

**Desarrollos para funciones de densidad  
y de distribución vía estimación  
insegada**

Antonia Castaño Martínez

UNIVERSIDAD DE SEVILLA  
NEGOCIADO DE TESIS

Queda registrado este Título de Doctor al  
folio... 32 ..... número... 396 ..... del libro  
correspondiente. **12 DIC. 2000**  
Sevilla,.....

El Jefe del Negociado.

*Álvaro Raffels*

UNIVERSIDAD DE SEVILLA

Depositado en el D<sup>o</sup> de Estad. e I. O.  
de la F. de Matemáticas  
de esta Universidad desde el día 14-12-00  
hasta el día 17-Enero-2001  
Sevilla 18 de Enero de 2.001  
EL DIRECTOR DE

*[Signature]*

# UNIVERSIDAD DE SEVILLA

Facultad de Matemáticas

Departamento de Estadística e Investigación Operativa

## DESARROLLOS PARA FUNCIONES DE DENSIDAD Y DE DISTRIBUCIÓN VÍA ESTIMACIÓN INSESGADA

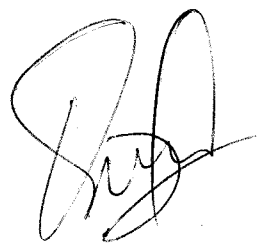
043  
-----  
359 (70%)

Memoria presentada por  
Antonia Castaño Martínez  
para optar al  
Grado de Doctor.

Vº Bº del Director



Antonia Castaño Martínez.



Fdo. Fernando López Blázquez  
Profesor Titular de la  
Universidad de Sevilla.

Sevilla, Diciembre de 2000.

UNIVERSIDAD DE SEVILLA  
FACULTAD DE MATEMATICAS  
BIBLIOTECA

## Agradecimientos

En estas líneas me gustaría agradecer a todos vosotros que me habéis apoyado, que en un momento dado me tendisteis una mano, me aportasteis una idea... para poder concluir esta memoria. A vosotros, gracias.

Mi más sincero agradecimiento a Fernando López Blázquez, responsable de que hoy esté escribiendo estas líneas. Gracias por la confianza que ha depositado en mi, por su inestimable ayuda, sus aportaciones científicas y enseñanzas recibidas en los últimos años.

A los compañeros del departamento de Estadística e Investigación Operativa de la Universidad de Sevilla por sus constantes ánimos.

A mis compañeros de Jerez, mi más sincero agradecimiento, por su apoyo incondicional.

A José María, por su cariño, comprensión y su capacidad de soportarme en estos últimos meses.

A mi familia y amigos, en especial a mi querida amiga Loli, gracias por todo.

# Índice

<b>Introducción</b>	<b>1</b>
<b>Capítulo 1 Un procedimiento estadístico para la inversión de transformadas de Laplace</b>	<b>7</b>
1.1 Introducción . . . . .	7
1.2 Estimación en la distribución Gamma . . . . .	8
1.3 Inversión de la transformada de Laplace . . . . .	12
<b>Capítulo 2 Desarrollos para formas cuadráticas centradas</b>	<b>15</b>
2.1 Función de densidad de la combinación lineal positiva de $\chi^2$ centradas . . . . .	17
2.1.1 Estudio de la convergencia . . . . .	18
2.2 Otros desarrollos para la función de densidad . . . . .	22
2.2.1 Estudio de la convergencia . . . . .	24
2.3 Función de distribución de la combinación lineal positiva de $\chi^2$ centradas . . . . .	27
2.3.1 Estudio de la convergencia . . . . .	28
2.4 Otros desarrollos para la función de distribución . . . . .	29
2.4.1 Estudio de la convergencia . . . . .	31

<b>Capítulo 3</b>	<b>Desarrollos para formas cuadráticas no centradas</b>	<b>35</b>
3.1	Desarrollos para una variable chi-cuadrado no centrada . . . . .	36
3.1.1	Desarrollo de la función de densidad de la variable $\chi_n^2(\delta)$	37
3.1.2	Estudio de la convergencia . . . . .	38
3.1.3	Desarrollo de la función de distribución de la variable $\chi_n^2(\delta)$ . . . . .	39
3.1.4	Estudio de la convergencia . . . . .	40
3.2	Función de densidad de la combinación lineal de $\chi^2$ no centradas	43
3.2.1	Estudio de la convergencia . . . . .	44
3.2.2	Otros desarrollos de la función de densidad de la combinación lineal de $\chi_n^2(\delta)$ . . . . .	48
3.2.3	Estudio de la convergencia . . . . .	50
3.3	Función de distribución de la combinación lineal de $\chi^2$ no centradas . . . . .	53
3.3.1	Estudio de la convergencia . . . . .	55
3.3.2	Otros desarrollos para la función de distribución . . . . .	58
3.3.3	Estudio de la convergencia . . . . .	59
<b>Capítulo 4</b>	<b>Desarrollos de otras variables</b>	<b>65</b>
4.1	La distribución de la suma de variables Gamma independientes con distintos parámetros . . . . .	65
4.1.1	Función de densidad de la suma de variables Gamma . . . . .	67
4.1.2	Estudio de la convergencia . . . . .	68
4.1.3	Función de distribución de la suma de variables Gamma . . . . .	69
4.1.4	Estudio de la convergencia . . . . .	70
4.2	Cálculo de la distribución en la familia exponencial natural con función de varianza potencial (NEF-PVF) . . . . .	71
4.2.1	Desarrollos de Laguerre para una NEF-PVF . . . . .	73
4.3	Desarrollos de la distribución Normal en términos de los polinomios de Laguerre . . . . .	76

4.3.1	Estudio de la convergencia . . . . .	79
<b>Capítulo 5</b>	<b>Desarrollos en polinomios de Hermite</b>	<b>83</b>
5.1	La distribución Normal . . . . .	83
5.1.1	Estimación en la distribución Normal . . . . .	84
5.2	Desarrollo de la función de densidad Normal estándar . . . . .	88
5.3	Desarrollo de la función de distribución Normal estándar . . . . .	89
5.4	Desarrollos de Hermite de una variable aleatoria . . . . .	92
5.4.1	Desarrollo de la función de distribución $F$ . . . . .	95
<b>Capítulo 6</b>	<b>Desarrollos ortogonales aplicados a la bondad de ajuste</b>	<b>99</b>
6.1	Tests aplicados a la NEF-QVF . . . . .	101
6.1.1	Resultados previos . . . . .	101
6.1.2	Estadístico cuadrático . . . . .	105
6.1.3	Estadístico supremo . . . . .	109
6.2	Aplicación de los desarrollos ortogonales a estadísticos Cramér-von Mises generalizados . . . . .	113
6.2.1	Estadísticos Cramér-von Mises generalizados para la distribución Gamma y Normal . . . . .	114
6.2.2	Estadístico de Cramér-von Mises . . . . .	121
6.3	Aproximación heurística a las distribuciones de estadísticos tipo Cramér-von Mises . . . . .	124
6.3.1	Aproximación heurística . . . . .	126
6.3.2	Aproximación a la distribución de Watson . . . . .	128
6.3.3	Aproximación a la distribución de Cramér-von Mises . . . . .	131
	<b>Bibliografía</b>	<b>135</b>

## Introducción

El problema de desarrollar una función de densidad arbitraria en términos de funciones ortogonales fue formulado por Chebyshev (1858), en conexión con el ajuste de una función a un conjunto de puntos por mínimos cuadrados. Chebyshev (1890) obtuvo el desarrollo de Gram-Charlier tipo A como un caso especial. Edgeworth (1905) obtuvo el desarrollo que lleva su nombre que resultó ser una reordenación del desarrollo de Gram-Charlier. El desarrollo de Edgeworth, a diferencia del desarrollo de Gram-Charlier, verifica las propiedades deseables de convergencia asintótica al truncar los desarrollos. Un estudio más detallado sobre el origen de tales desarrollos se pueden ver en Wallace (1958), Särndal (1971) y Cramér (1972).

La aplicación de desarrollos ortogonales en Estadística ha sido limitado en gran parte a las series de Gram-Charlier tipo A y desarrollos de Edgeworth en el caso continuo y a las series de Gram-Charlier tipo B para variables discretas, los dos primeros como es conocido en términos de los polinomios de Hermite y el último en términos de los polinomios de Charlier. Cramér (1928) estudió el problema de la convergencia, así como dio condiciones bajo las cuales los desarrollos de tipo A y de Edgeworth son válidos asintóticamente. Por tanto cuando se conocen los primeros cumulantes de la distribución, un procedimiento común es el desarrollo de Edgeworth. Si bien es cierto que este método tiene sus inconvenientes en el sentido de que la aproximación puede tomar valores negativos o valores más grande que la unidad en la región de la cola. Por otro lado cuando la función característica de los estadísticos es conocida, pero la inversión integral de Fourier no puede ser explícitamente calculada, un buen método de aproximación es la técnica de punto de silla dada por Daniels (1954) y Esscher (1963). No obstante estos desarrollos dan



buenos resultados únicamente cuando la distribución a aproximar está muy cercana a la curva normal.

Romanovsky (1924) generalizó las aproximaciones en series ortogonales a otro tipo de distribuciones tales como la beta y la gamma. Khamis (1960) de forma análoga, propone desarrollos en series en términos de funciones gamma incompleta, haciendo uso de los polinomios de Laguerre, sin estudiar la convergencia de tales desarrollos. Nosotros proponemos a lo largo de esta memoria diversos desarrollos en términos de polinomios de Laguerre generalizados, así como desarrollos de Hermite, para aproximar numéricamente funciones de densidad y de distribución. Tales desarrollos son obtenidos aplicando una teoría de estimación insesgada en la distribución gamma y normal respectivamente. Si bien es cierto que no se obtienen mediante un mismo procedimiento, la base del proceso sí es la misma. Y más generalmente obtenemos un desarrollo en términos de polinomios de Laguerre generalizados para la función inversa de una transformada de Laplace.

La principal dificultad en aplicar técnicas de la transformada de Laplace es la determinación de la función original a partir de su transformada. Numerosos métodos analíticos para la determinación de la misma se pueden ver en Spiegel (1991), y cuando éstos fallan necesitamos recurrir a los métodos numéricos. El método numérico más conocido para la inversión de la transformada de Laplace se basa en la integración numérica de la integral de Bromwich o en el desarrollo de la función original en una serie de funciones ortogonales, particularmente funciones exponenciales y polinomios de Laguerre, siendo preferible los desarrollos de Laguerre a las funciones exponenciales, ver Piessens & Branders (1971). En la literatura es conocido como el método de Laguerre para invertir transformadas de Laplace.

En una primera parte de la memoria obtenemos un procedimiento estadístico para invertir transformadas de Laplace en el campo real, basado en la estimación insesgada en una cierta familia exponencial con función de varianza cuadrática, la distribución gamma. De esta forma en el capítulo

primero introducimos unos conceptos generales sobre la estimación en la distribución gamma. Siguiendo Morris (1982,1983) obtenemos una expresión del estimador insesgado de una función analítica del parámetro en términos de polinomios ortogonales, es decir polinomios de Laguerre generalizados. La expresión obtenida tiene numerosas ventajas en el campo de la estimación, como por ejemplo no requiere el conocimiento previo de un estimador insesgado de la función paramétrica. Además permite obtener de una forma fácil una expresión para la varianza del estimador y así mismo un estudio asintótico sobre dicho estimador.

Nosotros proponemos, utilizando la teoría de la estimación para la distribución gamma, un procedimiento para invertir transformadas de Laplace. Obtenemos un desarrollo en términos de polinomios de Laguerre generalizados, que en principio depende de un parámetro libre. Ahora bien, por las propiedades de unicidad de los estimadores insesgados basados en estadísticos suficientes y completos, tal dependencia es sólo aparente, y por tanto tenemos la ventaja, como se podrá comprobar a lo largo de la memoria, de que valores adecuados del parámetro mejorarán la eficiencia del cálculo computacional.

Por supuesto este procedimiento nos permite la determinación de funciones de densidad y de distribución de variables positivas, invirtiendo la transformada de Laplace de la variable, la cual está íntimamente relacionada con la función generatriz de momentos. Por tanto este procedimiento requiere el conocimiento de la función generatriz de momentos de la distribución a determinar.

Así en el capítulo segundo aplicamos el procedimiento descrito para determinar las funciones de densidad y de distribución de una forma cuadrática centrada definida (positiva o negativa), más generalmente de la suma ponderada positiva de variables chi-cuadrado centradas con cualesquiera grados de libertad. De la misma forma proponemos expresiones alternativas para las correspondientes funciones que aceleran la convergencia en la cola superior. Como decíamos anteriormente los desarrollos propuestos dependen de un parámetro libre y particularizando dicho parámetro a cierto valor en el caso

de la función de densidad obtenemos expresiones dadas en la literatura, cuya convergencia se puede mejorar atendiendo al valor del parámetro. Obviamente hablamos de convergencia, en el sentido de que los desarrollos que proponemos son sumas infinitas y para aplicarlos requiere el truncamiento de los mismos, por tanto para poder hablar de efectividad de los desarrollos se requiere una medida que nos estime el error que cometemos. Nosotros proponemos estimaciones del error y las comparamos con las obtenidas en la literatura.

En el capítulo tercero desarrollamos el esquema seguido en el capítulo anterior, para la determinación de funciones de densidad y de distribución respectivamente, aplicado a la suma ponderada positiva de variables chi-cuadrado no centradas con cualesquiera grados de libertad. Debido a la importancia de la distribución de una variable chi-cuadrado no centrada y por supuesto el hecho de no tener una expresión compacta para su función de densidad y de distribución, nos mueve en el interés de determinar previamente expresiones para las funciones de densidad y de distribución respectivamente. Se puede comprobar que expresiones particulares de la función de densidad han sido obtenidas en la literatura por un procedimiento distinto. Con respecto al estudio de las formas cuadráticas no centradas, los desarrollos obtenidos en el caso no centrado generalizan a los del caso centrado, sin embargo no ocurre lo mismo en el estudio de la convergencia, siendo en este caso no centrado más complicado, de hecho las cotas encontradas particularizadas al caso centrado son peores que las encontradas en el capítulo anterior.

En el capítulo cuarto aplicamos el mismo procedimiento a otras distribuciones de interés como son la suma de variables gamma con cualesquiera parámetros que surgen en ciertos procesos estocásticos con aplicaciones en ingeniería, meteorología, etc.. Así como a la familia exponencial natural con función de varianza potencial (parámetro potencia mayor que dos) importante en la Inferencia Estadística y en último lugar a la normal estándar, cuya importancia no es necesaria recalcar.

En el capítulo quinto tratamos más especialmente la distribución normal. Como consecuencia de la teoría sobre la estimación insesgada en la distribución normal con media  $\mu$  desconocida y desviación típica  $\sigma$  conocida, análoga a la desarrollada en la gamma, obtenemos desarrollos de Hermite tanto para la densidad como para la distribución normal estándar. Y más generalmente obtenemos desarrollos de Hermite para una función de densidad cualquiera, que integrando nos proporciona una expresión para la función de distribución. Tales desarrollos dependen del parámetro  $\mu$ , de forma que considerando valores adecuados, tendremos aproximaciones precisas de la distribución normal en primer lugar y en cuanto a los desarrollos para una densidad genérica obtenemos el desarrollo de Gram-Charlier tipo A.

Finalmente en el capítulo sexto, desarrollamos la última parte de la memoria, en la que aplicamos la teoría de la estimación insesgada de la familia exponencial natural con función de varianza cuadrática a la determinación de las distribuciones de los estadísticos que proponemos para contrastar la bondad de ajuste de una determinada distribución perteneciente a la NEF-QVF. Utilizando las propiedades de los polinomios ortogonales, determinamos las distribuciones asintóticas de un estadístico cuadrático alternativo por ejemplo al de Cramér-von Mises y de un estadístico tipo supremo alternativo al de Kolmogorov-Smirnov.

En el mismo capítulo, consideramos estadísticos de la familia de Cramér-von Mises, en particular estudiamos la distribución asintótica de estadísticos de Cramér-von Mises generalizados para la distribución gamma y normal utilizando la teoría de la estimación insesgada de este tipo de distribuciones en términos de los respectivos polinomios ortogonales. Las distribuciones de estos estadísticos han sido obtenidas en la literatura por un procedimiento distinto, fundamentalmente basado en la técnica de expresar el estadístico como un funcional de un proceso empírico, ver Doob (1949), y descomponer el proceso empírico utilizando la técnica de Kac & Siegert (1947). Además podríamos decir que completamos el estudio al especificar ciertas constantes necesarias para la aplicación real de tales estadísticos. De la misma forma podemos obtener

una expresión para el estadístico clásico de Cramér-von Mises, como una serie en términos de variables centradas, incorreladas y asintóticamente normales (ésta a su vez son sumas finitas de polinomios de Jacobi). Por tanto se tiene que el estadístico de Cramér-von Mises asintótico se puede expresar como una suma ponderada infinita de  $\chi_1^2$ , obtenida en la literatura por un procedimiento distinto.

Por último presentamos un procedimiento heurístico general, para aproximar una función de distribución en términos de otra distribución. Aplicaciones de este procedimiento se pueden ver en López-Blázquez et al. (2000a, 2000b). Nosotros aplicamos este procedimiento para obtener aproximaciones a las distribuciones de los estadísticos de Cramér-von Mises y de Watson respectivamente. Los resultados obtenidos los comparamos con las aproximaciones dadas por Götze (1979).

## CAPÍTULO 1

# Un procedimiento estadístico para la inversión de transformadas de Laplace

### 1.1. Introducción

Dada  $f : \mathbb{R}^+ \mapsto \mathbb{R}$  tal que  $\int_0^\infty \exp(-\lambda x)|f(x)|dx < +\infty$ ,  $\lambda > 0$ , se define la transformada de Laplace de  $f$ , como

$$(1.1) \quad \mathcal{L}(f)(\lambda) = \int_0^\infty \exp(-\lambda x)f(x)dx = h(\lambda).$$

Si la relación (1.1) se verifica se dice que  $f$  es la transformada inversa de Laplace de  $h$  y se denota  $f = \mathcal{L}^{-1}(h)$ .

Existen diversos métodos para obtener la transformada inversa, entre ellos podemos citar el Método de las fracciones simples, el Método de las series, el Método de las ecuaciones diferenciales, etc.. En muchas ocasiones fallan los métodos analíticos y hay que recurrir a los métodos numéricos. Un método general lo proporciona la teoría de funciones de variable compleja mediante la siguiente fórmula de inversión, ver Spiegel (1991),

$$\mathcal{L}^{-1}(h(\lambda))(x) = f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \exp(\lambda x)h(\lambda)d\lambda$$

que es una integral de contorno y se determina en general mediante técnicas en el campo complejo (Teorema de los Residuos) e integración numérica .

En el presente capítulo, obtendremos un desarrollo de Laguerre para la transformada inversa de Laplace. Tal desarrollo es obtenido de una forma indirecta utilizando las propiedades de unicidad de los estimadores insesgados de mínima varianza en la distribución gamma. Por este motivo, en la sección siguiente revisamos el problema de la estimación insesgada en dicha familia.

### 1.2. Estimación en la distribución Gamma

Sea  $X$  una variable aleatoria  $Ga(\lambda, p)$ ,  $p > 0$  conocido,  $\lambda > 0$  desconocido, cuya función de densidad viene dada por

$$(1.2) \quad f(x, \lambda) = \frac{\lambda^p}{\Gamma(p)} x^{p-1} e^{-\lambda x}, \quad x > 0.$$

Los momentos de la distribución gamma son

$$(1.3) \quad E(X^k) = \frac{\Gamma(p+k)}{\lambda^k \Gamma(p)},$$

en particular

$$\begin{aligned} \mu &= E(X) = p/\lambda \\ \text{Var}(X) &= V(\mu) = \mu^2/p. \end{aligned}$$

Dado que la varianza es un polinomio de grado 2 en la media, se tiene que la distribución gamma pertenece a la familia exponencial con función de varianza cuadrática (NEF-QVF).

A continuación introduciremos algunos conceptos en el campo de la estimación:

DEFINICIÓN 1.2.1. Dada  $h : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ , una función del parámetro, se dirá estimable si existe una función medible  $T : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tal que

$$E_\lambda(T(X)) = h(\lambda), \quad \forall \lambda \geq 0,$$

y diremos en este caso que  $T$  es un estimador insesgado de  $h$ . Al conjunto de las funciones estimables lo notaremos por  $\mathcal{U}^1$ .

Además, si  $\text{Var}_\lambda(T) < \infty, \forall \lambda > 0$ ,  $T(X)$  se dirá el UMVUE de  $h(\lambda)$ , (ya que la distribución gamma es completa) o bien  $h$  se dirá UMVU estimable. Al conjunto de las funciones UMVU estimables lo notaremos por  $\mathcal{U}^2$ .

En lo que sigue consideraremos como parámetro  $\mu = E_\lambda(X)$  y por tanto la función de densidad vendrá dada por  $m(x, \mu) = f(x, p/\mu)$ .

Para cada  $\mu > 0$ , definimos el espacio de funciones

$$\mathcal{L}_\mu^2 = \{T : E_\mu(T^2) < \infty\}.$$

Como es usual en la teoría de espacios  $\mathcal{L}^2$ , dos funciones son consideradas como iguales (o equivalentes) si son iguales salvo conjunto de medida (de Lebesgue) nula. Además  $\mathcal{L}_\mu^2$  es un espacio de Hilbert separable con el siguiente producto escalar

$$\langle T_1, T_2 \rangle_\mu = E_\mu [T_1 T_2] = \int_0^\infty T_1(x) T_2(x) m(x, \mu) dx.$$

La norma asociada al producto escalar en dicho espacio viene dado por  $\|T\|_\mu = \langle T, T \rangle_\mu^{1/2}$ .

Como consecuencia existirá un sistema de funciones ortonormales denso en  $(\mathcal{L}_\mu^2, \langle, \rangle_\mu)$ , nos interesará que dicha familia no sea complicada, en el mejor de los casos que sea una familia de polinomios ortonormales. Esto es posible al existir todos los momentos absolutos de la distribución gamma, (Abbey & David (1970)).

A continuación describiremos esta familia y determinaremos una expresión para el estimador de  $h(\lambda)$ ,  $T$ , en términos de estos polinomios.

PROPOSICIÓN 1.2.1. *Un sistema de polinomios mónicos ortogonales en  $\mathcal{L}_\mu^2$  viene dado por  $\{P_j(x, \mu)\}_{j \geq 0}$*

$$(1.4) \quad P_j(x, \mu) = (-1)^j \left(\frac{\mu}{p}\right)^j j! L_j^{(p-1)}\left(\frac{px}{\mu}\right), \quad j \geq 0,$$

donde

$$(1.5) \quad L_j^{(\alpha)}(x) = \sum_{m=0}^j \binom{j+\alpha}{j-m} \frac{(-x)^m}{m!}, \quad \alpha > 0,$$

es el  $j$ -ésimo polinomio de Laguerre generalizado que verifica la siguiente relación de recurrencia, ver Chihara (1978):

$$\begin{aligned} jL_j^{(\alpha)}(x) &= (2j + \alpha - 1 - x)L_{j-1}^{(\alpha)}(x) - (j + \alpha - 1)L_{j-2}^{(\alpha)}(x), \quad j \geq 1, \\ L_{-1}^{(\alpha)}(x) &= 0, \quad L_0^{(\alpha)}(x) = 1. \end{aligned}$$

PROPOSICIÓN 1.2.2. *Los polinomios  $P_j(x, \mu)$  definidos anteriormente satisfacen las siguientes propiedades, ver Morris (1982):*



1. La relación de recurrencia que verifican viene dada por:

$$P_{k+1} = \left( P_1 - \frac{2k\mu}{p} \right) P_k - k \left\{ 1 + \frac{k-1}{p} \right\} \frac{\mu^2}{p} P_{k-1}, \quad k \geq 1,$$

$$P_0 = 1, \quad P_1 = x - \mu.$$

2. Verifican la siguiente relación con la función respecto a la cual son ortogonales:

$$\frac{d^j}{d\mu^j} m(x, \mu) = \left( \frac{p}{\mu^2} \right)^j P_j(x, \mu) m(x, \mu).$$

3. Además,

$$\langle P_j, P_k \rangle_\mu = \delta_{k,j} \left( \frac{\mu}{p} \right)^{2j} j!(p)_j,$$

donde  $\delta_{k,j}$  es la delta de Kronecker y  $(a)_j = a(a+1)\cdots(a+j-1)$ , si  $j \geq 1$  y  $(a)_0 = 1$ .

Estamos en condiciones para obtener la expresión deseada del estimador  $T$ .

TEOREMA 1.2.1. Dada  $h(\lambda)$  una función UMVU estimable, su estimador UMVU,  $T$ , viene dado por el siguiente desarrollo:

$$(1.6) \quad T(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-\mu)^j g^{(j)}(\mu)}{(p)_j} L_j^{(p-1)} \left( \frac{px}{\mu} \right), \quad \forall \mu > 0,$$

donde  $g(\mu) = h(p/\mu)$  y  $g^{(j)}(\mu) = \frac{d^j}{d\mu^j} g(\mu)$ .

DEMOSTRACIÓN. Como  $T \in \mathcal{L}_\mu^2$  admite un desarrollo de Fourier en términos de los polinomios ortogonales  $\{P_j\}_{j \geq 0}$ , i.e.

$$(1.7) \quad T(x) = \sum_{j=0}^{\infty} c_j(\mu) P_j(x, \mu)$$

donde

$$(1.8) \quad c_j(\mu) = \frac{\langle T, P_j \rangle_\mu}{\|P_j\|_\mu^2}.$$

Por la propiedad 3 de la Proposición 1.2.2 se tiene que

$$(1.9) \quad \|P_j\|_\mu^2 = j! \left(\frac{\mu}{p}\right)^{2j} (p)_j.$$

El numerador de  $c_j(\mu)$  se obtiene a partir de la ecuación de insesgades:

$$(1.10) \quad E_\lambda [T(X)] = h(\lambda).$$

La expresión (1.10), escrita en términos del parámetro  $\mu$  es:

$$(1.11) \quad \int_0^\infty T(x)m(x, \mu)dx = h(p/\mu) = g(\mu).$$

Derivando (1.11)  $j$  veces con respecto a  $\mu$  y aplicando la propiedad 2 de la Proposición 1.2.2, se prueba fácilmente que

$$(1.12) \quad \langle T, P_j \rangle_\mu = \frac{\mu^{2j}}{p^j} g^{(j)}(\mu).$$

Sustituyendo (1.12) y (1.9) en (1.8), se obtiene el  $j$ -ésimo coeficiente de Fourier

$$(1.13) \quad c_j(\mu) = \frac{p^j g^{(j)}(\mu)}{j! (p)_j}.$$

Teniendo en cuenta (1.13) y la expresión de los polinomios mónicos ortogonales dada en la Proposición 1.2.1, se obtiene (1.6). ■

Obsérvese que el miembro derecho de (1.6) depende de cierto parámetro  $\mu$ . Por otro lado, es bien sabido que los estimadores insesgados basados en estadísticos suficientes y completos son únicos y no dependen evidentemente de ningún parámetro desconocido. Como consecuencia de estos hechos se tiene que el miembro derecho de (1.6) depende tan solo aparentemente de  $\mu$ . En otras palabras, para cualquier  $\mu > 0$  dicha serie converge (con la norma de  $\mathcal{L}_\mu^2$ ) a la misma función,  $T(x)$ .

En realidad el miembro derecho de (1.6) proporciona una infinidad de desarrollos ortogonales de la misma función. En este sentido podríamos decir que la elección de  $\mu$  es irrelevante, sin embargo, tal como se verá más adelante, una correcta elección de dicho parámetro proporcionará desarrollos numéricamente eficientes.

Otra expresión alternativa para el estimador insesgado puede obtenerse a partir de la ecuación de insesgadez

$$\int_0^{\infty} T(x) \frac{x^{p-1} \lambda^p}{\Gamma(p)} \exp(-\lambda x) dx = h(\lambda), \quad \lambda > 0,$$

que puede ser reescrita, en términos de la transformada de Laplace, como

$$\mathcal{L}(T(x) x^{p-1})(\lambda) = \Gamma(p) \frac{h(\lambda)}{\lambda^p},$$

de donde

$$(1.14) \quad T(x) = \frac{\Gamma(p)}{x^{p-1}} \mathcal{L}^{-1}(\lambda^{-p} h(\lambda))(x), \quad x > 0.$$

Un estudio acerca de los estimadores obtenidos mediante la relación (1.14) en la familia chi-cuadrado transformada puede verse en López-Blázquez (1998).

### 1.3. Inversión de la transformada de Laplace

Una consecuencia importante de la unicidad (c.s.), de los estimadores UMVU y de la teoría desarrollada en la sección anterior es el procedimiento para la obtención de transformadas inversas de Laplace que viene dado en el siguiente Teorema.

**TEOREMA 1.3.1.** *Sea  $G(\lambda)$ ,  $\lambda > 0$ , una función tal que para cierto  $p > 0$  la función  $h(\lambda) = \lambda^p G(\lambda)$  es UMVU estimable, entonces*

$$(1.15) \quad \mathcal{L}^{-1}(G(\lambda))(x) = \frac{x^{p-1}}{\Gamma(p)} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-\mu_0)^j g^{(j)}(\mu_0)}{(p)_j} L_j^{(p-1)}\left(\frac{px}{\mu_0}\right), \quad (\text{c.p.t.})$$

para cada  $\mu_0 > 0$  y  $x > 0$ , con  $g(\mu) = h(p/\mu)$ .

**DEMOSTRACIÓN.** Sea  $T$  el estimador insesgado de la función  $h(\lambda)$ , por tanto admite cualquiera de las expresiones (1.6), (1.14) dadas en la sección anterior, en particular de (1.14) se tiene que

$$\mathcal{L}^{-1}(\lambda^{-p} h(\lambda))(y) = \frac{y^{p-1}}{\Gamma(p)} T(y),$$

además teniendo en cuenta que  $G(\lambda) = \lambda^{-p} h(\lambda)$  y la expresión de  $T$  dada en (1.6), se tiene (1.15) como queríamos demostrar. ■

La expresión (1.15) no depende de  $\mu_0$  por la unicidad del estimador  $T$ , por tanto una elección adecuada del parámetro facilitará el cálculo de dicha función. Si particularizamos (1.15) para  $p = a + 1$  y  $\mu_0 = p$ , se puede probar que se obtiene la expresión dada por Piessens & Branders (1971) por un procedimiento distinto.

Un método distinto para invertir numéricamente transformadas de Laplace mediante polinomios de Laguerre, conocido como el método de Laguerre, fue propuesto por Tricomi (1935) y Widder (1935), ver Abate et al. (1996) y estudiado entre otros por Weeks (1966), Piessens & Branders (1971) y extendido al caso multivariante, Moorthy (1995). Una amplia bibliografía puede encontrarse en Abate et al. (1996), así como un estudio detallado del método de Laguerre como una alternativa al método de serie de Fourier para invertir numéricamente transformadas de Laplace.

Una de las aplicaciones de interés del procedimiento descrito en este capítulo es la determinación de diversas distribuciones en términos de los polinomios de Laguerre, como la suma ponderada de variables aleatorias chi-cuadrado independientes, tanto centradas como no centradas o más generalmente la suma de variables gamma independientes con distintos parámetros, que desarrollamos en los siguientes capítulos.

## CAPÍTULO 2

### Desarrollos para formas cuadráticas centradas

Los estadísticos empleados en muchos tests y procedimientos de estimación son expresables como formas cuadráticas de variables normales. La varianza muestral es uno de los ejemplos más comunes. En este capítulo estamos interesados en las formas cuadráticas centradas definidas (positivas o negativas), que como es conocido bajo normalidad se puede reducir mediante una transformación ortogonal a una combinación lineal (positiva o negativa) de variables chi-cuadrado, independientes y centradas.

Más generalmente el cálculo de la distribución de una combinación lineal positiva de variables chi-cuadrado centradas con cualesquiera grados de libertad surge en una clase importante de problemas en la teoría asintótica nula de test de bondad de ajuste (test  $\chi^2$  de Pearson, test EDF), ver Rao & Scott (1984). Este tipo de distribuciones aparece también en otros campos como en Biología, en problemas de balística, en teoría de la comunicación, etc. ver Jensen & Solomon (1972).

Son muchos los autores que han estudiado la determinación y aproximación de la distribución de la combinación lineal de variables chi-cuadrado centradas, ver Johnson et al. (1994). Diversas representaciones de este tipo de distribución han sido dadas mediante mixtura de distribuciones chi-cuadrado (Robbins (1948), Robbins & Pitman (1949)), mediante desarrollos en series de Laguerre (Bhattacharyya (1945), Gurland (1955,1956), Kotz et al. (1967a), Gideon & Gurland (1976)), así como en desarrollos en series de potencia (Pachares (1955)), siendo el desarrollo de Laguerre dado por Kotz et al. (1967a) la expresión que proporciona mejores resultados y que fue utilizada por Johnson & Kotz (1968) para tabular este tipo de distribuciones.

Otras expresiones las podemos encontrar por ejemplo en Imhof (1961) que invierte la función característica de una forma cuadrática genérica en el campo complejo (a través de la fórmula dada por Gil-Peláez (1951)) aplicando métodos numéricos para determinar las integrales. Davies (1973,1980) proporciona un algoritmo siguiendo esta misma línea.

La mayoría de los autores proporcionan una expresión para la función de densidad que posteriormente integran para obtener la función de distribución.

En este capítulo nos ocuparemos de obtener desarrollos de Laguerre para la función de densidad y de distribución de combinaciones lineales positivas de variables chi-cuadrado centradas con cualesquiera grados de libertad de forma independiente, es decir determinaremos la función de distribución sin necesidad de conocer la función de densidad. También estudiaremos la convergencia de tales desarrollos y proporcionaremos estimaciones del error que se comete al considerar aproximaciones truncando los desarrollos.

Sean  $X_1, X_2, \dots, X_n$  variables aleatorias independientes que siguen una distribución chi-cuadrado centrada con  $\nu_i$  grados de libertad, i.e.  $X_i \sim \chi_{\nu_i}^2$  cuya función de densidad,  $f_i$  viene dada por

$$(2.1) \quad f_i(x) = \frac{x^{\nu_i/2-1} e^{-x/2}}{2^{\nu_i/2} \Gamma(\nu_i/2)}, \quad x > 0.$$

Sea  $Q_n = \sum_{i=1}^n \alpha_i X_i$ , con  $\alpha_i > 0, \forall i$ , aplicaremos el Teorema 1.3.1 con el fin de obtener una expresión para la función densidad y de distribución de  $Q_n$ . Veremos que pueden obtenerse distintas expresiones para la función de densidad y de distribución de  $Q_n$  con coeficientes fácilmente calculables. Algunas de las expresiones que obtendremos pueden encontrarse en la literatura. La ventaja es que nuestro método nos proporciona un conjunto de desarrollos equivalentes en función de un parámetro y valores particulares del parámetro darán lugar a desarrollos numéricamente eficientes.

### 2.1. Función de densidad de la combinación lineal positiva de $\chi^2$ centradas

En esta sección determinaremos diversos desarrollos para la función de densidad de  $Q_n$  por el procedimiento descrito.

Sean  $f(\cdot)$  y  $M(\cdot)$  la función de densidad y la función generatriz de momentos de  $Q_n$  respectivamente. La transformada de Laplace de la función de densidad viene dada por:

$$\mathcal{L}(f(x))(\lambda) = \prod_{i=1}^n (1 + 2\alpha_i \lambda)^{-\nu_i/2} = M(-\lambda) = G(\lambda),$$

y por tanto

$$f(x) = \mathcal{L}^{-1}(G(\lambda))(x).$$

Basta aplicar el Teorema 1.3.1 a  $G(\lambda)$  para obtener un desarrollo para la función de densidad  $f$ .

Sea  $g(\mu) = (p/\mu)^p G(p/\mu)$ , si  $p = \nu/2$  donde  $\nu = \sum_{i=1}^n \nu_i$ , entonces

$$g(\mu) = (\nu/2)^{\nu/2} \prod_{i=1}^n (\mu + \alpha_i \nu)^{-\nu_i/2}.$$

Se puede demostrar fácilmente (aplicando logaritmo y derivando) que las derivadas sucesivas de  $g$  satisfacen la fórmula recurrente,

$$g^{(k)}(\mu) = (-1)^k (k-1)! \sum_{j=0}^{k-1} \frac{(-1)^j g^{(j)}(\mu)}{j!} \sum_{i=1}^n \frac{\nu_i/2}{(\mu + \alpha_i \nu)^{k-j}}.$$

Si notamos

$$c_k = \frac{(-\mu_0)^k g^{(k)}(\mu_0)}{k!},$$

y sustituimos en (1.15), se obtiene la siguiente expresión para la función de densidad :

$$(2.2) \quad f(x) = \frac{x^{(\nu/2)-1}}{\Gamma(\nu/2)} \sum_{k \geq 0} \frac{k! c_k}{(\nu/2)_k} L_k^{(\frac{\nu}{2}-1)} \left( \frac{\nu x}{2\mu_0} \right), \quad \forall \mu_0 > 0.$$

Los coeficientes  $c_k$  verifican la siguiente relación de recurrencia:

$$(2.3a) \quad c_k = \frac{1}{k} \sum_{j=0}^{k-1} c_j d_{k-j}, \quad k \geq 1, \quad c_0 = (\nu/2)^{\nu/2} \prod_{i=1}^n (\mu_0 + \alpha_i \nu)^{-\nu_i/2},$$

$$(2.3b) \quad d_j = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \nu_i \left( \frac{\mu_0}{\mu_0 + \alpha_i \nu} \right)^j, \quad j \geq 1.$$

**2.1.1. Estudio de la convergencia.** La fórmula (2.2) proporciona una expresión para la función de densidad de la combinación lineal positiva de variables chi-cuadrado. Nótese que el miembro derecho es una serie infinita. Si se desea implementar dicha fórmula en un ordenador es obvio que tan sólo será posible evaluar un número finito de términos. El objetivo de esta sección es proporcionar cotas para la diferencia entre el verdadero valor de la función de densidad y el valor que se obtiene al truncar la serie del miembro derecho de (2.2).

