resultados para los problemas de programación matemática multiobjetivo.

Bibliografía

[1] V. M. ALEKSEEV, V. M. TIKHOMIROV Y S. V. FOMIN, Optimal Control, Consultants Bureau, New York, 1987.

[2] M. ARANA, A. RUFIÁN Y R. OSUNA, Weak Efficiency for Multiobjective Variational Problems, *Europ. J. Oper. Res.* (aceptado para su publicación).

[3] M. ARANA, A. RUFIÁN Y R. OSUNA, Condiciones Necesarias y Suficientes para Mínimos Débiles, XXIV Congreso Nacional de Estadística e Investigación Operativa, Almería, 1998.

[4] C. R. BECTOR, S. CHANDRA Y I. HUSAIN, Generalized Concavity and Duality in Continuous Programming, *Utilitas Mathematica* **25** (1984), 171-190.

[5] C. R. BECTOR Y I. HUSAIN, Duality for multiobjective variational problems,*J. Math. Anal. Appl.* **166**(1992), 214-229.

[6] A. BEN-ISRAEL Y B. MOND, What is the Invexity, *J. Austral. Math. Soc. Ser. B*, **28** (1986), 1-9.

[7] C. BERGE AND A. GHOUILA HOURI, Programming, Games and Transportation Networks, John Wiley and Sons, Inc., New York, 1965.

[8] D. BHATIA Y P. KUMAR, Multiobjective Control Problem with Generalized Invexity, *J. Math. Anal. Appl.* **189** (1995), 676-692.

[9] D. Bhatia y A. Mehra, Optimality Conditions and Duality for Multiobjective Variational Problems with Generalized B-Invexity, *J. Math. Anal. Appl.* **234** (1999), 341-360.

[10] J. M. Borwein, Optimization with Respect to Partial Ordering. Ph. D. Thesis, Oxford University, 1974.

[11] S. Chandra, B. D. Craven y I. Husain, A Class of Nondifferenciable Continuous Programming Problems, *J. Math. Anal. Appl.* **107** (1985), 122-131 .

[12] V. Chankong y Y. Y. Haimes, Multiobjective Decision Making: Theory and Methodology, North-Holland, New York, 1983.

[13] R. Courant, Differential and Integral Calculus, Vol 2, Blackie, London/Edinburgh, 1936/1948.

[14] D. B. Craven, Invex Functions and Constrain Local Minima, *B. Austral. Math. Soc.* **24** (1981), 357-366.

[15] B. D. Craven, Mathematical Programming and Control Theory, Chapman & Hall, London, 1978.

[16] B. D. Craven y B. Mond, Lagrangean Conditions for Quasidifferential Optimization, *in* "Proceedings, 9th Intern. Conf. on Mathematical Programming", Budapest, 1976, *in* "Survey of Mathematical Programming" (A. Prékopa, Ed.), Vol. 1, pp. 177-192, Akad. Kiadó, Budapest, and North-Holland, Amsterdam, 1979.

[17] R. R. Egudo y M. A. Hanson, Duality with Generalized Convexity, *J. Austral. Math. Soc. Ser. B* **28** (1986). 10-21.

[18] R. R. Egudo y M. A. Hanson, Multiobjective Duality with Invexity, *J. Math. Anal. Appl.* **126** (1987), 469-477.

[19] G. M. EWING, Calculus of Variations with applications, Dover Publications, Inc., New York, 1969.

[20] W. FENCHEL, Convex Cones, Sets and Functions. Lecture Notes, Princenton University, Armed Services Techical Information Agency, AD 22695, 1953.

[21] I. M. GELFAND Y S. V. FOMIN, Calculus of Variations, Prentice-Hall, Inc., New Jersey, 1963.

[22] A. M. GEOFFRION, Proper Efficiency and The Theory of Vector Maximization, *J. Math. Anal. Appl.* **22** (1968), 618-630.

[23] T. R. GULATI Y N. TALAAT, Sufficiency and Duality in Nondifferentiable Multiobjective Programming, *Opsearch* **28**, **2** (1991), 73-87.

[24] M. A. HANSON, Bounds for Functionally Convex Optimal Control Problems, *J. Math. Anal. Appl.* **8** (1964), 84-89.

[25] M. A. HANSON, On Sufficiency of Kuhn-Tucker Conditions, *J. Math. Anal. Appl.* **80** (1981), 545-550.

[26] M. A. HANSON Y B. MOND, Necessary and Sufficient Conditions in Constrained Optimization, *Math. Programming* **37** (1987), 51-58.

[27] JEYAKUMAR, Strong and Weak Invexity in Mathematical Programming, *Methods Oper. Res.*55 (1990), 109-125.

[28] P. KANNIAPPAN, Necessary Conditions for Optimality of Nondifferentiable Convex Multiobjective Programming, *J. Optim. Theory Appl.* **40** (1983), 167-174.

[29] R. N. KAUL, S. K. SUNEJA Y M. K. SRIVASTAVA, Optimality Criteria and Duality in Multiple Objective Optimization Involving Invexity, *J. Optim. Theory Appl.* **80** (1994), 465-482.

[30] O. L. MANGASARIAN, Nonlinear Programming, Ed. MacGraw-Hill (1969).

[31] O. L. MANGASARIAN AND J. PONSTEIN, Minimax and Duality in Nonlinear Prigramming, *J. Math. Anal. Appl.* **11** (1965), 504-518.

