UNIVERSIDAD DE SEVILLA

FACULTAD DE MATEMATICAS

CONDICIONES PROBABILISTICAS PARA LA CONVERGENCIA DE SUMAS ALEATORIAMENTE PONDERADAS DE ELEMENTOS ALEATORIOS EN ESPACIOS LINEALES NORMADOS

Visado en Sevilla,
Sevilla, Abril de 1981

Fdo. Rafael Infante Macías.

Memoria que presenta Manuel H. Ordóñez Cabrera para optar al grado de Doctor en Ciencias Matemáticas.

Fdo. Manuel H. Ordóñez Cabrera.

UNIVERSIDAD DE SEVILLA

FACULTAD DE MATEMATICAS

CONDICIONES PROBABILISTICAS PARA LA CONVERGENCIA DE SUMAS ALEATORIAMENTE PONDERADAS DE ELEMENTOS ALEATORIOS EN ESPACIOS LINEALES NORMADOS

Memoria para optar al grado de
Doctor en Ciencias Matemáticas
realizada bajo la dirección del
Prof. Dr. D. Rafael Infante Macías.

Sevilla, Abril de 1981.

CONDICIONES PROBABILISTICAS PARA LA CONVERGENCIA DE SUMAS ALEATORIAMENTE PONDERADAS DE ELEMENTOS ALEATORIOS EN ESPACIOS LINEALES NORMADOS

MANUEL H. ORDOÑEZ CABRERA

Deseo expresar mi agradecimiento al
Prof. Dr. D. Rafael Infante Macías
por la ayuda recibida de su parte
en la elaboración de este trabajo.

INDICE

INTRODUCCION

Desde el momento en que, tras la muerte de su descubridor, James Bernoulli, se publica la primera ley de los grandes números, se empieza a poder tratar el comportamiento de los fenómenos aleatorios de la Naturaleza mediante un modelo probabilístico; el comportamiento límite de ciertas sumas de variables aleatorias corresponde a los efectos derivados de la superposición de diversos fenómenos naturales.

Las leyes de los grandes números se convierten en uno de los más firmes y fructíferos cimientos para el desarrollo, no sólo de los problemas de convergencia de sumas de variables aleatorias, sino de toda la Teoría de Probabilidades.

Ahora bien, las leyes de los grandes números conciernen, desde un punto de vista global, a la convergencia a una variable aleatoria degenerada (en general, a cero) de sumas del tipo

$$S_n = \sum_k a_{nk} X_k \qquad (1)$$

donde $\{X_k\}$ es una sucesión de variables aleatorias, y donde

$$a_{nk} = \frac{1}{n} \quad \text{para} \quad 1 \leqslant k \leqslant n \qquad\qquad a_{nk} = 0 \quad \text{para} \quad k > n$$

ó bien (2)

$$a_{nk} = \frac{1}{t_n} \quad \text{para} \quad 1 \leqslant k \leqslant n \qquad\qquad a_{nk} = 0 \quad \text{para} \quad k > n$$

donde $\{t_n\}$ es una sucesión de números reales sujetos a algunas condiciones especiales, entre las que suele contarse el ser positivos y crecientes hacia infinito.

El desarrollo, en los últimos decenios, de la Teoría de la Probabilidad, en su parcela correspondiente a los teoremas límites, así como de la Estadística, y las aplicaciones prácticas concretas de aspectos teóricos de ambas ciencias llevan al planteamiento de problemas de convergencia de sumas del tipo (1), donde los pesos $\{a_{nk}\}$ no han de estar sujetos a las rigurosas condiciones clásicas (2).

Es en el momento en que se plantean con intensidad estos problemas, a partir de 1965, cuando toma entidad propia, diferenciado de la ley de los grandes números, de la cual ha nacido, el problema de convergencia a cero de sumas ponderadas de variables aleatorias.

Se obtienen resultados que son extensiones de leyes de los grandes números; otros que surgen como consecuencia de problemas planteados en control de calidad; y así otros muchos, hasta convertirse este área en una zona de amplia y productiva investigación.

En la siguiente reseña histórica nos referimos a los principales resultados obtenidos hasta la fecha en este campo, centrándonos básicamente en aquéllos que están más en la línea de nuestro trabajo, y que con mayor razón se pueden considerar como precedentes de éste.

-En 1965, Jamison, Orey y Pruitt [25] obtienen resultados de convergencia para sumas ponderadas de la forma siguiente:

$$S_n = \frac{1}{b_n} \sum_{k=1}^{n} a_k X_k$$

donde $a_k \in R^+$, $\forall k$, donde $b_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$, y $\{X_n\}$ es una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas.

-En 1966, Pruitt [38] obtiene dos importantes resultados para variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas:

TEOREMA 0.1.- Sea $\{X_n;\ n=1,2,\ldots\}$ una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas, verificando $E|X_1| < \infty$. Sea $\{a_{nk};\ k,n=1,2,\ldots\}$ una sucesión de Toeplitz de números reales tal que $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} = 1$. Una condición necesaria y suficiente para que $S_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}X_k \longrightarrow EX_1$ en probabilidad es que $\max_k |a_{nk}| \longrightarrow 0$ cuando $n \longrightarrow \infty$.

TEOREMA 0.2.- Sea $\{X_n;\ n=1,2,\ldots\}$ una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas. Denotemos por $\{a_{nk};\ k,n=1,2,\ldots\}$ una sucesión de Toeplitz de números reales tal que $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} = 1$. Si $\max_k |a_{nk}| = \Theta(n^{-\gamma})$ para algún $\gamma > 0$, entonces $E|X_1|^{1+1/\gamma} < \infty$ implica que

$S_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}X_k \longrightarrow EX_1$ con probabilidad 1.

-En el mismo año 1966, Franck y Hanson [21] obtienen resultados que proporcionan la razón de convergencia para sumas del tipo $S_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}(X_k - EX_k)$ de variables aleatorias $\{X_k\}$ independientes y con momentos absolutos de primer orden finitos, ponderadas por números reales $\{a_{nk}\}$ tales que existen constantes c_1, c_2, c_3, α, β, ρ y t de modo que se verifique:

$$\sum_k |a_{nk}| \leq c_1 n^{\alpha} \quad ; \quad \max_k |a_{nk}| \leq c_2 n^{-\beta} \quad ; \quad \sum_k |a_{nk}|^t \leq c_3 n^{-\rho}.$$

Para que este sistema de desigualdades sea consistente ha de suponerse que se cumplen las siguientes desigualdades:

$\rho \geqslant \beta(t+1)-\alpha \quad ; \quad \beta \geqslant -\alpha \quad ; \quad \beta \geqslant \rho/t \quad ; \quad t > 1.$

-También en 1966, Chow [14] efectúa una extensión del teorema de Hsu y Robbins en el sentido siguiente:

<u>TEOREMA 0.3.</u>- Sea $\{X_n\}$ una sucesión de variables aleatorias independientes, idénticamente distribuidas, con $EX_1 = 0$. Denotemos por $\{a_{nk};\ k,n=1,2,\ldots\}$ una doble sucesión de números reales tal que $a_{nk} = 0$ si $k > n$, y $|a_{nk}| \leq KA_n$, para alguna constante $0 < K < \infty$, donde $A_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}^2$.

Si para algún $\alpha \mid 0 < \alpha \leqslant 1$, es $A_n \leqslant Kn^{-\alpha}$, y $E|X_1|^{2/\alpha} \leqslant K$, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} P\left[\left|\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}X_k\right| \geqslant \varepsilon\right] < \infty$ para cualquier $\varepsilon > 0$ dado.

Es decir, $S_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}X_k \longrightarrow 0$ completamente, y, por tanto, con probabilidad 1.

La convergencia completa de S_n es obtenida por Chow también en el caso de no idéntica distribución:

<u>TEOREMA 0.4.</u>- Sea $\{X_n\}$ una sucesión de variables aleatorias independientes con $EX_n = 0 \quad \forall\, n = 1,2,\ldots$. Sea $\{a_{nk};\ k,n=1,2,\ldots\}$ una doble sucesión de números reales tal que $a_{nk} = 0$ si $k > n^{\lambda}$ para algún $1 \leqslant \lambda < \infty$, y $|a_{nk}| \leq KA_n$ para algún $K < \infty$, donde $A_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}^2$. Si para algún $0 < \alpha \leq 1$, es $A_n \leq Kn^{-\alpha}$, y se tiene $E\left[|X_n|^{(1+\lambda)/\alpha}(\log^+|X_n|)^2\right] \leqslant K$, entonces $S_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}X_k \longrightarrow 0$ completamente.

En este mismo artículo, Chow obtiene también teoremas límites para sumas ponderadas de variables aleatorias generalizadas gaussianas.

-En 1968, Stout [41] generaliza el teorema 0.3. de Chow, reemplazando las condiciones sobre $\{a_{nk}\}$ y $\{A_n\}$ por otras más débiles, y extendiendo el resultado al caso en que sea $E|X_k|^{2/\alpha} < \infty$ para algún $\alpha > 1$, pero $EX_k^2 = \infty$.

<u>TEOREMA 0.5.</u>- Sea $\{X_n\}$ una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas, tal que para algún $\alpha > 0$ es $E|X_n|^{2/\alpha} < \infty$, y $EX_n = 0$ si $0 < \alpha \leq 1$. Denotemos por $\{a_{nk};\ k,n=1,2,\ldots\}$ una doble sucesión de números reales tal que $|a_{nk}| \leq Kn^{-\alpha}$ para algún $0 < K < \infty$; $a_{nk} = 0$ para $k > n$, y con $\sum_{n=1}^{\infty} exp(-t/A_n) < \infty$, $\forall\ t > 0$, donde $A_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}^2$.

Entonces, $S_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}X_k \longrightarrow 0$ completamente.

Notemos que la condición $\sum_{k=1}^{\infty} exp(-t/A_n) < \infty$, $\forall\ t > 0$, puede ser verificada en la práctica si se tiene en cuenta que es implicada por la condición $A_n = o((\log n)^{-1})$. Ahora bien, tal condición no se cumple aunque se verifique que $A_n = \Theta((\log n)^{-1})$.

Stout también extiende el teorema 0.4. de Chow, para variables aleatorias $\{X_n\}$ no necesariamente idénticamente distribuidas, considerando el caso en que las filas de la matriz constituida por los pesos $\{a_{nk}\}$ puedan tener infinitamente muchos términos no nulos, y el caso en que los momentos de segundo orden de las variables aleatorias X_n puedan ser infinitos.

-En 1969, Hanson y Wright [22] , y Rohatgi [39] , generalizan algunos de los resultados obtenidos por Franck y Hanson en 1966. Estas generalizaciones van en el sentido de ampliar el campo de validez de algunos resultados al caso $t < 1$, con ligeras modificaciones en otras condiciones, ó de debilitar las condiciones sobre los momentos de las variables, aunque bajo más fuertes hipótesis sobre los pesos $\{a_{nk}\}$.

-En 1971, Rohatgi [40] extiende los resultados de Pruitt (1966) a variables aleatorias $\{X_n\}$ independientes, no necesariamente idénticamente distribuidas, pero con la condición de que estén uniformemente acotadas en probabilidad por una variable aleatoria X, en el sentido de que sea $P\left[|X_n| \geqslant x\right] \leqslant P\left[|X| \geqslant x\right]$, $\forall n$, $\forall x > 0$.

Los dos resultados importantes a que llega Rohatgi vienen dados por los siguientes teoremas.

TEOREMA 0.6.- Sea $\{X_n\}$ una sucesión de variables aleatorias independientes, uniformemente acotadas en probabilidad por una variable aleatoria X, tal que $E|X|^r < \infty$ para algún $0 < r \leq 1$. Si $r = 1$, supondremos, además, que $EX_n = 0$, $\forall n$. Denotemos por $\{a_{nk};\ k,n=1,2,\ldots\}$ una doble sucesión de números reales verificando

a) $\lim_{n\to\infty} a_{nk} = 0$ para cada k

b) $\sum_{k=1}^{\infty} |a_{nk}|^r \leq C$ para cada n, con C constante positiva

c) $\lim_{n\to\infty}(\max_k |a_{nk}|) = 0$.

En tales condiciones, $S_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}X_k \longrightarrow 0$ en probabilidad.

TEOREMA 0.7.- Sea $\{X_n\}$ una sucesión de variables aleatorias independientes, con $E|X_n| < \infty$ y $EX_n = 0$, $\forall\, n = 1,2,\ldots$, y uniformemente acotadas en probabilidad por una variable aleatoria X. Sea $\{a_{nk};\ k,n=1,2,\ldots\}$ una doble sucesión de números reales, que es de Toeplitz. Si $\max_k |a_{nk}| = \Theta(n^{-\nu})$, para $\nu > 0$, entonces $E|X|^{1+1/\nu} < \infty$ implica que $S_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}X_k \longrightarrow 0$ con probabilidad 1.

-En 1972, Wright [56] establece algunos de los resultados obtenidos por Rohatgi (1969) sin necesidad de exigir la condición de independencia de las variables.

-En 1973, Chow y Lai [15] estudian el comportamiento límite de sumas ponderadas de la forma $\sum_{i=1}^{n} c_{n-i}X_i$, donde $\{X_n\}$ es una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas, con media cero, y $\{c_n\}$ es una sucesión de números reales de cuadrado sumable.

Las sumas ponderadas de este tipo son utilizadas por Lai [28] en problemas de control de calidad.

En el artículo a que nos referimos, Chow y Lai obtienen resultados análogos a la ley de los grandes números de Kolmogorov (ley fuerte) ó a la ley del logaritmo iterado para ese tipo especial de sumas ponderadas. No obstante, también extienden a sumas ponderadas del tipo más general, $\sum_{k=1}^{n} a_{nk}X_k$, algunos de los resultados obtenidos para las sumas $\sum_{i=1}^{n} c_{n-i}X_i$.

-En 1973, se publica un trabajo de Brown, Eagleson y Fisher [12] en el que éstos consideran sumas de la forma $S_n = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{nk} X_k$, donde $\{X_n\}$ es una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas, y donde los pesos α_{nk} tienen un carácter aleatorio. En general, consideran que $\{\alpha_{nk}\}$ son variables aleatorias no negativas e independientes de las $\{X_k\}$. En su trabajo, estos autores obtienen varios teoremas centrales del límite, y prueban una ley débil similar a la de Jamison, Orey y Pruitt (1965) en el caso de pesos no aleatorios. Algunos de los métodos empleados en las demostraciones son generalizados al caso de no independencia entre $\{\alpha_{nk}\}$ y $\{X_k\}$.

-En 1975, Tomkins [51] prueba un resultado para sumas ponderadas de variables aleatorias que verifican la ley fuerte de los grandes números, que contiene reminiscencias de resultados de Chow, Pruitt y Stout:

<u>TEOREMA 0.8.</u>- Sea $\{X_n\}$ una sucesión de variables aleatorias integrables que satisfacen la ley fuerte de los grandes números. Sea $\{a_{nk};\ k,n=1,2,\ldots\}$ una doble sucesión de números reales que satisfacen, para cada $n \geq 1$:

a) $\sum_{k=1}^{\infty} |a_{nk} - a_{n,k+1}| = \Theta(n^{-1})$

b) $\sum_{k=1}^{\infty} |a_{nk}| E|X_k| < \infty$ ó $\sum_{k=1}^{\infty} |a_{nk} - a_{n,k+1}| E\left|\sum_{j=1}^{k} X_j\right| < \infty$

c) $\limsup_{k\to\infty} k a_{nk} < \infty$

Supongamos además que

d) $\lim_{n\to\infty} a_{nk} = L$ para algún L y para todo $k \geq 1$.

Entonces, $S_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} X_k \longrightarrow 0$ con probabilidad 1.

-En 1977, Wright, Platt y Robertson [57] desarrollan y generalizan el estudio de Jamison, Orey y Pruitt (1965) sobre la convergencia de sumas ponderadas del tipo $\frac{1}{b_n}\sum_{k=1}^{n} a_k X_k$, con $b_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$.

La consideración de los procesos estocásticos como elementos aleatorios tomando sus valores en espacios de funciones por parte de Doob (1947):"Probability in function spaces", así como la memoria de Mourier (1953):"Eléments aléatoires dans un espace de Banach", y el excelente trabajo de Prohorov (1956):"Convergence of random processes and limit theorems in probability theory", crean las condiciones que motivan el estudio de los elementos aleatorios en espacios lineales topológicos, y, particularmente, sobre todo, en espacios de Banach y espacios lineales normados en general.

Se inician los trabajos de investigación en el área de los teoremas límites de sumas de elementos aleatorios en tales espacios inquiriendo, como parece natural, sobre la validez de la generalización a estos elementos aleatorios de resultados válidos para variables aleatorias (elementos aleatorios en R).

El ciclo histórico deviene nuevamente a sus orígenes, y los primeros teoremas límites que se investigan son leyes de los grandes números.

Pero la realidad juega una mala (!ó buena!) pasada a los investigadores, porque son muy pocas las leyes de los grandes números que se pueden generalizar punto por punto.

Parece, pues, que en el caso de elementos aleatorios hay que ser bastante receloso ante plausibles conjeturas, y hay que imponer restricciones más serias que en el caso de variables aleatorias.

Esto lleva a algunos autores (Beck, Giesy, Woyczynski y Hoffmann-Jørgensen, entre otros) a la consideración de la necesidad de imponer ciertas condiciones geométricas a los espacios en que tomen sus valores los elementos aleatorios. Estas condiciones: reflexividad, B-convexidad, super-reflexividad, condiciones G_α, tipo ó cotipo p, etc., son, en su mayoría, condiciones de cancelación.

Parecería como si con sólo condiciones probabilísticas pocos resultados interesantes pudieran obtenerse en este campo, pero no ocurre así, como lo pone de manifiesto el hecho de que muchas de las condiciones geométricas anteriormente mencionadas son equivalentes a condiciones probabilísticas.

Así, la B-convexidad es una condición geométrica equivalente al requerimiento probabilístico de que la ley fuerte de los grandes números siga para sucesiones de elementos aleatorios en un espacio de Banach, tales que sean independientes y de varianzas uniformemente acotadas; que un espacio de Banach B sea de tipo 2 es equivalente a que la ley fuerte de los grandes números siga para cada sucesión de elementos aleatorios $\{X_n\}$ en B, independientes, con $EX_n = 0$ $\forall$ n, y verificando la condición de Kolmogorov: $\sum_n (\sigma^2(X_n)/n^2) < \infty$; un espacio de Banach B es de tipo Rademacher p, con $p \in (1,2]$ si, y sólo si, existe una constante $C > 0$, tal que para cada sucesión finita $\{X_n\}$ de elementos aleatorios en B, independientes, con media cero, se tiene que:

$$\frac{1}{n} E \left\| \sum_{i=1}^{n} X_i \right\| \leq C\left(\sum_{i=1}^{n} E \|X_i\|^p / i^p \right)^{1/p} \text{ ; etc.}$$

Es por este motivo por lo que en nuestra memoria trabajaremos con elementos aleatorios definidos en espacios lineales normados lo más generales posible (sin imponer condiciones geométricas sobre ellos), y sólo restringiremos las condiciones de tipo probabilístico. Siempre que tratemos sobre la convergencia de elementos aleatorios en espacios lineales normados, y a menos que indiquemos expresamente otra cosa, nos referiremos a convergencia en la topología de la norma.

Solamente a partir de la última década se han obtenido resultados importantes sobre la convergencia de sumas $\sum_k a_{nk}V_k$, con $\{V_k\}$ elementos aleatorios en espacios lineales normados, y $\{a_{nk}\}$ números reales no sujetos necesariamente a las condiciones clásicas (2).

-En 1974, Padgett y Taylor [33] obtienen buenos resultados de convergencia de sumas ponderadas de elementos aleatorios definidos en espacios de Banach reales separables. El principal de ellos es la generalización a espacios de Banach del teorema 0.2. de Pruitt:

TEOREMA 0.9.- Sea $\{V_n\}$ una sucesión de elementos aleatorios independientes e idénticamente distribuidos, definidos en un espacio de Banach separable X. Sea $\{a_{nk};k=1,2,\ldots,n;n=1,2,\ldots\}$ una sucesión de Toeplitz de números reales tal que $\max_k |a_{nk}| = \Theta(n^{-\alpha})$ para algún $\alpha > 0$. Supongamos además que $E\|V_1\|^{1+1/\alpha} < \infty$.

En tales condiciones, $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_{nk}V_k \longrightarrow 0$ con probabilidad 1.

Posteriormente, en [48], Taylor ha extendido el teorema anterior al caso en que X sea espacio lineal normado separable, no necesariamente de Banach.

También consiguen Padgett y Taylor un resultado en la misma línea del teorema 0.7. de Rohatgi, para elementos aleatorios en un espacio de Banach con base de Schauder:

TEOREMA 0.10.- Sea $\{V_n\}$ una sucesión de elementos aleatorios independientes en un espacio de Banach con base de Schauder, y sea $EV_n = 0 \quad \forall\, n$. Sea $\{a_{nk};k=1,2,\ldots,n;n=1,2,\ldots\}$ una sucesión de Toeplitz de números reales tal que $\max_k |a_{nk}| = \Theta(n^{-\alpha})$ para algún $\alpha > 0$. Denotemos por $\{b_i\}$ la base de Schauder, y por

$\}f_i\{$ sus funcionales coordenados asociados. Supomgamos que existen variables aleatorias $\{A_i\}$ y $\{A_m\}$ tales que

a) $P\left[|f_i(V_k)| \geqslant a\right] \leqslant P\left[|A_i| \geq a\right]$, $\forall a>0$, $\forall k = 1,2,\ldots$ y para cada funcional coordenado f_i.

b) $E|A_i|^{1+1/\alpha} < \infty$ y $E|A_m|^{1+1/\alpha} < \infty$ para cada i y m.

c) $P\left[\big|\, \|Q_m(V_k)\| - E\|Q_m(V_k)\| \,\big| \geqslant a\right] \leqslant P\left[|A_m| \geqslant a\right]$

$\forall a > 0$, $\forall k = 1,2,\ldots$, y para cada m.

Supongamos además que $\sup_k E\|Q_m(V_k)\| \longrightarrow 0$ cuando $m \longrightarrow \infty$.

Entonces, $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_{nk}V_k \longrightarrow 0$ con probabilidad 1.

-En 1975, ambos autores [45] establecen que la convergencia en probabilidad en cada coordenada de una base de Schauder de un espacio de Banach es equivalente a la convergencia en probabilidad en la topología de la norma, bajo ciertas condiciones generales sobre los elementos aleatorios y los pesos. Esto lleva inmediatamente a establecer la equivalencia entre la convergencia en probabilidad en la topología de la norma y en la topología lineal débil.

TEOREMA 0.11.- Sea X un espacio de Banach separable. Denotemos por $\{a_{nk}; k=1,2,\ldots,n; n=1,2,\ldots\}$ una sucesión de Toeplitz de números reales, y sea $\}V_n\{$ una sucesión de elementos aleatorios en X, idénticamente distribuidos, con $E\|V_1\| < \infty$.

Entonces, para cada funcional lineal continuo $f \in X^*$, se tiene que $\sum_{k=1}^{n} a_{nk} f(V_k - EV_1) \longrightarrow 0$ en probabilidad si, y sólo si $\left\|\sum_{k=1}^{n} a_{nk}(V_k - EV_1)\right\| \longrightarrow 0$ en probabilidad.

-En 1976, Padgett y Taylor [34] obtienen nuevos resultados de convergencia; esta vez para elementos aleatorios no idénticamente distribuidos, a costa de fortalecer los requisitos sobre los momentos, y hacer más restrictivas las condiciones sobre los pesos.

-También en 1976, Alf [2] considera sumas ponderadas $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_{nk} V_k$ de elementos aleatorios $\{V_n\}$ definidos sobre un espacio de Banach, donde los pesos $\{a_{nk}\}$ son promedios correspondientes a una sucesión $\{c_k\}$ de números reales positivos, ó sea, se tiene $a_{nk} = c_k/b_n$, donde $b_n = \sum_{k=1}^{n} c_k$.

Alf obtiene unas condiciones suficientes para la convergencia de S_n, que generalizan los resultados que Jamison, Orey y Pruitt (1965) obtuvieron para variables aleatorias.

-En 1978, Wei y Taylor [52] utilizan la condición de compacidad débil y el truncamiento en un subconjunto compacto del espacio para soslayar la condición de idéntica distribución y evitar la imposición de condiciones de tipo geométrico.

Así, es demostrado el teorema siguiente, establecido en la misma línea del teorema 0.11.:

<u>TEOREMA 0.12.</u>- Sea X un espacio de Banach separable. Sea $\{V_n\}$ una sucesión compacta débil de elementos aleatorios en X, con media cero, y tales que $E\|V_n\|^r \leq \Gamma$, $\forall n = 1,2,\ldots$, algún $r>1$, y alguna constante $\Gamma > 0$.

Sea $\{a_{nk};\ k,n=1,2,\ldots\}$ una doble sucesión de números reales satisfaciendo, para alguna constante $C > 0$: $\sum_{k=1}^{\infty} |a_{nk}| \leq C$.

Entonces, $\left|\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} f(V_k)\right| \longrightarrow 0$ en probabilidad para cada funcional lineal continuo $f \in X^*$ si, y sólo si $\left\|\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} V_k\right\| \longrightarrow 0$ en probabilidad.

En el mismo artículo, Wei y Taylor obtienen un importante resultado en el ámbito del teorema 0.7. de Rohatgi:

TEOREMA 0.13.- Sea X un espacio de Banach separable. Sea $\{V_n\}$ una sucesión compacta débil de elementos aleatorios independientes sobre X, con $E\|V_n\|^r \leq \Gamma$, $\forall\, n = 1,2,\ldots$, algún $r > 1$ y $\Gamma > 0$. Sea $\{a_{nk}; k=1,2,\ldots,n; n=1,2,\ldots\}$ una sucesión de Toeplitz de números reales que verifica que $\max_k |a_{nk}| = \mathcal{O}(n^{-s})$ para algún s tal que $0 < 1/s < r - 1$.