El error absoluto cometido es

$$(2.4) \quad \begin{aligned} \mathcal{E}_N(f, x, \mu_0) &= \left| f(x) - \frac{x^{(\nu/2)-1}}{\Gamma(\nu/2)} \sum_{k=0}^N \frac{k! c_k}{(\nu/2)_k} L_k^{(\frac{\nu}{2}-1)} \left( \frac{\nu x}{2\mu_0} \right) \right| \\ &= \left| \frac{x^{(\nu/2)-1}}{\Gamma(\nu/2)} \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{k! c_k}{(\nu/2)_k} L_k^{(\frac{\nu}{2}-1)} \left( \frac{\nu x}{2\mu_0} \right) \right|. \end{aligned}$$

Con el objeto de proporcionar cotas para el error necesitamos el siguiente resultado:

LEMA 2.1.1. *Sea  $L_k^{(\alpha)}$  el polinomio de Laguerre generalizado de grado  $k$  dado en (1.5), se tiene la siguiente acotación:*

$$(2.5) \quad \left| L_k^{(\alpha)}(x) \right| \leq R^{-k} (1-R)^{-\alpha-1} \exp\left(\frac{x}{2}\right), \quad \forall R, \quad 0 < R < 1.$$

DEMOSTRACIÓN. Los polinomios de Laguerre generalizados tienen la siguiente función generatriz, ver Chihara (1978):

$$(2.6) \quad \sum_{k \geq 0} L_k^{(\alpha)}(x) t^k = (1-t)^{-\alpha-1} \exp\left(\frac{-xt}{1-t}\right),$$



y aplicando la desigualdad de Cauchy a (2.6),

$$\begin{aligned} \left| L_k^{(\alpha)}(x) \right| &\leq R^{-k} \max_{|t|=R} \left| (1-t)^{-\alpha-1} \exp\left(\frac{-xt}{1-t}\right) \right| \\ &\leq R^{-k} (1-R)^{-\alpha-1} \exp\left(\frac{xR}{1+R}\right) \\ &\leq R^{-k} (1-R)^{-\alpha-1} \exp\left(\frac{x}{2}\right), \quad \forall R, 0 < R < 1, \end{aligned}$$

se tiene (2.5). ■

Por otro lado es necesario obtener una acotación para los coeficientes  $c_k$  (2.3a), para ello previamente acotamos los coeficientes  $d_j$  dados en (2.3b). Sea

$$\alpha_{(1)} = \min_i \alpha_i,$$

entonces

$$(2.7) \quad |d_j| \leq \frac{\nu}{2} \left( \frac{\mu_0}{\mu_0 + \alpha_{(1)}\nu} \right)^j = \frac{\nu}{2} \xi^j, \quad j \geq 1,$$

con  $0 < \xi = \frac{\mu_0}{\mu_0 + \alpha_{(1)}\nu} < 1, \forall \mu_0 > 0$ . Por inducción se puede comprobar que

$$(2.8) \quad \frac{\nu/2}{k} \sum_{j=1}^{k-1} \frac{(\nu/2)_j}{j!} = \frac{(\nu/2)_k}{k!},$$

y a partir de (2.3a), utilizando (2.7) y (2.8) se prueba también por inducción:

$$(2.9) \quad |c_k| \leq |c_0| \frac{(\nu/2)_k}{k!} \xi^k, \quad \forall k \geq 0.$$

Por tanto, a partir de (2.2) y de (2.9) se tiene

$$(2.10) \quad |f(x)| \leq \frac{x^{(\nu/2)-1} |c_0|}{\Gamma(\nu/2)} \sum_{k \geq 0} \xi^k \left| L_k^{(\frac{\nu}{2}-1)} \left( \frac{\nu x}{2\mu_0} \right) \right|$$

y aplicando el Lema 2.1.1,

$$(2.11) \quad \left| L_k^{(\frac{\nu}{2}-1)} \left( \frac{\nu x}{2\mu_0} \right) \right| \leq R^{-k} (1-R)^{-\frac{\nu}{2}} \exp\left(\frac{\nu x}{4\mu_0}\right), \quad \forall R, 0 < R < 1,$$

con lo cual utilizando (2.11) para acotar el miembro derecho de (2.10),

$$(2.12) \quad |f(x)| \leq \frac{x^{(\nu/2)-1} |c_0|}{\Gamma(\nu/2)} (1-R)^{-\nu/2} \exp\left(\frac{\nu x}{4\mu_0}\right) \sum_{k \geq 0} \left( \frac{\xi}{R} \right)^k.$$

Considerando  $R$  tal que  $\xi < R < 1$  la serie anterior converge absolutamente. Finalmente, a partir de (2.4)

$$\mathcal{E}_N(f, x, \mu_0) \leq \frac{x^{(\nu/2)-1} |c_0|}{\Gamma(\nu/2)} (1 - R)^{-\nu/2} \exp\left(\frac{\nu x}{4\mu_0}\right) \frac{(\xi/R)^{N+1}}{1 - \xi/R}.$$

Por tanto queda demostrada la convergencia uniforme de la serie (2.2) en cada intervalo finito de  $x > 0$  y para cada  $\mu_0 > 0$ . Una cota simple se puede obtener para  $R = \xi^{1/2}$ , resultando

$$(2.13) \quad \mathcal{E}_N(f, x, \mu_0) \leq \frac{x^{(\nu/2)-1} |c_0|}{\Gamma(\nu/2)} \left(1 - \xi^{1/2}\right)^{-\nu/2-1} \exp\left(\frac{\nu x}{4\mu_0}\right) \xi^{(N+1)/2}.$$

Nos interesa que la cota sea lo más pequeña posible, dicha cota como función de  $\xi$  es una función creciente, por tanto nos interesará hacer  $\xi = \mu_0 / (\mu_0 + \alpha_{(1)}\nu)$  pequeño y para ello  $\mu_0$  debe ser en principio pequeño, no nos debemos olvidar que  $c_0 = (\nu/2)^{\nu/2} \prod_{i=1}^n (\mu_0 + \alpha_i\nu)^{-\nu_i/2}$  depende también de  $\mu_0$  y para que  $c_0$  fuese pequeño  $\mu_0$  debe ser grande, por tanto hay que llegar a un equilibrio.

La cota anterior ha sido obtenida siguiendo un procedimiento análogo a Kotz et al. (1967a). Sin embargo, podemos conseguir una cota distinta a (2.13), considerando acotaciones más finas para los polinomios de Laguerre.

LEMA 2.1.2. *Sea  $L_k^{(\alpha)}$  el polinomio de Laguerre generalizado de grado  $k$  dado en (1.5), entonces*

$$(2.14) \quad \left|L_k^{(\alpha)}(x)\right| \leq \exp\left(\frac{x}{2}\right) \left(\frac{k}{k+1+\alpha}\right)^{-k} \left(\frac{1+\alpha}{k+1+\alpha}\right)^{-\alpha-1},$$

que mejora la dada en (2.5).

DEMOSTRACIÓN. La cota (2.5) se puede mejorar resolviendo

$$\inf_{0 < R < 1} R^{-k} (1 - R)^{-\alpha-1},$$

que se alcanza en

$$R = \frac{k}{k+1+\alpha},$$

y sustituyendo dicho valor en (2.5) obtenemos (2.14). ■

Particularizando  $\alpha$  y  $x$  por los valores adecuados en (2.14), se tiene

$$(2.15) \quad \left| L_k^{(\frac{\nu}{2}-1)} \left( \frac{\nu x}{2\mu_0} \right) \right| \leq \exp \left( \frac{\nu x}{4\mu_0} \right) \left( \frac{2k}{2k+\nu} \right)^{-k} \left( \frac{\nu}{2k+\nu} \right)^{-\nu/2}$$

y utilizando (2.15) para acotar (2.10)

$$|f(x)| \leq \frac{x^{(\nu/2)-1} |c_0|}{\Gamma(\nu/2)} \exp \left( \frac{\nu x}{4\mu_0} \right) \sum_{k \geq 0} a_k,$$

con

$$(2.16) \quad a_k = \xi^k \left( \frac{2k+\nu}{2k} \right)^k \left( \frac{2k+\nu}{\nu} \right)^{\nu/2},$$

cuya serie es absolutamente convergente por el criterio de D'Alembert ya que  $0 < \xi < 1$ . La cota que se consigue de (2.4) en este caso es:

$$(2.17) \quad \mathcal{E}_N(f, x, \mu_0) \leq \frac{x^{(\nu/2)-1} |c_0|}{\Gamma(\nu/2)} \exp \left( \frac{\nu x}{4\mu_0} \right) \sum_{k=N+1}^{\infty} a_k,$$

con  $a_k$  dados en (2.16).

El desarrollo de Laguerre (2.2) conseguido para la función de densidad de  $Q_n$ , es válido para cualquier valor del parámetro  $\mu_0$ . A continuación presentamos algunas expresiones particulares de (2.2) para distintos valores de  $\mu_0 > 0$ :

- Si  $\mu_0 = \nu = \sum_{i=1}^n \nu_i$ , se obtiene una expresión simple:

$$f(x) = \frac{x^{(\nu/2)-1}}{\Gamma(\nu/2)} \sum_{k \geq 0} \frac{k! c_k}{(\nu/2)_k} L_k^{(\frac{\nu}{2}-1)} \left( \frac{x}{2} \right),$$

donde

$$(2.18) \quad \begin{aligned} c_k &= \frac{1}{k} \sum_{j=0}^{k-1} c_j d_{k-j}, \quad k \geq 1, & c_0 &= \frac{1}{2^{\nu/2}} \prod_{i=1}^n (1 + \alpha_i)^{-\nu_i/2}, \\ d_j &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \nu_i \left( \frac{1}{1 + \alpha_i} \right)^j, \quad j \geq 1. \end{aligned}$$

Resultados computacionales muestran que:

- Si  $\mu_0 = x$ ,  $L_1^{(\nu/2-1)} \left( \frac{\nu x}{2\mu_0} \right) = 0$  y se obtienen desarrollos numéricamente eficientes para valores de  $x$  pequeños.

- Si  $\mu_0 = \alpha_{(1)}\nu/7$ , y en este caso  $\xi = 1/8$ , se acelera la convergencia para valores de  $x$  pequeños. Así lo podemos observar el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 2.1.1. Sea la combinación lineal:  $Q_3 = 0.6\chi_6^2 + 0.3\chi_4^2 + 0.1\chi_2^2$  (Imhof (1960)). En la siguiente tabla proporcionamos algunos resultados numéricos para la densidad de  $Q_3$ , a través de los desarrollos obtenidos de (2.2) para los valores del parámetro  $\mu$  citados anteriormente y con  $N$  el número de términos considerado en el desarrollo (2.2):

	$x = 0.5, N = 5$	$x = 1, N = 10$	$x = 1.5, N = 15$	$x = 2, N = 20$
$\mu_0 = \nu$	0.00005534437	0.005523390669	0.0418095049	0.096723715
$\mu_0 = x$	0.00087916807	0.01253800035	0.04437498698	0.090260980
$\mu_0 = \alpha_{(1)}\nu/7$	0.00087927968	0.01253784316	0.0443752271	0.090260552
<i>Exacto</i>	0.00087927274	0.01253784595	0.0443752262	0.090260551

Además si elegimos para cada valor de  $x$  un valor de  $\mu_0$ , podemos mejorar la convergencia del desarrollo obtenido en dicho valor de  $x$ . Hemos comprobado empíricamente que si  $x$  es muy pequeño se acelera la convergencia considerando  $\mu_0$  tal que  $\xi$  sea muy pequeño. A medida que  $x$  aumenta, el valor de  $\mu_0$  que se considere también debe aumentar y por tanto también lo hará  $\xi$ , con el objetivo de acelerar la convergencia, aunque lo cierto es que la convergencia se hace lenta en estos casos (cola derecha).

## 2.2. Otros desarrollos para la función de densidad

Kotz et al. (1967a) dieron una expresión para la función de densidad de la combinación lineal positiva de  $\chi^2$  con un grado de libertad ( $\nu_i = 1, \forall i$ ), distinta a (2.2). Nosotros podemos obtener la expresión que proporciona Kotz et al. como un caso particular de nuestro procedimiento, realizando previamente un cambio de variable en la función a invertir. Además el tipo de desarrollo que obtenemos acelera la convergencia para la cola superior.

Sea

$$H(\lambda) = G\left(\frac{\lambda-1}{2\beta}\right) = \beta^{\nu/2} \prod_{i=1}^n (\beta + \alpha_i(\lambda-1))^{-\nu_i/2},$$

para  $\beta > 0$ . Por tanto, por las propiedades de la transformada de Laplace,

$$(2.19) \quad \begin{aligned} f(x) &= \mathcal{L}^{-1}(G(\lambda))(x) = \mathcal{L}^{-1}(H(1+2\beta\lambda))(x) \\ &= \frac{e^{-\frac{x}{2\beta}}}{2\beta} \mathcal{L}^{-1}(H(\lambda))\left(\frac{x}{2\beta}\right). \end{aligned}$$

Aplicamos nuestro procedimiento a la función  $H(\lambda)$  :

Sea  $g(\mu) = (p/\mu)^p H(p/\mu)$ , si  $p = \nu/2$

$$g(\mu) = (\beta\nu/2)^{\nu/2} \prod_{i=1}^n (\beta\mu + \alpha_i(\nu/2 - \mu))^{-\nu_i/2}.$$

Las derivadas sucesivas son

$$g^{(k)}(\mu) = (-1)^k (k-1)! \sum_{j=0}^{k-1} \frac{(-1)^j g^{(j)}(\mu)}{j!} \sum_{i=1}^n \frac{\nu_i}{2} \left( \frac{\beta - \alpha_i}{\beta\mu + \alpha_i(\nu/2 - \mu)} \right)^{k-j}.$$

Si notamos  $c_k = \frac{(-\mu_0)^k g^{(k)}(\mu_0)}{k!}$ , y sustituimos en (1.15)

$$\mathcal{L}^{-1}(H(\lambda))(x) = \frac{x^{(\nu/2)-1}}{\Gamma(\nu/2)} \sum_{k \geq 0} \frac{k! c_k}{(\nu/2)_k} L_k^{(\frac{\nu}{2}-1)}\left(\frac{\nu x}{2\mu_0}\right), \quad \forall \mu_0 > 0,$$

y por (2.19)

$$(2.20) \quad f(x) = \frac{e^{-\frac{x}{2\beta}}}{(2\beta)^{\nu/2}} \frac{x^{(\nu/2)-1}}{\Gamma(\nu/2)} \sum_{k \geq 0} \frac{k! c_k}{(\nu/2)_k} L_k^{(\frac{\nu}{2}-1)}\left(\frac{\nu x}{4\beta\mu_0}\right), \quad \forall \mu_0 > 0.$$

Los coeficientes verifican la siguiente relación de recurrencia

$$(2.21a) \quad c_k = \frac{1}{k} \sum_{j=0}^{k-1} c_j d_{k-j}, \quad k \geq 1,$$

$$c_0 = \left( \frac{\nu}{2\mu_0} \right)^{\nu/2} \prod_{i=1}^n \left( 1 + \frac{\alpha_i}{\beta} \left( \frac{\nu}{2\mu_0} - 1 \right) \right)^{-\nu_i/2},$$

$$(2.21b) \quad d_j = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \nu_i \left( \frac{1 - \frac{\alpha_i}{\beta}}{1 + \frac{\alpha_i}{\beta} \left( \frac{\nu}{2\mu_0} - 1 \right)} \right)^j, \quad j \geq 1.$$

**2.2.1. Estudio de la convergencia.** En primer lugar para acotar los coeficientes  $c_k$  (2.21a), conseguimos una cota para los coeficientes  $d_j$ . Fácilmente a partir de (2.21b) se verifica

$$|d_j| \leq \frac{\nu}{2} \xi^j, \quad \forall j \geq 1,$$

con

$$\xi = \max_i \left| \frac{1 - \frac{\alpha_i}{\beta}}{1 - \frac{\alpha_i}{\beta} \left( 1 - \frac{\nu}{2\mu_0} \right)} \right|,$$

nos interesará que  $0 < \xi < 1$ , para tal fin la elección de  $\mu_0$  condicionará el valor de  $\beta$ , así tenemos que si:

$$(2.22) \quad \begin{cases} \mu_0 > \nu/4 & \text{entonces } \beta > \left( 2 - \frac{\nu}{2\mu_0} \right) \frac{\alpha_{(n)}}{2} \\ \mu_0 \leq \nu/4 & \text{entonces es válido para todo } \beta > 0, \end{cases}$$

con  $\alpha_{(n)} = \max_i \alpha_i$ . Análogamente al estudio anterior, se prueba por inducción:

$$|c_k| \leq |c_0| \frac{(\nu/2)_k}{k!} \xi^k, \quad \forall k \geq 0.$$

Acotando la función de densidad de forma análoga a (2.10) y utilizando el Lema 2.1.1 se demuestra la convergencia uniforme de (2.20) en cada intervalo finito de  $x > 0$ , y para cada  $\mu_0 > 0$  y  $\beta$  adecuado. Además se puede probar la convergencia uniforme para todo  $x > 0$ , cuando  $\mu_0 > p/2$ .

También podemos obtener estimaciones del error con  $R = \xi^{1/2}$ :

$$(2.23) \quad \begin{aligned} \mathcal{E}_N(f, x, \mu_0, \beta) &\leq \\ &\leq \frac{e^{-\frac{x}{2\beta}} x^{(\nu/2)-1} |c_0|}{(2\beta)^{\nu/2} \Gamma(\nu/2)} \left(1 - \xi^{1/2}\right)^{-\nu/2-1} \exp\left(\frac{\nu x}{8\beta\mu_0}\right) \xi^{(N+1)/2} \end{aligned}$$

y una cota distinta a partir del Lema 2.1.2 donde  $R = \frac{2k}{2k + \nu}$ :

$$(2.24) \quad \mathcal{E}_N(f, x, \mu_0, \beta) \leq \frac{e^{-\frac{x}{2\beta}} x^{(\nu/2)-1} |c_0|}{(2\beta)^{\nu/2} \Gamma(\nu/2)} \exp\left(\frac{\nu x}{8\beta\mu_0}\right) \sum_{k=N+1}^{\infty} a_k,$$

con

$$a_k = \xi^k \left(\frac{2k + \nu}{2k}\right)^k \left(\frac{2k + \nu}{\nu}\right)^{\nu/2}.$$

Una expresión para la función de densidad de  $Q_n$  la conseguimos si particularizamos (2.20) para  $\mu_0 = \nu/2$ , dando lugar a

$$(2.25) \quad f(x) = \frac{e^{-\frac{x}{2\beta}} x^{\nu/2-1}}{(2\beta)^{\nu/2} \Gamma(\nu/2)} \sum_{k \geq 0} \frac{k! c_k}{(\nu/2)_k} L_k^{(\frac{\nu}{2}-1)} \left(\frac{x}{2\beta}\right),$$

donde

$$(2.26) \quad \begin{aligned} c_k &= \frac{1}{k} \sum_{j=0}^{k-1} c_j d_{k-j}, \quad k \geq 1, \quad c_0 = 1, \\ d_j &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \nu_i \left(1 - \frac{\alpha_i}{\beta}\right)^j, \quad j \geq 1. \end{aligned}$$

Esta expresión fue obtenida por Kotz et al. (1967a) en el caso  $\nu_i = 1$  (y por tanto  $\nu = n$ ), por un procedimiento distinto. Esta serie es uniformemente convergente para todo  $x > 0$  y  $\beta > \alpha_{(n)}/2$  (así  $0 < \xi < 1$ ) ver (2.22). Kotz et al. (1967a) dan una cota del error con  $\beta = (\alpha_{(1)} + \alpha_{(n)})/2$  ya que es el valor que hace mínimo  $\xi$ .

La cota del error dada en (2.23) para  $\mu_0 = \nu/2$  es exactamente la que proporcionan Kotz et al. (1967a) y que nosotros mejoramos en la expresiones que se deducen de (2.24) para  $\mu_0 = \nu/2$  y  $\mu_0 = \nu/20$  respectivamente, con

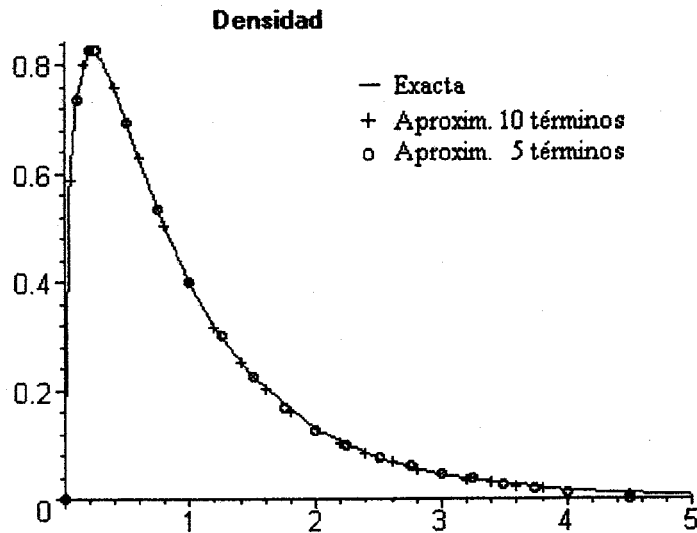


FIGURA 2.1

$\beta = (\alpha_{(1)} + \alpha_{(n)}) / 2$  y  $\nu_i = 1$ , como se puede ver en la siguiente tabla correspondiente a  $Q_3 = 0.6\chi_1^2 + 0.3\chi_1^2 + 0.1\chi_1^2$ , para distintos valores de  $x$  y  $N = 20$  (se corresponde con un ejemplo de Imhof (1961)) :

	$x = 0.1$	$x = 0.7$	$x = 2$
(2.23), $\mu_0 = \frac{\nu}{2}$	1.756687043	3.027730472	2.0221133118
(2.24), $\mu_0 = \frac{\nu}{2}$	0.4963271911	0.8554426165	0.5713252423
(2.24), $\mu_0 = \frac{\nu}{20}$	$0.9956255605 \cdot 10^{-12}$	$0.8121845244 \cdot 10^{-10}$	$0.2311044294 \cdot 10^{-6}$

COTAS PARA LOS ERRORES

Como podemos observar en la tabla anterior, las dos primeras filas de resultados correspondientes a  $\mu_0 = \nu/2$  no proporcionan estimaciones del error precisas, aunque para dicho  $\mu_0$  obtenemos cotas que mejoran a la de Kotz et al. (2.23). Podemos observar que las estimaciones del error se mejoran bastante cuando consideramos  $\mu_0 = \nu/20$ .

En la figura 2.1 podemos observar la convergencia del desarrollo (2.20), para el mismo caso de combinación lineal considerado anteriormente  $Q_3 = 0.6\chi_1^2 + 0.3\chi_1^2 + 0.1\chi_1^2$  y con  $\mu_0 = \nu/6$ .



### 2.3. Función de distribución de la combinación lineal positiva de $\chi^2$ centradas

Kotz et al. (1967a) obtienen una expresión para la función de distribución de la combinación lineal de  $\chi^2$  centradas integrando término a término la función de densidad (2.25).

Nosotros podemos obtener una expresión para la función de distribución sin necesidad de conocer la función de densidad, utilizando el mismo procedimiento que para el caso de la función de densidad.

Sea  $F(\cdot)$  la función de distribución de  $Q_n$ , su transformada de Laplace viene dada por:

$$\mathcal{L}(F(x))(\lambda) = \frac{1}{\lambda} \prod_{i=1}^n (1 + 2\alpha_i \lambda)^{-\nu_i/2} = G(\lambda).$$

Para aplicar el procedimiento presentado en la sección 1.3, sea

$$g(\mu) = (p/\mu)^p G(p/\mu). \text{ Si } p = \nu/2 + 1 \text{ donde } \nu = \sum_{i=1}^n \nu_i,$$

entonces

$$g(\mu) = (\nu/2 + 1)^{\nu/2} \prod_{i=1}^n (\mu + \alpha_i(\nu + 2))^{-\nu_i/2}.$$

Y las derivadas sucesivas verifican,

$$g^{(k)}(\mu) = (-1)^k (k-1)! \sum_{j=0}^{k-1} \frac{(-1)^j g^{(j)}(\mu)}{j!} \sum_{i=1}^n \frac{\nu_i/2}{(\mu + \alpha_i(\nu + 2))^{k-j}}.$$

Si  $c_k = \frac{(-\mu_0)^k g^{(k)}(\mu_0)}{k!}$ , entonces

$$(2.27) \quad F(x) = \frac{x^{\nu/2}}{\Gamma(\nu/2 + 1)} \sum_{k \geq 0} \frac{k! c_k}{(\nu/2 + 1)_k} L_k^{(\frac{\nu}{2})} \left( \frac{(\nu + 2)x}{2\mu_0} \right), \forall \mu_0 > 0,$$

donde

$$(2.28a) \quad c_k = \frac{1}{k} \sum_{j=0}^{k-1} c_j d_{k-j}, \quad k \geq 1,$$

$$c_0 = (\nu/2 + 1)^{\nu/2} \prod_{i=1}^n (\mu_0 + \alpha_i(\nu + 2))^{-\nu_i/2},$$

$$(2.28b) \quad d_j = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \nu_i \left( \frac{\mu_0}{\mu_0 + \alpha_i(\nu + 2)} \right)^j, \quad j \geq 1.$$

**2.3.1. Estudio de la convergencia.** Análogamente a los estudios anteriores, para acotar los coeficientes  $c_k$ , debemos obtener cotas para los coeficientes definidos en (2.28b) :

$$(2.29) \quad |d_j| \leq \frac{\nu}{2} \xi^j, \quad \forall j \geq 1.$$

con

$$\xi = \frac{\mu_0}{\mu_0 + \alpha_{(1)}(\nu + 2)}.$$

Nótese que  $0 < \xi < 1$ ,  $\forall \mu_0 > 0$ .

Acotamos  $c_k$  a partir de (2.28a), utilizando (2.29) y la relación (2.8)

$$|c_k| \leq |c_0| \frac{(\nu/2)_k}{k!} \xi^k, \quad \forall k \geq 0,$$

y a partir de (2.27),

$$(2.30) \quad |F(x)| \leq \frac{x^{\nu/2} |c_0|}{\Gamma(\nu/2 + 1)} \sum_{k \geq 0} \frac{\nu/2}{(\nu/2 + k)} \xi^k \left| L_k^{(\frac{\nu}{2})} \left( \frac{(\nu + 2)x}{2\mu_0} \right) \right|.$$

Por el Lema 2.1.2 acotamos (2.30) resultando

$$|F(x)| \leq \frac{x^{\nu/2} |c_0|}{\Gamma(\nu/2 + 1)} \exp \left( \frac{(\nu + 2)x}{4\mu_0} \right) \sum_{k \geq 0} b_k,$$

con

$$(2.31) \quad b_k = \xi^k \left( \frac{2k + \nu + 2}{2k} \right)^k \left( \frac{2k + \nu + 2}{\nu + 2} \right)^{\nu/2+1} \frac{\nu/2}{(\nu/2 + k)},$$

cuya serie es absolutamente convergente por el criterio de D'Alembert ya que  $0 < \xi < 1$ . De esta forma obtenemos estimaciones del error:

$$\mathcal{E}_N(F, x, \mu_0) \leq \frac{x^{\nu/2} |c_0|}{\Gamma(\nu/2 + 1)} \exp\left(\frac{(\nu + 2)x}{4\mu_0}\right) \sum_{k=N+1}^{\infty} b_k,$$

con  $b_k$  dados en (2.31). Y queda demostrada la convergencia uniforme de (2.27) en cada intervalo finito de  $x > 0$  y para cada  $\mu_0 > 0$ .

Finalmente mostraremos distintas expresiones para la función de distribución  $F$  particularizando para algunos valores del parámetro  $\mu_0$  en (2.27).

- Si  $\mu_0 = \nu + 2$  obtenemos una expresión simple:

$$F(x) = \frac{x^{\nu/2}}{\Gamma(\nu/2 + 1)} \sum_{k \geq 0} \frac{k! c_k}{(\nu/2 + 1)_k} L_k^{(\frac{\nu}{2})} \left(\frac{x}{2}\right),$$

donde

$$(2.32) \quad \begin{aligned} c_k &= \frac{1}{k} \sum_{j=0}^{k-1} c_j d_{k-j}, \quad k \geq 1, & c_0 &= 2^{-\nu/2} \prod_{i=1}^n (1 + \alpha_i)^{-\nu_i/2}, \\ d_j &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \nu_i \left(\frac{1}{1 + \alpha_i}\right)^j, \quad j \geq 1. \end{aligned}$$

Observemos que (2.32) son los mismos coeficientes que se obtienen en (2.18) en el desarrollo de la función de densidad.

- Si  $\mu_0 = x$ , se anula el polinomio de Laguerre de grado uno, obteniéndose expresiones computacionalmente eficientes para valores de  $x$  pequeños.
- Si  $\mu_0 = \alpha_{(1)}(\nu + 2)/7$  se tiene  $\xi = 1/8$  y en este caso se acelera la convergencia para valores de  $x$  pequeños.

Además empíricamente se obtienen resultados análogos a los obtenidos en el desarrollo (2.2) de la función de densidad, por tanto la convergencia es lenta para la cola superior de la distribución.

### 2.4. Otros desarrollos para la función de distribución

En un intento de obtener mejores resultados en la cola derecha presentamos otra expresión, aplicando el mismo procedimiento:

Sea

$$H(\lambda) = G\left(\frac{\lambda-1}{2\beta}\right) = \frac{2\beta^{1+\nu/2}}{\lambda-1} \prod_{i=1}^n (\beta + (\lambda-1)\alpha_i)^{-\nu_i/2}, \text{ con } \beta > 0,$$

entonces

$$(2.33) \quad \begin{aligned} F(x) &= \mathcal{L}^{-1}(G(\lambda))(x) = \mathcal{L}^{-1}(H(1+2\beta\lambda))(x) \\ &= \frac{e^{-\frac{x}{2\beta}}}{2\beta} \mathcal{L}^{-1}(H(\lambda))\left(\frac{x}{2\beta}\right). \end{aligned}$$

Por tanto basta invertir  $H(\lambda)$  :

Si  $p = \nu/2 + 1$ ,

$$g(\mu) = (\nu/2 + 1)^{\nu/2+1} \frac{2\beta^{1+\nu/2}}{p-\mu} \prod_{i=1}^n (\beta\mu + (p-\mu)\alpha_i)^{-\nu_i/2}.$$

Las derivadas sucesivas son

$$\begin{aligned} g^{(k)}(\mu) &= (-1)^k (k-1)! \sum_{j=0}^{k-1} \frac{(-1)^j g^{(j)}(\mu)}{j!} \left[ \frac{(-1)^{k-j}}{(p-\mu)^{k-j}} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \nu_i \left( \frac{\beta - \alpha_i}{\beta\mu + \alpha_i(p-\mu)} \right)^{k-j} \right]. \end{aligned}$$

Y si  $c_k = \frac{(-\mu_0)^k g^{(k)}(\mu_0)}{k!}$ , entonces

$$(2.34) \quad \mathcal{L}^{-1}(H(\lambda))(x) = \frac{x^{\nu/2}}{\Gamma(\nu/2+1)} \sum_{k \geq 0} \frac{k! c_k}{(\nu/2+1)_k} L_k^{(\frac{\nu}{2})} \left( \frac{(\nu+2)x}{2\mu_0} \right), \mu_0 > 0$$

y sustituyendo (2.34) en (2.33), se tiene

$$(2.35) \quad F(x) = \frac{e^{-\frac{x}{2\beta}}}{(2\beta)^{1+\nu/2}} \frac{x^{\nu/2}}{\Gamma(\nu/2+1)} \sum_{k \geq 0} \frac{k! c_k}{(\nu/2+1)_k} L_k^{(\frac{\nu}{2})} \left( \frac{(\nu+2)x}{4\beta\mu_0} \right), \mu_0 > 0.$$

Los coeficientes verifican la siguiente relación de recurrencia:

$$(2.36a) \quad c_k = \frac{1}{k} \sum_{j=0}^{k-1} c_j d_{k-j}, \quad k \geq 1,$$

$$c_0 = \left(\frac{p}{\mu_0}\right)^{\nu/2} \frac{2\beta p}{p - \mu_0} \prod_{i=1}^n \left(1 + \frac{\alpha_i}{\beta} (p/\mu_0 - 1)\right)^{-\nu_i/2},$$

$$(2.36b) \quad d_j = \left(\frac{-1}{p/\mu_0 - 1}\right)^j + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \nu_i \left(\frac{1 - \alpha_i/\beta}{1 + \alpha_i/\beta (p/\mu_0 - 1)}\right)^j, \quad j \geq 1.$$

**2.4.1. Estudio de la convergencia.** Al igual que en los estudios anteriores, necesitamos acotar los coeficientes  $c_k$ , (2.36a). Para ello acotamos previamente los coeficientes  $d_j$ . A partir de (2.36b):

$$|d_j| \leq (1 + \nu/2) \varepsilon^j, \quad \forall j \geq 1,$$

con

$$\varepsilon = \max \left( \left| \frac{-1}{p/\mu_0 - 1} \right|, \xi \right)$$

y

$$\xi = \max_i \left| \frac{1 - \alpha_i/\beta}{1 - \alpha_i/\beta + \alpha_i/\beta (p/\mu_0)} \right|.$$

Además con  $\mu_0 < p/2 = (\nu/2 + 1)/2$  tenemos garantizado que  $0 < \varepsilon < 1$  para cada  $\beta > 0$ . Y a partir de (2.36a) se demuestra por inducción:

$$|c_k| \leq |c_0| \frac{(\nu/2 + 1)_k}{k!} \varepsilon^k, \quad \forall k \geq 0.$$

Por tanto a partir de (2.35) y el Lema 2.1.2

$$\begin{aligned} |F(x)| &\leq \frac{e^{-\frac{x}{2\beta}}}{(2\beta)^{1+\nu/2} \Gamma(\nu/2 + 1)} \frac{x^{(\nu/2)} |c_0|}{\sum_{k \geq 0} \varepsilon^k \left| L_k^{(\frac{\nu}{2})} \left( \frac{(\nu + 2)x}{4\beta\mu_0} \right) \right|} \\ &\leq \frac{e^{-\frac{x}{2\beta}}}{(2\beta)^{1+\nu/2} \Gamma(\nu/2 + 1)} \frac{x^{(\nu/2)} |c_0|}{\exp\left(\frac{(\nu + 2)x}{8\beta\mu_0}\right)} \sum_{k \geq 0} b_k. \end{aligned}$$

con

$$b_k = \xi^k \left(\frac{2k + \nu + 2}{2k}\right)^k \left(\frac{2k + \nu + 2}{\nu + 2}\right)^{\nu/2+1},$$

cuya serie es absolutamente convergente para  $\mu_0 < p/2$  ya que  $0 < \varepsilon < 1$ . También podemos proporcionar estimaciones del error,

$$(2.37) \quad \mathcal{E}_N(F, x, \mu_0, \beta) \leq \frac{e^{-\frac{x}{2\beta}} x^{(\nu/2)} |c_0|}{(2\beta)^{1+\nu/2} \Gamma(\nu/2 + 1)} \exp\left(\frac{(\nu + 2)x}{8\beta\mu_0}\right) \sum_{k=N+1}^{\infty} b_k,$$

y se deduce la convergencia uniforme en cada intervalo finito de  $x > 0$ , para cada  $\beta > 0$  y  $\mu_0 < p/2$ .

El desarrollo de Laguerre (2.35) conseguido para la función de distribución  $F$ , es válido para cualquier valor del parámetro  $\mu_0 < (\nu/2 + 1)/2$ . Podemos considerar una expresión particular, por ejemplo:

Si  $\mu_0 = \frac{\nu/2 + 1}{4}$ , obtenemos una expresión computacionalmente eficiente:

$$(2.38) \quad F(x) = \frac{e^{-\frac{x}{2\beta}} x^{(\nu/2)}}{(2\beta)^{1+\nu/2} \Gamma(\nu/2 + 1)} \sum_{k \geq 0} \frac{k! c_k}{(\nu/2 + 1)_k} L_k^{(\frac{\nu}{2})} \left(\frac{2x}{\beta}\right),$$

donde

$$c_k = \frac{1}{k} \sum_{j=0}^{k-1} c_j d_{k-j}, \quad k \geq 1, \quad c_0 = \frac{2\beta}{3} 4^{\nu/2+1} \prod_{i=1}^n (1 + 3\alpha_i/\beta)^{-\nu_i/2},$$

$$d_j = \left(\frac{-1}{3}\right)^j + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \nu_i \left(\frac{1 - \alpha_i/\beta}{1 + 3\alpha_i/\beta}\right)^j, \quad j \geq 1.$$

En esta ocasión no se obtiene la expresión dada por Kotz et al. (1967a) que resulta de integrar (2.25), i.e.

$$F(y) = \mathcal{G}(\nu; y/\beta) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2(k-1)! \Gamma(\nu/2 + 1)}{\Gamma(\nu/2 + k)} c_k g(\nu + 2, y/\beta) L_{k-1}^{(\nu/2)} \left(\frac{y}{2\beta}\right),$$

con  $g(\nu + 2, y/\beta)$  la densidad de una variable  $\chi^2$  con  $\nu + 2$  grados de libertad evaluada en el punto  $y/\beta$ ,  $\mathcal{G}(\nu; y/\beta)$  la distribución de una variable  $\chi^2$  con  $\nu$  grados de libertad evaluada en el punto  $y/\beta$  y con  $c_k$  dados en (2.26). Nosotros obtenemos el desarrollo dado en (2.38), como un caso particular de (2.35), sin necesidad de conocer la función de densidad y sin necesidad de evaluar previamente la distribución de una variable chi-cuadrado,  $\mathcal{G}$ .

Gurland (1955, 1956) proporciona otra expresión distinta basada también en desarrollos de Laguerre, dada por:

$$F(x) = \frac{1}{2^{\nu/2}\Gamma(\nu/2)} \int_0^{x/\bar{\alpha}} y^{\nu/2-1} \exp(-y/2) dy + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \frac{\Gamma(k) e^{-x/(2\bar{\alpha})} x^{\nu/2}}{\Gamma(k+\nu/2) 2^{\nu/2} \bar{\alpha}^{k+\nu/2}} L_{k-1}^{(\nu/2)}\left(\frac{x}{2\bar{\alpha}}\right),$$

donde

$$a_k = \beta_k \sum_{i=1}^{\nu} \lambda_i^k + \beta_{k-1} \beta_1 \sum_{i < j} \lambda_i^{k-1} \lambda_j + \beta_{k-2} \beta_2 \sum_{i < j} \lambda_i^{k-2} \lambda_j^2 + \beta_{k-2} \beta_1^2 \sum_{i < j < l} \lambda_i^{k-2} \lambda_j^2 \lambda_l + \beta_{k-3} \beta_2 \beta_1 \sum_{i < j < l} \lambda_i^{k-3} \lambda_j^2 \lambda_l + \dots,$$

$\beta_i = (-1/4)^i \binom{2i}{i}$ ,  $\lambda_i = \alpha_i - \bar{\alpha}$  y  $\bar{\alpha}$  un número arbitrario verificando que  $\bar{\alpha} > \alpha_{(n)}/2$ . Como se puede observar, la expresión para sus coeficientes no es muy conveniente para su cálculo computacional. Gurland (1956) prueba la convergencia uniforme, pero tan sólo para ciertas combinaciones lineales.