[32] D. M. MARTIN , The essence of Invexity, *J. Optim. Theory Appl.* **47, 1** (1985), 65-76.

[33] S. K. MISHRA Y R. N. MUKERJEE, On efficiency and Duality for Multiobjective Variational Problems, *J. Math. Anal. Appl.* **187** (1994), 40-54.

[34] S. K. MISHRA Y R. N. MUKHERJEE, Multiobjective Control Problem with Generalized V-Invexity, *J. Math. Anal. Appl.* **235** (1999), 1-12.

[35] B. MOND, S. CHANDRA Y I. HUSAIN, Duality for Variational Problems with Invexity, *J. Math. Anal. Appl.* **134** (1988), 322-328.

[36] B. MOND Y M. A. HANSON, Duality for Variational Problems, *J. Math. Anal. Appl.* **18** (1967), 355-364.

[37] B. MOND Y I. HUSAIN, Sufficient Optimality Criteria and Duality for Variational Problems with Generalized Invexity, *J. Austral. Math. Soc. Ser. B* **31** (1989), 108-121.

[38] B. MOND Y I. SMART, Duality and Sufficiency in Control Problems with Invexity, *J. Math. Anal. Appl.* **136** (1988), 325-333.

[39] B. MOND Y T. WEIR, Generalized Concavity and Duality, Generalized Concavity in Optimization and Economics, Ed. S. Schaible and W. T. Ziemba, pp. 263-279, Academic Press, New York, 1981.

[40] R. N. MUKHERJEE Y S. K. MISHRA, Sufficient Optimality Criteria and Duality for Multiobjective Variational Problems with V-invexity, *Indian J. Pure Appl. Math.* **25** (1994), 801-813.

[41] R. N. MUKHERJEE Y CH. PURNACHANDRA RAO, Mixed type duality for multiobjective variational problems, *J. Math. Anal. Appl.* **252**(2000), 571-586.

[42] C. NAHAK Y S. NANDA, Duality for Variational Problems with Pseudo-invexity, *Optimization* **34** (1995), 365-371.

[43] C. NAHAK Y C. NANDA, Duality for Multiobjective Variational Problems with Invexity, *Optimization* **36** (1996), 235-248.

[44] C. NAHAK Y S. NANDA, Symmetric Duality with Pseudo-invexity in Variational Problems, *Europ. J. Oper. Res.* **122** (2000), 145-150.

[45] R. OSUNA, A. BEATO, A. RUFIÁN, Generalized Convexity in Multiobjective Programming, *J. Math. Anal. Appl.* **233** (1999), 205-220.

[46] R. OSUNA, A. RUFIÁN, P. RUIZ, Invex Functions and Generalized Convexity in Multiobjective Programming, *J. Optim. Theory Appl.* **98** (1998), 651-661.

[47] V. PARETO, Course d'economie politique, Rouge, Lausanne, 1896.

[48] V. PREDA, On Duality with Generalized Convexity, *Boll. Un. Mat. Ital.*, A (7), 5, (1991).

[49] V. PREDA, On Efficiency and Duality for Multiobjective Fractional Variational Problems, *J. Math. Anal. Appl.* **166** (1992), 365-377.

[50] N. G. RUEDA Y M. A. HANSON, Optimality Criteria in mathematical Programming Involving Generalized Invexity, *J. Math. Anal. Appl.* **130** (1988), 375-385.

[51] G. RUIZ, R. OSUNA, A. RUFIÁN, The Pre-variational Problems and the Constrained Mathematical Programming Problem, *Opsearch* **39** (2002), 63-75.

[52] G. RUIZ, R. OSUNA, A. RUFIÁN, Generalized Invex Monotonicity, *Europ. J. Oper. Res.* **144** (2003), 501-512.

[53] P. RUIZ AND A. RUFIÁN, A Characterization of Weakly Effciente Points, *Mathematical Programming,* **68** (1995), 205-212.

[54] M. SCHECHTER, More of Subgradient Duality, *J. Math. Anal. Appl.* **71** (1979), 251-262.

[55] H. TUY, Sur les inégalités linéaires, *Colloquim Mathematicum,* **13** (1964), 107-123.

[56] F. A. VALENTINE, The Problem of Lagrange with Diferential Inequalities as Added Side Conditions, *in* "Contribution to the Calculus of Variational 1933-1937", pp. 407-448, Univ. of Chicago Press, Chicago, 1937.

[57] F. A. VALENTINE, Convex Sets. McGraw-Hill Book Company, New York, 1964.

[58] R. WEINSTONE, Calculus of variations, Dover Publications, Inc., New York, 1974.

[59] XINMING YANG, Alternative Theorems and Optimality Conditions with Weakened Convexity, *Opsearch* **29**, **2** (1992), 125-135.

[60] G. J. ZALMAI, A continuous-time generalization of Gordan's transposition theorem, *J. Math. Anal. Appl.* **110**(1985), 130-140.

UNIVERSIDAD DE SEVILLA

Reunido el Tribunal integrado por los abajo firmantes en el día de la fecha, para juzgar la Tesis Doctoral de D. MANUEL ARANA JIMENEZ

titulada PROBLEMA VARIACIONAL MULTIPLE

acordó otorgarle la calificación de SOBRESALIENTE CUM LAUDE (por unanimidad)

Sevilla, 21 de JULIO 2003

El Vocal, | El Vocal, | El Vocal,

EL PRESIDENTE | El Secretario, | El Doctorado,