Entonces, $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_{nk}(V_k - EV_k) \longrightarrow 0$ con probabilidad 1.

A partir de este resultado, los autores obtienen una ley fuerte de los grandes números que abarca alguna de las logradas por Hoffmann-Jørgensen y Pisier [23] .

Si los elementos aleatorios $\{V_n\}$ son independientes y toman sus valores en un compacto, las condiciones para la convergencia se pueden simplificar mucho, siendo innecesaria, inclusive, una condición de momento similar a la del teorema 0.9., como pone de manifiesto Taylor en [48] .

-En 1979, Bozorgnia y Rao [11] extienden los teoremas 0.6. y 0.7. de Rohatgi, casi punto por punto, a espacios de Banach separables:

TEOREMA 0.14.- Sea $\{V_n\}$ una sucesión de elementos aleatorios independientes por pares, que toman valores en un espacio de Banach separable, uniformemente acotados en probabilidad por un elemento aleatorio V (equivalentemente, acotados en probabilidad por la variable aleatoria $\|V\|$). Supongamos que $E\|V\|^r < \infty$ para algún $0 < r < 1$. Sea $\{a_{nk};\ k,n=1,2,\ldots\}$ una doble sucesión de números reales que satisfacen:

a) $\lim_{n \to \infty} a_{nk} = 0$ para cada k

b) $\sum_{k=1}^{\infty} |a_{nk}|^r \leq S$ para cada n, con $S > 0$, constante.

Si $\lim_{n\to\infty}(\max_k |a_{nk}|) = 0$, entonces $S_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}V_k \longrightarrow 0$ en probabilidad.

TEOREMA 0.15.- Sea $\{V_n\}$ una sucesión de elementos aleatorios independientes en un espacio de Banach separable, uniformemente acotados en probabilidad por un elemento aleatorio V. Denotemos por $\{a_{nk};\ k,n=1,2,\ldots\}$ una doble sucesión de números reales que satisface:

a) $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} |a_{nk}| = 0$

b) $\max_k |a_{nk}| = \mathcal{O}(n^{-\alpha})$ para algún $\alpha > 0$.

Supongamos que $E\|V\|^{1+1/\alpha} < \infty$.

Entonces, $S_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}V_k \longrightarrow 0$ con probabilidad 1.

En este mismo trabajo de Bozorgnia y Rao, también es extendido el teorema 0.9. de Padgett y Taylor, relajando ligeramente alguna condición:

TEOREMA 0.16.- Sea $\{V_n\}$ una sucesión de elementos aleatorios en un espacio de Banach separable, idénticamente distribuidos e independientes por pares. Sea $\{a_{nk};\ k,n=1,2,\ldots\}$ una sucesión de Toeplitz de números reales, con:

a) $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} = 1$

b) $\max_k |a_{nk}| = \mathcal{O}(n^{-r})$ para algún $r > 1$.

Supongamos, además, que $E\|V_1\|^{1+1/r} < \infty$.

Entonces, $S_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} V_k \longrightarrow EV_1$ con probabilidad 1.

Si $EV_1 = 0$, se puede suprimir la condición a). Si la sucesión $\{V_n\}$ está formada por elementos aleatorios idénticamente distribuidos e independientes, la conclusión es válida, y podemos suponer $r > 0$.

Es primordialmente en los últimos años cuando se toma conciencia del carácter plenamente aleatorio de muchos de los problemas considerados en las ciencias aplicadas; tal convemcimiento conduce al planteamiento de modelos matemáticos que llevan consigo el estudio del comportamiento límite de sumas ponderadas de elementos aleatorios en espacios lineales normados, en las cuales los pesos son, a su vez, variables aleatorias.

El primer antecedente significativo de este tipo de consideraciones aparece en 1973, en [12] . Taylor y Padgett, en 1972, 1974 y 1976 obtienen, como ponemos de manifiesto en la reseña histórica que sigue, resultados indirectos sobre sumas aleatoriamente ponderadas de elementos aleatorios en espacios lineales normados, no siendo hasta 1978 en que comienza a tratarse directamente del tema. Es por ello por lo que la bibliografía y los resultados obtenidos hasta hoy son muy escasos, y, por tanto, la reseña histórica es casi completa.

-En 1972, Taylor [43] prueba una ley débil de los grandes números que es en realidad un resultado de convergencia del tipo que consideramos, para pesos aleatorios $\{A_n\}$:

<u>TEOREMA 0.17.</u>- Sea X un espacio lineal normado separable, y sea $\{V_n\}$ una sucesión de elementos aleatorios idénticamente distribuidos en X, con $E\|V_1\|^{s/(s-1)} < \infty$ para algún $s > 1$.

Sea $\{A_n\}$ una sucesión de variables aleatorias que verifican

$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(E|A_k|^s)^{1/s} \leq L$, para cada n, con L constante positiva.

Sea $E(A_n V_n) = E(A_1 V_1)$, para cada n.

Entonces, para cada $f \in X^*$, la ley débil de los grandes números sigue para $\{f(A_n V_n)\}$ si, y sólo si, se verifica que

$$\left\|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}A_k V_k - E(A_1 V_1)\right\| \longrightarrow 0 \text{ en probabilidad.}$$

-En 1974, Taylor y Padgett [44] obtienen una ley fuerte de los grandes números que está en el ámbito del campo que tratamos:

TEOREMA 0.18.- Sea X un espacio lineal normado separable. Sea $\{V_n\}$ una sucesión de elementos aleatorios en X, idénticamente distribuidos. Sea $\{A_n\}$ una sucesión de variables aleatorias.

Supongamos que se verifica:

a) $E\|V_1\|^{2r/(r-1)} < \infty$ y $\sum_{n=1}^{\infty}(E|A_n|^{2r})^{1/r}/n^2 < \infty$

para algún $r > 1$

b) $E\|V_1\|^{s/(s-1)} < \infty$ y $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(E|A_k|^s)^{1/s} \leq L$ para todo n, y para algún $s > 1$ y $L > 0$.

Si $\{A_n V_m\}$ es una sucesión de elementos aleatorios independientes, y si $E(A_n V_n) = E(A_1 V_1)$ para cada n, entonces se verifica que $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}A_k V_k \longrightarrow E(A_1 V_1)$ con probabilidad 1.

-En 1976, Taylor y Padgett [46] obtienen un resultado híbrido de convergencia de sumas de elementos aleatorios ponderados por una sucesión aleatoria y por una doble sucesión de números reales:

TEOREMA 0.19.- Sea X un espacio de Banach separable, y sea $\{V_n\}$ una sucesión de elementos aleatorios idénticamente distribuidos en X, tal que $E\|V_1\|^r < \infty$ para algún $r > 1$. Denotemos por $\{a_{nk};k=1,2,\ldots,n;n=1,2,\ldots\}$ una sucesión de Toeplitz de números reales. Sea $\{A_n\}$ una sucesión de variables aleatorias, de modo que $\sum_{k=1}^{n}|a_{nk}|(E|A_k|^{r/(r-1)})^{(r-1)/r} \leq \Gamma$, $\forall$ n, donde Γ es una constante positiva; sea $E(A_nV_n) = E(A_1V_1)$ para cada n.

Entonces, para cada funcional lineal continuo $f \in X^*$, se tiene que $\sum_{k=1}^{n} a_{nk} f(A_kV_k - E(A_1V_1)) \longrightarrow 0$ en probabilidad si, y sólo si $\left\|\sum_{k=1}^{n} a_{nk}(A_kV_k - E(A_1V_1))\right\| \longrightarrow 0$ en probabilidad.

-En 1978, Wei y Taylor [53] obtienen dos resultados considerando una doble sucesión $\{A_{nk}\}$ de pesos aleatorios. El primero de estos resultados es una generalización de un teorema de Chow y Lai (1972) para sumas ponderadas de variables aleatorias.

TEOREMA 0.20.- Sea $\{V_n\}$ una sucesión de elementos aleatorios independientes e idénticamente distribuidos, en un espacio lineal normado separable, tal que $E\|V_1\|^r < \infty$ para algún $r \in [1,2)$.

Sea $\{A_{nk};k=1,2,\ldots,n;n=1,2,\ldots\}$ una doble sucesión de variables aleatorias que verifican, para alguna constante Γ :

$$\limsup_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} A_{nk} \leq \Gamma \quad \text{con probabilidad 1.}$$

Entonces, $n^{-1/r} \sum_{k=1}^{n} A_{nk} V_k \longrightarrow 0$ con probabilidad 1.

TEOREMA 0.21.- Sea $\{V_n\}$ una sucesión de elementos aleatorios en un espacio lineal normado separable, tal que se verifica:

$\limsup_{n\to\infty} n^{-r} E\left(\sum_{k=1}^{n} \|V_k\|^2\right)^r < \infty$ para algún $r \in [1,2)$.

Sea $\{A_{nk}; k=1,2,\ldots,n; n=1,2,\ldots\}$ una doble sucesión de variables aleatorias que verifican la condición:

$$\limsup_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} (E|A_{nk}|^{2r})^{1/r} < \infty .$$

Entonces, $n^{-1/r} \sum_{k=1}^{n} A_{nk} V_k \longrightarrow 0$ en la r-media.

-En el mismo año, 1978, Buldygin y Pidsuha [13] , al probar algunos teoremas de comparación para series de elementos aleatorios en un espacio de Banach separable, que posteriormente utilizan para estudiar la ley de los grandes números, obtienen algunos resultados dentro del campo de que nos ocupamos, el principal de los cuales es el siguiente:

TEOREMA 0.22.- Sea $\{V_k\}$ una sucesión de elementos aleatorios en un espacio de Banach separable B.

Si $\sum_{k=1}^{\infty} A_k V_k$ converge con probabilidad 1 en la norma de B, para alguna sucesión $\{A_k\}$ de variables aleatorias normales estandard e independientes, entonces $\sum_{k=1}^{\infty} B_k V_k$ también converge con probabilidad 1 en la norma de B, para cada sucesión $\{B_k\}$ de variables aleatorias independientes con $EB_k = 0$ y $E\left[\sup_{k\geq 1} |B_k|\right] < \infty, \forall k$.

SINTESIS DE LA MEMORIA

En el capítulo I de nuestro trabajo estudiamos condiciones para la convergencia a cero de sumas aleatoriamente ponderadas $S_n = \sum_{k=1}^{n} A_{nk}V_k$, donde $\{V_n\}$ es una sucesión de elementos aleatorios idénticamente distribuidos.

Es exigida previamente la condición de independencia para la sucesión $\{V_n\}$, con el fin de probar una generalización de los teoremas 0.2., 0.3. y 0.5.; y posteriormente es estudiado el efecto causado en los pesos aleatorios $\{A_{nk};k=1,2,\ldots,n;n=1,2,\ldots\}$ por la supresión de la condición de independencia. En este sentido es de destacar el teorema I.4..

Con posterioridad, probamos una serie de resultados en los que la única condición que se exige a los pesos es que, en un cierto sentido que precisamos, "no se desvíen en demasía" de una doble sucesión de constantes reales $\{a_{nk};k=1,2,\ldots,n;n=1,2,\ldots\}$ que constituyen una sucesión de Toeplitz y están sometidas a algunas condiciones restrictivas. Son de destacar en este sentido los teoremas I.5. y I.6..

En un ejemplo ponemos de manifiesto las dificultades que pueden surgir al suprimir la hipótesis de idéntica distribución de los elementos aleatorios $\{V_n\}$. Una de las condiciones alternativas que se muestran más fructíferas es la de acotación uniforme de momentos de un cierto orden. Nuestro capítulo II está dedicado a elementos aleatorios que verifiquen condiciones de este tipo.

Imponiendo una condición de acotación uniforme en probabilidad, unida a la de acotación uniforme para algún momento de orden $r < 1$ a los elementos aleatorios, obtenemos una extensión de los teoremas 0.6. y 0.14., en el teorema II.1.

Más adelante demostramos que la condición de idéntica distribución del teorema I.4. puede ser sustituida por una de acotación uniforme de momentos, e inclusive por una de acotación uniforme en probabilidad, del mismo sentido que la de Rohatgi.

Varios de nuestros resultados requieren condiciones sobre el rango de las variables aleatorias $\{A_{nk}\}$; son condiciones del tipo: $P\left[\max_k |A_{nk}| = \mathcal{O}(n^{-\alpha})\right] = 1$, con α perteneciente a un cierto intervalo de la semirrecta real positiva. Probamos que también pueden ser obtenidos interesantes resultados de convergencia imponiendo condiciones del tipo anterior sólo sobre alguno de los momentos de los pesos aleatorios.

Para finalizar este capítulo, el teorema II.8. generaliza el teorema 0.10 de Padgett y Taylor para elementos aleatorios en un espacio de Banach con base de Schauder, sujetos a ciertas condiciones de acotación en probabilidad.

La incorrelación entre $\{|A_{nk}|\}$ y $\{\|V_k\|\}$ juega, en algunos de los resultados obtenidos, un papel importante.

En el capítulo III estudiamos la convergencia de las sumas $S_n = \sum_{k=1}^{n} A_{nk}V_k$ cuando los elementos aleatorios están sujetos a algunas condiciones distintas de la idéntica distribución ó la acotación uniforme de momentos.

Así, por ejemplo, obtenemos en el teorema III.1. un interesante resultado en el caso en que los elementos aleatorios-resto que se obtienen al truncar $\{V_n\}$, en norma, en una constante $M > 0$, verifiquen una cierta ley de los grandes números.

El teorema III.3. nos indica que si $\sum_{n=1}^{\infty} E\|V_n\| < \infty$, la incorrelación entre $|A_{nk}|$ y $\|V_k\|$ y una condición sobre $\{E|A_{nk}|\}$ nos dan el resultado de convergencia apetecido.

Si los elementos aleatorios $\{V_n\}$ están respectivamente acotados en norma por una sucesión de constantes reales $\{M_n\}$ tal que $\sum_{n=1}^{\infty} M_n < \infty$, ó bien $\lim_{n\to\infty} M_n = 0$ en otros casos, condiciones no muy fuertes sobre los pesos nos proporcionarán la convergencia de S_n.

El capítulo IV está dedicado al estudio de condiciones bajo las cuales la convergencia en probabilidad en la topología de la norma de sumas, $S_n = \sum_{k=1}^{\infty} A_{nk} V_k$, aleatoriamente ponderadas de elementos aleatorios en espacios de Banach separables, es equivalente a la convergencia en probabilidad de S_n en la topología débil.

Las condiciones a que han de estar sometidos los elementos $\{V_n\}$ van siendo progresivamente relajadas, desde la condición de idéntica distribución hasta la compacidad débil con momentos acotados, para pasar después a exigir sólo una condición de acotación de momentos.

Los resultados son probados en primer lugar para espacios de Banach separables con base de Schauder; posteriormente, y teniendo en cuenta que cualquier espacio de Banach separable puede ser isométricamente inmerso en un espacio de Banach separable con base de Schauder (por ejemplo, el espacio de todas las funciones reales continuas sobre el intervalo $[0,1]$, $C[0,1]$), es omitida la necesidad de la existencia de base de Schauder en el espacio en que toman sus valores los elementos aleatorios $\{V_n\}$.

Por último, el capítulo V está dedicado a dejar constancia de algunas aplicaciones. La relación no puede ser exhaustiva, y, aunque es plausible la presentación de problemas de convergencia del tipo que estudiamos en control de calidad, estimación, teoría de la decisión, etc., particularizamos estas aplicaciones en el campo de la teoría de procesos estocásticos (estudiando dos problemas de convergencia de dobles sucesiones de variables aleatorias que admiten una descomposición particular) y de la regresión (estudiando la convergencia fuerte del estimador mínimo-cuadrático del coeficiente de regresión en el modelo de regresión lineal simple, y recientes resultados obtenidos en el mismo sentido, en el caso multivariante por Anderson y Taylor, y por Christopeit y Helmes (1979)).

PRELIMINARES Y SUPUESTOS BASICOS

Fijamos en este apartado los conceptos y notaciones básicos que emplearemos a lo largo de la memoria.

Siendo X un espacio lineal (real) normado, denotaremos por $\| \ \|$ la norma en X. Denotaremos por 0 tanto el cero real como el cero del espacio lineal normado. El contexto precisará claramente su significado.

Sea $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espacio probabilístico. Un elemento aleatorio en X es una función $V: \Omega \longrightarrow X$, medible. Un elemento aleatorio en R será una variable aleatoria. Supondremos que todas las variables aleatorias y los elementos aleatorios de que hacemos uso están definidos sobre el mismo espacio probabilístico.

Si V es un elemento aleatorio en X, $\|V\|$ es una variable alaetoria. Si V es un elemento aleatorio en X, f(V) es una variable aleatoria, para cada funcional lineal continuo $f \in X^*$ (si X es separable, ambas condiciones son equivalentes).

Diremos que un elemento aleatorio V en X posee un valor esperado (ó una esperanza) EV si existe un elemento $EV \in X$ tal que $E[f(V)] = f(EV)$ para cada $f \in X^*$. EV será la integral, en el sentido de Pettis, de V.

Emplearemos los siguientes tipos de convergencia de elementos aleatorios en un espacio lineal normado X:

a) $\{V_n\}$ converge a V con probabilidad 1 si

$$P\left[\lim_{n\to\infty} \|V_n - V\| = 0\right] = 1$$

b) $\{V_m\}$ converge a V en probabilidad si para cada $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n\to\infty} P\left[\,||V_m - V|| > \varepsilon\,\right] = 0$$

c) $\{V_n\}$ converge a V en la r-media $(r > 0)$ si

$$\lim_{n\to\infty} E\, ||V_m - V||^r = 0$$

d) $\{V_n\}$ converge a V completamente si para cada $\varepsilon > 0$

$$\sum_{n=1}^{\infty} P\left[\,||V_n - V|| > \varepsilon\,\right] < \infty$$

Una sucesión $\{V_n\}$ de elementos aleatorios en X es compacta débil si, dado $\varepsilon > 0$, existe un compacto $K_\varepsilon \subset X$ tal que

$$P\left[V_n \in K_\varepsilon\right] > 1 - \varepsilon \qquad \forall\ n = 1,2,\ldots$$

Una doble sucesión de números reales $\{a_{nk}\}$ es una sucesión de Toeplitz si satisface:

a) $\lim_{n\to\infty} a_{nk} = 0$ para cada $k = 1,2,\ldots$

b) $\sum_{k=1}^{\infty} |a_{nk}| \leq C$, con $C > 0$, para cada $n = 1,2,\ldots$

Una sucesión $\{b_i\} \subset X$ se dice que es una base de Schauder para el espacio lineal normado X si para cada $x \in X$ existe una única sucesión de escalares t_i tal que $x = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} t_i b_i$.

Si X tiene una base de Schauder $\{b_i\}$, se puede definir una sucesión de funcionales lineales $\{f_i\}$ por medio de $f_i(x) = t_i$ para $x \in X$. Tales funcionales se llaman funcionales lineales coordenados correspondientes a la base $\{b_i\}$. También puede ser definida una sucesión $\{U_n\}$ de operadores sobre X por medio de:

$$U_n(x) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x) b_i \qquad \forall\ x \in X$$

Tales operadores se llaman proyectores u operadores suma parcial.

Para cada n, será $Q_n(x) = x - U_n(x)$, $\forall\, x \in X$.

Si X es un espacio de Banach con base de Schauder, los funcionales coordenados correspondientes son continuos. Además, existe una constante $m \geq 1$, denominada constante básica, tal que $\|U_n\| \leq m$, $\forall\, n = 1,2,\ldots$.

CAPITULO I

ELEMENTOS ALEATORIOS IDENTICAMENTE DISTRIBUIDOS

Las condiciones más clásicas bajo las cuales se estudiaron la ley de los grandes números y el problema central del límite fueron las de idéntica distribución e independencia.

Obtendremos algunos resultados bajo estas dos hipótesis, y también constataremos que la hipótesis de independencia puede ser suprimida, aunque a costa de lograr conclusiones menos fuertes, ó tener que aumentar en intensidad alguna otra condición (generalmente, de momentos) para no debilitar los establecimientos finales.

Nuestro primer resultado nos da una información sobre el orden de magnitud que han de tener los pesos $\{A_{nk}\}$ para que al pomderar los elementos aleatorios $\{V_k\}$, independientes e idénticamente distribuidos, con una condición de primer momento, las sumas $S_n = \sum_{k=1}^{n} A_{nk}V_k$ converjan a cero con probabilidad 1.

TEOREMA I.1.- Sea $\{V_n\}$ una sucesión de elementos aleatorios independientes e idénticamente distribuidos, en un espacio lineal normado separable X, tal que $E\|V_1\| < \infty$ y EV_1 existe. Denotemos por $\{A_{nk}; k=1,2,\ldots,n; n=1,2,\ldots\}$ una doble sucesión de variables aleatorias tales que:

$$P\left[\max_{1\leq k\leq n} |A_{nk}| = \Theta\,(n^{-\alpha}) \text{ para algún } \alpha > 1\right] = 1$$

Entonces, $S_n = \sum_{k=1}^{n} A_{nk} V_k \longrightarrow 0$ con probabilidad 1.

Demostración: Sea una constante $M > 0$. Definimos:

$U_k = V_k \, I[\|V_k\| \leq M]$ $\qquad$ $W_k = V_k \, I[\|V_k\| > M]$.

$S_n^* = \sum_{k=1}^{n} A_{nk} U_k$ $\qquad$ $T_n^* = \sum_{k=1}^{n} A_{nk} W_k$

M se puede escoger de modo que, dado cualquier $\varepsilon > 0$, sea $E\|W_1\| < \frac{\varepsilon}{2}$.

La sucesión $\{ W_k \; ; k=1,2,\ldots \}$ está constituida por variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas, con $E\|W_1\| < \infty$; por consiguiente verifica la ley fuerte de los grandes números, es decir:

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \|W_k\| \longrightarrow E \; W_1 \quad \text{con probabilidad 1.}$$

Se tiene, por otra parte:

$$\|T_n^*\| = \left\| \sum_{k=1}^{n} A_{nk} W_k \right\| \leq \sum_{k=1}^{n} |A_{nk}| \cdot \|W_k\| \leq$$

$$\leq \left(\max_{1 \leq k \leq n} |A_{nk}| \right) \sum_{k=1}^{n} \|W_k\| = n\left(\max_{1 \leq k \leq n} |A_{nk}| \right)\left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \|W_k\| \right) \leq$$

$\leq nKn^{-\alpha}\left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \|W_k\|\right)$, con probabilidad 1, donde K es una constante positiva.

Por consiguiente:

$\lim_{n \to \infty} \|T_n^*\| \leq \lim_{n \to \infty} (Kn^{1-\alpha})\left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \|W_k\|\right) = 0$, con probabilidad 1.

O sea, $\|T_n^*\| \longrightarrow 0$ con probabilidad 1. $\qquad$ (1)

Con respecto a la suma S_n^* se tiene:

$$\|S_n^*\| = \left\|\sum_{k=1}^{n} A_{nk} U_k\right\| \leq \sum_{k=1}^{n} |A_{nk}| \cdot \|U_k\| \leq$$

$$\leq \max_{1 \leq k \leq n} |A_{nk}| \cdot \sum_{k=1}^{n} \|U_k\| \leq (\max_{1 \leq k \leq n} |A_{nk}|)\, n\, M \leq K\, M\, n^{1-\alpha}$$

con probabilidad 1.

Por tanto: $\|S_n^*\| \longrightarrow 0$ con probabilidad 1. (2)

Si denotamos por Ω_0 el conjunto de probabilidad cero en que (1) y (2) no se verifican, entonces para $\omega \notin \Omega_0$ y $\varepsilon > 0$ dadó, existe un entero $N(\varepsilon, \omega)$ tal que $\|T_n^*(\omega)\| < \frac{\varepsilon}{2}$ y tal que $\|S_n^*(\omega)\| < \frac{\varepsilon}{2}$ para $n \geq N(\varepsilon, \omega)$.

Como $\|S_n\| = \left\|\sum_{k=1}^{n} A_{nk} V_k\right\| \leq \|T_n^*\| + \|S_n^*\|$, queda demostrado que $\left\|\sum_{k=1}^{n} A_{nk} V_k\right\| \longrightarrow 0$ con probabilidad 1. ●

Nótese que en el resultado anterior no ha sido hecha ninguna hipótesis de independencia ó, cuando menos, de incorrelación entre los elementos aleatorios y sus pesos correspondientes.

El teorema I.1. puede ser comparado con el teorema 0.2. de Pruitt. Mientras que relajamos la condición do momento de $\|V_1\|$ y no exigimos a $\{A_{nk}\}$ que sea de Toeplitz, necesitamos disminuir el rango de estos pesos exigiendo que sea $\alpha > 1$ en lugar de cualquier $\alpha > 0$.

El ejemplo siguiente, de R. L. Taylor, nos muestra la necesidad de tal exigencia.

<u>Ejemplo I.1.</u>- Sea $\{V_k\}$ una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas, tales que:

$$V_k = \begin{cases} 1 & \text{con probabilidad } 1/2 \\ -1 & \text{con probabilidad } 1/2 \end{cases} \qquad \text{para cada } k = 1,2,\ldots$$

Sea $A_{nk} = \frac{1}{n} V_k$, para cada n, y $k = 1,2,\ldots,n$.

Notemos que $E|V_1| = 1$, y que además:

$$\sup_n \left| \frac{\max\limits_{1\leq k\leq n} |A_{nk}(\omega)|}{n^{-1}} \right| = \sup_n \left| \frac{\max\limits_{1\leq k\leq n} \frac{1}{n}|V_k(\omega)|}{n^{-1}} \right| = \sup_n \left|\frac{n^{-1}}{n^{-1}}\right| = 1$$

con probabilidad 1.