En cuanto a las estimaciones del error, si particularizamos (2.37) para  $\mu_0 = p/4$  y  $\beta = (\alpha_{(1)} + \alpha_{(n)})/2$  obtenemos mejores estimaciones que la que proporcionan Kotz et al. (1967a) que viene dada por:

$$(2.39) \quad \mathcal{E}_N(F, x, \mu_0, \beta) \leq \frac{\nu}{N+1} \frac{e^{-\frac{x}{2\beta}} x^{\nu/2}}{2^{1+\nu/2} \beta^{\nu/2} \Gamma(\nu/2+1)} \exp\left(\frac{x}{4\beta}\right) \phi^{(N+2)/2} \left(1 - \phi^{1/2}\right)^{N/2+2},$$

con  $\phi = \max_i (|1 - \alpha_i/\beta|)$ . Podemos comparar para distintos valores de  $x$  los valores obtenidos con las dos expresiones (2.39), (2.37) cuyos resultados vienen recogidos en la siguiente tabla para  $Q_3 = 0.6\chi_1^2 + 0.3\chi_1^2 + 0.1\chi_1^2$  y  $N = 20$ :

	$x = 0.1$	$x = 0.7$	$x = 2$
(2.39)	0.04565746647	0.5508491231	1.051131737
(2.37), $\mu_0 = \frac{p}{4}$	0.002561939336	0.1118068250	0.001025342911
(2.37), $\mu_0 = \frac{p}{10}$	$0.8672367306 \cdot 10^{-12}$	$0.4952156670 \cdot 10^{-9}$	$0.4026056740 \cdot 10^{-5}$

COTAS PARA LOS ERRORES

La última fila se corresponde con estimaciones del error de la función de distribución que se obtiene de (2.35) con  $\mu_0 = p/10$ . Como podemos observar las estimaciones son más precisas que las obtenidas anteriormente.



## CAPÍTULO 3

### Desarrollos para formas cuadráticas no centradas

Toda forma cuadrática no centrada, bajo normalidad se puede reducir mediante una transformación ortogonal a una combinación lineal (positiva o negativa, caso de ser definida positiva o negativa, respectivamente) de variables chi-cuadrado independientes no centradas (forma cuadrática canónica).

Este tipo de distribuciones surge en el estudio de la función potencia de varios estadísticos. Algunos ejemplos pueden verse en Patnaik (1949) y en ciertos procedimientos multivariante. Otras aplicaciones se pueden ver en Jensen & Solomon (1972). Nosotros nos centraremos en las formas cuadráticas no centradas definidas positiva o más generalmente en la combinación lineal positiva de variables chi-cuadrado independientes, no centradas con cualesquiera grados de libertad.

Son diversos los autores que han generalizado los desarrollos obtenidos para el caso centrado (series de potencias, de  $\chi^2$  y de polinomios de Laguerre) dando lugar, en general, a dobles series con coeficientes complicados de calcular. Podemos citar Shah & Khatri (1961) que generalizan a este caso no centrado la serie de potencia obtenida por Pachares (1955) dando lugar a una doble serie más que complicada para la distribución de la forma cuadrática. Ruben (1962) generaliza el método de mixtura seguido por Robbins & Pitman (1949) dando lugar a dos tipos de series, un tipo basada en  $\chi^2$  centradas y otro tipo basada en  $\chi^2$  no centradas. Shah (1963) obtiene una doble serie de polinomios de Laguerre para este tipo de distribuciones, siguiendo el método de Gurland (1955), cuyos coeficientes son complicados de calcular. Kotz et al. (1967b) obtienen un desarrollo de Laguerre más conveniente, así como estimaciones del error que se comete al considerar aproximaciones truncando los desarrollos.

En este capítulo obtenemos desarrollos de Laguerre para la función de densidad y de distribución de una variable chi-cuadrado no centrada, así como para la combinación lineal positiva de variables chi-cuadrado no centradas con cualesquiera grados de libertad. El procedimiento que nosotros emplearemos nos permitirá determinar la función de distribución sin necesidad de conocer la función de densidad.

Veremos cómo efectivamente los desarrollos no centrados generalizan a los desarrollos centrados. Estudiaremos la convergencia de tales desarrollos cuyo estudio se complica en este caso no centrado, de hecho las cotas del error conseguidas no generalizan las obtenidas en el caso centrado.

Sean  $X_1, X_2, \dots, X_n$  variables aleatorias independientes que siguen una distribución chi-cuadrado con  $\nu_i$  grados de libertad y con parámetro de no centralización  $\delta_i$  que notaremos de la forma  $X_i \sim \chi_{\nu_i}^2(\delta_i)$ .

Sea  $Q'_n = \sum_{i=1}^n \alpha_i X_i$ , con  $\alpha_i > 0, \forall i$ , nuestro objetivo es dar expresiones tanto para la función de densidad como de distribución de  $X_i$  y de  $Q'_n$  aplicando el procedimiento descrito.

### 3.1. Desarrollos para una variable chi-cuadrado no centrada

La distribución  $\chi^2$  no centrada fue obtenida por Fisher (1928) de una forma indirecta, como límite de la distribución del coeficiente de correlación múltiple, en términos de funciones de Bessel con argumento imaginario.

La distribución  $\chi^2$  no centrada ha sido estudiada por diversos autores; entre ellos podemos citar a Wishart (1932) que de una forma directa, evalúa la integral que supone esta distribución lo cual requiere una dura labor. Patnaik (1949) enfatizó la importancia de esta distribución en el cálculo de la función potencia de algunos tests (test  $\chi^2$  aplicado a tablas de contingencia) y la representó como una mixtura de distribuciones  $\chi^2$  centradas con pesos Poisson, también dio dos aproximaciones basadas en la distribución  $\chi^2$  y la distribución normal respectivamente. Tiku (1965a) obtuvo una expresión para la función de densidad en términos de los polinomios de Laguerre generalizados, que nosotros obtendremos como un caso particular de nuestro procedimiento.

Gideon & Gurland (1977) proporcionaron un desarrollo de Laguerre para la función de distribución de la  $\chi^2$  no centrada, cuyos coeficientes son complicados de calcular. Otras representaciones y aproximaciones para esta distribución se pueden ver en Johnson et al. (1995).

La distribución  $\chi^2$  no centrada puede ser vista como una distribución Rayleigh generalizada, también llamada distribución Rayleigh-Rice como es utilizada en Física Matemática. Así como en teoría de la comunicación la función de distribución de la  $\chi^2$  no centrada se llama Q-función Marcum (ver referencias sobre aplicaciones a estos campos en Johnson et al (1995)).

Nosotros proponemos desarrollos de Laguerre tanto para la función de densidad como de distribución de la  $\chi^2$  no centrada, ésta última sin necesidad de integrar la función de densidad, es más sin necesidad de conocerla.

### 3.1.1. Desarrollo de la función de densidad de la variable $\chi_n^2(\delta)$ .

Sea  $f(\cdot)$  la función de densidad de  $\chi_n^2(\delta)$ . Su transformada de Laplace es igual a:

$$\mathcal{L}(f(x))(\lambda) = \exp\left\{-\frac{\delta\lambda}{1+2\lambda}\right\} (1+2\lambda)^{-n/2} = G(\lambda).$$

Consideramos

$$H(\lambda) = \exp\left\{-\frac{\delta(\lambda-1)}{2\lambda}\right\} \lambda^{-n/2} = G\left(\frac{\lambda-1}{2}\right),$$

y por las propiedades de la transformada de Laplace

$$(3.1) \quad \begin{aligned} f(x) &= \mathcal{L}^{-1}(G(\lambda))(x) = \mathcal{L}^{-1}(H(1+2\lambda))(x) \\ &= \frac{e^{-x/2}}{2} \mathcal{L}^{-1}(H(\lambda))\left(\frac{x}{2}\right). \end{aligned}$$

Por tanto basta invertir  $H(\cdot)$  por el procedimiento conocido:

Sea  $g(\mu) = (p/\mu)^p H(p/\mu)$ , si  $p = n/2$ , entonces

$$g(\mu) = \exp\left\{-\frac{\delta(n/2 - \mu)}{n}\right\}$$

y las derivadas sucesivas verifican

$$(3.2) \quad g^{(k)}(\mu) = \left(\frac{\delta}{n}\right)^k \exp\left\{-\frac{\delta(n/2 - \mu)}{n}\right\}.$$

Así sustituyendo (3.2) en (1.15)

$$\mathcal{L}^{-1}(H(\lambda))(x) = \frac{x^{n/2-1}}{\Gamma(n/2)} \exp\left\{-\frac{\delta(n/2 - \mu_0)}{n}\right\} \sum_{k \geq 0} \frac{\left(\frac{-\mu_0 \delta}{n}\right)^k}{(n/2)_k} L_k^{(n/2-1)}\left(\frac{nx}{2\mu_0}\right),$$

y a partir de (3.1) tenemos la siguiente expresión para la función de densidad de  $\chi_n^2(\delta)$ :

$$(3.3) \quad f(x) = \frac{e^{-x/2} x^{n/2-1}}{2^{n/2} \Gamma(n/2)} \exp\left\{-\frac{\delta(n/2 - \mu_0)}{n}\right\} \cdot \sum_{k \geq 0} \frac{\left(\frac{-\mu_0 \delta}{n}\right)^k}{(n/2)_k} L_k^{(n/2-1)}\left(\frac{nx}{4\mu_0}\right), \forall \mu_0 > 0.$$

En el caso particular de  $\mu_0 = n/2$ , tenemos

$$(3.4) \quad f(x) = \frac{e^{-x/2} x^{n/2-1}}{2^{n/2} \Gamma(n/2)} \sum_{k \geq 0} \frac{\left(\frac{-\delta}{2}\right)^k}{(n/2)_k} L_k^{(n/2-1)}\left(\frac{x}{2}\right),$$

esta expresión fue obtenida por Tiku (1965a) por un procedimiento distinto.

**3.1.2. Estudio de la convergencia.** Proporcionaremos cotas del error cometido al considerar aproximaciones de la función de densidad truncando el desarrollo (3.3).

A partir de la expresión (3.3) obtenida para la función de densidad y el Lema 2.1.2 para acotar los polinomios de Laguerre generalizados, se tiene

$$|f(x)| \leq \frac{e^{-x/2} x^{n/2-1}}{2^{n/2} \Gamma(n/2)} \exp\left\{-\frac{\delta(n/2 - \mu_0)}{n}\right\} \exp\left(\frac{nx}{8\mu_0}\right) \cdot \sum_{k \geq 0} \frac{\left(\frac{\mu_0 \delta}{n}\right)^k}{(n/2)_k} \left(\frac{2k+n}{2k}\right)^k \left(\frac{2k+n}{n}\right)^{n/2}.$$

La serie anterior es absolutamente convergente para cada  $\mu_0 > 0$  y se deduce fácilmente la convergencia uniforme de (3.3) en cada intervalo finito de  $x > 0$ , para cada  $\mu_0 > 0$ . Además se puede probar la convergencia uniforme para todo

$x > 0$ , del desarrollo (3.3) para cada  $\mu_0 > n/4$  y  $n > 2$ . Para ello basta tener en cuenta que

$$\max_{x>0} \left\{ x^{n/2-1} \exp \left[ -x \left( \frac{1}{2} - \frac{n}{8\mu_0} \right) \right] \right\} = \left( \frac{n/2-1}{1/2-n/8\mu_0} \right)^{n/2-1} \exp \left[ - \left( \frac{n}{2} - 1 \right) \right].$$

Una cota para el error que se comete al truncar el desarrollo (3.3) viene dada por

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_N(f, x, n, \delta, \mu_0) &\leq \frac{e^{-x/2} x^{n/2-1}}{2^{n/2} \Gamma(n/2)} \exp \left\{ -\frac{\delta(n/2 - \mu_0)}{n} \right\} \exp \left( \frac{nx}{8\mu_0} \right) \cdot \\ &\quad \cdot \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{\left( \frac{\mu_0 \delta}{n} \right)^k}{(n/2)_k} \left( \frac{2k+n}{2k} \right)^k \left( \frac{2k+n}{n} \right)^{n/2}, \forall \mu_0 > 0. \end{aligned}$$

### 3.1.3. Desarrollo de la función de distribución de la variable $\chi_n^2(\delta)$ .

Sea  $F(\cdot)$  la función de distribución de  $\chi_n^2(\delta)$ , su transformada de Laplace viene dada por

$$\mathcal{L}(F(x))(\lambda) = \frac{1}{\lambda} \exp \left\{ -\frac{\delta \lambda}{1+2\lambda} \right\} (1+2\lambda)^{-n/2} = G(\lambda).$$

Consideramos la función

$$H(\lambda) = \frac{2}{\lambda-1} \exp \left\{ -\frac{\delta(\lambda-1)}{2\lambda} \right\} \lambda^{-n/2} = G \left( \frac{\lambda-1}{2} \right),$$

entonces

$$\begin{aligned} (3.5) \quad F(x) &= \mathcal{L}^{-1}(G(\lambda))(x) = \mathcal{L}^{-1}(H(1+2\lambda))(x) \\ &= \frac{e^{-x/2}}{2} \mathcal{L}^{-1}(H(\lambda)) \left( \frac{x}{2} \right). \end{aligned}$$

Aplicaremos el procedimiento de inversión a la función  $H(\cdot)$ :

Sea  $g(\mu) = (p/\mu)^p H(p/\mu)$ , si  $p = n/2 + 1$ , entonces

$$(3.6) \quad g(\mu) = \frac{2p}{p-\mu} \exp \left\{ -\frac{\delta(p-\mu)}{2p} \right\}$$

y con  $c_k = \frac{(-\mu_0)^k g^k(\mu_0)}{k!}$  se tiene:

$$\mathcal{L}^{-1}(H(\lambda))(x) = \frac{x^{n/2}}{\Gamma(n/2+1)} \sum_{k \geq 0} \frac{k! c_k}{(n/2+1)_k} L_k^{(n/2)} \left( \frac{(n+2)x}{2\mu_0} \right).$$

Por tanto a partir de (3.5)

$$(3.7) \quad F(x) = \frac{e^{-x/2}}{2^{n/2+1}} \frac{x^{n/2}}{\Gamma(n/2+1)} \sum_{k \geq 0} \frac{k! c_k}{(n/2+1)_k} L_k^{(n/2)} \left( \frac{(n+2)x}{4\mu_0} \right).$$

Los coeficientes  $c_k$  verifican la siguiente relación de recurrencia:

$$(3.8a) \quad c_k = \frac{1}{k} \sum_{j=0}^{k-1} c_j d_{k-j}, \quad k \geq 1, \quad c_0 = \frac{2p}{p-\mu_0} \exp\left(\frac{-\delta(p-\mu_0)}{2p}\right),$$

$$(3.8b) \quad d_j = \left(\frac{-\mu_0}{p-\mu_0}\right)^j, \quad j \geq 2, \quad d_1 = -\mu_0 \left(\frac{1}{p-\mu_0} + \frac{\delta}{2p}\right).$$

**3.1.4. Estudio de la convergencia.** Para acotar la expresión (3.7) conseguida para la función de distribución de la variable  $\chi_n^2(\delta)$ , necesitamos acotar en primer lugar los coeficientes  $c_k$  dados en (3.8a). El procedimiento seguido hasta ahora para acotar este tipo de coeficientes se complica en el caso no centrado. La técnica que utilizaremos consiste en aplicar la desigualdad de Cauchy a una función analítica que expresaremos en términos de una serie cuyos coeficientes serán los  $c_k$ .

Por construcción  $c_k = (-\mu_0)^k g^k(\mu_0)/k!$ , y  $g(\cdot)$  dada en (3.6) es una función analítica, por tanto se tiene para cada  $\mu_0 > 0$  fijado:

$$(3.9) \quad \begin{aligned} g((1-\theta)\mu_0) &= \frac{2p}{p-\mu_0} \left(1 + \theta \left(\frac{\mu_0}{p-\mu_0}\right)\right)^{-1} \\ &\cdot \exp\left(-\delta \left(\frac{p - (1-\theta)\mu_0}{2p}\right)\right) = \\ &= \sum_{k \geq 0} c_k \theta^k, \quad |\theta| < \frac{1}{\xi}, \end{aligned}$$

con  $\xi = \left|\frac{\mu_0}{p-\mu_0}\right|$ . Si  $\mu_0 < p/2$ , entonces  $0 < \xi < 1$ .

Aplicando la desigualdad de Cauchy a (3.9), podemos acotar los coeficientes

$c_k$  :

$$(3.10) \quad |c_k| \leq \rho^{-k} \max_{|\theta|=\rho} |g((1-\theta)\mu_0)|, \quad \forall \rho, \quad 0 < \rho < \frac{1}{\xi}.$$

Considerando (3.9),

$$(3.11) \quad \max_{|\theta|=\rho} |g((1-\theta)\mu_0)| \leq \frac{2p}{p-\mu_0} (1-\rho\xi)^{-1} \cdot \exp\left(-\delta\left(\frac{p-(1+1/\xi)\mu_0}{2p}\right)\right).$$

A partir de (3.10) y (3.11) :

$$|c_k| \leq \frac{2p}{p-\mu_0} \exp\left(-\delta\left(\frac{p-(1+1/\xi)\mu_0}{2p}\right)\right) \rho^{-k} (1-\rho\xi)^{-1},$$

cota que podemos mejorar si consideramos

$$(3.12) \quad \inf_{0 < \rho < 1/\xi} \rho^{-k} (1-\rho\xi)^{-1} = \left(\frac{k}{\xi(1+k)}\right)^{-k} \left(\frac{1}{1+k}\right)^{-1},$$

por tanto

$$(3.13) \quad |c_k| \leq \frac{2p}{p-\mu_0} \exp\left(-\delta\left(\frac{p-(1+1/\xi)\mu_0}{2p}\right)\right) \cdot \left(\frac{k}{\xi(1+k)}\right)^{-k} \left(\frac{1}{1+k}\right)^{-1}.$$

Para acotar la función de distribución (3.7) utilizamos (3.13), así como el Lema 2.1.2 para acotar los polinomios de Laguerre, resultando

$$|F(x)| \leq \frac{e^{-x/2} x^{n/2}}{2^{n/2+1}} \frac{2p}{|p-\mu_0|} \exp\left(-\delta\left(\frac{p-(1+1/\xi)\mu_0}{2p}\right)\right) \cdot \exp\left(\frac{(n+2)x}{8\mu_0}\right) \sum_{k \geq 0} b_k,$$

con

$$b_k = \xi^k \left(\frac{1+k}{k}\right)^k \frac{(1+k)!}{(n/2+1)_k} \left(\frac{2k+n+2}{2k}\right)^k \left(\frac{2k+n+2}{n+2}\right)^{n/2+1}$$

Se puede probar fácilmente por D'Alembert que la serie anterior es absolutamente convergente si  $\mu_0 < p/2$ , ya que  $0 < \xi < 1$ . En tal caso, una cota para el error viene dado por:

$$\mathcal{E}_N(F, x, n, \delta, \mu_0) \leq \frac{e^{-x/2} x^{n/2}}{2^{n/2+1}} \frac{2p}{|p - \mu_0|} \exp\left(-\delta \left(\frac{p - (1 + 1/\xi)\mu_0}{2p}\right)\right) \cdot \exp\left(\frac{(n+2)x}{8\mu_0}\right) \sum_{k=N+1}^{\infty} b_k,$$

para cada  $\mu_0 < p/2$ . Esto prueba la convergencia uniforme en cada intervalo finito de  $x > 0$ , para cada  $\mu_0 < p/2$ .

Podemos obtener distintas expresiones equivalentes de la función de distribución dada en (3.7) particularizando para distintos valores del parámetro  $\mu_0$  con  $\mu_0 < p/2$ .

Si  $\mu_0 = p/4$ , se obtiene la siguiente expresión:

$$(3.14) \quad F(x) = \frac{e^{-x/2}}{2^{n/2+1}} \frac{x^{n/2}}{\Gamma(n/2+1)} \sum_{k \geq 0} \frac{k! c_k}{(n/2+1)_k} L_k^{(n/2)}(2x),$$

con

$$c_k = \frac{1}{k} \sum_{j=0}^{k-1} c_j d_{k-j}, \quad k \geq 1, \quad c_0 = \frac{8}{3} \exp\left(\frac{-3\delta}{8}\right),$$

$$d_j = \left(\frac{-1}{3}\right)^j, \quad j \geq 2 \quad d_1 = -\frac{1}{3} - \frac{\delta}{8}.$$

Ashour et al. (1990) dieron una expresión distinta en términos de una doble serie. Gideon & Gurland (1977) dieron otro desarrollo de Laguerre para la función de distribución cuyos coeficientes son difíciles de calcular. Tiku (1965a) proporcionó otra expresión para la función de distribución en términos de los polinomios de Laguerre, integrando la expresión (3.4) de la función de densidad. Cuando el parámetro  $\delta$  aumenta los desarrollos que proporcionamos (3.7) (con  $\mu_0 = p/4$  o  $\mu_0 = p/5$ ) convergen más rápidamente que el dado por Tiku (1965a). Una muestra de ello se puede ver en la tabla que se da a continuación.

En la siguiente tabla podemos comparar la expresión de la función de distribución que proporcionamos particularmente en (3.14) con la expresión dada



por Tiku, con  $j$  el número de términos considerado en los desarrollos y los valores exactos dados en Patnaik (1949) :

$n$	$\delta$	$x$	$j$	(3.14)	Tiku (1965a)	$F(x)$ (Exacto)
4	10	10	10	0.3148368	0.3141404	0.3148
7	16	10.257	10	0.04999622	-0.45 < 0	0.05
24	24	36	15	0.15671754	0.1276852	0.1567

DISTRIBUCIÓN  $\chi_n^2(\delta)$

### 3.2. Función de densidad de la combinación lineal de $\chi^2$ no centradas

En esta sección aplicaremos el procedimiento de invertir transformadas de Laplace introducido en el capítulo 1 para obtener desarrollos para la función de densidad de la combinación lineal positiva de variables  $\chi^2$  no centradas con cualesquiera grados de libertad ( $Q'_n$ ). Además algunos de estos desarrollos los podemos encontrar en la literatura y que nosotros obtenemos como un caso particular de nuestro procedimiento.

Sea  $f(\cdot)$  la función de densidad de  $Q'_n$ , su transformada de Laplace viene dada por,

$$(3.15) \quad \mathcal{L}(f(x))(\lambda) = \exp \left\{ - \sum_{i=1}^n \frac{\delta_i \alpha_i \lambda}{1 + 2\alpha_i \lambda} \right\} \prod_{i=1}^n (1 + 2\alpha_i \lambda)^{-\nu_i/2} = G(\lambda).$$

Para invertir  $G(\lambda)$  por el procedimiento descrito:

Consideramos  $g(\mu) = (p/\mu)^p G(p/\mu)$ . Si  $p = \nu/2$ , con  $\nu = \sum_{i=1}^n \nu_i$ , entonces

$$(3.16) \quad g(\mu) = (\nu/2)^{\nu/2} \exp \left\{ - \sum_{i=1}^n \frac{\delta_i \alpha_i \nu/2}{\mu + \alpha_i \nu} \right\} \prod_{i=1}^n (\mu + \alpha_i \nu)^{-\nu_i/2}.$$

Las derivadas sucesivas verifican,

$$g^k(\mu) = (-1)^k (k-1)! \sum_{j=0}^{k-1} \frac{(-1)^j g^j(\mu)}{j!} \cdot \left\{ \sum_{i=1}^n \frac{-(k-j) \delta_i \alpha_i \nu / 2}{(\mu + \alpha_i \nu)^{k-j+1}} + \sum_{i=1}^n \frac{\nu_i / 2}{(\mu + \alpha_i \nu)^{k-j}} \right\}.$$

Si notamos  $c_k = \frac{(-\mu_0)^k g^k(\mu_0)}{k!}$ , entonces

$$(3.17) \quad f(x) = \frac{x^{(\nu/2)-1}}{\Gamma(\nu/2)} \sum_{k \geq 0} \frac{k! c_k}{(\nu/2)_k} L_k^{(\frac{\nu}{2}-1)} \left( \frac{\nu x}{2\mu_0} \right), \forall \mu_0 > 0,$$

donde

$$(3.18) \quad c_k = \frac{1}{k} \sum_{j=0}^{k-1} c_j d_{k-j}, \quad k \geq 1,$$

$$c_0 = (\nu/2)^{\nu/2} \exp \left\{ - \sum_{i=1}^n \frac{\delta_i \alpha_i \nu / 2}{\mu_0 + \alpha_i \nu} \right\} \prod_{i=1}^n (\mu_0 + \alpha_i \nu)^{-\nu_i / 2},$$

$$(3.19) \quad d_j = \sum_{i=1}^n \left( \frac{\mu_0}{\mu_0 + \alpha_i \nu} \right)^j \left\{ \frac{\nu_i}{2} - \frac{j \nu \delta_i \alpha_i}{2(\mu_0 + \alpha_i \nu)} \right\}, \quad j \geq 1.$$

Si hacemos  $\delta_i = 0, i = 1 \dots n$ , en (3.17) obtenemos la expresión (2.2) correspondiente a la función de densidad de la combinación lineal de  $\chi^2$  centradas. Por tanto los desarrollos obtenidos en el caso no centrado generalizan a los del caso centrado.

**3.2.1. Estudio de la convergencia.** El estudio de la convergencia de los desarrollos obtenidos en (3.17) para la función de densidad de  $Q'_n$  se complica con respecto al estudio realizado en el caso centrado y las cotas que conseguimos para el error no generalizan a las del caso centrado.

Para acotar la función de densidad (3.17), previamente acotamos los coeficientes  $c_k$  dados en (3.18). El procedimiento de acotar los coeficientes es distinto al seguido en el estudio del caso centrado y análogo al seguido en la distribución de una variable chi-cuadrado no centrada.

Como  $c_k = \frac{(-\mu_0)^k g^{(k)}(\mu_0)}{k!}$  y  $g(\mu)$  es una función analítica, se tiene que para  $\mu_0 > 0$  fijado

$$\begin{aligned}
 (3.20) \quad g((1-\theta)\mu_0) &= \sum_{k=0}^{\infty} c_k \theta^k, \quad \forall \theta, \quad |\theta| < \frac{1}{\zeta}, \\
 &= \left(\frac{\nu}{2\mu_0}\right)^{\frac{\nu}{2}} \exp\left\{-\sum_{i=1}^n \frac{\delta_i \alpha_i \nu / 2}{(1-\theta)\mu_0 + \alpha_i \nu}\right\} \\
 &\quad \cdot \prod_{i=1}^n \left(1 + \frac{\alpha_i \nu}{\mu_0}\right)^{-\frac{\nu_i}{2}} \prod_{i=1}^n \left(1 - \frac{\theta \mu_0}{\mu_0 + \alpha_i \nu}\right)^{-\frac{\nu_i}{2}},
 \end{aligned}$$

donde  $\zeta = \max_i \left| \frac{\mu_0}{\mu_0 + \alpha_i \nu} \right| = \frac{\mu_0}{\mu_0 + \alpha_{(1)} \nu}$  y  $\alpha_{(1)} = \min_i \alpha_i$ .

Aplicando la desigualdad de Cauchy a (3.20):

$$(3.21) \quad |c_k| \leq \rho^{-k} \max_{|\theta|=\rho} |g((1-\theta)\mu_0)|.$$

Además, teniendo en cuenta (3.20) acotamos

$$\begin{aligned}
 (3.22) \quad \max_{|\theta|=\rho} |g((1-\theta)\mu_0)| &\leq \left(\frac{\nu}{2\mu_0}\right)^{\nu/2} \prod_{i=1}^n \left(1 + \frac{\alpha_i \nu}{\mu_0}\right)^{-\nu_i/2} (1-\rho\zeta)^{-\nu/2} \\
 &\quad \cdot \exp\left\{-\sum_{i=1}^n \frac{\delta_i \alpha_i \nu / 2}{(1+\rho)\mu_0 + \alpha_i \nu}\right\} \leq \\
 &\leq \left(\frac{\nu}{2\mu_0}\right)^{\nu/2} \prod_{i=1}^n \left(1 + \frac{\alpha_i \nu}{\mu_0}\right)^{-\nu_i/2} \\
 &\quad \cdot \exp\left\{-\sum_{i=1}^n \frac{\delta_i \alpha_i \nu / 2}{(1+1/\zeta)\mu_0 + \alpha_i \nu}\right\} (1-\rho\zeta)^{-\nu/2}.
 \end{aligned}$$

A partir de (3.21) y (3.22) acotamos la expresión (3.17) de la función de densidad teniendo en cuenta el Lema 2.1.1 para acotar los polinomios de Laguerre, resultando:

$$\begin{aligned}
|f(x)| &\leq \frac{x^{(\nu/2)-1}}{\Gamma(\nu/2)} \left(\frac{\nu}{2\mu_0}\right)^{\nu/2} \prod_{i=1}^n \left(1 + \frac{\alpha_i \nu}{\mu_0}\right)^{-\nu_i/2} (1 - \rho\zeta)^{-\nu/2} \\
&\cdot \exp \left\{ - \sum_{i=1}^n \frac{\delta_i \alpha_i \nu/2}{(1 + 1/\zeta) \mu_0 + \alpha_i \nu} \right\} \sum_{k \geq 0} \frac{k!}{(\nu/2)_k} \rho^{-k} \left| L_k^{(\frac{\nu}{2}-1)} \left( \frac{\nu x}{2\mu_0} \right) \right| \leq \\
&\leq \frac{x^{(\nu/2)-1}}{\Gamma(\nu/2)} \left(\frac{\nu}{2\mu_0}\right)^{\nu/2} \prod_{i=1}^n \left(1 + \frac{\alpha_i \nu}{\mu_0}\right)^{-\nu_i/2} \exp \left\{ - \sum_{i=1}^n \frac{\delta_i \alpha_i \nu/2}{(1 + 1/\zeta) \mu_0 + \alpha_i \nu} \right\} \\
&\cdot (1 - \rho\zeta)^{-\nu/2} (1 - R)^{-\nu/2} \exp \left( \frac{\nu x}{4\mu_0} \right) \sum_{k \geq 0} \frac{k!}{(\nu/2)_k} \rho^{-k} R^{-k}, \quad 0 < R < 1, 0 < \rho < \frac{1}{\zeta}.
\end{aligned}$$

Consideramos  $R$  y  $\rho$  tales que  $\zeta < \frac{1}{\rho} < R < 1$  con lo cual la serie anterior es absolutamente convergente ya que  $k!/(\nu/2)_k \leq 1$ ,  $\forall k \geq 0$  y  $\nu \geq 2$ .

En las condiciones anteriores, una cota del error sería:

$$\begin{aligned}
(3.23) \quad \mathcal{E}_N(f, x, \mu_0) &\leq \frac{x^{(\nu/2)-1}}{\Gamma(\nu/2)} \left(\frac{\nu}{2\mu_0}\right)^{\nu/2} \prod_{i=1}^n \left(1 + \frac{\alpha_i \nu}{\mu_0}\right)^{-\nu_i/2} \exp \left( \frac{\nu x}{4\mu_0} \right) \\
&\cdot \exp \left\{ - \sum_{i=1}^n \frac{\delta_i \alpha_i \nu/2}{(1 + 1/\zeta) \mu_0 + \alpha_i \nu} \right\} (1 - \rho\zeta)^{-\nu/2} (1 - R)^{-\nu/2} \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{k!}{(\nu/2)_k} \rho^{-k} R^{-k}.
\end{aligned}$$

Y se verifica que el desarrollo (3.17) converge uniformemente en cada intervalo finito de  $x > 0$ , para cada  $\mu_0 > 0$ .

Podemos obtener una cota distinta del error consiguiendo una acotación más fina de los coeficientes y de los polinomios de Laguerre:

La cota de los coeficientes mejora si consideramos,

$$\begin{aligned}
(3.24) \quad |c_k| &\leq \inf_{0 < \rho < 1/\zeta} \left[ \rho^{-k} (1 - \rho\zeta)^{-\nu/2} \right] \left(\frac{\nu}{2\mu_0}\right)^{\nu/2} \prod_{i=1}^n \left(1 + \frac{\alpha_i \nu}{\mu_0}\right)^{-\nu_i/2} \\
&\cdot \exp \left\{ - \sum_{i=1}^n \frac{\delta_i \alpha_i \nu/2}{(1 + 1/\zeta) \mu_0 + \alpha_i \nu} \right\},
\end{aligned}$$

y fácilmente se prueba

$$(3.25) \quad \inf_{0 < \rho < 1/\zeta} \left[ \rho^{-k} (1 - \rho\zeta)^{-\nu/2} \right] = \zeta^k \left( \frac{2k + \nu}{2k} \right)^k \left( \frac{2k + \nu}{\nu} \right)^{\nu/2}.$$

Aplicando el Lema 2.1.2 para acotar los polinomios de Laguerre y (3.24) para acotar los coeficientes, se tiene

$$|f(x)| \leq \frac{x^{(\nu/2)-1}}{\Gamma(\nu/2)} \left( \frac{\nu}{2\mu_0} \right)^{\nu/2} \prod_{i=1}^n \left( 1 + \frac{\alpha_i \nu}{\mu_0} \right)^{-\nu_i/2} \exp \left( \frac{\nu x}{4\mu_0} \right) \cdot \exp \left\{ - \sum_{i=1}^n \frac{\delta_i \alpha_i \nu/2}{(1 + 1/\zeta) \mu_0 + \alpha_i \nu} \right\} \sum_{k \geq 0} \frac{k!}{(\nu/2)_k} \zeta^k \left( \frac{2k + \nu}{2k} \right)^{2k} \left( \frac{2k + \nu}{\nu} \right)^{\nu}, \forall \mu_0 > 0.$$

La serie anterior es absolutamente convergente, como se puede comprobar aplicando el criterio de D'Alembert y teniendo en cuenta que  $0 < \zeta < 1$ , para cada  $\mu_0 > 0$ .

En este caso la cota del error que resulta viene dada por:

$$(3.26) \quad \mathcal{E}_N(f, x, \mu_0) \leq \frac{x^{(\nu/2)-1}}{\Gamma(\nu/2)} \left( \frac{\nu}{2\mu_0} \right)^{\nu/2} \prod_{i=1}^n \left( 1 + \frac{\alpha_i \nu}{\mu_0} \right)^{-\nu_i/2} \exp \left( \frac{\nu x}{4\mu_0} \right) \cdot \exp \left\{ - \sum_{i=1}^n \frac{\delta_i \alpha_i \nu/2}{(1 + 1/\zeta) \mu_0 + \alpha_i \nu} \right\} \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{k!}{(\nu/2)_k} \zeta^k \left( \frac{2k + \nu}{2k} \right)^{2k} \left( \frac{2k + \nu}{\nu} \right)^{\nu}, \forall \mu_0 > 0.$$

Expresiones equivalentes para la función de densidad (3.17) de  $Q'_n$  las podemos obtener particularizando para algunos valores concretos del parámetro  $\mu_0$ :

- Si  $\mu_0 = \nu$ , obtenemos una expresión simple:

$$f(x) = \frac{x^{(\nu/2)-1}}{\Gamma(\nu/2)} \sum_{k \geq 0} \frac{k! c_k}{(\nu/2)_k} L_k^{(\frac{\nu}{2}-1)} \left( \frac{x}{2} \right),$$

cuyos coeficientes vienen dados por:

$$(3.27) \quad \begin{aligned} c_k &= \frac{1}{k} \sum_{j=0}^{k-1} c_j d_{k-j}, \quad k \geq 1, \\ c_0 &= (1/2)^{\nu/2} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{\delta_i \alpha_i}{1 + \alpha_i} \right\} \prod_{i=1}^n (1 + \alpha_i)^{-\nu_i/2}, \\ d_j &= \sum_{i=1}^n \left( \frac{1}{1 + \alpha_i} \right)^j \left\{ \frac{\nu_i}{2} - \frac{j \delta_i \alpha_i}{2(1 + \alpha_i)} \right\}, \quad j \geq 1. \end{aligned}$$

- Si  $\mu_0 = x$ , se anula el polinomio de Laguerre  $L_1^{(\nu/2-1)} \left( \frac{\nu x}{2\mu_0} \right)$ .
- Si  $\mu_0 = \alpha_{(1)} \nu / 7$ , se tiene  $\zeta = 1/8$  y se acelera la convergencia para valores de  $x$  pequeños.

De forma análoga al caso centrado a medida que el valor de  $x$  aumenta el valor de  $\mu_0$  adecuado para obtener resultados precisos, también debe aumentar. No obstante este tipo de desarrollos no es conveniente para la cola superior de la distribución.

**3.2.2. Otros desarrollos de la función de densidad de la combinación lineal de  $\chi_n^2(\delta)$ .** Para intentar mejorar los desarrollos en la cola derecha, presentamos una expresión alternativa, aplicando el mismo procedimiento, realizando previamente un cambio de variable:

Sea  $H(\lambda) = G \left( \frac{\lambda - 1}{2\beta} \right)$ , con  $\beta > 0$ , y  $G(\cdot)$  la transformada de Laplace de la función de densidad de  $Q'_n$  dada en (3.15), entonces

$$(3.28) \quad \begin{aligned} f(x) &= \mathcal{L}^{-1}(G(\lambda))(x) = \mathcal{L}^{-1}(H(1 + 2\lambda\beta))(x) \\ &= \frac{e^{-\frac{x}{2\beta}}}{2\beta} \mathcal{L}^{-1}(H(\lambda)) \left( \frac{x}{2\beta} \right). \end{aligned}$$

Por tanto nosotros invertiremos la función  $H(\cdot)$  por el procedimiento conocido.

Como

$$H(\lambda) = \beta^{\nu/2} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{\delta_i \alpha_i (\lambda - 1)}{\beta + \alpha_i (\lambda - 1)} \right\} \prod_{i=1}^n (\beta + \alpha_i (\lambda - 1))^{-\nu_i/2},$$

y  $g(\mu) = (p/\mu)^p H(p/\mu)$ . Si  $p = \nu/2$  con  $\nu = \sum_{i=1}^n \nu_i$ ,

$$g(\mu) = \left(\frac{\nu}{2}\beta\right)^{\nu/2} \exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^n \frac{\delta_i \alpha_i (p - \mu)}{\beta\mu + \alpha_i (p - \mu)}\right\} \prod_{i=1}^n (\beta\mu + \alpha_i (p - \mu))^{-\nu_i/2}.$$

Las derivadas sucesivas verifican:

$$g^{(k)}(\mu) = (-1)^k (k-1)! \sum_{j=0}^{k-1} \frac{(-1)^j g^{(j)}(\mu)}{j!} \cdot \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{(k-j)\delta_i \alpha_i \beta p (\beta - \alpha_i)^{k-j-1}}{(\beta\mu + \alpha_i (p - \mu))^{k-j+1}} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \nu_i \left(\frac{\beta - \alpha_i}{\beta\mu + \alpha_i (p - \mu)}\right)^{k-j} \right\}.$$

Si consideramos  $c_k = \frac{(-\mu_0)^k g^{(k)}(\mu_0)}{k!}$ , entonces

$$\mathcal{L}^{-1}(H(\lambda))(x) = \frac{x^{\nu/2-1}}{\Gamma(\nu/2)} \sum_{k \geq 0} \frac{k! c_k}{(\nu/2)_k} L_k^{(\nu/2-1)}\left(\frac{\nu x}{2\mu_0}\right), \forall \mu_0 > 0,$$

y a partir de (3.28)

$$(3.29) \quad f(x) = \frac{e^{-\frac{x}{2\beta}} x^{\nu/2-1}}{(2\beta)^{\nu/2} \Gamma(\nu/2)} \sum_{k \geq 0} \frac{k! c_k}{(\nu/2)_k} L_k^{(\nu/2-1)}\left(\frac{\nu x}{4\beta\mu_0}\right), \forall \mu_0 > 0,$$

donde los coeficientes verifican la siguiente relación de recurrencia:

$$(3.30a) \quad c_k = \frac{1}{k} \sum_{j=0}^{k-1} c_j d_{k-j}, \quad k \geq 1,$$

$$c_0 = \left(\frac{\nu}{2\mu_0}\right)^{\nu/2} \exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^n \frac{\delta_i \alpha_i (p - \mu_0)}{\beta\mu_0 + \alpha_i (p - \mu_0)}\right\} \cdot \prod_{i=1}^n \left(1 + \frac{\alpha_i}{\beta}(p/\mu_0 - 1)\right)^{-\nu_i/2},$$

$$(3.30b) \quad d_j = -\frac{j\beta p}{2\mu_0} \sum_{i=1}^n \delta_i \alpha_i (\beta - \alpha_i)^{j-1} \left(\frac{\mu_0}{\beta\mu_0 + \alpha_i (p - \mu_0)}\right)^{j+1} + \sum_{i=1}^n \frac{\nu_i}{2} \left(\frac{1 - \alpha_i/\beta}{1 + (\alpha_i/\beta)(p/\mu_0 - 1)}\right)^j, \quad j \geq 1.$$

Si consideramos  $\delta_i = 0, i = 1 \dots n$ , en la expresión (3.29), se obtiene como era de esperar la expresión conseguida en el caso centrado (2.20).

**3.2.3. Estudio de la convergencia.** A continuación estudiamos la convergencia del desarrollo (3.29) obtenido para la función de densidad de  $Q'_n$  y proporcionamos cotas del error que se comete al considerar aproximaciones truncando los desarrollos. Para ello razonamos de forma análoga al estudio anterior, para acotar los coeficientes  $c_k$  dados en (3.30a) consideramos con  $p = \nu/2$  y  $\mu_0 > 0$  fijado, la siguiente función analítica

$$(3.31) \quad g((1-\theta)\mu_0) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \theta^k, \quad \forall \theta, \quad |\theta| < \frac{1}{\zeta},$$

$$= \left(\frac{\nu}{2\mu_0}\right)^{\nu/2} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{\delta_i (\alpha_i/\beta) (p/\mu_0 - 1) + \delta_i (\alpha_i/\beta) \theta}{1 + (\alpha_i/\beta) (p/\mu_0 - 1) - \theta (1 - (\alpha_i/\beta))} \right\} \cdot$$

$$\cdot \prod_{i=1}^n \left(1 + \frac{\alpha_i}{\beta} \left(\frac{p}{\mu_0} - 1\right)\right)^{-\nu_i/2} \prod_{i=1}^n \left(1 - \theta \frac{1 - (\alpha_i/\beta)}{1 + (\alpha_i/\beta) (p/\mu_0 - 1)}\right)^{-\nu_i/2},$$

donde

$$\zeta = \max_i \left| \frac{1 - (\alpha_i/\beta)}{1 + (\alpha_i/\beta) (p/\mu_0 - 1)} \right|.$$

Como vimos en el estudio del caso centrado, para que  $0 < \zeta < 1$  debe verificarse las condiciones (2.22). Por tanto aplicando la desigualdad de Cauchy a (3.31) obtenemos una cota para los coeficientes

$$(3.32) \quad |c_k| \leq \rho^{-k} \max_{|\theta|=\rho} |g((1-\theta)\mu_0)|, \quad \forall \rho, \quad 0 < \rho < \frac{1}{\zeta}.$$

Y de (3.31)

$$(3.33) \quad \max_{|\theta|=\rho} |g((1-\theta)\mu_0)| \leq \left(\frac{\nu}{2\mu_0}\right)^{\nu/2} \prod_{i=1}^n \left|1 + \frac{\alpha_i}{\beta} \left(\frac{p}{\mu_0} - 1\right)\right|^{-\nu_i/2} \cdot$$

$$\cdot \exp \left\{ -\frac{1}{4} \sum_{i=1}^n \frac{\delta_i (\alpha_i/\beta) (p/\mu_0 - 1)}{1 + (\alpha_i/\beta) (p/\mu_0 - 1)} \right\} \exp \left\{ \mu_0/p \frac{\sum_{i=1}^n \delta_i}{2\zeta} \right\} (1 - \rho\zeta)^{-\nu/2}.$$

A partir de (3.32) y (3.33) para acotar los coeficientes y el Lema 2.1.1 para acotar los polinomios de Laguerre, se tiene una cota para la función de densidad



(3.29), y teniendo en cuenta que  $\frac{k!}{(\nu/2)_k} \leq 1$  para cada  $k \geq 0$  y  $\nu \geq 2$ :

$$(3.34) \quad |f(x)| \leq \frac{e^{-\frac{x}{2\beta}} x^{\nu/2-1}}{(2\beta)^{\nu/2} \Gamma(\nu/2)} \left(\frac{\nu}{2\mu_0}\right)^{\nu/2} \prod_{i=1}^n \left|1 + \frac{\alpha_i}{\beta} \left(\frac{p}{\mu_0} - 1\right)\right|^{-\nu_i/2} \cdot \exp\left(\frac{\nu x}{8\beta\mu_0}\right) \exp\left\{\mu_0/p \frac{\sum_{i=1}^n \delta_i}{2\zeta}\right\} \exp\left\{-\frac{1}{4} \sum_{i=1}^n \frac{\delta_i (\alpha_i/\beta) (p/\mu_0 - 1)}{1 + (\alpha_i/\beta) (p/\mu_0 - 1)}\right\} \cdot (1 - \rho\zeta)^{-\nu/2} (1 - R)^{-\nu/2} \sum_{k \geq 0} (\rho R)^{-k}, \quad 0 < R < 1, \quad 0 < \rho < \frac{1}{\zeta}.$$

Consideramos  $R$  y  $\rho$  tales que  $\zeta < \frac{1}{\rho} < R < 1$ , con lo cual la serie anterior es absolutamente convergente. Razonando de forma análoga a los estudios anteriores, se tiene la convergencia uniforme en cada intervalo finito de  $x > 0$  para cada  $\mu_0 > 0$  y con el correspondiente valor de  $\beta$  adecuado según (2.22) tal que  $0 < \zeta < 1$ . Además se puede probar la convergencia uniforme para todo  $x > 0$  cuando  $\mu_0 > p/2$ .

En estas condiciones una cota para el error será:

$$(3.35) \quad \mathcal{E}_N(f, x, \mu_0, \beta) \leq \frac{e^{-\frac{x}{2\beta}} x^{\nu/2-1}}{(2\beta)^{\nu/2} \Gamma(\nu/2)} \prod_{i=1}^n \left|1 + \frac{\alpha_i}{\beta} \left(\frac{p}{\mu_0} - 1\right)\right|^{-\nu_i/2} \cdot \left(\frac{\nu}{2\mu_0}\right)^{\nu/2} \exp\left(\frac{\nu x}{8\beta\mu_0}\right) \exp\left\{-\frac{1}{4} \sum_{i=1}^n \frac{\delta_i (\alpha_i/\beta) (p/\mu_0 - 1)}{1 + (\alpha_i/\beta) (p/\mu_0 - 1)}\right\} \cdot \exp\left\{\mu_0/p \frac{\sum_{i=1}^n \delta_i}{2\zeta}\right\} (1 - \rho\zeta)^{-\nu/2} (1 - R)^{-\nu/2} \sum_{k=N+1}^{\infty} (\rho R)^{-k}.$$

Una cota distinta para el error se obtiene mejorando la cota de los coeficientes  $c_k$  considerando (3.25) y mejorando la cota de los polinomios de Laguerre

a partir del Lema 2.1.2, resultando:

$$\begin{aligned}
 |f(x)| &\leq \frac{e^{-\frac{x}{2\beta}} x^{\nu/2-1}}{(2\beta)^{\nu/2} \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} \left(\frac{\nu}{2\mu_0}\right)^{\nu/2} \prod_{i=1}^n \left|1 + \frac{\alpha_i}{\beta} \left(\frac{p}{\mu_0} - 1\right)\right|^{-\nu_i/2} \\
 &\cdot \exp\left\{\mu_0/p \frac{\sum_{i=1}^n \delta_i}{2\zeta}\right\} \exp\left\{-\frac{1}{4} \sum_{i=1}^n \frac{\delta_i (\alpha_i/\beta) (p/\mu_0 - 1)}{1 + (\alpha_i/\beta) (p/\mu_0 - 1)}\right\} \\
 &\cdot \exp\left(\frac{\nu x}{8\beta\mu_0}\right) \sum_{k \geq 0} \zeta^k \left(\frac{2k + \nu}{2k}\right)^{2k} \left(\frac{2k + \nu}{\nu}\right)^\nu.
 \end{aligned}$$

Por el criterio de D'Alembert se prueba que la serie anterior es absolutamente convergente ya que  $0 < \zeta < 1$ , para cada  $\mu_0 > 0$  y  $\beta$  adecuado según (2.22).

La cota del error que resulta en este caso viene dada por:

$$\begin{aligned}
 (3.36) \quad \mathcal{E}_N(f, x, \mu_0, \beta) &\leq \frac{e^{-\frac{x}{2\beta}} x^{\nu/2-1}}{(2\beta)^{\nu/2} \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} \prod_{i=1}^n \left|1 + \frac{\alpha_i}{\beta} \left(\frac{p}{\mu_0} - 1\right)\right|^{-\nu_i/2} \\
 &\cdot \left(\frac{\nu}{2\mu_0}\right)^{\nu/2} \exp\left\{\mu_0/p \frac{\sum_{i=1}^n \delta_i}{2\zeta}\right\} \exp\left\{-\frac{1}{4} \sum_{i=1}^n \frac{\delta_i (\alpha_i/\beta) (p/\mu_0 - 1)}{1 + (\alpha_i/\beta) (p/\mu_0 - 1)}\right\} \\
 &\cdot \exp\left(\frac{\nu x}{8\beta\mu_0}\right) \sum_{k=N+1}^{\infty} \zeta^k \left(\frac{2k + \nu}{2k}\right)^{2k} \left(\frac{2k + \nu}{\nu}\right)^\nu.
 \end{aligned}$$

Podemos obtener distintas expresiones equivalentes de la función de densidad (3.29). Si particularizamos (3.29) para  $\mu_0 = \nu/2 = p$ , obtenemos

$$(3.37) \quad f(x) = \frac{e^{-\frac{x}{2\beta}} x^{\nu/2-1}}{(2\beta)^{\nu/2} \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} \sum_{k \geq 0} \frac{k! c_k}{\left(\frac{\nu}{2}\right)_k} L_k^{(\nu/2-1)}\left(\frac{x}{2\beta}\right),$$

donde

$$\begin{aligned}
 c_k &= \frac{1}{k} \sum_{j=0}^{k-1} c_j d_{k-j}, \quad k \geq 1, \quad c_0 = 1, \\
 d_j &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \nu_i (1 - \alpha_i/\beta)^j - \frac{j}{2\beta} \sum_{i=1}^n \delta_i \alpha_i (1 - \alpha_i/\beta)^{j-1}, \quad j \geq 1.
 \end{aligned}$$

Kotz et al. (1967b) obtienen el desarrollo (3.37) por un procedimiento distinto, para  $\nu_i = 1$ . Además la cota del error que conseguimos en (3.35) coincide con la

que ellos dan en nuestro caso particular de  $\mu_0 = \nu/2$ , con  $\rho = \zeta^{-2/3}$  y  $R = \zeta^{1/3}$ . Nosotros obtenemos una cota distinta y mejor (3.36) que particularizada a  $\mu_0 = \nu/2$  da lugar a:

$$(3.38) \quad \mathcal{E}_N(f, x, \mu_0, \beta) \leq \frac{e^{-\frac{x}{2\beta}} x^{\nu/2-1}}{(2\beta)^{\nu/2} \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} \exp\left\{\frac{\sum_{i=1}^n \delta_i}{2\zeta}\right\} \exp\left(\frac{x}{4\beta}\right) \cdot \sum_{k=N+1}^{\infty} \zeta^k \left(\frac{2k+\nu}{2k}\right)^{2k} \left(\frac{2k+\nu}{\nu}\right)^\nu.$$

La siguiente tabla recoge para distintos valores de  $x$ , cómo efectivamente la expresión (3.38) mejora a la dada por Kotz et al. (1967b) en uno de los ejemplos de la literatura, ver por ejemplo Imhof (1961), para  $Q_2 = 0.7\chi_1^2(6) + 0.3\chi_1^2(2)$  con  $\beta = (\alpha_1 + \alpha_2)/2$  y  $N = 20$ :

	$x = 1$	$x = 6$	$x = 15$
Kotz et al.(3.35)	1200.579848	98.54959519	1.094787111
(3.38)	0.3562897665	0.02924604498	0.0003248942125
(3.36) ( $\mu_0 = p/3$ )	$0.7973377509 \cdot 10^{-9}$	$0.9713562331 \cdot 10^{-8}$	$0.8743870156 \cdot 10^{-6}$

COTAS PARA LOS ERRORES

La última fila de la tabla anterior se corresponde con la cota del error (3.36) correspondiente a  $\mu_0 = p/3$ , que como se puede observar mejora con creces a las cotas anteriores, la expresión de la función de densidad (3.29) para  $\mu_0 = p/3$  converge más rápidamente que la dada para  $\mu_0 = p/2$  (expresión obtenida por Kotz et al. (1967b)). Una muestra de la rapidez de la convergencia del desarrollo (3.29) con  $\mu_0 = p/3$  para  $Q_2 = 0.7\chi_1^2(6) + 0.3\chi_1^2(2)$ , se puede observar en la figura 3.1.

### 3.3. Función de distribución de la combinación lineal de $\chi^2$ no centradas

En esta sección obtenemos desarrollos de Laguerre para la función de distribución de la combinación lineal de  $\chi^2$  no centradas, sin necesidad de conocer

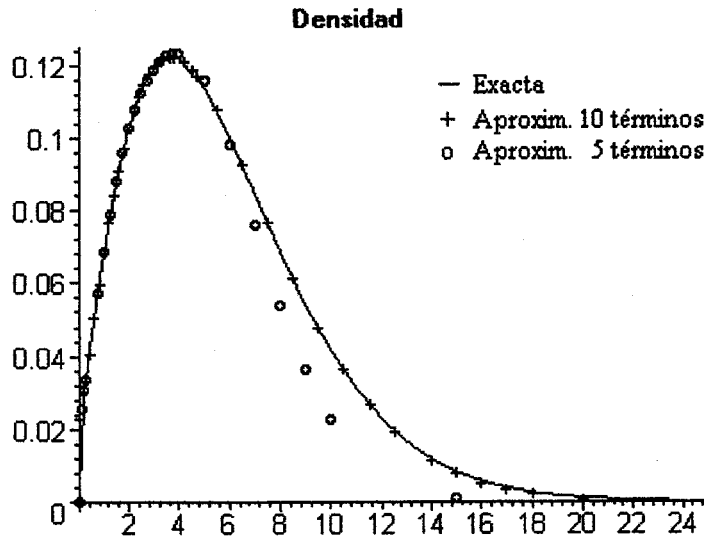


FIGURA 3.1

la función de densidad de la misma. De forma análoga a los casos anteriores aplicamos el procedimiento introducido en el capítulo 1.

Sea  $F(\cdot)$  la función de distribución de  $Q'_n$ , cuya transformada de Laplace viene dada por

$$(3.39) \quad \mathcal{L}(F(x))(\lambda) = \frac{1}{\lambda} \exp \left\{ - \sum_{i=1}^n \frac{\delta_i \alpha_i \lambda}{1 + 2\alpha_i \lambda} \right\} \prod_{i=1}^n (1 + 2\alpha_i \lambda)^{-\nu_i/2} = G(\lambda).$$

Para invertir  $G(\lambda)$  :

Sea  $g(\mu) = (p/\mu)^p G(p/\mu)$ , si  $p = \nu/2 + 1$ , con  $\nu = \sum_{i=1}^n \nu_i$  entonces

$$g(\mu) = (1 + \nu/2)^{\nu/2} \exp \left\{ - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{\delta_i \alpha_i (\nu + 2)}{\mu + (\nu + 2) \alpha_i} \right\} \prod_{i=1}^n (\mu + (\nu + 2) \alpha_i)^{-\nu_i/2}.$$

Las derivadas sucesivas verifican

$$g^{(k)}(\mu) = (-1)^k (k-1)! \sum_{j=0}^{k-1} \frac{(-1)^j g^{(j)}(\mu)}{j!} \cdot \frac{-(k-j)}{2} \sum_{i=1}^n \frac{\delta_i \alpha_i (\nu + 2)}{(\mu + \alpha_i (\nu + 2))^{k-j+1}} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{\nu_i}{(\mu + \alpha_i (\nu + 2))^{k-j}}.$$

Si  $c_k = \frac{(-\mu_0)^k g^k (\mu_0)}{k!}$ , entonces

$$(3.40) \quad F(x) = \frac{x^{\nu/2}}{\Gamma(\nu/2 + 1)} \sum_{k \geq 0} \frac{k! c_k}{(\nu/2 + 1)_k} L_k^{(\frac{\nu}{2})} \left( \frac{(\nu + 2)x}{2\mu_0} \right), \forall \mu_0 > 0,$$

donde los coeficientes verifican la siguiente relación de recurrencia:

$$(3.41a) \quad c_k = \frac{1}{k} \sum_{j=0}^{k-1} c_j d_{k-j}, \quad k \geq 1,$$

$$c_0 = (\nu/2 + 1)^{\nu/2} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{\delta_i \alpha_i (\nu + 2)}{\mu_0 + \alpha_i (\nu + 2)} \right\} \cdot \prod_{i=1}^n (\mu_0 + \alpha_i (\nu + 2))^{-\nu_i/2},$$

$$(3.41b) \quad d_j = -\frac{j(\nu + 2)}{2\mu_0} \sum_{i=1}^n \delta_i \alpha_i \left( \frac{\mu_0}{\mu_0 + \alpha_i (\nu + 2)} \right)^{j+1} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \nu_i \left( \frac{\mu_0}{\mu_0 + \alpha_i (\nu + 2)} \right)^j, \quad j \geq 1.$$

Observemos que si  $\delta_i = 0, \forall i$  en (3.40), obtenemos la expresión (2.27) conseguida en el caso centrado.

**3.3.1. Estudio de la convergencia.** Para estudiar la convergencia del desarrollo de Laguerre (3.40), necesitamos previamente acotar los coeficientes  $c_k$  dados en (3.41a). Para ello consideramos, con  $p = \nu/2 + 1$  y  $\mu_0 > 0$  fijado:

$$(3.42) \quad g((1 - \theta)\mu_0) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \theta^k, \quad \forall \theta, \quad |\theta| < \frac{1}{\zeta},$$

$$= \left( \frac{p}{\mu_0} \right)^{\nu/2} \exp \left\{ -\sum_{i=1}^n \frac{\delta_i \alpha_i (\nu + 2)/2}{(1 - \theta)\mu_0 + \alpha_i (\nu + 2)} \right\} \cdot \prod_{i=1}^n \left( 1 + \frac{\alpha_i (\nu + 2)}{\mu_0} \right)^{-\nu_i/2} \prod_{i=1}^n \left( 1 - \frac{\theta \mu_0}{\mu_0 + \alpha_i (\nu + 2)} \right)^{-\nu_i/2}$$

donde

$$\zeta = \max_i \left| \frac{\mu_0}{\mu_0 + \alpha_i (\nu + 2)} \right| = \frac{\mu_0}{\mu_0 + \alpha_{(1)} (\nu + 2)}$$

con  $0 < \zeta < 1$ .

Aplicando la desigualdad de Cauchy a (3.42) conseguimos una cota para los coeficientes:

$$(3.43) \quad |c_k| \leq \rho^{-k} \max_{|\theta|=\rho} |g((1-\theta)\mu_0)|.$$

A partir de (3.42) acotamos

$$(3.44) \quad \max_{|\theta|=\rho} |g((1-\theta)\mu_0)| \leq \exp \left\{ - \sum_{i=1}^n \frac{\delta_i \alpha_i (\nu+2)/2}{(1+1/\zeta)\mu_0 + \alpha_i (\nu+2)} \right\} \cdot \left( \frac{\nu+2}{2\mu_0} \right)^{\nu/2} \prod_{i=1}^n \left( 1 + \frac{\alpha_i (\nu+2)}{\mu_0} \right)^{-\nu_i/2} (1-\rho\zeta)^{-\nu/2},$$

con lo cual

$$(3.45) \quad |c_k| \leq \inf_{0 < \rho < 1/\zeta} \left[ \rho^{-k} (1-\rho\zeta)^{-\nu/2} \right] \prod_{i=1}^n \left( 1 + \frac{\alpha_i (\nu+2)}{\mu_0} \right)^{-\nu_i/2} \cdot \left( \frac{\nu+2}{2\mu_0} \right)^{\nu/2} \exp \left\{ - \sum_{i=1}^n \frac{\delta_i \alpha_i (\nu+2)/2}{(1+1/\zeta)\mu_0 + \alpha_i (\nu+2)} \right\},$$

cuyo ínfimo viene dado en (3.25).

Acotamos la función de distribución (3.40) a partir de (3.45) y el Lema 2.1.2, resultando:

$$(3.46) \quad |F(x)| \leq \frac{x^{\nu/2}}{\Gamma(\nu/2+1)} \exp \left\{ - \sum_{i=1}^n \frac{\delta_i \alpha_i (\nu+2)/2}{(1+1/\zeta)\mu_0 + \alpha_i (\nu+2)} \right\} \cdot \left( \frac{\nu+2}{2\mu_0} \right)^{\nu/2} \exp \left( \frac{(\nu+2)x}{4\mu_0} \right) \prod_{i=1}^n \left( 1 + \frac{\alpha_i (\nu+2)}{\mu_0} \right)^{-\nu_i/2} \sum_{k \geq 0} a_k,$$

para cada  $\mu_0 > 0$ , con

$$(3.47) \quad a_k = \frac{k!}{(\nu/2+1)_k} \zeta^k \left( \frac{2k+\nu}{2k} \right)^k \left( \frac{2k+\nu+2}{2k} \right)^k \cdot \left( \frac{2k+\nu}{\nu} \right)^{\nu/2} \left( \frac{2k+\nu+2}{\nu+2} \right)^{\nu/2+1}.$$

La serie anterior es absolutamente convergente ya que  $0 < \zeta < 1$ . Y una estimación del error será:

$$\mathcal{E}_N(F, x, \mu_0) \leq \frac{x^{\nu/2}}{\Gamma(\nu/2 + 1)} \exp \left\{ - \sum_{i=1}^n \frac{\delta_i \alpha_i (\nu + 2)/2}{(1 + 1/\zeta) \mu_0 + \alpha_i (\nu + 2)} \right\} \cdot \left( \frac{\nu + 2}{2\mu_0} \right)^{\nu/2} \prod_{i=1}^n \left( 1 + \frac{\alpha_i (\nu + 2)}{\mu_0} \right)^{-\nu_i/2} \exp \left( \frac{(\nu + 2)x}{4\mu_0} \right) \sum_{k=N+1}^{\infty} a_k,$$

para cada  $\mu_0 > 0$  y con  $a_k$  dado en (3.47). En tal caso es evidente la convergencia uniforme en cada intervalo finito de  $x > 0$ , para cada  $\mu_0 > 0$  del desarrollo (3.40).

Podemos obtener distintas expresiones equivalentes para la función de distribución de  $Q'_n$ , particularizando en (3.40) para distintos valores del parámetro  $\mu_0$ :

- Si  $\mu_0 = \nu + 2$ , obtenemos una expresión simple

$$F(x) = \frac{x^{(\nu/2)}}{\Gamma(\nu/2 + 1)} \sum_{k \geq 0} \frac{k! c_k}{(\nu/2 + 1)_k} L_k^{(\frac{\nu}{2})} \left( \frac{x}{2} \right),$$

donde

$$(3.48) \quad \begin{aligned} c_k &= \frac{1}{k} \sum_{j=0}^{k-1} c_j d_{k-j}, \quad k \geq 1, \\ c_0 &= \frac{1}{2^{\nu/2}} \exp \left\{ - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{\delta_i \alpha_i}{1 + \alpha_i} \right\} \prod_{i=1}^n (1 + \alpha_i)^{-\nu_i/2}, \\ d_j &= - \frac{j}{2} \sum_{i=1}^n \delta_i \alpha_i \left( \frac{1}{1 + \alpha_i} \right)^{j+1} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \nu_i \left( \frac{1}{1 + \alpha_i} \right)^j, \quad j \geq 1. \end{aligned}$$

Observemos que los coeficientes dados en (3.48) coincide con los obtenido en (3.27) para la función de densidad.

- Si  $\mu_0 = x$  se anula el polinomio de Laguerre de grado uno.
- Si  $\mu_0 = \alpha_{(1)} (\nu + 2) / 7$ , se tiene  $\zeta = 1/8$ , y la convergencia se acelera para valores de  $x$  pequeños.

Como ocurría en los casos anteriormente estudiados, necesitamos otros desarrollos que sean numéricamente eficientes para la cola superior de la distribución.

**3.3.2. Otros desarrollos para la función de distribución.** Al igual que en los casos anteriores, podemos obtener otra expresión que mejora el desarrollo obtenido (3.40), en la cola derecha:

Sea  $H(\lambda) = G((\lambda - 1)/(2\beta))$ , con  $\beta > 0$  y  $G(\cdot)$  la transformada de Laplace de la función de distribución de  $Q'_n$  dada en (3.39), entonces

$$(3.49) \quad \begin{aligned} F(x) &= \mathcal{L}^{-1}(G(\lambda))(x) = \mathcal{L}^{-1}(H(1 + 2\lambda\beta))(x) \\ &= \frac{e^{-\frac{x}{2\beta}}}{2\beta} \mathcal{L}^{-1}(H(\lambda))\left(\frac{x}{2\beta}\right). \end{aligned}$$

A continuación invertimos la función  $H(\cdot)$  por el procedimiento conocido:

Como

$$H(\lambda) = \frac{2\beta^{\nu/2+1}}{\lambda - 1} \exp\left\{-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{\delta_i \alpha_i (\lambda - 1)}{\beta + \alpha_i (\lambda - 1)}\right\} \prod_{i=1}^n (\beta + \alpha_i (\lambda - 1))^{-\nu_i/2},$$

y  $g(\mu) = (p/\mu)^p H(p/\mu)$ . Si  $p = \nu/2 + 1$  con  $\nu = \sum_{i=1}^n \nu_i$ ,

$$\begin{aligned} g(\mu) &= 2 \left(\frac{\nu}{2} + 1\right)^{\nu/2+1} \frac{\beta^{\nu/2+1}}{p - \mu} \exp\left\{-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{\delta_i \alpha_i (p - \mu)}{\beta\mu + \alpha_i (p - \mu)}\right\} \\ &\quad \cdot \prod_{i=1}^n (\beta\mu + \alpha_i (p - \mu))^{-\nu_i/2}. \end{aligned}$$

Las derivadas verifican la siguiente relación:

$$\begin{aligned} g^{(k)}(\mu) &= (-1)^k (k - 1)! \sum_{j=0}^{k-1} \frac{(-1)^j g^{(j)}(\mu)}{j!} \left\{ \left(\frac{-1}{p - \mu}\right)^{k-j} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{(k - j) \delta_i \alpha_i \beta p (\beta - \alpha_i)^{k-j-1}}{(\beta\mu + \alpha_i (p - \mu))^{k-j+1}} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \nu_i \left(\frac{\beta - \alpha_i}{\beta\mu + \alpha_i (p - \mu)}\right)^{k-j} \right\}. \end{aligned}$$



Por tanto si  $c_k = \frac{(-\mu_0)^k g^{(k)}(\mu_0)}{k!}$ ,

$$\mathcal{L}^{-1}(H(\lambda))(x) = \frac{x^{\nu/2}}{\Gamma(\nu/2+1)} \sum_{k \geq 0} \frac{k! c_k}{(\nu/2+1)_k} L_k^{(\nu/2)} \left( \frac{(\nu+2)x}{2\mu_0} \right), \forall \mu_0 > 0,$$

y teniendo en cuenta (3.49)

$$(3.50) \quad F(x) = \frac{e^{-\frac{x}{2\beta}}}{(2\beta)^{\nu/2+1}} \frac{x^{\nu/2}}{\Gamma(\nu/2+1)} \sum_{k \geq 0} \frac{k! c_k}{(\nu/2+1)_k} L_k^{(\nu/2)} \left( \frac{(\nu+2)x}{4\beta\mu_0} \right),$$

para cada  $\mu_0 > 0$ . Los coeficientes  $c_k$  verifican

$$(3.51a) \quad c_k = \frac{1}{k} \sum_{j=0}^{k-1} c_j d_{k-j}, \quad k \geq 1,$$

$$c_0 = 2 \left( \frac{\nu}{2} + 1 \right)^{\nu/2+1} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{\delta_i \alpha_i (p - \mu_0)}{\beta \mu_0 + \alpha_i (p - \mu_0)} \right\} \cdot \frac{\beta^{\nu/2+1}}{p - \mu_0} \prod_{i=1}^n (\beta \mu_0 + \alpha_i (p - \mu_0))^{-\nu_i/2},$$

$$(3.51b) \quad d_j = -\frac{j\beta p}{2\mu_0} \sum_{i=1}^n \delta_i \alpha_i (\beta - \alpha_i)^{j-1} \left( \frac{\mu_0}{\beta \mu_0 + \alpha_i (p - \mu_0)} \right)^{j+1} + \left( \frac{-\mu_0}{p - \mu_0} \right)^j + \sum_{i=1}^n \frac{\nu_i}{2} \left( \frac{\mu_0 (\beta - \alpha_i)}{\beta \mu_0 + \alpha_i (p - \mu_0)} \right)^j, \quad j \geq 1.$$

Podemos observar que si  $\delta_i = 0, \forall i$ , en (3.50), obtenemos la expresión (2.35) como era de esperar. Una vez más los desarrollos obtenidos en el caso no centrado generalizan a los obtenidos en el caso centrado.

**3.3.3. Estudio de la convergencia.** Para estudiar la convergencia del desarrollo (3.50) obtenido para la función de distribución de  $Q'_n$  y determinar cotas para el error, previamente acotamos los coeficientes  $c_k$  dados en (3.51a).

Para ello consideramos, con  $p = \nu/2 + 1$  y  $\mu_0 > 0$  fijado, la siguiente función:

$$(3.52) \quad g((1-\theta)\mu_0) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \theta^k, \quad \forall \theta, \quad |\theta| < \frac{1}{\varepsilon},$$

$$= \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{\delta_i (\alpha_i/\beta) (p/\mu_0 - 1) + \delta_i (\alpha_i/\beta) \theta}{1 + (\alpha_i/\beta) (p/\mu_0 - 1) - \theta (1 - (\alpha_i/\beta))} \right\} \cdot$$

$$\cdot \prod_{i=1}^n \left( 1 + \frac{\alpha_i}{\beta} \left( \frac{p}{\mu_0} - 1 \right) \right)^{-\nu_i/2} \frac{1}{1 + \theta \left( \frac{\mu_0}{p - \mu_0} \right)} \cdot$$

$$\cdot \frac{2\beta p}{p - \mu_0} \left( \frac{p}{\mu_0} \right)^{\nu/2} \prod_{i=1}^n \left( 1 - \theta \frac{1 - (\alpha_i/\beta)}{1 + (\alpha_i/\beta) (p/\mu_0 - 1)} \right)^{-\nu_i/2}.$$

con  $\varepsilon = \max(a, \zeta)$ ,

$$a = \left| \frac{-\mu_0}{p - \mu_0} \right| \quad \text{y} \quad \zeta = \max_i \left| \frac{1 - (\alpha_i/\beta)}{1 + (\alpha_i/\beta) (p/\mu_0 - 1)} \right|,$$

tal que  $0 < \varepsilon < 1$  si  $\mu_0 < p/2$ .

Aplicando la desigualdad de Cauchy a (3.52):

$$(3.53) \quad |c_k| \leq \rho^{-k} \max_{|\theta|=\rho} |g((1-\theta)\mu_0)|, \quad \forall \rho, \quad 0 < \rho < \frac{1}{\varepsilon}.$$

Además

$$(3.54) \quad \max_{|\theta|=\rho} |g((1-\theta)\mu_0)| \leq \frac{2\beta p}{|p - \mu_0|} \exp \left\{ -\frac{1}{4} \sum_{i=1}^n \frac{\delta_i (\alpha_i/\beta) (p/\mu_0 - 1)}{1 + (\alpha_i/\beta) (p/\mu_0 - 1)} \right\} \cdot$$

$$\cdot \left( \frac{p}{\mu_0} \right)^{\nu/2} \prod_{i=1}^n \left| 1 + \frac{\alpha_i}{\beta} \left( \frac{p}{\mu_0} - 1 \right) \right|^{-\nu_i/2} \exp \left\{ \mu_0/p \frac{\sum_{i=1}^n \delta_i}{2\varepsilon} \right\} (1 - \rho\varepsilon)^{-\nu/2-1}.$$

Razonando de forma análoga al estudio anterior con respecto a la acotación de los coeficientes  $c_k$ , es decir considerando

$$\inf_{0 < \rho < 1/\varepsilon} \left[ \rho^{-k} (1 - \rho\varepsilon)^{-\nu/2-1} \right] = \varepsilon^k \left( \frac{2k + \nu + 2}{2k} \right)^k \left( \frac{2k + \nu + 2}{\nu + 2} \right)^{\nu/2+1},$$

y utilizando el Lema 2.1.2 para acotar los polinomios de Laguerre, tenemos:

$$\begin{aligned}
 |F(x)| \leq & \frac{e^{-\frac{x}{2\beta}} x^{\nu/2}}{\Gamma\left(\frac{\nu}{2} + 1\right)} \left(\frac{p}{2\beta\mu_0}\right)^{\nu/2} \frac{p}{|p - \mu_0|} \prod_{i=1}^n \left|1 + \frac{\alpha_i}{\beta} \left(\frac{p}{\mu_0} - 1\right)\right|^{-\nu_i/2} \\
 & \cdot \exp\left\{\mu_0/p \frac{\sum_{i=1}^n \delta_i}{2\varepsilon}\right\} \exp\left\{-\frac{1}{4} \sum_{i=1}^n \frac{\delta_i (\alpha_i/\beta) (p/\mu_0 - 1)}{1 + (\alpha_i/\beta) (p/\mu_0 - 1)}\right\} \\
 & \cdot \exp\left(\frac{(\nu + 2)x}{8\beta\mu_0}\right) \sum_{k \geq 0} b_k,
 \end{aligned}$$

donde

$$(3.55) \quad b_k = \varepsilon^k \left(\frac{2k + \nu + 2}{2k}\right)^{2k} \left(\frac{2k + \nu + 2}{\nu + 2}\right)^{\nu+2} \frac{k!}{(\nu/2 + 1)_k}.$$

La serie de término general  $b_k$  es absolutamente convergente para  $\mu_0 < p/2$ , ya que  $0 < \varepsilon < 1$ .

En las condiciones anteriores, tenemos la siguiente cota del error:

$$\begin{aligned}
 (3.56) \quad \mathcal{E}_N(F, x, \mu_0, \beta) \leq & \frac{e^{-\frac{x}{2\beta}} x^{\nu/2}}{\Gamma\left(\frac{\nu}{2} + 1\right)} \prod_{i=1}^n \left(1 + \frac{\alpha_i}{\beta} \left(\frac{p}{\mu_0} - 1\right)\right)^{-\nu_i/2} \\
 & \cdot \frac{p}{p - \mu_0} \exp\left\{\mu_0/p \frac{\sum_{i=1}^n \delta_i}{2\varepsilon}\right\} \exp\left\{-\frac{1}{4} \sum_{i=1}^n \frac{\delta_i (\alpha_i/\beta) (p/\mu_0 - 1)}{1 + (\alpha_i/\beta) (p/\mu_0 - 1)}\right\} \\
 & \cdot \left(\frac{p}{2\beta\mu_0}\right)^{\nu/2} \exp\left(\frac{(\nu + 2)x}{8\beta\mu_0}\right) \sum_{k=N+1}^{\infty} b_k,
 \end{aligned}$$

con  $b_k$  dado en (3.55). Y por tanto se tiene la convergencia uniforme en cada intervalo finito de  $x > 0$ , para cada  $\mu_0 < p/2$ .

Si particularizamos (3.50) para  $\mu_0 = p/4$ , obtenemos la siguiente expresión para la función de distribución de  $Q'_n$ :

$$(3.57) \quad F(x) = \frac{e^{-\frac{x}{2\beta}} x^{\nu/2}}{(2\beta)^{\nu/2+1} \Gamma(\nu/2 + 1)} \sum_{k \geq 0} \frac{k! c_k}{(\nu/2 + 1)_k} L_k^{(\nu/2)}\left(\frac{2x}{\beta}\right),$$

donde los coeficientes verifican la siguiente relación de recurrencia:

$$c_k = \frac{1}{k} \sum_{j=0}^{k-1} c_j d_{k-j}, \quad k \geq 1,$$

$$c_0 = \frac{2\beta}{3} 4^{\nu/2+1} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{3\delta_i \alpha_i}{\beta + 3\alpha_i} \right\} \prod_{i=1}^n (1 + 3\alpha_i/\beta)^{-\nu_i/2},$$

$$d_j = \left( \frac{-1}{3} \right)^j - 2j\beta \sum_{i=1}^n \delta_i \alpha_i (\beta - \alpha_i)^{j-1} \left( \frac{1}{\beta + 3\alpha_i} \right)^{j+1} + \sum_{i=1}^n \frac{\nu_i}{2} \left( \frac{\beta - \alpha_i}{\beta + 3\alpha_i} \right)^j, \quad j \geq 1.$$

Kotz et al. (1967b) dan otra expresión en términos de los polinomios de Laguerre, integrando la función de densidad (3.37). Recordemos que el procedimiento que proponemos no requiere el conocimiento de la función de densidad para determinar la función de distribución.

Kotz et al. proponen la siguiente cota del error

$$(3.58) \quad \mathcal{E}_N \leq 2(1 - \xi\rho)^{-n/2} (1 - R)^{-1-n/2} e^{\lambda/2\xi} e^{x/4\beta} \cdot g(n+2, x/\beta) \left[ (\rho R)^{-(N+1)} / (1 - 1/\rho R) \right],$$

con  $\xi = \max_i |1 - \alpha_i/\beta|$ ,  $\lambda = \sum_{i=1}^n \delta_i$  y  $g(n+2, x/\beta)$  es la función de densidad de una chi-cuadrado centrada con  $n+2$  grados de libertad evaluada en el punto  $x/\beta$ . En principio la expresión (3.58) es válida para cualquier  $\rho, R$ , con  $\xi < 1/\rho < R < 1$  que particularizan para  $\rho = \xi^{-2/3}$  y  $R = \xi^{1/3}$ .

Observamos que la expresión (3.58) es distinta a la que nosotros proporcionamos (3.56).