Por tanto, sería $\max\limits_{1\leq k\leq n} |A_{nk}| = \Theta(n^{-\alpha})$, con $\alpha \leq 1$, con probabilidad 1.

Ahora bien: $\sum\limits_{k=1}^{n} A_{nk}(\omega)V_k(\omega) = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{n} |V_k(\omega)|^2 = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{n} \equiv 1$,

por lo cual, $\sum\limits_{k=1}^{n} A_{nk}V_k$ no puede converger a cero de ninguna manera.

Suprimiendo la condición de independencia de los elementos aleatorios $\{V_n\}$, y relajando la condición para los pesos $\{A_{nk}\}$ puede ser obtenido un resultado de convergencia en probabilidad para S_n:

TEOREMA I.2.- Sea $\{V_n\}$ una sucesión de elementos aleatorios idénticamente distribuidos en un espacio lineal normado separable X, con $E\|V_1\| < \infty$, y EV_1 existe.

Sea $\{A_{nk}; k=1,2,\ldots,n; n=1,2,\ldots\}$ una doble sucesión de variables aleatorias tales que

$$\max_{1\leq k\leq n} E|A_{nk}| = \Theta(n^{-\alpha}) \text{ para algún } \alpha > 1.$$

Supongamos, además, que $|A_{nk}|$ y $\|V_k\|$ son variables aleatorias incorreladas para cada $k = 1,2,\ldots,n$, y para todo n.

Entonces, $\sum\limits_{k=1}^{n} A_{nk}V_k \longrightarrow 0$ en media; luego, en probabilidad.

Demostración: La demostración es inmediata:

$$E \left\| \sum_{k=1}^{n} A_{nk} V_k \right\| \leq E \sum_{k=1}^{n} |A_{nk}| \cdot \|V_k\| = \sum_{k=1}^{n} E|A_{nk}| E\|V_k\| \leq$$

$$\leq \left(\max_{1 \leq k \leq n} E|A_{nk}| \right) n \, E\|V_1\| \leq K n^{1-\alpha} \longrightarrow 0 \text{ cuando } n \to \infty .$$

A continuación nos planteamos el siguiente interrogante: ¿ha de ser necesariamente el rango de los pesos $\{A_{nk}\}$ del orden de $n^{-\alpha}$, con $\alpha > 1$, para que S_n converja con probabilidad 1 hacia cero?

El ejemplo I.1. nos hace ver que, caso de ser negativa la respuesta, será a costa de imponer otras serias restricciones, bien a los pesos, bien a los elementos aleatorios.

El teorema siguiente suministra, en efecto, una respuesta negativa a la pregunta planteada, al mismo tiempo que se convierte en una generalización de sendos resultados de Chow (teorema 0.3.) y Stout (teorema 0.5.) para el caso de sumas ponderadas (por constantes) de variables aleatorias.

TEOREMA I.3.- Sea $\{V_n\}$ una sucesión de elementos aleatorios independientes e idénticamente distribuidos en un espacio lineal normado separable, tal que $E\|V_1\|^{2/\alpha} < \infty$ para algún $0 < \alpha \leq 1$.

Sea $\{A_{nk}; k=1,2,\ldots,n; n=1,2,\ldots\}$ una doble sucesión de variables aleatorias tal que:

$$P\left[\max_{1 \leq k \leq n} |A_{nk}| = \Theta(n^{-\alpha}) \right] = 1.$$

Supongamos que, para cada k y para todo n, $|A_{nk}|$ y $\|V_k\|$ son variables aleatorias independientes, y que para cada n:

$\{|A_{n1}| \, \|V_1\|, |A_{n2}| \, \|V_2\|, \ldots, |A_{nn}| \, \|V_n\|\}$ son independientes.

Sea $B_n = \sum_{k=1}^{n} E|A_{nk}|$, $C_n = \sum_{k=1}^{n} E|A_{nk}|^2$.

Entonces, si m a x $(B_n, C_n) = o((\log n)^{-1})$ se tiene que:

$S_n = \sum_{k=1}^{n} A_{nk} V_k \longrightarrow 0$ completamente, y, por tanto, con probabilidad 1.

<u>Demostración:</u> Dado que $E\|V_1\|^{2/\alpha} < \infty$, también se tiene que $E\|V_1\|^2 < \infty$. Podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que es $E\|V_1\|^2 = 1$.

Aplicaremos en la demostración un método similar al de doble truncamiento de Erdös.

Sea $\varepsilon > 0$ dado. Sean $\rho > 0$ y $N \in Z^+$ números que serán especificados más adelante. Definamos, para cada k y n:

$$V'_{nk} = V_k \, I_{[\|A_{nk}V_k\| \leq n^{-\rho}]} \qquad S'_n = \sum_{k=1}^{n} A_{nk} V'_{nk}$$

$$V''_{nk} = V_k \, I_{[\|A_{nk}V_k\| > \frac{\varepsilon}{N}]} \qquad S''_n = \sum_{k=1}^{n} A_{nk} V''_{nk}$$

$$V'''_{nk} = V_k \, I_{[n^{-\rho} < \|A_{nk}V_k\| \leq \frac{\varepsilon}{N}]} \qquad S'''_n = \sum_{k=1}^{n} A_{nk} V'''_{nk}$$

Será $S_n = S'_n + S''_n + S'''_n$, lo cual implica que:

$$P\left[\|S_n\| > \varepsilon\right] \leq P\left[\|S'_n\| > \frac{\varepsilon}{3}\right] + P\left[\|S''_n\| > \frac{\varepsilon}{3}\right] + P\left[\|S'''_n\| > \frac{\varepsilon}{3}\right]$$

Fijamos un valor de n. Vamos a estudiar la suma S'_n.

Pueden darse dos casos: $B_n \geq C_n$ ó $B_n < C_n$.

a) Supongamos en primer lugar que $B_n \geq C_n$.

Sea $u = \min\left(n^{\rho}, \frac{\varepsilon}{2B_n}\right)$. En tal caso:

$u\|A_{nk}V'_{nk}\| \leq n^{\rho} n^{-\rho} = 1$ con probabilidad 1, y, por tanto, se tiene que:

$$\mathrm{E}\exp\left[u|A_{nk}|\,\|V'_{nk}\|\right] \leqslant \exp\left[u\mathrm{E}|A_{nk}|\,\|V'_{nk}\| + u^2\mathrm{E}|A_{nk}|^2\|V'_{nk}\|^2\right] \leqslant$$

$$\leqslant \exp\left[u\mathrm{E}|A_{nk}|\mathrm{E}\|V_k\| + u^2\mathrm{E}|A_{nk}|^2\mathrm{E}\|V_k\|^2\right] \leqslant$$

$$\leqslant \exp\left[u\mathrm{E}|A_{nk}| + u^2\mathrm{E}|A_{nk}|^2\right] \tag{1}$$

ya que $\mathrm{E}|A_{nk}|\,\|V'_{nk}\| = \mathrm{E}|A_{nk}|\,\|V_k\|\, I_{\left[\|A_{nk}V_k\| \leqslant n^{-\rho}\right]} \leqslant$

$\leqslant \mathrm{E}|A_{nk}|\,\|V_k\| = \mathrm{E}|A_{nk}|\mathrm{E}\|V_k\|$, y es $\mathrm{E}\|V_k\| \leqslant \mathrm{E}^{1/2}\|V_k\|^2 = 1$;

y análogamente para $\mathrm{E}|A_{nk}|^2\|V'_{nk}\|^2$.

En virtud de la independencia de $\left\{|A_{nk}|\,\|V_k\|\right\}_{k=1,2,\dots,n}$:

$$\mathrm{E}\exp\left[u\|S'_n\|\right] \leqslant \mathrm{E}\exp\left(u\sum_{k=1}^{n}|A_{nk}|\,\|V'_{nk}\|\right) = \mathrm{E}\prod_{k=1}^{n}\exp\left(u|A_{nk}|\,\|V'_{nk}\|\right) =$$

$$= \prod_{k=1}^{n}\mathrm{E}\exp\left(u|A_{nk}|\,\|V'_{nk}\|\right) \tag{2}$$

Aplicando la desigualdad de Markov:

$$P\left[\|S'_n\| > \varepsilon\right] \leqslant \frac{\mathrm{E}\exp\left[u\|S'_n\|\right]}{e^{\varepsilon u}} \Longrightarrow \qquad \text{según (1) y (2)}$$

$$\Longrightarrow \quad P\left[\|S'_n\| > \varepsilon\right] \leqslant \exp(-\varepsilon u + uB_n + u^2C_n).$$

Supongamos que sea $u = n^{\rho}$. En tal caso, y como $B_n \geqslant C_n$,

se tiene que $n^{\rho} \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2B_n} \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2C_n}$. Entonces:

$$\exp(-\varepsilon u + uB_n + u^2C_n) = \exp(-\varepsilon n^{\rho} + n^{\rho}B_n + n^{2\rho}C_n) \leqslant$$

$$\leqslant \exp\left(-\varepsilon n^{\rho} + n^{\rho}\frac{\varepsilon}{2n^{\rho}} + n^{2\rho}\frac{\varepsilon}{2n^{\rho}}\right) =$$

$$= \exp\left(-\varepsilon n^{\rho} + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}n^{\rho}\right) = \exp\left(-\frac{\varepsilon}{2}n^{\rho} + \frac{\varepsilon}{2}\right).$$

Si $u = \dfrac{\varepsilon}{2B_n}$, será porque $n^{\rho} \geqslant \dfrac{\varepsilon}{2B_n}$. En tal caso:

$$\exp(-\varepsilon u + uB_n + u^2C_n) = \exp\left(-\frac{\varepsilon^2}{2B_m} + \frac{\varepsilon B_m}{2B_n} + \frac{\varepsilon^2 C_n}{4B_n^2}\right) \leq$$

$$\leq \exp\left(-\frac{\varepsilon^2}{4B_n} + \frac{\varepsilon}{2}\right) \leq \exp\left(-\frac{\varepsilon^2}{\max(B_n, C_m)} + \frac{\varepsilon}{2}\right)$$

ya que $-\dfrac{\varepsilon^2}{2B_n} + \dfrac{\varepsilon^2 C_m}{4B_n^2} = \dfrac{-2\varepsilon^2 B_m + \varepsilon^2 C_n}{4B_n^2} = \dfrac{-\varepsilon^2(2B_n - C_n)}{4B_n^2} \leq$

$$\leq -\frac{\varepsilon^2 B_m}{4B_n^2} = -\frac{\varepsilon^2}{4B_n}.$$

b) Supongamos ahora que $B_n < C_n$.

Sea $u = \min\left(n^\rho, \dfrac{\varepsilon}{2C_n}\right)$. En tal caso:

Si $u = n^\rho$, será: $n^\rho \leq \dfrac{\varepsilon}{2C_m} < \dfrac{\varepsilon}{2B_n}$. Entonces:

$\exp(-\varepsilon u + uB_n + u^2C_m) \leq \exp\left(-\dfrac{\varepsilon}{2}n^\rho + \dfrac{\varepsilon}{2}\right)$, al igual que ocurría anteriormente.

Si $u = \dfrac{\varepsilon}{2C_m}$, ó sea, si $n^\rho \geqslant \dfrac{\varepsilon}{2C_n}$:

$$\exp(-\varepsilon u + uB_n + u^2C_n) = \exp\left(-\frac{\varepsilon^2}{2C_n} + \frac{\varepsilon B_m}{C_m} + \frac{\varepsilon^2 C_n}{4C_n^2}\right) =$$

$$= \exp\left(-\frac{\varepsilon^2}{2C_n} + \frac{\varepsilon B_n}{C_n} + \frac{\varepsilon^2}{4C_n}\right) \qquad \exp\left(-\frac{\varepsilon^2}{4C_n} + \frac{\varepsilon}{2}\right)$$

$$\exp\left(-\frac{\varepsilon^2}{4\max(B_n, C_n)} + \frac{\varepsilon}{2}\right).$$

Ahora bien:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \exp\left(-\frac{\varepsilon n^\rho}{2}\right) < \infty \quad \text{y} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \exp\left(-\frac{\varepsilon^2}{4\max(B_n, C_m)}\right) < \infty$$

por ser $\max(C_n, B_m) = o((\log n)^{-1})$.

Por consiguiente: $\sum_{n=1}^{\infty} P\left[\|S_n'\| > \varepsilon\right] < \infty$.

Estudiemos a continuación las sumas S_n'' y S_n'''. Los desarrollos correspondientes son similares a los de Stout [42] , pero los incluimos por razones de completitud de la demostración.

Salvo para algún conjunto de probabilidad cero:

$$\left\{ \|S_n''\| > \varepsilon \right\} \subset \left\{ \sum_{k=1}^{n} |A_{nk}| \, \|V_k''\| > \varepsilon \right\} \subset \bigcup_{k=1}^{n} \left\{ |A_{nk}| \, \|V_k\| > \frac{\varepsilon}{N} \right\} \subset$$

$$\subset \bigcup_{k=1}^{n} \left\{ M\, n^{-\alpha} \|V_k\| > \frac{\varepsilon}{N} \right\} = \bigcup_{k=1}^{n} \left\{ \|V_k\| > \frac{\varepsilon}{NM} n^{\alpha} \right\}$$

para alguna constante $M > 0$. Por tanto:

$$P\left[\|S_n''\| > \varepsilon \right] \leq \sum_{k=1}^{n} P\left[\|V_k\| > \frac{\varepsilon}{NM} n^{\alpha} \right] = nP\left[\|V_1\| > \frac{\varepsilon}{NM} n^{\alpha} \right] =$$

$$= nP\left[\|V_1\|^{1/\alpha} > \frac{\varepsilon^{1/\alpha}}{(NM)^{1/\alpha}} n \right].$$

Ahora bien:

$$E\,\|V_1\|^{2/\alpha} < \infty \implies \sum_{n=1}^{\infty} nP\left[\|V_1\|^{1/\alpha} > c\, n \right] < \infty \quad \forall\, c > 0.$$

Por tanto, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} P\left[\|S_n''\| > \varepsilon \right] < \infty$.

Tal como se ha definido V_{nk}''' se tiene que:

$$P\left[\|S_n'''\| > \varepsilon \right] \leq P\left[\sum_{k=1}^{n} |A_{nk}| \, \|V_{nk}'''\| > \varepsilon \right] \leq$$

$$\leq P\left[\text{existen al menos N índices k tales que: } |A_{nk}| \, \|V_k\| > n^{-\rho} \right] \leq$$

$$\leq P\left[\text{existen al menos N índices k tales que: } M\, n^{-\alpha} \|V_k\| > n^{-\rho} \right] =$$

$$= P\left[\text{existen al menos N índices k tales que: } \|V_k\| > \frac{1}{M} n^{\alpha-\rho} \right] \leq$$

(véase Stout [42] : una de las desigualdades de Bonferroni)

$$\leq \binom{n}{N} \prod_{k=1}^{N} P\left[\|V_k\| > \frac{1}{M}\, n^{\alpha-\rho} \right] = \binom{n}{N} P^{N}\left[\|V_1\| > \frac{1}{M}\, n^{\alpha-\rho} \right] =$$

$$= \binom{n}{N} P^N\left[\|V_1\|^{2/\alpha} > \frac{1}{M^{2/\alpha}}\, n^{2(\alpha-\rho)/\alpha}\right] \leq$$

aplicando la desigualdad de Markov, y teniendo en cuenta que se verifica que $\binom{n}{N} \leq n^N$

$$\leq M^{2N/\alpha} \cdot (E\|V_1\|^{2/\alpha})^N \cdot n^{N - 2N + 2N\rho/\alpha} \leq A \cdot n^{2N\rho/\alpha - N} \Longrightarrow$$

donde $A > 0$ es una constante

$$\Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} P\left[\|S_n'''\| > \varepsilon\right] \leq A \sum_{n=1}^{\infty} n^{2N\rho/\alpha - N} < \infty \quad \text{, si es}$$

$\frac{2N\rho}{\alpha} - N = (\frac{2\rho}{\alpha} - 1)\, N < -1$, y para ello es suficiente tomar ρ suficientemente pequeño y N suficientemente grande.

Por consiguiente, con tal elección de ρ y N desde el principio de la demostración, se tiene que:

$$P\left[\|S_n\| > \varepsilon\right] \leq P\left[\|S_n'\| > \frac{\varepsilon}{3}\right] + P\left[\|S_n''\| > \frac{\varepsilon}{3}\right] + P\left[\|S_n'''\| > \frac{\varepsilon}{3}\right]$$

Es decir, $S_n = \sum_{k=1}^{n} A_{nk} V_k$ converge completamente a cero cuando $n \to \infty$. ●

El siguiente teorema nos proporciona un resultado interesante válido para elementos aleatorios idénticamente distribuidos no necesariamente independientes.

Comparando con los teoremas 0.2. de Pruitt y 0.16. de Bozorgnia y Rao, es de notar que en nuestro caso no exigimos que los pesos $\{A_{nk}\}$ formen una sucesión de Toeplitz, a costa de modificar ligeramente el rango de tales pesos, lo cual lleva, empero, la suavización de la condición de momento de los elementos aleatorios.

Puede compararse el resultado con el teorema 0.9. de Padgett y Taylor.

<u>TEOREMA I.4.</u>- Sea $\{V_n\}$ una sucesión de elementos aleatorios idénticamente distribuidos en un espacio lineal normado separable.

Sea $\{A_{nk}; k=1,2,\ldots,n; n=1,2,\ldots\}$ una doble sucesión de variables aleatorias, tal que:

$$P\left[\max_{1\leq k\leq n} |A_{nk}| = \Theta(n^{-\alpha}) \quad \text{para algún} \quad \alpha > \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right] = 1 \tag{1}$$

Supongamos además que $E\,\|V_1\|^{1+1/\alpha} < \infty$.

En tales condiciones, $S_n = \sum_{k=1}^{n} A_{nk}V_k \longrightarrow 0$ completamente, y, por tanto, con probabilidad 1.

Si la condición (1) es sustituida por:

$$P\left[\max_{1\leq k\leq n} |A_{nk}| = \Theta(n^{-\alpha}) \quad \text{para algún} \quad 1 < \alpha \leq \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right] = 1$$

entonces $S_n = \sum_{k=1}^{n} A_{nk}V_k \longrightarrow 0$ en probabilidad.

<u>Demostración</u>: Dado $\varepsilon > 0$, se tiene que:

$$P\left[\|S_n\| > \varepsilon\right] = P\left[\left\|\sum_{k=1}^{n} A_{nk}V_k\right\| > \varepsilon\right] \leq P\left[\sum_{k=1}^{n} |A_{nk}|\,\|V_k\| > \varepsilon\right] \leq$$

$$\leq P\left[\sum_{k=1}^{n} (\max_{1\leq k\leq n} |A_{nk}|)\,\|V_k\| > \varepsilon\right] \leq P\left[M\,n^{-\alpha} \sum_{k=1}^{n} \|V_k\| > \varepsilon\right] =$$

$$= P\left[\sum_{k=1}^{n} \|V_k\| > \frac{\varepsilon}{M}\, n^{\alpha}\right], \text{ con } M > 0.$$

Por consiguiente, aplicando la desigualdad de Markov:

$$P\left[\|S_n\| > \varepsilon\right] \leq \frac{E\left(\sum_{k=1}^{n} \|V_k\|\right)^{1+1/\alpha}}{\left(\frac{\varepsilon}{M}\right)^{1+1/\alpha} \cdot n^{\alpha(1+1/\alpha)}} =$$

$$= A\, n^{-(\alpha+1)}\, E\left(\sum_{k=1}^{n} \|V_k\|\right)^{1+1/\alpha}, \text{ con } A > 0.$$

Aplicando una desigualdad de Minkowski, se tendrá:

$$E\left(\sum_{k=1}^{n} \|V_k\|\right)^{1+1/\alpha} \leq \left[\sum_{k=1}^{n} \left(E\,\|V_1\|^{1+1/\alpha}\right)^{\alpha/(\alpha+1)}\right]^{1+1/\alpha} \leq$$

$$\leq n^{1+1/\alpha} \cdot E\|V_1\|^{1+1/\alpha} = n^{1+1/\alpha} \cdot C \text{ , con } 0 < C < \infty .$$

Por consiguiente:

$$P\Big[\|S_n\| > \varepsilon\Big] \leq A\,C\,n^{-(\alpha+1)+(1+1/\alpha)} = A\,C\,n^{1/\alpha - \alpha} .$$

Si $\alpha > 1$: $\frac{1}{\alpha} - \alpha < 0$,y por tanto:

$$\lim_{n\to\infty} P\Big[\|S_n\| > \varepsilon\Big] = 0 .$$

Es decir, $S_n = \sum_{k=1}^{n} A_{nk}V_k \longrightarrow 0$ en probabilidad.

Si $\alpha > \frac{1+\sqrt{5}}{2}$: $\frac{1}{\alpha} - \alpha < -1$, y, por tanto:

$$\sum_{n=1}^{\infty} P\Big[\|S_n\| > \varepsilon\Big] \leq A\,C \sum_{n=1}^{\infty} n^{1/\alpha - \alpha} < \infty \quad \text{; entonces:}$$

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} A_{nk}V_k \longrightarrow 0 \text{ completamente, cuando } n \longrightarrow \infty .$$

Los resultados obtenidos en los teoremas I.1. y I.4., así como la consideración incluida en el ejemplo I.1., nos permiten diseñar el siguiente cuadro representativo de la convergencia de $S_n = \sum_{k=1}^{n} A_{nk}V_k$ cuando los pesos están sujetos a una condición general del tipo

$$P\Big[\max_{1\leq k\leq n} |A_{nk}| = \mathcal{O}(n^{-\alpha}) \text{ para algún } \alpha > 0\Big] = 1$$

$\{A_{nk}\}$ / $\{V_k\}$	$P[\max_{1\leq k\leq n} \lvert A_{nk}\rvert = \mathcal{O}(n^{-\alpha})$ para algún $\alpha > 0] = 1$		
Idénticamente distribuidos $E\|V_1\|^{1+\frac{1}{\alpha}} < \infty$	$\alpha \leq 1$ No convergencia	$\alpha > 1$ Convergencia en probabilidad	$\alpha > \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ Convergencia con probabilidad 1 (y completa)
Idénticamente distribuidos Independientes $E\|V_1\| < \infty$	$\alpha \leq 1$ No convergencia	$\alpha > 1$ Convergencia con probabilidad 1	

A continuación vamos a estudiar la convergencia de S_n cuando los elementos aleatorios son independientes e idénticamente distribuidos, y la única condición que exigimos a los pesos $\{A_{nk}\}$ es que no se "desvíen excesivamente" de una doble sucesión de constantes $\{a_{nk}\}$ que cumplen unas ciertas condiciones.

<u>TEOREMA I.5.</u>- Sea $\{V_n\}$ una sucesión de elementos aleatorios independientes e idénticamente distribuidos en un espacio lineal normado separable, con $EV_1 = 0$.

Sea $\{a_{nk};k=1,2,\ldots,n;n=1,2,\ldots\}$ una doble sucesión de números reales que es de Toeplitz y satisface la condición:

$$\max_{1\leq k\leq n} |a_{nk}| = \Theta(n^{-\alpha}) \text{ para algún } \alpha > 0.$$

$$\text{Sea} \begin{cases} E\|V_1\|^{1+1/\alpha} < \infty & \text{si } \alpha \leq 1 \\ E\|V_1\|^2 < \infty & \text{si } \alpha \geq 1 \end{cases}$$

Sea $\{A_{nk};k=1,2,\ldots,n;n=1,2,\ldots\}$ una doble sucesión de variables aleatorias que verifican:

a) $E\left[\sum_{k=1}^{n}(A_{nk} - a_{nk})^2\right] = \Theta(n^{-r})$ para algún $r > 2$

b) para cada n, las variables aleatorias $\sum_{k=1}^{n}|A_{nk} - a_{nk}|^2$ y $\sum_{k=1}^{n}\|V_k\|^2$ son incorreladas.

En tales condiciones, $S_n = \sum_{k=1}^{n}A_{nk}V_k \longrightarrow 0$ con probabilidad 1.

<u>Demostración</u>: Dado que se puede escribir

$\sum_{k=1}^{n}A_{nk}V_k = \sum_{k=1}^{n}(A_{nk} - a_{nk})V_k + \sum_{k=1}^{n}a_{nk}V_k$, bastará demostrar que

$$\sum_{k=1}^{n}(A_{nk} - a_{nk})V_k \longrightarrow 0 \text{ con probabilidad 1 y}$$

$$\sum_{k=1}^{n} a_{nk}V_k \longrightarrow 0 \text{ con probabilidad 1.}$$

Según el teorema 0.9. de Padgett y Taylor, generalizado a un espacio lineal normado cualquiera, las hipótesis del teorema son suficientes para que $\sum_{k=1}^{n} a_{nk}V_k$ converja a cero con probabilidad 1.

Hemos de probar. pues, que $\sum_{k=1}^{n}(A_{nk} - a_{nk})V_k \longrightarrow 0$ con probabilidad 1.

Lo haremos comprobando que se verifica en realidad la convergencia completa.

$$P\left[\left\|\sum_{k=1}^{n}(A_{nk} - a_{nk})V_k\right\| > \varepsilon\right] \leq P\left[\sum_{k=1}^{n}|A_{nk} - a_{nk}|\,\|V_k\| > \varepsilon\right] \leq$$

$$\leq \frac{E\left[\sum_{k=1}^{n}|A_{nk} - a_{nk}|\,\|V_k\|\right]^2}{\varepsilon^2}$$ según la desigualdad de Tchebycheff.