La siguiente tabla refleja para distintos valores de  $x$  sendas expresiones para  $Q_2 = 0.7\chi_1^2(6) + 0.3\chi_1^2(2)$  con  $\beta = (\alpha_1 + \alpha_2)/2$  y  $N = 20$ :

	$x = 1$	$x = 6$	$x = 15$
(3.58)	1200.579843	591.2975682	16.42180660
(3.56) ( $\mu_0 = p/4$ )	$0.9386398512 \cdot 10^{-7}$	$0.8358390327 \cdot 10^{-4}$	1.693218458

COTAS PARA LOS ERRORES

### 3.3. DISTRIBUCIÓN DE LA COMBINACIÓN LINEAL DE $\chi^2$ NO CENTRADAS 63

Podemos afirmar que si consideramos para  $x = 1$  un valor de  $\mu_0$  más pequeño (por ejemplo  $\mu_0 = p/15$ ), la estimación del error es del orden de  $10^{-18}$ , de forma análoga se puede mejorar para  $x = 6$  aunque el valor de  $\mu_0$  no puede ser tan pequeño, de forma que como ya hemos mencionado anteriormente, para acelerar la convergencia en cada punto  $x$  debemos considerar un valor de  $\mu_0$  adecuado.

## CAPÍTULO 4

### Desarrollos de otras variables

En los capítulos anteriores hemos expresados la suma ponderada de  $\chi^2$  tanto centradas como no centradas, en términos de los polinomios de Laguerre generalizados.

En este capítulo nos ocupamos de obtener desarrollos de Laguerre para distintas variables de uso común en la Estadística Matemática. Así estudiaremos la distribución de la suma de variables gamma independientes con distintos parámetros, que generaliza la distribuciones de las formas cuadráticas centradas estudiadas en el capítulo 2 y que surge en el estudio de ciertos procesos estocásticos.

El procedimiento que aplicamos nos permitirá determinar expresiones para una cierta familia exponencial natural con función de varianza potencial, con importantes propiedades y aplicaciones en la Inferencia Estadística. Por último proporcionamos una expresión en términos de los polinomios de Laguerre para la distribución normal estándar.

#### **4.1. La distribución de la suma de variables Gamma independientes con distintos parámetros**

La distribución de la suma de variables gamma en determinadas condiciones, es decir cuando ciertos parámetros son iguales ha sido muy estudiada en la literatura. Sin embargo, aplicaciones más realistas se dan cuando los parámetros de dichas distribuciones son distintos, de esta forma aparece en determinados procesos estocásticos, Sim (1992), en la distribución del tiempo de espera total, tiempo de espera en cola, etc., Moschopoulos (1982). Aplicaciones en ingeniería, meteorología y otras áreas podemos ver en Kotz & Adams

(1964), Mathai (1982). Ciertas aplicaciones en Análisis Multivariante pueden verse en Kabe (1962).

Diversos autores han estudiado la determinación de la distribución de la suma de variables gamma independientes con distintos parámetros, proporcionando distintas expresiones: Kabe (1962) expresó la función de densidad en términos de una serie hipergeométrica, mediante la inversión de la función característica. Mathai (1982) aportó distintas expresiones para la función de densidad, mediante la inversión de la función generatriz : en términos de una suma finita de densidades gamma, de polinomios zonales y en términos de una función hipergeométrica confluyente con muchas variables, cada una de ellas correspondiendo a distintas condiciones impuestas sobre los parámetros. Moschopoulos (1985) con una variación del método seguido por Mathai (1982), obtiene una expresión para la densidad en términos de una serie de densidades gamma, que posteriormente integran para determinar la distribución.

Todos estos autores proporcionan una expresión para la función de densidad de la suma que estamos tratando. La mayoría de estas expresiones se corresponden con sumas infinitas de las que no proporcionan estimaciones del error, a excepción de Mathai (1982) que proporciona una cota uniforme y por tanto demasiado grande. Las expresiones para la función de distribución no las explicitan, aunque sí mencionan que se obtendrían integrando las correspondientes de la función de densidad.

En esta sección proporcionamos otras expresiones basadas en desarrollos de Laguerre, tanto para la función de densidad como para la función de distribución de la suma de variables gamma independientes con distintos parámetros, esta última sin necesidad de conocer la función de densidad. Así mismo proporcionamos estimaciones del error que se comete al considerar los desarrollos truncados.

Sean  $X_1, X_2, \dots, X_n$  variables aleatorias independientes que siguen una distribución gamma de parámetros  $\alpha_i, 1/\beta_i$ , respectivamente i.e.  $X_i \sim Ga(\alpha_i, 1/\beta_i)$

con  $\alpha_i > 0$  y  $\beta_i > 0$ , cuya función de densidad,  $f_i$  viene dada por

$$f_i(x) = \frac{x^{\alpha_i-1} e^{-x/\beta_i}}{\beta_i^{\alpha_i} \Gamma(\alpha_i)}, x > 0.$$

Sea la variable  $Y$  definida como

$$Y = \sum_{i=1}^n X_i,$$

objeto de nuestro estudio. A continuación determinamos la función de densidad de  $Y$ .

**4.1.1. Función de densidad de la suma de variables Gamma.** Sea  $f$  la función de densidad de  $Y$ , cuya transformada de Laplace viene dada por:

$$\mathcal{L}(f(x))(\lambda) = \prod_{i=1}^n (1 + \lambda\beta_i)^{-\alpha_i} = G(\lambda).$$

Para determinar  $f(\cdot)$ , basta invertir la función  $G$  por el procedimiento conocido:

Sea  $g(\mu) = (p/\mu)^p G(p/\mu)$ . Si  $\alpha = \sum \alpha_i$  y  $p = \alpha$ ,

$$g(\mu) = \alpha^\alpha \prod_{i=1}^n (\mu + \alpha\beta_i)^{-\alpha_i}.$$

Las derivadas sucesivas verifican:

$$g^{(k)}(\mu) = (-1)^k (k-1)! \sum_{j=0}^{k-1} \frac{(-1)^j g^{(j)}(\mu)}{j!} \sum_{i=1}^n \frac{\alpha_i}{(\mu + \alpha\beta_i)^{k-j}}.$$

Por tanto si  $c_k = \frac{(-\mu_0)^k g^{(k)}(\mu_0)}{k!}$ , por el Teorema 1.3.1, se tiene

$$(4.1) \quad f(x) = \frac{x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \sum_{k \geq 0} \frac{k! c_k}{(\alpha)_k} L_k^{(\alpha-1)} \left( \frac{\alpha x}{\mu_0} \right), \forall \mu_0 > 0,$$

cuyos coeficientes verifican la siguiente relación de recurrencia

$$(4.2a) \quad c_k = \frac{1}{k} \sum_{j=0}^{k-1} c_j d_{k-j}, \quad k \geq 1, \quad c_0 = \alpha^\alpha \prod_{i=1}^n (\mu_0 + \alpha\beta_i)^{-\alpha_i},$$

$$(4.2b) \quad d_j = \sum_{i=1}^n \alpha_i \left( \frac{\mu_0}{\mu_0 + \alpha\beta_i} \right)^j, \quad j \geq 1.$$



**4.1.2. Estudio de la convergencia.** Estudiamos la convergencia del desarrollo (4.1) obtenido para la función de densidad de la variable  $Y$ . Así como proporcionamos cotas del error que se comete al considerar los desarrollos truncados.

Para acotar la expresión (4.1), en primer lugar acotamos los coeficientes  $c_k$  dados en (4.2a). Fácilmente a partir de (4.2b) se tiene

$$|d_j| \leq \alpha \xi^j, j \geq 1,$$

con  $\xi = \frac{\mu_0}{\mu_0 + \alpha \beta_{(1)}}$  y  $\beta_{(1)} = \min_i \beta_i$ . Obviamente  $0 < \xi < 1$ . Y por inducción se tiene

$$(4.3) \quad |c_k| \leq |c_0| \frac{(\alpha)_k}{k!} \xi^k, k \geq 0.$$

A partir de (4.3) y el Lema 2.1.2 se tiene

$$\begin{aligned} |f(x)| &\leq \frac{x^{\alpha-1} |c_0|}{\Gamma(\alpha)} \sum_{k \geq 0} \xi^k \left| L_k^{(\alpha-1)} \left( \frac{\alpha x}{\mu_0} \right) \right| \\ &\leq \frac{x^{\alpha-1} |c_0|}{\Gamma(\alpha)} \exp \left( \frac{\alpha x}{2\mu_0} \right) \sum_{k \geq 0} \xi^k \left( \frac{k+\alpha}{k} \right)^k \left( \frac{k+\alpha}{\alpha} \right)^\alpha, \forall \mu_0 > 0. \end{aligned}$$

La serie anterior es absolutamente convergente, dado que  $0 < \xi < 1$

En las condiciones anteriores, una cota para el error sería,

$$(4.4) \quad \mathcal{E}_N(f, x, \mu_0) \leq \frac{x^{\alpha-1} |c_0|}{\Gamma(\alpha)} \exp \left( \frac{\alpha x}{2\mu_0} \right) \sum_{k=N+1}^{\infty} \xi^k \left( \frac{k+\alpha}{k} \right)^k \left( \frac{k+\alpha}{\alpha} \right)^\alpha,$$

para cada  $\mu_0 > 0$ . Análogamente la convergencia uniforme en cada intervalo finito de  $x > 0$ , para cada  $\mu_0 > 0$  del desarrollo (4.1) es inmediata.

Si particularizamos el desarrollo (4.1) para determinados valores del parámetro  $\mu_0$ , podemos tener distintas expresiones equivalentes, por ejemplo:

Si  $\mu_0 = \alpha$ , obtenemos una expresión simple

$$f(x) = \frac{x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \sum_{k \geq 0} \frac{k! c_k}{(\alpha)_k} L_k^{(\alpha-1)}(x),$$

donde

$$c_k = \frac{1}{k} \sum_{j=0}^{k-1} c_j d_{k-j}, \quad k \geq 1, \quad c_0 = \prod_{i=1}^n (1 + \beta_i)^{-\alpha_i},$$

$$d_j = \sum_{i=1}^n \alpha_i \left( \frac{1}{1 + \beta_i} \right)^j, \quad j \geq 1.$$

Computacionalmente, con un valor de  $\mu_0$  adecuado la convergencia del desarrollo obtenido se puede acelerar. De esta forma hemos comprobado que con  $\mu_0 = \alpha\beta_{(1)}/7$ , hace que  $\xi = 1/8$ , y la convergencia se acelera.

Observemos que si consideramos en la variable  $Y$ ,  $\alpha_i = \nu_i/2$ , con  $\nu_i$  los grados de libertad de variables  $\chi^2$  y los parámetros  $\beta_i = 2a_i$  con  $a_i$  las ponderaciones positivas de dichas variables  $\chi^2$ , entonces la suma de variables gamma de parámetros  $(\alpha_i, \beta_i)$  coincide con la suma ponderada correspondiente de variables  $\chi_{\nu_i}^2$ . Además el desarrollo (4.1) coincide con el dado en (2.2). Por otro lado, si los parámetros  $\beta_i$  son iguales entre sí a un determinado valor positivo,  $\beta$ , con  $\alpha_i$  cualesquiera y hacemos uso de la función generatriz de los polinomios de Laguerre dada en (2.6) (ver Chihara (1978)) obtenemos como era de esperar, por la propiedad de adición, la densidad de una variable gamma de parámetros  $\alpha = \sum \alpha_i$  y  $\beta$ .

### 4.1.3. Función de distribución de la suma de variables Gamma.

Sea  $F$  la función de distribución de la variable  $Y$ . Su transformada de Laplace es igual a:

$$\mathcal{L}(F(x))(\lambda) = \frac{1}{\lambda} \prod_{i=1}^n (1 + \lambda\beta_i)^{-\alpha_i} = G(\lambda).$$

Aplicamos nuestro procedimiento de inversión a la función  $G$  para determinar la función de distribución,  $F(\cdot)$ :

Sea  $g(\mu) = (p/\mu)^p G(p/\mu)$ . Si  $\alpha = \sum \alpha_i$  y  $p = 1 + \alpha$ ,

$$g(\mu) = (1 + \alpha)^\alpha \prod_{i=1}^n (\mu + (\alpha + 1)\beta_i)^{-\alpha_i}.$$

Se prueba fácilmente que

$$g^{(k)}(\mu) = (-1)^k (k-1)! \sum_{j=0}^{k-1} \frac{(-1)^j g^{(j)}(\mu)}{j!} \sum_{i=1}^n \frac{\alpha_i}{(\mu + (\alpha+1)\beta_i)^{k-j}}.$$

Por tanto si  $c_k = \frac{(-\mu_0)^k g^{(k)}(\mu_0)}{k!}$ , se tiene

$$(4.5) \quad F(x) = \frac{x^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \sum_{k \geq 0} \frac{k! c_k}{(\alpha+1)_k} L_k^{(\alpha)} \left( \frac{(\alpha+1)x}{\mu_0} \right), \forall \mu_0 > 0,$$

y los coeficientes verifican

$$(4.6a) \quad c_k = \frac{1}{k} \sum_{j=0}^{k-1} c_j d_{k-j}, \quad k \geq 1, \quad c_0 = (1+\alpha)^\alpha \prod_{i=1}^n (\mu + (\alpha+1)\beta_i)^{-\alpha_i},$$

$$(4.6b) \quad d_j = \sum_{i=1}^n \alpha_i \left( \frac{\mu_0}{\mu_0 + (\alpha+1)\beta_i} \right)^j, \quad j \geq 1.$$

**4.1.4. Estudio de la convergencia.** Estudiamos la convergencia del desarrollo obtenido en (4.5). Razonando de forma análoga al estudio correspondiente de la función de densidad, acotaremos los coeficientes (4.6a). Para ello, a partir de (4.6b) se tiene

$$|d_j| \leq \alpha \xi^j, \quad j \geq 1,$$

con  $\xi = \frac{\mu_0}{\mu_0 + (\alpha+1)\beta_{(1)}}$  y  $\beta_{(1)} = \min_i \beta_i$ . Por inducción se verifica

$$(4.7) \quad |c_k| \leq |c_0| \frac{(\alpha)_k}{k!} \xi^k, \quad k \geq 0.$$

Por tanto a partir de (4.7) y el Lema 2.1.2 se tiene

$$\begin{aligned} |F(x)| &\leq \frac{x^\alpha |c_0|}{\Gamma(\alpha+1)} \sum_{k \geq 0} \frac{(\alpha)_k \xi^k}{(\alpha+1)_k} \left| L_k^{(\alpha)} \left( \frac{(\alpha+1)x}{\mu_0} \right) \right|, \\ &\leq \frac{x^\alpha |c_0|}{\Gamma(\alpha+1)} \exp \left( \frac{(\alpha+1)x}{2\mu_0} \right) \sum_{k \geq 0} a_k, \quad \forall \mu_0 > 0, \end{aligned}$$

con

$$(4.8) \quad a_k = \xi^k \left( \frac{k+\alpha+1}{k} \right)^k \left( \frac{k+\alpha+1}{\alpha+1} \right)^{\alpha+1} \frac{\alpha}{\alpha+k}.$$

La serie anterior es absolutamente convergente ya que  $0 < \xi < 1$ . De esta forma, una estimación para el error vendría dada por

$$\mathcal{E}_N(F, x, \mu_0) \leq \frac{x^\alpha |c_0|}{\Gamma(\alpha + 1)} \exp\left(\frac{(\alpha + 1)x}{2\mu_0}\right) \sum_{k=N+1}^{\infty} a_k, \forall \mu_0 > 0,$$

con  $a_k$  dado en (4.8). Y análogamente se verifica la convergencia uniforme de (4.5) en cada intervalo finito de  $x > 0$ , para cada  $\mu_0 > 0$ .

Una desarrollo particular de (4.5) lo tenemos por ejemplo:

Si  $\mu_0 = \alpha + 1$

$$F(x) = \frac{x^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} \sum_{k \geq 0} \frac{k! c_k}{(\alpha + 1)_k} L_k^{(\alpha)}(x), \forall \mu_0 > 0,$$

con

$$c_k = \frac{1}{k} \sum_{j=0}^{k-1} c_j d_{k-j}, \quad k \geq 1, \quad c_0 = \prod_{i=1}^n (1 + \beta_i)^{-\alpha_i},$$

$$d_j = \sum_{i=1}^n \alpha_i \left(\frac{1}{1 + \beta_i}\right)^j, \quad j \geq 1.$$

Obviamente con el valor de  $\mu_0$  adecuado, la convergencia se acelera y se obtienen resultados análogos a los desarrollos dados para la función de densidad. De la misma forma con los valores de  $\alpha_i$  y  $\beta_i$  adecuados el desarrollo (4.5) coincide con el (2.27). Además, si los parámetros  $\beta_i$  son iguales entre sí, obtenemos una expresión para la distribución de la variable gamma de parámetros  $\alpha$  y  $\beta = \beta_i$ , en términos de los polinomios de Laguerre generalizados.

#### 4.2. Cálculo de la distribución en la familia exponencial natural con función de varianza potencial (NEF-PVF)

La familia exponencial natural con función de varianza potencial, conocida por NEF-PVF, ha sido estudiada por diversos autores, entre ellos podemos destacar Tweedie (1984), Bar-Lev & Enis (1986) y Jorgensen (1987), los dos últimos artículos resaltan su conexión con la reproducibilidad y con los modelos de dispersión exponencial respectivamente, además de determinar importantes propiedades.

A continuación introducimos la definición de tal familia:

DEFINICIÓN 4.2.1. Sea  $F = \{F_\theta : \theta \in \Theta\}$  diremos que  $F$  es una NEF-PVF si es una familia exponencial natural, i.e.

$$(4.9) \quad dF_\theta = \exp(\theta x - k(\theta)) d\nu(x),$$

con  $\nu$  una medida  $\sigma$ -finita sobre los conjuntos borel de  $\mathbb{R}$ . Su función de varianza viene dada por

$$(4.10) \quad V(m) = Am^\alpha, \quad m \in \Omega,$$

con  $m = k'(\theta)$  el valor medio y  $\Omega = k'(\text{int}(\Theta))$  el espacio de medias.

$A$  es conocido como el parámetro de escala y  $\alpha$ , con  $\alpha \neq 0$ , como el parámetro potencia.

Morris (1982,1983) estudió la familia exponencial natural, (NEF) y demostró que la función de varianza  $(\Omega, V(m))$  caracteriza a la NEF dentro de todas las NEF's. En particular realizó un estudio exhaustivo sobre la familia exponencial natural con función de varianza cuadrática (NEF-QVF), la cual se compone de seis familias de distribuciones y tres de ellas pertenecen a la NEF-PVF: la distribución normal ( $\alpha = 0$ ), la distribución Poisson ( $\alpha = 1$ ) y la distribución gamma ( $\alpha = 2$ ).

Tweedie (1984) clasificó la NEF-PVF en clases cerradas por convolución y por transformación escalar positiva, que refinó y completó posteriormente Jorgensen (1987).

De esta forma: si el parámetro potencia es negativo ( $\alpha < 0$ ) se obtiene un modelo exponencial (ignorado por Tweedie inicialmente) no 'steep' y por tanto no regular como se puede ver en Jorgensen (con  $\Omega = \mathbb{R}^+$  y cuyo soporte es  $\mathbb{R}$ ) generada por una distribución estable extrema con exponente característico entre 1 y 2.

Si  $0 < \alpha < 1$  demostró que en este caso no le corresponde ningún modelo exponencial.

En el caso  $1 < \alpha < 2$  se obtienen distribuciones Poisson compuestas generadas por variables gamma.

Por último, para  $\alpha > 2$  se obtiene una familia absolutamente continua, 'steep', no regular, generada por una distribución estable positiva con exponente característico  $\rho = \frac{2-\alpha}{1-\alpha}$ , con  $0 < \rho < 1$ .

La única distribución estable expresable en una forma cerrada es la distribución Inversa Gaussiana ( $\alpha = 3$ ). Aunque sí se conocen desarrollos en serie para la densidad de tales distribuciones estables, Pollard (1946) obtuvo un desarrollo genérico invirtiendo la función generatriz por integración de contornos. Para determinados exponentes característico racionales, los desarrollos se pueden expresar en términos de funciones trascendentales de orden superior.

Nosotros proponemos un desarrollo alternativo en el caso  $\alpha > 2$ , en términos de los polinomios de Laguerre aplicando el procedimiento de inversión de la transformada de Laplace.

**4.2.1. Desarrollos de Laguerre para una NEF-PVF.** Nos centramos en la NEF-PVF con parámetro potencia mayor que dos y aplicamos el procedimiento introducido en la sección 1.3 para obtener un desarrollo en términos de los polinomios de Laguerre de la familia de densidades de dicha NEF-PVF.

Para  $\alpha > 2$ ,  $F$  es absolutamente continua, por tanto considerando la familia de densidades de (4.9) obtenemos

$$(4.11) \quad f_{\theta}(x) = \exp(\theta x - k(\theta)) h(x), x > 0.$$

Como  $m = k'(\theta)$  y  $V(m) = k''(\theta)$ , entonces

$$(4.12) \quad \theta = \int \frac{dm}{V(m)} \quad \text{y} \quad k(m) = \int \frac{m}{V(m)} dm.$$

Sustituyendo la expresión de la varianza, (4.10) en (4.12) e integrando obtenemos la función de densidad (4.11) reparametrizada por el valor medio, lo cual es posible porque la función  $k(\cdot)$  es convexa:

$$(4.13) \quad f_m(x) = \exp\left(\frac{m^{-\alpha+1}}{A(1-\alpha)}x - \frac{m^{-\alpha+2}}{A(2-\alpha)}\right) g^*(x)$$

con  $g^*(\cdot)$  tal que contiene las constantes correspondientes de la integración. Para obtener (4.13) basta determinar  $g^*$ , para ello:

Como  $f_m$  es función de densidad,

$$\int_0^{\infty} \exp\left(\frac{m^{-\alpha+1}}{A(1-\alpha)}x\right) g^*(x) dx = \exp\left(\frac{m^{-\alpha+2}}{A(2-\alpha)}\right)$$

y considerando  $\lambda = \frac{m^{-\alpha+1}}{A(\alpha-1)}$  se tiene

$$(4.14) \quad \int_0^{\infty} \exp(-\lambda x) g^*(x) dx = \exp(-(a\lambda)^\rho),$$

con  $\rho = \frac{2-\alpha}{1-\alpha}$  y  $a = \left(\frac{(1-\rho)^{1-\rho}}{\rho A^{1-\rho}}\right)^{1/\rho}$ .

Por tanto

$$\mathcal{L}(g^*(x))(\lambda) = \exp(-(a\lambda)^\rho) = G(\lambda),$$

que justamente es la transformada de Laplace de una distribución estable con exponente característico  $\rho \in (0, 1)$ , ver Feller (1971). Por tanto  $g^*(x)$  es la función de densidad generadora de la familia (4.13).

En lo que sigue aplicaremos el procedimiento descrito para invertir transformadas de Laplace y conseguiremos desarrollos de Laguerre tanto para la densidad  $g^*(\cdot)$  como para su función de distribución que notamos por  $G^*(\cdot)$ :

Sea

$$H(\lambda) = G(\lambda/a) = \exp(-\lambda^\rho)$$

entonces por las propiedades de la transformada de Laplace

$$(4.15) \quad g^*(x) = \frac{1}{a} \mathcal{L}^{-1}(H(\lambda))\left(\frac{x}{a}\right).$$

Invertimos  $H(\lambda)$  por nuestro procedimiento:

Sea  $g(\mu) = (p/\mu)^p H(p/\mu)$ , con  $p = 1$  tenemos

$$g(\mu) = \frac{1}{\mu} \exp(-\mu^{-\rho}).$$

Las derivadas sucesivas verifican:

$$g^{(k)}(\mu) = (k-1)! (-1)^k \sum_{j=0}^{k-1} \frac{(-1)^j g^{(j)}(\mu)}{j!} \left\{ \mu^{-(k-j)} - \frac{(\rho)_{k-j}}{(k-1-j)!} \mu^{-(\rho+k-j)} \right\}.$$

Si notamos  $c_k = \frac{(-\mu_0)^j g^{(j)}(\mu_0)}{j!}$ ,

$$\mathcal{L}^{-1}(H(\lambda)) = \sum_{k \geq 0} c_k L_k^{(0)}\left(\frac{x}{\mu_0}\right), \forall \mu_0 > 0,$$

y por (4.15)

$$(4.16) \quad g^*(x) = \frac{1}{a} \sum_{k \geq 0} c_k L_k^{(0)}\left(\frac{x}{a\mu_0}\right), \forall \mu_0 > 0.$$

Los coeficientes verifican la siguiente relación de recurrencia

$$c_k = \frac{1}{k} \sum_{j=0}^{k-1} c_j d_{k-j}, \quad k \geq 1, \quad c_0 = \frac{1}{\mu_0} \exp(-\mu_0^{-\rho}),$$

$$d_j = 1 - \frac{(\rho)_j}{(j-1)!} \mu_0^{-\rho}, \quad j \geq 1.$$

La NEF-PVF que genera vendrá dada, a partir de (4.13), por

$$f_m(x) = \exp\left(\frac{m^{-\alpha+1}}{A(1-\alpha)}x - \frac{m^{-\alpha+2}}{A(2-\alpha)}\right) \frac{1}{a} \sum_{k \geq 0} c_k L_k^{(0)}\left(\frac{x}{a\mu_0}\right).$$

Aplicando el mismo procedimiento podemos determinar la función de distribución  $G^*$  de la variable estable con exponente característico  $\rho \in (0, 1)$ .

La transformada de Laplace de  $G^*$  viene dada por:

$$\mathcal{L}(G^*(x))(\lambda) = \frac{1}{\lambda} \exp(-(a\lambda)^\rho) = G(\lambda).$$

Consideramos  $H(\lambda) = G(\lambda/a)$  y por tanto

$$G^*(x) = \frac{1}{a} \mathcal{L}^{-1}(H(\lambda))\left(\frac{x}{a}\right).$$

Invertimos la función  $H(\lambda)$  :



Sea  $g(\mu) = (p/\mu)^p H(p/\mu)$ , con  $p = 1$  tenemos

$$g(\mu) = a \exp(-\mu^{-\rho})$$

y sus derivadas sucesivas verifican:

$$g^{(k)}(\mu) = (k-1)! (-1)^k \sum_{j=0}^{k-1} \frac{(-1)^j g^{(j)}(\mu)}{j!} \left( -\frac{(\rho)_{k-j}}{(k-1-j)!} \mu^{-(\rho+k-j)} \right).$$

$$\text{Si } c_k = \frac{(-1)^k g^{(k)}(\mu_0)}{k!},$$

$$G^*(x) = \frac{1}{a} \sum_{k \geq 0} c_k L_k^{(0)} \left( \frac{x}{a\mu_0} \right),$$

donde los coeficientes verifican la siguiente relación

$$c_k = \frac{1}{k} \sum_{j=0}^{k-1} c_j d_{k-j}, \quad k \geq 1, \quad c_0 = a \exp(-\mu_0^{-\rho}),$$

$$d_j = -\frac{(\rho)_j}{(j-1)!} \mu_0^{-\rho}, \quad j \geq 0.$$

En la figura 4.1 podemos observar las funciones de densidad que se corresponden con distintos valores del parámetro potencia  $\alpha$ , obtenidas a partir del desarrollo (4.16).

### 4.3. Desarrollos de la distribución Normal en términos de los polinomios de Laguerre

El uso más común de la distribución normal es de aproximación a numerosos modelos de distribuciones utilizando el Teorema Central del Límite en sus diferentes versiones.

Por otro lado existen aproximaciones a la distribución normal, ver Johnson et al. (1994), ya sea por otra distribución o bien por un desarrollo en serie, por ejemplo en términos de los polinomios de Hermite, Kerridge & Cook (1976).

Nosotros proponemos un desarrollo alternativo en términos de los polinomios de Laguerre generalizados.

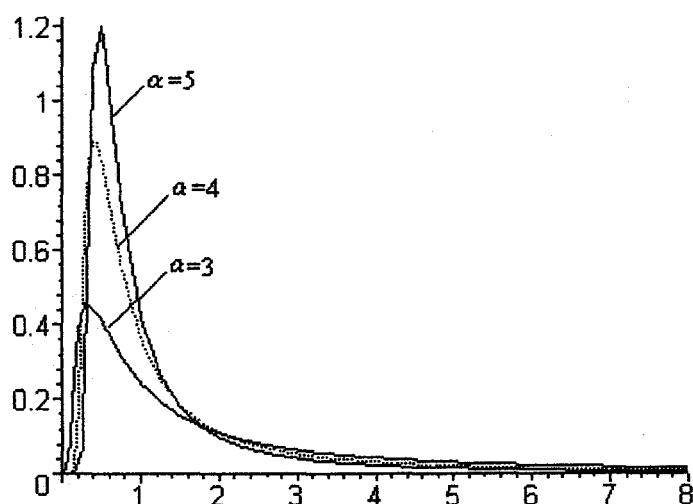


FIGURA 4.1

Para ello introducimos el siguiente resultado que relaciona la distribución normal con la distribución chi-cuadrado.

LEMA 4.3.1. Sea  $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$  y  $\Phi$  su función de distribución, entonces se verifica:

$$(4.18) \quad 1 - \Phi(z) = \frac{1}{2} P(\chi_1^2 \geq z^2), \quad z > 0.$$

DEMOSTRACIÓN. Sea  $z > 0$ , como

$$1 - \Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_z^\infty \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt,$$

si efectuamos el cambio de variable  $t = \sqrt{u}$ ,

$$\begin{aligned} 1 - \Phi(z) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{z^2}^\infty \frac{1}{2} u^{-\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{u}{2}\right) du \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^{1/2} \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \int_{z^2}^\infty u^{-\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{u}{2}\right) dt \\ &= \frac{1}{2} P[\chi_1^2 \geq z^2], \end{aligned}$$

se tiene lo que se quería. ■

Por tanto, basta evaluar la distribución de una variable chi-cuadrado con un grado de libertad,  $\chi_1^2$ . Expresaremos su distribución en términos de los polinomios de Laguerre generalizados, aplicando nuestro procedimiento de invertir transformadas de Laplace:

Sea  $F(x)$  la función de distribución de  $\chi_1^2$ , su transformada de Laplace viene dada por

$$\mathcal{L}(F(x))(\lambda) = \frac{1}{\lambda} (1 + 2\lambda)^{-1/2} = G(\lambda).$$

Invertimos la función  $G(\lambda)$ :

$$(4.19) \quad \text{Sea } g(\mu) = \left(\frac{p}{\mu}\right)^{p-1} \left(\frac{\mu + 2p}{\mu}\right)^{-1/2}. \text{ Si } p = 3/2,$$

$$g(\mu) = \left(\frac{3}{2}\right)^{1/2} \left(\frac{1}{\mu + 3}\right)^{1/2}.$$

Las derivadas sucesivas de (4.19), verifican:

$$g^{(k)}(\mu) = \sqrt{\frac{3}{2}} (-1)^k \left(\frac{1}{2}\right)_k \frac{1}{(\mu + 3)^{1/2+k}}.$$

Además,

$$(4.20) \quad \frac{(-\mu_0)^k g^{(k)}(\mu_0)}{\left(\frac{3}{2}\right)_k} = g(\mu_0) \frac{1}{1 + 2k} \left(\frac{\mu_0}{\mu_0 + 3}\right)^k.$$

y sustituyendo (4.20) en la expresión (1.15), tenemos

$$F(x) = \frac{x^{1/2}}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)} g(\mu_0) \sum_{k \geq 0} \frac{1}{1 + 2k} \left(\frac{\mu_0}{\mu_0 + 3}\right)^k L_k^{(1/2)}\left(\frac{3x}{2\mu_0}\right),$$

para cada  $\mu_0 > 0$  y a partir del Lema 4.3.1 se verifica

$$(4.21) \quad \Phi(z) = \frac{1}{2} (1 + F(z^2)).$$

Por tanto tenemos una expresión para la distribución normal estándar y  $z \geq 0$ :

$$(4.22) \quad \Phi(z) = \frac{1}{2} + \frac{z}{2\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)} g(\mu_0) \sum_{k \geq 0} \frac{1}{1 + 2k} \left(\frac{\mu_0}{\mu_0 + 3}\right)^k L_k^{(1/2)}\left(\frac{3z^2}{2\mu_0}\right),$$

para cada  $\mu_0 > 0$ , con  $g(\cdot)$  dado en (4.19).

Como la distribución normal es simétrica, para los valores  $z < 0$

$$\Phi(z) = 1 - \Phi(-z).$$

**4.3.1. Estudio de la convergencia.** En este apartado estudiamos la convergencia del desarrollo (4.22), así como proporcionamos cotas para el error que se comete al considerar aproximaciones truncando los desarrollos.

Sea  $\xi = \frac{\mu_0}{\mu_0 + 3}$ , entonces  $0 < \xi < 1$ , para cada  $\mu_0 > 0$ .

A partir de (4.22)

$$|\Phi(z)| \leq \frac{1}{2} + \frac{|z|}{\sqrt{\pi}} g(\mu_0) \sum_{k \geq 0} \frac{\xi^k}{1 + 2k} \left| L_k^{(1/2)} \left( \frac{3z^2}{2\mu_0} \right) \right|,$$

acotamos los polinomios de Laguerre aplicando el Lema 2.1.2 y obtenemos

$$|\Phi(z)| \leq \frac{1}{2} + \frac{|z|}{\sqrt{\pi}} g(\mu_0) \exp \left( \frac{3z^2}{4\mu_0} \right) \sum_{k \geq 0} \frac{\xi^k}{1 + 2k} \left( \frac{2k + 3}{2k} \right)^k \left( \frac{2k + 3}{3} \right)^{3/2},$$

cuya serie es absolutamente convergente ya que  $0 < \xi < 1$ .

Análogamente definimos el error que se comete como

$$\mathcal{E}_N(\Phi, x, \mu_0) = \left| \Phi(z) - \frac{1}{2} - \frac{z}{2\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)} g(\mu_0) \sum_{k=0}^N \frac{1}{1 + 2k} \left( \frac{\mu_0}{\mu_0 + 3} \right)^k L_k^{(1/2)} \left( \frac{3z^2}{2\mu_0} \right) \right|.$$

En este caso la cota del error que se obtiene es la siguiente:

$$\mathcal{E}_N(\Phi, x, \mu_0) \leq \frac{|z|}{\sqrt{\pi}} g(\mu_0) \exp \left( \frac{3z^2}{4\mu_0} \right) \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{\xi^k}{1 + 2k} \left( \frac{2k + 3}{2k} \right)^k \left( \frac{2k + 3}{3} \right)^{3/2},$$

y por tanto se verifica la convergencia uniforme de (4.22) en cada intervalo finito de  $x > 0$ , para cada  $\mu_0 > 0$ .

Podemos dar distintas expresiones equivalentes a (4.22) particularizando para diferentes valores del parámetro  $\mu_0$  :

- Si  $\mu_0 = 3/2$  :

$$\Phi(z) = \frac{1}{2} + \frac{z}{\sqrt{3}\sqrt{\pi}} \sum_{k \geq 0} \frac{1}{3^k (1+2k)} L_k^{(1/2)}(z^2),$$

esta expresión es útil en las colas.

- Si  $\mu_0 = 3/8$  :

$$\Phi(z) = \frac{1}{2} + \frac{2z}{3\sqrt{\pi}} \sum_{k \geq 0} \frac{1}{9^k (1+2k)} L_k^{(1/2)}(4z^2),$$

con esta otra expresión, la convergencia se acelera para valores próximos a cero ( $|z| \leq 3$ ).

También podemos obtener otros desarrollos en términos de los polinomios de Laguerre ordinarios, considerando  $p = 1$ , sin embargo sus resultados son muy pobres computacionalmente.

Podemos dar otra expresión de la distribución normal en términos de los polinomios de Laguerre con  $p = 3/2$ , efectuando en primer lugar un cambio de variable:

Si consideramos  $H(\lambda) = G\left(\frac{\lambda-1}{2\beta}\right) = \frac{2}{\lambda-1} \lambda^{-1/2}$ , entonces

$$F(x) = \mathcal{L}^{-1}(G(\lambda))(x) = \frac{e^{-x/2}}{2} \mathcal{L}^{-1}(H(\lambda))\left(\frac{x}{2}\right).$$

Por tanto basta invertir  $H(\lambda)$  por nuestro procedimiento:

Sea  $g(\mu) = \left(\frac{p}{\mu}\right)^p H\left(\frac{p}{\mu}\right)$ , si  $p = 3/2$  tenemos

$$g(\mu) = \frac{6}{3-2\mu}.$$

Una expresión para sus derivadas viene dada por

$$g^{(k)}(\mu) = 3k! \left(\frac{3}{2} - \mu\right)^{-(k+1)}, \quad k \geq 0,$$

con lo cual

$$\mathcal{L}^{-1}(H(\lambda))(x) = \frac{x^{1/2}}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)} g(\mu_0) \sum_{k \geq 0} \frac{k!}{(3/2)_k} \left(\frac{-\mu_0}{p - \mu_0}\right)^k L_k^{(1/2)}\left(\frac{3x}{2\mu_0}\right), \quad \forall \mu_0 > 0$$

y

$$F(x) = \frac{e^{-x/2} x^{1/2}}{2^{3/2} \Gamma\left(\frac{3}{2}\right)} g(\mu_0) \sum_{k \geq 0} \frac{k!}{(3/2)_k} \left(\frac{-\mu_0}{p - \mu_0}\right)^k L_k^{(1/2)}\left(\frac{3x}{4\mu_0}\right), \forall \mu_0 > 0,$$

de esta forma teniendo en cuenta que  $\Gamma(3/2) = \sqrt{\pi}/2$  y (4.21), se tiene la siguiente expresión para la función de distribución normal

$$\Phi(z) = \frac{1}{2} + z\varphi(z) \frac{p}{p - \mu_0} \sum_{k \geq 0} \frac{k!}{(3/2)_k} \left(\frac{-\mu_0}{p - \mu_0}\right)^k L_k^{(1/2)}\left(\frac{3z^2}{4\mu_0}\right), \forall \mu_0 > 0,$$

con  $\varphi(z)$  la densidad de la variable normal estándar. Esta expresión nos puede ser útil para obtener una expresión para la razón de Mill.

Se puede demostrar que el desarrollo anterior converge uniformemente en cada intervalo finito de  $x$  para cada  $\mu_0 < p/2$ .

## CAPÍTULO 5

### Desarrollos en polinomios de Hermite

Hasta ahora hemos obtenido desarrollos para distintas distribuciones en términos de los polinomios de Laguerre generalizados mediante un procedimiento basado en la estimación insesgada de mínima varianza de una función paramétrica de la distribución gamma. En este capítulo nos proponemos mantener esta misma idea de obtener desarrollos para otras distribuciones basándonos en la estimación insesgada de una función paramétrica de la distribución normal, que dará lugar a desarrollos en términos de los polinomios de Hermite.

De esta forma proponemos desarrollos de Hermite tanto para la función de densidad y de distribución de la variable normal estándar, que de manera análoga a los desarrollos de Laguerre dependen aparentemente de cierto parámetro cuya particularización nos proporcionará distintos desarrollos para las correspondientes funciones. Aplicando el mismo procedimiento, obtenemos desarrollos de Hermite para las funciones de densidad y de distribución respectivamente, de una variable aleatoria continua. Y análogamente obtenemos distintos desarrollos particularizando para distintos valores del parámetro, como caso particular obtenemos el conocido desarrollo de Gram-Charlier tipo A.