Aplicando al numerador la desigualdad de Cauchy-Schwarz:

$$E\left[\sum_{k=1}^{n}|A_{nk} - a_{nk}|\,\|V_k\|\right]^2 \leq E\left[\left(\sum_{k=1}^{n}|A_{nk} - a_{nk}|^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n}\|V_k\|^2\right)\right] =$$

$$= E\left[\sum_{k=1}^{n}|A_{nk} - a_{nk}|^2\right] E\left[\sum_{k=1}^{n}\|V_k\|^2\right] \leq$$

$$n\, M\, E\left[\sum_{k=1}^{n}|A_{nk} - a_{nk}|^2\right] \leq C\, n^{1-r}$$

donde $C > 0$, y donde denotamos $M = E\|V_1\|^2$.

Por lo tanto: $\sum_{n=1}^{\infty} P\left[\left\|\sum_{k=1}^{n}(A_{nk} - a_{nk})V_k\right\| > \varepsilon\right] \leq$

$$\leq \frac{C}{\varepsilon^2} \sum_{n=1}^{\infty} n^{1 - r} < \infty \qquad \text{ya que } \quad 1 - r < -1.$$

Con lo cual queda probado el teorema. ●

En el caso $\alpha \geq 1$ el resultado anterior puede ser mejorado hasta el punto de exigir sólo condiciones sobre los momentos de orden $(\alpha + 1)/\alpha^2$, y no sobre los momentos de segundo orden, como ocurría en el teorema anterior.

<u>TEOREMA I.6.</u>- Sea $\{V_n\}$ una sucesión de elementos aleatorios independientes e idénticamente distribuidos en un espacio lineal normado separable, con $EV_1 = 0$.

Sea $\{a_{nk};k=1,2,\dots,n;n=1,2,\dots\}$ una doble sucesión de números reales que es de Toeplitz y satisface la condición

$$\max_{1\leq k\leq n} |a_{nk}| = \Theta(n^{-\alpha}) \text{ para algún } \alpha \geq 1.$$

Sea $E\,||V_1||^{1 + 1/\alpha} < \infty$.

Denotemos por $\{A_{nk};k=1,2,\dots,n;n=1,2,\dots\}$ una doble sucesión de variables aleatorias que verifican

$$\sum_{k=1}^{n} E^{\alpha/(\alpha + 1)} |A_{nk} - a_{nk}|^{(\alpha + 1)/\alpha^2} = \Theta(n^{-\beta}), \text{ con } \beta > 1.$$

Entonces, $S_n = \sum_{k=1}^{n} A_{nk}V_k \longrightarrow 0$ con probabilidad 1.

<u>Demostración:</u> Mediante el mismo argumento que en el teorema I.5. se tiene que $\sum_{k=1}^{n} a_{nk}V_k \longrightarrow 0$ con probabilidad 1. Pasemos a demostrar que lo mismo ocurre con $\sum_{k=1}^{n} (A_{nk} - a_{nk})V_k$.

$$P\left[\left|\left|\sum_{k=1}^{n} (A_{nk} - a_{nk})V_k\right|\right| > \varepsilon\right] \leq P\left[\sum_{k=1}^{n} |A_{nk} - a_{nk}|\, ||V_k|| > \varepsilon\right] \leq$$

$$\leqslant \frac{E\left[\sum_{k=1}^{n} |A_{nk} - a_{nk}| \, \|V_k\|\right]^t}{\varepsilon^t}$$, donde t es un valor a fijar más adelante, pero siempre $0 < t \leqslant 1$.

Ahora bien, a causa de la c_r-desigualdad:

$$E\left[\sum_{k=1}^{n} |A_{nk} - a_{nk}| \, \|V_k\|\right]^t \leqslant \sum_{k=1}^{n} E|A_{nk} - a_{nk}|^t \|V_k\|^t \leqslant$$

aplicando la desigualdad de Hölder:

$$\leqslant \sum_{k=1}^{n} E^{1/s}|A_{nk} - a_{nk}|^{ts} \, E^{1/r}\|V_k\|^{tr} \tag{1}$$

donde ha de ser $r > 1$ y $\frac{1}{r} + \frac{1}{s} = 1$.

Tomemos r tal que $tr = 1 + \frac{1}{\alpha}$, para asegurar que existe el correspondiente momento de $\|V_k\|$.

$$tr = 1 + \frac{1}{\alpha} = \frac{\alpha + 1}{\alpha} \Longrightarrow r = \frac{\alpha + 1}{t\alpha}$$

t ha de ser tal que $\alpha + 1 > t\alpha$. Veamos el valor de s.

$$\frac{1}{r} + \frac{1}{s} = 1 \Longrightarrow \frac{1}{s} = \frac{r-1}{r} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow s = \frac{r}{r-1} = \frac{\frac{\alpha+1}{t\alpha}}{\frac{\alpha+1}{t\alpha} - 1} \Longrightarrow s = \frac{\alpha + 1}{\alpha(1-t) + 1}$$

Por consiguiente:

$$(1) \leqslant \sum_{k=1}^{n} \left[E^{\frac{\alpha(1-t)+1}{\alpha+1}} |A_{nk} - a_{nk}|^{\frac{t(\alpha+1)}{\alpha(1-t)+1}} \right] \cdot$$

$$\cdot \left[E^{\frac{t\alpha}{\alpha+1}} \|V_k\|^{\frac{\alpha+1}{\alpha}} \right] \tag{2}$$

Tomando en particular el valor $t = \frac{1}{\alpha}$ (por tanto cumple el requisito $0 < t \leqslant 1$) se tiene:

$$r = \frac{\alpha + 1}{\frac{1}{\alpha} \cdot \alpha} = \alpha + 1 > 1 \implies \frac{1}{r} = \frac{1}{\alpha + 1}$$

$$s = \frac{\alpha + 1}{\alpha \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right) + 1} = \frac{\alpha + 1}{\alpha} \implies \frac{1}{s} = \frac{\alpha}{\alpha + 1}$$

$$tr = \frac{\alpha + 1}{\alpha} \qquad\qquad ts = \frac{\alpha + 1}{\alpha^2}$$

Entonces, a partir de (2) se obtiene:

$$E\left[\sum_{k=1}^{n} |A_{nk} - a_{nk}| \, \|V_k\|\right]^{1/\alpha} \leq \sum_{k=1}^{n} E^{\alpha/(\alpha+1)} |A_{nk} - a_{nk}|^{(\alpha+1)/\alpha^2} \cdot$$

$$\cdot E^{1/(\alpha+1)} \|V_1\|^{(\alpha+1)/\alpha} \leq K \sum_{k=1}^{n} E^{\alpha/(\alpha+1)} |A_{nk} - a_{nk}|^{(\alpha+1)/\alpha^2} \leq$$

$\leq M n^{-\beta}$, con $\beta > 1$ y $M > 0$, dado que se verifica la condición $E\|V_1\|^{(\alpha+1)/\alpha} < \infty$.

Por tanto:

$$\sum_{n=1}^{\infty} P\left[\left\|\sum_{k=1}^{n} (A_{nk} - a_{nk}) V_k\right\| > \varepsilon\right] \leq M \varepsilon^{-1/\alpha} \sum_{n=1}^{\infty} n^{-\beta} < \infty ,$$

luego $\sum_{k=1}^{n} (A_{nk} - a_{nk}) V_k \longrightarrow 0$ completamente, y, por tanto, con probabilidad 1. ●

Se puede obtener otro resultado en este sentido como corolario del teorema I.1.:

COROLARIO I.7.- Sea $\{V_n\}$ una sucesión de elementos aleatorios independientes e idénticamente distribuidos en un espacio lineal normado separable, con $EV_1 = 0$.

Sea $\{a_{nk}; k=1,2,\ldots,n; n=1,2,\ldots\}$ una doble sucesión de números reales que es de Toeplitz y satisface la condición

$$\max_{1 \leq k \leq n} |a_{nk}| = O(n^{-\alpha}) \text{ para algún } \alpha > 0.$$

Sea $E\|V_1\|^{1+1/\alpha} < \infty$.

Sea $\{A_{nk}; k=1,2,\ldots,n; n=1,2,\ldots\}$ una doble sucesión de variables aleatorias tales que

$$P\left[\max_{1\leq k\leq n} |A_{nk} - a_{nk}| = \Theta(n^{-\beta}) \text{ para algún } \beta > 1\right] = 1.$$

Entonces, $\sum_{k=1}^{n} A_{nk}V_k \longrightarrow 0$ con probabilidad 1.

El siguiente ejemplo nos va a poner de manifiesto las dificultades que pueden surgir al suprimir la idéntica distribución de los elementos aleatorios $\{V_n\}$, ya que ni la independencia de éstos, la existencia de todos sus momentos, la incorrelación de pesos y elementos aleatorios y la condición de acotación uniforme en probabilidad de Rohatgi son suficientes para la convergencia de S_n.

Ejemplo I.2.-

Sea el espacio $X = l^1 = \{x \in R^\infty \mid \|x\| = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| < \infty\}$.

l^1, con la norma $\|\ \|$, es un espacio de Banach separable con base de Schauder $\{\delta_n; n=1,2,\ldots\} = \{(0,0,\ldots 0,\overset{n}{1},0,\ldots)\}$.

Definamos en l^1 una sucesión de elementos aleatorios $\{V_n\}$, que supondremos independientes, del modo siguiente:

$$V_1 = \begin{cases} (1,0,0,\ldots) & \text{con probabilidad } 1/2 \\ (-1,0,0,\ldots) & \text{con probabilidad } 1/2 \end{cases}$$

$$V_2 = \begin{cases} (0,1,0,\ldots) & \text{con probabilidad } 1/2 \\ (0,-1,0,\ldots) & \text{con probabilidad } 1/2 \end{cases}$$

Sea la doble sucesión de variables aleatorias, denotada por $\{A_{nk};k=1,2,\ldots,n;n=1,2,\ldots\}$, y que definiremos como:

$$A_{nk} = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{con probabilidad } \frac{1}{2} \\ & \\ -\frac{1}{n} & \text{con probabilidad } \frac{1}{2} \end{cases} \qquad 1 \leqslant k \leqslant n$$

Se puede escribir $V_n = A_n \cdot \delta_n$, con $\{A_n\}$ sucesión de variables aleatorias independientes, dadas por:

$$A_n = \begin{cases} 1 & \text{con probabilidad } \frac{1}{2} \\ & \\ -1 & \text{con probabilidad } \frac{1}{2} \end{cases}$$

Se tiene que $EV_n = 0 = (0,0,0,\ldots)$. Además

$\|V_n\| = 1$ con probabilidad 1 $\Longrightarrow$ $E\|V_1\| = 1$ y, por otra parte, $E\|V_n\|^{\beta} = 1$ para cualquier $\beta > 0$.

Es $\max\limits_{1\leqslant k\leqslant n} |A_{nk}| = \Theta(n^{-1})$.

Además, $|A_{nk}|$ y $\|V_k\|^{\beta}$ $(\beta > 0)$ son incorreladas, pues:

$|A_{nk}|\,\|V_k\|^{\beta} = \frac{1}{n}$ con probabilidad 1 $\Longrightarrow$

$\Longrightarrow \quad E(|A_{nk}|\,\|V_k\|^{\beta}) = \frac{1}{n}$.

Por otro lado:

$|A_{nk}| = \frac{1}{n}$ con probabilidad 1 $\Longrightarrow$ $E|A_{nk}| = \frac{1}{n}$

$\|V_k\|^{\beta} = 1$ con probabilidad 1 $\Longrightarrow$ $E\|V_k\|^{\beta} = 1$

Luego $E(|A_{nk}|\,\|V_k\|^{\beta}) = E|A_{nk}|\; E\|V_k\|^{\beta}$.

Además se verifica la condición de acotación uniforme en probabilidad de Rohatgi, pues para todo n:

$$P\left[\|V_n\| \geq t\right] \leq P\left[\|V_1\| \geq t\right] \qquad \forall t > 0.$$

Por otra parte, $\{|A_{nk}|; k=1,2,\ldots,n; n=1,2,\ldots\}$ es una sucesión de Toeplitz con probabilidad 1.

Sin embargo, se tiene que:

$$\left\|\sum_{k=1}^{n} A_{nk}V_k\right\| = \left\|(A_{n1}A_1, A_{n2}A_2, \ldots, A_{nn}A_n, 0, 0, 0, \ldots)\right\| =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} |A_{nk}|\,|A_k| = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n}\cdot 1 = 1 \not\longrightarrow 0 \quad \text{de ningún modo.}$$

CAPITULO II

ELEMENTOS ALEATORIOS CON MOMENTOS ACOTADOS

En este capítulo vamos a abordar condiciones de convergencia de las sumas ponderadas de elementos aleatorios no necesariamente idénticamente distribuidos ni independientes, pero sí con una condición de acotación uniforme de los momentos de cierto orden.

El teorema 0.6. de Rohatgi (1971) para variables aleatorias independientes y pesos constantes ha sido generalizado en 1979 por Bozorgnia y Rao a elementos aleatorios definidos en un espacio de Banach separable, independientes por pares y ponderados por pesos constantes (teorema 0.14.).

Nuestro primer resultado es una generalización del teorema de Rohatgi para el caso de elementos aleatorios definidos en un espacio lineal normado separable, sin ninguna condición de independencia entre tales elementos aleatorios, y ponderados por pesos aleatorios. Las condiciones de nuestro teorema están en la línea de las exigidas por Rohatgi, Bozorgnia y Rao. En el proceso de demostración se efectúan extensiones del primitivo método demostrativo de Rohatgi.

<u>TEOREMA II.1.</u>- Sea $\{ V_n \}$ una sucesión de elementos aleatorios en un espacio lineal normado separable, tales que están uniformemente acotados en probabilidad por una variable aleatoria V, es decir, que para todo $x > 0$:

$$P\left[\|V_n\| \geqslant x\right] \leqslant P\left[|V| \geqslant x\right] \qquad \forall n = 1,2,\ldots$$

Supongamos que $E|V|^r < \infty$ para algún $0 < r < 1$.

Sea $\{A_{nk}; k=1,2,\ldots,n; n=1,2,\ldots\}$ una doble sucesión de variables aleatorias que verifican las siguientes condiciones:

a) $\lim_{n\to\infty} E|A_{nk}|^r = 0$ para cada k.

b) $\sum_{k=1}^{n} E^r|A_{nk}|^r \leqslant C$, para todo n; siendo C una constante positiva.

c) $\lim_{n\to\infty}(\max_{1\leqslant k\leqslant n} E|A_{nk}|^r = 0.$

d) Las variables aleatorias $|A_{nk}|^r$ y $W_{nk}^r = \|V_k\|^r \, I_{\left[\|V_k\| < \frac{1}{E|A_{nk}|^r}\right]}$ son incorreladas para cada k y para todo n.

En tales condiciones, $S_n = \sum_{k=1}^{n} A_{nk}V_k \longrightarrow 0$ en probabilidad.

<u>Demostración:</u> Puesto que $E|V|^r < \infty$, se tiene que:

$$n\,P\left[|V| > n^{1/r}\right] \longrightarrow 0 \quad \text{cuando } n \longrightarrow \infty . \qquad (1)$$

$$\text{Sea} \quad V_{nk} = \begin{cases} A_{nk}V_k & \text{si } \|V_k\| < \dfrac{1}{E|A_{nk}|^r} \\ \\ 0 & \text{si } \|V_k\| \geqslant \dfrac{1}{E|A_{nk}|^r} \end{cases}$$

para cada $k = 1,2,\ldots,n$ y para todo $n = 1,2,\ldots$.

Denotemos: $S_{nn} = \sum_{k=1}^{n} V_{nk}$.

Podemos escribir también $\|V_{nk}\| = |A_{nk}|W_{nk}$, siendo:

$$W_{nk} = \begin{cases} \|V_k\| & \text{si} \quad \|V_k\| < \dfrac{1}{E|A_{nk}|^r} \\ \\ 0 & \text{si} \quad \|V_k\| \geqslant \dfrac{1}{E|A_{nk}|^r} \end{cases}$$

para cada $k = 1,2,\ldots,n$ y para toda $n = 1,2,\ldots$.

Entonces, se tiene que:

$$P\left[S_{nn} \neq S_n\right] \leqslant P\left[\bigcup_{k=1}^{n} \left\{\|V_k\| \geqslant \frac{1}{E|A_{nk}|^r}\right\}\right] \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^{n} P\left[\|V_k\| \geqslant \frac{1}{E|A_{nk}|^r}\right] \leqslant \sum_{k=1}^{n} P\left[|V| \geqslant \frac{1}{E|A_{nk}|^r}\right] =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} E^r|A_{nk}|^r \cdot E^{-r}|A_{nk}|^r \, P\left[|V| \geqslant \frac{1}{E|A_{nk}|^r}\right] \leqslant C \cdot \varepsilon$$

para un valor de $\varepsilon > 0$ dado, y para todo valor de n a partir de uno suficientemente grande, puesto que, dado tal ε:

$$\max_{1 \leq k \leq n} E|A_{nk}|^r \longrightarrow 0 \implies E^{-r}|A_{nk}|^r \, P\left[|V| \geqslant \frac{1}{E|A_{nk}|^r}\right] < \varepsilon,$$

para todo n suficientemente grande.

Basta, pues, con demostrar que $S_{nn} \longrightarrow 0$ en probabilidad.

Ahora bien, dado $\varepsilon > 0$, escojamos un valor M tal que:

$$x^r P\left[|V| \geqslant x\right] \leqslant \varepsilon \qquad \text{para } x \geqslant M$$

lo cual es factible, según (1).

Se tiene entonces que para cualquier valor $N > M$:

$$\int_{0^+}^{N} x^{r-1} P\left[|V| \geqslant x\right] dx = \int_{0^+}^{M} x^{r-1} P\left[|V| \geqslant x\right] dx \; +$$

$$+ \int_{M}^{N} x^{r-1} P\Big[|V| \geq x\Big]dx \leq \int_{0^+}^{M} x^{r-1}\, dx + \int_{M}^{N} \frac{\varepsilon}{x}\, dx \leq$$

$H + \varepsilon \ln N$, donde H es una constante que depende de M y ε.

Notemos que la integral considerada converge, por ser

$$\int_{0^+}^{N} x^{r-1} P\Big[|V| \geq x\Big]dx \leq \int_{0^+}^{N} x^{r-1}\, dx$$

y la última integral converge, por ser $1 - r < 1$.

Por consiguiente, si s es un número positivo cualquiera, se tiene que:

$$N^{-s} \int_{0^+}^{N} x^{r-1} P\Big[|V| \geq x\Big]dx \leq N^{-s} H + \varepsilon N^{-s} \ln N \longrightarrow 0$$

cuando $N \longrightarrow \infty$; ó sea, se tiene que:

$$N^{-s} \int_{0^+}^{N} x^{r-1} P\Big[|V| \geq x\Big]dx \longrightarrow 0 \quad \text{cuando } N \longrightarrow \infty \tag{2}$$

para cualquier $s > 0$.

Por otro lado se tiene, utilizando la integración por partes:

$$\int_{0}^{N} x^{r}\, dP\Big[\|V_k\| < x\Big] = \int_{0^+}^{N} x^{r}\, dP\Big[\|V_k\| < x\Big] =$$

$$= x^{r} P\Big[\|V_k\| < x\Big]\Big|_{0^+}^{N} - r\int_{0^+}^{N} x^{r-1} P\Big[\|V_k\| < x\Big]dx =$$

$$= N^{r} P\Big[\|V_k\| < N\Big] - r\int_{0^+}^{N} x^{r-1} \Big(1 - P\Big[\|V_k\| \geq x\Big]\Big)dx =$$

$$= N^r - N^r P\left[\|V_k\| \geq N\right] - r\left(\int_{0^+}^{N} x^{r-1}\, dx\right. -$$

$$\left. - \int_{0^+}^{N} x^{r-1} P\left[\|V_k\| \geq x\right] dx\right) = N^r - N^r P\left[\|V_k\| \geq N\right] - N^r +$$

$$+ r \int_{0^+}^{N} x^{r-1} P\left[\|V_k\| \geq x\right] dx \leq r \int_{0^+}^{N} x^{r-1} P\left[\|V_k\| \geq x\right] dx \leq$$

$$\leq r \int_{0^+}^{N} x^{r-1} P\left[|V| \geq x\right] dx$$

Se tiene que:

$$P\left[\|S_{nn}\| > \varepsilon\right] = P\left[\left\|\sum_{k=1}^{n} V_{nk}\right\| > \varepsilon\right] \leq P\left[\sum_{k=1}^{n} \|V_{nk}\| > \varepsilon\right] =$$

$$= P\left[\sum_{k=1}^{n} |A_{nk}| W_{nk} > \varepsilon\right] \leq \frac{E\left[\sum_{k=1}^{n} |A_{nk}| W_{nk}\right]^r}{r}$$

Dado que $r < 1$, se puede escribir:

$$E\left[\sum_{k=1}^{n} |A_{nk}| W_{nk}\right]^r \leq \sum_{k=1}^{n} E(|A_{nk}|^r W_{nk}^r) =$$

según la hipótesis de incorrelación

$$= \sum_{k=1}^{n} E|A_{nk}|^r \, EW_{nk}^r = \sum_{k=1}^{n} E|A_{nk}|^r \int_{0}^{E^{-1}|A_{nk}|^r} x^r \, dP\left[\|V_k\| < x\right] \leq$$

$$\leq r \sum_{k=1}^{n} E|A_{nk}|^r \int_{0^+}^{E^{-1}|A_{nk}|^r} x^{r-1} P\left[|V| \geq x\right] dx =$$

$$= r \sum_{k=1}^{n} E^r |A_{nk}|^r \left[E^1 - {}^r|A_{nk}|^r \int_{0^+}^{E^{-1}|A_{nk}|^r} x^{r-1} P\left[|V| \geq x\right] dx\right].$$

Ahora bien, como $\max\limits_{1\leq k\leq n} E|A_{nk}|^r \longrightarrow 0$ y $E|A_{nk}|^r \longrightarrow 0$

cuando $n \longrightarrow \infty$, se cumple, para n suficientemente grande, que:

$$E^{1-r}|A_{nk}|^r \int_{0^+}^{E^{-1}|A_{nk}|^r} x^{r-1}\, P\left[|V| \geq x\right] dx \leq \delta$$

para cualquier $\delta > 0$ arbitrario y fijado, teniendo en cuenta lo expresado en (2).

Luego para n suficientemente grande:

$$E\left[\sum_{k=1}^{n} |A_{nk}|\, W_{nk}\right]^r \leq r \cdot C \cdot \delta$$

lo cual implica que $E\left[\sum\limits_{k=1}^{n} |A_{nk}|\, W_{nk}\right]^r \longrightarrow 0$ cuando $n \longrightarrow \infty$.

Por tanto:

$$P\left[\| S_{nn} \| > \varepsilon\right] \longrightarrow 0 \text{ cuando } n \longrightarrow \infty .$$

Entonces, $S_{nn} \longrightarrow 0$ en probabilidad, lo que implica que $S_n \longrightarrow 0$ en probabilidad. ●

A continuación demostramos que el resultado obtenido en el teorema I.4. puede ser también obtenido sustituyendo la condición de idéntica distribución de los elementos aleatorios por una acotación uniforme de momentos.

<u>TEOREMA II.2.</u>- Sea $\{V_n\}$ una sucesión de elementos aleatorios en un espacio lineal normado separable.

Sea $\{A_{nk}; k=1,2,\ldots,n; n=1,2,\ldots\}$ una doble sucesión de variables aleatorias tales que:

$$P\left[\max_{1\leq k\leq n} |A_{nk}| = \Theta(n^{-\alpha}) \text{ para algún } \alpha > \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right] = 1 . \qquad (1)$$

Supongamos además que $E\|V_n\|^{1+1/\alpha} \leq C$, $\forall n = 1,2,\ldots$, con C constante positiva.

Entonces, $S_n = \sum_{k=1}^{n} A_{nk}V_k \longrightarrow 0$ completamente, y, por tanto, con probabilidad 1.

Si en (1) es $1 < \alpha \leq \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$, la convergencia es en probabilidad.

Demostración: Al igual que en la demostración del teorema I.4., dado $\varepsilon > 0$ se tiene que:

$$P\left[\|S_m\| > \varepsilon\right] \leq A\, n^{-(\alpha + 1)}\, E\left(\sum_{k=1}^{m} \|V_k\| \right)^{1 + 1/\alpha} ,$$

con A constante positiva.

Aplicando una desigualdad de Minkowski:

$$E\left(\sum_{k=1}^{n} \|V_k\| \right)^{1 + 1/\alpha} \leq \left[\sum_{k=1}^{n} \left(E\, \|V_k\|^{1 + 1/\alpha}\right)^{\alpha/(\alpha + 1)} \right]^{1 + 1/\alpha} \leq$$

$$\leq \left(n\, C^{\alpha/(\alpha + 1)}\right)^{1 + 1/\alpha} = C\, n^{1 + 1/\alpha} .$$

Así se llega a que:

$$P\left[\|S_n\| > \varepsilon\right] \leq A\, C\, n^{1/\alpha - \alpha} .$$

Por tanto:

$$\alpha > 1 \implies S_n = \sum_{k=1}^{n} A_{nk}V_k \longrightarrow 0 \text{ en probabilidad.}$$

$$\alpha > \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \implies S_n = \sum_{k=1}^{n} A_{nk}V_k \longrightarrow 0 \text{ completamente.}$$ ●

Aún más, la condición de momentos para $\{V_n\}$ puede ser sustituida por la condición de acotación uniforme en probabilidad de Rohatgi, como ponemos de manifiesto a continuación:

COROLARIO II.3.- Sea $\{V_n\}$ una sucesión de elementos aleatorios en un espacio lineal normado separable.