#### 5.1. La distribución Normal

La distribución normal ha sido ampliamente estudiada a lo largo de la historia, un estudio detallado de la misma se puede ver en el trabajo de Patel & Read (1982). El uso más común de la distribución normal es la de aproximación a otras distribuciones, donde o bien se supone la normalidad del modelo, o bien una distribución es aproximada por una distribución normal con su mismo valor esperado y misma desviación típica. Ejemplos de tales

usos son las aproximaciones de Fisher y Wilson-Hilferty a la distribución  $\chi^2$ , la aproximación normal a la  $t$ -Student entre otros, ver Patel & Read (1982).

La distribución normal juega un papel fundamental en las aproximaciones asintóticas a distribuciones de estadísticos basados en la media muestral. Tales aproximaciones vienen dadas por ejemplo por el Teorema Central del Límite que implica una distribución asintótica normal, así como desarrollos de Edgeworth que pretenden mejorar la aproximación anterior y esta última que es mejorada por las aproximaciones de punto de silla.

También es de interés obtener desarrollos en serie tanto para la distribución normal como para funciones relacionadas con ella, como la razón de Mill, dando lugar a aproximaciones truncando los desarrollos, ver Patel & Read (1982) y Johnson et al.(1994).

Nosotros proponemos desarrollos alternativos tanto para la función de densidad como para la función de distribución normal en términos de los polinomios de Hermite. Para ello utilizaremos la propiedad de unicidad de los estimadores insesgados de mínima varianza (UMVUE) en la distribución normal.

En la siguiente sección estudiamos el problema de la estimación insesgada en dicha familia.

**5.1.1. Estimación en la distribución Normal.** Sea  $X$  una variable aleatoria  $N(\mu, \sigma)$  con  $\mu \in \mathbb{R}$  desconocida y  $\sigma > 0$  conocida, cuya función de densidad viene dada por:

$$(5.1) \quad f(x, \mu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} (x - \mu)^2 \right\}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

La distribución normal pertenece a diversas familias muy bien estudiadas, como la familia exponencial, Pearson, estable, etc., ver Patel & Read (1982). En particular es un miembro de la familia exponencial natural con función de varianza cuadrática, ver Morris (1982,1983).

A continuación introducimos algunos conceptos para el estudio de la estimación.



DEFINICIÓN 5.1.1. Dada  $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , una función del parámetro, se dirá estimable si existe una función medible  $T : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tal que

$$E_{\mu}(T(X)) = h(\mu), \forall \mu \in \mathbb{R},$$

y en tal caso se dirá que  $T$  es un estimador insesgado de  $h$ . Al conjunto de las funciones estimables lo notaremos por  $\mathcal{U}^1$ .

Además, si  $\text{Var}_{\mu}(T) < \infty, \forall \mu \in \mathbb{R}$ ,  $T(X)$  se dirá el UMVUE de  $h(\mu)$ , (ya que la distribución normal es completa) o bien  $h$  se dirá UMVU estimable. Al conjunto de las funciones UMVU estimables lo notaremos por  $\mathcal{U}^2$ .

Para cada  $\mu > 0$ , definimos el espacio de funciones

$$\mathcal{L}_{\mu}^2 = \{T : E_{\mu}(T^2) < \infty\}.$$

Como es usual en la teoría de espacios  $\mathcal{L}^2$ , dos funciones son consideradas equivalentes si son iguales salvo conjunto de medida (de Lebesgue) nula. Además  $\mathcal{L}_{\mu}^2$  es un espacio de Hilbert separable con el siguiente producto escalar

$$\langle T_1, T_2 \rangle_{\mu} = E_{\mu}[T_1 T_2] = \int_0^{\infty} T_1(x) T_2(x) f(x, \mu) dx.$$

La norma asociada al producto escalar en dicho espacio viene dado por  $\|T\|_{\mu} = \langle T, T \rangle_{\mu}^{1/2}$ .

Así como ocurría en la distribución gamma, tenemos un sistema ortonormal completo de polinomios ortogonales denso en  $(\mathcal{L}_{\mu}^2, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mu})$  que determinaremos a continuación.

PROPOSICIÓN 5.1.1. Un sistema de polinomios mónicos ortogonales en  $\mathcal{L}_{\mu}^2$  viene dado por  $\{P_j(x, \mu)\}_{j \geq 0}$

$$(5.2) \quad P_j(x, \mu) = \sigma^j H_{e_j} \left( \frac{x - \mu}{\sigma} \right), \quad j \geq 0,$$

tal que

$$(5.3) \quad H_{e_j}(x) = j! \sum_{m=0}^{\lfloor j/2 \rfloor} \frac{(-1)^m x^{j-2m}}{2^m (j-2m)! m!},$$

es el polinomio de Hermite de grado  $j$ , también conocido como polinomio de Chebyshev-Hermite, que verifica la siguiente relación de recurrencia, ver Chihara (1978):

$$\begin{aligned} H_{e_{k+1}}(x) &= xH_{e_k}(x) - kH_{e_{k-1}}(x), \quad k \geq 0, \\ H_{e_{-1}}(x) &= 0, \quad H_{e_0}(x) = 1. \end{aligned}$$

PROPOSICIÓN 5.1.2. Los polinomios  $P_j(x, \mu)$  definidos en (5.2) verifican las siguientes propiedades, ver Morris (1982):

1. Verifican la siguiente relación de recurrencia:

$$\begin{aligned} P_{k+1} &= P_1 P_k - k\sigma^2 P_{k-1}, \quad k \geq 1, \\ P_0 &= 1, \quad P_1 = x - \mu. \end{aligned}$$

2. Y la siguiente relación con la densidad normal respecto a la cual son ortogonales:

$$(5.4) \quad \frac{d^j}{d\mu^j} f(x, \mu) = \sigma^{-2j} P_j(x, \mu) f(x, \mu).$$

3. Además,

$$(5.5) \quad \langle P_j, P_k \rangle_\mu = \delta_{k,j} j! \sigma^{2j},$$

donde  $\delta_{k,j}$  es la delta de Kronecker.

Estamos en condiciones para obtener un desarrollo para el estimador  $T$ .

TEOREMA 5.1.1. Dada  $h(\mu)$  una función UMVU estimable, su estimador UMVU,  $T$ , viene dado por el siguiente desarrollo:

$$(5.6) \quad T(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{h^{(j)}(\mu) \sigma^j}{j!} H_{e_j} \left( \frac{x - \mu}{\sigma} \right), \quad \forall \mu \in \mathbb{R},$$

$$\text{y } h^{(j)}(\mu) = \frac{d^j}{d\mu^j} h(\mu).$$

DEMOSTRACIÓN. Como  $T \in \mathcal{L}_\mu^2$  admite un desarrollo de Fourier en términos de los polinomios ortogonales  $\{P_j\}_{j \geq 0}$  dados en (5.2):

$$(5.7) \quad T(x) = \sum_{j=0}^{\infty} d_j(\mu) P_j(x, \mu), \forall \mu \in \mathbb{R},$$

con

$$(5.8) \quad d_j(\mu) = \frac{\langle T, P_j \rangle_\mu}{\|P_j\|_\mu^2}.$$

A partir de (5.5), se tiene que

$$\|P_j\|_\mu^2 = j! \sigma^{2j}.$$

El numerador de  $d_j(\mu)$ , se obtiene a partir de la ecuación de inesesgidez:

$$(5.9) \quad \int_0^{\infty} T(x) f(x, \mu) dx = h(\mu).$$

Derivando (5.9)  $j$  veces respecto a  $\mu$  y utilizando (5.4), se prueba fácilmente que

$$(5.10) \quad \langle T, P_j \rangle_\mu = \sigma^{2j} h^{(j)}(\mu).$$

Sustituyendo (5.10) y (5.5) en (5.8), se obtiene el coeficiente de Fourier correspondiente

$$(5.11) \quad d_j(\mu) = \frac{h^{(j)}(\mu)}{j!}.$$

A partir de (5.11) y la expresión de los polinomios mónicos ortogonales dados (5.2), se obtiene (5.6). ■

Obsérvese que el miembro derecho de (5.6) depende de un cierto parámetro  $\mu$ . Por construcción  $T(x)$  es un estimador inesesgado basado en un estadístico suficiente y completo, por tanto es único. Realmente el miembro derecho de (5.6) proporciona una infinidad de desarrollos ortogonales convergentes (en la norma de  $\mathcal{L}_\mu^2$ ) a la misma función, y en este sentido la elección de  $\mu$  es irrelevante. Sin embargo, una correcta elección de  $\mu$  proporcionará desarrollos numéricamente eficientes.

Aplicaremos este resultado para obtener una expresión tanto para la función de densidad como de distribución de la normal estándar.

## 5.2. Desarrollo de la función de densidad Normal estándar

Diversas aproximaciones en términos de funciones racionales, así como por distintos tipos de distribuciones se pueden ver en Patel & Read (1982).

En el siguiente resultado proporcionamos una expresión para la densidad en términos de los polinomios de Hermite.

TEOREMA 5.2.1. *Sea  $\varphi(x) = e^{-x^2/2}/\sqrt{2\pi}$  la densidad de la distribución normal estándar, entonces*

$$(5.12) \quad \varphi(x) = \frac{\varphi(\mu/\sqrt{2})}{\sqrt{2}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!2^{k/2}} H_{e_k}(\mu/\sqrt{2}) H_{e_k}(x - \mu), \quad \forall \mu \in \mathbb{R},$$

donde  $H_{e_k}(x)$  es el polinomio de Hermite de grado  $k$ .

DEMOSTRACIÓN. Como  $\varphi(x)$  es la densidad de una variable  $N(0, 1)$ , entonces  $\varphi(x - \mu)$  es la densidad de una variable  $N(\mu, 1)$ , ver (5.1).

Si consideramos la siguiente función paramétrica

$$(5.13) \quad h(\mu) = \frac{1}{\sqrt{2}} \varphi(\mu/\sqrt{2}), \quad \mu \in \mathbb{R},$$

se puede probar fácilmente que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) \varphi(x - \mu) dx = h(\mu).$$

Por tanto a partir de la teoría introducida en la sección anterior, podemos decir que  $h(\mu)$  es UMVU estimable y que  $T(x) = \varphi(x)$  es su estimador UMVU, en la distribución  $N(\mu, 1)$ .

Además a partir del Teorema 5.1.1 tenemos un desarrollo para  $T(x) = \varphi(x)$  con  $\sigma = 1$ ,

$$(5.14) \quad \varphi(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{h^{(k)}(\mu)}{k!} H_{e_k}(x - \mu), \quad \forall \mu \in \mathbb{R}.$$

A continuación determinamos las derivadas sucesivas de la función paramétrica  $h(\cdot)$  dada en (5.13). Para ello:

Las derivadas de la función de densidad  $\varphi$  verifican la siguiente relación, ver Patel & Read (1982)

$$(5.15) \quad \varphi^{(k)}(x) = (-1)^k H_{e_k}(x) \varphi(x).$$

Por tanto, fácilmente se verifica que

$$(5.16) \quad h^{(k)}(\mu) = \frac{(-1)^k}{2^{k+1/2}} H_{e_k}(\mu/\sqrt{2}) \varphi(\mu/\sqrt{2}).$$

Sustituyendo (5.16) en (5.14) tenemos (5.12) como se quería probar. ■

El desarrollo (5.12) es independiente del parámetro  $\mu$ , por tanto podemos tener distintas expresiones equivalentes de  $\varphi(x)$  para distintos valores de  $\mu$ :

- Si consideramos  $\mu = 0$  en el miembro derecho de (5.12) obtenemos:

$$(5.17) \quad \varphi(x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{4^k k!} H_{e_{2k}}(x), x \in \mathbb{R}$$

y se puede probar que coincide con la expresión que resulta de (5.12) al particularizar para  $\mu = x$ .

- Si  $\mu = (2 - \sqrt{2})x$ , la expresión que resulta es la siguiente:

$$(5.18) \quad \varphi(x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2^{k/2} k!} H_{e_k}^2 \left( \sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}} x \right), x \in \mathbb{R}.$$

Se puede probar la convergencia uniforme en cada intervalo finito de  $x$  de los desarrollos anteriores.

### 5.3. Desarrollo de la función de distribución Normal estándar

Diversos desarrollos y aproximaciones se han obtenido para la distribución normal, ver Patel & Read (1982), Johnson et al. (1994), entre ellos podemos destacar el dado por Kerridge & Cook (1976) en términos de los polinomios de Hermite, computacionalmente atractiva al poder hacer uso de la relación de recurrencia de tales polinomios. Moran (1980) proporciona otro desarrollo en términos de funciones trigonométricas, resultando una expresión precisa para cierto rango de valores de  $x$ . Fuera de dicho rango la precisión disminuye

rápida. Muchas de las aproximaciones a la distribución normal proporcionan distintas expresiones dependiendo del rango de valores de  $x$ , o bien si proporcionan una única expresión no es válida para el rango completo de  $x$ . Otra gran parte de los desarrollos obtenidos para la distribución normal están basados en la razón de Mill y por tanto utilizan la densidad de la normal estándar.

En esta sección proporcionamos desarrollos para la función de distribución en términos de los polinomios de Hermite. Para ello integramos la expresión (5.12) obtenida para la función de densidad.

Sea  $\Phi(x)$  la distribución normal estándar, que por su simetría respecto a  $x = 0$  se verifica que

$$\Phi(-x) = 1 - \Phi(x),$$

por tanto basta dar una expresión para los  $x > 0$ .

Sea  $x > 0$ , integrando la expresión (5.12) entre 0 y  $x$  y teniendo en cuenta la siguiente propiedad de los polinomios de Hermite

$$\frac{d}{dx} H_{e_k}(x) = k H_{e_{k-1}}(x),$$

se tiene

$$\begin{aligned} (5.19) \quad \int_0^x \varphi(t) dt &= \frac{\varphi(\mu/\sqrt{2})}{\sqrt{2}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! 2^{k/2}} H_{e_k}(\mu/\sqrt{2}) \int_0^x H_{e_k}(t - \mu) dt \\ &= \frac{\varphi(\mu/\sqrt{2})}{\sqrt{2}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! 2^{k/2}} H_{e_k}(\mu/\sqrt{2}) \int_0^x \frac{1}{k+1} H'_{e_k}(t - \mu) dt \\ &= \frac{\varphi(\mu/\sqrt{2})}{\sqrt{2}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! 2^{k/2}} H_{e_k}(\mu/\sqrt{2}) \frac{1}{k+1} \{H_{e_{k+1}}(x - \mu) - H_{e_{k+1}}(-\mu)\}. \end{aligned}$$

5.3. DESARROLLO DE LA FUNCIÓN DE DISTRIBUCIÓN NORMAL ESTÁNDAR 91

De esta forma la función de distribución se puede obtener como la suma de las dos siguientes integrales:

$$(5.20) \quad \Phi(x) = \int_{-\infty}^0 \varphi(t)dt + \int_0^x \varphi(t)dt.$$

Como  $\int_{-\infty}^0 \varphi(t)dt = 1/2$  y sustituyendo (5.19) en (5.20) se tiene la siguiente expresión para la función de distribución:

$$(5.21) \quad \Phi(x) = \frac{1}{2} + \frac{\varphi(\mu/\sqrt{2})}{\sqrt{2}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k+1)!2^{k/2}} H_{e_k}(\mu/\sqrt{2}) \cdot [H_{e_{k+1}}(x-\mu) - H_{e_{k+1}}(-\mu)],$$

para cada  $x \geq 0$ .

Particularizando (5.21) para distintos valores de  $\mu$  tenemos distintas expresiones para la función de distribución:

- Si  $\mu = 0$ ,

$$\Phi(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_m H_{e_{2k+1}}(x), \quad x \geq 0,$$

con  $\alpha_m = \frac{(-1)^k}{4^k k! (2k+1)}$ , que verifica la siguiente relación de recurrencia:

$$\alpha_{m+1} = -\frac{2m+1}{4(2m+3)(m+1)} \alpha_m, \quad \alpha_0 = 1,$$

lo cual facilitara el cálculo de la función de distribución.

- Si  $\mu = x/2$ , teniendo en cuenta que:

$$H_{e_{k+1}}(t) - H_{e_{k+1}}(-t) = \begin{cases} 0, & \text{si } k \text{ es impar} \\ 2H_{e_{k+1}}(t), & \text{si } k \text{ es par,} \end{cases}$$

se verifica que,

$$(5.22) \quad \Phi(x) = \frac{1}{2} + \frac{e^{-\frac{x^2}{16}}}{\sqrt{\pi}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)!2^k} H_{e_{2k}}\left(\frac{x}{2\sqrt{2}}\right) H_{e_{2k+1}}\left(\frac{x}{2}\right), \quad x \geq 0.$$

Hemos comprobado que esta expresión mejora la convergencia del desarrollo anterior. Y podemos observar una cierta semejanza con la dada en Kerridge & Cook (1976):

$$(5.23) \quad \Phi(x) = \frac{1}{2} + \frac{e^{-\frac{x^2}{8}}}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!2^{2k}} H_{e_{2k}}\left(\frac{x}{2}\right), \quad x \geq 0.$$

El desarrollo (5.22) es eficiente en las colas de la distribución ( $|x| > 6$ ) y mejora a la dada por Kerridge & Cook e incluso a la que proporcionamos en el capítulo anterior en términos de los polinomios de Laguerre generalizados en dicho rango de valores.

En la siguiente tabla podemos comparar los resultados numéricos que se obtienen para las distintas expresiones de la función de distribución normal. Así tenemos para distintos valores de la cola superior de la distribución, el desarrollo (5.23) en polinomios de Hermite dado por Kerridge & Cook, el desarrollo dado por Moran (1980), en términos de funciones trigonométricas, i.e.

$$(5.24) \quad \Phi(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \left\{ \frac{x}{3\sqrt{2}} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \exp\left(\frac{-k^2}{9}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{kx\sqrt{2}}{3}\right) \right\}$$

y el desarrollo en polinomios de Hermite que obtenemos en (5.22), siendo  $j$  el número de términos considerado en los desarrollos.

	$x = 7, j = 20$	$x = 7.5, j = 20$	$x = 8, j = 20$	$x = 9, j = 20$	$x = 10, j = 25$
(5.23)	0.9999984994	1.000007988	1.000180255	0.9901996007	1.000064117
(5.24)	0.99999996	1.000000003	1.000000049	1.000007502	1.000436342
(5.22)	0.99999997	0.999999921	0.9999999487	0.9999999657	1

DISTRIBUCIÓN NORMAL

#### 5.4. Desarrollos de Hermite de una variable aleatoria

A lo largo de la historia se han obtenido diversos desarrollos de una función de densidad genérica, cobrando quizás más importancia por sus propiedades



asintóticas los desarrollos para funciones de densidad de la media muestral. Entre ellos podemos destacar el desarrollo de Edgeworth y el de Gram-Charlier que surgieron en un intento de refinar el Teorema Central del Límite.

En lo que sigue nos planteamos obtener un desarrollo de Hermite de la función de densidad de una variable aleatoria. Sea  $X$  una variable aleatoria,  $f$  su función de densidad, tal que existe su función generatriz de momentos,  $M_f$  y verifica que  $h(\mu) = e^{-\mu^2/2}M_f(\mu)$  es UMVU estimable.

TEOREMA 5.4.1. *En las condiciones anteriores, la función de densidad  $f$  de la variable aleatoria  $X$  admite el siguiente desarrollo formal en términos de los polinomios de Hermite:*

$$(5.25) \quad f(x) = \varphi(x) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{h^{(k)}(\mu)}{k!} H_{e_k}(x - \mu), \quad \forall \mu \in \mathbb{R},$$

con  $\varphi(x) = e^{-x^2/2}/\sqrt{2\pi}$  la función de densidad de una variable aleatoria normal estándar y

$$(5.26) \quad h^{(k)}(\mu) = \sqrt{2\pi} \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} \varphi^{(j)}(\mu) M_f^{k-j}(\mu).$$

DEMOSTRACIÓN. Consideramos  $T(x) = f(x)/\varphi(x)$ , fácilmente se puede comprobar que

$$\int_{-\infty}^{\infty} T(x)\varphi(x - \mu)dx = h(\mu), \quad \forall \mu \in \mathbb{R},$$

por tanto  $T(x)$  es el estimador UMVU de  $h(\mu)$  en la familia de distribuciones normal de media  $\mu$  y varianza 1. Y aplicando el Teorema 5.1.1,  $T(x)$  admite un desarrollo en términos de los polinomios ortogonales definidos en la Proposición 5.1.1 con  $\sigma = 1$ , i.e.

$$(5.27) \quad T(x) = \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{h^{(k)}(\mu)}{k!} H_{e_k}(x - \mu).$$

Así, a partir de (5.27) tenemos un desarrollo formal para la función de densidad  $f$ , (5.25), en términos de los polinomios de Hermite. La expresión (5.25)

quedará determinada cuando conozcamos las derivadas sucesivas de la función paramétrica  $h$  :

Como

$$h(\mu) = e^{-\mu^2/2} M_f(\mu) = \sqrt{2\pi} \varphi(\mu) M_f(\mu),$$

utilizando la fórmula de Leibnitz para obtener las derivadas sucesivas de un producto, se puede probar que una expresión para la derivada de orden  $k$  de  $h(\cdot)$  viene dada por (5.26) . Y se tiene lo que se quería. ■

Si particularizamos (5.25) para  $\mu = 0$ , obtenemos un desarrollo muy conocido:

COROLARIO 5.4.1. *En particular, se verifica:*

$$(5.28) \quad f(x) = \varphi(x) \left\{ 1 + \sum_{k \geq 1} \frac{c_k}{k!} H_{e_k}(x) \right\},$$

con

$$(5.29) \quad c_k = h^{(k)}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} H_{e_k}(x) f(x) dx.$$

DEMOSTRACIÓN. Basta sustituir  $\mu = 0$  en (5.25) para obtener (5.28). Para determinar las derivadas sucesivas de  $h$  en  $\mu = 0$  :

Como sabemos

$$M_f^{(k-j)}(0) = E(X^{k-j}),$$

además

$$\varphi^{(j)}(0) = (-1)^j H_{e_j}(0) \varphi(0).$$

Teniendo en cuenta el valor de los polinomios de Hermite en el cero

$$(5.30) \quad H_{e_k}(0) = \begin{cases} 0, & \text{si } k \text{ es impar} \\ \frac{(-1)^{k/2} k!}{2^{k/2} (k/2)!}, & \text{si } k \text{ es par,} \end{cases}$$

y que  $\varphi(0) = \sqrt{2\pi}$ , tenemos que

$$h^{(k)}(0) = \sum_{i=0}^{[k/2]} \binom{k}{2i} \frac{(-1)^i (2i)!}{2^{2i} i!} E(X^{k-2i}) = \int_{-\infty}^{\infty} H_{e_k}(x) f(x) dx,$$

justamente lo que queríamos demostrar. ■

Suponiendo que la variable aleatoria  $X$  tiene media cero y varianza uno, los primeros coeficientes en términos de los cumulantes,  $k_j$  de la variable  $X$  a aproximar, vienen dados por:

$$\begin{aligned} c_1 &= 0, \quad c_2 = 0, \quad c_3 = k_3, \quad c_4 = k_4, \\ c_5 &= k_5, \quad c_6 = k_6 + 10k_3^2, \\ c_7 &= k_7 + 35k_4k_3, \quad c_8 = k_8 + 56k_5k_3 + 35k_4^2. \end{aligned}$$

Sea  $X_1, X_2, \dots, X_n$ , una muestra aleatoria simple con media  $\theta$ , desviación típica  $\sigma$  y cumulantes  $k_j$ . Para aplicar el desarrollo anterior a la media muestral, tomamos como variable aleatoria a aproximar la media muestral estandarizada, i.e.  $X = (\sum_{i=1}^n X_i - n\theta) / (\sqrt{n}\sigma)$ . Si notamos por  $f_n$  la densidad de dicha variable, y consideramos los primeros términos del desarrollo (5.28), obtenemos:

$$(5.31) \quad f_n(x) = \varphi(x) \left\{ 1 + \frac{k_3}{\sigma^3 6\sqrt{n}} H_{e_3}(x) + \frac{k_4}{\sigma^4 24n} H_{e_4}(x) + \right. \\ \left. + \frac{k_5}{\sigma^5 120n^{3/2}} H_{e_5}(x) + \frac{1}{\sigma^6 720} \left[ \frac{k_6}{n^2} + \frac{10k_3^2}{n} \right] H_{e_6}(x) \right\}.$$

La expresión que nos proporciona el corolario 5.4.1 es conocido en la literatura como el desarrollo de Gram-Charlier tipo A, que reordenado convenientemente da lugar al desarrollo de Edgeworth, Cramer (1970). En el caso del desarrollo para la media muestral, (5.31), es conocido que reordenando los términos en orden creciente del tamaño muestral, se obtiene el desarrollo de Edgeworth correspondiente.

**5.4.1. Desarrollo de la función de distribución  $F$ .** En las condiciones anteriores y siendo  $F$  la función de distribución de la variable aleatoria  $X$ , integramos el desarrollo (5.25),

$$(5.32) \quad F(x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt = \int_{-\infty}^x \varphi(t)dt + \sum_{k \geq 1} \frac{h^{(k)}(0)}{k!} \int_{-\infty}^x \varphi(t)H_{e_k}(t - \mu)dt.$$

Ahora bien,

$$\int_{-\infty}^x \varphi(t)dt = \Phi(x),$$

con  $\Phi$  la función de distribución de una variable normal estándar. El siguiente resultado nos proporciona una expresión para las integrales que aparecen en el desarrollo en serie de (5.32).

LEMA 5.4.1. Si llamamos  $I_k(x, \mu) = \int_{-\infty}^x e^{-t\mu} \varphi^{(k)}(t - \mu)dt$ , se verifica

$$I_k(x, \mu) = e^{-\mu^2/2} \left\{ \mu^k \Phi(x) + \varphi(x) \sum_{i=0}^{k-1} (-1)^i \mu^{k-1-i} H_{e_i}(x - \mu) \right\}.$$

DEMOSTRACIÓN. Integrando por partes tenemos:

$$I_k(x, \mu) = e^{-t\mu} \varphi^{(k-1)}(t - \mu) \Big|_{-\infty}^x + \mu I_{k-1}(x, \mu).$$

Como

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} e^{-t\mu} \varphi^{(k-1)}(t - \mu) = 0,$$

aplicando el mismo proceso reiteradamente tenemos:

$$I_k(x, \mu) = \sum_{i=0}^{k-1} \mu^{k-1-i} e^{-x\mu} \varphi^{(i)}(x - \mu) + \mu^k I_0(x, \mu),$$

con  $I_0(x, \mu) = e^{-\mu^2/2} \Phi(x)$ . A partir de (5.15)

$$I_k(x, \mu) = e^{-\mu^2/2} \left\{ \mu^k \Phi(x) + \varphi(x) \sum_{i=0}^{k-1} (-1)^i \mu^{k-1-i} H_{e_i}(x - \mu) \right\}$$

se tiene lo que se quería demostrar. ■

De esta forma, a partir de (5.15) se verifica:

$$\int_{-\infty}^x \varphi(t) H_{e_k}(t - \mu) dt = (-1)^k e^{\mu^2/2} I_k(x, \mu),$$

y aplicando el Lema anterior, tenemos una expresión para la función de distribución  $F$  :

$$(5.33) \quad F(x) = \Phi(x) h(\mu) + \sum_{k \geq 1} \frac{h^{(k)}(\mu)}{k!} (-1)^k \left\{ \mu^k \Phi(x) + \right. \\ \left. + \varphi(x) \sum_{i=0}^{k-1} (-1)^i \mu^{k-1-i} H_{e_i}(x - \mu) \right\},$$

con

$$h^{(k)}(\mu) = \sqrt{2\pi} \varphi(\mu) \sum_{j=0}^k (-1)^j \binom{k}{j} H_{e_j}(\mu) \int_{-\infty}^{\infty} t^{k-j} e^{t\mu} f(t) dt.$$

Particularizando (5.33) para  $\mu = 0$  tenemos el desarrollo de Gram-Charlier tipo A para la función de distribución:

$$F(x) = \Phi(x) - \varphi(x) \sum_{k \geq 1} \frac{c_k}{k!} H_{e_{k-1}}(x),$$

con  $c_k$  dados en (5.29).

En el caso de  $\mu = x$ , tenemos

$$F(x) = \Phi(x) + \sum_{k \geq 1} \frac{h^{(k)}(x)}{k!} (-1)^k \left\{ x^k \Phi(x) + \varphi(x) \sum_{i=0}^{k-1} (-1)^i x^{k-1-i} H_{e_i}(0) \right\}$$

y por (5.30) se tiene

$$F(x) = \Phi(x) + \sum_{k \geq 1} \frac{h^{(k)}(x)}{k!} (-1)^k \left\{ x^k \Phi(x) + \varphi(x) \sum_{j=0}^{[(k-1)/2]} \frac{(-1)^j (2j)! x^{k-1-2j}}{2^j j!} \right\}$$

con

$$h^k(x) = \sqrt{2\pi}\varphi(x) \sum_{j=0}^k (-1)^j \binom{k}{j} H_{e_j}(x) \int_{-\infty}^{\infty} t^{k-j} e^{tx} f(t) dt.$$

## CAPÍTULO 6

### Desarrollos ortogonales aplicados a la bondad de ajuste

Un problema fundamental en Estadística es contrastar la hipótesis de que una función tenga una forma paramétrica particular. Este problema surge en la regresión, análisis espectral, y test de bondad de ajuste de una distribución de probabilidad.

En este capítulo relacionamos diversos desarrollos ortogonales con el campo de la bondad de ajuste. Fundamentalmente nos planteamos contrastar si la muestra bajo estudio procede de una determinada distribución perteneciente a la familia exponencial natural con función de varianza cuadrática, NEF-QVF.

En la familia exponencial natural con función de varianza cuadrática se ha desarrollado una teoría sobre la estimación insesgada de mínima varianza de una función analítica del parámetro en términos de polinomios ortogonales, ver Morris (1982,1983). Expresar los estimadores UMVU como desarrollos ortogonales tiene numerosas ventajas, entre ellas podemos destacar el cálculo de su varianza de forma inmediata, así como facilitar la obtención de propiedades asintóticas de los mismos.

Nosotros proponemos determinados estadísticos para contrastar si los datos proceden de una distribución conocida perteneciente a la NEF-QVF y determinamos su distribución asintótica bajo la hipótesis nula utilizando las propiedades de los desarrollos ortogonales.

Una de las clases de criterios más conocidos para contrastar la bondad de ajuste son aquellos que miden la discrepancia entre la función de distribución empírica (un estimador no paramétrico de la distribución) y la función de distribución teórica, son los estadísticos EDF. Tales discrepancias se miden: a través de distancias cuadráticas, resultando los estadísticos del tipo Cramér-von Mises, o bien a través de una distancia supremo resultando los

estadísticos del tipo Kolmogorov-Smirnov, ver D'Agostino & Stephens (1986). Estos estadísticos son de distribución libre si la distribución teórica es continua y está perfectamente determinada. Su contrapartida en el caso discreto es el estadístico chi-cuadrado de Pearson.

En una segunda parte de este capítulo consideramos estadísticos que son muy conocidos y estudiados, como son los de Cramér-von Mises generalizados tanto para la distribución gamma y la distribución normal estándar. En estos casos las distribuciones asintóticas han sido determinadas en la literatura por el procedimiento de descomponer el estadístico en componentes, utilizando la técnica de Kac & Siegert (1947), a través de la resolución de ecuaciones integrales y la teoría de las ecuaciones diferenciales, ver Pettitt (1978), o bien a partir de una aproximación basada en  $U$ -estadísticos, ver Gregory (1977). Nosotros proponemos el mismo resultado mediante un procedimiento que hace uso de los desarrollos ortogonales. Para la determinación de la distribución asintótica y más concretamente para la aplicación real de estos tests es fundamental el conocimiento de ciertas constantes, que nosotros explicitamos en términos de una relación de recurrencia.

Además, utilizando desarrollos ortogonales en la distribución beta, expresamos el estadístico asintótico de Cramér-von Mises clásico como una suma infinita ponderada de variables chi-cuadrado con un grado de libertad. Esta expresión fue obtenida entre otros por Durbin et al. (1972) expresando el estadístico asintótico como un funcional de un proceso gaussiano, ver Doob (1949) y aplicando la técnica de Kac & Siegert (1947) al proceso gaussiano. De forma análoga Anderson & Darling (1952) obtuvieron una expresión de la función de distribución asintótica del estadístico de Cramér-von Mises en términos de funciones de Bessel modificadas de segunda especie, invirtiendo la función característica.

Finalmente, estudiamos aproximaciones a las distribuciones de los estadísticos tipo Cramér-von Mises, donde incluiremos el estadístico clásico de Cramér-von Mises y una modificación del mismo que da lugar al estadístico



de Watson, mediante un procedimiento heurístico que computacionalmente proporciona buenos resultados.

### 6.1. Tests aplicados a la NEF-QVF

En esta sección proponemos estadísticos para contrastar si los datos proceden de una distribución determinada perteneciente a la familia NEF-QVF.

Fundamentalmente de forma análoga a los test EDF medimos las discrepancias, ya sea entre la función de densidad teórica o la función de distribución teórica y su correspondiente estimador insesgado de mínima varianza (UMVUE).

Morris (1982,1983) estudió la familia NEF-QVF, y proporcionó expresiones para los estimadores UMVU de funciones paramétricas (del valor medio) en términos de un sistema de polinomios ortogonales. Como casos particulares y para una muestra de tamaño uno se tienen los polinomios dados en (1.4) que son ortogonales respecto de la densidad gamma y los polinomios dados en (5.2), ortogonales respecto de la densidad normal.

**6.1.1. Resultados previos.** Consideremos una variable aleatoria  $X$  perteneciente a la familia NEF-QVF, tal que su valor medio y varianza vienen dados por:

$$E(X) = \mu, \quad V(\mu) = v_0 + v_1\mu + v_2\mu^2.$$

Supongamos que  $f_0(x, \mu)$  y  $F_0(x, \mu)$  son la función de densidad y función de distribución, respectivamente de la variable  $X$ , con  $\mu$  conocido. El siguiente resultado, nos proporciona un sistema de polinomios mónicos ortogonales, denso en el espacio de las funciones con momento de segundo orden finito.

PROPOSICIÓN 6.1.1. *Las derivadas sucesivas de la densidad  $f_0$  con respecto a la media verifican la siguiente relación:*

$$(6.1) \quad \frac{\partial^k}{\partial \mu^k} f_0(x, \mu) = \frac{f_0(x, \mu)}{V^k(\mu)} P_{k,1}(x, \mu),$$

con  $P_{k,1}(x, \mu)$  un polinomio mónico de grado  $k$  tanto en  $x$  como en  $\mu$ , que verifica la siguiente relación de recurrencia, en la cual se han omitido los

argumentos:

$$(6.2) \quad \begin{aligned} P_{k+1} &= (P_1 - kV')P_k - k\{1 + (k-1)v_2\}VP_{k-1}, \quad k \geq 1, \\ P_0 &= 1; \quad P_1 = x - \mu. \end{aligned}$$

Estos polinomios verifican una propiedad importante, la de ser ortogonales con respecto de la densidad  $f_0(x, \mu)$ . Y la relación de ortogonalidad que verifican viene dada por:

$$(6.3) \quad \int_{-\infty}^{\infty} P_k(x, \mu) P_j(x, \mu) f_0(x, \mu) \nu(dx) = \delta_{k,j} a_k V^k(\mu),$$

donde  $\nu$  es la medida de Lebesgue o la medida cardinal,  $\delta_{k,j}$  es la delta de Kronecker y  $a_k = k! \prod_{j=1}^{k-1} (1 + jv_2)$ .

Análogamente, si  $f_n(s, \mu)$  es la densidad del estadístico suficiente y completo  $\bar{X}_n = \sum_{i=1}^n X_i/n$ , para la familia NEF-QVF, podemos definir  $P_{k,n}(s, \mu)$  verificando la misma relación de recurrencia, (6.2), donde la función de varianza  $V$  se sustituye por  $V/n$  y  $v_2$  por  $v_2/n$ . Estos polinomios son ortogonales respecto de la densidad  $f_n(s, \mu)$  y verifican una relación de ortogonalidad análoga a (6.3) con los cambios citados anteriormente.

En la teoría de la estimación de la familia NEF-QVF tenemos que  $f_0(x, \mu)$  y  $F_0(x, \mu)$  son funciones UMVU estimables, y sus estimadores UMVU,  $\hat{f}_0$  y  $\hat{F}_0$  admiten las siguientes expresiones respectivamente, en términos de los polinomios ortogonales:

$$(6.4) \quad \hat{f}_0(x, \mu, s) = f_0(x, \mu) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{P_{k,1}(x, \mu)}{V^k(\mu) a_{k,n}} P_{k,n}(\bar{X}_n, \mu),$$

y

$$(6.5) \quad \hat{F}_n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{F_0^{(k)}(x, \mu)}{a_{k,n}} P_{k,n}(\bar{X}_n, \mu),$$

$$\text{con } F_0^{(k)}(x, \mu) = \frac{\partial^k F_0}{\partial \mu^k}(x, \mu) \text{ y } a_{k,n} = k! \prod_{j=0}^{k-1} (1 + jv_2/n).$$

Los resultados que se dan a continuación nos serán útiles en el desarrollo de los ajustes que proponemos.

LEMA 6.1.1. *La serie*

$$(6.6) \quad \sum_{k=2}^{\infty} \frac{a_{k,1}}{n_0^k a_{k,n_0}}$$

donde  $a_{k,n} = k! \prod_{j=1}^{k-1} (1 + jv_2/n)$ , es absolutamente convergente para  $n_0 > v_2 + 1$  y  $v_2 \geq 0$ .

DEMOSTRACIÓN. Sea  $b_k = \frac{a_{k,1}}{n_0^k a_{k,n_0}}$ , como  $b_k \geq 0$ , aplicando el criterio del cociente, se tiene

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{b_{k+1}}{b_k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1 + v_2 k}{n_0 + v_2 k}.$$

Para calcular dicho límite, distinguimos dos casos:

- Si  $v_2 = 0$ ,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{b_{k+1}}{b_k} = \frac{1}{n_0} < 1$$

por tanto la serie (6.6) es convergente.

- Si  $v_2 > 0$ ,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{b_{k+1}}{b_k} = 1$$

y aplicando el criterio de Raabe

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} k \left( 1 - \frac{b_{k+1}}{b_k} \right) &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{(n_0 - 1)k}{n_0 + v_2 k} \\ &= \frac{n_0 - 1}{v_2} > 1, \end{aligned}$$

la convergencia de (6.6) es inmediata.

■

NOTA 1. Hemos excluido el caso  $v_2 < 0$ , correspondiente a la distribución Binomial, lo cual no supone ninguna restricción ya que para esta distribución las series son convergentes al estar formadas por un número finito de términos.