Sea $\{A_{nk}; k=1,2,\ldots,n; n=1,2,\ldots\}$ una doble sucesión de variables aleatorias tal que:

$$P\left[\max_{1\leq k\leq n} |A_{nk}| = \Theta(n^{-\alpha}) \text{ para algún } \alpha > \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right] = 1 \qquad (1)$$

Supongamos que existe una variable aleatoria V tal que

$$P\left[\|V_n\| \geq t\right] \leq P\left[|V| \geq t\right], \quad \forall\, n = 1,2,\ldots \text{ y } \forall t > 0.$$

Sea $E|V|^{1+1/\alpha} < \infty$.

Entonces, $S_n = \sum_{k=1}^{n} A_{nk}V_k \longrightarrow 0$ completamente.

Si en (1) es $1 < \alpha \leq \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, la convergencia es en probabilidad.

<u>Demostración:</u> En efecto, para una variable aleatoria X con función de distribución F(y) es:

$$E\,X^n = \int_0^\infty n\,y^{n-1}\left[1 - F(y) + (-1)^n F(-y)\right]dy \qquad \forall\, n = 1,2,\ldots$$

Si la variable aleatoria X es positiva:

$$E\,X^n = \int_0^\infty n\,y^{n-1}\left[1 - F(y)\right]dy = \int_0^\infty n\,y^{n-1}\,P\left[X \geq y\right]dy$$

En nuestro caso:

$$E\|V_k\|^{1+1/\alpha} = \left(1 + \frac{1}{\alpha}\right)\int_0^\infty y^{1/\alpha}\,P\left[\|V_k\| \geq y\right]dy \leq$$

$$\leq \left(1 + \frac{1}{\alpha}\right)\int_0^\infty y^{1/\alpha}\,P\left[|V| \geq y\right]dy = E\,V^{1+1/\alpha} < \infty .$$

y estamos en las condiciones del teorema II.2. .

El teorema II.2. y el corolario II.3. pueden ser modificados ligeramente con objeto de evidenciar que el resultado que obtenemos puede ser considerado como una extensión del teorema

0.13. de Wei y Taylor (1978) para $\{V_n\}$ no necesariamente compacta débil ni independientes. Sólo la condición sobre los pesos es fortalecida.

TEOREMA II.4.- Sea $\{V_n\}$ una sucesión de elementos aleatorios en un espacio lineal normado separable, con $E\|V_n\|^r \leq C$, para todo $n = 1,2,\ldots$, con C constante positiva y para algún $r > 1$.

Sea $\{A_{nk}; k=1,2,\ldots,n; n=1,2,\ldots\}$ una doble sucesión de variables aleatorias tal que:

$$P\left[\max_{1\leq k\leq n} |A_{nk}| = \Theta(n^{-\alpha}) \text{ para algún } \alpha \text{ tal que } \quad a)\ \alpha > \frac{1+\sqrt{5}}{2} \qquad b)\ 0 < \frac{1}{\alpha} < r-1\right] = 1.$$

Entonces, $S_n = \sum_{k=1}^{n} A_{nk} V_k \longrightarrow 0$ completamente, y, por tanto, con probabilidad 1.

Demostración: Según el lema 5.2.2. de [48] , existe una variable aleatoria V tal que:

$$P\left[\|V_n\| \geq t\right] \leq P\left[|V| \geq t\right], \qquad \forall n = 1,2,\ldots \text{ y } \forall t > 0,$$

con $E|V|^{1+1/\alpha} < \infty$ para $0 < \frac{1}{\alpha} < r-1$.

Se cumplen, pues, las condiciones del corolario II.3. . ●

En nuestro siguiente establecimiento no exigiremos condiciones directamente sobre los rangos de los pesos $\{A_{nk}\}$, sino sobre algunos de sus momentos.

Los resultados pueden ser comparados con los de los teoremas 0.9. y 0.15. .

TEOREMA II.5.- Sea $\{V_n\}$ una sucesión de elementos aleatorios en un espacio lineal normado separable, tales que para todo

$n = 1, 2, \ldots$, y para algún $\alpha > 0$, es

$E\|V_m\|^{1 + 1/\alpha} \leq C$, con C constante positiva.

Sea $\{A_{nk}; k=1,2,\ldots,n; n=1,2,\ldots\}$ una doble sucesión de variables aleatorias tales que:

a) $|A_{nk}|^{1 + 1/\alpha}$ y $\|V_k\|^{1 + 1/\alpha}$ son variables aleatorias incorreladas para cada k y para todo n.

b) $\max\limits_{1 \leq k \leq n} E|A_{nk}|^{1 + 1/\alpha} = \Theta(n^{-s})$ para $s > 2 + \frac{1}{\alpha}$.

Entonces, $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} A_{nk} V_k \longrightarrow 0$ completamente, y, por tanto, con probabilidad 1.

<u>Demostración</u>: Dado $\varepsilon > 0$, se tiene, aplicando la desigualdad de Markov:

$$P\left[\|S_n\| > \varepsilon\right] = P\left[\left\|\sum_{k=1}^{n} A_{nk} V_k\right\| > \varepsilon\right] \leq P\left[\sum_{k=1}^{n} |A_{nk}|\,\|V_k\| > \varepsilon\right] \leq$$

$$\leq \frac{E\left(\sum\limits_{k=1}^{n} |A_{nk}|\,\|V_k\|\right)^{1 + 1/\alpha}}{\varepsilon^{1 + 1/\alpha}}$$

Por otra parte:

$$E\left(\sum_{k=1}^{n} |A_{nk}|\,\|V_k\|\right)^{1 + 1/\alpha} \leq \left[\sum_{k=1}^{n} \left(E|A_{nk}|\,\|V_k\|\right)^{1+1/\alpha}\right)^{\alpha/(\alpha+1)}\right]^{1+1/\alpha} =$$

según la hipótesis de incorrelación:

$$= \left[\sum_{k=1}^{n} \left(E|A_{nk}|^{1 + 1/\alpha}\, E\|V_k\|^{1 + 1/\alpha}\right)^{\alpha/(\alpha + 1)}\right]^{1 + 1/\alpha} \leq$$

$$\leq \left[\sum_{k=1}^{n} \left(M\, n^{-s}\, E\|V_k\|^{1 + 1/\alpha}\right)^{\alpha/(\alpha + 1)}\right]^{1 + 1/\alpha} \leq$$

donde M es una constante positiva

$\leq M n^{-s} C n^{1+1/\alpha} = M C n^{-s+1+1/\alpha}$.

Ahora bien:

$$s > 2 + \frac{1}{\alpha} \Longrightarrow -s < -2 - \frac{1}{\alpha} \Longrightarrow -s + 1 + \frac{1}{\alpha} < -1.$$

Por consiguiente:

$$\sum_{n=1}^{\infty} P\left[\|S_n\| > \varepsilon\right] \leq M C \varepsilon^{-1-1/\alpha} \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s+1+1/\alpha} < \infty .$$

Luego $S_n = \sum_{k=1}^{n} A_{nk} V_k \longrightarrow 0$ completamente. ●

Notemos que a la hora de la verificación práctica del cumplimiento de las condiciones del teorema, es suficiente que las variables aleatorias $|A_{nk}|$ y $\|V_k\|$ sean independientes para cada k y para todo n, para que se verifique la condición a).

La condición de momentos para los elementos aleatorios $\{V_n\}$ puede ser sustituida por la condición de acotación uniforme en probabilidad de Rohatgi, y se obtendría entonces una más precisa similitud con las condiciones del teorema 0.15.

<u>COROLARIO II.6.</u>- Sea $\{V_n\}$ una sucesión de elementos aleatorios en un espacio lineal normado separable.

Supongamos que existe una variable aleatoria V de modo que $P\left[\|V_n\| \geq t\right] \leq P\left[|V| \geq t\right]$, $\forall n = 1,2,\ldots$, $\forall t > 0$, con $E|V|^{1+1/\alpha} < \infty$ para algún $\alpha > 0$.

Sea $\{A_{nk}; k=1,2,\ldots,n; n=1,2,\ldots\}$ una doble sucesión de variables aleatorias tales que:

a) $|A_{nk}|^{1+1/\alpha}$ y $\|V_k\|^{1+1/\alpha}$ son variables aleatorias incorreladas para cada k y para todo n.

b) $\max_{1\leq k\leq n} E|A_{nk}|^{1+1/\alpha} = \Theta(n^{-s})$ para $s > 2 + \frac{1}{\alpha}$.

Entonces, $S_n = \sum_{k=1}^{n} A_{nk} V_k \longrightarrow 0$ completamente, y, por tanto, con probabilidad 1.

<u>TEOREMA II.7.</u>- Sea $\{V_m\}$ una sucesión de elementos aleatorios en un espacio lineal normado separable, tal que se verifica que $E\,||V_n||^r \leq C$, $\forall n = 1,2,\ldots$, con $C > 0$, para algún $r > 1$.

Sea $\{A_{nk};k=1,2,\ldots,n;n=1,2,\ldots\}$ una doble sucesión de variables aleatorias tales que:

$$\sum_{k=1}^{n} E^{(r-1)/r}|A_{nk}|^{r/(r-1)} = \Theta\,(n^{-\alpha}) \quad \text{para algún } \alpha > 1.$$

Entonces, $S_n = \sum_{k=1}^{n} A_{nk} V_k \longrightarrow 0$ completamente, y, por tanto, con probabilidad 1.

<u>Demostración:</u> Dado $\mathcal{E} > 0$:

$$P\left[||S_n|| > \mathcal{E}\right] = P\left[\left|\left|\sum_{k=1}^{n} A_{nk} V_k\right|\right| > \mathcal{E}\right] \leq P\left[\sum_{k=1}^{n} |A_{nk}|\,||V_k|| > \mathcal{E}\right] \leq$$

$$\leq \mathcal{E}^{-1} \sum_{k=1}^{n} E(|A_{nk}|\,||V_k||) \leq$$

aplicando la desigualdad de Hölder:

$$\leq \frac{1}{\mathcal{E}} \sum_{k=1}^{n} E^{(r-1)/r}|A_{nk}|^{r/(r-1)}\, E^{1/r}\,||V_k||^r \leq$$

$$\leq \frac{C^{1/r}}{\mathcal{E}} \sum_{k=1}^{n} E^{(r-1)/r}|A_{nk}|^{r/(r-1)} \leq M\, n^{-\alpha}\,,\ \text{con } \alpha > 1, \text{ y}$$

siendo M una constante positiva.

Por consiguiente: $\sum_{n=1}^{\infty} P\left[||S_n|| > \mathcal{E}\right] \leq M \sum_{n=1}^{\infty} n^{-\alpha} < \infty$.

Es decir, $S_n = \sum_{k=1}^{n} A_{nk} V_k \longrightarrow 0$ completamente, y, por tanto, con probabilidad 1. ∎

Particularizando el resultado obtenido en el corolario II.3. al caso de variables aleatorias reales, podemos generalizar un resultado de Padgett y Taylor (teorema 0.10.) para elementos aleatorios definidos en un espacio de Banach con base de Schauder, sujetos a condiciones de acotación en probabilidad similares a las de Rohatgi.

<u>TEOREMA II.8.</u>- Sea $\{V_n\}$ una sucesión de elementos aleatorios en un espacio de Banach separable con base de Schauder $\{b_i\}$.

Denotemos por $\{f_i\}$ los funcionales coordenados correspondientes.

Sea $\{A_{nk}; k=1,2,\ldots,n; n=1,2,\ldots\}$ una doble sucesión de variables aleatorias tal que:

$$P\left[\max_{1\leq k\leq n} |A_{nk}| = \mathcal{O}(n^{-\alpha}) \quad \text{para algún } \alpha > \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right] = 1 .$$

Supongamos que existen variables aleatorias $\{A_i\}$ y $\{B_m\}$ tales que:

a) $P\left[|f_i(V_k)| \geq t\right] \leq P\left[|A_i| \geq t\right]$, $\quad \forall t > 0$ y cada k.

b) $P\left[\Big| \|Q_m(V_k)\| - E\|Q_m(V_k)\| \Big| \geq t\right] \leq P\left[|B_m| \geq t\right]$, $\quad \forall t > 0$ y cada k.

c) $E|A_i|^{1+1/\alpha} < \infty$, $\quad E|B_m|^{1+1/\alpha} < \infty$ para cada i y cada m.

Supongamos además que $\sup_k E\|Q_m(V_k)\| \longrightarrow 0$ cuando $m \longrightarrow \infty$.

Entonces, $S_n = \sum_{k=1}^{n} A_{nk} V_k \longrightarrow 0$ con probabilidad 1.

Demostración: Para cada m tenemos:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} A_{nk}V_k = U_m\left(\sum_{k=1}^{n} A_{nk}V_k\right) + Q_m\left(\sum_{k=1}^{n} A_{nk}V_k\right)$$

donde:

$\left\| U_m\left(\sum_{k=1}^{n} A_{nk}V_k\right)\right\| \leq \sum_{i=1}^{m} \left| \sum_{k=1}^{n} A_{nk} f_i(V_k)\right| \|b_i\| \longrightarrow 0$ con probabilidad 1, por ser $\{f_i(V_n);n=1,2,\dots\}$, para cada i, una sucesión de variables aleatorias que cumple las condiciones del corolario II.3. .

Por otro lado:

$$\left\| Q_m\left(\sum_{k=1}^{n} A_{nk}V_k\right)\right\| \leq \sum_{k=1}^{n} |A_{nk}| \, \|Q_m(V_k)\| =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} |A_{nk}| \left[\|Q_m(V_k)\| - E\|Q_m(V_k)\|\right] + \sum_{k=1}^{n} |A_{nk}| E\|Q_m(V_k)\| .$$

Ahora bien, $\sum_{k=1}^{n} |A_{nk}| \left[\|Q_m(V_k)\| - E\|Q_m(V_k)\|\right] \longrightarrow 0$ con probabilidad 1 cuando $n \longrightarrow \infty$, para cada m, aplicando de nuevo el corolario II.3. .

Además se tiene que, con probabilidad 1:

$$\sum_{k=1}^{n} |A_{nk}| E\|Q_m(V_k)\| \leq \sup_k E\|Q_m(V_k)\| \cdot \sum_{k=1}^{n} |A_{nk}| \leq$$

$\leq M n^{1-\alpha} \sup_k E\|Q_m(V_k)\| \leq M \cdot \sup_k E\|Q_m(V_k)\|$, con $M > 0$, ya que $1 - \alpha < 0$.

Si Ω_0 es el conjunto en el cual no se verifican los resultados parciales anteriores (por tanto, $P(\Omega_0) = 0$), se tiene que, dado $\varepsilon > 0$, existe un entero N tal que $\forall\, n \geq N(\varepsilon, \omega)$, con $\omega \in \Omega - \Omega_0$, se verifica:

$$\left\| U_m\left(\sum_{k=1}^{n} A_{nk} V_k \right) \right\| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{y} \quad \left\| Q_m\left(\sum_{k=1}^{n} A_{nk} V_k \right) \right\| < \frac{\varepsilon}{3} \; .$$

Al mismo tiempo, podemos escoger m tal que:

$$\sup_k E \| Q_m(V_k) \| < \frac{\varepsilon}{3M} \; .$$

En tales condiciones se verifica, pues, que:

$\| S_n(\omega) \| < \varepsilon \quad \forall \; \omega \in \Omega - \Omega_o$, con $P(\Omega_o) = 0$, es decir:

$S_n = \sum_{k=1}^{n} A_{nk} V_k \longrightarrow 0$ con probabilidad 1. ●

CAPITULO III

ELEMENTOS ALEATORIOS CON OTRAS CONDICIONES ESPECIALES

En este capítulo efectuaremos un estudio sobre la convergencia de las sumas $\{S_n\}$ cuando los elementos aleatorios $\{V_k\}$ están sujetos a unas condiciones particulares distintas de la idéntica distribución ó de la existencia de momentos acotados, aunque en algunos casos específicos aquéllas puedan implicar a éstas.

El primer paso que damos en este sentido conduce a probar que si los elementos aleatorias-resto que se obtienen al truncar cada V_k en una cierta cantidad verifican una ley de los grandes números, una condición limitativa de los rangos de los pesos aleatorios $\{A_{nk}\}$ implica el resultado de convergencia.

El siguiente lema (en Taylor, [48]) nos será necesario en la demostración:

LEMA.- Para números positivos $x_1, x_2, \ldots, x_n$ y para $1 \leq p \leq q$,

se tiene que:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^q\right)^{1/q} \leq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^p\right)^{1/p}$$

El resultado a que nos referiamos es el siguiente:

TEOREMA III.1.- Sea $\{V_n\}$ una sucesión de elementos aleatorios en un espacio lineal normado separable.

Sea $\{A_{nk}; k=1,2,\ldots,n; n=1,2,\ldots\}$ una doble sucesión de variables aleatorias que verifican:

$$P\left[\max_{1\leq k\leq n} |A_{nk}| = \Theta(n^{-\alpha}) \quad \text{para algún } \alpha\in(\sqrt{2},2]\right] = 1 .$$

Supongamos que existe una constante $M > 0$ tal que si definimos $W_n = V_n I_{[\|V_n\| > M]}$ para cada $n = 1,2,\ldots$, se tiene que

$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \|W_k\|^{\alpha} \longrightarrow C$ con probabilidad 1, cuando $n \longrightarrow \infty$, donde C es una constante no negativa.

En tales condiciones, $S_n = \sum_{k=1}^{n} A_{nk}V_k \longrightarrow 0$ con probabilidad 1.

Demostración: Siendo

$$W_n = V_n I_{[\|V_n\| > M]} \qquad U_n = V_n I_{[\|V_n\| \leq M]}$$

podemos escribir:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} A_{nk}V_k = \sum_{k=1}^{n} A_{nk}U_k + \sum_{k=1}^{n} A_{nk}W_k = R_n + T_n .$$

Según la hipótesis hecha sobre $\{A_{nk}\}$, y teniendo en cuenta que $\alpha \in (\sqrt{2},2]$:

$$\|T_n\|^{\alpha} = \left\|\sum_{k=1}^{n} A_{nk}W_k\right\|^{\alpha} = \left(\left\|\sum_{k=1}^{n} A_{nk}W_k\right\|^{2}\right)^{\alpha/2} \leq$$

$$\leq \left(\sum_{k=1}^{n} |A_{nk}|^2\right)^{\alpha/2} \cdot \left(\sum_{k=1}^{n} \|W_k\|^2\right)^{\alpha/2} \leq$$

aplicando el lema anterior con $\alpha = p$, $2 = q$:

$$\leq \left(\sum_{k=1}^{n} |A_{nk}|^{\alpha}\right) \cdot \left(\sum_{k=1}^{n} \|W_k\|^{\alpha}\right) = n \sum_{k=1}^{n} |A_{nk}|^{\alpha} \, \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \|W_k\|^{\alpha} .$$

Ahora bien:

$$|A_{nk}| \leq K\, n^{-\alpha} \Longrightarrow |A_{nk}|^{\alpha} \leq K^{\alpha}\, n^{-\alpha^2} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \sum_{k=1}^{n} |A_{nk}|^{\alpha} \leqslant K^{\alpha} n^{1-\alpha^2} \Longrightarrow n \sum_{k=1}^{n} |A_{nk}|^{\alpha} \leqslant$$

$\leqslant K n^{2-\alpha^2} \longrightarrow 0$, cuando $n \longrightarrow \infty$, con probabilidad 1, por ser $\alpha > \sqrt{2}$.

Como, por otra parte:

$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \|W_k\|^{\alpha} \longrightarrow C$ cuando $n \longrightarrow \infty$, con probabilidad 1, se verifica que $\lim_{n \to \infty} \|T_n\|^{\alpha} = 0$ con probabilidad 1.

Por otro lado:

$$\|R_n\|^{\alpha} = \Big\| \sum_{k=1}^{n} A_{nk} U_k \Big\|^{\alpha} \leqslant \Big(\sum_{k=1}^{n} |A_{nk}| \, \|U_k\| \Big)^{\alpha} \leqslant$$

$$\leqslant \Big[\big(\max_{1 \leqslant k \leqslant n} |A_{nk}| \big) \sum_{k=1}^{n} \|U_k\| \Big]^{\alpha} \leqslant \big(\max_{1 \leqslant k \leqslant n} |A_{nk}| \big)^{\alpha} \cdot n^{\alpha} \cdot M^{\alpha} \leqslant$$

$\leqslant K^{\alpha} \cdot M^{\alpha} \, n^{\alpha - \alpha^2} \longrightarrow 0$ con probabilidad 1, cuando $n \longrightarrow \infty$, ya que $\alpha - \alpha^2 < 0$.

Ahora bien:

$$\|S_n\| \leqslant \|R_n\| + \|T_n\| \Longrightarrow \|S_n\|^{\alpha} \leqslant (\|R_n\| + \|T_n\|)^{\alpha} \leqslant$$

$\leqslant 2(\|R_n\|^{\alpha} + \|T_n\|^{\alpha}) \longrightarrow 0$ con probabilidad 1, cuando $n \longrightarrow \infty$.

Por tanto, $\|S_n\| \longrightarrow 0$ con probabilidad 1, cuando $n \longrightarrow \infty$. ●

Es interesante comparar nuestro próximo resultado con el obtenido en el teorema II.4. . Ahora imponemos una condición de acotación de momentos sobre $\sum_{k=1}^{n} \|V_k\|$, y no sobre cada elemento aleatorio individualizado; sin embargo, la condición sobre los pesos es aligerada, obviando la condición $\alpha > \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

TEOREMA III.2.- Sea $\{V_n\}$ una sucesión de elementos aleatorios en un espacio lineal normado separable que verifican

$$E\left[\sum_{k=1}^{n} \|V_k\|\right]^r \leq C \quad \text{para algún } r > 1, \text{ para todo } n = 1,2,\ldots ,$$

donde C es una constante positiva.

Sea $\{A_{nk}; k=1,2,\ldots,n; n=1,2,\ldots\}$ una doble sucesión de variables aleatorias tal que:

$$P\left[\max_{1\leq k\leq n} |A_{nk}| = \mathcal{O}(n^{-\alpha}) \text{ para algún } \alpha > 0, \text{ con } \frac{1}{\alpha} < r-1\right] = 1.$$

Entonces, $S_m = \sum_{k=1}^{n} A_{nk}V_k \longrightarrow 0$ completamente, y, por tanto, con probabilidad 1.

Demostración: La demostración utiliza argumentos similares a los empleados en la del teorema II.4. .

Aplicando el lema 5.2.2. de [48], podemos afirmar que existe una variable aleatoria V tal que:

a) $P\left[\sum_{k=1}^{n} \|V_k\| \geq t\right] \leq P\left[|V| \geq t\right], \quad \forall n, \text{ y } \quad \forall t > 0.$

b) $E|V|^{1+1/s} < \infty \quad \text{para} \quad 0 < \frac{1}{s} < r-1$

Entonces, con probabilidad 1, se verificará que, dado cualquier $\varepsilon > 0$:

$$P\left[\|S_n\| > \varepsilon\right] = P\left[\left\|\sum_{k=1}^{n} A_{nk}V_k\right\| > \varepsilon\right] \leq P\left[\sum_{k=1}^{n} |A_{nk}|\,\|V_k\| > \varepsilon\right] \leq$$

$$\leq P\left[K\,n^{-\alpha} \sum_{k=1}^{n} \|V_k\| > \varepsilon\right] = P\left[\sum_{k=1}^{n} \|V_k\| > \frac{\varepsilon\, n^{\alpha}}{K}\right] \leq$$

como K > 0, aplicando a):

$$\leq P\left[|V| \geq \frac{\varepsilon\, n^{\alpha}}{K}\right] \leq \frac{K^{1+1/\alpha}\, E|V|^{1+1/\alpha}}{\varepsilon^{1+1/\alpha}\,(n^{\alpha})^{1+1/\alpha}} \leq \frac{M}{n^{1+\alpha}} ,$$

con $M > 0$, constante dependiente de ε .

Por consiguiente:

$$\sum_{n=1}^{\infty} P\left[\left\| \sum_{k=1}^{n} A_{nk} V_k \right\| > \varepsilon \right] \leq M \sum_{n=1}^{\infty} n^{-1-\alpha} < \infty \text{ .}$$

Luego $S_n = \sum_{k=1}^{n} A_{nk} V_k \longrightarrow 0$ completamente, cuando $n \longrightarrow \infty$. ●

Si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} E \| V_n \|$ es convergente pueden ser obtenidos fácilmente interesantes resultados sobre la convergencia de S_n , imponiendo condiciones sobre los valores centrales de los pesos $\{A_{nk}\}$, en el sentido siguiente:

TEOREMA III.3.- Sea $\{V_n\}$ una sucesión de elementos aleatorios en un espacio lineal normado separable, tales que verifican $\sum_{n=1}^{\infty} E \| V_n \| < \infty$.

Sea $\{A_{nk}; k=1,2,\ldots,n; n=1,2,\ldots\}$ una doble sucesión de variables aleatorias tales que $|A_{nk}|$ y $\| V_k \|$ son variables aleatorias incorreladas para cada k y para todo n.

a) Si $\max\limits_{1 \leq k \leq n} E|A_{nk}| \longrightarrow 0$ cuando $n \longrightarrow \infty$, entonces

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} A_{nk} V_k \longrightarrow 0 \text{ en probabilidad.}$$

b) Si $\max\limits_{1 \leq k \leq n} E|A_{nk}| = \Theta(n^{-\alpha})$ para algún $\alpha > 1$, entonces

$S_n = \sum_{k=1}^{n} A_{nk} V_k \longrightarrow 0$ completamente, cuando $n \longrightarrow \infty$, y, por tanto, con probabilidad 1.

Demostración: Basta con hacer uso de la desigualdad de Markov:

$$P\left[\|S_n\| > \varepsilon\right] = P\left[\left\|\sum_{k=1}^{n} A_{nk}V_k\right\| > \varepsilon\right] \leq \frac{E\sum_{k=1}^{n} |A_{nk}|\,\|V_k\|}{\varepsilon} =$$

$$= \frac{\sum_{k=1}^{n} E|A_{nk}|\,E\,\|V_k\|}{\varepsilon} \leq \frac{1}{\varepsilon} \max_{1\leq k\leq n} E|A_{nk}| \sum_{k=1}^{n} E\,\|V_k\| .$$

Según esto, se tendrá, en el caso a):

$$\lim_{n\to\infty} P\left[\left\|\sum_{k=1}^{n} A_{nk}V_k\right\| > \varepsilon\right] \leq \frac{1}{\varepsilon}\cdot C\cdot \lim_{n\to\infty}(\max_{1\leq k\leq n} E|A_{nk}|)$$

donde $C = \sum_{n=1}^{\infty} E\,\|V_n\| < \infty$.

Por consiguiente, $S_n = \sum_{k=1}^{n} A_{nk}V_k \longrightarrow 0$ en probabilidad, cuando $n \to \infty$.

En el caso b), dado que $\sum_{k=1}^{n} E\,\|V_k\| \leq C < \infty$, puede escribirse:

$$\sum_{n=1}^{\infty} P\left[\left\|\sum_{k=1}^{n} A_{nk}V_k\right\| > \varepsilon\right] \leq \frac{1}{\varepsilon} \sum_{n=1}^{\infty}\left[(\max_{1\leq k\leq n} E|A_{nk}|) \sum_{k=1}^{n} E\,\|V_k\|\right] \leq$$

$$\leq \frac{1}{\varepsilon}\cdot C\cdot K \sum_{n=1}^{\infty} n^{-\alpha} < \infty \quad \text{por ser } \alpha > 1.$$

Por consiguiente, $S_n = \sum_{k=1}^{n} A_{nk}V_k \longrightarrow 0$ completamente, cuando $n \to \infty$. ●

Notemos que en el caso en que las variables aleatorias pesos verifiquen que para cada n, $\{A_{nk};k=1,2,\ldots,n\}$ estén idénticamente distribuidas como una variable aleatoria A_n tal que $E|A_n| < \infty$, la condición en a) se transforma en que se cumpla que $E|A_n| \longrightarrow 0$ cuando $n \to \infty$, mientras que en b) hay que exigir que exista algún $\alpha > 1$ tal que $E|A_n| = \Theta(n^{-\alpha})$.

En el caso de elementos aleatorios acotados con probabilidad 1, se obtiene inmediatamente un interesante resultado de convergencia, si las cotas constituyen una serie convergente.

<u>TEOREMA III.4.</u>- Sea $\{V_n\}$ una sucesión de elementos aleatorios en un espacio lineal normado separable, tales que para cada $n = 1,2,\ldots$ existe una constante $M_n > 0$, con $\sum_{n=1}^{\infty} M_n < \infty$, de modo que

$$P\left[\|V_n\| \leq M_n\right] = 1 \quad \text{para cada } n.$$

Sea $\{A_{nk};k=1,2,\ldots,n;n=1,2,\ldots\}$ una doble sucesión de variables aleatorias tal que

$$P\left[\max_{1\leq k\leq n} |A_{nk}| \longrightarrow 0 \text{ cuando } n \to \infty\right] = 1.$$

Entonces, $S_n = \sum_{k=1}^{n} A_{nk}V_k \longrightarrow 0$ con probabilidad 1.

<u>Demostración</u>: Es inmediato:

$$\|S_n\| = \left\|\sum_{k=1}^{n} A_{nk}V_k\right\| \leq \sum_{k=1}^{n} |A_{nk}|\,\|V_k\| \leq$$

$$\leq \left(\max_{1\leq k\leq n} |A_{nk}|\right)\cdot\sum_{k=1}^{n} \|V_k\| \leq \left(\max_{1\leq k\leq n} |A_{nk}|\right)\cdot\sum_{k=1}^{n} M_k$$

con probabilidad 1.

Por consiguiente, $S_n = \sum_{k=1}^{n} A_{nk} V_k \longrightarrow 0$ con probabilidad 1, cuando $n \longrightarrow \infty$. ●

Siguiendo en el caso de elementos aleatorios acotados, una aplicación del lema de Toeplitz nos muestra la validez del siguiente teorema:

TEOREMA III.5.- Sea $\{V_n\}$ una sucesión de elementos aleatorios en un espacio lineal normado separable, tales que están acotados con probabilidad 1, ó sea, para cada $n = 1,2,\ldots$, existe una constante $M_n > 0$ tal que

$$P\left[\|V_n\| \leq M_n\right] = 1.$$

Sea $\{M_n\}$ tal que $\lim_{n \to \infty} M_n = 0$.

Sea $\{A_{nk}; k=1,2,\ldots,n; n=1,2,\ldots\}$ una doble sucesión de variables aleatorias.

a) Si $\{E|A_{nk}|; k=1,2,\ldots,n; n=1,2,\ldots\}$ es una sucesión de Toeplitz, entonces $S_n = \sum_{k=1}^{n} A_{nk} V_k \longrightarrow 0$ en probabilidad, cuando $n \longrightarrow \infty$.

b) Si $\{|A_{nk}|; k=1,2,\ldots,n; n=1,2,\ldots\}$ es una sucesión de Toeplitz con probabilidad 1, entonces $S_n = \sum_{k=1}^{n} A_{nk} V_k \longrightarrow 0$ con probabilidad 1, cuando $n \longrightarrow \infty$.

En nuestro siguiente teorema, que puede ser considerado en cierto sentido como una extensión del teorema II.8., se imponen condiciones de momento sobre las coordenadas de los elementos aleatorios con respecto a una base de Schauder del espacio de Banach en que están definidos; aparte de ciertas condiciones de incorrelación, es preciso exigir una condición de convergencia sobre los momentos absolutos de primer orden de los pesos aleatorios $\{A_{nk}\}$.

TEOREMA III.6.- Sea $\{V_n\}$ una sucesión de elmentos aleatorios en un espacio de Banach separable con una base de Schauder $\{b_i\}$. Denotemos por $\{f_i\}$ los funcionales coordenados correspondientes.

Supongamos que para algún $m \in Z^+$ existen constantes K_i y M_m (positivas) tales que:

a) $E|f_i(V_n)| \leq K_i < \infty \quad \forall\, n = 1,2,\ldots$, con $1 \leq i \leq m$

b) $E\|Q_m(V_n)\| \leq M_m < \infty \quad \forall\, n = 1,2,\ldots$

Sea $\{A_{nk}; k=1,2,\ldots,n; n=1,2,\ldots\}$ una doble sucesión de variables aleatorias tal que:

a′) $|A_{nk}|$ y $|f_i(V_k)|$ son variables aleatorias incorreladas, para cada k, para todo n, y para $1 \leq i \leq m$.

b′) $|A_{nk}|$ y $\|Q_m(V_k)\|$ son variables aleatorias incorreladas, para cada k y para todo n.

Supongamos además que es:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{n} E|A_{nk}| < \infty \quad .$$

Entonces, $S_n = \sum_{k=1}^{n} A_{nk}V_k \longrightarrow 0$ completamente, y, por tanto, con probabilidad 1.

Demostración: Podemos escribir:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} A_{nk}V_k = \sum_{k=1}^{n} A_{nk}U_m(V_k) + \sum_{k=1}^{n} A_{nk}Q_m(V_k)$$

siendo $m \in Z^+$ el valor especificado en el enunciado del teorema, y, donde siguiendo la nomenclatura habitual:

$$U_m(V_k) = \sum_{i=1}^{m} f_i(V_k) b_i \qquad\qquad Q_m(V_k) = V_k - U_m(V_k)$$

Se tiene que:

$$\|S_n\| \leq \left\|\sum_{k=1}^{n} A_{nk} U_m(V_k)\right\| + \left\|\sum_{k=1}^{n} A_{nk} Q_m(V_k)\right\|.$$

Estudiemos cada uno de estos sumandos.

$$\left\|\sum_{k=1}^{n} A_{nk} U_m(V_k)\right\| = \left\|U_m\left(\sum_{k=1}^{n} A_{nk} V_k\right)\right\| \leq \sum_{i=1}^{m}\left|\sum_{k=1}^{n} A_{nk} f_i(V_k)\right| \|b_i\|$$

Por tanto, para cualquier $\varepsilon > 0$:

$$P\left[\left\|\sum_{k=1}^{n} A_{nk} U_m(V_k)\right\| > \varepsilon\right] \leq P\left[\sum_{i=1}^{m}\left|\sum_{k=1}^{n} A_{nk} f_i(V_k)\right| \|b_i\| > \varepsilon\right] \leq$$

$$\leq \sum_{i=1}^{m} P\left[\left|\sum_{k=1}^{n} A_{nk} f_i(V_k)\right| > \frac{\varepsilon}{m\,\|b_i\|}\right] \tag{1}$$

Ahora bien, para cada i, $1 \leq i \leq m$:

$$P\left[\left|\sum_{k=1}^{n} A_{nk} f_i(V_k)\right| > \varepsilon\right] \leq P\left[\sum_{k=1}^{n} |A_{nk}|\,|f_i(V_k)| > \varepsilon\right] \leq$$

$$\frac{E\sum_{k=1}^{n} |A_{nk}|\,|f_i(V_k)|}{\varepsilon} = \frac{\sum_{k=1}^{n} E|A_{nk}|\,E|f_i(V_k)|}{\varepsilon} \leq \frac{K_i}{\varepsilon} \sum_{k=1}^{n} E|A_{nk}|$$

A partir de aquí se deduce que $\sum_{k=1}^{n} A_{nk} f_i(V_k) \longrightarrow 0$ completamente.

Ahora bien, a partir de (1) se tendría:

$$P\left[\left\|\sum_{k=1}^{n} A_{nk} U_m(V_k)\right\| > \varepsilon\right] \leq \sum_{i=1}^{m}\left(\frac{K_i}{\frac{\varepsilon}{m\,\|b_i\|}} \sum_{k=1}^{n} E|A_{nk}|\right) \leq$$

$$\leq \frac{m^2 \cdot \left(\max_{1\leq i\leq m} K_i \|b_i\|\right)}{\varepsilon} \sum_{k=1}^{n} E|A_{nk}|\,.$$

Por consiguiente:

$$\sum_{n=1}^{\infty} P\left[\left\|\sum_{k=1}^{n} A_{nk} U_m(V_k)\right\| > \varepsilon\right] \leq \frac{m\, K'_m}{\varepsilon} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{n} E|A_{nk}| < \infty$$

Estudiemos a continuación el otro sumando:

$$P\left[\left\|\sum_{k=1}^{n} A_{nk} Q_m(V_k)\right\| > \varepsilon\right] \leq P\left[\sum_{k=1}^{n} |A_{nk}|\, \|Q_m(V_k)\| > \varepsilon\right] \leq$$

$$\leq \frac{E \sum_{k=1}^{n} |A_{nk}|\, \|Q_m(V_k)\|}{\varepsilon} = \frac{\sum_{k=1}^{n} E|A_{nk}| E\, \|Q_m(V_k)\|}{\varepsilon} \leq$$

$$\leq \frac{M_m}{\varepsilon} \sum_{k=1}^{n} E|A_{nk}| \quad .$$

Por tanto:

$$\sum_{n=1}^{\infty} P\left[\left\|\sum_{k=1}^{n} A_{nk} Q_m(V_k)\right\| > \varepsilon\right] \leq \frac{M_m}{\varepsilon} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{n} E|A_{nk}| < \infty$$

Ahora bien, dado cualquier $\varepsilon > 0$:

$$P\left[\left\|\sum_{k=1}^{n} A_{nk} V_k\right\| > 2\varepsilon\right] \leq P\left[\left\|\sum_{k=1}^{n} A_{nk} U_m(V_k)\right\| > \varepsilon\right] + $$

$$+ P\left[\left\|\sum_{k=1}^{n} A_{nk} Q_m(V_k)\right\| > \varepsilon\right]$$

De donde, dada la convergencia de las dos series estudiadas anteriormente:

$$\sum_{n=1}^{\infty} P\left[\left\|\sum_{k=1}^{n} A_{nk} V_k\right\| > 2\varepsilon\right] \leq \sum_{n=1}^{\infty} P\left[\left\|\sum_{k=1}^{n} A_{nk} U_m(V_k)\right\| > \varepsilon\right] +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} P\left[\left\|\sum_{k=1}^{n} A_{nk} Q_m(V_k)\right\| > \varepsilon\right] < \infty$$

Luego $S_n = \sum_{k=1}^{n} A_{nk} V_k \longrightarrow 0$ completamente, cuando $n \to \infty$.

Notemos que las condiciones a) y b) requeridas en el enunciado del teorema se verifican si las variables aleatorias a que se refieren, $\{f_i(V_n)\}$ y $\{\|Q_m(V_k)\|\}$, están dominadas, para todo n, en probabilidad, por variables aleatorias respectivas $\{A_i\}$ y $\{B_m\}$, con $E|A_i| < \infty$ y $E|B_m| < \infty$, $\forall i = 1,2,\ldots,m$.

CAPITULO IV

EQUIVALENCIA ENTRE LA CONVERGENCIA EN PROBABILIDAD EN LA TOPOLOGIA FUERTE Y EN LA TOPOLOGIA DEBIL

En este capítulo estudiamos diversas condiciones bajo las cuales la convergencia en probabilidad de sumas aleatoriamente ponderadas de elementos aleatorios en espacios de Banach separables, en la topología de la norma, es equivalente a la convergencia en probabilidad en la topología débil.

En espacios de Banach con base de Schauder, esta equivalencia se amplía a la convergencia en probabilidad para cada funcional coordenado.

Algunos de los resultados que obtenemos son extensiones, para pesos aleatorios, de resultados de Padgett y Taylor (1975) y Taylor y Wei (1978) para pesos constantes.

En general, la matriz de pesos no tendrá que ser necesariamente triangular, por lo cual, los resultados serán obtenidos para sumas del tipo:

$$S_n = \sum_{k=1}^{\infty} A_{nk} V_k$$

Estudiaremos en primer lugar el caso de elementos aleatorios idénticamente distribuidos; posteriormente el caso de elementos aleatorios con momentos acotados y constituyendo una sucesión compacta débil, para, por último, pasar al estudio de elementos aleatorios con sólo una condición de acotación de momentos.

Nuestro primer resultado en esta línea es el siguiente:

TEOREMA IV.1.- Sea X un espacio de Banach separable con base de Schauder $\{b_i\}$. Sea $\{V_n\}$ una sucesión de elementos aleatorios en X, idénticamente distribuidos, con $E\|V_1\| < \infty$.

Sea $\{A_{nk};\ k,n=1,2,\ldots\}$ una doble sucesión de variables aleatorias que verifican:

a) $\sum_{k=1}^{\infty} E|A_{nk}| \leq C$, $\forall n = 1,2,\ldots$, siendo C una constante positiva.

b) $\exists\ t_o \in Z^+ \mid \forall t \geq t_o$, $t \in Z^+$, las variables aleatorias $|A_{nk}|$ y $\|Q_t(V_k)\|$ son incorreladas para cada k y todo n.

c) $|A_{nk}|$ y $\|V_k\|$ son incorreladas para cada k y todo n.

Entonces, $\sum_{k=1}^{\infty} A_{nk} f_i(V_k - EV_1) \longrightarrow 0$ en probabilidad, para cada funcional coordenado f_i, si, y sólo si, se verifica que

$\|\sum_{k=1}^{\infty} A_{nk}(V_k - EV_1)\| \longrightarrow 0$ en probabilidad.

Demostración:

I) Por ser X espacio de Banach, cada funcional lineal f_i es continuo. Por consiguiente, si se verifica la convergencia en norma, se tiene también la convergencia en cada funcional coordenado correspondiente a la base $\{b_i\}$.

II) Pasemos a demostrar la implicación contraria.

Supongamos que se verifica la convergencia para cada funcional coordenado f_i.

La completitud y separabilidad del espacio X nos lleva a afirmar la existencia de EV_1 a partir de la verificación de la condición $E\|V_1\| < \infty$. Por consiguiente, sin pérdida de generalidad, supondremos en lo que sigue que $EV_1 = 0$.

Sean $\varepsilon > 0$ y $\delta > 0$ números cualesquiera dados.

Se puede escribir:

$$S_n = \sum_{k=1}^{\infty} A_{nk} V_k = U_t\left(\sum_{k=1}^{\infty} A_{nk} V_k\right) + Q_t\left(\sum_{k=1}^{\infty} A_{nk} V_k\right)$$

donde t es un entero positivo en las condiciones de b).

Se tendrá, entonces, por una parte:

$$P\left[\left\|Q_t\left(\sum_{k=1}^{\infty} A_{nk} V_k\right)\right\| > \frac{\varepsilon}{2}\right] = P\left[\left\|\sum_{k=1}^{\infty} A_{nk} Q_t(V_k)\right\| > \frac{\varepsilon}{2}\right] \leqslant$$

$$\leqslant P\left[\sum_{k=1}^{\infty} |A_{nk}|\, \|Q_t(V_k)\| > \frac{\varepsilon}{2}\right] \leqslant \frac{2}{\varepsilon} \sum_{k=1}^{\infty} E|A_{nk}|\, E\|Q_t(V_1)\| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2}{\varepsilon}\, C\, E\|Q_t(V_1)\| ,$$

ya que $\{ Q_t(V_k);\ k=1,2,\dots \}$ es, para cada t, una sucesión de elementos aleatorios idénticamente distribuidos como $Q_t(V_1)$.

Ahora bien:

$$\|Q_t(V_1)\| = \left\|V_1 - \sum_{i=1}^{t} f_i(V_1) b_i\right\| \longrightarrow 0$$

puntualmente para $t \longrightarrow \infty$. Como:

$$\|Q_t(V_1)\| \leqslant \|Q_t\|\, \|V_1\| \leqslant (m + 1)\|V_1\|$$

siendo m la constante básica; y como es $E\|V_1\| < \infty$, podemos concluir, a partir del teorema de convergencia dominada, que se verifica que:

$$E\|Q_t(V_1)\| \longrightarrow 0 \quad \text{cuando } t \longrightarrow \infty .$$

Entonces, escogemos t de modo que sea $t \geqslant t_0$, y tal que

$$E\|Q_t(V_1)\| \leqslant \frac{\delta\,\varepsilon}{4C} .$$

Para esta elección de t:

$$P\left[\left\|Q_t\left(\sum_{k=1}^{\infty} A_{nk}V_k\right)\right\| > \frac{\varepsilon}{2}\right] \leq \frac{2}{\varepsilon}\cdot C\cdot\frac{\delta\varepsilon}{4C} = \frac{\delta}{2}$$

Además se tiene que:

$$P\left[\left\|U_t\left(\sum_{k=1}^{\infty} A_{nk}V_k\right)\right\| > \frac{\varepsilon}{2}\right] = P\left[\left\|\sum_{i=1}^{t} f_i\left(\sum_{k=1}^{\infty} A_{nk}V_k\right)b_i\right\| > \frac{\varepsilon}{2}\right] \leq$$

$$\leq P\left[\sum_{i=1}^{t}\left|f_i\left(\sum_{k=1}^{\infty} A_{nk}V_k\right)\right| \|b_i\| > \frac{\varepsilon}{2}\right] \leq$$

$$\leq \sum_{i=1}^{t} P\left[\left|f_i\left(\sum_{k=1}^{\infty} A_{nk}V_k\right)\right| \|b_i\| > \frac{\varepsilon}{2t}\right] =$$

$$= \sum_{i=1}^{t} P\left[\left|\sum_{k=1}^{\infty} A_{nk}f_i(V_k)\right| > \frac{\varepsilon}{2t\,\|b_i\|}\right] \longrightarrow 0 \quad \text{cuando } n \longrightarrow \infty \quad ,$$

por ser t finito, y según las hipótesis efectuadas.

Por consiguiente, podemos escoger $n_o \in Z^+$ de modo que para todo $n \geq n_o$ se verifique:

$$P\left[\left\|Q_t\left(\sum_{k=1}^{\infty} A_{nk}V_k\right)\right\| > \frac{\varepsilon}{2}\right] \leq \frac{\delta}{2}$$

$$P\left[\left\|U_t\left(\sum_{k=1}^{\infty} A_{nk}V_k\right)\right\| > \frac{\varepsilon}{2}\right] \leq \frac{\delta}{2}$$

Por tanto, para todo $n \geq n_o$ se verifica que:

$$P\left[\left\|\sum_{k=1}^{\infty} A_{nk}V_k\right\| > \varepsilon\right] \leq \delta$$

Es decir, $S_n = \sum_{k=1}^{\infty} A_{nk}V_k \longrightarrow 0$ en probabilidad, cuando $n \longrightarrow \infty$, en la topología de la norma. ●

El objeto de la condición c) del teorema es garantizar que S_n tiene sentido. En efecto:

$$E\,\|S_n\| = E\left(\left\|\sum_{k=1}^{\infty} A_{nk}V_k\right\|\right) \leq E\sum_{k=1}^{\infty} |A_{nk}|\,\|V_k\| =$$

$$= E\,\|V_1\| \sum_{k=1}^{\infty} E|A_{nk}| \leq C\cdot E\,\|V_1\| < \infty ,$$

es decir, $S_n = \sum_{k=1}^{\infty} A_{nk}V_k$ converge absolutamente con probabilidad 1.

Dado que, como ponemos de manifiesto con anterioridad, cada funcional coordenado f_i pertenece a X^*, dual del espacio X, obtenemos como corolario del teorema anterior de equivalencia entre la convergencia en probabilidad en la topología fuerte y en la topología débil, el siguiente

COROLARIO IV.2.- Sea X un espacio de Banach separable con base de Schauder $\{b_i\}$. Sea $\{V_n\}$ una sucesión de elementos aleatorios en X, idénticamente distribuidos, con $E\,\|V_1\| < \infty$.

Sea $\{A_{nk};\ k,n=1,2,\ldots\}$ una doble sucesión de variables aleatorias que verifican:

a) $\sum_{k=1}^{\infty} E|A_{nk}| \leq C$, $\forall n = 1,2,\ldots$, siendo C una constante positiva.

b) $\exists\, t_0 \in Z^+ \mid \forall t \geq t_0$, $t \in Z^+$, las variables aleatorias $|A_{nk}|$ y $\|Q_t(V_k)\|$ son incorreladas para cada k y todo n.

c) $|A_{nk}|$ y $\|V_k\|$ son variables aleatorias incorreladas para cada k y para todo n.

Entonces, $\left|\sum_{k=1}^{\infty} A_{nk}f(V_k - EV_1)\right| \longrightarrow 0$ en probabilidad para cada funcional lineal continuo $f \in X^*$, si, y sólo si, se verifica que $\left\|\sum_{k=1}^{\infty} A_{nk}(V_k - EV_1)\right\| \longrightarrow 0$ en probabilidad.

Si X es un espacio lineal normado separable, y denotamos por $\hat{X}$ su complección, se tiene que $\hat{X}$ es isométrico a un subespacio de $C[0,1]$ (ver [31]).

Por consiguiente, si X es un espacio de Banach separable, existe una función lineal, uno a uno y bicontinua

$$h: X \longrightarrow C[0,1] .$$

Como $C[0,1]$ es un espacio de Banach separable con base de Schauder, un resultado similar a los anteriores (modificando convenientemente la condición b)) puede ser obtenido para elementos aleatorios en un espacio de Banach, no necesariamente con base de Schauder.

En la siguiente proposición no se exige la idéntica distribución de los elementos aleatorios, pero sí una condición de compacidad débil y de acotación de momentos. Es una extensión al caso de pesos aleatorios de un resultado obtenido por Wei y Taylor en 1978 [52] .

<u>TEOREMA IV.3.</u>- Sea X un espacio de Banach separable con base de Schauder $\{b_i\}$. Sea $\{V_n\}$ una sucesión de elementos aleatorios en X, que es compacta débil, con $E\|V_n\|^r \leq \Gamma$, para todo $n = 1,2,\ldots$, para algún $r > 1$, y con $\Gamma > 0$. Supondremos que $EV_n = 0 \quad \forall n$.

Sea $\{A_{nk};\ k,n=1,2,\ldots\}$ una doble sucesión de variables aleatorias que verifican:

a) $\sum_{k=1}^{\infty} E|A_{nk}| \leq C$, $\forall\, n = 1,2,\ldots$, siendo C una constante positiva.

b) $\exists\, t_0 \in Z^+ \mid \forall\, t \geq t_0$, $t \in Z^+$, las variables aleatorias

$|A_{nk}|$ y $\|Q_t(V_k)\|$ son incorreladas para cada k y todo n.

c) $|A_{nk}|$ y $\|V_k\|$ son variables aleatorias incorreladas para cada k y todo n.

En tales condiciones, $\left|\sum_{k=1}^{\infty} A_{nk} f_i(V_k)\right| \longrightarrow 0$ en probabilidad para cada funcional coordenado f_i, si, y sólo si, se verifica que $\left\|\sum_{k=1}^{\infty} A_{nk} V_k\right\| \longrightarrow 0$ en probabilidad.

Demostración: Veamos previamente que tiene sentido hablar de $\sum_{k=1}^{\infty} A_{nk} V_k$.

Según las condiciones exigidas a $\{V_n\}$, existe una variable aleatoria V que domina uniformemente en probabilidad a todos los $\{V_n\}$, y por consiguiente:

$$E\|V_n\| \leq E|V| < \infty \quad , \quad \forall\, n = 1,2,\ldots$$

Según esto y la condición c), se tendrá:

$$E\left\|\sum_{k=1}^{\infty} A_{nk} V_k\right\| \leq E \sum_{k=1}^{\infty} |A_{nk}|\,\|V_k\| = \sum_{k=1}^{\infty} E|A_{nk}|\, E\|V_k\| \leq$$

$$\leq E|V| \sum_{k=1}^{\infty} E|A_{nk}| \leq C\, E|V| < \infty \quad , \quad \text{según a).}$$

Por tanto, $S_n = \sum_{k=1}^{\infty} A_{nk} V_k$ converge absolutamente con probabilidad 1.