LEMA 6.1.2. *Con la notación anterior, se verifica*

$$(6.7) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} n \sum_{k=2}^{\infty} \frac{a_{k,1}}{n^k a_{k,n}} = 0.$$

DEMOSTRACIÓN. Para cada  $n \geq n_0$ , como la sucesión  $\left\{ \frac{n_0^k a_{k,n_0}}{n^k a_{k,n}} \right\}_{k \geq 1}$  es decreciente, fácilmente se verifica

$$(6.8) \quad n \sum_{k=2}^{\infty} \frac{a_{k,1}}{n^k a_{k,n}} \leq \frac{n_0^2 a_{2,n_0}}{n a_{2,n}} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{a_{k,1}}{n_0^k a_{k,n_0}}.$$

A partir del Lema 6.1.1, la serie del segundo miembro de (6.8) es absolutamente convergente. Por tanto, tomando límite en la desigualdad (6.8) y teniendo en cuenta que  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{2,n} = 2$ , se tiene lo que se quería, (6.7). ■

LEMA 6.1.3. *Sea  $n_0 \in \mathbb{N}$  fijado, para todo  $n \geq n_0$  y  $v_2 \geq 0$ , se verifica que*

$$(6.9) \quad \sum_{k \geq 2} \frac{n P_{k,n}^2(\bar{X}_n, \mu) a_{k,1}}{V^k(\mu) a_{k,n}^2} \xrightarrow{P} 0, n \rightarrow \infty.$$

DEMOSTRACIÓN. Bastaría probar la convergencia en media de orden 1 de la serie anterior (de términos positivos), i.e.

$$(6.10) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} E \left[ \sum_{k \geq 2} \frac{n P_{k,n}^2(\bar{X}_n, \mu) a_{k,1}}{V^k(\mu) a_{k,n}^2} \right] = 0.$$

Utilizando la propiedad de ortogonalidad de los polinomios  $P_{k,n}$  y teniendo en cuenta que según (6.3)

$$E(P_{k,n}^2) = a_{k,n} \frac{V^k(\mu)}{n^k},$$

tenemos que para todo  $n \geq n_0$ ,

$$(6.11) \quad E \left[ \sum_{k \geq 2} \frac{n P_{k,n}^2(\bar{X}_n, \mu) a_{k,1}}{V^k(\mu) a_{k,n}^2} \right] = n \sum_{k \geq 2} \frac{a_{k,1}}{n^k a_{k,n}}.$$

Por tanto, tomando límite cuando  $n \rightarrow \infty$  en (6.11) y como consecuencia del Lema 6.1.2 se verifica (6.10). ■

Nos planteamos el siguiente problema:

Dada  $X_1, X_2, \dots, X_n$ , una muestra aleatoria simple con función de distribución  $F$ , contrastar la hipótesis

$$H_0 : F(x) = F_0(x, \mu), \quad \mu \text{ conocida } (f = f_0(x, \mu)).$$

Estamos en el caso de hipótesis simple y deseamos saber si la población procede de una distribución perteneciente a la familia exponencial natural uniparamétrica con función de varianza cuadrática.

**6.1.2. Estadístico cuadrático.** El estadístico que proponemos mide la discrepancia entre la función de densidad, si es continua o la función de probabilidad si es discreta y el estimador UMVU de la misma, mediante una distancia cuadrática:

$$(6.12) \quad T_n = n \int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{\hat{f}_0}{f_0} - 1 \right)^2 f_0(x, \mu) \nu(dx),$$

donde  $\nu$  es la medida de Lebesgue o la medida cardinal para el caso discreto.

Como sabemos bajo  $H_0$ ,  $T_n$  debe ser pequeño, por tanto se rechaza la hipótesis nula si  $T_n > c$ . El valor de  $c$  vendrá determinado por el nivel de significación  $\alpha$  y por supuesto siempre que conozcamos la distribución de  $T_n$ . Nosotros determinaremos la distribución asintótica de  $T_n$ .

6.1.2.1. *Distribución asintótica de  $T_n$  bajo  $H_0$ .* Como ocurre en la mayoría de los tests, ante la dificultad que entraña determinar la distribución exacta del estadístico propuesto, determinaremos la distribución asintótica de  $T_n$ . Para ello, aplicaremos la teoría de procesos empíricos y el Teorema Central del Límite en espacios de Hilbert.

En primer lugar consideraremos algunos resultados que nos serán útiles.

Sea el espacio de Hilbert,  $\mathbb{L}_\mu^2$ , formado por los procesos estocásticos de parámetro continuo  $G_x$  con parámetro  $x \in \text{dom}(f(\cdot; \mu))$ , que verifican:

$$\mathbb{L}_\mu^2 = \left\{ G_x, \int E(G_x^2) f_0(x, \mu) \nu(dx) < \infty \right\}.$$

LEMA 6.1.4. *Se verifica*

$$(6.13) \quad \sqrt{n}R_{2,n}(x, \mu) \xrightarrow{P} 0, \quad n \rightarrow \infty,$$

en el espacio  $\mathbb{L}_\mu^2$ , con  $R_{2,n}(x, \mu) = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{P_{k,1}(x, \mu)}{V^k(\mu)a_{k,n}} P_{k,n}(\bar{X}_n, \mu)$ .

DEMOSTRACIÓN. Bastará probar que se tiene la convergencia en media cuadrática de (6.13), en el espacio  $\mathbb{L}_\mu^2$ .

En primer lugar, veamos que  $\sqrt{n}R_{2,n}(x, \mu)$  son funciones estocásticas que pertenecen al espacio  $\mathbb{L}_\mu^2$ :

Por la relación de ortogonalidad análoga a (6.3) de los polinomios  $P_{k,n}(\cdot, \mu)$ :

$$E \left[ (\sqrt{n}R_{2,n}(x, \mu))^2 \right] = n \sum_{k=2}^{\infty} \frac{P_{k,1}^2(x; \mu)}{n^k a_{k,n} V^k(\mu)},$$

y a partir de la relación de ortogonalidad (6.3) y el Lema 6.1.1 se tiene

$$\int E \left[ (\sqrt{n}R_{2,n}(x, \mu))^2 \right] f_0(x, \mu) \nu(dx) = n \sum_{k=2}^{\infty} \frac{a_{k,1}}{n^k a_{k,n}} < \infty.$$

Estudiar la convergencia en media cuadrática a cero de las funciones  $\sqrt{n}R_{2,n}(x, \mu)$  en el espacio  $\mathbb{L}_\mu^2$ , es equivalente a probar que

$$(6.14) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} n \sum_{k=2}^{\infty} \frac{a_{k,1}}{n^k a_{k,n}} = 0.$$

Por tanto a partir del Lema 6.1.2 se tiene (6.14) y como consecuencia (6.13). ■

TEOREMA 6.1.1. *La distribución asintótica del estadístico  $T_n$ , bajo  $H_0$ , viene dada por la distribución del funcional*

$$(6.15) \quad \int_{-\infty}^{\infty} W^2(x) f_0(x, \mu) \nu(dx),$$

donde  $W(x)$  es un proceso gaussiano con función media cero y función de covarianza

$$\frac{(s - \mu)(t - \mu)}{V(\mu)}.$$

Además podemos afirmar que la distribución límite de (6.15), sigue una distribución  $\chi_1^2$ .

DEMOSTRACIÓN. Sea

$$w_n = \left( \frac{\hat{f}_0}{f_0} - 1 \right).$$

A partir de (6.4), fácilmente

$$\begin{aligned} \sqrt{n}w_n &= \sqrt{n} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{P_{k,1}(x, \mu)}{V^k(\mu)a_{k,n}} P_{k,n}(\bar{X}_n, \mu) \\ (6.16) \quad &= \frac{(x - \mu)}{V(\mu)} \sum_{i=1}^n \frac{X_i - \mu}{\sqrt{n}} + \sqrt{n}R_{2,n}(x, \mu), \end{aligned}$$

con

$$R_{2,n}(x, \mu) = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{P_{k,1}(x, \mu)}{V^k(\mu)a_{k,n}} P_{k,n}(\bar{X}_n, \mu).$$

Para obtener (6.16) basta tener en cuenta la definición del polinomio ortogonal de grado uno, dado en (6.2).

A continuación consideramos el siguiente proceso estocástico:  $Y_1(x), Y_2(x) \dots$  de parámetro  $x \in \text{dom}(f(\cdot; \mu))$ , con

$$Y_i(x) = \frac{x - \mu}{V(\mu)} (X_i - \mu).$$

Fácilmente se tiene  $Y_i(x) \in \mathbb{L}_{\mu}^2$ , ya que

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} E[Y_i^2(x)] f_0(x, \mu) \nu(dx) &= \frac{1}{V(\mu)} \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 f_0(x, \mu) \nu(dx) \\ &= 1 < \infty. \end{aligned}$$

Además para cada  $x \in \text{dom}(f(\cdot; \mu))$ ,  $Y_i(x)$  son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con  $E[Y_i(x)] = 0$  y con función de covarianza dada por

$$(6.17) \quad \text{cov}(Y_1(s), Y_1(t)) = \frac{(s - \mu)(t - \mu)}{V(\mu)}.$$

Por tanto aplicando el Teorema Central del Límite en espacios de Hilbert, ver Kuelbs et al. (1974), se tiene

$$(6.18) \quad \sum_{i=1}^n \frac{Y_i(x)}{\sqrt{n}} \xrightarrow{\mathcal{L}} W(x), \quad n \rightarrow \infty,$$

con  $W(x)$  un proceso gaussiano con función media cero y con la misma función de covarianza que  $Y_1(x)$  dada en (6.17).

Por otro lado, a partir del Lema 6.1.4 se verifica que

$$(6.19) \quad \sqrt{n}R_{2,n}(x, \mu) \xrightarrow{P} 0, \quad n \rightarrow \infty,$$

en  $\mathbb{L}_\mu^2$ . De esta forma aplicando el lema de Slutski a (6.16) con los resultados (6.18) y (6.19) se tiene que

$$\sqrt{nw_n} \xrightarrow{\mathcal{L}} W(x), \quad n \rightarrow \infty,$$

en el espacio  $\mathbb{L}_\mu^2$ .

Como consecuencia, la distribución asintótica de cualquier funcional continuo en  $\mathbb{L}_\mu^2$ , del estadístico  $\sqrt{nw_n}$  tiene la misma distribución que dicho funcional aplicado a  $W(x)$ , ver Billingsley (1968) y por tanto se verifica lo que se quería demostrar, (6.15).

Faltaría probar que efectivamente dicha distribución límite sigue una distribución  $\chi_1^2$ :

Por la propiedad de ortogonalidad (6.3) de los polinomios  $\{P_{k,1}(x, \mu)\}_{k \geq 1}$  el estadístico (6.12) se puede expresar como

$$T_n = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{nP_{k,n}^2(\bar{X}_n, \mu)a_{k,1}}{V^k(\mu)a_{k,n}^2} = \frac{n(\bar{X}_n - \mu)^2}{V(\mu)} + \sum_{k \geq 2} \frac{nP_{k,n}^2(\bar{X}_n, \mu)a_{k,1}}{V^k(\mu)a_{k,n}^2}.$$



Obviamente por el Teorema Central del Límite y las propiedades de la convergencia en ley se verifica que:

$$\frac{n(\bar{X}_n - \mu)^2}{V(\mu)} \xrightarrow{\mathcal{L}} \chi_1^2, \quad n \rightarrow \infty.$$

Además por el Lema 6.1.3

$$\sum_{k \geq 2} \frac{n P_{k,n}^2(\bar{X}_n, \mu) a_{k,1}}{V^k(\mu) a_{k,n}^2} \xrightarrow{P} 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

Por tanto aplicando el lema de Slutski se tiene que efectivamente la distribución asintótica de  $T_n$  es una  $\chi_1^2$ . ■

**6.1.3. Estadístico supremo.** En este apartado consideramos un estadístico que mida la discrepancia entre la función de distribución teórica y su estimador UMVU mediante la distancia supremo. Este estadístico, como veremos es análogo al estadístico de Kolmogorov-Smirnov, el cual considera un estimador no paramétrico de la función de distribución.

Nos planteamos el siguiente contraste unilateral, bajo hipótesis simple, con la notación anterior

$$\begin{cases} H_0 : F \leq F_0 \\ H_1 : F > F_0. \end{cases}$$

El estadístico que proponemos es:

$$S_n = \sup_x \sqrt{n} \left( \hat{F}_n - F_0(x, \mu) \right)$$

donde  $\hat{F}_n$  es el estimador UMVU de  $F_0$  (bajo  $H_0$ ), descrito en la expresión (6.5).

Está claro que rechazaremos  $H_0$  si  $S_n > c$ , donde  $c$  lo determinaremos exigiendo un nivel de significación  $\alpha$ , y para ello será necesario conocer la distribución del estadístico (bajo  $H_0$ ) una tarea que no es fácil, en cambio sí podremos determinar la distribución asintótica de  $S_n$ .

6.1.3.1. *Distribución asintótica de  $S_n$  bajo  $H_0$ .* Previamente proporcionamos algunos resultados, que nos serán útiles para la determinación de la misma:

LEMA 6.1.5. *Para cada  $k \geq 1$  y para cada  $x$ , se verifica:*

$$(6.20) \quad \left( F_0^{(k)}(x, \mu) \right)^2 \leq \frac{a_{k,1}}{V^k(\mu)}.$$

DEMOSTRACIÓN. Por definición,

$$F_0^{(k)}(x, \mu) = \frac{\partial^k}{\partial \mu^k} \int_{-\infty}^x f_0(t, \mu) \nu(dt) = \int_{-\infty}^x \frac{\partial^k}{\partial \mu^k} f_0(t, \mu) \nu(dt),$$

esta última igualdad se tiene al verificarse las condiciones usuales de regularidad.

Teniendo en cuenta que a partir de (6.1)

$$P_{k,1}(t, \mu) = \frac{V^k(\mu) \frac{\partial^k}{\partial \mu^k} f_0(t, \mu)}{f_0(t, \mu)},$$

tenemos que

$$F_0^{(k)}(x, \mu) = \frac{1}{V^k(\mu)} \int_{-\infty}^x P_{k,1}(t, \mu) f_0(t, \mu) \nu(dt).$$

Y se deduce que

$$\left| F_0^{(k)}(x, \mu) \right| \leq \frac{1}{V^k(\mu)} \int_{-\infty}^{\infty} |P_{k,1}(t, \mu)| f_0(t, \mu) \nu(dt),$$

por tanto, aplicando la desigualdad de Jensen, se tiene

$$\left( F_0^{(k)}(x, \mu) \right)^2 \leq \frac{1}{V^{2k}(\mu)} \int_{-\infty}^{\infty} P_{k,1}^2(t, \mu) f_0(t, \mu) \nu(dt) = \frac{a_{k,1}}{V^k(\mu)},$$

justamente lo que se quería, donde la última igualdad se deduce de (6.3). ■

PROPOSICIÓN 6.1.2. *Sea  $n_0 \in \mathbb{N}$  fijado y*

$$(6.21) \quad R_{2,n}(x, \bar{X}_n, \mu) = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{F^{(k)}(x, \mu)}{a_{k,n}} P_{k,n}(\bar{X}_n, \mu),$$

entonces para  $n \geq n_0$  se verifica:

$$(6.22) \quad \sqrt{n}R_{2,n}(x, \bar{X}_n, \mu) \xrightarrow{P} 0, \quad n \rightarrow \infty,$$

uniformemente en  $x$ .

DEMOSTRACIÓN. Como la convergencia en media cuadrática implica la convergencia en probabilidad, basta probar que

$$(6.23) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \text{Var} [\sqrt{n}R_{2,n}(x, \bar{X}_n, \mu)] = 0, \quad \forall x.$$

Para ello, utilizando la propiedad de ortogonalidad de los polinomios  $P_{k,n}(\cdot, \mu)$  con respecto a la densidad del estadístico suficiente y completo, se verifica que:

$$(6.24) \quad \begin{aligned} \text{Var} [\sqrt{n}R_{2,n}(x, \bar{X}_n, \mu)] &= n \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(F^{(k)}(x, \mu))^2 V^k(\mu)}{n^k a_{k,n}} \leq \\ &\leq n \sum_{k=2}^{\infty} \frac{a_{k,1}}{n^k a_{k,n}}, \end{aligned}$$

donde la desigualdad (6.24) se obtiene aplicando el Lema 6.1.5. Basta tomar límite en (6.24) y considerar el Lema 6.1.2 para obtener (6.23) que implica (6.22) uniformemente en  $x$ . ■

LEMA 6.1.6. Sea  $F'(x, \mu) = \frac{\partial}{\partial \mu} F(x, \mu)$ , entonces

$$\sup_x F'(x, \mu) = -\frac{1}{2V(\mu)} E|X - \mu|.$$

DEMOSTRACIÓN. Por la definición de función de distribución y de los polinomios ortogonales respecto de la densidad  $f_0(x, \mu)$ , ver (6.1), se tiene

$$(6.25) \quad \begin{aligned} F'(x, \mu) &= \int_{-\infty}^x \frac{\partial}{\partial \mu} f(t, \mu) dt = \int_{-\infty}^x \frac{P_{k,1}(t, \mu)}{f(t, \mu)} f(t, \mu) dt \\ &= \frac{1}{V(\mu)} \int_{-\infty}^x (t - \mu) f(t, \mu) dt. \end{aligned}$$

A partir de la expresión (6.25) fácilmente se tiene:

$$\sup_x F'(x, \mu) = \frac{1}{V(\mu)} \int_{-\infty}^{\mu} (t - \mu) f(t, \mu) dt = -\frac{1}{2V(\mu)} E|X - \mu|,$$

que es lo que se quería probar. ■

En el siguiente Teorema determinamos la distribución asintótica del estadístico  $S_n$  bajo  $H_0$ .

TEOREMA 6.1.2. *Bajo  $H_0$ , se verifica:*

$$(6.26) \quad S_n \xrightarrow{\mathcal{L}} -\frac{Z \cdot E|X - \mu|}{2V^{1/2}(\mu)}, \quad n \rightarrow \infty.$$

con  $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$ .

DEMOSTRACIÓN. A partir de la expresión (6.5) del estimador UMVU,  $\hat{F}_n$ , de la función de distribución en términos de los polinomios ortogonales, se tiene que bajo  $H_0$ :

$$(6.27) \quad \begin{aligned} \sqrt{n}(\hat{F}_n - F_0) &= \sqrt{n} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{F_0^{(k)}(x, \mu)}{a_{k,n}} P_{k,n}(\bar{X}_n, \mu) \\ &= V^{1/2}(\mu) Z_n F_0'(x, \mu) + \sqrt{n} R_{2,n}(x, \bar{X}_n, \mu) \end{aligned}$$

con  $R_{2,n}(x, \bar{X}_n, \mu)$  dado en (6.21) y

$$Z_n = \sqrt{n} \frac{\bar{X}_n - \mu}{V^{1/2}(\mu)}.$$

Por el Teorema Central del Límite se verifica que

$$Z_n \xrightarrow{\mathcal{L}} Z, \quad n \rightarrow \infty, \quad \text{con } Z \sim \mathcal{N}(0, 1).$$

Por tanto, por las propiedades de la convergencia débil,

$$(6.28) \quad V^{1/2}(\mu) F_0'(x, \mu) Z_n \xrightarrow{\mathcal{L}} V^{1/2}(\mu) F_0'(x, \mu) Z, \quad n \rightarrow \infty.$$

Además a partir de la Proposición 6.1.2 se verifica

$$\sqrt{n} R_{2,n}(x, \bar{X}_n, \mu) \xrightarrow{P} 0, \quad n \rightarrow \infty,$$

uniformemente en  $x$ .

Así aplicando el Lema de Slutski a (6.27) e intercambiando el límite con el supremo ya que la convergencia es uniforme, se tiene

$$(6.29) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} T_n \stackrel{d}{=} \sup_x V^{1/2}(\mu) F'_0(x, \mu) Z \stackrel{d}{=} V^{1/2}(\mu) Z \sup_x F'_0(x, \mu).$$

Basta considerar el Lema 6.1.6 para obtener lo que se quería, (6.26). ■

## 6.2. Aplicación de los desarrollos ortogonales a estadísticos Cramér-von Mises generalizados

La familia de estadísticos de Cramér-von Mises ha sido ampliamente estudiada en la literatura. Suponen una clase importante de estadísticos para contrastar la bondad de ajuste, dentro de los test EDF, que engloban entre otros el estadístico clásico de Cramér-von Mises, el estadístico de Anderson-Darling y el estadístico de Watson como una modificación del Cramér-von Mises clásico.

Estos estadísticos verifican que son libres de distribución, cuando la función de distribución es continua y está perfectamente determinada. Ante la dificultad que supone obtener sus distribuciones exactas, se determinan las distribuciones asintóticas mediante la teoría de procesos estocásticos y descomposición de los mismos mediante la técnica de Kac & Siegert (1947).

En esta sección nos ocupamos de representar los estadísticos de Cramér-von Mises generalizados para dos distribuciones particulares como son la distribución gamma y normal. Este tipo de estadísticos han sido estudiados en la literatura, Gregory (1977), Pettitt (1978), proporcionando su distribución asintótica, y podríamos decir de una forma incompleta para poder aplicarse realmente, ante la necesidad del conocimiento explícito de ciertas constantes. Nosotros obtenemos la misma representación del estadístico asintótico por un procedimiento distinto y proporcionamos de forma recurrente una expresión explícita de dichas constantes.

De forma análoga obtenemos una expresión para el estadístico asintótico de Cramér-von Mises como una suma ponderada infinita de variables chi-cuadrado con un grado de libertad.

**6.2.1. Estadísticos Cramér-von Mises generalizados para la distribución Gamma y Normal.** Dada una muestra aleatoria simple  $X_1, X_2, \dots, X_n$  con función de distribución  $F$ , nos planteamos contrastar la hipótesis  $H_0 : F = F_0$ , con  $F_0$  una distribución perfectamente determinada (hipótesis simple) que nosotros consideraremos: como la distribución gamma de parámetros  $\alpha$  y  $1/\theta$ , ambos conocidos y por otro lado como la distribución normal estándar.

El estadístico que emplearemos es el de Cramér-von Mises generalizado, definido de la siguiente forma:

$$(6.30) \quad W_n^2(\Psi) = n \int_{-\infty}^{\infty} (F_n(x) - F_0(x))^2 \Psi(F_0(x)) dF_0(x),$$

con  $F_n(x)$  la función de distribución empírica, dada por

$$(6.31) \quad F_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n I_{(-\infty, x]}(X_i),$$

y  $\Psi$  alguna función peso positiva.

Estudiamos en primer lugar el estadístico (6.30) para la distribución gamma de parámetros  $\alpha, 1/\theta$ :

- Si  $F_0(x) = G_\alpha\left(\frac{x}{\theta}\right)$  con  $G_\alpha(\cdot)$  la función de distribución gamma de parámetro de forma  $\alpha$  y parámetro de escala 1, con función de densidad

$$g_\alpha(x) = \frac{x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} e^{-x}, x > 0.$$

La función peso que consideramos fue sugerida por De Wet & Venter (1973), i.e.

$$\Psi(t) = \left[ F_0^{-1}(t) (g_\alpha(F_0^{-1}(t)))^2 \right]^{-1}.$$

La distribución asintótica de (6.30) ha sido estudiada por diversos autores, De Wet & Venter (1973), Pettitt (1978) siguiendo el procedimiento

clásico de descomposición del estadístico en componentes principales, ver Durbin et al. (1971), y de forma análoga a Karc & Siegert (1947).

Nosotros obtenemos el mismo resultado expresando el integrando de (6.30) en términos de los polinomios ortogonales clásicos con respecto a la densidad de la variable gamma de parámetros  $\alpha, 1/\theta$  que notamos por  $g_\alpha(x, 1/\theta) = 1/\theta g_\alpha(x/\theta)$ . Los polinomios a los que nos referimos son los polinomios de Laguerre generalizados, algunas de las propiedades que utilizaremos son recogidas en el siguiente resultado.

PROPOSICIÓN 6.2.1. *Sea  $L_k^{(\alpha)}$  el polinomio de Laguerre generalizado de orden  $\alpha$  y de grado  $k$ , cuya expresión y relación de recurrencia vienen dadas en el capítulo 1 (ver Proposición 1.2.1). Entonces:*

1. *Verifican la siguiente relación de ortogonalidad:*

$$(6.32) \quad \int_0^\infty L_k^{(\alpha)}(x) L_j^{(\alpha)}(x) x^\alpha e^{-x} dx = \delta_{k,j} \frac{\Gamma(k + \alpha + 1)}{k!},$$

con  $\delta_{k,j}$  la delta de Kronecker.

2. *La fórmula de Rodrigues de los polinomios de Laguerre viene dada por*

$$(6.33) \quad L_k^{(\alpha)}(x) = \frac{x^{-\alpha} e^x}{k!} \frac{d^k}{dx^k} (x^{k+\alpha} e^{-x}).$$

3. *La derivada primera de los polinomios de Laguerre verifican la siguiente relación:*

$$(6.34) \quad \frac{d}{dx} L_k^{(\alpha)}(x) = -L_{k-1}^{(\alpha+1)}(x).$$

*Las propiedades anteriores se pueden ver en Chihara (1978).*

El siguiente resultado nos proporciona una expresión para el estadístico (6.30) introducido anteriormente.

TEOREMA 6.2.1. *El estadístico  $W_n^2(\Psi)$  dado en (6.30) admite la siguiente expresión, bajo  $H_0$ :*

$$(6.35) \quad W_n^2(\Psi) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{Z_{n,j}^2}{j},$$

con

$$(6.36) \quad Z_{n,j} = \left( \frac{j! \Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha + j)} \right)^{1/2} \sum_{i=1}^n \frac{L_j^{(\alpha-1)}(X_i/\theta)}{\sqrt{n}}.$$

DEMOSTRACIÓN. Sea

$$(6.37) \quad y_n(x) = \sqrt{n}(F_n(x) - F_0(x)),$$

que queremos expresar en términos de los polinomios de Laguerre. Para ello desarrollamos bajo  $H_0$ , la función indicador  $I_{(0,x]}(X_i)$  con  $X_i$  una variable con distribución  $F_0(\cdot)$ . Como se trata de una función acotada admite un desarrollo de Fourier:

$$(6.38) \quad I_{(0,x/\theta]}(s) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x) L_k^{(\alpha-1)}\left(\frac{s}{\theta}\right).$$

Los coeficientes de Fourier vienen dados por

$$(6.39) \quad a_k(x) = \frac{\int_0^{x/\theta} L_k^{(\alpha-1)}\left(\frac{s}{\theta}\right) g_\alpha(s, 1/\theta) ds}{\left\| L_k^{(\alpha-1)}\left(\frac{s}{\theta}\right) \right\|_2^2}, \quad k \geq 1,$$

$$a_0(x) = F_0(x),$$

con

$$(6.40) \quad \left\| L_k^{(\alpha-1)}\left(\frac{s}{\theta}\right) \right\|_2^2 = \int_0^{\infty} \left( L_k^{(\alpha-1)}\left(\frac{s}{\theta}\right) \right)^2 g_\alpha(s, 1/\theta) ds$$

$$= \frac{\Gamma(\alpha + k)}{\Gamma(\alpha) k!},$$

para ello basta tener en cuenta la relación (6.32) para  $k = j$  y  $\alpha = \alpha - 1$  y la expresión de la densidad  $g_\alpha(s, 1/\theta)$  de una gamma de parámetros  $\alpha, 1/\theta$ .



Para determinar el numerador de (6.39), aplicamos dos veces la fórmula de Rodrigues (6.33), una para integrar y la segunda vez para expresar el resultado de forma conveniente, resultando:

$$(6.41) \quad \int_0^{x/\theta} L_k^{(\alpha-1)}\left(\frac{s}{\theta}\right) g_\alpha(s, 1/\theta) ds = \frac{(k-1)!}{\Gamma(k+\alpha)} x^\alpha e^{-x} L_{k-1}^{(\alpha)}(x), k \geq 1.$$

Por tanto, a partir de (6.41) y (6.40):

$$(6.42) \quad a_k(x) = \frac{(k-1)!}{\Gamma(k+\alpha)} x^\alpha e^{-x} L_{k-1}^{(\alpha)}(x), k \geq 1.$$

Y sustituyendo (6.42) en (6.38) tenemos una expresión de la función indicador en términos de los polinomios de Laguerre:

$$(6.43) \quad I_{(0,x/\theta]}(s) = F_0(x) + x^\alpha e^{-x} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k-1)!}{\Gamma(k+\alpha)} L_{k-1}^{(\alpha)}(x) L_k^{(\alpha-1)}\left(\frac{s}{\theta}\right).$$

De esta forma, a partir de la expresión (6.31) de la función de distribución empírica y de (6.43),

$$F_n(x) = F_0(x) + x^\alpha e^{-x} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k-1)!}{\Gamma(k+\alpha)} L_{k-1}^{(\alpha)}(x) \sum_{i=1}^n \frac{L_k^{(\alpha-1)}(X_i/\theta)}{n}.$$

Y consecuentemente tenemos una expresión para  $y_n(x)$ , definido por (6.37), en términos de los polinomios de Laguerre generalizados:

$$y_n(x) = x^\alpha e^{-x} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k-1)!}{\Gamma(k+\alpha)} L_{k-1}^{(\alpha)}(x) \sum_{i=1}^n \frac{L_k^{(\alpha-1)}(X_i/\theta)}{\sqrt{n}}.$$

Obviamente,

$$\begin{aligned} W_n^2(\Psi) &= n \int_{-\infty}^{\infty} (y_n(x))^2 \Psi(F_0(x)) dF_0(x) \\ &= \int_0^{\infty} \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\Gamma(\alpha)(k-1)!}{\Gamma(k+\alpha)} L_{k-1}^{(\alpha)}(x) \sum_{i=1}^n \frac{L_k^{(\alpha-1)}(X_i/\theta)}{\sqrt{n}} \right\}^2 \frac{x^\alpha e^{-x}}{\Gamma(\alpha)} dx. \end{aligned}$$

Ahora bien, teniendo en cuenta que  $\{L_{k-1}^{(\alpha)}(x)\}_{k \geq 1}$  son ortogonales respecto de la función peso:  $x^\alpha e^{-x}$  y la relación de ortogonalidad dada en

(6.32), se verifica (6.35) justamente lo que se quería demostrar, con  $Z_{n,k}$  dados en (6.36). ■

Las variables aleatorias  $Z_{n,k}$  verifican una serie de propiedades como consecuencia de la ortogonalidad de los polinomios de Laguerre:

- $E(Z_{n,k}) = 0$ ,  $\text{var}(Z_{n,k}) = 1$ .
- Son variables aleatorias incorreladas.
- Son asintóticamente normales. Como consecuencia del Teorema Central del Límite se tiene

$$(6.44) \quad Z_{n,k} \xrightarrow{\mathcal{L}} Z_k, n \rightarrow \infty,$$

con  $Z_k$  variables aleatoria independientes e idénticamente distribuidas según  $N(0,1)$ .

Si consideramos el límite de  $W_n^2(\Psi)$  dado en la forma (6.35), cuando  $n \rightarrow \infty$ , teniendo en cuenta (6.44), observamos que es infinito. Por tanto como sugirió Pettitt (1978) es necesario que el estadístico sea recentrado para obtener una distribución límite.

Usando los resultados de Gregory (1977), Pettitt (1978) admite la existencia de ciertas constantes  $\mu_n$  tal que

$$(6.45) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (W_n^2(\Psi) - \mu_n) \stackrel{d}{=} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{Z_j^2 - 1}{j},$$

con la distribución del segundo miembro de (6.45) tabulada en De Wet & Venter (1972).

De esta forma, el problema estaría resuelto si dichas constantes además de considerarse su existencia fuesen explicitadas, para que realmente el test pudiera ser aplicado. Nosotros determinamos dichas constantes de forma recursiva, utilizando los resultados de Greogory (1977) y la Ley Débil de los Grandes Números, ver Feller (1971):

Así se verifica que

$$(6.46) \quad \mu_n = \int_{-n}^n Y_1(s) dF_0(s),$$

con

$$(6.47) \quad Y_1(s) = \int_{-\infty}^{\infty} [I_{(0,x]}(s) - F_0(x)]^2 \Psi(F_0(x)) dF_0(x).$$

Para calcular la integral (6.47) utilizamos la expresión de la función indicador en términos de los polinomios de Laguerre, dada en (6.38).

De esta forma

$$Y_1(s) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \frac{\Gamma(\alpha) k!}{\Gamma(\alpha + k)} \left( L_k^{(\alpha-1)} \left( \frac{s}{\theta} \right) \right)^2,$$

y por tanto

$$(6.48) \quad \mu_n = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \frac{k!}{\Gamma(\alpha + k)} I_k(\alpha - 1, n/\theta),$$

donde

$$(6.49) \quad I_k(\alpha - 1, n) = \int_0^n \left( L_k^{(\alpha-1)}(x) \right)^2 x^{\alpha-1} e^{-x} dx.$$

Si integramos por partes (6.49), teniendo en cuenta la relación (6.34) de los polinomios de Laguerre, se verifica:

$$(6.50) \quad \begin{aligned} I_k(\alpha - 1, n) &= \frac{n^\alpha e^{-n}}{k} L_k^{(\alpha-1)}(n) L_{k-1}^{(\alpha)}(n) + I_{k-1}(\alpha, n), \quad k \geq 1, \\ I_0(\alpha - 1 + k, n) &= \Gamma(\alpha + k) G_{\alpha+k}(n). \end{aligned}$$

Hemos obtenido la expresión (6.48) para las constantes  $\mu_n$ , computables a partir de la relación de recurrencia (6.50).

A continuación realizamos el mismo planteamiento para la distribución normal estándar:

- Si  $F_0(x) = \Phi(x)$ , con  $\Phi$  la función de distribución normal estándar y cuya función de densidad es

$$\varphi(x) = \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

En este caso la función peso propuesta, ver Gregory (1977), para el estadístico Cramér-von Mises generalizado es

$$\Psi(t) = [\varphi(\Phi^{-1}(t))]^{-2}.$$

Análogamente se obtiene el mismo resultado del Teorema 6.2.1 con la variables  $Z_{n,k}$  adecuadas a esta distribución, y por tanto en términos de los polinomios de Hermite, cuya expresión y relación de recurrencia podemos encontrar en el capítulo 5, ver (5.3).

TEOREMA 6.2.2. *El estadístico  $W_n^2(\Psi)$  dado en (6.30), con la notación anterior, admite la siguiente expresión, bajo  $H_0$ :*

$$(6.51) \quad W_n^2(\Psi) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{Z_{n,k}^2}{k},$$

con

$$(6.52) \quad Z_{n,k} = \sum_{i=1}^n \frac{H_{ek}(X_i)}{\sqrt{k!} \sqrt{n}}.$$

DEMOSTRACIÓN. La demostración es análoga al caso anterior. ■

Además las variables aleatorias  $Z_{n,k}$  verifican las mismas propiedades que en el caso de la distribución gamma.

En cuanto a la distribución asintótica de  $W_n^2(\Psi)$  dado por (6.51) presenta el mismo inconveniente que el dado para la distribución gamma. Por tanto será necesario determinar las constantes  $\mu_n$  tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (W_n^2(\Psi) - \mu_n) \stackrel{d}{=} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{Z_j^2 - 1}{j}.$$

Razonando de forma análoga y teniendo en cuenta la definición (6.46) de dichas constantes, se tiene

$$\mu_n = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{kk!} I_k(n),$$

con  $I_k(n) = \int_{-n}^n H_{ek}^2(x) \varphi(x) dx$ , que verifica la siguiente relación de recurrencia:

$$\begin{aligned} I_k(n) &= -2H_{ek}(n) H_{ek-1}(n) \varphi(n) + kI_{k-1}(n), \quad k \geq 1, \\ I_0(n) &= 1 - 2\Phi(n). \end{aligned}$$

**6.2.2. Estadístico de Cramér-von Mises.** En este apartado, proporcionamos una expresión para el estadístico asintótico de Cramér-von Mises, obtenido a partir de (6.30) con  $\Psi = 1$ , haciendo uso de los polinomios de Jacobi y con un procedimiento análogo al empleado en los casos anteriores de esta sección. Esta expresión fue obtenida por otros autores, ver Durbin et al. (1971), por un procedimiento distinto.

En primer lugar, definimos los polinomios de Jacobi, dando algunas de sus propiedades, ver Chihara (1978):

PROPOSICIÓN 6.2.2. *Consideramos los polinomios de Jacobi explícitamente dados, para  $a, b > -1$ , por:*

$$(6.53) \quad P_n^{(a,b)}(x) = 2^{-n} \sum_{j=0}^n \binom{n+a}{j} \binom{n+b}{n-j} (x-1)^{n-j} (x+1)^j, \quad n \geq 0,$$

que verifican la siguiente fórmula de Rodrigues:

$$(6.54) \quad P_n^{(a,b)}(x) = \frac{(-1)^n}{2^n n!} (1-x)^{-a} (1+x)^{-b} \frac{d^n}{dx^n} \left[ (1-x)^{n+a} (1+x)^{n+b} \right].$$

Estos polinomios son ortogonales con respecto a la distribución beta en el intervalo  $(-1, 1)$ , cuya densidad viene dada por:

$$(6.55) \quad w_{(a,b)}(x) = \frac{2^{-1-a-b}}{\beta(a+1, b+1)} (1-x)^a (1+x)^b, \quad x \in (-1, 1).$$

Más precisamente, la relación de ortogonalidad que verifican viene dada por:

$$\int_{-1}^1 P_n^{(a,b)}(x) P_m^{(a,b)}(x) w_{(a,b)}(x) dx = \delta_{n,m} \frac{(a+1)_n (b+1)_n (n+a+b+1)}{n! (a+b+2)_n (2n+a+b+1)},$$

con  $(a)_0 = 1$ ,  $(a)_n = a(a+1)\dots(a+n-1)$  y  $\delta_{n,m}$  la delta de kronecker.

En particular para  $a = b = -\frac{1}{2}$  la relación de ortogonalidad es

$$(6.56) \quad \frac{n \left(\frac{1}{2}\right)_n \left(\frac{1}{2}\right)_n}{n! (1)_n 2^n} = \frac{1}{2 \cdot 4^n} \binom{2n}{n}.$$

Para  $a = b = \frac{1}{2}$  la relación de ortogonalidad es

$$(6.57) \quad \frac{(n+2) \left(\frac{3}{2}\right)_n \left(\frac{3}{2}\right)_n}{n! (3)_n (2n+2)} = \frac{1}{4^n} \binom{2n+1}{n}.$$

Consideramos el estadístico de Cramér-von Mises clásico que resulta de (6.30) haciendo  $\Psi = 1$ , i.e.

$$(6.58) \quad W_n^2 = n \int_{-\infty}^{\infty} (F_n(x) - F_0(x))^2 dF_0(x).$$

El siguiente resultado nos proporciona una expresión para el estadístico  $W_n^2$  y consecuentemente también para el estadístico asintótico que notamos por  $W_\infty^2$ .

TEOREMA 6.2.3. *Se verifica, con la notación anterior:*

$$(6.59) \quad W_n^2 = \frac{1}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{Z_{n,k}^2}{k^2},$$

con

$$(6.60) \quad Z_{n,k} = \sqrt{\frac{2}{n}} \sum_{i=1}^n \frac{P_k^{(-1/2, -1/2)}(X_i) 4^k}{\binom{2k}{k}}.$$

Además

$$(6.61) \quad W_\infty^2 = \frac{1}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{Z_k^2}{k^2},$$

con  $Z_k$  variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas según  $N(0, 1)$ .

DEMOSTRACIÓN. El estadístico (6.58) es de distribución libre si la distribución a contrastar es continua. Por tanto podemos considerar  $F_0(x) = F_{-1/2, -1/2}(x)$  la distribución beta de parámetros  $a = -1/2, b = -1/2$ .