Pasemos, pues, a la demostración propiamente dicha del teorema.

I) Dado que X es espacio de Banach, los funcionales coordenados f_i son continuos. Por tanto, la convergencia en la norma implica la convergencia en cada funcional coordenado.

Veamos, pues, la implicación contraria.

II) Sea $\varepsilon > 0$ dado. Podemos escribir:

$$S_n = \sum_{k=1}^{\infty} A_{nk}V_k = U_t\left(\sum_{k=1}^{\infty} A_{nk}V_k\right) + Q_t\left(\sum_{k=1}^{\infty} A_{nk}V_k\right)$$

siendo $t \in Z^+$, en las condiciones de b).

Se tendrá entonces, al igual que en el teorema IV.1. :

$$P\left[\left\|U_t\left(\sum_{k=1}^{\infty} A_{nk}V_k\right)\right\| > \frac{\varepsilon}{2}\right] = P\left[\left\|\sum_{i=1}^{t} f_i\left(\sum_{k=1}^{\infty} A_{nk}V_k\right)b_i\right\| > \frac{\varepsilon}{2}\right] \leq$$

$$\leq \sum_{i=1}^{t} P\left[\left|\sum_{k=1}^{\infty} A_{nk}f_i(V_k)\right| > \frac{\varepsilon}{2t\,\|b_i\|}\right] \longrightarrow 0 \quad \text{cuando } n \longrightarrow \infty ,$$

según las hipótesis del teorema.

Por otra parte, teniendo en cuenta la hipótesis de compacidad débil de $\{V_n\}$, podemos escoger un compacto $K \subset X$ tal que:

$$P\left[V_n \in K\right] \geq 1 - \left(\frac{\varepsilon^2}{8C(m+1)\Gamma^{1/r}}\right)^{r/(r-1)}$$

para todo $n = 1,2,\ldots$.

Escogeremos t de modo que cumpla no sólo la condición b), sino también que

$$\|Q_t(x)\| < \frac{\varepsilon^2}{8C} \qquad \forall\, x \in K.$$

Esta elección es posible según el lema 5 de [49] .

Se tiene entonces que, para cualquier $k = 1,2,\ldots$:

$$E\,\|Q_t(V_k)\| =$$

$$= E\left(\|Q_t(V_k)\|\left\{I\left[\|Q_t(V_k)\| \leq \frac{\varepsilon^2}{8C}\right] + I\left[\|Q_t(V_k)\| > \frac{\varepsilon^2}{8C}\right]\right\}\right) \leq$$

aplicando la desigualdad de Hölder

$$\leq \frac{\varepsilon^2}{8C} + E^{1/r}\|Q_t(V_k)\|^r \cdot E^{(r-1)/r}\, I\left[\|Q_t(V_k)\| > \frac{\varepsilon^2}{8C}\right] =$$

$$= \frac{\varepsilon^2}{8C} + E^{1/r}\|Q_t(V_k)\|^r \left(P\left[\|Q_t(V_k)\| > \frac{\varepsilon^2}{8C}\right]\right)^{(r-1)/r}$$

Ahora bien:

$$E\|Q_t(V_k)\|^r \leq E\|Q_t\|^r\|V_k\|^r \leq (m+1)^r \cdot \Gamma,$$

donde m es la constante básica.

$$P\left[\|Q_t(V_k)\| > \frac{\varepsilon^2}{8C}\right] \leq P\left[V_k \notin K\right] \leq \left(\frac{\varepsilon^2}{8C(m+1)\Gamma^{1/r}}\right)^{r/(r-1)}$$

Por tanto:

$$E\|Q_t(V_k)\| \leq \frac{\varepsilon^2}{8C} + (m+1)\cdot\Gamma^{1/r}\cdot\frac{\varepsilon^2}{8C(m+1)\Gamma^{1/r}} =$$

$$= \frac{\varepsilon^2}{8C} + \frac{\varepsilon^2}{8C} = \frac{\varepsilon^2}{4C}.$$

Según esto, se cumplirá que:

$$P\left[\left\|\sum_{k=1}^{\infty} A_{nk}Q_t(V_k)\right\| > \frac{\varepsilon}{2}\right] \leq P\left[\sum_{k=1}^{\infty}|A_{nk}|\,\|Q_t(V_k)\| > \frac{\varepsilon}{2}\right] \leq$$

$$\leq \frac{2}{\varepsilon} E\sum_{k=1}^{\infty}|A_{nk}|\,\|Q_t(V_k)\| = \frac{2}{\varepsilon}\sum_{k=1}^{\infty}E|A_{nk}|\,E\|Q_t(V_k)\| \leq$$

$$\leq \frac{2}{\varepsilon}\cdot\frac{\varepsilon^2}{4C}\cdot\sum_{k=1}^{\infty}E|A_{nk}| \leq \frac{2}{\varepsilon}\cdot\frac{\varepsilon^2}{4C}\cdot C = \frac{\varepsilon}{2}$$

Por tanto, podemos escoger $n_o \in Z^+$ de manera que para todo $n \geq n_o$ se cumplan las dos desigualdades siguientes:

$$P\left[\left\|U_t\left(\sum_{k=1}^{\infty}A_{nk}V_k\right)\right\| > \frac{\varepsilon}{2}\right] < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$P\left[\left\|Q_t\left(\sum_{k=1}^{\infty}A_{nk}V_k\right)\right\| > \frac{\varepsilon}{2}\right] < \frac{\varepsilon}{2}$$

lo cual implica que $S_n = \sum_{k=1}^{\infty} A_{nk}V_k \longrightarrow 0$ en probabilidad, en la topología de la norma. ●

Al igual que ocurría con el teorema IV.1., podemos obtener inmediatamente como corolario un resultado de equivalencia entre la convergencia en probabilidad en la topología de la norma y la topología débil.

<u>COROLARIO IV.4.</u>- Sea X un espacio de Banach separable con base de Schauder $\{b_i\}$. Sea $\{V_n\}$ una sucesión de elementos aleatorios en X, que es compacta débil, con $E\|V_n\|^r \leq \Gamma$, para todo $n = 1,2,\ldots$, para algún $r > 1$, y con $\Gamma > 0$. Además, sea $EV_n = 0 \quad \forall n$.

Sea $\{A_{nk};\ k,n=1,2,\ldots\}$ una doble sucesión de variables aleatorias que verifican:

a) $\sum_{k=1}^{\infty} E|A_{nk}| \leq C$, $\quad \forall n = 1,2,\ldots$, siendo C una constante positiva.

b) $\exists t_0 \in Z^+ \mid \forall t \geq t_0$, $t \in Z^+$, las variables aleatorias $|A_{nk}|$ y $\|Q_t(V_k)\|$ son incorreladas para cada k y todo n.

c) $|A_{nk}|$ y $\|V_k\|$ son variables aleatorias incorreladas para cada k y todo n.

Entonces, $\left|\sum_{k=1}^{\infty} A_{nk} f(V_k)\right| \longrightarrow 0$ en probabilidad para cada funcional lineal continuo $f \in X^*$, si, y sólo si, se verifica que $\left\|\sum_{k=1}^{\infty} A_{nk} V_k\right\| \longrightarrow 0$ en probabilidad.

En el caso de una matriz $\{A_{nk}\}$ triangular se obtiene, como es de fácil comprobación siguiendo la misma línea de demostración anterior, un resultado similar a un establecimiento de Wei y Taylor [52] para el caso de pesos constantes.

<u>COROLARIO IV.5.</u>- Sea X un espacio de Banach separable con base de Schauder $\{b_i\}$. Sea $\{V_n\}$ una sucesión de elementos aleatorios en X, con $EV_n = 0$ para todo $n = 1,2,\ldots$, y tales que

$$\lim_{t\to\infty}(\sup_k E\|Q_t(V_k)\|) = 0$$

Sea $\{A_{nk}; k=1,2,\ldots,n; n=1,2,\ldots\}$ una doble sucesión de variables aleatorias que verifican:

a) $\sum_{k=1}^{n} E|A_{nk}| \leq C$, $\forall\ n = 1,2,\ldots$, siendo C una constante positiva.

b) $\exists\ t_0 \in Z^+ \mid \forall\ t \geq t_0,\ t \in Z^+$, las variables aleatorias $|A_{nk}|$ y $\|Q_t(V_k)\|$ son incorreladas para cada k y todo n.

Entonces, $\left|\sum_{k=1}^{n} A_{nk} f(V_k)\right| \longrightarrow 0$ en probabilidad para cada funcional lineal continuo $f \in X^*$ si, y sólo si, se verifica que $\left\|\sum_{k=1}^{n} A_{nk} V_k\right\| \longrightarrow 0$ en probabilidad.

Se demuestra, asimismo, que el corolario IV.5. también sigue para cada funcional coordenado f_i.

Como poniamos de manifiesto anteriormente, los corolarios IV.4. y IV.5. son también válidos en el caso en que el espacio de Banach X no posee base de Schauder; en tal caso, las condiciones sobre $\|Q_t(V_k)\|$ vendrían referidas a una base de Schauder de un espacio de Banach donde X pueda ser inmerso isométricamente (por ejemplo, $C[0,1]$).

Nuestro siguiente resultado no exige la compacidad débil de la sucesión de elementos aleatorios, al mismo tiempo que la condición de acotación uniforme de momentos es exigida para algún momento de orden menor ó igual que 1.

TEOREMA IV.6.- Sea X un espacio de Banach separable con base de Schauder $\{b_i\}$. Sea $\{V_n\}$ una sucesión de elementos aleatorios en X tales que $E\|V_n\|^r \leq \Gamma$ para todo $n = 1,2,\ldots$, para algún $0 < r \leq 1$, y donde Γ es una constante positiva.

Sea $\{A_{nk};\ k,n=1,2,\ldots\}$ una doble sucesión de variables aleatorias tales que:

a) $\sum_{k=1}^{\infty} E|A_{nk}|^r < \infty \quad \forall\ n = 1,2,\ldots$, y

$$\sum_{k=1}^{\infty} E|A_{nk}|^r \longrightarrow 0 \quad \text{cuando } n \longrightarrow \infty$$

b) las variables aleatorias $|A_{nk}|^r$ y $\|V_k\|^r$ son incorreladas para cada k y para todo n.

Entonces, $\left|\sum_{k=1}^{\infty} A_{nk} f_i(V_k)\right| \longrightarrow 0$ en probabilidad para cada funcional coordenado f_i si, ysólo si, se verifica que

$\left\|\sum_{k=1}^{\infty} A_{nk} V_k\right\| \longrightarrow 0$ en probabilidad.

Demostración:

I) Por ser X espacio de Banach, los funcionales coordenados f_i son continuos. Por tanto, la convergencia en la topología de la norma implica la convergencia en cada funcional coordenado.

II) Denotando, como es habitual, por m a la constante básica, se tiene que

$$\forall\ t \in Z^+ : \qquad \|U_t\| \leq m \quad , \qquad \|Q_t\| \leq m + 1 \quad ,$$

donde, siguiendo la notación acostumbrada:

$$U_t(x) = \sum_{i=1}^{t} f_i(x) b_i \qquad Q_t(x) = x - U_t(x) \qquad \forall\, x \in X$$

Entonces, para cada $n = 1,2,\ldots$, y cualquier $t \in Z^+$:

$$\sum_{k=1}^{\infty} A_{nk} V_k = \sum_{k=1}^{\infty} A_{nk} U_t(V_k) + \sum_{k=1}^{\infty} A_{nk} Q_t(V_k) \; .$$

Sea $\varepsilon > 0$ dado. Para cada valor t fijado:

$$P\left[\left\| \sum_{k=1}^{\infty} A_{nk} U_t(V_k) \right\| > \frac{\varepsilon}{2} \right] = P\left[\left\| U_t\left(\sum_{k=1}^{\infty} A_{nk} V_k \right) \right\| > \frac{\varepsilon}{2} \right] =$$

$$= P\left[\left\| \sum_{i=1}^{t} f_i\left(\sum_{k=1}^{\infty} A_{nk} V_k \right) b_i \right\| > \frac{\varepsilon}{2} \right] \leq$$

$$\sum_{i=1}^{t} P\left[\left| \sum_{k=1}^{\infty} A_{nk} f_i(V_k) \right| > \frac{\varepsilon}{2t \| b_i \|} \right] \longrightarrow 0$$

en virtud de la hipótesis: $\left| \sum_{k=1}^{\infty} A_{nk} f_i(V_k) \right| \longrightarrow 0$ en probabilidad, y dado que el número de sumandos en el subíndice i es finito.

Por otra parte, tenemos:

$$P\left[\left\| \sum_{k=1}^{\infty} A_{nk} Q_t(V_k) \right\| > \frac{\varepsilon}{2} \right] \leq P\left[\sum_{k=1}^{\infty} |A_{nk}| \, \| Q_t(V_k) \| > \frac{\varepsilon}{2} \right] \leq$$

$$\leq P\left[\sum_{k=1}^{\infty} |A_{nk}| \, \| Q_t \| \, \| V_k \| > \frac{\varepsilon}{2} \right] \leq$$

$$\leq P\left[\sum_{k=1}^{\infty} |A_{nk}| \, \| V_k \| > \frac{\varepsilon}{2(m+1)} \right] \leq$$

$$\leq \frac{2^r (m+1)^r}{r} \cdot E\left(\sum_{k=1}^{\infty} |A_{nk}| \, \| V_k \| \right)^r .$$

Ahora bien, dado que $r < 1$, y en virtud de la incorrelación de $|A_{nk}|^r$ y $\| V_k \|^r$:

$$E\left(\sum_{k=1}^{\infty}|A_{nk}|\,\|V_k\|\right)^r \leq E\left(\sum_{k=1}^{\infty}|A_{nk}|^r\,\|V_k\|^r\right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} E|A_{nk}|^r\, E\|V_k\|^r \leq \Gamma \cdot \sum_{k=1}^{\infty} E|A_{nk}|^r .$$

Por tanto:

$$P\left[\left\|\sum_{k=1}^{\infty} A_{nk} Q_t(V_k)\right\| > \frac{\varepsilon}{2}\right] \leq \frac{2^r (m+1)^r\,\Gamma}{r} \sum_{k=1}^{\infty} E|A_{nk}|^r \longrightarrow 0$$

cuando $n \longrightarrow \infty$, según a).

Por consiguiente, queda probado que $S_n = \sum_{k=1}^{\infty} A_{nk} V_k \longrightarrow 0$ en probabilidad, cuando $n \longrightarrow \infty$, en la topología de la norma. ●

Al igual que ocurriera con resultados anteriores, se tiene inmediatamente como corolario un resultado de equivalencia entre la convergencia en probabilidad en la topología de la norma y la topología débil.

COROLARIO IV.7.- Sea X un espacio de Banach separable con base de Schauder $\{b_i\}$. Sea $\{V_n\}$ una sucesión de elementos aleatorios en X, con $E\|V_n\|^r \leq \Gamma$ para todo $n = 1,2,\ldots$, para algún $0 < r \leq 1$, y $\Gamma > 0$.

Sea $\{A_{nk};\ k,n=1,2,\ldots\}$ una doble sucesión de variables aleatorias tales que:

a) $\sum_{k=1}^{\infty} E|A_{nk}|^r < \infty \quad \forall\, n = 1,2,\ldots$, y

$$\sum_{k=1}^{\infty} E|A_{nk}|^r \longrightarrow 0 \quad \text{cuando } n \longrightarrow \infty$$

b) las variables aleatorias $|A_{nk}|^r$ y $\|V_k\|^r$ son incorreladas para cada k y para todo n.

Entonces, $\left|\sum_{k=1}^{\infty} A_{nk} f(V_k)\right| \longrightarrow 0$ en probabilidad para cada funcional lineal continuo $f \in X^*$ si, y sólo si, se verifica que $\left\|\sum_{k=1}^{\infty} A_{nk} V_k\right\| \longrightarrow 0$ en probabilidad.

Conforme poniamos de manifiesto en otras ocasiones, la existencia de base de Schauder puede ser omitida, utilizando la inmersión isométrica de X en un espacio de Banach separable con base de Schauder.

NOTA

La condición b) que figura en todos los resultados desde el teorema IV.1. hasta el corolario IV.5., puede ser, en bastantes casos, dificultosa de constatar en la práctica. Es por ello por lo que vamos a poner de manifiesto una condición suficiente para el cumplimiento de esta condición b), así como de la condición c) de los resultados comprendidos entre el teorema IV.1. y el corolario IV.4.; la comprobación de la verificación ó no de esta condición será mucho más factible en la práctica.

Definición: Sea $A: \Omega \longrightarrow R$ una variable aleatoria; sea $V: \Omega \longrightarrow X$ un elemento aleatorio en un espacio lineal normado separable X. Sean $\mathcal{B}_R$ y $\mathcal{B}_X$ las correspondientes σ-álgebras de Borel.

Diremos que A y V son independientes si

$$P\left[A \in B,\ V \in B'\right] = P\left[A \in B\right] \cdot P\left[V \in B'\right] \qquad \forall B \in \mathcal{B}_R, \quad \forall B' \in \mathcal{B}_X$$

TEOREMA.- Sea $\{A_{nk};\ k,n=1,2,\dots\}$ una doble sucesión de variables aleatorias, y sea $\{V_n\}$ una sucesión de elementos aleatorios en X, espacio de Banach separable con norma $\| \ \|$ y con base de Schauder.

Si A_{nk} y V_k son independientes, en el sentido de la definición anterior, para cada k y para todo n, se verifica que:

a) $|A_{nk}|$ y $\|V_k\|$ son variables aleatorias independientes para cada k y para todo n.

b) Cualquiera que sea $t \in Z^+$: $|A_{nk}|$ y $\|Q_t(V_k)\|$ son variables aleatorias independientes para cada k y para todo n.

Demostración: Es inmediata teniendo en cuenta la continuidad de

$$Q_t: X \longrightarrow X \quad \text{y de} \quad \| \ \| : X \longrightarrow R .$$

Notemos también que con la definición dada de independencia entre la variable aleatoria A y el elemento aleatorio V se tiene que si A y V son independientes, entonces $EAV = EA \cdot EV$, donde la esperanza de los elementos aleatorios viene dada en el sentido de Pettis.

CAPITULO V

ALGUNAS APLICACIONES

En este apartado pretendemos dejar constancia de relaciones existentes entre el campo objeto de nuestro estudio y otros amplios campos de investigación.

Así, dado que el área de estudio de elementos aleatorios definidos en espacios de funciones ó en espacios de sucesiones está íntimamente relacionada con la teoría de procesos estocásticos, investigamos algunas aplicaciones en este campo.

También tratamos, bajo el punto de vista del tema de esta memoria, algunos problemas de regresión (univariante y multivariante).

Esa relación entre los distintos campos, que mencionábamos anteriormente, la pondremos de manifiesto bajo dos formas:

a) aplicando resultados obtenidos en los capítulos anteriores a algunos problemas particulares en las áreas citadas

b) exponiendo y comentando brevemente resultados publicados recientemente sobre la cuestión, y que son objeto de gran interés.

Dado que, evidentemente, este capítulo no puede ser redactado con ánimo exhaustivo, la elección de esas dos grandes áreas no conlleva la limitación de posibles aplicaciones solamente en ellas.

Pueden ser estudiadas aplicaciones y adaptaciones de las técnicas y resultados de convergencia de sumas aleatorias, aleatoriamente ponderadas, a problemas tanto de control de calidad como de estimación, decisión,... .

1.- APLICACIONES EN TEORIA DE PROCESOS ESTOCASTICOS

En esta sección obtendremos unos resultados de convergencia para dobles sucesiones de variables aleatorias que admiten una cierta descomposición, y que constituyen una extensión de un resultado de Padgett y Taylor (1973) [32].

1.1.- Sea $\{V_n\}$ una sucesión de procesos estocásticos de parámetro discreto; sea $\{1,2,...\}$ el espacio de parámetros de cada uno de los procesos.

Supongamos que, para cada i y cada j, V_i y V_j tienen las mismas distribuciones finitodimensionales.

Sea $\lim_{m\to\infty} V_n(m) = 0$ con probabilidad 1, para cada n, y sea $E\|V_1\| = E\left[\sup_m |V_1(m)|\right] < \infty$.

Entonces, $\{V_n\}$ puede ser considerado como una sucesión de elementos aleatorios en c_o, espacio de todas las sucesiones reales convergentes a cero, dotado de la norma del supremo:

$$\|x\| = \sup_n |x_n| \qquad \forall\, x = (x_1, x_2, ..., x_n, ...) \in c_o$$

Con esta norma, c_o es un espacio de Banach separable con base de Schauder $\{\delta_n;\ n=1,2,...\}$, donde:

$\delta_1 = (1,0,0,...)$

$\delta_2 = (0,1,0,...)$, y así sucesivamente

Además, por tener las mismas distribuciones finitodimensionales, estos elementos aleatorios $\{V_n\}$ están idénticamente distribuidos.

Por otra parte, existe $EV_1 = (EV_1(1), EV_1(2), \ldots)$, por ser $E\|V_1\| < \infty$.

Sea $\{A_{nk};\ k,n=1,2,\ldots\}$ una doble sucesión de variables aleatorias tales que:

a) $\sum_{k=1}^{\infty} E|A_{nk}| \leq C$, $\forall\ n = 1,2,\ldots$, siendo C una constante positiva.

b) $\exists\ t_o \in Z^+ \mid \forall\ t \geq t_o\ ,\ t \in Z^+$, las variables aleatorias $|A_{nk}|$ y $\|Q_t(V_k)\| = \sup_{m > t} |V_k(m)|$ son incorreladas para cada k y para todo n.

c) $|A_{nk}|$ y $\|V_k\|$ son variables aleatorias incorreladas para cada k y todo n.

Supongamos además que $\sum_{k=1}^{\infty} A_{nk}(V_k(m) - EV_1(m)) \longrightarrow 0$ en probabilidad para cada m.

Según estas condiciones, el teorema IV.1. establece que

$$P\left[\left\|\sum_{k=1}^{\infty} A_{nk}(V_k - EV_1)\right\| > \varepsilon\right] =$$

$$= P\left[\sup_m \left|\sum_{k=1}^{\infty} A_{nk}(V_k(m) - EV_1(m))\right| > \varepsilon\right] \longrightarrow 0$$

para cualquier $\varepsilon > 0$.

Es decir, se obtiene la convergencia uniforme, en probabilidad, a cero de $\sum_{k=1}^{\infty} A_{nk}(V_k(m) - EV_1(m))$.

En definitiva, hemos obtenido un resultado de convergencia uniforme para una doble sucesión de variables aleatorias. Sumarizado, puede enunciarse así:

<u>TEOREMA V.1.</u>- Sea $\{H_{nm};\ n,m=1,2,\ldots\}$ una doble sucesión de variables aleatorias, de modo que para cada n y cada m puede efectuarse la siguiente descomposición:

$$H_{nm} = \sum_{k=1}^{\infty} A_{nk}(V_{km} - EV_{1m})$$

donde $\{A_{nk};\ k,n=1,2,\ldots\}$ y $\{V_{km};\ k,m=1,2,\ldots\}$ son dobles sucesiones de variables aleatorias verificando las siguientes condiciones:

A1) $\sum_{k=1}^{\infty} E|A_{nk}| \leq C$, $\forall\ n = 1,2,\ldots$, siendo C una constante positiva.

A2) $\exists\ t_o \in Z^+ \mid \forall\ t \geq t_o,\ t \in Z^+$, las variables aleatorias $|A_{nk}|$ y $\sup_{m > t} |V_{km}|$ son incorreladas para cada k y para cada n.

A3) $|A_{nk}|$ y $\sup_{m} |V_{km}|$ son variables aleatorias incorreladas para cada k y cada n.

B1) $\lim_{m \to \infty} V_{km} = 0$ con probabilidad 1, para cada k.

B2) $\sum_{k=1}^{\infty} A_{nk}(V_{km} - EV_{1m}) \longrightarrow 0$ en probabilidad, para cada m.

B3) $E\left[\sup_{m} |V_{1m}|\right] < \infty$

B4) Para cualesquiera i y j, los procesos estocásticos $\{V_{im};\ m=1,2,\ldots\}$ y $\{V_{i+j,m};\ m=1,2,\ldots\}$ tienen las mismas distribuciones finitodimensionales.

En tales condiciones, $H_{nm} \longrightarrow 0$ en probabilidad uniformemente en m, en el sentido de que para cualquier $\varepsilon > 0$ dado:

$$P\left[\sup_{m} |H_{nm}| > \varepsilon\right] \longrightarrow 0 \quad \text{cuando } n \longrightarrow \infty .$$

1.2.- Sea $\{V_n;\ n=1,2,\dots\}$ una sucesión de procesos estocásticos, cada uno de los cuales tiene $\{1,2,\dots\}$ como espacio de parámetros.

Supongamos que para cada i y cada j, los procesos V_i y V_j tienen las mismas distribuciones finitodimensionales.

Sea $\sum_{m=1}^{\infty} E|V_1(m)| < \infty$, y supongamos que para algún p tal que $1 \leq p < \infty$, se verifica que:

$\sum_{m=1}^{\infty} |V_n(m)|^p < \infty$, con probabilidad 1, para cada n.

Entonces, $\{V_n;\ n=1,2,\dots\}$ puede ser considerada como una sucesión de elementos aleatorios en l^p ($1 \leq p < \infty$), espacio de las sucesiones reales $x = (x_1,x_2,\dots)$ con $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty$.

El espacio l^p, con la norma definida por:

$$||x|| = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p\right)^{1/p} , \qquad \forall\, x = (x_1,x_2,\dots) \in l^p$$

es un espacio de Banach separable con base de Schauder que denotamos por $\{\delta_n;\ n=1,2,\dots\}$, donde:

$\delta_1 = (1,0,0,\dots)$

$\delta_2 = (0,1,0,\dots)$, y así sucesivamente.

Estos elementos aleatorios $\{V_n\}$ son idénticamente distribuidos, por tener las mismas distribuciones finitodimensionales.

Además, existe $EV_1 = (EV_1(1),EV_1(2),\dots)$, ya que

$$\sum_{m=1}^{\infty} E|V_1(m)| < \infty \implies E\,||V_1|| = E\left[\sum_{m=1}^{\infty} |V_1(m)|^p\right]^{1/p} < \infty$$

Sea $\{A_{nk};\ k,n=1,2,\dots\}$ una doble sucesión de variables aleatorias que verifican:

a) $\sum_{k=1}^{\infty} E|A_{nk}| \leq C$, $\forall n = 1,2,\ldots$, siendo C una constante positiva.

b) $\exists t_0 \in Z^+ \mid \forall t \geq t_0$, $t \in Z^+$, las variables aleatorias $|A_{nk}|$ y $\|Q_t(V_k)\| = \left[\sum_{m=t+1}^{\infty} |V_k(m)|^p\right]^{1/p}$ son incorreladas para cada k y cada n.

c) $|A_{nk}|$ y $\|V_k\|$ son variables aleatorias incorreladas para cada k y cada n.

Supongamos, además, que $\sum_{k=1}^{\infty} A_{nk}(V_k(m) - EV_1(m)) \longrightarrow 0$ en probabilidad para cada m.

Entonces, una aplicación del teorema IV.1. nos indica que

$$P\left[\left\|\sum_{k=1}^{\infty} A_{nk}(V_k - EV_1)\right\| > \varepsilon\right] =$$

$$= P\left[\sum_{m=1}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{\infty}|A_{nk}(V_k(m) - EV_1(m))|^p\right)^{1/p} > \varepsilon\right] \longrightarrow 0$$

cuando $n \longrightarrow \infty$, para cualquier $\varepsilon > 0$ dado.

Según esto, se puede obtener el siguiente teorema de convergencia para dobles sucesiones de variables aleatorias:

<u>TEOREMA V.2.-</u> Sea $\{H_{nm};\ n,m=1,2,\ldots\}$ una doble sucesión de variables aleatorias, tales que para cada n y cada m admiten una descomposición del tipo:

$$H_{nm} = \sum_{k=1}^{\infty} A_{nk}(V_{km} - EV_{1m})$$

donde $\{A_{nk};\ k,n=1,2,\ldots\}$ y $\{V_{km};\ k,m=1,2,\ldots\}$ son dobles sucesiones de variables aleatorias tales que para algún $1 \leq p < \infty$:

A1) $\sum_{k=1}^{\infty} E|A_{nk}| \leq C$, $\forall\, n = 1,2,\ldots$, siendo C una constante positiva.

A2) $\exists\, t_o \in Z^+ \mid \forall\, t \geq t_o$, $t \in Z^+$, las variables aleatorias $|A_{nk}|$ y $\left[\sum_{m=t+1}^{\infty} |V_{km}|^p\right]^{1/p}$ son incorreladas para cada k y para cada n.

A3) $|A_{nk}|$ y $\left[\sum_{m=1}^{\infty} |V_{km}|^p\right]^{1/p}$ son variables aleatorias incorreladas para cada k y cada n.

B1) $\sum_{m=1}^{\infty} E\,|V_{1m}| < \infty$

B2) $\sum_{m=1}^{\infty} |V_{km}|^p < \infty$, con probabilidad 1, para cada k.

B3) Para cualesquiera i y j, los procesos estocásticos $\{V_{im};\ m=1,2,\ldots\}$ y $\{V_{i+j,m};\ m=1,2,\ldots\}$ tienen las mismas distribuciones finitodimensionales.

B4) $\sum_{k=1}^{\infty} A_{nk}(V_{km} - EV_{1m}) \longrightarrow 0$, en probabilidad, para cada m.

En tales condiciones, se verifica que, para cualquier número $\varepsilon > 0$:

$$P\left[\sum_{m=1}^{\infty} |H_{nm}|^p > \varepsilon\right] \longrightarrow 0$$

cuando $n \longrightarrow \infty$.

2.- APLICACIONES EN REGRESION

2.1.- En el caso del modelo de regresión lineal simple, dado un valor X_k de la variable X, el valor correspondiente de la variable Y vendrá expresado por:

$$Y_k = \alpha + \beta X_k + u_k \qquad k = 1,2,\ldots,n$$

donde u_k son las perturbaciones, y donde α y β son los parámetros desconocidos (a estimar).

Haremos las siguientes suposiciones básicas:

a) $\{X_k\}$ son variables aleatorias, que pueden, ó no, depender de $\{u_k\}$.

b) $\{u_k\}$ son variables aleatorias independientes, idénticamente distribuidas, con $Eu_k = 0$ y $Eu_k^2 = \sigma^2 < \infty$, para cada k, donde σ^2 será, en general, desconocido.

Si denotamos por $\hat{\alpha}$ y $\hat{\beta}$ respectivos estimadores de α y β , la línea de regresión estimada será:

$$\hat{Y} = \hat{\alpha} + \hat{\beta} X$$

Aplicando el método de los mínimos cuadrados para obtener $\hat{\alpha}$ y $\hat{\beta}$, y denotando por $\hat{Y}_k = \hat{Y}(X_k)$, habremos de hacer mínima la expresión

$$\sum_{k=1}^{n}(Y_k - \hat{Y}_k)^2 = \sum_{k=1}^{n}(Y_k - \hat{\alpha} - \hat{\beta} X_k)^2 ,$$

lo cual implica que ha de ser:

$$\frac{\partial}{\partial \hat{\alpha}} \sum_{k=1}^{n}(Y_k - \hat{Y}_k)^2 = 0 \Longrightarrow \sum_{k=1}^{n}(Y_k - \hat{\alpha} - \hat{\beta} X_k) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial \hat{\beta}} \sum_{k=1}^{n}(Y_k - \hat{Y}_k)^2 = 0 \Longrightarrow \sum_{k=1}^{n}X_k(Y_k - \hat{\alpha} - \hat{\beta} X_k) = 0$$

Este sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, $\hat{\alpha}$ y $\hat{\beta}$, posee como solución:

$$\hat{\beta} = \frac{\sum_{k=1}^{m} x_k y_k}{\sum_{k=1}^{n} x_k^2} \quad , \qquad \hat{\alpha} = \bar{Y} - \hat{\beta}\,\bar{X}$$

donde: $x_k = X_k - \bar{X}$, $y_k = Y_k - \bar{Y}$,

con: $$\bar{X} = \frac{\sum_{k=1}^{n} X_k}{n} \quad , \qquad \bar{Y} = \frac{\sum_{k=1}^{n} Y_k}{n}$$

Vamos a fijarnos en el estimador $\hat{\beta}$ del coeficiente de regresión β. Se puede escribir:

$$\hat{\beta} = \frac{\sum_{k=1}^{m} x_k y_k}{\sum_{k=1}^{n} x_k^2} = \frac{\sum_{k=1}^{n} x_k (Y_k - \bar{Y})}{\sum_{k=1}^{m} x_k^2} =$$

$$= \frac{\sum_{k=1}^{m} x_k Y_k}{\sum_{k=1}^{n} x_k^2} - \frac{\bar{Y} \sum_{k=1}^{n} x_k}{\sum_{k=1}^{m} x_k^2} = \sum_{k=1}^{n} \omega_k Y_k \quad , \text{ donde } \omega_k = \frac{x_k}{\sum_{k=1}^{n} x_k^2}$$

ya que $\sum_{k=1}^{m} x_k = \sum_{k=1}^{n} (X_k - \bar{X}) = 0$.

Dado que, según la ecuación general del modelo lineal utilizado, es

$$Y_k = \alpha + \beta X_k + u_k$$

se puede escribir:

$$\hat{\beta} = \sum_{k=1}^{n} \omega_k (\alpha + \beta X_k + u_k) =$$

$$= \alpha \sum_{k=1}^{n} \omega_k + \beta \sum_{k=1}^{n} \omega_k X_k + \sum_{k=1}^{n} \omega_k u_k$$

Ahora bien:

$$\sum_{k=1}^{n} \omega_k = \frac{\sum_{k=1}^{n} x_k}{\sum_{k=1}^{n} x_k^2} = \frac{\sum_{k=1}^{n} (X_k - \bar{X})}{\sum_{k=1}^{n} x_k^2} = 0$$

$$\sum_{k=1}^{n} \omega_k X_k = \frac{\sum_{k=1}^{m} (X_k - \bar{X}) X_k}{\sum_{k=1}^{n} (X_k - \bar{X})^2} = \frac{\sum_{k=1}^{n} X_k^2 - n\bar{X}^2}{\sum_{k=1}^{n} (X_k - \bar{X})^2} = 1$$

Por consiguiente, podemos escribir:

$$\hat{\beta} = \beta + \sum_{k=1}^{m} \omega_k u_k = \beta + \sum_{k=1}^{n} \frac{(X_k - \bar{X})}{\sum_{k=1}^{n} (X_k - \bar{X})^2} u_k$$

Por lo cual, la convergencia a cero de

$$\sum_{k=1}^{n} A_{nk} u_k = \sum_{k=1}^{m} \frac{(X_k - \bar{X})}{\sum_{j=1}^{n} (X_j - \bar{X})^2} u_k$$

con probabilidad 1, nos dará la convergencia fuerte del estimador $\hat{\beta}$ al parámetro β.

Según el teorema I.1., una condición suficiente para la consistencia fuerte de $\hat{\beta}$ es que se verifique:

$$\max_{1 \leq k \leq n} \frac{|X_k - \bar{X}|}{\sum_{j=1}^{n} (X_j - \bar{X})^2} = \Theta (n^{-\gamma}) \quad \text{para algún } \gamma > 1 ,$$

con probabilidad 1.

2.2.- Recientemente, Anderson y J. B. Taylor [4] y Christopeit y Helmes [16] han obtenido y aplicado resultados de convergencia de sumas aleatoriamente ponderadas en el caso de problemas de regresión multivariante.

En este sentido, Anderson y Taylor estudian el modelo

$$y_n = B'x_n + u_n \qquad n = 1, 2, \ldots \tag{1}$$

donde B es una matriz p x m de parámetros, x_n un vector de p componentes, y u_n un vector de m componentes (el vector correspondiente a las perturbaciones).

Ambos autores lo utilizan como un modelo de regresión lineal en el caso de muestreo con repetición.

Consideran que el vector x_n es aleatorio, y estudian la consistencia fuerte del estimador de B obtenido por el método de los mínimos cuadrados.

Si se toman muestras de tamaño N, tal estimador mínimo-cuadrático de B viene dado por:

$$\hat{B}_N = \left(\sum_{n=1}^{N} x_n x_n' \right)^{-1} \left(\sum_{n=1}^{N} x_n y_n' \right)$$

No vamos a detallar el desarrollo efectuado por los autores; para ello remitimos a su trabajo. Lo que sí queremos poner de manifiesto es que una ventaja de sus resultados, y que los autores evidencian en su artículo, es que x_n puede ser generado por una estructura estocástica muy general que no necesita ser especificada, con tal que se satisfagan una serie de condiciones establecidas para $A_N = \sum_{n=1}^{N} x_n x_n'$, y éstas serán satisfechas si $N^{-1}A_N$ converge a una matriz no singular con probabilidad 1, lo cual es un requisito que se exige a menudo para la consistencia débil en modelos de regresión con regresores fijos.

Por último, hagamos notar que el modelo (1) abarca una serie de modelos interesantes que pueden ser también englobados en este estudio.

Así, si se pone $x_n = y_{n-1}$, se tiene un modelo autorregresivo de primer orden, mientras que si se pone x_n como función de x_m e y_m, para $m < n$, se tendría un modelo de diseño secuencial ó de control secuencial.

Christopeit y Helmes consideran el modelo de regresión lineal:

$$y(N) = X(N)\beta + u(N) \qquad N = 1,2,\ldots \tag{2}$$

$$u(N) = (\varepsilon(1), \varepsilon(2), \ldots, \varepsilon(N))'$$

donde

$$X(N) = (x^{(N)}(1), x^{(N)}(2), \ldots, x^{(N)}(N))'$$

con cada $x^{(N)}(n)$ $(n = 1,2,\ldots,N)$ una doble sucesión de vectores aleatorios $k \times 1$; y donde β es el vector $k \times 1$ de parámetros.

Tal modelo es empleado en el caso de muestreo sin repetición, es decir, en el caso en que al aumentar el tamaño muestral, no sólo se añaden nuevas observaciones a las ya efectuadas, sino que éstas también pueden ser modificadas. Es una situación que aparece cuando los términos de error son autocorrelados.

Siendo N el tamaño muestral utilizado, el método ordinario de los mínimos cuadrados da un error muestral para el estimador $\hat{\beta}(N)$ de β, que es:

$$\hat{\beta}(N) - \beta = \left[X(N)'X(N)\right]^{-1}X(N)'u(N) \tag{3}$$

por lo cual, los autores, al estudiar la consistencia fuerte de tal estimador, investigan la convergencia a 0 con probabilidad 1 del segundo miembro de (3), lo que les lleva al estudio de la convergencia a 0, con probabilidad 1, de sumas ponderadas:

$$Z(N) = \sum_{n=1}^{N} a^{(N)}(n) \; \varepsilon(n) \qquad\qquad N = 1,2,\ldots$$

donde tanto la doble sucesión $\{a^{(N)}(n)\}$ como la sucesión $\{\varepsilon(n)\}$ están constituidas por variables aleatorias.

Tampoco vamos a transcribir los resultados a que llegan los autores; para ello remitimos a su trabajo. Sólo indicaremos que la demostración de su prihcipal resultado la efectúan transformando el problema planteado en otro de convergencia de ciertas integrales estocásticas en el sentido de Ito.

Posteriormente aplicaneste resultado a demostrar la consistencia fuerte del estimador mínimo-cuadrático generalizado de β en el modelo de fegresión lineal (2), haciendo constar los autores que un ejemplo de aplicación importante donde se satisface el conjunto de hipótesis requerido lo suministran los modelos que surgen de procesos autorregresivos cuyo proceso de error $\{\varepsilon(n)\}$ es generado, a su vez, por un esquema autorregresivo con perturbaciones independientes y con distribución N(0,1), siempre que los polinomios característicos de ambos procesos tengan sus raices en el disco unidad.

BIBLIOGRAFIA

[1] ALF, C. (1975).-

-Rates of convergence for the laws of large numbers for independent Banach-valued random variables.

-J. Multivariate Analysis, 5, 322 - 329.

[2] ALF, C. (1976).-

-Convergence of weighted sums of independent Banach-valued random variables.

-Bull. Inst. Math. Acad. Sinica, 4, 301 - 305.

[3] ANDERSON, T. W. // TAYLOR, J. B. (1976).-

-Strong consistency of least squares estimates in normal linear regression.

-Annals of Statistics, 4, 788 - 790.

[4] ANDERSON, T. W. // TAYLOR, J. B. (1979).-

-Strong consistency of least squares estimates in dynamic models.

-Annals of Statistics, 7, 484 - 489.

[5] BADRIKIAN, A. (1976).-

-Prolégomènes au calcul des probabilités dans les Banach.

-Ecole d'Eté de Probabilités de Saint Flour V - 1975. Lecture Notes in Mathematics, Nr 539, 1 - 166.

[6] BAUM, L. E. // KATZ, M. (1963).-
-Convergence rates in the law of large numbers.
-Trans. Amer. Math. Soc., 120, 108 - 123.

[7] BECK, A. // WARREN, P. (1974).-
-Strong laws of large numbers for weakly orthogonal sequences of Banach space-valued random variables.
-Annals of Probability, 2, 918 - 925.

[8] BECK, A. // GIESY, D. P. // WARREN, P. (1975).-
-Recent developments in the theory of strong laws of large numbers for vector-valued random variables.
-Theory of Probability and Appl., XX, 127 - 134.

[9] BECK, A. (1976).-
-Cancellation in Banach spaces.
-Proc. 1st. int. Conf. Probab. Banach Spaces, Oberwolfach, 1975. Lecture Notes in Mathematics, Nr 526, 13 - 20.

[10] BILLINGSLEY, P. (1968).-
-CONVERGENCE OF PROBABILITY MEASURES.
-Wiley. New York.

[11] BOZORGNIA, A. // RAO, M. B. (1979).-
-Limit theorems for weighted sums of random elements in separable Banach spaces.
-J. Multivariate Analysis, 9, 428 - 433.

[12] BROWN, B. M. // EAGLESON, G. K. // FISHER, N. I. (1973).-
-On the central limit theorem for sums with random coefficients.
-Z. Wahr. Verw. Geb., 27, 171 - 178.

[13] BULDYGIN, V. V. // PIDSUHA, N. A. (1978).-
-Comparison theorems for random series in Banach spaces and some schemes of summation.
-Teor. Verojatn. Primen., 23, 27 - 41.

[14] CHOW, Y. S. (1966).-
-Some convergence theorems for independent random variables.
-Annals of Mathematical Statistics, 37, 1482 - 1493.

[15] CHOW, Y. S. // LAI, T. L. (1973).-
-Limiting behavior of weighted sums of independent random variables.
-Annals of Probability, 1, 810 - 824.

[16] CHRISTOPEIT, N. // HELMES, K. (1979).-
-A convergence theorem for random linear combinations of independent normal random variables.
-Annals of Statistics, 7, 795 - 800.

[17] CHUNG, K. L. (1974).-
-A COURSE IN PROBABILITY THEORY.
-Academic Press. New York.

[18] DAFFER, P. Z. // TAYLOR, R. L. (1979).-
-Laws of large numbers for D[0,1].
-Annals of Probability, 7, 85 - 95.

[19] DAY, M. M. (1973).-
-NORMED LINEAR SPACES.
-Springer - Verlag. Berlin. Heidelberg.

[20] FORTET, R. // MOURIER, E. (1955).-
-Les fonctions aléatoires comme élements aléatoires dans les espaces de Banach.
-Studia Math., XV - 1, 62 - 79.

[21] FRANCK, W. E. // HANSON, D. L. (1966).-
-Some results giving rates of convergence in the law of large numbers for weighted sums of independent random variables.
-Trans. Amer. Math. Soc., 124, 347 - 359.

[22] HANSON, D. L. // WRIGHT, F. T. (1969).-
-Some more results on rates of convergence in the law of large numbers for weighted sums of independent random variables.
-Trans. Amer. Math. Soc., 141, 443 - 464.

[23] HOFFMANN - JØRGENSEN, J. // PISIER, G. (1976).-
-The law of large numbers and the central limit theorem in Banach spaces.
-Annals of Probability, 4, 587 - 599.

[24] HOFFMANN - JØRGENSEN, J. (1977).-
-Probability in Banach spaces.
-Ecole d'Eté de Probabilités de Saint Flour VI - 1976.
Lecture Notes in Mathematics, Nr 598, 1 - 186.

[25] JAMISON, B. // OREY, S. // PRUITT, W. (1965).-
-Convergence of weighted averages of independent random variables.
-Z. Wahr. Verw. Geb., 4, 40 - 44.

[26] KUELBS, J. (editor) (1978).-
-PROBABILITY ON BANACH SPACES.
-Advances in Probability and related topics, Vol. 4.
Dekker. New York.

[27] KUELBS, J. // ZINN, J. (1979).-
-Some stability results for vector valued random variables.
-Annals of Probability, 7, 75 - 84.

[28] LAI, T. L. (1974).-
-Control charts based on weighted sums.
-Annals of Statistics, 2, 134 - 147.

[29] LAI, T. L. (1974).-
-Convergence rates in the strong law of large numbers for random variables taking values in Banach spaces.
-Bull. Inst. Math. Acad. Sinica, 2, 67 - 85.

[30] LOEVE, M. (1963).-
-PROBABILITY THEORY.
-Van Nostrand. Princeton.

[31] LUSTERNIK, L. A. // SOBOLEV, V. J. (1974).-
-ELEMENTS OF FUNCTIONAL ANALYSIS.
-Halsted Press.

[32] PADGETT, W. J. // TAYLOR, R. L. (1973).-
-LAWS OF LARGE NUMBERS FOR NORMED LINEAR SPACES AND CERTAIN FRECHET SPACES.
-Lecture Notes in Mathematics, Nr 360, Springer - Verlag. Berlin.

[33] PADGETT, W. J. // TAYLOR, R.L. (1974).-
-Convergence of weighted sums of random elements in Banach spaces and Fréchet spaces.
-Bull. Inst. Math. Acad. Sinica, 2, 389 - 400.

[34] PADGETT, W. J. // TAYLOR, R. L. (1976).-
-Almost sure convergence of weighted sums of random elements in Banach spaces.
-Proc. 1st. int. Conf. Probab. Banach Spaces, Oberwolfach, 1975. Lecture Notes in Mathematics, Nr 526, 187 - 202.

[35] PADGETT, W. J. // TAYLOR, R. L. (1979).-
-Convergence of weighted sums of independent random variables and an extension to Banach space-valued random variables.
-Int. J. Math. math. Sci., 2, 309 - 323.

[36] PARTHASARATHY, K. R. (1967).-
-PROBABILITY MEASURES ON METRIC SPACES.
-Academic Press. New York. London.

[37] PETROV, V. V. (1975).-
-SUMS OF INDEPENDENT RANDOM VARIABLES.
-Springer - Verlag. Berlin.

[38] PRUITT, W. (1966).-
-Summability of independent random variables.
-Journal Math. and Mech., 15, 769 - 776.

[39] ROHATGI, V. K. (1969).-
-On convergence rates in the law of large numbers for weighted sums of independent random variables.
-Proc. Amer. Math. Soc., 20, Nr 2, 570 - 574.

[40] ROHATGI, V. K. (1971).-
-Convergence of weighted sums of independent random variables.
-Proc. Cambridge Philos. Soc., 69, 305 - 307.

[41] STOUT, W. F. (1968).-
-Some results on the complete and almost sure convergence of linear combinations of independent random variables and martingale differences.
-Annals of Mathematical Statistics, 39, 1549 - 1562.

[42] STOUT, W. F. (1974).-
-ALMOST SURE CONVERGENCE.
-Academic Press. New York.

[43] TAYLOR, R. L. (1972).-
-Weak laws of large numbers in normed linear spaces.
-Annals of Mathematical Statistics, 43, 1267 - 1274.

[44] TAYLOR, R. L. // PADGETT, W. J. (1974).-
-Some laws of large numbers for normed linear spaces.
-Sankhya, Ser. A, 36, 359 - 368.

[45] TAYLOR, R. L. // PADGETT, W. J. (1975).-
-Stochastic convergence of weighted sums in normed linear spaces.
-J. Multivariate Analysis, 5, 434 - 450.

[46] TAYLOR, R. L. // PADGETT, W. J. (1976).-
-Weak laws of large numbers in Banach spaces and their extensions.
-Proc. 1st. int. Conf. Probab. Banach Spaces, Oberwolfach, 1975. Lecture Notes in Mathematics, Nr 526, 227 - 242.

[47] TAYLOR, R. L. // DAFFER, P. Z. (1978).-
-Some weak laws of large numbers for probability measures on vector spaces.
-Vector Spaces Measures Appl. I, Proc. Conf. Dublin, 1977. Lecture Notes in Mathematics, Nr 644, 411 - 417.

[48] TAYLOR, R. L. (1978).-
-STOCHASTIC CONVERGENCE OF WEIGHTED SUMS OF RANDOM ELEMENTS IN LINEAR SPACES.
-Lecture Notes in Mathematics, Nr 672, Springer - Verlag. Berlin.

[49] TAYLOR, R. L. // WEI, D. (1979).-
-Laws of large numbers for tight random elements in normed linear spaces.
-Annals of Probability, 7, 150 - 155.

[50] TAYLOR, R. L. // DAFFER, P. Z. (1980).-
-Convergence of weighted sums of random elements in D[0,1].
-J. Multivariate Analysis, 10, 95 - 106.

[51] TOMKINS, R. J. (1975).-
-Iterated logarithm results for weighted averages of martingale difference sequences.
-Annals of Probability, 3, 307 - 314.

[52] WEI, D. // TAYLOR, R. L. (1978).-
-Convergence of weighted sums of tight random elements.
-J. Multivariate Analysis, 8, 282 - 294.

[53] WEI, D. // TAYLOR, R. L. (1978).-
-Geometrical consideration of weighted sums convergence and random weighting.
-Bull. Inst. Math. Acad. Sinica, 6, 49 - 59.

[54] WOYCZYNSKI, W. A. (1974).-
-Strong laws of large numbers in certain linear spaces.
-Ann. Inst. Fourier, 24, Nr 2, 205 - 223.

[55] WOYCZYNSKI, W. A. (1980).-
-Tail probabilities of sums of random vectors in Banach spaces, and related mixed norms.
-Measure Theory. Oberwolfach, 1979. Lecture Notes in Mathematics, Nr 794, 455 - 469.

[56] WRIGHT, F. T. (1972).-
-Rates of convergence for weighted sums of random variables.
-Annals of Mathematical Statistics, 43, 1687 - 1691.

[57] WRIGHT, F. T. // PLATT, R. D. // ROBERTSON, T. (1977).-
-A strong law for weighted averages of independent identically distributed random variables with arbitrary heavy tails.
-Annals of Probability, 5, 586 - 590.

UNIVERSIDAD DE SEVILLA

FACULTAD DE CIENCIAS MATEMATICAS

Reunido el Tribunal integrado por los abajo firmantes en el día de la fecha, para juzgar la Tesis Doctoral de D. Manuel Hilario Ordóñez Cabrera titulada "Condiciones probabilísticas para la convergencia de sumas aleatoriamente ponderadas de elementos aleatorios en espacios lineales normados" acordó otorgarle la calificación de Sobresaliente cum laude

Sevilla, 7 de Julio 1.981

El Vocal, El Vocal, El Vocal,

El Presidente, El Secretario, El Doctorado