De forma análoga a los casos anteriores, en primer lugar obtenemos un desarrollo ortogonal para la función indicador de la distribución  $F_0$  en términos de los polinomios de Jacobi de la siguiente forma:

$$I_{(-1,x]}(s) = \sum_{k \geq 0} \alpha_k(x) P_k^{(-1/2,-1/2)}(x),$$

con

$$\begin{aligned} \alpha_k(x) &= 2 \left\{ \frac{4^k}{(2k)} \right\}^2 \int_{-1}^x P_k^{(-1/2,-1/2)}(s) w_{(-1/2,-1/2)}(s) ds = \\ (6.62) \quad &= -\frac{16^k}{(2k)^2} \frac{1}{k\beta(1/2,1/2)} (1-x)^{1/2} (1+x)^{1/2} P_{k-1}^{(1/2,1/2)}(x), \end{aligned}$$

para  $k \geq 1$  y  $\alpha_0(x) = F_{(-1/2,-1/2)}(x)$ .

Teniendo en cuenta la expresión de la función de distribución empírica (6.31), se tiene:

$$\begin{aligned} F_n(x) &= F_{(-1/2,-1/2)}(x) - \frac{(1-x)^{1/2} (1+x)^{1/2}}{\beta(1/2,1/2)} \cdot \\ &\quad \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{16^k}{(2k)^2} \frac{1}{k} P_{k-1}^{(1/2,1/2)}(x) \sum_{i=1}^n \frac{P_k^{(-1/2,-1/2)}(x_i)}{n}. \end{aligned}$$

De esta forma

$$\begin{aligned} (6.63) \quad \sqrt{n} (F_n(x) - F_{(-1/2,-1/2)}(x)) &= \frac{(1-x)^{1/2} (1+x)^{1/2}}{\beta(1/2,1/2)} \cdot \\ &\quad \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{16^k}{(2k)^2} \frac{1}{k} P_{k-1}^{(1/2,1/2)}(x) Z_{n,k}, \end{aligned}$$

con  $Z_{n,k}$  dado en (6.60) que verifican las mismas propiedades a las de los casos anteriores: tienen media cero, varianza uno, son incorreladas y además como consecuencia del Teorema Central del Límite,

$$Z_{n,k} \xrightarrow{\mathcal{L}} Z_k, \quad n \rightarrow \infty,$$

con  $Z_k$  distribuida según una  $N(0,1)$ , para cada  $k \geq 1$ . Además  $\{Z_k\}_{k \geq 1}$  son independientes, ya que la incorrelación en la distribución normal implica la independencia.

Continuando con la línea de la demostración, a partir de (6.63) fácilmente se tiene

$$W_n^2 = \frac{1}{\beta^3 (1/2, 1/2)} \int_{-1}^1 \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4^k}{\binom{2k}{k}} \frac{1}{\sqrt{2k}} Z_{n,k} P_{k-1}^{(1/2, 1/2)}(x) \right\}^2 \cdot (1-x)^{1/2} (1+x)^{1/2} dx.$$

Ahora bien, los polinomios de Jacobi  $P_{k-1}^{(1/2, 1/2)}(\cdot)$  son ortogonales respecto de la función peso  $w_{(1/2, 1/2)}$ ,

$$w_{(1/2, 1/2)} = \frac{2^{-2}}{\beta (3/2, 3/2)} (1-x)^{1/2} (1+x)^{1/2},$$

que verifican la relación de ortogonalidad dada en (6.57). Por tanto

$$\begin{aligned} W_n^2 &= \frac{4\beta (3/2, 3/2)}{\beta^3 (1/2, 1/2)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{16^k}{\binom{2k}{k}^2} \frac{\binom{2k-1}{k-1}^2}{2k^2 16^{k-1}} Z_{n,k}^2 \\ &= \frac{1}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{Z_{n,k}^2}{k^2}, \end{aligned}$$

como se quería demostrar. Y tomando límite en la expresión anterior cuando  $n \rightarrow \infty$  obviamente se tiene (6.61). ■

### 6.3. Aproximación heurística a las distribuciones de estadísticos tipo Cramér-von Mises

En esta sección presentamos un procedimiento heurístico, para obtener aproximaciones de una distribución,  $F_1$ , en términos de una segunda función de distribución,  $F_2$ .

Este procedimiento nos proporcionará aproximaciones para las distribuciones de los estadístico de Watson y de Cramér-von Mises en términos de sus correspondientes distribuciones asintóticas. Si bien se trata de un procedimiento heurístico, hemos podido comprobar empíricamente que da buenos resultados.

El estadístico de Watson es una modificación del estadístico de Cramér-von Mises, introducido por Watson (1961). Watson demostró que el estadístico es



de distribución libre y que su valor, en el caso circular, es independiente de la elección del origen, de ahí su importancia en el caso de que las observaciones procedan de una circunferencia. Además obtuvo la distribución asintótica mediante el método clásico de la aproximación de Doob (1949) y la técnica de Kac & Siegert (1947). Se puede comprobar que existen todos los momentos ordinarios del estadístico asintótico, es más podemos dar una expresión para el momento de orden  $k$ , ya que su función generatriz de momentos es una función elemental y por tanto podemos obtener un sistema completo de polinomios ortogonales respecto de su función de densidad, ver Abbey & David (1970).

Stephens (1963,1964) determinó mediante un procedimiento geométrico las distribuciones exactas del estadístico de Watson, para tamaños muestrales  $n \leq 4$ , así como la cola inferior para tamaños muestrales superiores. Y utilizó ajustes de las curvas de Pearson a las distribuciones (usando los cuatro primeros momentos) para aproximar la cola superior. Otro tipo de aproximaciones empíricas utilizando la simulación de Monte Carlo, se pueden ver en Pearson et al. (1962), así como aproximaciones chi-cuadrado en Tiku (1965), utilizando los tres primeros momentos. Götze (1979) proporcionó otro tipo de aproximaciones en términos de la distribución asintótica, en Csörgő et al. (1996) podemos comprobar la precisión de tales aproximaciones comparadas con los valores exactos si son posibles o los valores obtenidos por simulación, para distintos tamaños muestrales.

El estadístico de Cramér-von Mises fue introducido por Cramér (1928) y estudiado por von Mises (1931) y Smirnov (1939), ver Anderson & Darling (1952). El estadístico fue introducido como una alternativa al estadístico de bondad de ajuste  $\chi^2$  de Pearson. Como ya se introdujo en el apartado anterior de esta sección, se verifica que el estadístico de Cramér-von Mises es de distribución libre siempre que la distribución a contrastar sea continua y no dependa de ningún parámetro desconocido. La distribución asintótica del estadístico de Cramér-von Mises en términos de funciones de Bessel modificadas de segunda especie, fue obtenida por Anderson & Darling (1952) invirtiendo la función característica, la cual obtuvo en términos de la solución de una

cierta ecuación diferencial. Su expresión es más complicada que la dada para la distribución asintótica de Watson. De la misma forma existe un sistema ortogonal completo, ya que existen todos los momentos de dicha distribución.

Marshall (1958) determinó las distribuciones exactas para  $n \leq 3$ . Stephens & Maag (1968), determinaron, por un procedimiento geométrico, la distribución exacta del estadístico en la cola inferior del mismo. Knott (1974) realizó una nueva tabulación del estadístico para  $2 \leq n \leq 7$ , por inversión numérica de la función característica. La dificultad de determinar las distribuciones exactas para la cola superior hace necesario el uso de aproximaciones y de forma análoga al estadístico de Watson, éstas son dadas a través de la curva de Pearson usando los cuatro primeros momentos, ver Pearson & Stephens (1962), bien mediante aproximaciones chi-cuadrado, ver Tiku (1965b), así como a partir de la simulación. Otro tipo de aproximaciones en términos de la distribución asintótica fue dada por Götze (1979), ver Csörgő et al. (1996) quién realizó también un estudio sobre la distribución exacta del estadístico.

**6.3.1. Aproximación heurística.** Sean  $F_1$  y  $F_2$  dos funciones de distribución. Consideremos  $\{\psi_k\}_{k \geq 0}$  un sistema de funciones ortogonales con respecto a la distribución  $F_2$  y la función indicador de la variable aleatoria  $X$  con función de distribución  $F_1$ ,  $I_{(-\infty, x]}(X)$ .

Formalmente, tenemos

$$(6.64) \quad I_{(-\infty, x]}(X) = F_2(x) + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k(x) \psi_k(x),$$

con

$$(6.65) \quad \alpha_k(x) = \frac{\int_{-\infty}^x \psi_k(y) dF_2(y)}{\|\psi_k\|_2^2}$$

y

$$\|\psi_k\|_2^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \psi_k^2(x) dF_2(x),$$

la norma de las funciones ortogonales. Tomando esperanzas con respecto de la distribución a aproximar,  $F_1$ , en (6.64) resulta:

$$(6.66) \quad F_1(x) = F_2(x) + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k(x) E_{F_1}[\psi_k(x)].$$

Si consideramos los desarrollos truncados en el segundo miembro de (6.66) obtenemos diversas aproximaciones a la función de distribución  $F_1$ , i.e.

$$(6.67) \quad F_1(x) \simeq F_2(x) + \sum_{k=1}^j \alpha_k(x) E_{F_1}[\psi_k(x)].$$

Aplicaciones de este procedimiento para aproximar las distribuciones hipergeométrica e hipergeométrica negativa en términos de la binomial y binomial negativa respectivamente, se pueden ver en López-Blázquez et al. (2000a, 2000b).

Dada una muestra aleatoria de tamaño  $n$ , aplicaremos la aproximación (6.67) con  $F_1$  como las distribuciones de Cramér-von Mises y de Watson, respectivamente ya que éstas no son conocidas, al menos para cualquier tamaño muestral y como  $F_2$  sus correspondientes distribuciones asintóticas que están perfectamente determinadas en la literatura. Para ello hemos dado un procedimiento genérico, aunque explícitamente proporcionaremos aproximaciones del tipo (6.67) con los cuatro primeros términos, obteniéndose resultados computacionalmente buenos.

**6.3.2. Aproximación a la distribución de Watson.** El estadístico de Watson es una modificación del estadístico de Cramér-von Mises, dado por:

$$(6.68) \quad U_n^2 = n \int_{-\infty}^{\infty} \left( F_n(x) - F_0(x) - \int_{-\infty}^{\infty} (F_n(x) - F_0(x)) dF_0(x) \right)^2 dF_0(x).$$

Para llevar a cabo la aproximación (6.67) necesitamos conocer la expresión de la distribución del estadístico asintótico que notaremos por  $U_{\infty}^2$ , así como otras características:

- La función de distribución de  $U_\infty^2$ , ver Watson (1961), que notamos por  $F_{U_\infty^2}$  viene dada por:

$$F_{U_\infty^2}(u) = 1 - \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} 2e^{-2k^2\pi^2u}, \quad u > 0,$$

y su función de densidad  $\phi$  es igual a:

$$(6.69) \quad \phi(u) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} 4k^2\pi^2 e^{-2k^2\pi^2u}, \quad u > 0.$$

- La función generatriz de momentos de  $U_\infty^2$ , ver Watson (1961):

$$E\left(e^{\theta U_\infty^2}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{2}{1 - (\theta/2k^2\pi^2)}.$$

Por tanto el momento ordinario de orden  $j$ , que notamos por  $m_j$  viene dado por:

$$m_j = \frac{j!}{2^{j-1}\pi^{2j}} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^{i-1}}{i^{2j}}.$$

Nosotros utilizaremos los primeros ocho momentos.

- Determinamos los polinomios mónicos ortogonales respecto de la densidad (6.69) usando los momentos  $m_j$  mediante la técnica de los determinantes, ver Chihara (1978). Explícitamente los primeros polinomios son:

$$\psi_1(x) = x - 1/12,$$

$$\psi_2(x) = x^2 - 0.2619047619x + 0.00003361992945,$$

$$\psi_3(x) = x^3 - 0.5389952153x^2 + 0.07390350877 - 0.002456092884,$$

$$\psi_4(x) = x^4 - 0.9157528834x^3 + 0.2531110208x^2 - 0.02404995526x + 0.0006365329436.$$

- Para aplicar el procedimiento descrito anteriormente, necesitamos conocer las normas de los polinomios  $\psi_i(\cdot)$ :

$$\begin{aligned}\|\psi_1\|_2^2 &= 1/360, \\ \|\psi_2\|_2^2 &= 0.00002991937516, \\ \|\psi_3\|_2^2 &= 0.7139680969 \cdot 10^{-6}, \\ \|\psi_4\|_2^2 &= 0.3003525491 \cdot 10^{-7}.\end{aligned}$$

Por tanto si  $F_{U_n^2}$  es la función de distribución del estadístico de Watson, tenemos la siguiente aproximación:

$$(6.70) \quad F_{U_n^2}(x) \simeq F_{U_\infty^2}(x) + \sum_{k=1}^4 \alpha_k(x) E_n[\psi_k(x)],$$

con

$$(6.71) \quad \alpha_k(x) = \frac{\int_{-\infty}^x \psi_k(y) \phi(y) dy}{\|\psi_k\|_2^2},$$

y  $E_n[\psi_k(x)] = E_{U_n^2}[\psi_k(x)]$ . Observemos que los coeficientes (6.71) son computables fácilmente con cualquier programa matemático básico. Por tanto tendríamos los cuatro primeros coeficientes para cada  $x$  fijado.

Para conseguir la aproximación (6.70), nos faltaría determinar  $E_n[\psi_k(x)]$ , para ello necesitamos los cuatro primeros momentos,  $m_{n,k}$  del estadístico de Watson,  $U_n^2$ , que se pueden obtener a partir de los respectivos momentos centrados dados por ejemplo en Stephens (1963). Los momentos son:

$$\begin{aligned}m_{n,1} &= \frac{1}{12}, \\ m_{n,2} &= \frac{7}{720} - \frac{1}{360n}, \\ m_{n,3} &= \frac{31}{20160} - \frac{41}{30240n} + \frac{1}{2520n^2}, \\ m_{n,4} &= \frac{127}{403200} - \frac{103}{181440n} + \frac{127}{302400n^2} - \frac{1}{8400n^3}.\end{aligned}$$

Por tanto teniendo en cuenta las expresiones de los polinomios ortogonales y de los momentos anteriores, se tiene:

$$\begin{aligned}
 E_n [\psi_1(x)] &= 0, \\
 E_n [\psi_2(x)] &= -\frac{1}{360} \frac{1}{n}, \\
 E_n [\psi_3(x)] &= 0.0001413888256 \frac{1}{n} + 0.0003968253968 \frac{1}{n^2}, \\
 E_n [\psi_4(x)] &= -0.00002917077354 \frac{1}{n} + 0.00005657954363 \frac{1}{n^2} - \\
 &\quad -0.0001190476190 \frac{1}{n^3}.
 \end{aligned}$$

Obviamente esta aproximación puede ser mejorada considerando más términos en el desarrollo (6.71) y necesariamente por tanto, conocer momentos de orden superior a cuatro en la distribución de Watson.

En la siguiente tabla efectuamos algunas comparaciones con la aproximación dada por Götze (1979) y los valores considerados como exactos obtenidos mediante simulación, ver Csörgő et al. (1996):

$n$	$x$	$F_{U_n^2}(x)$	Aprox. (6.70)	Aprox. Götze
6	0.2087	0.975	0.974543315	0.9742627229
6	0.2450	0.99	0.9900560198	0.9894690391
8	0.2121	0.975	0.9748605892	0.9745985778
8	0.2513	0.99	0.9900534859	0.9897855525
9	0.2532	0.99	0.9900191083	0.9898242904
10	0.2548	0.99	0.9900143789	0.9898700734
10	0.1164	0.80	0.8001599380	0.8001907288

DISTRIBUCIÓN DE WATSON

En la tabla anterior, hemos considerado únicamente valores de la cola superior fundamentalmente porque Stephens (1964) determinó mediante un procedimiento geométrico una expresión exacta para la cola inferior. Como podemos observar, obtenemos resultados tan precisos como los que obtuvo Götze (1979).

**6.3.3. Aproximación a la distribución de Cramér-von Mises.** De forma análoga al caso anterior, aplicamos el procedimiento descrito a la distribución de Cramér-von Mises. El estadístico de Cramér-von Mises viene dado por (6.58),

$$W_n^2 = n \int_{-\infty}^{\infty} (F_n(x) - F_0(x))^2 dF_0(x).$$

Para ello, sea  $W_\infty^2$  el estadístico asintótico de Cramér-von Mises, del cual necesitamos conocer algunas características:

- La función de distribución de  $W_\infty^2$  dada en Anderson & Darling (1952):

$$(6.72) \quad F_{W_\infty^2}(x) = \frac{1}{\pi^{3/2} x^{1/2}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(k+1/2)}{k!} (4k+1)^{1/2} \cdot \exp\left\{-\frac{(4k+1)^2}{16x}\right\} K_{1/4}\left\{\frac{(4k+1)^2}{16x}\right\},$$

donde  $K_\nu(\cdot)$ ,  $\nu > -1/2$ , es la función de Bessel modificada de segunda especie. Su función de densidad la podemos obtener derivando la expresión (6.72).

- Los ocho primeros momentos de  $W_\infty^2$ , podemos obtenerlos a partir de sus cumulantes explicitados en Pearson & Stephens (1962), resultando:

$$\begin{aligned} m_1 &= 1/6, & m_2 &= 0.05, & m_3 &= 0.02420634921 \\ m_4 &= 0.01667989418, & m_5 &= 0.01496212121, & m_6 &= 0.01651200982, \\ m_7 &= 0.02160988831, & m_8 &= 0.03269556345. \end{aligned}$$

- A partir de los momentos y por el método de los determinantes, calculamos los cuatro primeros polinomios ortogonales respecto de la distribución asintótica:

$$\psi_1(x) = x - 1/6,$$

$$\psi_2(x) = x^2 - 0.7142857143x + 0.06904761905,$$

$$\psi_3(x) = x^3 - 1.660541586x^2 + 0.6170535139 - 0.04402152221,$$

$$\psi_4(x) = x^4 - 3.009453709x^3 + 2.542564319x^2 - 0.6517911511x + 0.03767163579.$$

- La norma de los polinomios anteriores:

$$\|\psi_1\|_2^2 = 1/45,$$

$$\|\psi_2\|_2^2 = 0.002842025699,$$

$$\|\psi_3\|_2^2 = 0.0008935723022,$$

$$\|\psi_4\|_2^2 = 0.0005206325960.$$

Por tanto, con  $F_{W_n^2}$  la distribución del estadístico de Cramér-von Mises, proporcionamos la siguiente aproximación:

$$(6.73) \quad F_{W_n^2}(x) \simeq F_{W_\infty^2}(x) + \sum_{k=1}^4 \alpha_k(x) E_n[\psi_k(x)],$$

con

$$(6.74) \quad \alpha_k(x) = \frac{\int_{-\infty}^x \psi_k(y) dF_{W_\infty^2}(y)}{\|\psi_k\|_2^2},$$

y  $E_n[\psi_k(x)] = E_{W_n^2}[\psi_k(x)]$ . Los denominadores de (6.74) ya están determinados, y los numeradores son fácilmente computables.

Nos faltaría determinar  $E_n[\psi_k(x)]$ , y para ello es necesario conocer los cuatro primeros momentos ordinarios de  $W_n^2$ , que determinamos a partir de los



correspondientes momentos centrados dados en Pearson & Stephens (1964):

$$\begin{aligned} m_{n,1} &= \frac{1}{6}, \\ m_{n,2} &= \frac{1}{20} - \frac{1}{60n}, \\ m_{n,3} &= \frac{61}{2520} - \frac{37}{1512n} + \frac{1}{126n^2}, \\ m_{n,4} &= \frac{1261}{75600} - \frac{3833}{113400n} + \frac{2071}{75600n^2} - \frac{1}{120n^3}. \end{aligned}$$

De esta forma:

$$E_n[\psi_1(x)] = 0,$$

$$E_n[\psi_2(x)] = -\frac{1}{60n},$$

$$E_n[\psi_3(x)] = 0.003204793630\frac{1}{n} + 0.007936507937\frac{1}{n^2},$$

$$E_n[\psi_4(x)] = -0.002532738271\frac{1}{n} + 0.003509626646\frac{1}{n^2} - 0.008333333333\frac{1}{n^3}.$$

En la siguiente tabla podemos observar algunas comparaciones con la aproximación dada por Götze (1979) y los valores considerados como exactos dados en Csörgő et al. (1996), ya sea bien calculados por el procedimiento propuesto en Csörgő et al., bien obtenidos por Knott (1974), o bien mediante simulación.

$n$	$x$	$F_{W_n^2}(x)$	Aprox. (6.73)	Aprox. Götze
2	0.48901	0.975	0.9769954760	0.9681751969
2	0.55058	0.99	0.9881409934	0.9808432316
3	0.8224	0.999	0.9981970834	0.9978556645
3	0.6398	0.99	0.9910413971	0.9884969825
6	0.69443	0.99	0.9904452092	0.9885935585
7	0.34397	0.9	0.9002770924	0.8998157898
8	0.7072	0.99	0.9903136860	0.9898779312
10	0.3450	0.9	0.99001813058	0.8999070681

DISTRIBUCIÓN DE CRAMÉR-VON MISES

Como podemos observar la aproximación (6.73) proporciona resultados tan precisos como la dada por Götze.

## Bibliografia

- [1] Abate, J., Choudhury, G. L., Whitt, W. (1996). On the Laguerre method for numerically inverting Laplace transforms. *Informs Journal on Computing*, **8**(4), 413-427.
- [2] Abbey, J. L., David, H. T. (1970). The construction of uniformly variance unbiased estimators for exponential distributions. *The Annals of Mathematical Statistics*, **41**(4), 1217-1222.
- [3] Anderson, T. W., Darling, D. A. (1952). Asymptotic theory of certain goodness of fit criteria based in stochastic processes. *Ann. Math. Statist.*, **23**, 193-212.
- [4] Ashour, S. K., Abdel-Samad, A. I. (1990). On the computation of non-central chi-square distribution function. *Commun. Statist. Simula.*, **19**(4), 1279-1291.
- [5] Bar-Lev, S. K., Enis, P. (1986). Reproducibility and natural exponential families with power variance functions. *The Annals of Statistics*, **14**(4), 1507-1522.
- [6] Bhattacharyya, A. (1945). A note on the distribution of the sum of chi-squares. *Sankhya*, **7**, 27-28.
- [7] Billingsley, P. (1968). *Convergence of probability measures*. John Wiley & Sons, New York.
- [8] Billingsley, P. (1986). *Probability and Measure, 2nd ed.* John Wiley & Sons, New York.
- [9] Chebyshev, P. L. (1858). *J. Math. Pures Appl.*, **3**, 289-323.
- [10] Chebyshev, P. L. (1890). Sur deux théorèmes relatifs aux probabilités. *Acta Math.*, **14**, 305-315.
- [11] Chihara, T. (1978). *An introduction to orthogonal polynomials*. Gordon & Breach, New York.
- [12] Cramér, H. (1928). On the composition of elementary errors. *Statistical Applications. Skand. Akt.*, **11**, 13-74, 141-180.
- [13] Cramér, H. (1970). *Random variables and probability distributions*. Cambridge University Press, London-New York.
- [14] Cramér, H. (1972). Studies in the History of Probability and Statistics. XXVIII. On the history of certain expansions used in mathematical statistics. *Biometrika*, **59**(1), 205-207.

- [15] Csörgő, S., Faraway, J. J. (1996). The exact and asymptotic distributions of Cramér-von Mises Statistics. *J. R. Statist. Soc., Ser. B*, **58**(1), 221-234.
- [16] Daniels, H. E. (1954). Saddlepoint approximations in statistics. *Ann. Math. Statist.*, **25**, 631-650.
- [17] D'Agostino, R. B., Stephens, M. A. (1986). *Goodness of fit tests*. New York: Marcel Dekker.
- [18] Davies, R. B. (1973). Numerical inversion of a characteristic function. *Biometrika*, **60**, 415-417.
- [19] Davies, R. B. (1980). The distribution of a linear combination of  $\chi^2$  random variables. *Applied Statistics*, **29**, 323-333.
- [20] Davies, A.W. (1977). A differential equation approach to linear combinations of independent chi-squares. *J. A. S. A.*, **72**, 212-214.
- [21] De Wet, T., Venter, J. H. (1972). Asymptotic distributions of certain test criteria of normality. *South African Statist. J.*, **6**, 135-149.
- [22] De Wet, T., Venter, J. H. (1973). Asymptotic distributions for quadratic forms with applications to tests of fit. *Ann. Statist.*, **1**(2), 380-387.
- [23] Doob, J. L. (1949). Heuristic approach to the Kolmogorov-Smirnov theorems. *Ann. Math. Statist.*, **20**, 393-403.
- [24] Durbin, J., Knott, M. (1972). Components of Cramér-von Mises statistics. I. *J. Roy. Statist. Soc., Ser. B*, **34**, 290-307.
- [25] Edgeworth, F. Y. (1905). The law of error. *Trans. Camb. Philos. Soc.*, **20**, 36-65, 113-141.
- [26] Esscher, F. (1963). On approximate computations when the corresponding characteristic functions are known. *Skand. Akt. Tidskr.*, **46**, 78-86.
- [27] Fisher, R. A. (1928). The general sampling distribution of multiple correlation coefficient. *Proceedings of the Royal Society of London*, **121A**, 654-673.
- [28] Feller, W. (1971). *An introduction to probability theory and its applications*, **2**, 2nd ed. New York: Wiley.
- [29] Gideon, R. A., Gurland, J. (1976). Series expansions for quadratic forms in normal variables. *J. A. S. A.*, **71**, 227-232.
- [30] Gideon, R. A., Gurland, J. (1977). Some alternative expansions for the distribution function of a noncentral chi-square variable. *SIAM Journal on Mathematical Analysis* **8**, 100-110.
- [31] Gil-Pelaez, J. (1951). Note on the inversion theorem. *Biometrika*, **38**, 481-482.
- [32] Grad, A., Solomon, H. (1965). Distribution of quadratic forms and some applications. *Ann. Math. Statist.*, **26**, 464-477.

- [33] Gregory, G. G., (1977). Large sample theory for  $U$ -statistics and tests of fit. *Ann. Statist.*, **5**(1), 110-123.
- [34] Götze, F. (1979). Asymptotic expansions for bivariate von Mises functionals. *Zeitschrift Wahrsch. Ver. Geb.*, **50**, 333-355.
- [35] Guenther, W. C. (1964). Another derivation of the non-central chi-square distribution. *J. A. S. A.*, **59**, 957-960.
- [36] Gurland, J. (1953). Distributions of quadratic forms and ratios of quadratics forms. *Ann. Math. Statist.*, **24**, 416-427.
- [37] Gurland, J. (1955). Distribution of definite and of indefinite quadratic forms. *Ann. Math. Statist.*, **26**, 122-127.
- [38] Gurland, J. (1956). Quadratic forms in normally distributed random variables. *Sankhya*, **17**, 37-50.
- [39] Hotelling, H. (1948). Some new methods for distribution of quadratic forms (Abstract). *Ann. Math. Statist.*, **19**, 119.
- [40] Imhof, J. P. (1961). Computing the distribution of quadratic forms in normal variables. *Biometrika*, **48**, 419-426.
- [41] Jensen, D. R., Solomon, H. (1972). A gaussian approximation to the distribution of a definite quadratic form. *J. A. S. A.*, **67**, 898-902.
- [42] Johnson, N. L., Kotz, S. (1968). Tables of distributions of positive definite quadratic forms in central normal variables. *Sankhya Ser B* **30**, 303-314.
- [43] Johnson, N. L., Kotz, S., Balakrishnan, N. (1994). *Continuous Univariate distributions, 2nd ed.*, 1, John Wiley & Sons, New York.
- [44] Johnson, N. L., Kotz, S., Balakrishnan, N. (1995). *Continuous Univariate distributions, 2nd ed.*, 2, John Wiley & Sons, New York.
- [45] Jorgensen, B. (1987). Exponential dispersion models. *J. R. Statist. Soc. B*, **49**(2), 127-162.
- [46] Kabe, D. G. (1962). On the exact distribution of a class of multivariate test criteria. *Ann. Math. Statist.*, **33**, 1197-1200.
- [47] Kac, M., Siegert, A. J. F. (1947). An explicit representation of a stationary Gaussian process. *Ann. Math. Statist.*, **18**, 438-442.
- [48] Kakizawa, Y., Taniguchi, M. (1994). Higher order asymptotic relation between Edgeworth approximation and saddlepoint approximation. *J. Japan Statist. Soc.*, **24**(2), 109-119.
- [49] Kerridge, D. F., Cook, G. W. (1976). Yet another series for the normal integral. *Biometrika*, **63**, 401-403.

- [50] Khamis, S. H. (1960). Incomplete gamma functions expansions of statistical distribution functions. *Bull. Inst. Int. Statist.* **37**(3), 385-396.
- [51] Knott, M. (1974). The distribution of the Cramér-von Mises statistic for small sample sizes. *J. R. Statist. Soc. B*, **36**, 430-438.
- [52] Kolassa, J. E. (1997). *Series approximation methods in Statistics*, 2nd ed. Springer, New York.
- [53] Kotz, S., Adams, J. W. (1964). Distribution of sum of identically distributed exponentially correlated gamma-variables. *Ann. Math. Statist.*, **35**, 277-283.
- [54] Kotz, S., Johnson, N. L., Boyd, D. W. (1967a). Series representations of distributions of quadratic forms in normal variables I. Central case. *Ann. Math. Statist.* **38**, 823-837.
- [55] Kotz, S., Johnson, N. L., Boyd, D. W. (1967b). Series representations of distributions of quadratic forms in normal variables II. Non-Central case. *Ann. Math. Statist.* **38**, 838-848.
- [56] Kuelbs, J., Kurtz, T. (1974). Berry-Esséen estimates in Hilbert space and an application to the law of the iterated logarithm. *The Annals of Probability*, **2**(3), 387-407.
- [57] López-Blázquez, F. (1998). A note on UMVU estimation in the transformed chi-square distribution. *Comm. Statist.*, **27**(8), 2065-2073.
- [58] López-Blázquez, F., Castaño-Martínez, A. (1999). Asymptotic properties of unbiased estimations in the natural exponential family with quadratic variance function. *Sankhya*, Ser. A, **61**, 292-297.
- [59] López-Blázquez, F., Salamanca-Miño, B. (2000a). Binomial approximation to hypergeometric probabilities. *Journal of Statistical Planning and Inference*, **87**, 21-29.
- [60] López-Blázquez, F., Salamanca-Miño, B. (2000b). Exact and approximated relations between negative hypergeometric and negative binomial probabilities. *Communications in Statistics Theory and Methods*. (Aceptado).
- [61] Marshall, A. W. (1958). The small sample distribution of  $nw_n^2$ . *Ann. Math. Statist.*, **29**, 307-309.
- [62] Mathai, A. M. (1982). Storage capacity of a dam with Gamma type inputs. *Ann. Inst. Statist. Math.*, **34**(3), 591-597.
- [63] McNolty, F. (1962). A contour-integral derivation of the non-central chi-square distribution. *Ann. Math. Statist.*, **33**, 796-800.
- [64] Moorthy, M. V. (1995). Inversion of the multi-dimensional Laplace transform-expansion by Laguerre series. *Z. Angew. Math. Phys.*, **46**(5), 793-806.
- [65] Moran, P. A. A. (1980). Calculation of the normal distribution function. *Biometrika*, **67**(3), 675-676.

- [66] Morris, C. N. (1982). Natural exponential families with quadratic variance functions. *Ann. Statist.*, **10**, 65-80.
- [67] Morris, C.N. (1983). Natural exponential families with quadratic variance functions: Statistical theory. *Ann. Statist.*, **11**, 515-529.
- [68] Moschopoulos, P. G. (1985). The distribution of the sum of independent gamma random variables. *Ann. Inst. Statist. Math.* **37**, 541-544.
- [69] Pachares, J. (1955). Note on the distribution of a definite quadratic form. *Ann. Math. Statist.*, **26**, 128-131.
- [70] Patel, J. K., Read, C. B. (1982). *Handbook of the normal distribution*. Marcel Dekker. New York and Basel.
- [71] Patnaik, P. B. (1949). The non-central  $\chi^2$  and  $F$  distributions and their applications. *Biometrika*, **36**, 202-232.
- [72] Pearson, E. S., Stephens, M. A. (1962). The goodness-of-fit tests based on  $W_n^2$  and  $U_n^2$ . *Biometrika*, **49**, 397-402.
- [73] Pettitt, A. N. (1978). Generalized Cramér-von Mises statistics for the gamma distribution. *Biometrika*, **65**(1), 232-235.
- [74] Piessens, R., Branders, M. (1971). Numerical inversion of the Laplace transform using generalised Laguerre polynomials. *Proc. Inst. Elec. Engrs.*, **118**, 1517-1522.
- [75] Pollard, H. (1946). Representation of  $e^{-x^\lambda}$  as a Laplace integral. *Bull. Amer. Math. Soc.*, **52**, 908-910.
- [76] Press, S. J. (1966). Linear combinations of noncentral chi-square variates. *Ann. Math. Statist.*, **37**, 480-487.
- [77] Rao, J. N. K., Scott, A. J. (1984). On chi-squared tests for multiway contingency tables with cell proportions estimated from survey data. *Ann. Statist.*, **12**(1), 46-60.
- [78] Ray, W. D., Pitman, A. E. N. T. (1963). Chebyshev polynomial and other new approximations to Mill's ratio. *Ann. Math. Statist.*, **34**, 892-902.
- [79] Robbins, H. (1948). The distribution of a definite quadratic form. *Ann. Math. Statist.*, **20**, 266-270.
- [80] Robbins, H., Pitman, E. J. G., (1949). Application of the method of mixtures to quadratic forms in normal variates. *Ann. Math. Statist.*, **20**, 552-560.
- [81] Romanovsky, V. (1924). Generalization of some types of the frequency curves of Professor Pearson. *Biometrika*, **16**, 106-116.
- [82] Ruben, H. (1962). A new asymptotic expansion for the normal probability integral and Mill's ratio. *J. R. Statist. Soc. B*, **24**, 177-179.

- [83] Ruben, H. (1962). Probability content of regions under spherical normal distributions, IV: The distribution of homogeneous quadratic functions of normal variables. *Ann. Math. Statist.*, **33**, 543-560.
- [84] Sankaran, M. (1959). On the noncentral chi-square distribution. *Biometrika*, **46**, 235-237.
- [85] Sankaran, M. (1963). Approximations to the non-central chi-square distribution. *Biometrika*, **50**, 199-204.
- [86] Särndal, C. E. (1971). Studies in the History of Probability and Statistics. XXVII. The hypothesis of elementary errors and the Scandinavian school in statistical theory. *Biometrika*, **58**(2), 375-391.
- [87] Shah, B.K. (1963). Distribution of definite and of indefinite quadratic forms from a non-central normal distribution. *Ann. Math. Statist.*, **34**, 186-190.
- [88] Shah, B. K., Khatri, C. G. (1961). Distribution of a definite quadratic form for non-central normal variates. *Ann. Math. Statist.*, **32**, 883-887.
- [89] Siddiqui, M. M. (1965). Approximations to the distribution of quadratic forms. *Ann. Math. Statist.*, **36**, 677-682.
- [90] Sim, C. H. (1992). Point processes with correlated gamma interarrival times. *Statist. Probab. Letters*, **15**, 135-141.
- [91] Smirnov, N. V. (1939). On the deviation of the empirical distribution function. *Rec. Math.*, **6**, 3-26.
- [92] Solomon, H., Stephens, M. A. (1977). Distribution of a sum of weighted chi-square variables. *J. A. S. A.*, **72**, 881-885.
- [93] Spiegel, M. R. (1991). *Transformadas de Laplace*. McGraw-Hill, México.
- [94] Stephens, M. A. (1963). The distribution of the goodness-of-fit statistic  $U_n^2$ : I. *Biometrika*, **50**, 303-313.
- [95] Stephens, M. A. (1964). The distribution of the goodness-of-fit statistic  $U_n^2$ : II. *Biometrika*, **51**, 393-397.
- [96] Sephens, M. A., Maag, U. R. (1968). Further percentage points for  $W_n^2$ . *Biometrika*, **55**, 428-430.
- [97] Stuart, A., Ord, J. K., (1987). *Kendall's Advanced Thoery of Statistics*, **1**, *Distribution Theory*. Charles Griffing and Company limited. London.
- [98] Tiku, M.L. (1965a). Laguerre series forms of non-central  $\chi^2$  and  $F$  distributions. *Biometrika*, **52**, 415-427.
- [99] Tiku, M. L. (1965b). Chi-square approximations for the distributions of goodness-of-fit statistics  $U_N^2$  y  $W_N^2$ . *Biometrika*, **52**, 630-633.




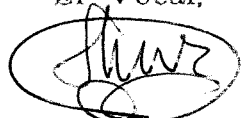

- [100] Tricomi, F. (1935). Transformazione di Laplace e Polinomi di Laguerre. *R. C. Accad. Nat. dei Lincei*, **21**, 232-239.
- [101] Tweedie, M. C. K. (1984). An index which distinguishes between some important exponential families. In *Statistics: Applications and New Directions. Proceedings of the Indian Statistical Institute Golden Jubilee International Conference. Calcutta: Indian Statistical Institute*, 579-604.
- [102] Varberg, D. E. (1966). Convergence of quadratic forms of independent random variables. *Ann. Math. Statist.*, **37**, 567-576.
- [103] Von Mises, R. (1931). *Wahrscheinlichkeitsrechnung*, Deuticke. Vienna.
- [104] Wallace, D. L. (1958). Asymptotic approximations to distributions. *Ann. Math. Statist.*, **29**, 635-654.
- [105] Watson, G. S. (1961). Goodness-of-fit tests on a circle. *Biometrika*, **48**, 109-114
- [106] Weeks, W. T. (1966). Numerical inversion of Laplace transforms using Laguerre functions. *J. Assoc. Comput. Mach.*, **13**, 419-429.
- [107] Widder, D. V. (1935). An application of Laguerre Polynomials. *Duke Math. J.*, **1**, 126-136.
- [108] Wishart, J. (1932). A note on the distribution of correlation ratio. *Biometrika*, **24**, 441-456.
- [109] Wood, A. T. A. (1989). An F approximation to the distribution of a linear combination of chi-squared variables. *Commun. Statist. Simula.*, **18**(4), 1439-1456.

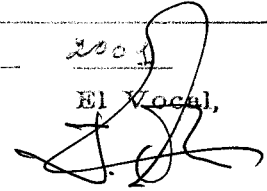
UNIVERSIDAD DE SEVILLA

Reunido el Tribunal integrado por los abajo firmantes  
en el día de la fecha, para juzgar la Tesis Doctoral de  
D.<sup>ña</sup> Aurora Gaspario Martínez  
titulada Desarrollo para funciones de densidad y de distribución  
via eliminación sucesiva  
Señalante  
acordó otorgarle la calificación de Cum Laude por unanimidad

Sevilla, 9 de Febrero 2009

El Vocál,  
  
El Presidente

El Vocal,  
  
El Secretario,  


El Vocal,  
  
El Doctorado,  
